



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

# Exponenciació de cardinals

---

Autor: Joaquim Vives Fornt

Director: Dr. Juan Carlos Martínez Alonso

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 15 de gener de 2025



## Abstract

The main aim of this work is to show some of the fundamental theorems on cardinal exponentiation in ZFC, particularly Silver's theorem on singular cardinals of uncountable cofinality. Firstly, we show the theory of infinite cardinal sums and products, together with elemental theorems on the gimel function and on how to compute  $\kappa^\lambda$  for arbitrary  $\kappa, \lambda$  cardinals. We also present some notions of infinitary combinatorics: we introduce the notion of the club filter and stationary sets, in order to prove Fodor's theorem. Finally we use these results to prove Silver's theorem in detail.

## Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és demostrar alguns teoremes fonamentals d'exponenciació de cardinals a ZFC, en particular el teorema de Silver, que parla de cardinals singulars de cofinalitat no numerable. Hom presenta productes i sumes infinites i la funció gimel, i donem algun teorema general sobre l'exponenciació de dos cardinals qualssevol  $\kappa^\lambda$ . Al treball s'hi troben també algunes nocions de combinatòria infinita: hom introdueix la noció de filtre club i de conjunt estacionari, amb l'objectiu de demostrar, entre d'altres resultats, el teorema de Fodor. Finalment, fent ús d'aquests resultats, demostrem de manera detallada el teorema de Silver.

## Agraïments

Vull agrair la dedicació, acompanyament i correccions del Dr. Juan Carlos Martínez Alonso, que ha tutoritzat el treball al llarg del semestre i sense el qual no hagués estat possible la seva confecció ni plantejament. Vull fer palès també el meu agraïment al Dr. Enrique Casanovas Ruiz-Fornells, professor de la facultat, qui m'inicià en la teoria de conjunts i em posà en contacte amb qui ha estat el tutor del treball.

# Índex

|                                                         |           |
|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducció: motivació i metodologia</b>             | <b>1</b>  |
| <b>1 Ordinals i cardinals: definicions bàsiques</b>     | <b>3</b>  |
| 1.1 Axiomes de ZFC . . . . .                            | 3         |
| 1.2 Ordinals . . . . .                                  | 4         |
| 1.3 Cardinals . . . . .                                 | 6         |
| 1.4 Aritmètica de cardinals: definicions . . . . .      | 7         |
| 1.5 Cofinalitat . . . . .                               | 9         |
| <b>2 Teoremes fonamentals d'aritmètica de cardinals</b> | <b>11</b> |
| 2.1 Sumes i productes infinits . . . . .                | 11        |
| 2.2 La funció gimel i la funció continu . . . . .       | 16        |
| 2.3 Exponenciació cardinal . . . . .                    | 18        |
| <b>3 Combinatòria infinita</b>                          | <b>22</b> |
| 3.1 Filtres i ideals i ultrafiltres . . . . .           | 22        |
| 3.2 El filtre club i conjunts estacionaris . . . . .    | 25        |
| 3.3 Arbres . . . . .                                    | 30        |
| <b>4 El teorema de Silver</b>                           | <b>31</b> |
| <b>5 Conclusions</b>                                    | <b>37</b> |
| <b>Referències bibliogràfiques</b>                      | <b>38</b> |



## Introducció: motivació i metodologia

Hi ha diverses vies que condueixen a l'aparició i la necessitat de definir i conèixer els nombres cardinals. La idea més intuïtiva o primerenca, si es vol, és que un cardinal és la mida d'un conjunt donat. Ometrem en general remarques històriques detallades sobre l'aparició de la teoria de cardinals i de la teoria conjunts de moderna, sovint motivada per l'estudi de cardinals.

El primer conjunt infinit més petit són els nombres naturals. És senzill de veure que els nombres reals no són bijectables amb els naturals, i doncs que tenen una mida més grossa. Si es vol,  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ . En llenguatge de la teoria d'ordinals, notarem  $\omega = \aleph_0$ , i escriurem  $\omega < 2^\omega$ . Cantor demostrà de fet que, en general,

$$2^\kappa > \kappa \tag{1}$$

per a qualsevol mida  $\kappa$  d'un conjunt. Escau concebre  $\kappa$  com un conjunt qualsevol d'una mida concreta que desitgem.  $2^\kappa$  es refereix, a hores d'ara, a la mida del conjunt de subconjunts de  $\kappa$ .

La primera pregunta intuïtiva o raonable que hom pot fer-se és si hi ha algun conjunt (o subconjunt dels nombres reals) que tingui cardinalitat entre  $\omega$  i  $2^\omega$ . Que un tal conjunt no existeix és el que és coneix com la *hipòtesis del continu* (CH). El teorema de Cantor motiva la següent generalització:

$$2^\kappa = \kappa^+ \tag{2}$$

$\kappa^+$  denota la mida immediata més grossa que  $\kappa$ . (la mida més petita no bijectable amb  $\kappa$ . Ja estem avançant que sempre n'hi ha alguna, i que sempre en podem trobar la més petita). La *hipòtesi generalitzada del continu* (GCH) diu que (2) és cert per a qualsevol mida  $\kappa$  infinita.

Dona el cas que Gödel als anys trenta veié que GCH és consistent amb els axiomes de ZFC. Això vol dir, a grans trets, que hom pot fer matemàtiques sense contradiccions tant si s'assumeix GCH com si no.

És raonable preguntar-se com canvia la mida d'un conjunt en fer operacions bàsiques com la unió, el producte cartesià, o prenent el conjunt de subconjunts, o les funcions que van d'un conjunt en un altre: suma, producte i exponenciació de cardinals respectivament. La suma i el producte de cardinals són trivials, en el sentit que no generen conjunts infinits de mida més grossa que els que ja es tenien. L'exponenciació és significativament més interessant, o misteriosa, com hom pot copsar amb el problema del continu.

L'objectiu d'aquest treball és mostrar els teoremes fonamentals d'exponenciació de cardinals, i més en particular el teorema de Silver. No parlem ni de mètodes més sofisticats que han dut a multitud de resultats (com el mètode de *forcing*) ni mencionem en general temes de consistència. Hem omès també discussions axiomàtiques, senzillament es treballa a ZFC.

En quant a la sistemàtica, el capítol primer dona les definicions bàsiques i conceptes sobre els quals es treballa: ordinals, cardinals, i cofinalitat. L'objectiu del capítol és de presentar els conceptes i remarcar-ne allò que és important, no és pas el de donar una descripció detallada de les nocions i resultats. Si hom vol veure descripcions més precises i amb demostracions completes donem referències bibliogràfiques per a fer-ho, tot i que són continguts que es troben en qualsevol referència de teoria de conjunts elemental.

En el capítol segon donem ja resultats i eines rellevants pel que fa a l'exponenciació de cardinals. Hom podria començar pel segon capítol en cas d'estar familiaritzat amb els conceptes que es presenten al primer.

El tercer capítol són nocions de combinatòria infinita. Introduïm conceptes rellevants en teoria de conjunts i teoria de cardinals, com el filtre *club*, conjunts estacionaris, i arbres. En general, tots són eines imprescindibles per a la demostració que donem del teorema de Silver, al quart capítol. Hem intentat fer una demostració detallada i amb implicacions clares, tot usant els resultats dels capítols 2 i 3.

Per als teoremes del capítol 2 i per a la demostració del teorema de Silver hem usat la font [3], que en fa un guió clar i més o menys detallat. Hom ha procurat de completar els arguments que manquen al llibre. Per al guió del capítol 1 i part del capítol 3 hem usat essencialment [5].

Tot i no haver seguit el guió que proposen les referències [2] i [8], volem destacar-ne llur idoneïtat per a iniciar-se en la teoria de conjunts. Cobreixen part del capítol 2 i del capítol 3. Han estat usades sovint atesa la seva claredat i completesa a l'hora d'explicar i presentar els conceptes. Hem intentat mencionar-les en casos de particular importància.

És de justícia citar també els apunts del professor Dr. Enrique Casanovas [1] de l'assignatura *teoría de conjuntos elemental* de la facultat de matemàtiques i informàtica de la Universitat de Barcelona, que exposen de manera molt clara i detallada conceptes elementals de la teoria axiomàtica de conjunts.

Hom pot trobar les referències esmentades al final del treball.

# 1 Ordinals i cardinals: definicions bàsiques

Donem en aquesta primera secció les nocions bàsiques d'ordinal i cardinal i presentem la noció de cofinalitat, tot donant-ne algun primer resultat. Donem per completesa una formulació dels axiomes de Zermelo-Fraenkel amb elecció (ZFC d'ara endavant) que s'usaran. Hem usat essencialment les fonts [5] i [3].

## 1.1 Axiomes de ZFC

La teoria axiomàtica de conjunts es desenvolupa en el càlcul de predicats de primer ordre. Els objectes de la teoria de ZFC són conjunts. El llenguatge que s'usa inclou dos predicats binaris: la igualtat  $=$  i la relació de pertinença  $\in$ . Les fórmules de la teoria es construeixen a partir de les fórmules atòmiques

$$x \in y, \quad x = y$$

i a partir de les connectives habituals:

$$\neg\varphi, \quad \varphi \wedge \phi, \quad \varphi \vee \phi, \quad \phi \rightarrow \varphi, \quad \phi \longleftrightarrow \varphi$$

i amb els quantificadors de primer ordre  $\forall$  i  $\exists$ . És a dir, donada  $\varphi$  fórmula del llenguatge de la teoria de conjunts hom pot construir les fórmules

$$\forall x\varphi, \quad \exists x\varphi$$

Una *variable lliure* en una fórmula és una variable que no està quantificada per cap quantificador. Per exemple:  $\varphi = \forall x(x = y \rightarrow y = x)$  té  $x$  com a variable *lligada* perquè està quantificada pel quantificador  $\forall$ , i  $y$  n'és una variable lliure perquè no està sota el rang de cap quantificador. Per a fer explícites les variables lliures d'una fórmula escriurem  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ .

Els axiomes de la teoria de ZFC són els següents:

I. *Extensionalitat*:

$$X = Y \longleftrightarrow \forall z(z \in X \longleftrightarrow z \in Y)$$

II. *Parell*: Per a qualssevol conjunts  $a, b$ , hi ha un conjunt  $X = \{a, b\}$ , tal que

$$c \in X \longleftrightarrow (c = a \vee c = b)$$

III. *Separació*: Per a cada fórmula de primer ordre  $\varphi$  i cada conjunt  $X$ , hi ha un conjunt  $Y = \{x \mid x \in X \wedge \varphi(x)\} = \{x \in X \mid \varphi(x)\}$  tal que

$$x \in Y \longleftrightarrow x \in X \wedge \varphi(x)$$

IV. *Unió*: Per a cada conjunt  $X$  hi ha un conjunt  $Y = \bigcup X$  tal que

$$z \in Y \longleftrightarrow \exists w(w \in X \wedge z \in w)$$

V. *Potència*: Per a cada conjunt  $X$  hi ha un conjunt  $\mathcal{P}(X)$  tal que

$$Y \in \mathcal{P}(X) \longleftrightarrow \forall z(z \in Y \rightarrow z \in X)$$

VI. *Infinit*: Existeix un conjunt infinit.

VII. *Reemplaçament*: Per a cada fórmula  $\varphi(x, y)$  tal que  $\forall x(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, \tilde{y}) \rightarrow y = \tilde{y})$  i per a cada conjunt  $X$ , existeix un conjunt  $Y$  tal que

$$y \in Y \longleftrightarrow \exists x(x \in X \wedge \varphi(x, y))$$

VIII. *Elecció*: Per a cada conjunt  $X$  no buit, existeix una funció d'elecció. És a dir, hi ha una funció  $\mathcal{F} : X \rightarrow \bigcup X$ , tal que per a cada  $x \in X$ ,  $\mathcal{F}(x) \in x$ .

*Remarca 1.1* (Classes pròpies). Per a cada fórmula  $\varphi$ , direm que  $C = \{x \mid \varphi(x)\}$  és una classe, i en essència vol dir que un conjunt  $x$  pertany a  $C$  si se satisfà  $\varphi(x)$ . A ZFC les classes són abreviacions de fórmules de primer ordre, com per exemple  $\varphi = x = x$ .

Cal fer notar que la condició de pertànyer a un conjunt donat de l'axioma de separació és necessària. Si hom en prescindís,  $R = \{x \mid x \notin x\}$  seria un conjunt. Però és clar que

$$R \in R \longleftrightarrow R \notin R$$

cosa que és una clara contradicció.  $R$  doncs és una classe que no és un conjunt. Parlarem en tals casos de *classe pròpia*. Aquest argument es coneix com la paradoxa de Russell.

La classe de tots els conjunts, o *classe universal*,  $V = \{x \mid x = x\}$ , és una classe pròpia. Si fos un conjunt tindriem el següent:

$$R = \{x \mid x \notin x \wedge x \in V\}$$

cosa que voldria dir que  $R$  és un conjunt, per separació, i no és el cas.

Parlarem de *classe funcional* per a referir-nos a funcions definides en classes. Per exemple  $\mathcal{F} : V \rightarrow V$ .

L'axioma de reemplaçament afirma que, donada una classe funcional  $\mathcal{F}$  i un conjunt  $A$  qualsevol, aleshores hi ha un altre conjunt  $B$  tal que  $B = \mathcal{F}[A]$ .

## 1.2 Ordinals

Donem algunes definicions elementals dels conjunts ordenats i presentem la noció d'ordinal. L'objectiu no és pas construir els ordinals rigorosament, sinó definir-los i donar les propietats elementals. Se segueix essencialment l'exposició de la secció setena del capítol 1 de [5]. Per a una exposició més detallada pot consultar-se el capítol 6 de [2].

**Definició 1.1** (Ordre estricte i bon ordre). Un ordre estricte, o un conjunt ordenat, és un parell  $(A, <)$ , on  $A$  és un conjunt i  $<$  és una relació transitiva i irreflexiva. Si, a més a més, per a qualssevol  $a, b \in A$  diferents, o bé  $a < b$  o bé  $b < a$ , diem que l'ordre estricte és *total*.

Un *bon ordre* o conjunt *ben ordenat* és un ordre estricte  $(A, <)$  tal que tot subconjunt d' $A$  té element mínim.

**Definició 1.2** (Segment inicial). Donat un conjunt ordenat  $(A, <)$ , un subconjunt propi  $S \subsetneq A$  és un segment inicial propi de  $A$  si per a cada  $x \in S$  i  $a \in A$ ,  $a < x \rightarrow a \in S$ .

Es pot veure que un conjunt ben ordenat mai no és isomorf a un segment inicial propi seu. A més a més, si dos conjunts ben ordenats són isomorfs, alshores només hi ha un únic isomorfisme entre ells. De tot plegat se'n dedueix el següent teorema:

**Teorema 1.1.** *Donats dos conjunts ben ordenats  $(A, <_A)$ , i  $(B, <_B)$ , aleshores es dona un i només un dels següents casos:*

- a)  $A$  i  $B$  són isomorfs,
- b)  $A$  és isomorf a un segment inicial propi de  $B$ ,
- c)  $B$  és isomorf a un segment inicial propi de  $A$ .

Aquestes nocions i propietats rígides dels conjunts ben ordenats permeten la definició dels ordinals, que presentem a continuació.

**Definició 1.3** (Conjunt transitiu). Un conjunt  $X$  és *transitiu* si per a tot  $x \in X$ ,

$$y \in x \rightarrow y \in X$$

**Definició 1.4** (Ordinal). Un *ordinal*  $\alpha$  és un conjunt transitiu i ben ordenat per la pertinença.

En general, per parlar d'isomorfismes entre ordinals ometrem l'ordre i esciurem  $\alpha \cong \beta$ , en comptes de  $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta)$ .

El resultat rellevant que perseguim és que els ordinals permeten etiquetar els bons ordres; en el sentit que per a cada conjunt ben ordenat hi ha un únic ordinal que n'és isomorf.

Es pot veure que

$$\alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$$

i això implica, entre d'altres, el següent teorema:

**Teorema 1.2.** 1. Si  $\alpha$  és un ordinal i  $\beta \in \alpha$ , aleshores  $\beta$  és un ordinal i és segment inicial propi de  $\alpha$ .

2. Per a qualssevol ordinals  $\alpha, \beta$  es dona un i només un dels següents tres casos: o bé  $\alpha = \beta$ , o bé  $\alpha \in \beta$  o bé  $\beta \in \alpha$ .

