UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

MÁS ALLÁ DE MENGER

Autor: Xiao Bo Ye Xu

Director: Dr. Kolja Knouer
Realitzat a: Departament Grafs

Barcelona, 15 de enero de 2025

Resumen

En este trabajo explicaré las tres demostraciones que aparecen en el libro de Diestel del Teorema de Menger, uno de los teoremas fundamentales de la teoría de grafos. El teorema ofrece una caracterización de cómo separar un grafo en términos de sus vértices y establece una relación con los caminos disjuntos que contiene. Además, analizaré una conjetura reciente que generaliza el teorema, en la que se plantea los casos donde los caminos no solo sean disjuntos, sino que también se encuentren a una gran distancia entre ellos. En particular, me centraré en los casos resueltos: el caso en el que hay dos caminos, que se ha demostrado como cierto y el caso en el que hay tres caminos, para el cual se ha encontrado un contraejemplo.

2020 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

A mis amigos que siempre me animan y me apoyan, a mi familia que nos me ayudan a su manera y a mi tutor Dr.Knauer por su apoyo y dedicación.

Índice general

1. Introducción **1**

1.1. Definiciones y notaciones 1

1.2. Teorema de Menger 2

1.3. Conjetura de Menger generalizada 3

1.4. Resultados previos 5

2. Teorema de Menger **7**

2.1. Primera demostración 8

2.2. Segunda demostración 10

2.3. Tercera demostración 12

3. Conjetura de Menger para k=2 **15**

3.1. Intervalos 15

3.2. Demostración 18

4. Contraejemplo para el caso k=3 **23**

4.1. Demostración 23

4.2. Discusión de la proposición 4.1.2 28

5. Conclusiones **29**

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo repasaremos algunos elementos básicos de los grafos y enunciaré el Teorema de Menger junto a la conjetura basada en su generalización.

1.1. Definiciones y notaciones

Un *grafo* G es un par $G = (V, E)$ de conjuntos finitos que cumple $E \subseteq [V]^2$, donde los elementos de V los llamaremos *vértices* y los elementos de E los llamaremos *aristas*. Normalmente se representan gráficamente dibujando un punto para cada vértice y una línea que une dos de estos puntos para cada arista. Denotaremos $V[G]$ al conjunto de vértices de G y por $E[G]$ al conjunto de aristas.

En este documento todos los grafos y conjuntos de vértices serán finitos. Si x, y son dos vértices de un grafo G, escribiremos xy para una arista que las una. El *orden* de un grafo G es el número de sus vértices, escribiremos $|G|$. Por otro lado para el número de sus *aristas*, escribiremos $||G||$. Si un grafo con orden 0 o 1 lo llamaremos *trivial*.

Dado un subconjunto de vértices $U \subseteq V[G]$ de un grafo G, escribiremos $G\backslash U$ para $G[V[G]\backslash U]$. Es decir, $G\backslash U$ es el grafo que se obtiene eliminando los vértices de $U \cap V[G]$, junto a las aristas que conectan estos vértices y las aristas que unen U con $V\backslash U$.

Definición 1.1.1. *El grado $d_G(v) = d(v)$ de un vértice $v \in V[G]$ es el número de aristas que inciden en él. El número $\mathcal{J}(G) := \min\{d(v)|v \in V\}$ es el mínimo grado de G y $\mathcal{J}(G) := \max\{d(v)|v \in V\}$ es el máximo grado de G.*

Un *camino* es un grafo $P = (V, E)$ con $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ y $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}$ donde todos los x_i son diferentes. Los vértices x_0 y x_k son los *finales* del camino y el resto, internos. Dos vértices son *vecinos* si existe una arista que los une.