3. Si  $\alpha$  i  $\beta$  són ordinals i  $\alpha \cong \beta$ , aleshores  $\alpha = \beta$ ,

4. Si  $\alpha \in \beta$  i  $\beta \in \gamma$ , llavors  $\alpha \in \gamma$ .

5. Per a qualsevol conjunt no buit d'ordinals  $C$ , hi ha algun  $\alpha \in C$  tal que per a cada  $\beta \in C$  amb  $\beta \neq \alpha$ ,  $\alpha \in \beta$ .

Per a la demostració vegeu el teorema 7.3 del capítol 1 de [5] o més detalladament a [2].

Cal fer notar que del teorema 1.2 se segueix que tot conjunt d'ordinals està ben ordenat per la pertinença. I en particular, tot conjunt transitiu d'ordinals és un ordinal. D'aquí se segueix que la classe dels ordinals  $On = \{\alpha \mid \alpha \text{ ordinal}\}$  és una classe pròpia.

**Definició 1.5.** Per a cada ordinal  $\alpha$ , definim l'ordinal successor  $\alpha + 1 = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ . Així mateix, diem que un ordinal  $\alpha$  és successor si hi ha un ordinal  $\beta$  tal que  $\alpha = \beta + 1$ . En cas contrari i si és no buit, diem que es tracta d'un ordinal límit.

La demostració del següent teorema està feta amb detall a [2], a la secció 6.3.

**Teorema 1.3.** Per a cada conjunt ben ordenat  $(W, <)$ , hi ha un únic ordinal  $(\alpha, \in_\alpha)$  tal que  $W \cong \alpha$ . Es diu que aquest ordinal és l'ordre tipus del conjunt  $A$ , i el notarem o.t.  $(W, <)$ .

**Proposició 1.4.** Si  $X$  és un conjunt d'ordinals no buit, aleshores  $\sup(X) = \bigcup X$  i  $\min(X) = \bigcap X$ .

Ara definim informalment els nombres naturals. Per a veure'n una descripció rigorosa vegi's el capítol 1 de [3] o la secció 7 del capítol 1 de [5].

Notarem des d'un inici  $0 = \emptyset, 1 = S(0), 2 = S(1)$ , etc.

**Definició 1.6.**  $\alpha$  és un nombre natural si per a cada  $\beta \leq \alpha$ , o bé  $\beta = \emptyset$  o bé  $\beta$  és successor.

**Definició 1.7.** Definim  $\omega = \{n \mid n \text{ natural}\}$  el conjunt dels nombres naturals. Els naturals són en efecte un conjunt, i són el menor conjunt infinit.

Finalment enunciem els teoremes d'inducció i recursió transfinita d'ordinals. Que de fet generalitzen la noció d'inducció dels naturals. De (5) del teorema 1.2, es té fàcilment el teorema d'inducció. Per a veure'n, però, una exposició i demostracions detallades vegi's la novena secció del primer capítol de [5] o la secció quarta del capítol sis de [2].

**Teorema 1.5** (Inducció transfinita). *Sigui  $C \subseteq On$  una classe. Si  $C \neq \emptyset$ , aleshores  $C$  té element mínim.*

**Teorema 1.6** (Recursió transfinita). *Sigui  $F : V \rightarrow V$  una classe funcional. Aleshores hi ha una única classe funcional  $G : On \rightarrow V$  tal que per a tot  $\alpha$ ,*

$$G(\alpha) = F(G \upharpoonright \alpha)$$

### 1.3 Cardinals

Per a  $A, B$  conjunts qualssevol, posarem  $A \preceq B$  si hi ha alguna aplicació injectiva  $f : A \rightarrow B$ . Posarem  $A \sim B$  si hi ha alguna aplicació bijectiva  $f : A \rightarrow B$ , i escriurem  $A \prec B$  si  $A \preceq B$  i no hi ha cap aplicació bijectiva de  $A$  en  $B$ . Notarem també

$$B^A = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$$

Enunciem primer dos teoremes coneguts de què es farà ús en aquesta secció. La demostració d'ambdós es pot trobar feta amb detall a [7]. Cal fer notar que la demostració del teorema 1.7 no necessita de l'axioma de l'elecció.

**Teorema 1.7** (Schröder-Bernstein). *Per a qualssevol conjunts  $A$  i  $B$ , si  $A \preceq B$  i  $B \preceq A$ , aleshores  $A \sim B$ .*

**Teorema 1.8** (Cantor). *Sigui  $A$  conjunt no buit. Aleshores  $A \prec \mathcal{P}(A)$ .*

És senzill veure que  $\mathcal{P}(A) \sim 2^A$ . Es té doncs que  $A \prec 2^A$ .

**Definició 1.8** (Cardinal). Un cardinal és un ordinal que no és bijectable amb cap ordinal menor que ell.

**Definició 1.9** (Cardinal d'un conjunt). Per a cada conjunt  $A$ , definim el seu cardinal,  $|A|$ , com l'únic cardinal  $\alpha$  tal que  $A \sim \alpha$ .

Fem notar que un ordinal  $\alpha$  és cardinal si i només si  $\alpha = |\alpha|$ . En general, es té  $A \sim |A|$ . Podem afirmar també que  $\omega$  és cardinal i que cada natural  $n \in \omega$  ho és, atès que no són bijectables amb naturals més petits.

D'ara endavant usarem  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  per a denotar ordinals, i  $\kappa, \lambda, \mu$  per a referir-nos a cardinals.

**Proposició 1.9.** Per a qualssevol cardinals  $\kappa, \lambda$ :  $\kappa < \lambda \iff \kappa \preceq \lambda$ .

Del fet que tot ordinal infinit  $\alpha$  és bijectable amb  $\alpha + 1$ , es té:

**Proposició 1.10.** Tot cardinal infinit és un ordinal límit.

**Proposició 1.11.** 1. Si  $X$  és un conjunt de cardinals, aleshores  $\sup X$  és un cardinal.

2. La classe  $\text{Card} = \{\kappa \mid \kappa \text{ és cardinal}\}$  és una classe pròpia.

Se'n pot trobar una prova al lema 3.4 de [3].

És senzill veure que hom pot construir cardinals tan grans com vulgui; és a dir, que per a cada ordinal  $\alpha$  hi ha algun cardinal  $\kappa > \alpha$ . Això és clar amb el teorema de Cantor (teorema 1.8), atès que  $\alpha < |\mathcal{P}(\alpha)|$ .

Per a  $\alpha$  ordinal, posarem  $\alpha^+$  el mínim cardinal estrictament més gran que  $\alpha$ , i parlarem del *cardinal següent*.

**Definició 1.10.** Un cardinal  $\kappa$  és successor si existeix un ordinal  $\alpha$  tal que  $\kappa = \alpha^+$ , i és límit si és no successor i no buit.

**Definició 1.11** (Funció àlef). Definim la classe funcional *àlef* per recursió transfinita sobre  $On$  com següeix:

1.  $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$ ,
2.  $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ ,
3.  $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup_{\delta < \alpha} \aleph_\delta$ , per a  $\alpha$  ordinal límit.

La funció àlef dona una enumeració monòtona creixent dels cardinals infinits. Usarem  $\omega_\alpha$  per a fer referència al tipus d'ordre o a l'ordinal, i  $\aleph_\alpha$  per a fer referència al cardinal.

## 1.4 Aritmètica de cardinals: definicions

Definim ara les operacions bàsiques de cardinals, i fem notar de bell antuvi que suma i producte són poc rellevants.

**Definició 1.12.** Per a  $\kappa$  i  $\lambda$  ordinals, definim:

1.  $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$

$$2. \kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

És senzill veure que la suma de cardinals és commutativa, associativa, té el conjunt buit com element neutre, i que respecta l'ordre de cardinals: si  $\lambda \leq \lambda'$  i  $\kappa \leq \kappa'$ , llavors  $\lambda + \kappa \leq \lambda' + \kappa'$ . La multiplicació de cardinals és també commutativa, associativa, i es compleix  $0 \cdot \kappa = 0$ . 1 n'és l'element neutre, i el producte respecta l'ordre en el mateix sentit que la suma i distribueix amb la suma.

**Teorema 1.12.** *Per a cada cardinal infinit  $\kappa$ ,  $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ .*

Donem una idea de la demostració. Per a veure'n una de més detallada vegi's el lema 4.22 de [8].

*Demostració.* Per inducció transfinita sobre  $\kappa$ . Assumim que això es dona per ordinals menors. Per a  $\alpha < \kappa$ , es té que  $|\alpha \times \alpha| \sim \alpha < \kappa$ . Definim el següent bon ordre  $\triangleleft$  a  $\kappa \times \kappa$ :

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \triangleleft (\gamma, \delta) &\longleftrightarrow \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \\ &\vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \alpha < \gamma) \\ &\vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \beta < \delta) \end{aligned}$$

Noti's que cada  $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$  no té més predecessors, a  $\triangleleft$ , que

$$|(\max\{\alpha, \beta\} + 1) \times (\max\{\alpha, \beta\} + 1)| < \kappa$$

Per força doncs  $o.t.(\kappa \times \kappa, \triangleleft) \leq \kappa$ , i per tant  $|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$ . Com que  $|\kappa \times \kappa| \geq \kappa$ , tenim  $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ .  $\square$

Ara, per aquest teorema i tot fent ús del fet que  $2\kappa = \kappa + \kappa$ , es té el següent corol·lari:

**Corol·lari 1.13.** *Per a  $\kappa, \lambda$  cardinals infinits,  $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ .*

Així, la suma i el producte de cardinals són trivials en el sentit que no generen nous cardinals. No és el cas de l'exponenciació, que presentem tot seguit.

**Definició 1.13.** Per a  $\kappa, \lambda$  cardinals, definim:  $\kappa^\lambda = |\{f \mid f : \lambda \rightarrow \kappa\}|$

Del fet que per a  $A, B, C$  conjunts disjunts,  $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$ , i  $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$ , es té:

**Lema 1.14.** *Per a  $\kappa, \lambda$  i  $\nu$  cardinals,*

$$1. (\kappa^\lambda)^\nu = \kappa^{\lambda \cdot \nu}$$

$$2. \kappa^{\lambda \cdot \nu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\nu$$

Tampoc no és difícil de comprovar que per a  $\kappa \leq \lambda$ ,  $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$ , i que per a  $0 < \lambda \leq \mu$ ,  $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$ .

*Remarca 1.2* (Hipòtesi del continu). Fins ara hem vist que  $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ , i que  $\aleph_1 > \aleph_0$  és el següent cardinal de  $\aleph_0$ . Aleshores, o bé  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , o bé  $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ . La primera possibilitat és la coneguda *hipòtesi del continu*. La conjectura més en general és

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

coneguda com la *hipòtesi generalitzada del continu*. Si s'assumeix, el càlcul de  $\kappa^\lambda$  resulta relativament immediat tot fent ús de la noció que presentem a la següent secció. L'objectiu del treball, però, és desgranar teoremes fora de la hipòtesis del continu, que és en general la posició que s'adopta en l'estudi de cardinals.

## 1.5 Cofinalitat

Finalitzem el capítol presentant la noció de cofinalitat d'un ordinal límit, que dona peu a teoremes al respecte de l'exponenciació de cardinals. S'ha seguit essencialment l'exposició que es fa a [5]. Se'n fa una exposició més detallada a [8].

**Definició 1.14** (Cofinalitat). Sigui  $\alpha$  un ordinal límit. Definim la *cofinalitat* de  $\alpha$ , que notarem  $cf(\alpha)$ , com el mínim ordinal  $\beta$  tal que per a una certa funció  $f : \beta \rightarrow \alpha$ ,

$$\sup(f[\beta]) = \alpha$$

Observi's que  $\sup(f[\beta]) = \alpha$  és equivalent a dir que  $f[\beta]$  és no fitat a  $\alpha$ . Direm que una tal  $f$  és *cofinal* en  $\alpha$ . Sovint notarem  $f(\gamma) = \alpha_\gamma$  per a  $\gamma < \beta$ , i direm que  $\{\alpha_\gamma\}_{\gamma < \beta}$  és una successió cofinal en  $\alpha$ .

Fem notar que  $cf(\lambda) \leq |\lambda| \leq \lambda$ , atès una bijecció qualsevol  $|\lambda| \rightarrow \lambda$  té conjunt imatge no fitat.

**Definició 1.15.** Un ordinal límit,  $\alpha$ , és *regular* si  $cf(\alpha) = \alpha$ , i és *singular* si  $cf(\alpha) < \alpha$ .

**Proposició 1.15.** Per a cada ordinal límit  $\beta$ , hi ha una funció  $f : cf(\beta) \rightarrow \beta$  cofinal en  $\beta$  que és estrictament creixent.

*Demostració.* Sigui  $g : cf(\beta) \rightarrow \beta$  cofinal. Defineixi's  $f$  per recursió com següeix:

$$f(\eta) = \max\{g(\eta), \sup_{\nu < \eta} (f(\nu) + 1)\}$$

□

Ara, per aquest lema i per la definició de cofinalitat, tenim el següent:

**Proposició 1.16.** Si  $\alpha$  és un ordinal límit i  $f : \alpha \rightarrow \beta$  és una funció cofinal estrictament creixent, aleshores  $cf(\alpha) = cf(\beta)$ .

**Corol·lari 1.17.** Si  $\alpha$  és un ordinal límit, aleshores  $cf(\alpha)$  és un cardinal regular.

Fem notar que  $cf(\omega) = \omega$ .

**Teorema 1.18.** Per a cada  $\kappa$  cardinal infinit,  $\kappa^+$  és regular.

*Demostració.* Suposem que hi ha una  $f : \alpha \rightarrow \kappa^+$  cofinal en  $\kappa^+$  amb  $\alpha < \kappa^+$ . Aleshores és clar que

$$\kappa^+ = \bigcup \{f(\zeta) \mid \zeta < \alpha\}$$

Amb l'axioma de l'elecció no és difícil veure que una unió indexada per un ordinal menor o igual que  $\kappa$  de conjunts menors o iguals que  $\kappa$  té cardinal menor o igual que  $\kappa$ . Això junt amb el corol·lari 1.13 implica  $\kappa^+ \sim \kappa$ , cosa que és una contradicció.  $\square$

De la proposició 1.16 el següent és clar:

**Proposició 1.19.** *Per a cada  $\alpha$  ordinal límit,  $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$*

Acabem la secció donant el teorema de König, primer resultat que dona alguna informació al respecte de l'exponenciació cardinal.

**Teorema 1.20** (König). *Si  $\lambda$  és un cardinal infinit, aleshores*

$$\lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$$

*Demostració.* Suposem que el conjunt  $F = \{f \mid f : cf(\kappa) \rightarrow \kappa\}$  fos de cardinal  $\kappa$ . Aleshores podem posar  $F = \{f_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ . Veurem que hi ha una funció  $f : cf(\kappa) \rightarrow \kappa$  que no és d'aquest conjunt. Posem  $\kappa = \sup_{\xi < cf(\kappa)} \alpha_\xi$  per alguna successió cofinal en  $\kappa$ . Per a cada  $\xi < cf(\kappa)$ , definim  $f(\xi)$  com el mínim  $\gamma$  tal que  $\gamma \neq f_\alpha(\xi)$  per a tot  $\alpha < \alpha_\xi$ . Un tal  $\gamma$  existeix, atès que

$$|\{f_\alpha(\xi) \mid \alpha < \alpha_\xi\}| \leq |\alpha_\xi| < \kappa$$

I doncs  $f \neq f_\alpha$  per a cada  $\alpha < \kappa$ .

$\square$

**Corol·lari 1.21.** *Per a cada  $\kappa$  cardinal infinit es té*

$$cf(2^\kappa) > \kappa$$

*Demostració.* Aplicant el teorema de König amb  $\lambda = 2^\kappa$  tenim  $(2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} > 2^\kappa$ . Ara, si fos  $cf(2^\kappa) \leq \kappa$ , tindríem, tot fent ús del teorema 1.12:

$$2^\kappa = 2^{\kappa \cdot cf(2^\kappa)} = (2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} > 2^\kappa$$

cosa que és una contradicció.