Notación 1.1.2. *Normalmente nos referiremos al camino solo por su secuencia de vértices, es decir, $P = x_ox_1 \ldots x_k$ es un camino de x_o a x_k. Para $0 \leq i \leq j \leq k$ escribiremos*

$$Px_i := x_0 \ldots x_i$$
$$x_iP := x_i \ldots x_k$$
$$x_iPx_j := x_i \ldots x_j$$

Cuando no incluyamos los finales de los camino, escribiremos

$$\mathring{P} := x_1 \dots x_{k-1}$$
$$P\mathring{x}_i := x_0 \dots x_{i-1}$$
$$\mathring{x}_i P := x_{i+1} \dots x_k$$
$$\mathring{x}_i P \mathring{x}_{j+1} := x_i \dots x_{j-1}$$

Notación 1.1.3. *La unión de tres caminos $Px \cup xQy \cup yR$, si esta es un camino, lo denotaremos simplemente como $PxQyR$*

Definición 1.1.4. *Sean dos conjuntos A, B de vértices, diremos que un camino $P = x_0 \dots x_k$ es un $A-B$ camino o un camino de $A-B$ si $V(P) \cup A = x_0$ y $V(P) \cup B = x_k$.*

Dos o más caminos son *disjuntos* si ninguno de los vértices internos de un camino coincide con los de los otros. La *longitud* de un camino es el número de aristas que tiene. La *distancia* $d_G(x, y)$ en G de dos vértices x, y es la longitud del camino más corto entre $x - y$, si no existen diremos que $d(x, y) := \infty$. Por otra parte, dados dos conjuntos de vértices X, Y, $d_G(X, Y) = \text{mín}\{d_G(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Por último, un *recorrido* de longitud k en un grafo G es una secuencia alternada de vértices y aristas de G, $v_0 e_0 v_i e_i \dots e_{k-1} v_k$. A diferencia de un camino en G,un recorrido sí puede pasar dos veces por un vértice.

1.2. Teorema de Menger

Antes de formular el teorema, hay que definir dos conceptos clave que relaciona. Un grafo G no trivial diremos que está *conectado* o es *conexo* (fig.1.1) si todo par de vértices está unidos por un camino en G. Este concepto es fundamental en la teoría de grafos y tiene aplicaciones prácticas, por ejemplo nos permite ,entender como se comporta una red local (LAN) en caso de que hayan fallos y cómo podemos buscar rutas alternativas.

Definición 1.2.1. *Sean dos conjuntos de vértices $A, B \subseteq V[G]$ y un conjunto de vértices $X \subseteq V[G]$ diremos que X* separa *los conjuntos A y B en G si todo camino de $A-B$ en G contiene un vértice de X (Figura 1.1).*

Esto nos permite estudiar en ejemplo anterior de redes locales, cuantos nodos podemos eliminar sin que la propia estructura de redes se vea afectada.

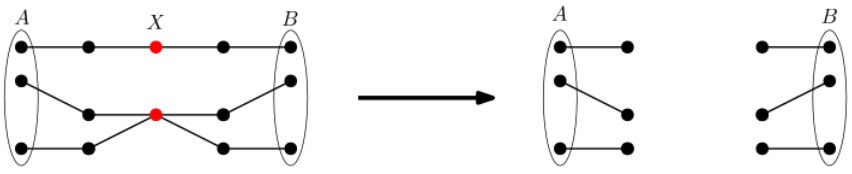

Figura 1.1: A la izquierda ejemplo de grafo conexo con el conjunto X marcado en rojo, a la derecha el mismo grafo separado por X.

Ahora que tenemos los dos conceptos, podemos enunciar el Teorema de Menger. El teorema fue demostrado por Karl Menger en el año 1927[5], esta demostración fue publicada en un artículo en aleman llamado "Zur allgemeinen Kurventheorie.[en] la revista *Fundamenta Mathematicae*. Fue uno de los grandes resultados y fundamental de la teoría de grafos del siglo XX:

Teorema 1.2.2 (Menger, 1927 [5]). *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $A, B \subseteq V$. Entonces, el mínimo número de vértices que separa A de B en G es igual al máximo número de A-B caminos mutuamente disjuntos en G.*

Con el pasar de los años, se han encontrado diferentes formas para demostrar el teorema usando diferentes conceptos, en el siguiente capítulo explicaré las tres demostraciones que aparecen en el libro de Diestel.

1.3. Conjetura de Menger generalizada

A partir del propio teorema, se planteó qué pasaría si no solo los k caminos fueran disjuntos, sino que además estuvieran a una distancia d entre ellos. Es por eso que Albrechtsen, Huynh, Jacobs, Knappe y Wollan [1] y por Georgakopoulos y Papasoglu [3], cada grupo por su parte, en 2023, propusieron la siguiente conjetura.

Conjetura 1.3.1. *Para todos los enteros $d, k \geq 1$ existe un $\ell(d, k) > 0$ con las siguientes propiedades. Sea G un grafo, y sean A, B dos conjuntos de vértices de G, entonces ocurre una de las dos:*

- *existen k caminos entre $A - B$, $P_1, \ldots, P_k$, tales que $d(P_i, P_j) \geq d$ para todo $1 \leq i < j \leq d$; o*
- *existe un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ con $|X| \leq k - 1$ tal que $d(P, X) \leq \ell(d, k)$ para todo camino P de $A - B$.*

Podemos ver que la dirección difícil de demostrar del Teorema de Menger corresponde a un caso particular de la conjetura (ver Capítulo 2), donde $k = \mathbb{N}$, $d = 1$ y la función $\ell(1, k)$ es constante con $\ell(1, k) = 0$:

Teorema 1.3.2. *Sea G un grafo, y sean A, B dos conjuntos de vértices de G, entonces para cualquier entero k, ocurre una de las dos:*

- *existen k caminos entre $A - B$ a disjuntos dos a dos; o*
- *existe un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ con $|X| \leq k - 1$ tal que todo camino entre $A - B$ contiene un vértice de X.*

Veamos otros casos de esta conjetura, tanto los que están abiertos, como los que han sido resueltos (Figura 1.2). Para el caso $k = 1$ y $d = \mathbb{N}$, la conjetura nos dice que o hay un camino de $A - B$ o hay un conjunto X con 0 vértices (es decir vacío) que está a una distancia $\ell(d, 1)$ de todos los caminos de $A - B$, este segundo punto solo ocurre cuando no hay caminos de A-B. Por lo tanto, este caso nos dice que los conjuntos A, B son conexos o los conjuntos $A - B$ son no conexos.

Para el caso $k = 2$, en 2023, dos grupos de matemáticos, Albrechtsen, Huynh, Jacobs, Knappe y Wollan [1] y Georgakopoulos y Papasoglu [3], cada grupo por su parte, demostraron ha que la conjetura se cumple. Por lo que el teorema dice lo siguiente:

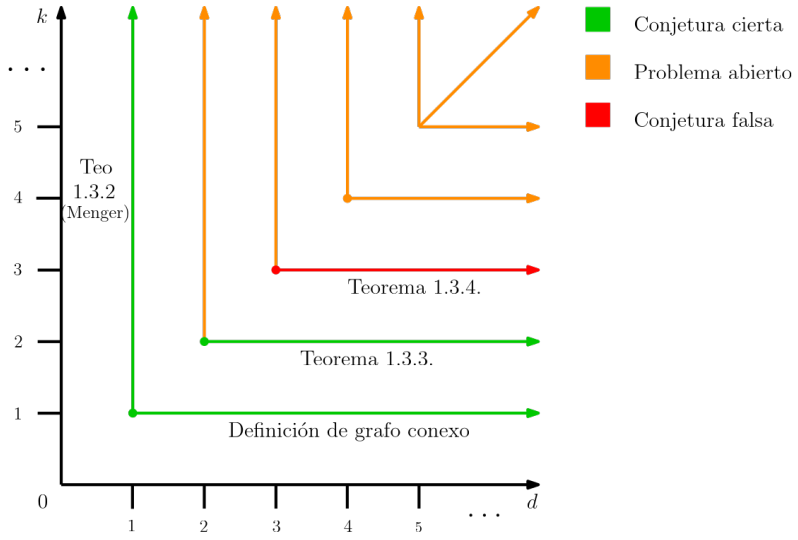

Figura 1.2: Gráfico con los diferentes casos de la conjetura

Teorema 1.3.3. *Sea G un grafo no vacío y sea $A, B \subseteq V(G)$, entonces se cumple una de las dos:*

- *existen dos caminos de $A - B$ con distancia como mínimo 3; o*
- *existe un $x \in V(G)$ tal que cada camino de $A - B$ contiene un vértice a distancia a lo sumo 161 de x.*