$\square$

## 2 Teoremes fonamentals d'aritmètica de cardinals

Presentem en aquest segon capítol uns primers teoremes sobre l'exponenciació cardinal. Per a fer-ho introduïm primer els productes i sumes infinites de cardinals. Seguim essencialment l'exposició que es fa al capítol 5 de [3].

Donem un parell de resultats que ja podem exposar amb les nocions presentades fins ara.

**Proposició 2.1.** *Si  $\lambda$  és cardinal infinit i  $2 \leq \kappa \leq \lambda$ , aleshores  $\kappa^\lambda = 2^\lambda$*

*Demostració.*

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^\lambda$$

□

**Corol·lari 2.2.** *Per a tot  $\lambda$  cardinal infinit,  $2^\lambda = \lambda^\lambda$ .*

Ara bé, si  $\lambda < \kappa$ , aleshores el valor de  $\kappa^\lambda$  no és tan clar. Si  $2^\lambda \geq \kappa$ , aleshores  $\kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$ , i doncs  $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ . Ara bé, si  $2^\lambda < \kappa$ , aleshores, pel corol·lari darrer, tenim:

$$\kappa \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$$

El cas interessant és doncs quan  $\lambda < \kappa$  i  $2^\lambda < \kappa$ , on únicament podem afirmar a altures d'ara que  $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq 2^\kappa$ . Sabem també, pel teorema de König (teorema 1.20), que si  $\lambda \geq cf(\kappa)$ , aleshores

$$\kappa < \kappa^\lambda$$

El teorema cabdal del capítol és el teorema d'exponenciació cardinal, que ja podem enunciar i que permet calcular de manera inductiva el valor de  $\kappa^\lambda$  per a qualssevol  $\kappa, \lambda$  cardinals infinits.

**Teorema 2.3** (Teorema d'exponenciació cardinal). *Sigui  $\lambda$  cardinal infinit. Aleshores, per a qualsevol cardinal infinit  $\kappa$ , hom pot calcular  $\kappa^\lambda$  com següeix:*

1. *Si  $\kappa \leq \lambda$ , aleshores  $\kappa^\lambda = 2^\lambda$*
2. *Si hi ha algun  $\mu < \kappa$  tal que  $\mu^\lambda \geq \kappa$ , aleshores  $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$*
3. *Si  $\kappa > \lambda$  i  $\mu^\lambda < \kappa$  per a tot  $\mu < \kappa$ , aleshores*
  - (a) *si  $cf(\kappa) > \lambda$ , aleshores  $\kappa^\lambda = \kappa$*
  - (b) *si  $cf(\kappa) \leq \lambda$  aleshores  $\kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)}$*

### 2.1 Sumes i productes infinits

**Definició 2.1.** Sigui  $\{\kappa_i \mid i \in I\}$  un conjunt indexat de cardinals. Definim

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} X_i \right|$$

on  $\{X_i \mid i \in I\}$  és una família qualsevol de conjunts disjunts dos a dos tal que  $|X_i| = \kappa_i$  per a cada  $i \in I$ .

És senzill veure que aquesta definició no depèn de la família de conjunts triada. Fem notar que si  $\kappa$  i  $\lambda$  són cardinals tals que  $\kappa_i = \kappa$  per a tot  $i < \lambda$ , aleshores

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \kappa$$

**Lema 2.4.** *Segui  $\lambda$  un cardinal infinit i siguin  $\kappa_i > 0$  per a tot  $i < \lambda$ . Aleshores*

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \sup_{i < \lambda} \kappa_i$$

*Demostració.* Veurem les dues desigualtats. Segui  $\kappa = \sup_{i < \lambda} \kappa_i$ .  $\kappa$  és cardinal per la proposició 1.11. Com que  $\kappa_i \leq \sup_{i < \lambda} \kappa_i$  per a tot  $i \in \lambda$ , llavors,

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i \leq \sum_{i < \lambda} \kappa = \lambda \cdot \kappa$$

Per altra banda, notem que  $\lambda = \sum_{i < \lambda} 1 \leq \sum_{i < \lambda} \kappa_i$ , i que  $\sum_{i < \lambda} \kappa_i \geq \kappa$ , al ser  $\kappa_i \leq \sum_{i < \lambda} \kappa_i$  per a tot  $i \leq \lambda$ . Per tant, pel teorema 1.12,  $\lambda \cdot \kappa \leq \sum_{i < \lambda} \kappa_i \cdot \sum_{i < \lambda} \kappa_i = \sum_{i < \lambda} \kappa_i$   $\square$

En particular, si  $\lambda \leq \sup_{i < \lambda} \kappa_i$ , tenim

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \sup_{i < \lambda} \kappa_i$$

Notem que un cardinal infinit  $\kappa$  és singular si i només si hi ha  $\lambda < \kappa$  i  $\{\kappa_i\}_{i \in \lambda}$  família de cardinals de la forma  $\kappa_i < \kappa$  per a tot  $i \in \lambda$ , tal que

$$\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i$$

**Definició 2.2.** Segui  $\{X_i \mid i \in I\}$  una família indexada de conjunts. Definim llur producte com

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f \text{ és funció i } f(i) \in X_i \forall i \in I\}$$

Siguin ara  $\{\kappa_i \mid i \in I\}$  família indexada de cardinals. Definim llur producte com:

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} X_i \right|$$

on  $\{X_i \mid i \in I\}$  és una família indexada de conjunts tals que  $|X_i| = \kappa_i$  per a cada  $i \in I$ .

Novament la definició no depèn de la família triada.

Observem que si  $\kappa_i = \kappa$  per a tot  $i \in I$  i  $|I| = \lambda$ , aleshores

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \kappa^\lambda$$

Donem ara diversos resultats en vistes de demostrar el teorema de König, que ja podem enunciar:

**Teorema 2.5** (König). *Si  $\kappa_i < \lambda_i$  per a tot  $i \in I$ , aleshores*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

Comencem amb un lema tècnic que usarem en repetides ocasions al respecte de propietats bàsiques de sumes i productes infinits de cardinals:

**Lema 2.6.** *Siguin  $\{\kappa_i\}_{i \in I}$  i  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  famílies indexades de cardinals i  $\lambda$  i  $\kappa$  cardinals. Tenim:*

1.  $\prod_{i \in I} \kappa_i^{\lambda_i} = \kappa^{\sum_{i \in I} \lambda_i}$
2.  $\prod_{i \in I} \kappa_i^\lambda = \left(\prod_{i \in I} \kappa_i\right)^\lambda$
3. *Si  $I$  és la unió disjunta d'una partició  $\{A_j\}_{j \in J}$ , és a dir  $I = \bigcup_{j \in J} A_j$ , amb  $A_i \cap A_j = \emptyset$  per a tot  $i \neq j$ ; aleshores*

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{j \in J} \left( \prod_{i \in A_j} \kappa_i \right)$$

*Demostració.* Per a (1), prenem  $A$  conjunt i  $\{B_i\}_{i \in I}$  família indexada de conjunts disjunts tals que  $|A| = \kappa$  i  $|B_i| = \lambda_i$  per a tot  $i \in I$ . Per la definició, tenim:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} \kappa_i^{\lambda_i} &= \prod_{i \in I} |A^{B_i}| = \left| \prod_{i \in I} A^{B_i} \right|, \text{ i doncs} \\ \kappa^{\sum_{i \in I} \lambda_i} &= \kappa^{| \bigcup_{i \in I} B_i |} = \left| A^{\bigcup_{i \in I} B_i} \right| \end{aligned}$$

N'hi ha prou en veure que  $\prod_{i \in I} A^{B_i}$  és bijectable amb  $A^{\bigcup_{i \in I} B_i}$ . Per a fer-ho donarem una bijecció. Sigui  $f \in \prod_{i \in I} A^{B_i}$ . Aleshores  $f(i)$  és una funció de  $B_i$  a  $A$ .

Definim la imatge per la bijecció d'una tal funció  $f$  com la següent funció:

$$\begin{aligned} \varphi^{(f)} : \bigcup_{i \in I} B_i &\longrightarrow A \\ b \in B_i &\longmapsto f(i)(b) \end{aligned}$$

No és difícil veure que aquesta funció és exhaustiva i injectiva.

Per a demostrar (2), prenem  $\{B_i\}_{i \in I}$  família indexada de conjunts disjunts tals que  $|B_i| = \kappa_i$  per a tot  $i \in I$  i  $A$  conjunt tal que  $|A| = \lambda$ . Usant el mateix argument que a (1) es pot veure que per a demostrar la igualtat n'hi ha prou en provar que  $\prod_{i \in I} B_i^A$  és bijectable amb  $\left(\prod_{i \in I} B_i\right)^A$ .

En vistes de definir una bijecció prenem  $f \in \prod_{i \in I} B_i^A$ . Aleshores  $f(i)$  és una funció de  $A$  en  $B_i$ . Ara definim la imatge de  $f$  per la bijecció com següeix:

$$\begin{aligned} \phi^{(f)} : A &\longrightarrow \prod_{i \in I} B_i \\ a &\longmapsto I \rightarrow B_i \\ &\quad i \mapsto f(i)(a) \in B_i \end{aligned}$$

Hom pot veure que això és en efecte una bijecció.

Resta veure la propietat (3). Sigui  $\{B_i\}_{i \in I}$  família indexada de conjunts tals que  $|B_i| = \kappa_i$  per a cada  $i \in I$ . Sigui  $\{R_j\}_{j \in J}$  família de conjunts tal que  $|R_j| = \prod_{i \in A_j} \kappa_i$  per a cada  $j \in J$ . Del fet que  $\prod_{i \in A_j} \kappa_i = |\prod_{i \in A_j} B_i|$  se segueix que  $R_j \sim \prod_{i \in A_j} B_i$  per a cada  $j \in J$ .

Per a demostrar el resultat n'hi ha prou en veure que  $|\prod_{i \in I} B_i| = |\prod_{j \in J} R_j|$ , o, equivalentment, que  $\prod_{i \in I} B_i \sim \prod_{j \in J} R_j$ . En vistes de donar una bijecció triem per a cada  $j \in J$  una bijecció  $\Phi^{(j)} : \prod_{i \in A_j} B_i \rightarrow R_j$ .

Ara, per a una funció  $f \in \prod_{i \in I} B_i$  definim la seva imatge per la bijecció com la següent funció:

$$\begin{aligned} J &\longrightarrow \bigcup_{j \in J} R_j \\ j &\longmapsto \Phi^{(j)}(f) \in R_j \end{aligned}$$

En ser les  $\Phi^{(j)}$  bijeccions i els  $A_j$  disjunts, es té que l'aplicació donada és en efecte una bijecció. Resta pendent comprovar-ho. □

**Lema 2.7.** Si  $\kappa_i \geq 2$  per a tot  $i \in I$ , aleshores

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \kappa_i$$

Fem notar que la condició  $\kappa_i \geq 2$  per a tot  $i \in I$  és necessària, atès que  $1+1+1 \not\leq 1 \cdot 1 \cdot 1$ .

*Demostració.* Suposarem sense pèrdua de generalitat que  $I$  és infinit. Si  $I$  és finit l'argument és similar. Notem primer que  $\prod_{i \in I} \kappa_i \geq \prod_{i \in I} 2 = 2^{|I|} > |I|$  N'hi ha prou en veure ara que

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq |I| \cdot \prod_{i \in I} \kappa_i$$

Sigui  $\{X_i\}_{i \in I}$  família de conjunts disjunts tals que  $|X_i| = \kappa_i$ . Veurem que la següent funció és injectiva:

$$\begin{aligned} g : \bigcup_{i \in I} X_i &\longrightarrow |I| \times \prod_{i \in I} X_i \\ x \in x_i &\longmapsto (i, f^{(x)} : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i) \end{aligned}$$

tal que  $f^{(x)}(i) = x$ .

Aquesta funció és en efecte injectiva. Suposem que  $(i, f^{(x)}) = (j, f^{(y)})$ , amb  $i, j \in I$  i  $f^{(x)}, f^{(y)} : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ . Tenim doncs que  $i = j$  i que  $f^{(x)}(k) = f^{(y)}(k)$  per a tot  $k \in I$ . Tenim doncs que

$$x = f^{(x)}(i) = f^{(y)}(i) = f^{(y)}(j) = y$$

i la funció és injectiva. I és compleix la desigualtat a demostrar. □

**Lema 2.8.** *Sigui  $\lambda$  cardinal infinit, i  $\{\kappa_i\}_{i<\lambda}$  successió no decreixent de cardinals no nuls. Aleshores,*

$$\prod_{i<\lambda} \kappa_i = (\sup_i \kappa_i)^\lambda$$

*Demostració.* Posem  $\kappa = \sup_i \kappa_i$ .  $\kappa$  és cardinal per ser el suprem de cardinals: proposició 1.11. Com que  $\kappa_i < \kappa$  per a tot  $i < \lambda$ , la primera desigualtat és clara:

$$\prod_i \kappa_i \leq \prod_i \kappa = \kappa^\lambda$$

Ara, per a veure l'altra desigualtat aplicarem la propietat (3) del lema 2.6. Per a fer-ho cal considerar una partició de  $\lambda$  en  $\lambda$  conjunts disjunts de cardinalitat  $\lambda$ . Fem notar que hom sempre pot trobar una tal partició en virtut del teorema 1.12:

Per aquest teorema tenim que  $\lambda \times \lambda \sim \lambda$ . Sigui doncs  $f : \lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$  una bijecció. Aleshores, posem per a cada  $\alpha < \lambda$ ,

$$A_\alpha = f(\lambda \times \{\alpha\})$$

És clar que aleshores  $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$  és partició de  $\lambda$  de cardinalitat  $\lambda$ . Tenim també que  $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$  per a tot  $\alpha, \beta \in \lambda$ , i que  $|A_\alpha| = \lambda$  per a tot  $\alpha < \lambda$ . Així:

$$\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$$

Ara, per ser el producte de cardinals no nuls més gran que cadascun dels seus factors,  $\prod_{i \in A_j} \kappa_i \geq \sup_{i \in A_j} \kappa_i = \kappa$ , i per tant, tot aplicant la propietat (3) del lema 2.6:

$$\prod_{i<\lambda} \kappa_i = \prod_{j<\lambda} \left( \prod_{i \in A_j} \kappa_i \right) \geq \prod_{j<\lambda} \kappa = \kappa^\lambda$$

i es té la desigualtat que mancava. □

Demostrem ara el teorema de König, (teorema 2.5):

*Demostració. (del teorema 2.5).* Veurem que  $\sum_i \kappa_i \not\leq \prod_i \lambda_i$ . Posem  $\{T_i\}_{i \in I}$  família indexada de conjunts disjunts dos a dos de cardinalitat  $|T_i| = \lambda_i$  per a tot  $i \in I$ . Posem  $T = \prod_{i \in I} T_i$ . Notem que si  $\{Z_i\}_{i \in I}$  és una família de conjunts disjunts dos a dos tals que  $|Z_i| = \kappa_i$  per a tot  $i \in I$ , aleshores  $Z_i \sim \kappa_i < \lambda_i \sim T_i \preceq T$  per a tot  $i \in I$ . Suposarem sense pèrdua de generalitat que cada  $Z_i$  és subconjunt de  $T$  per a tot  $i \in I$ ; atès que sempre podem trobar-ne una funció injectiva.

N'hi ha prou en veure que per a cada família  $\{Z_i\}_{i \in I}$ ,  $\bigcup_{i \in I} Z_i \neq T$ . Notem que la desigualtat  $\bigcup_{i \in I} Z_i > T$  mai no es pot donar pel lema 2.7.

Sigui

$$S_i = \{f(i) \mid f \in Z_i\}$$

Atès que  $|Z_i| < |T_i|$ ,  $S_i \subsetneq T_i$ . Sigui doncs  $f \in T$  tal que  $f(i) \notin S_i$  per a cada  $i \in I$ . Aleshores és clar que  $f$  no pertany a cap  $Z_i$ , i doncs no pot donar-se la igualtat  $\bigcup_{i \in I} Z_i = T$ . □

Són corol·lari immediat d'aquest teorema alguns resultats que ja coneixíem. Posarem per ara  $\kappa, \lambda$  cardinals infinits. Del fet que  $\kappa = \sum_{i < \kappa} 1$ , i  $2^\kappa = \prod_{i < \kappa} 2$ , tenim per exemple:

**Corol·lari 2.9.**  $\kappa < 2^\kappa$  per a qualsevol  $\kappa$ .

**Corol·lari 2.10.**  $cf(2^\kappa) > \kappa$

*Demostració.* Suposem que  $cf(2^\kappa) \leq \kappa$ . Sigui doncs  $\{\kappa_i\}_{i < \kappa}$  successió cofinal en  $2^\kappa$ . En particular  $\kappa_i < 2^\kappa$  per a tot  $i < \kappa$ . Posem  $\lambda_i = 2^{\kappa_i}$  per a cada  $i < \kappa$ . Pel teorema de König,  $\sum_{i < \kappa} \kappa_i < \prod_{i < \kappa} \lambda_i = (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ ; i doncs  $cf(2^\kappa)$  mai no pot ser menor que  $\kappa$ .  $\square$

**Corol·lari 2.11.**  $cf(\kappa^\lambda) > \lambda$

*Demostració.* Sigui  $\{\kappa_i\}_{i < \lambda}$  família de cardinals tals que  $\kappa_i < \kappa^\lambda$  per a tot  $i$ . Aleshores, pel teorema 2.5,

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i < \prod_{i < \lambda} \kappa_i^\lambda = \left(\kappa^\lambda\right)^\lambda = \kappa^\lambda$$

i doncs una successió indexada per  $\lambda$  mai no pot ser cofinal.  $\square$

Es té de manera també immediata el teorema de König (teorema 1.20) demostrat al capítol 1.

**Corol·lari 2.12.** Per a tot cardinal infinit  $\kappa$ ,

$$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$$

*Demostració.* Sigui  $\{\kappa_i\}_{i < cf(\kappa)}$  família de cardinals cofinal en  $\kappa$ :

$$\kappa = \sum_{i < cf(\kappa)} \kappa_i < \prod_{i < cf(\kappa)} \kappa_i = \kappa^{cf(\kappa)}$$

$\square$

## 2.2 La funció gimel i la funció continu

Donem ara algun resultat al respecte de  $2^\kappa$ . A hores d'ara sabem essencialment que  $cf(2^\kappa) > \kappa$ , i és clar que si  $\lambda < \kappa$ , aleshores  $2^\lambda \leq 2^\kappa$ .

**Definició 2.3.** Definim  $2^{<\kappa} = \sup\{2^\mu \mid \mu < \kappa \text{ i } \mu \text{ cardinal}\}$ . Parlarem de funció continu per a referir-nos als valors que pren  $2^\kappa$  per a cada cardinal  $\kappa$ .

**Proposició 2.13.** Si  $\kappa$  és cardinal límit aleshores  $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$

*Demostració.* Sigui  $\{\kappa_i\}_{i < cf(\kappa)}$  una successió cofinal en  $\kappa$  amb  $\kappa_i < \kappa$  per a tot  $i < cf(\kappa)$ . Notem primer que per definició de suprem es té  $2^{\kappa_i} \leq 2^{<\kappa} \leq 2^\kappa$  per a tot  $i < cf(\kappa)$ . Ara, tot fent ús de la propietat (1) del lema 2.6 i de la monotonia de productes infinits:

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i < cf(\kappa)} \kappa_i} = \prod_{i < cf(\kappa)} 2^{\kappa_i} \leq \prod_{i < cf(\kappa)} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} \leq (2^\kappa)^{cf(\kappa)} \leq 2^\kappa$$

I doncs  $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$ .  $\square$

**Corol·lari 2.14.** *Si  $\kappa$  és cardinal singular i la funció continu estabilitza sota  $\kappa$  en algun  $\lambda$ , això és:  $\lambda = 2^\mu$  és constant a partir d'un cert  $\mu < \kappa$ , aleshores  $2^\kappa = \lambda$ . En particular,  $2^\kappa = 2^{<\kappa}$ .*

*Demostració.* Sigui  $\mu$  un cardinal tal que  $cf(\kappa) \leq \mu < \kappa$  i tal que  $2^{<\kappa} = \lambda = 2^\mu$ . Pel teorema 2.13 i del corol·lari 1.13 tenim:

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = (2^\mu)^{cf(\kappa)} = 2^\mu = \lambda$$

□

**Definició 2.4** (Funció gimel). Definim la funció gimel com  $\mathfrak{J}(\kappa) = \kappa^{cf(\kappa)}$ .

Veurem ara que, sota certes hipòtesis, podem escriure  $2^\kappa$  com a funció de la funció gimel de  $\kappa$ , cosa que mostra la importància d'estudiar els valors possibles de  $\kappa^{cf(\kappa)}$ .

**Proposició 2.15.** 1. *Si  $\kappa$  és cardinal successor, aleshores  $2^\kappa = \mathfrak{J}(\kappa)$*

2. *Si  $\kappa$  és cardinal límit i la funció continu estabilitza sota  $\kappa$ , aleshores  $2^\kappa = (2^{<\kappa}) \cdot \mathfrak{J}(\kappa)$*

3. *Si  $\kappa$  és cardinal límit i la funció continu no estabilitza sota  $\kappa$ , aleshores  $2^\kappa = \mathfrak{J}(2^{<\kappa})$*

*Demostració.* (1) és clar, atès que si  $\kappa$  és cardinal successor aleshores és regular, i tenim, pel corol·lari 2.2:

$$\mathfrak{J}(\kappa) = \kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^\kappa = 2^\kappa$$

Vegem (2). Suposem primer que  $\kappa$  és cardinal límit i singular. Aleshores es tenen les hipòtesis del corol·lari 2.14, i tenim que  $2^\kappa = 2^{<\kappa}$ . A més a més, tenim:

$$\mathfrak{J}(\kappa) = \kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = 2^{<\kappa}$$

i per tant  $(2^{<\kappa}) \cdot \mathfrak{J}(\kappa) = 2^{<\kappa} = 2^\kappa$ , tal com volíem.

Per altra banda, si  $\kappa$  és regular, aleshores, com al primer punt del teorema,  $\mathfrak{J}(\kappa) = 2^\kappa$ , i, com que en general es té  $2^\kappa \geq 2^{<\kappa}$ , tenim novament que  $(2^{<\kappa}) \cdot \mathfrak{J}(\kappa) = 2^{<\kappa} \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$ , com volíem.

Per a veure (3), posem  $\lambda = 2^{<\kappa}$ . Fem notar que si  $\kappa$  és un cardinal límit tal que la funció continu sota  $\kappa$  no estabilitza, aleshores hom pot constuir una successió indexada per  $\kappa$  estrictament creixent i cofinal en  $\lambda$  de l'estil:

$$\lambda = 2^{<\kappa} = \sup_{\alpha < \kappa} 2^{|\alpha|}$$

Ara, per la proposició 1.16, tenim:

$$cf(\lambda) = cf(\kappa)$$

i per la proposició 2.13,

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = \lambda^{cf(\lambda)}$$

□

### 2.3 Exponenciació cardinal

En aquesta secció donem resultats envers  $\kappa^\lambda$  per a  $\kappa, \lambda$  cardinals qualssevol. Comencem donant la fórmula de Hausdorff:

**Teorema 2.16** (Fórmula de Hausdorff). *Per a qualssevol ordinals  $\alpha$  i  $\beta$ ,*

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$$

*Demostració.* Distingim dos casos:

1. Posem  $\alpha + 1 \leq \beta$ .

Al ser  $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta$ , es té  $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$  i  $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$ . Tenim:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$$

atès que  $\aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\beta}$  per ser  $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta < 2^{\aleph_\beta}$ , i tot usant el corol·lari 1.13 per al producte de dos cardinals.

2. Posem ara  $\beta \leq \alpha$ .

Pel fet que  $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ , i  $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ , tenim que

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$$

Per a l'altra desigualtat, notem primer que tota funció  $f : \omega_\beta \rightarrow \omega_{\alpha+1}$  és fitada, atès que  $\aleph_{\alpha+1}$  és regular per ser cardinal successor, i  $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\beta$ . De fet, tota funció d'aquest tipus és de la forma  $f : \omega_\beta \rightarrow \gamma$  per algun  $\gamma \in \omega_{\alpha+1}$ . Així, podem posar<sup>2</sup>

$$\omega_{\alpha+1}^{\omega_\beta} = \bigcup_{\gamma < \omega_{\alpha+1}} \gamma^{\omega_\beta}$$

Per tant, es té

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma < \aleph_{\alpha+1}} |\gamma|^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma < \aleph_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$$

tal com calia. □

**Lema 2.17.** *Si  $\kappa$  és cardinal límit, i  $\lambda \geq cf(\kappa)$ , aleshores*

$$\kappa^\lambda = \left( \sup_{\alpha < \kappa} \alpha^\lambda \right)^{cf(\kappa)}$$

*Demostració.* Sigui  $\{\kappa_i\}_{i < cf(\kappa)}$  successió cofinal en  $\kappa$ . Usant el lema 2.7 a la primera desigualtat i la propietat (2) del lema 2.6 a la segona igualtat tenim:

$$\kappa^\lambda = \left( \sum_{i < cf(\kappa)} \kappa_i \right)^\lambda \leq \left( \prod_{i < cf(\kappa)} \kappa_i \right)^\lambda = \prod_{i < cf(\kappa)} \kappa_i^\lambda \leq \prod_{i < cf(\kappa)} \sup_{\alpha < \kappa} \alpha^\lambda = \left( \sup_{\alpha < \kappa} \alpha^\lambda \right)^{cf(\kappa)} \leq \left( \kappa^\lambda \right)^{cf(\kappa)} = \kappa^\lambda$$

□

---

<sup>2</sup>La notació  $\omega_{\alpha+1}^{\omega_\beta}$  és refereix al conjunt de funcions del tipus  $f : \omega_\beta \rightarrow \omega_{\alpha+1}$ .

Podem ara demostrar el teorema cabdal d'aquest secció que permet calcular inductivament valors per l'exponenciació de cardinals arbitraris. Reescrivim aquest teorema per practicitat:

**Teorema 2.3** (Teorema d'exponenciació cardinal). *Si  $\lambda$  cardinal infinit. Aleshores, per a qualsevol cardinal infinit  $\kappa$ , hom pot calcular  $\kappa^\lambda$  com següeix:*

1. Si  $\kappa \leq \lambda$ , aleshores  $\kappa^\lambda = 2^\lambda$
2. Si hi ha algun  $\mu < \kappa$  tal que  $\mu^\lambda \geq \kappa$ , aleshores  $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$
3. Si  $\kappa > \lambda$  i  $\mu^\lambda < \kappa$  per a tot  $\mu < \kappa$ , aleshores
  - (a) si  $cf(\kappa) > \lambda$ , aleshores  $\kappa^\lambda = \kappa$
  - (b) si  $cf(\kappa) \leq \lambda$  aleshores  $\kappa^\lambda = \kappa^{cf(\kappa)}$

*Demostració.* (1) s'ha vist al corol·lari 2.2. Per a (2), és clar que

$$\mu^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (\mu^\lambda)^\lambda = \mu^\lambda$$

Per a veure (3), suposem primer que  $\kappa$  és cardinal successor. Aleshores  $cf(\kappa) = \kappa > \lambda$ , i es té el cas (a). Per la fórmula de Hausdorff tenim

$$\kappa^\lambda = (\eta^+)^\lambda = \eta^\lambda \cdot \kappa = \kappa$$

atès que estem suposant que  $\eta^\lambda < \kappa$ , per ser  $\eta < \kappa$ .

Suposem ara que  $\kappa$  és cardinal límit. Notem primer que podem escriure

$$\kappa = \sup_{\alpha < \kappa} \alpha \tag{3}$$

Si aquest no fos el cas, hi hauria un cardinal  $\mu$  mínima cota superior tal que  $\alpha^\lambda \leq \mu < \kappa$  per a tot  $\alpha < \kappa$ . Això no pot ser: Considerem  $\mu^+$ . Per ser  $\mu < \kappa$  i  $\kappa$  no successor,  $\mu^+ < \kappa$ . Però és clar que  $\mu < \mu^+ \leq (\mu^+)^\lambda$ , cosa que contradiu que  $\mu$  sigui suprem. Així, en efecte es té (3).

Ara, si  $cf(\kappa) > \lambda$ , aleshores tota funció  $f : \lambda \rightarrow \kappa$  és fitada, i tenim,

$$\kappa^\lambda = \sup_{\alpha < \kappa} \alpha^\lambda = \kappa$$

Finalment, si  $cf(\kappa) \leq \lambda$ , aleshores es té el lema 2.17, i tenim

$$\kappa^\lambda = \left( \sup_{\alpha < \kappa} \alpha^\lambda \right)^{cf(\kappa)} = \kappa^{cf(\kappa)}$$

□

**Corol·lari 2.18.** *Per a qualssevol  $\lambda, \kappa$  cardinals,  $\kappa^\lambda$  és o bé  $2^\lambda$ , o bé  $\kappa$ , o bé  $\beth(\mu)$  per a algun  $\mu$  tal que  $cf(\mu) \leq \lambda < \mu$ .*

*Demostració.* Suposem que  $\kappa^\lambda > 2^\lambda \cdot \kappa$ . Pel corol·lari 1.13 tenim que  $\kappa^\lambda > 2^\lambda$  i que  $\kappa^\lambda > \lambda$ , per ser  $\kappa^\lambda$  estrictament més gran que el màxim dels dos factors.

Ara, considerem el mínim  $\mu$  tal que  $\mu^\lambda = \kappa^\lambda$ . En particular  $\mu \leq \kappa$ . Mirem ara d'avaluar  $\mu^\lambda = \kappa^\lambda$  tot usant el teorema 2.3 per a  $\mu^\lambda$ .

Notem primer que, com que  $\mu^\lambda = \kappa^\lambda > 2^\lambda$ , cal que  $\mu > \lambda$ , o bé es contradiria el primer cas del teorema.

És clar també que no pot haver-hi cap  $\mu_0 < \mu$  tal que  $\mu_0^\lambda \geq \mu$  atès que, pel segon punt del teorema, tindríem que  $\kappa^\lambda = \mu^\lambda = \mu_0^\lambda$ , cosa que contradiu la minimalitat de  $\mu$ .

Es donen doncs les hipòtesis del tercer cas del teorema. Això és:  $\mu > \lambda$  i  $\mu_0^\lambda < \mu$  per a tot  $\mu_0 < \mu$ . Ara, si fos  $\mu^\lambda = \mu$ , tindríem  $\kappa^\lambda = \mu^\lambda = \mu \leq \kappa < \kappa^\lambda$ , que és una contradicció. Per tant, ha de ser el cas 3.(a) del teorema 2.3, i tenim  $\kappa^\lambda = \mu^\lambda = \mu^{cf(\mu)} = \mathfrak{I}(\mu)$ .  $\square$

Per a finalitzar el capítol donem la noció de cardinal límit fort i de cardinal inaccessible.

**Definició 2.5.** Un cardinal  $\kappa$  és un cardinal *límit fort* si  $2^\lambda < \kappa$  per a tot  $\lambda < \kappa$ .

Fem notar que tot cardinal límit fort és cardinal límit (el predecessor contradiria la hipòtesi).  $\aleph_0$  és clarament un cardinal límit fort.

Val la pena esmentar la següent proposició:

**Proposició 2.19.** *Si  $\kappa$  és cardinal límit fort. Aleshores:*

1.  $\lambda^\eta < \kappa$  per a tot  $\lambda, \eta < \kappa$
2.  $2^\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$

*Demostració.* (1) és senzill a partir de la desigualtat següent:

$$\lambda^\eta \leq \max\{\lambda^\lambda, \eta^\eta\} = \max\{2^\lambda, 2^\eta\} < \kappa$$

que es té perquè  $\kappa$  és límit fort i  $\eta, \lambda < \kappa$ .

Per a (2), com que  $\kappa$  és cardinal límit fort tenim:

$$2^{<\kappa} = \sup_{\mu < \kappa} 2^\mu = \kappa$$

perquè  $\kappa$  és fita superior i és la mínima, perquè un  $\lambda < \kappa$  mai no és fita superior, en ser  $\lambda < 2^\lambda$ . El teorema 2.13 dona  $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = \kappa^{cf(\kappa)}$ .  $\square$

Notem que  $\aleph_0$  és el primer cardinal límit fort. L'existència de cardinals límits forts no numerables no és clara. Això motiva la següent definició:

**Definició 2.6.** Un cardinal és *feblement inaccessible* si és no numerable, regular, i límit. Un cardinal és *fortament inaccessible* o senzillament, *inaccessible*, si és no numerable, regular, i cardinal límit fort.