Sin embargo, en 2024, Nguyen, Scott y Seymour[6] propusieron una demostración más simple, que será la que veremos en el capítulo 3. El caso $k = 3$ era un caso con un interés especial, pues McCarty y Seymour demostraron que si la conjetura era cierta para una pareja $(3, k)$, entonces la conjetura era cierta para todo (d, k) con $d > 3$:

Teorema 1.3.4 (McCarty and Seymour, 2023 [1])**.** *Si la Conjetura 1.3.1 es cierta para $d = 3$ con una constante $\ell(3, k)$, entonces es cierta para todo $d \geq 3$ con constante $\ell(d, k) = 3\ell(3, k)$.*

Este teorema se publicó junto el artículo de Albrechtsen, Huynh, Jacobs, Knappe y Wollan [1], más adelante, en la Sección 1.4 daremos su demostración.

Volviendo a los casos, Nguyen, Scott y Seymour[6] demostraron que la conjetura es falsa para el caso donde $d = k = 3$:

Teorema 1.3.5. *Para cualquier entero $\ell > 0$ existe un grafo G y dos conjuntos A, B de vértices de G, tales que:*

- *no existen 3 caminos entre $A - B$, P_1, P_2, P_3, tales que $d(P_i, P_j) \geq 3$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$;*
- *no existe ningún conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ con $|X| \leq 2$ tal que $d(P, X) \leq \ell$ para todo camino P de $A - B$.*

A partir de este resultado, se puede ver que la conjetura no se cumple para $k = 3$ y un $d > 3$, usando la negación de la siguiente proposición:

Proposición 1.3.6. *Si la Conjetura 1.3.1 es cierta para el par (d, k), entonces también es cierta para el par (d', k) para todo $d' < d$.*

Esta proposición también la demostraremos en la Sección 1.4.

Después de estos casos, para $d \geq 3$ y una k arbitraria, el problema sigue abierto.

Por otro lado, si hablamos de los casos con d fija y k cualquiera, el caso $d = 1$ es el Teorema de Menger como ya hemos comentado. Para el caso $d = 2$ y k arbitraria el problema también sigue abierto. Sin embargo se han propuesto otras conjeturas similares con hipótesis cota de $|X|$ más débil, como la siguiente:

Conjetura 1.3.7. *Para todo k, d existen $\ell(d, k)$, $\ell'(d, k)$ tal que, para los G, A, B definidos en la Conjetura 1.3.1, entonces se cumple una de las dos:*

- *existen k caminos entre $A - B$, $P_1, \ldots, P_k$, tales que $d(P_i, P_j) \geq d$ para todo $1 \leq i < j \leq d$; o*
- *existe un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ con $|X| \leq \ell'(d, k)$ tal que $d(P, X) \leq \ell(d, k)$ para todo camino P entre $A - B$.*

Esta conjetura fue demostrada por Hendrey, Norin, Steiner y Turcotte [4] para $d = 2$, k arbitraria y un $\ell(d, \mathcal{J}(G)$, es decir que depende del grado máximo del grafo $\mathcal{J}(G)$.

Sin embargo, en este trabajo, solo nos vamos a centrar en explicar las tres demostraciones del Teorema de Menger que aparecen en el libro de Diestel, la demostración de la conjetura de Menger generalizado para $k = 2$ de Nguyen, Scott y Seymour y el contraejemplo para $k = d = 3$ que proponen[6].

1.4. Resultados previos

Antes de empezar con los teoremas importantes que usaremos para demostraciones futuras. El teorema nos dice que es suficiente demostrar los casos para el par $(3, k)$, ya que este implica el caso general:

Teorema 1.3.4 (McCarty and Seymour, 2023 [1])**.** *Si la Conjetura 1.3.1 es cierta para $d = 3$ con una constante $\ell(3, k)$, entonces es cierta para todo $d \geq 3$ con constante $\ell(d, k) = 3\ell(3, k)$.*