Es té el següent:

**Proposició 2.20.** *Si  $\kappa$  és cardinal inaccessible aleshores és feblement inaccessible. Si la hipòtesi del continu es compleix per sota de  $\kappa$ , és a dir  $2^\mu = \mu^+$  per a tot  $\mu < \kappa$ , aleshores tot cardinal feblement inaccessible és inaccessible, i les nocions són equivalents.*

*Demostració.* Que tot cardinal inaccessible és feblement inaccessible és clar, atès que tot cardinal límit fort és límit. Per a veure que un cardinal  $\kappa$  feblement inaccessible és inaccessible si es compleix la hipòtesi del contiu per sota de  $\kappa$  notis que, per a tot cardinal  $\mu < \kappa$ :

$$2^\mu = \mu^+ < \kappa$$

perquè  $\mu^+ \leq \kappa$  però  $\kappa$  és límit, i doncs no es pot donar la igualtat. □

L'existència de cardinals inaccessibles, insistim, no és clara. A tall d'exemple, si  $\aleph_1$  fos inaccessible, aleshores  $2^{\aleph_0} < \aleph_1$  i no es tindria la hipòtesi del contiu.

### 3 Combinatòria infinita

Presentem en aquesta secció la noció de conjunt club en un ordinal límit i el filtre club d'un ordinal límit. Finalment donem la noció de conjunt estacionari i el teorema de Fodor. Tant la noció d'ultrafiltre com el teorema de Fodor són claus en la demostració que fem del teorema de Silver, tot i que l'estudi de filtres i ultrafiltres té interès propi. És pot trobar un desenvolupament més ampli pel que fa a filtres i ultrafiltres a [3].

Se segueix essencialment la secció 6 del segon capítol de [5] i el capítol 7 de [3]. Pel que fa a la part de conjunts club i estacionaris destaquem que se'n fa una exposició bastant detallada a [8]. Al final del capítol introduïm per completesa la noció d'arbre.

#### 3.1 Filtres i ideals i ultrafiltres

Definim primer la noció general de filtre i ideal, i d'ultrafiltre. L'objectiu es presentar la noció de filtre i de veure que tot filtre es pot estendre a un ultrafiltre o filtre maximal. Per a fer aquest últim pas hom fa ús del lema de Zorn, que és de fet un equivalent a l'axioma de l'elecció, i que enunciem tot seguit.

**Definició 3.1.** Sigui  $(A, <)$  un conjunt parcialment ordenat. Definim:

1.  $a$  és *fitxa superior* de  $A$  si  $x \leq a$  per a tot  $x \in A$ ,
2.  $a$  és *element maximal* de  $A$  si  $a \in A$  i no hi ha cap  $x \in A$  amb  $a < x$ ,
3. una *cadena* en  $(A, <)$  és un subconjunt  $C \subseteq A$  tal que la restricció de l'ordre,  $(C, <)$ , és un ordre total.

**Teorema 3.1** (Lema de Zorn). *Sigui  $(A, <)$  conjunt parcialment ordenat no buit. Si tota cadena en  $A$  té alguna fitxa superior, aleshores  $A$  té un element maximal.*

S'en poden trobar demostracions a partir de l'axioma de l'elecció a [1] o al mateix [3].

**Definició 3.2.** Sigui  $A$  un conjunt no buit. Un *filtre* en  $A$  és una família  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$  tal que:

1.  $A \in \mathcal{F}$  i  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .
2. Si  $X, Y \in \mathcal{F}$  aleshores  $X \cap Y \in \mathcal{F}$ .
3. Per a qualssevol  $X \in \mathcal{F}$ , i  $Y \subseteq A$ , si  $X \subseteq Y$  aleshores  $Y \in \mathcal{F}$ .

**Definició 3.3.** Sigui  $A$  un conjunt no buit. Un *ideal* en  $A$  és una família  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$  tal que:

1.  $A \notin \mathcal{I}$  i  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
2. Si  $X, Y \in \mathcal{I}$  aleshores  $X \cup Y \in \mathcal{I}$ .
3. Per a qualssevol  $X \in \mathcal{I}$ , i  $Y \subseteq A$ , si  $Y \subseteq X$  aleshores  $Y \in \mathcal{I}$ .

Aquestes estructures són duals:

**Definició 3.4.** Sigui  $\mathcal{I}$  ideal en  $A$ . Aleshores definim el filtre dual de  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I}^*$ , com

$$\mathcal{I}^* = \{ X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{I} \}$$

Anàlogament, definim l'ideal dual d'un filtre  $\mathcal{F}$  en  $A$ ,  $\mathcal{F}^*$ , com

$$\mathcal{F}^* = \{ X \subseteq A \mid A \setminus X \in \mathcal{F} \}$$

De les definicions se segueix la següent proposició:

**Proposició 3.2.** *Un ideal dual d'un filtre és un ideal i un filtre dual d'un ideal és un filtre. A més a més són estructures duals: Si  $\mathcal{I}$  és ideal i  $\mathcal{F}$  és filtre, aleshores  $(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$ , i  $(\mathcal{I}^*)^* = \mathcal{I}^{**} = \mathcal{I}$ .*

Per inducció natural és clar que els filtres són tancats per interseccions finites i que els ideals són tancats per unions finites. Per a fer referència a si són tancats per unions o interseccions més grans introduïm la següent definició:

**Definició 3.5.** Sigui  $\kappa$  cardinal infinit. Diem que un ideal  $\mathcal{I}$  és  $\kappa$ -complet si per a tota família  $\mathcal{A}$  de subconjunts de  $\mathcal{I}$  tal que  $|\mathcal{A}| < \kappa$ ,  $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$ .

Anàlogament, diem que un filtre  $\mathcal{F}$  és  $\kappa$ -complet si per a tota família  $\mathcal{A}$  de subconjunts de  $\mathcal{F}$  tal que  $|\mathcal{A}| < \kappa$ ,  $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{F}$ .

És clar doncs que tot ideal o filtre és  $\omega$ -complet. Ara bé, si  $\mathcal{I}$  és un ideal en  $A$  i  $\{a\} \in \mathcal{I}$  per a tot  $a \in A$ , aleshores  $\mathcal{I}$  no és  $|A|^+$ -complet, atès que, per ser  $\mathcal{I}$  ideal,

$$\bigcup_{a \in A} \{a\} = A \notin \mathcal{I}$$

Donem ara alguns exemples senzills de filtres i ideals. Sigui  $A$  un conjunt no buit.

1. El filtre trivial en  $A$  és  $\{A\}$ , i l'ideal trivial  $\{\emptyset\}$ .
2. Un *filtre principal* en  $A$  és aquell que és del tipus  $\mathcal{F} = \{X \subseteq A \mid X \supseteq X_0\}$  per a algun  $X_0 \subseteq A$  no buit. La noció dual de filtre principal és *ideal principal*.
3. Per a cada  $a \in A$ ,  $\{X \subseteq A \mid a \in X\}$  és un cas particular de filtre principal (i és un ultrafiltre, vegi's definició 3.6).
4. Suposem que  $|A| \geq \omega$ . Aleshores  $\{X \subseteq A \mid |X| < \omega\}$  és un ideal en  $A$ .
5. (Mesura de Lebesgue) Posem  $A = [0, 1]$ . Aleshores els subconjunts de  $A$  mesurables Lebesgue i de mesura 1 formen un filtre; i els subconjunts de  $A$  mesurables Lebesgue i de mesura 0 en són l'ideal dual. Aquest ideal és  $\omega_1$ -complet, atès que les unions numerables d'elements de mesura 0 tenen mesura 0.

Col·loquialment, hom pot concebre els conjunts d'un filtre com subconjunts grans d'un conjunt, i els d'un ideal com subconjunts petits. Definim ara la noció d'ultrafiltre.

**Definició 3.6.** Un filtre  $\mathcal{U}$  en un conjunt  $A$  és un *ultrafiltre* si per a cada  $X \subseteq A$ , o bé  $X \in \mathcal{U}$  o bé  $A \setminus X \in \mathcal{U}$ . La noció dual és un *ideal primer*: per a tot  $X \subseteq A$ , o bé  $X \in \mathcal{I}$  o bé  $A \setminus X \in \mathcal{I}$ .

**Definició 3.7.** Un filtre  $\mathcal{F}$  en  $A$  és *maximal* si per a tot altre filtre  $\mathcal{F}'$  en  $A$  tal que  $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ , llavors  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ .

L'objectiu ara es veure que filtre maximal i ultrafiltre són equivalents, i que tot filtre es pot expandir a un filtre maximal, i doncs a un ultrafiltre. Per a fer-ho donem una proposició inicial:

**Proposició 3.3.** *Sigui  $A$  conjunt no buit. Es té:*

1. *Sigui  $\mathbf{F}$  una família de filtres en un conjunt no buit  $A$ . Aleshores  $\bigcap \mathbf{F}$  és un filtre en  $A$ .*
2. *Sigui  $\mathcal{C}$  una cadena no decreixent de filtres en  $A$ . Aleshores  $\bigcup \mathcal{C}$  és un filtre en  $A$ .*
3. *Sigui  $G \subseteq \mathcal{P}(A)$  una família tal que tota intersecció finita d'elements de  $G$  és no buida (parlarem de propietat d'interseccions finites):*

$$\{X_1 \dots X_n\} \subseteq G \rightarrow X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset \quad (4)$$

*aleshores hi ha un filtre  $\mathcal{F}$  en  $A$  tal que  $F \supseteq G$ .*

*Demostració.* A (1) i (2) les condicions de filtre són senzilles de comprovar. Donem el filtre que demostra (3):

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq A \mid X_1 \cap \dots \cap X_n \subseteq X \text{ per a alguna família finita } \{X_1 \dots X_n\} \subseteq G\} \quad (5)$$

És clar que  $G \subseteq \mathcal{F}$ , atès que tot conjunt es pot posar com a intersecció finita d'ell mateix. És clar que  $A \in \mathcal{F}$  i que  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ . Si el buit fos de  $\mathcal{F}$ , tindríem que  $\emptyset \in G$ , cosa que contradiria que tota intersecció finita d'elements de  $G$  és no buida. Les condicions 2 i 3 de filtres per  $\mathcal{F}$  són clares.  $\square$

Fem notar que el filtre (5) és el filtre més petit que estigui  $G$ , atès que tot filtre que estengui  $G$  ha d'incloure els conjunts de  $G$ , llurs interseccions finites, i tots els conjunts que incloguin aquestes interseccions. Parlarem del *filtre generat per  $G$* , sempre que  $G$  compleixi la propietat d'interseccions finites (4). De manera més neta podem posar el filtre generat per  $G$ :

$$\mathcal{F}(G) = \bigcap \{D \subseteq \mathcal{P}(A) \mid D \text{ filtre en } A \text{ i } G \subseteq D\}$$

En general el filtre generat per un conjunt  $G$  que satisfaci la propietat d'interseccions finites serà només  $\omega$ -complet.

Podem veure ja que ultrafiltre i filtre maximal són equivalents:

**Proposició 3.4.** *Tot filtre en un conjunt  $A$  és ultrafiltre si i només si és maximal.*

*Demostració.* Veiem primer que tot ultrafiltre és filtre maximal: sigui  $\mathcal{U}$  ultrafiltre i suposem que  $\mathcal{F}$  és filtre amb  $\mathcal{F} \supsetneq \mathcal{U}$ . Sigui  $X \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$ . Aleshores, com que  $\mathcal{U}$  és ultrafiltre,  $A \setminus X \in \mathcal{U}$ , i tenim que  $A \setminus X \in \mathcal{F}$ , perquè  $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}$ , i que  $X \in \mathcal{F}$ . Ara, això no pot ser, atès com que  $X \in \mathcal{F}$ , tindríem

$$\emptyset = (A \setminus X) \cap X \in \mathcal{F}$$

cosa que no pot ser perquè  $\mathcal{F}$  és filtre.

Vegem ara que tot filtre maximal és ultrafiltre. Veurem que tot filtre que no és ultrafiltre no és maximal (veurem que si un filtre no és ultrafiltre, aleshores es pot estendre a un filtre maximal). Sigui doncs  $\mathcal{F}$  filtre que no sigui ultrafiltre (si no n'hi hagués cap és automàticament cert). Com que  $\mathcal{F}$  no és un ultrafiltre hi ha un conjunt  $Y \subseteq A$  tal que  $Y \notin \mathcal{F}$  i  $A \setminus Y \notin \mathcal{F}$ . Posem  $G = \mathcal{F} \cup \{Y\}$ . Aleshores  $G$  satisfà la propietat d'interseccions finites. Vegem-ho:

Si  $X \in \mathcal{F}$ , llavors  $X \cap Y \neq \emptyset$ . Això és perquè, si la intersecció fos buida, tindríem  $X \subseteq A \setminus Y$ , i, com que  $\mathcal{F}$  és filtre, tindríem  $A \setminus Y \in \mathcal{F}$ . Cosa que contradia la tria de  $Y$ . Ara, doncs, donat un conjunt finit  $X_1 \dots X_n$  d'elements de  $\mathcal{F}$ , la intersecció  $X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y$  és no buida: com que  $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \mathcal{F}$  perquè  $\mathcal{F}$  és filtre, aleshores  $X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y \neq \emptyset$ . Per tant,  $G$  satisfà la propietat d'interseccions finites.

Sigui  $\mathcal{F}'$  el filtre generat per  $G$ . Aleshores, com que  $\mathcal{F}' \supseteq G$  i  $Y \in G$ , llavors  $Y \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ , i per tant  $\mathcal{F}$  no és maximal perquè  $\mathcal{F}' \supsetneq \mathcal{F}$ .  $\square$

Ja tenim prou resultats per a provar l'existència d'ultrafiltres, que, com ja ha estat esmentat, fa ús del lema de Zorn:

**Teorema 3.5** (Tarski). *Tot filtre pot estendre's a un ultrafiltre.*

*Demostració.* Sigui  $\mathcal{F}_0$  un filtre en un conjunt no buit  $A$ . Sigui  $P$  el conjunt de tots els filtres  $\mathcal{F}$  tals que  $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$ . Consideri's el conjunt parcialment ordenat  $(P, \subseteq)$ . Donada una cadena ascendent,  $\mathcal{C}$ , en  $P$ , sabem que  $\bigcup \mathcal{C}$  és un filtre en  $A$  (per la proposició 3.3). Per tant,  $\bigcup \mathcal{C} \in P$ . A més a més,  $\bigcup \mathcal{C}$  és cota superior de  $\mathcal{C}$ . Pel lema de Zorn (teorema 3.1), hi ha un element maximal  $\mathcal{U} \in P$ . Per la proposició 3.4,  $\mathcal{U}$  és un ultrafiltre i estén  $\mathcal{F}_0$ .  $\square$

### 3.2 El filtre club i conjunts estacionaris

Donem en aquesta secció la noció de *conjunt club* en un cardinal i de *filtre club*. Definim també conjunt estacionari, noció clau per a demostrar el teorema de Silver, i demostrem el teorema de Fodor.

**Definició 3.8.** Sigui  $\alpha$  ordinal límit. Un conjunt  $C \subseteq \alpha$  és *tancat* si per a tot ordinal límit  $\delta < \alpha$  és té que si  $C \cap \delta$  és no fitat en  $\delta$ , aleshores  $\delta \in C$ . Direm que  $C$  és *club* en  $\alpha$  (*club* de "closed" i "unbounded" de l'anglès) si  $C$  és tancat i no fitat en  $\alpha$ .

Informalment, la idea és que un conjunt és tancat en un ordinal límit  $\alpha$  si tota successió de mida  $\delta$  en el conjunt, amb  $\delta < \alpha$  límit, té límit en el conjunt. De fet, no és difícil veure que ser tancat en un ordinal límit equival a ser tancat en la *topologia de l'ordre* en l'ordinal. La topologia que indueix l'ordre total en un ordinal límit  $\alpha$  és aquella que té per base els conjunts de la forma  $[\gamma, \delta) = \{\beta < \alpha \mid \gamma \leq \beta < \delta\}$ , per a qualssevol  $\gamma, \delta \in \alpha$ .

Donem primer alguns exemples de conjunts club. Destaquem els exemples (2) i (6).

1. Si  $\alpha$  és ordinal límit, llavors  $\alpha$  és club en  $\alpha$ . És clar que, com que  $\alpha$  és límit, és no fitat en  $\alpha$  i tancat.
2. Sigui  $\kappa$  cardinal no numerable. Aleshores  $\{\delta < \kappa \mid \delta \text{ ordinal límit}\}$  és club a  $\kappa$ . És no fitat: Sigui  $\delta < \kappa$  ordinal límit. No és difícil veure que hi ha algun ordinal  $\gamma$  que

satisfà  $\delta < \gamma < \kappa$  (a saber,  $\delta + \omega \sim \delta$ , si hom coneix la suma d'ordinals). Que es tracta d'un conjunt tancat és clar.

3. Si  $\kappa$  és cardinal no numerable, llavors  $\{\delta < \kappa \mid \delta \text{ és ordinal límit d'ordinals límit}\}$  és club a  $\kappa$ . No és difícil veure que és no fitat, i és tancat perquè el límit de tota successió d'ordinals límit de límits és al seu torn límit de límits.
4. Similarment, si  $\kappa$  és cardinal límit, aleshores  $C = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ cardinal}\}$  és club a  $\kappa$ . És clarament un conjunt no fitat perquè  $\kappa$  és cardinal límit, i és tancat atès que si  $\delta < \kappa$  és ordinal límit i  $\delta \cap C$  és no fitat en  $\delta$ , aleshores podem posar  $\delta$  com el suprem d'una successió de cardinals, i el suprem d'un conjunt de cardinals és un cardinal (proposició 1.11), i per tant  $\delta \in C$ .
5. Sigui  $\kappa$  cardinal de cofinalitat  $\omega$ . Aleshores tota  $\omega$ -successió cofinal en  $\kappa$  és club. Tota successió cofinal és per definició no fitada en el cardinal. No és difícil veure que tota successió cofinal és tancada: Sigui  $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha < \omega}$ , successió cofinal en  $\kappa$ . Sigui  $\delta < \kappa$  ordinal límit tal que  $\delta \cap \{\kappa_\alpha\}_{\alpha < \omega}$  és no fitat en  $\delta$ . Suposem que  $\delta \neq \kappa_\alpha$  per a tot  $\alpha < \omega$ . Com que la successió és no fitada en  $\kappa$  i  $\delta < \kappa$ , hi ha  $n, n+1 \in \omega$  tals que  $\kappa_n < \delta < \kappa_{n+1}$ . Això contradiu que  $\delta \cap \{\kappa_\alpha\}_{\alpha < \omega}$  sigui no fitat en  $\delta$ .
6. (*Segment final.*) Sigui  $\kappa$  cardinal infinit. Aleshores, per a tot  $\beta < \kappa$ , el *segment final* de  $\beta$ :  $S = \{\alpha < \kappa \mid \beta < \alpha\}$  és club en  $\kappa$ . És clar que és no fitat. Vegem que és tancat: sigui  $\delta < \kappa$  límit tal que  $\delta \cap S$  és no fitat en  $\delta$ . Volem veure que  $\delta > \beta$ . Per a tot  $\gamma < \delta$  hi ha algun  $\gamma_0$  del tipus  $\gamma < \gamma_0 < \delta$  i tal que  $\beta < \gamma_0$ , perquè  $\gamma_0 \in \delta \cap S$ . Per tant  $\beta < \delta$ .

Podem donar ja la definició de filtre club d'un ordinal límit de cofinalitat no numerable:

**Definició 3.9.** Sigui  $\alpha$  ordinal límit tal que  $cf(\alpha) > \omega$ . Definim el *filtre club* de  $\alpha$ , que denotarem  $Club(\alpha)$ , com segueix:

$$Club(\alpha) = \{X \subseteq \alpha \mid \exists C \subseteq X \text{ tal que } C \text{ és club en } \alpha\}$$

*Remarca 3.1.* El conjunt dels conjunts club en un ordinal límit,  $\alpha$ , no formen en general un filtre. Consideri's  $C$ , que és club en  $\omega_1$ , com segueix:

$$C = \{\gamma < \omega_1 \mid \gamma \text{ límit i } \gamma > \omega\}$$

i posem  $X = C \cup \omega$ . Aleshores  $X \in Club(\omega_1)$  però no és club en  $\omega_1$ . Falla doncs la tercera condició de definició de filtre.

En efecte, doncs, el filtre club és un filtre:

**Lema 3.6.** Sigui  $\mu$  cardinal tal que  $cf(\mu) > \omega$ . Aleshores:

1. la intersecció d'una família de menys de  $cf(\mu)$  subconjunts club en  $\mu$  és club en  $\mu$ ,
2.  $Club(\mu)$  és un filtre  $cf(\mu)$ -complet.

*Demostració.* Sigui  $\{C_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$  amb  $\lambda < cf(\mu)$  família indexada de subconjunts de  $\mu$  club en  $\mu$ . Notem  $C = \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$ . Cal veure que  $C$  és tancat i no fitat. Veiem primer que és tancat.

Segui  $\delta$  ordinal límit tal que  $\delta \cap C$  és no fitat en  $\delta$ . Cal veure que  $\delta \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$  per a cada  $\alpha < \lambda$ . N'hi ha prou en veure que  $\delta \cap C_\alpha$  és no fitat en  $\delta$  per a tot  $\alpha < \lambda$ , perquè en tal cas, en ser  $C_\alpha$  tancats, tindríem que  $\delta \in C_\alpha$  per a tot  $\alpha < \lambda$ , i doncs  $\delta \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$ . Ara, és clar que  $\delta \cap C_\alpha$  és no fitat en  $\delta$ , atès que  $\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$  és no fitat en  $\delta$  i  $\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha \subseteq C_\alpha$  per a tot  $\alpha$ . Per tant,  $\delta \in C_\alpha$  per a tot  $\alpha < \lambda$ , i doncs  $\delta \in C$ .

Veiem que  $C$  és no fitat en  $\mu$ . Definim per a cada  $\alpha < \lambda$  una funció  $f_\alpha : \mu \rightarrow \mu$  tot posant  $f_\alpha(\zeta)$  el mínim ordinal  $\gamma \in C_\alpha$  tal que  $\gamma > \zeta$ . Cada  $f_\alpha$  està ben definida per ser cada  $C_\alpha$  no fitat en  $\mu$ . Definim ara per a cada  $\zeta \in \mu$

$$g(\zeta) = \sup_{\alpha < \lambda} f_\alpha(\zeta)$$

Notem que com que  $cf(\mu) > \lambda$ ,  $\zeta < g(\zeta) < \mu$ . Definim ara per inducció:  $g^0(\zeta) = \zeta$  i  $g^{n+1}(\zeta) = g(g^n(\zeta))$  per a cada  $n < \omega$  i  $\zeta < \mu$ . Posem finalment per a cada  $\zeta$  de  $\mu$ ,

$$g^\omega(\zeta) = \sup_{n < \omega} g^n(\zeta)$$

Ara, en ser  $cf(\mu) > \omega$ ,  $\zeta < g^\omega(\zeta) < \mu$  per a cada  $\zeta < \mu$ .

Vegem ara que per a cada  $\zeta < \mu$  i per a cada  $\alpha < \lambda$ ,  $C_\alpha$  és no fitat a  $g^\omega(\zeta)$ : sigui  $\delta < g^\omega(\zeta)$ . Aleshores hi ha algun  $n < \omega$  tal que  $\delta < g^n(\zeta)$ . Tenim, per a tot  $\alpha < \lambda$ :

$$\delta < g^n(\zeta) < f_\alpha(g^n(\zeta)) \leq \sup_{\nu < \lambda} f_\nu(g^n(\zeta)) = g^{n+1}(\zeta) \leq g^\omega(\zeta)$$

és a dir  $f_\alpha(g^n(\zeta)) \in C_\alpha$  i és més gran que  $\delta$ . Per tant, com que cada  $C_\alpha$  és no fitat en  $g^\omega(\zeta)$  i tancat en  $\mu$ , tenim  $g^\omega(\zeta) \in C_\alpha$  per a tot  $\alpha < \lambda$ , i doncs  $g^\omega(\zeta) \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$ .

Hem trobat doncs per a cada  $\zeta < \mu$  un element de  $\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$ , a saber  $g^\omega(\zeta)$ , estrictament més gran que  $\zeta$ , tal com es volia.

(2) és senzill: Segui  $\{X_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$  una família de conjunts tal que  $X_\alpha \in \text{Cub}(\mu)$  per a tot  $\alpha < \lambda$ , i  $\lambda < cf(\mu)$ . Segui per a cada  $\alpha < \lambda$   $C_\alpha \subseteq X_\alpha$  club en  $\mu$ . Aleshores  $\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$  és, per (1), un subconjunt club en  $\mu$  de  $\bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ , i doncs  $\bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha \in \text{Club}(\mu)$ . Les altres propietats de filtre són clares.

□

En general el filtre club s'usa per a cardinals regulars i no numerables. En tal cas el filtre club és  $\kappa$ -complet. En el que queda de secció treballarem sobre cardinals d'aquest tipus. Definim ara la noció de *conjunt estacionari*.

**Definició 3.10.** Segui  $\kappa$  cardinal regular no numerable.  $X \subseteq \kappa$  és *estacionari* si  $X \cap C \neq \emptyset$  per a tot conjunt  $C$  club en  $\kappa$ .

**Proposició 3.7.** Segui  $\kappa$  cardinal regular no numerable. Es té:

1. Tot conjunt club és estacionari..
2. La intersecció d'una família  $\{C_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$  amb  $\lambda < \kappa$  de conjunts club amb un conjunt estacionari és un conjunt estacionari.
3. El conjunt d'ordinals límit d'un conjunt estacionari és estacionari.

*Demostració.* Per a (1), siguin  $C$  i  $D$  club. Pel lema 3.6,  $C \cap D$  és club, i en particular no buit, atès que és no fitat en  $\kappa$ . Per tant  $C$  és estacionari.

Per a veure (2), sigui  $S$  conjunt estacionari i siguin  $\lambda < \kappa$ , i  $\{C_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$  família de conjunts estacionaris. Siguin  $D$  conjunt club. Aleshores, com que pel lema 3.6  $\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$  és club, tenim:

$$(S \cap \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha) \cap D = S \cap (\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha \cap D) \neq \emptyset$$

perquè  $S$  és estacionari i  $\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha \cap D$  és club, perquè és la intersecció de dos clubs.

Vegem finalment (3): Siguin  $S$  estacionari. Posem

$$\{\gamma \in S \mid \gamma \text{ ordinal límit}\} = S \cap \{\gamma < \kappa \mid \gamma \text{ ordinal límit}\}$$

per l'apartat (2) i usant que  $\{\gamma < \kappa \mid \gamma \text{ ordinal límit}\}$  és club es té el volgut.  $\square$

Definim ara la *intersecció diagonal*. Avencem que la intersecció diagonal de conjunts club és club. Usarem aquesta noció per a demostrar el teorema de Fodor.

**Definició 3.11.** Siguin  $\kappa$  cardinal regular no numerable. Siguin  $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  família de subconjunts de  $\kappa$ . Definim llur intersecció diagonal:

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{\zeta < \kappa \mid \zeta \in \bigcap_{\alpha < \zeta} X_\alpha\}$$

**Proposició 3.8.** Siguin  $\kappa$  cardinal regular no numerable. Siguin  $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  família de subconjunts de  $\kappa$ . Definim  $Y_\alpha = \{\zeta \in X_\alpha \mid \zeta > \alpha\}$  per a cada  $\alpha < \kappa$ . Aleshores

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} Y_\alpha = \bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha \tag{6}$$

A més a més,

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \bigcap_{\alpha < \kappa} (X_\alpha \cup \{\zeta \mid \zeta \leq \alpha\}) \tag{7}$$

*Demostració.* (6) és immediat tot usant les definicions. Vegem la igualtat (7): La inclusió de dreta a esquerra és clara, atès que donat un  $\zeta \in \bigcap_{\alpha < \kappa} (X_\alpha \cup \{\zeta \mid \zeta \leq \alpha\})$ , es té per a cada  $\alpha < \kappa$  que: o bé  $\zeta \in X_\alpha$  o bé  $\zeta \leq \alpha$ . Per tant, si  $\alpha < \zeta$ , ha de ser  $\zeta \in X_\alpha$ , i doncs  $\zeta \in \bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ .

Per a l'altra inclusió, prenem un element  $\zeta < \kappa$  tal que  $\zeta \in X_\alpha$  per a tot  $\alpha < \zeta$ . Ara, si  $\mu < \zeta$ , llavors  $\zeta \in X_\mu$ . Si  $\mu \geq \zeta$ , llavors,  $\zeta \in \{\zeta \mid \zeta \geq \mu\}$ . En qualsevol cas,  $\zeta \in X_\mu \cup \{\zeta \mid \zeta \leq \mu\}$  per a tot  $\mu < \kappa$ , i per tant pertany a la intersecció.  $\square$

**Lema 3.9.** Siguin  $\kappa$  cardinal regular no numerable. Siguin  $\{C_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  família de conjunts tals que  $C_\alpha \subseteq \kappa$  i  $C_\alpha$  és club en  $\kappa$  per a tot  $\alpha < \kappa$ . Aleshores la intersecció diagonal

$$C = \bigtriangleup_{\alpha < \kappa} C_\alpha$$

és club en  $\kappa$ .

*Demostració.* No és difícil veure que

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} C_\alpha = \bigtriangleup_{\alpha < \kappa} \bigcap_{\zeta \leq \alpha} C_\zeta$$

Com que per a  $\alpha \leq \delta$  es té que  $\bigcap_{\zeta \leq \alpha} C_\zeta \supseteq \bigcap_{\zeta \leq \delta} C_\zeta$ , la successió  $\{\bigcap_{\zeta < \alpha} C_\zeta\}_{\alpha < \kappa}$  és decreixent respecte de la inclusió. Pel lema 3.6 cada  $\bigcap_{\zeta < \alpha} C_\zeta$  és també club. Sense pèrdua de generalitat suposarem que la família  $\{C_\zeta\}_{\zeta < \alpha}$  és decreixent, en general no estricta, respecte de la inclusió:

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_\zeta \supseteq \dots$$

Veiem primer que  $C$  és tancat. Sigui  $\alpha$  ordinal límit tal que  $\sup(\alpha \cap C) = \alpha$ , o equivalentment,  $\alpha$  és no fitat en  $C$ . Per a provar  $\alpha \in C$  n'hi ha prou en veure que  $\alpha \in C_\zeta$  per a tot  $\zeta < \alpha$ . Definim  $X = \{\nu \in C \mid \zeta < \nu < \alpha\}$ . Per definició de la intersecció diagonal,  $\nu \in C_\zeta$  per a tot  $\nu \in X$ . Tenim doncs  $X \subseteq C_\zeta$  per a tot  $\zeta < \alpha$ . Per ser  $C_\zeta$  tancat tenim  $\alpha = \sup(X \cap \alpha) \in C_\zeta$  per a tot  $\zeta \in \alpha$ , i doncs  $\alpha \in C$  tal com calia.

Veiem ara que  $C$  no és fitat en  $\kappa$ . Sigui  $\alpha \in \kappa$ . Muntem una successió: Sigui  $\beta_0 > \alpha$  i  $\beta_0 \in C_0$ . Ara, per a cada  $n < \omega$  posem  $\beta_{n+1}$  tal que  $\beta_{n+1} > \beta_n$  i tal que  $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$ . Hom pot fer aquesta tria en ser cada  $C_\zeta$  no fitat. Sigui ara  $\beta = \sup_{n < \omega} \beta_n$ . Per ser  $\kappa$  regular i no numerable  $\text{cf}(\kappa) > \omega$ , i doncs  $\beta < \kappa$ . És clar també que  $\beta > \alpha$ . N'hi ha prou en veure doncs que  $\beta \in C$ .