Demostración. Supondremos que la conjetura 1.3.1 se cumple para el grafo G y el par $(3, k)$. Sea H la d-ésima potencia de G, es decir, $V(H) = V(G)$ y dos vértices u, v son vecinos en H si y solo si $d_G(u, v) \leq d$. Sean A, B dos conjuntos de vértices de G. Por suponer que es cierto el caso para $(3, k)$, si existen $k - 1$ bolas de radio $3c$ en H cuya unión interseca todos los caminos de $A - B$ en H, entonces hay $k - 1$ bolas de radio $3cd$ en G tales que su unión interseca todos los caminos de $A - B$ en G. En caso contrario, (Por suponer que es cierto para el caso $(3, k)$) existen caminos de $A - B$, $P_1, \ldots, P_k$ en H tal que $d_H(P_i, P_j) \geq 3$ con $i \neq j$. Supongamos $P_1 = v_0, \ldots, v_t$. Para cada $0 \leq i \leq t - 1$, existe un camino S_i de longitud a lo sumo d en G entre v_i y v_{i+1}. Entonces, hay un camino de $v_0 - v_t$, digamos $P'_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{t-1} S_i$. Definimos análogamente $P'_2, \ldots, P'_k$. Veremos que $d_G(P'_i, P'_j) \geq d$ con $i \neq j$. Lo demostraremos por contradicción, supongamos que $d_G(P'_i, P'_j) \leq d$ para algún $i < j$. Entonces hay un camino de $V(P_i) - V(P_J)$ en G de longitud a lo sumo $d/2 + 2 + d/2 \leq 2d$. Por tanto, $d_H(P_i, P_j) \leq 2$, contradicción. □

Por otro lado, con la siguiente proposición, como he comentado anteriormente, si demostramos que no se cumple para el par (d', k), nos permite descartar los casos con los pares (d, k) con $d' < d$:

Proposición 1.3.6. *Si la Conjetura 1.3.1 es cierta para el par (d, k), entonces también es cierta para el par (d', k) para todo $d' < d$.*

Demostración. Veamos el primer punto de la conjetura, supongamos existen k caminos entre $A - B$, $P_1, \ldots, P_k$, tales que $d(P_i, P_j) \geq d$ para todo $1 \leq i < j \leq d$, como $d' < d$, tenemos $d(P_i, P_j) \geq d > d$. Y si existe un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ con $|X| \leq k-1$ tal que $d(P, X) \leq \ell(d, k)$ para todo camino P de $A - B$, podemos tomar $\ell(d', k) = \ell(d, k)$ y también lo tendríamos. □

Capítulo 2

Teorema de Menger

Como hemos mencionado, el Teorema de Menger es uno de los teoremas fundamentales de la teoría de grafos. En este capítulo explicaré el teorema y las 3 demostraciones que aparecen en el libro de Diestel [2].

Teorema 1.2.2 (Menger, 1927 [5])**.** *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $A, B \subseteq V$. Entonces, el mínimo número de vértices que separa A de B en G es igual al máximo número de A-B caminos mutuamente disjuntos en G.*

Dicho de otra forma, queremos ver que el mínimo número de vértices que tenemos que quitar de G para que A y B sean no conexos, es igual al máximo número de caminos disjuntos de A a B.

Definición 2.0.1. *Dados G, A, B definidos como en el Teorema 1.2.2, usaremos $k = k(G, A, B)$ para referirnos al mínimo número de vértices que separan A de B en G.*

Vemos que una de las desigualdades del teorema es más sencilla de comprobar:

Proposición 2.0.2. *Sea G un grafo, $A, B \subseteq V(G)$, entonces el máximo número de caminos de $A - B$ es menor o igual a k.*

Demostración. Lo demostraremos por contradicción, supongamos que tenemos $k + 1$ caminos disjuntos de $A - B$, pero entonces si quitamos k vértices, un vértice en cada camino diferente de $A - B$, seguiría quedando un camino de $A - B$, por lo que el conjunto seguiría conectado. Esto implica que se necesitarían más de k vértices para separar los conjuntos, lo que contradice la definición de k. □

Es por eso que en las siguientes demostraciones vamos a ver que si k es maximal tal que no existe un conjunto X que separe A de B con $|X| = k - 1$ vértices, entonces existen k caminos de $A - B$ mutuamente disjuntos. Y esto corresponde al enunciado del Teorema 1.3.2.