Triem un  $\zeta < \beta$ . Veiem que  $\beta \in C_\zeta$ . Prenem un  $n < \omega$  tal que  $\zeta < \beta_n$ . Ara, per a cada  $m > n$   $\beta_m \in C_{\beta_n}$ , perquè hem suposat que la família  $\{C_\delta\}_{\delta < \kappa}$  és una cadena de conjunts decreixent. En ser  $C_{\beta_n}$  tancat,

$$\beta = \sup(\beta \cap C_{\beta_n}) \in C_{\beta_n}$$

i doncs, novament per tractar-se d'una cadena de conjunts decreixent,  $\beta \in C_\zeta$  perquè  $\zeta < \beta_n$ . Tot plegat  $\beta \in C_\zeta$  per a tot  $\zeta < \beta$  i doncs  $\beta \in C$ .  $\square$

**Corol·lari 3.10.** *Sigui  $\kappa$  cardinal regular no numerable. El filtre club de  $\kappa$  és tancat per interseccions diagonals.*

**Definició 3.12.** Direm que una funció  $f$  definida en un conjunts d'ordinals  $S$  és regressiva si  $f(\alpha) < \alpha$  per a tot  $\alpha \in S$  no nul.

Donem finalment el teorema de Fodor, o també conegut com *pressing down lemma*, que podem demostrar de manera directa tot fent ús del lema 3.9.

**Teorema 3.11** (Fodor). *Sigui  $\kappa$  cardinal regular no numerable. Sigui  $S$  conjunt estacionari i  $f : S \rightarrow \kappa$  funció regressiva. Aleshores hi ha un conjunt estacionari  $T \subseteq S$  i un  $\gamma < \kappa$  tals que  $f(\alpha) = \gamma$  per a tot  $\alpha \in T$ .*

*Demostració.* Sigui  $\kappa$  cardinal regular no numerable,  $S$  conjunt estacionari, i  $f : S \rightarrow \kappa$  funció regressiva.

Consideri's per a cada  $\gamma < \kappa$  el conjunt

$$E_\gamma = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$$

Suposem, per absurd, que  $E_\gamma$  no és estacionari per cap  $\gamma < \kappa$ . Sigui doncs per a cada  $\gamma < \kappa$  un conjunt club  $C_\gamma$  tal que

$$C_\gamma \cap E_\gamma = \emptyset \quad (8)$$

Aleshores  $f(\alpha) \neq \gamma$  per a tot  $\alpha \in C_\gamma \cap S$ . Definim  $C = \Delta_{\gamma < \kappa} C_\gamma$  la intersecció diagonal. Veurem ara que el conjunt  $S \cap C$  és estacionari. Pel lema 3.9,  $C$  és club en  $\kappa$ . Per tant, com que  $S$  és estacionari,  $C \cap S \neq \emptyset$ . Sigui doncs  $\delta \in C \cap S$ . Aleshores  $\delta \in C_\gamma$  per a cada  $\gamma < \delta$ . Per tant,  $\delta \notin E_\gamma$  per a tot  $\gamma < \delta$ , per (8). Per tant,  $f(\delta) \neq \gamma$  per a tot  $\gamma < \delta$ , i per tant  $f(\delta) \geq \delta$ , cosa que contradiu que  $f$  sigui regressiva.

□

### 3.3 Arbres

Introduïm, per a finalitzar el capítol, el concepte d'arbre. Els arbres tenen rellevància pròpia en la teoria i conjunts i donen peu a múltiples problemes i aplicacions. Hom pot trobar-ne una exposició més detallada i que aprofundeix en el tema a [5]. Aquí en donem les definicions bàsiques i un exemple clàssic amb cardinals.

**Definició 3.13.** Sigui  $(T, <)$  un conjunt parcialment ordenat. Direm que  $T$  és un arbre si per a cada  $x \in T$  el conjunt  $\{y \in T \mid y < x\}$  està ben ordenat per  $<$ .

Sovint els arbres tenen mínim global. És a dir, són tal que hi ha un element  $x \in T$  tal que  $x \leq y$  per a tot  $y \in T$ . Direm que aquest mínim és l'*arrel* de l'arbre, en cas de ser-hi.

**Definició 3.14.** Sigui  $T$  un arbre.

1. Si  $x \in T$ , definim l'*altura* de  $x$ ,  $ht_T(x)$ , com  $o.t(\{y \in T \mid y < x\})$ .
2. Per a cada ordinal  $\alpha$ , el *nivell*  $\alpha$ -èsim de  $T$  és

$$Lev_T(\alpha) = \{x \in T \mid ht_T(x) = \alpha\}$$

3. Definim l'altura de l'arbre,  $ht(T)$ , com el mínim ordinal  $\alpha$  tal que  $Lev_T(\alpha) = \emptyset$ .

**Definició 3.15.** Sigui  $T$  un arbre. Un subconjunt  $T' \subseteq T$  és un *subarbre* de  $T$  si per a tot  $x \in T'$  es té  $ht_T(x) = ht_{T'}(x)$ .

L'exemple trivial d'arbre és el buit amb l'ordre buit. Qualsevol conjunt ben ordenat és també un arbre, en particular, ho és qualsevol ordinal  $\delta$ . Si  $\alpha < \delta$  llavors  $ht_\delta(\alpha) = \alpha$ , i  $ht(\delta) = \delta$ .

Vegem ara un exemple de més interès. Sigui  $\kappa$  cardinal infinit i  $\delta$  un ordinal. Notem

$$\kappa^{<\delta} = \bigcup_{\alpha < \delta} \kappa^\alpha \quad (9)$$

on  $\kappa^\alpha$  denota el conjunt de funcions de  $\alpha$  en  $\kappa$ . Hom pot pensar les funcions de  $\kappa^\alpha$  com a successions d'elements de  $\kappa$  de mida  $\alpha$ . Definim un ordre parcial en  $\kappa^{<\delta}$  com segueix:

$$f < g \iff g \restriction dom(f) = f \text{ i } f \neq g \quad (10)$$

on  $g \restriction dom(f)$  indica la restricció de la funció  $g$  al domini de  $f$ . Aleshores  $(\kappa^{<\delta}, <)$  és un arbre. D'aquest arbre se'n diu *arbre*  $\kappa$ -*ari* d'altura  $\delta$ . No és difícil veure que  $ht(\kappa^{<\delta}) = \delta$  i que per a tot  $\alpha < \delta$  es té  $Lev_{\kappa^{<\delta}}(\alpha) = \alpha$ .

## 4 El teorema de Silver

L'objectiu d'aquest últim capítol és demostrar el teorema de Silver que enunciem tot seguit. En les seccions anteriors hem introduït les eines per a poder donar-ne una demostració detallada. Seguim el guió que fa [3] al vuitè capítol. La idea ha estat essencialment de donar implicacions clares i aportar alguns detalls que omet la font bibliogràfica. Donem doncs el teorema:

**Teorema 4.1** (Teorema de Silver). *Sigui  $\kappa$  cardinal singular de cofinalitat no numerable. Si  $2^\lambda = \lambda^+$  per a tot cardinal  $\lambda < \kappa$ , aleshores  $2^\kappa = \kappa^+$ .*

Val la pena remarcar que el teorema de Silver demana que el cardinal sigui singular i de cofinalitat no numerable. En particular, hom pot dir que si la hipòtesi del continu (GCH d'ara endavant) falla en algún cardinal, el primer cardinal on falla no pot ser pas singular i de cofinalitat no numerable.

Definim el concepte de *successió normal*:

**Definició 4.1.** Sigui  $\alpha$  un ordinal i  $\{\alpha_\zeta\}_{\zeta < \alpha}$  una successió d'ordinals. Diem que la successió és *normal* si és estrictament creixent i si

$$\sup_{\delta < \zeta} \alpha_\delta = \alpha_\zeta$$

per a tot  $\zeta < \alpha$ .

Fem notar que si  $\kappa$  és cardinal singular sempre podem trobar una successió normal  $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha < cf(\kappa)}$  de cardinals cofinal en  $\kappa$ . Notem també que, si es compleix GCH sota  $\kappa$  i  $\kappa$  és límit, aleshores  $2^\lambda < \kappa$  per a tot  $\lambda < \kappa$ , perquè  $2^\lambda = \lambda^+ \leq \kappa$  i perquè  $\kappa$  és límit. És a dir es té:

**Proposició 4.2.** *Sigui  $\kappa$  cardinal límit tal que GCH es compleix sota  $\kappa$ . Aleshores  $\kappa$  és cardinal límit fort.*

En particular, doncs, si  $\kappa$  compleix les hipòtesis del teorema de Silver, i doncs és límit perquè es singular, llavors  $\kappa$  és cardinal límit fort, i es té  $2^\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$ , per la proposició 2.19 del capítol 2.

**Lema 4.3.** *Sigui  $\kappa$  cardinal singular de cofinalitat no numerable. Suposem que  $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$  per a tot cardinal  $\lambda < \kappa$ . Sigui  $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha < cf(\kappa)}$  successió normal de cardinals cofinal en  $\kappa$ . Aleshores, si el conjunt*

$$\{\alpha < cf(\kappa) \mid \kappa_\alpha^{cf(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+\}$$

*és estacionari en  $cf(\kappa)$ , llavors  $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$ .*

Veiem que en efecte el teorema de Silver és conseqüència d'aquest lema:

*Demostració del teorema 4.1 a partir del lema 4.3.* Veiem primer que, sota les hipòtesis del teorema de Silver es tenen les hipòtesis del lema. Suposem doncs que GCH es compleix per sota de  $\kappa$  i que  $\kappa$  és cardinal singular de cofinalitat no numerable. En particular es té que  $\kappa$  és cardinal límit fort, i, pel punt (1) de la proposició 2.19,  $\lambda^\eta < \kappa$  per a tot  $\eta, \lambda < \kappa$ . Com que  $cf(\kappa) < \kappa$  perquè  $\kappa$  és singular, tenim  $\lambda^{cf(\kappa)} < \kappa$  per a tot  $\lambda < \kappa$ , com demana el lema.

Ara, sigui  $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha < cf(\kappa)}$  una successió normal i cofinal en  $\kappa$  i posem

$$S_\kappa = \{\alpha < cf(\kappa) \mid \kappa_\alpha^{cf(\kappa)} = \kappa_\alpha^+\}$$

N'hi ha prou en veure que  $S_\kappa$  és estacionari. Sota les hipòtesis del teorema de Silver es té  $S_\kappa = cf(\kappa)$ , que és club en  $cf(\kappa)$  i per tant estacionari. Vegem que en efecte  $S_\kappa = cf(\kappa)$ : pel teorema de König és clar que per a tot  $\alpha < cf(\kappa)$ ,  $\kappa_\alpha^+ \leq \kappa_\alpha^{cf(\kappa)}$ . Per a l'altra desigualtat:

$$\kappa_\alpha^{cf(\kappa)} \leq \kappa_\alpha^{\kappa_\alpha} = 2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$$

Hem vist doncs que es tenen les hipòtesis del lema 4.3, i tenim doncs  $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+$ . Com que  $\kappa$  és límit fort, per la proposició 2.19, tenim  $2^\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$ , i es té el teorema.  $\square$

La resta de la secció té com a objectiu demostrar el lema 4.3. Ho farem per al cas  $\kappa = \aleph_{\omega_1}$ , tot i que el cas general no presenta dificultats afegides. Hom pot usar arguments semblants tot reemplaçant  $\omega_1$  per  $cf(\kappa)$  i  $\aleph_{\omega_1}$  per  $\kappa$ . Introduïm primer la noció de funcions quasi disjunctes.

**Definició 4.2.** Siguin  $f$  i  $g$  funcions definides a  $\omega_1$ . Diem que són *quasi disjunctes* si hi ha algun  $\alpha_0 < \omega_1$  tal que per a tot  $\alpha \geq \alpha_0$ ,  $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ . Direm que una família,  $F$ , infinita de funcions és quasi disjunta si llurs funcions són quasi disjunctes dues a dues.

Per a demostrar que  $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1+1}$  la idea és fitar, sota certes hipòtesis, una família de funcions quasi disjunta convenient. Donem ara el lema que farem servir per a demostrar el lema 4.3.

**Lema 4.4.** Supposem  $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$  per a tot  $\alpha < \omega_1$ . Siguin  $F$  una família de funcions quasi disjunta tal que:

$$F \subseteq \prod_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$$

per a alguna família de conjunts  $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$  i de manera que el conjunt

$$\{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+1}\}$$

és estacionari en  $\omega_1$ . Aleshores  $|F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$

*Demostració del lema 4.3 a partir del lema 4.4.* Supposem les hipòtesis del lema 4.3 pel cas  $\kappa = \aleph_{\omega_1}$ . Com que  $cf(\aleph_{\omega_1}) = \omega_1$  tenim que  $\aleph_\alpha^{\omega_1} < \aleph_{\omega_1}$  per a tot  $\alpha < \omega_1$ , que és la primera hipòtesis del lema 4.4.

Suposem sense pèrdua de generalitat que la successió normal cofinal en  $\aleph_{\omega_1}$  és del tipus  $\{\aleph_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ . Supposem doncs també que el conjunt  $\{\alpha < \omega_1 \mid \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_{\alpha+1}\}$  és estacionari.

La idea ara és trobar un conjunt de funcions quasi disjunctes apropiat amb  $A_\alpha = \aleph_\alpha^{\omega_1}$  i aplicar el lema 4.4.

Considerem una funció  $h : \omega_1 \rightarrow \aleph_{\omega_1}$ . Definim una funció  $f_h : \omega_1 \rightarrow \aleph_{\omega_1}^{\omega_1}$  com següeix:

$$\begin{aligned} f_h : \omega_1 &\longrightarrow \aleph_{\omega_1}^{\omega_1} \\ \alpha &\longmapsto h_\alpha : \omega_1 \rightarrow \aleph_\alpha \\ h_\alpha(\zeta) &= \begin{cases} h(\zeta) & \text{si } h(\zeta) < \aleph_\alpha \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned}$$

Posem ara  $F = \{f_h \mid h \in \aleph_{\omega_1}^{\omega_1}\}$ . Veiem ara que  $F$  és una família quasi disjunta. Sigui  $g, h \in \aleph_{\omega_1}^{\omega_1}$  diferents: és a dir tal que hi ha un  $\zeta < \omega_1$  tal que  $g(\zeta) \neq h(\zeta)$ . Sigui  $\alpha$  el mínim tal que  $g(\zeta) < \aleph_\alpha$  i  $h(\zeta) < \aleph_\alpha$ . Aleshores, per a tot  $\gamma \geq \alpha$ , tenim

$$f_h(\gamma) = h_\gamma \neq g_\gamma = f_g(\gamma)$$

perquè, com que  $\aleph_\gamma \geq \aleph_\alpha$ , tenim:

$$h_\gamma(\zeta) = h(\zeta) \neq g(\zeta) = g_\gamma(\zeta)$$

i doncs les funcions imatge de  $\gamma$  són diferents.

És clar també que

$$F \subseteq \prod_{\alpha < \omega_1} \aleph_\alpha^{\omega_1}$$

A més a més, donades  $g, h \in \aleph_{\omega_1}^{\omega_1}$ , aleshores  $f_h \neq f_g$ , perquè  $f_h$  i  $f_g$  són quasi disjunts, i en particular diferents. Per tant,  $|F| = \aleph_{\omega_1}^{\omega_1}$ .

Ara veurem que el conjunt

$$\{\alpha < \omega_1 \mid \aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_{\alpha+1}\}$$

és estacionari, en vistes d'aplicar el lema 4.4.

Definim  $A = \{\alpha < \omega_1 \mid \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_{\alpha+1}\}$ .  $A$  és estacionari per hipòtesi. I definim els següents conjunts:

$$\begin{aligned} B &= \{\alpha < \omega_1 \mid \aleph_\alpha > 2^{\omega_1} \wedge \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}\} \\ B_0 &= \{\alpha < \omega_1 \mid \aleph_\alpha > 2^{\aleph_1}\} \\ B_1 &= \{\alpha < \omega_1 \mid cf(\aleph_\alpha) = \omega\} \end{aligned}$$

Veurem que  $B$  és estacionari. Fem notar primer que  $B_0$  és club perquè és un segment final. No és difícil veure que  $B_1$  també és club. Ara, sigui  $C$  un conjunt club en  $\omega_1$  qualsevol. Posem  $C' = C \cap B_0 \cap B_1$ .  $C'$  és club, i per tant,  $A \cap C' \neq \emptyset$ , perquè  $A$  és estacionari. Sigui  $\alpha \in A \cap C'$ . Aleshores  $\alpha \in C$  i  $\alpha \in B_1$ . Com que  $\alpha \in B_1$ , tenim que  $cf(\aleph_\alpha) = \omega$ , i doncs, com que a més a més  $\alpha \in A$ , tenim  $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$ , i doncs  $\alpha \in B$ , i  $B \cap C \neq \emptyset$ . Això demostra que  $B$  és estacionari.

Usant el teorema d'exponenciació cardinal (teorema 2.3), hom pot veure que si  $\alpha \in B$ , aleshores  $\aleph_\alpha^{\omega_1} = \aleph_{\omega_1+1}$ . Per tant el conjunt  $\{\alpha < \omega_1 \mid \aleph_\alpha^{\omega_1} = \aleph_{\omega_1+1}\}$  és estacionari, i es compleixen les hipòtesis del lema 4.4. Tenim doncs  $|F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$ .

Ara, és clar que  $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_1+1}$ , perquè  $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = |\aleph_{\omega_1}^{\omega_1}| = |F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$ . L'altra desigualtat és clara, atès que el teorema de König dona  $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1}^{cf(\aleph_{\omega_1})} > \aleph_{\omega_1}$ , i tenim doncs  $\aleph_{\omega_1+1} \leq \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}$ .  $\square$

Ara, per a demostrar el lema 4.4 donem una versió del lema similar. Essencialment suposem que el conjunt que és estacionari és  $\{\alpha < \omega_1 \mid |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$  en comptes de  $\{\alpha < \omega_1 \mid |A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+1}\}$  i aleshores la fita per  $|F|$  és  $\aleph_{\omega_1}$ . Vegem-ho:

**Lema 4.5.** *Suposem que  $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$  per a tot  $\alpha < \omega_1$ . Sigui  $F$  una família de funcions quasi disjunta tal que*

$$F \subseteq \prod_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$$

per a certa família de conjunts  $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$  i de manera que el conjunt

$$\{\alpha < \omega_1 \mid |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$$

és estacionari. Aleshores  $|F| \leq \aleph_{\omega_1}$ .

*Demostració.* Atès que  $\{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$  és estacionari, podem suposar sense pèrdua de generalitat que el conjunt  $\{\alpha < \omega_1 : A_\alpha \subseteq \omega_\alpha\}$  també és estacionari. Definim

$$S_0 = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \text{ ordinal límit i } A_\alpha \subseteq \omega_\alpha\}$$

Notem que aquest conjunt és estacionari, atès que podem escriure  $S_0 = \{\alpha < \omega_1 \mid A_\alpha \subseteq \omega_\alpha\} \cap \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \text{ ordinal límit}\}$ , que són conjunt estacionari i club respectivament, i la intersecció d'un conjunt club i d'un estacionari és estacionari.

És clar que per a cada  $f \in F$ ,  $f(\alpha) < \omega_\alpha$  per a tot  $\alpha \in S_0$ . Ara, per a cada  $\alpha \in S_0 \setminus \{0\}$ , hi ha algun  $\beta < \alpha$  tal que  $f(\alpha) < \omega_\beta$ , atès que per ser  $\alpha$  límit  $f(\alpha) < \omega_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \omega_\beta$ . Posem  $\beta = g(\alpha)$ . Aleshores  $g$  és una funció regressiva definida a  $S_0 \setminus \{0\}$ , que és un conjunt estacionari. Pel teorema de Fodor (teorema 3.11), hi ha un conjunt estacionari  $S \subseteq S_0$  en què  $g$  hi és constant. Cal remarcar que tant  $S$  com  $g$  depenen de cada funció  $f$ .

Vegem que  $f$  està fitada en  $S$ : sigui  $\gamma < \omega_1$  tal que  $g(\alpha) = \gamma$  per a tot  $\alpha \in S$ . Aleshores, per a tot  $\delta \in S$  tenim que  $f(\delta) < \omega_{g(\delta)} = \omega_\gamma$ .

Per a cada  $f \in F$  tenim doncs un parell  $(S, f \upharpoonright S)$ , on  $S$  és estacionari i  $f \upharpoonright S$  és una funció fitada. Podem doncs definir la següent funció injectiva:

$$f \mapsto (S, f \upharpoonright S) \quad (11)$$

La idea és mirar de fitar el cardinal del conjunt d'arribada i tindrem una fita per  $|F|$ . Vegem primer que la funció (11) és injectiva: sigui  $S$  estacionari i  $f, g \in F$  deferents tals que  $f \upharpoonright S = g \upharpoonright S$ . Al ser  $S$  estacionari,  $S$  és no afitat, i voldria dir que  $f$  i  $g$  coincideixen en un conjunt no afitat. Ara bé, això contradiu el fet que  $f$  i  $g$  són quasi disjunts i doncs només poden coincidir en un conjunt fitat.

Fitem ara el conjunt d'arribada de la funció (11). Notem primer que tota funció de  $S$  en  $\aleph_{\omega_1}$  fitada és de la forma  $f : S \rightarrow \aleph_\gamma$  per a algun  $\gamma < \omega_1$ . Així, usant lema 2.4 del capítol 2, podem fitar el cardinal d'aquest conjunt de funcions:

$$\left| \bigcup_{\gamma < \omega_1} \aleph_\gamma^S \right| = \sum_{\gamma < \omega_1} \aleph_\gamma^{|S|} \leq \sum_{\gamma < \omega_1} \aleph_\gamma^{\omega_1} \leq \omega_1 \cdot \sup_{\gamma < \omega_1} \aleph_\gamma^{\omega_1} = \sup_{\gamma < \omega_1} \aleph_\gamma^{\omega_1} \leq \aleph_{\omega_1}$$

atès que, per hipòtesis,  $\aleph_\gamma^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$  per a tot  $\gamma < \omega_1$ .

Finalment, novament pel fet que  $\aleph_\gamma^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$  per a tot  $\gamma < \omega_1$ , tenim  $|\mathcal{P}(\omega_1)| = 2^{\aleph_1} \leq \aleph_0^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ . I podem fitar el conjunt d'arribada:

$$\left| \mathcal{P}(\omega_1) \times \bigcup_{\gamma < \omega_1} \aleph_\gamma^S \right| \leq 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$$

I, com que la funció (11) és injectiva, tenim  $|F| \leq \left| \mathcal{P}(\omega_1) \times \bigcup_{\gamma < \omega_1} \aleph_\gamma^S \right| \leq \aleph_{\omega_1}$ , com volíem.

□

Ara, amb l'ajuda dels ultrafiltres, podem demostrar el lema 4.4.

*Demostració del lema 4.4.* Posem  $S = \{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+1}\}$ , que és estacionari. Sense pèrdua de generalitat, suposem que  $A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+1}$  per a tot  $\alpha \in S$ . Sigui  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre que estigui el filtre club de  $\omega_1$  i tal que contingui  $S$ . Aquest ultrafiltre sempre existeix, perquè  $\text{Club}(\omega_1) \cup \{S\}$  compleix la propietat d'interseccions finites, i doncs, per la proposició 3.3, hi ha algun filtre que contingui  $\text{Club}(\omega_1) \cup \{S\}$ , i que podem estendre a un ultrafiltre, pel teorema de tarski (teorema 3.5). Notem que tot  $T \in \mathcal{U}$  és estacionari, atès que tot club pertany a  $\mathcal{U}$ , i doncs la intersecció de qualsevol club amb  $T$  és de  $\mathcal{U}$ , i en particular no buida.

La idea és definir un ordre total en la família de funcions quasi disjunctes  $F$ , i posar  $F$  com a unió de subconjunts que hom pugui fitar usant el lema 4.5.

Definim un ordre  $<$  en  $F$  de la següent manera:

$$f < g \iff \{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U} \quad (12)$$

L'ordre (12) és un ordre total en  $F$ . Vegem-ho: és clar que és irreflexiva. Veiem la transitivitat: Siguin  $f, g, h \in F$  tals que  $f < g$  i  $g < h$ . Com que  $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$  i  $\{\alpha < \omega_1 \mid g(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$ , tenim:

$$\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \supseteq \{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \omega_1 \mid g(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$$

i com que  $\mathcal{U}$  és filtre,  $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$ .

Vegem que l'ordre és total: siguin  $f, g \in F$ , amb  $f \neq g$ . Suposem, per absurd, que cap funció és menor que l'altra en l'ordre (12):  $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \notin \mathcal{U}$ , i  $\{\alpha < \omega_1 \mid g(\alpha) < f(\alpha)\} \notin \mathcal{U}$ . Com que  $\mathcal{U}$  és un ultrafiltre, els complementaris d'aquests dos conjunts són de l'ultrafiltre, i en particular llur intersecció:

$$\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) \geq g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \omega_1 \mid g(\alpha) \geq f(\alpha)\} = \{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$$

Això implica que  $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$  és estacionari. Ara bé, com que  $f$  i  $g$  són quasi disjunctes, hi ha un  $\alpha_0$  tal que  $f(\alpha) \neq g(\alpha)$  per a tot  $\alpha \geq \alpha_0$ . El conjunt  $\{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \geq \alpha_0\}$  és club perquè és un segment final en  $\omega_1$ , i per tant la intersecció amb  $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$  és no buida, perquè aquest últim conjunt és estacionari. Això és una contradicció. Hem vist doncs que l'ordre (12) és total.

Definim ara per a cada  $f \in F$  el conjunt

$$F_f = \{g \in F \mid g(\alpha) < f(\alpha) \forall \alpha \in T_f \cap S \text{ per algun } T_f \text{ estacionari}\}$$

Veurem ara que  $|F_f| \leq \aleph_{\omega_1}$  per a tota  $f \in F$ , aplicant el lema 4.5.

Sigui  $f \in F$ . Per hipòtesis, per a cada  $\alpha \in S$  tenim que  $|f(\alpha)| \leq \aleph_\alpha$ . Ara, per a cada conjunt estacionari  $T_f$ , si  $g \in \{g \in F \mid g(\alpha) < f(\alpha) \forall \alpha \in T_f \cap S\}$ , aleshores  $g(\alpha) < f(\alpha)$  per a tot  $\alpha \in S \cap T_f$ . Per tant, tenim, en virtut del lema 4.5, per a cada  $T_f$  estacionari,

$$|\{g \in F \mid g(\alpha) < f(\alpha) \forall \alpha \in T_f \cap S\}| \leq \aleph_{\omega_1}$$

i, per tant, com que el cardinal de conjunts estacionaris en  $\omega_1$  està fitat per  $2^{\aleph_1}$ , tenim que  $|F_f| \leq 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$ .

Ara, fem notar que si  $g < f$ , aleshores  $g \in F_f$ . Vegem-ho: si  $g < f$ , aleshores, per definició, hi ha un conjunt  $T_f \in U$  tal  $g(\alpha) < f(\alpha)$  per a tot  $\alpha \in T_f$ . Com que  $T_f$  pertany a  $U$ ,  $T_f$  és estacionari. Com que  $S \in U$ ,  $T_f \cap S \in U$ , i en particular  $T_f \cap S$  és estacionari. Per tant,  $g \in F_f$ . Això implica que  $|\{g \in F \mid g < f\}| \leq F_f$  per a tota  $f \in F$ , i doncs  $|\{g \in F \mid g < f\}| \leq \aleph_{\omega_1}$  per a tota  $f \in F$ .

Veurem ara que  $|F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$ . Vegem-ho per reducció a l'absurd: suposem que  $|F| > \aleph_{\omega_1+1}$ . Aleshores, com que  $<$  és un ordre total en  $F$ , existeix una funció  $f \in F$  tal que  $|\{g \in F \mid g < f\}| = \aleph_{\omega_1+1}$ . Això és una contradicció amb el fet que  $|\{g \in F \mid g < f\}| \leq \aleph_{\omega_1}$ .  $\square$

Hem vist doncs el teorema de Silver, que dona informació sobre  $2^\kappa$  per a  $\kappa$  singular i de cofinalitat no numerable. Aquest teorema fou un dels primers teoremes importants pel que fa a l'exponenciació cardinal, i el demostrà per primer cop Jack Silver als anys setanta. La demostració que hem exposat és posterior i de Thomas Jech.

Alguns anys abans a l'aparició del teorema de Silver, Easton demostrà, a grans trets, que la funció continu  $2^\kappa$  podia prendre valors tant grans com hom vulgués, si  $\kappa$  és cardinal regular. És a dir que GCH era senzillament un cas únic possible entre molts d'altres. La idea era que això es pogués generalitzar a cardinals singulars, i que, en particular, un cardinal singular pogués ser el mínim contraexemple a la hipòtesis del continu. Silver veié que aquest no era pas el cas i això fou per molts un resultat inesperat.

Posteriorment al teorema de Silver aparegué el teorema de Galvin i Hajnal, que també restringeix el comportament de  $2^\kappa$  per a cardinals singulars de cofinalitat no numerable, i només de cofinalitat no numerable. Podem enunciar-lo:

**Teorema** (Galvin i Hajnal). *Si  $\aleph_\alpha$  és cardinal límit fort de cofinalitat no numerable, aleshores*

$$2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{(2^{\aleph_\alpha})^+}$$

Posteriorment, Magidor trobà un contraexemple (un model de ZFC, vegeu [6]) pel teorema de Silver amb cardinals singulars de cofinalitat  $\omega$ , tot usant teoria de grans cardinals. Cal mencionar també la teoria de possibles cofinalitats (PCF) de Shelah, que dugué a l'aparició de nombrosos resultats d'aritmètica cardinal i que representà un salt important dels mètodes de què es disposava anteriorment. Donem, a tall d'exemple, el teorema central de la teoria PCF:

**Teorema.** *Si  $\aleph_\omega$  és cardinal límit fort, aleshores  $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$ .*

Hom sap, doncs, que el teorema de Silver no es pot generalitzar, i que només és vàlid en el cas que hem donat.

## 5 Conclusions

Hem vist en aquest treball alguns teoremes fonamentals d'exponenciació de cardinals que es poden obtenir amb eines elementals i amb combinatòria infinita de teoria de conjunts. Hem donat inicialment les restriccions més immediates dels valors de  $2^\kappa$  o de  $\kappa^\lambda$ , com el teorema de König o el fet que  $cf(2^\kappa) < \kappa$  per  $\kappa$  infinit. El primer teorema destacable és el teorema d'exponenciació cardinal del capítol 2 (teorema 2.3), que permet expressar  $\kappa^\lambda$  com a funció de la funció gimel sota certes hipòtesis, llevat que no es doni  $\kappa^\lambda = 2^\lambda$  o  $\kappa^\lambda = \kappa$ .

Hem introduït també eines fonamentals de combinatòria infinita, com els filtres i els ultrafiltres, el filtre club d'un cardinal regular no numerable, i els conjunts estacionaris. Aquestes nocions, que tenen rellevància pròpia en teoria de conjunts, són impescindibles en la demostració que hem donat del teorema de Silver, un dels primers teoremes importants envers els valors que pot prendre  $2^\kappa$ , per a  $\kappa$  cardinal singular i de cofinalitat no numerable.

Esperem haver fet palès l'interès que té l'aritmètica de cardinals i els problemes o incògnites que es plantegen quan hom s'endinsa una mica en el seu estudi. Al final de l'últim capítol hem insinuat resultats posteriors coneguts sobre el tema, i línies d'estudi, més o menys immediates, que hom podria encetar després d'haver-se familiaritzat amb els teoremes i resultats exposats en aquest treball.

## Referències bibliogràfiques

- [1] Casanovas, Enrique. *Apuntes de teoría elemental de conjuntos*. Teoría elemental de conjuntos. Universitat de Barcelona, 2023.
- [2] Hrbacek, Karel i Jech, Thomas. *Introduction to set theory*. Third edition, revised and expanded, Nova York. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1999.
- [3] Jech, Thomas. *Set theory*. 3rd millenium edition, revised and expanded, Berlin. Springer, 2002.
- [4] Jech, Thomas. “Singular Cardinals and the PCF theory”. A: *The Bulletin of Symbolic Logic* 1.4 (1995), pàg. 408 - 424. DOI: <https://doi.org/10.2307/421130>.
- [5] Kunen, Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam. North Holland Publihing Company, 1980.
- [6] Magidor, Menachem. “On the singular cardinals problem II”. A: *Annals of Mathematics* 106.3 (1977), pàg. 514 - 547. DOI: <https://doi.org/10.2307/1971065>.
- [7] Moschovakis, Yiannis. *Notes on Set Theory*. Second edition, Los Angeles. Springer, 2005.
- [8] Shimmerling, Ernest. *A Course on Set Theory*. Cambridge. Cambridge Universitiy Press, 2011.