2.1. Primera demostración

Para esta primera demostración, probaremos una proposición más potente:

Proposición 2.1.1. *Si $\mathcal{P}$ es un conjunto de menos de k caminos disjuntos de $A-B$ en G, entonces existe un conjunto $\mathcal{Q}$ de $|\mathcal{P}|+1$ caminos disjuntos de $A-B$ y el conjunto de finales de este contiene el conjunto de finales de los caminos de $\mathcal{P}$.*

A partir de esta proposición, se puede ver que si tenemos un conjunto $\mathcal{P}$ con i caminos disjuntos de $A-B$, para todo $i<k$, entonces existe un conjunto $\mathcal{Q}$ con $i+1$ caminos disjuntos de $A-B$ y el nuevo camino no usa los vértices de A y de B usados por los caminos de $\mathcal{P}$. Esto implica que existe un conjunto de k caminos de $A-B$.

Demostración. Con la definición de $\mathcal{P}$ anterior, $|\mathcal{P}| = \#$ caminos de $\mathcal{P}$. Podemos suponer que $A\cap B=\emptyset$, más adelante, consideraremos el caso contrario. Fijamos G y A, y usaremos B como variable para aplicar inducción sobre el grado de $|G\backslash B|$. Si $|G\backslash B|=0$, tendríamos $A\subseteq B$ y por tanto todos los caminos son triviales. Si $|G\backslash B|=1$, obtendríamos que $G\backslash B$ es un solo vértice p, bajo estas hipóstesis consideramos otros dos casos. Si $p\notin A$ y por tanto $A\subseteq B$ y tenemos que los caminos son triviales. Y el caso donde $p\in A$, recordemos que k es el mínimo número de vértices que separan A de B, si p es uno de estos vértices, entonces existe un camino de $\{p\}-B$ y además $A\cap B$ contiene los otros $k-1$ vértices (recordemos que estamos en el caso donde $G\backslash B=\{p\}$), por lo que tenemos $k-1$ caminos triviales que junto al camino $\{p\}-B$ también tendríamos los k caminos disjuntos; por otro lado, si p no es uno de los vértices que separa A de B, entonces los k vértices están en $A\cap B$ y tenemos los k caminos triviales. Entonces, para la hipótesis de inducción suponemos que se cumple para grafos con $|G\backslash B|$ más pequeños.

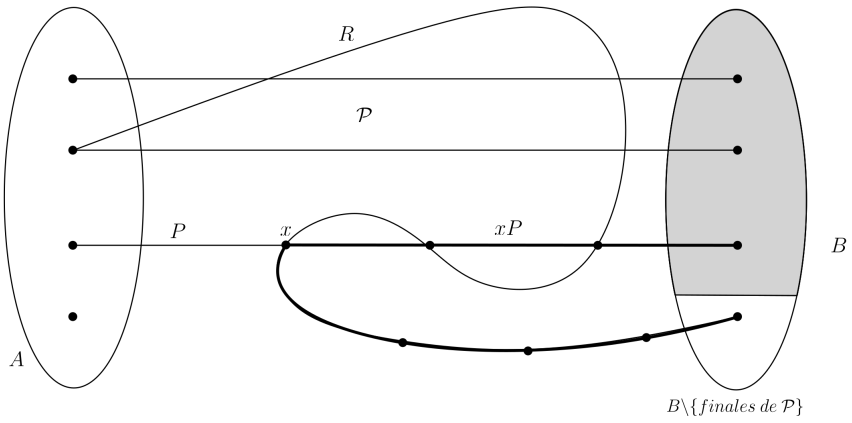

Figura 2.1: Ilustación de la primera demostración

Ahora, sea R un camino de $A-B$ que no pasa por ninguno de los vértices de B por los que terminan los caminos de $\mathcal{P}$ (por definición hay menos de k vértices). Si R no tiene ningún vértice en común con ninguno de los caminos de $\mathcal{P}$, entonces definimos $\mathcal{Q}:=\mathcal{P}\cup R$ y ya obtendríamos los caminos deseados. Si no, sea x el último vértice de R que tiene un vértice en común con algún camino $P\in\mathcal{P}$ (Figura 2.1). Y definimos $B':=B\cup V(xP\cup xR)$ y $\mathcal{P}':=(\mathcal{P}\backslash P)\cup\{Px\}$. Entonces $|\mathcal{P}'|=|\mathcal{P}|$ y $|G\backslash B'|\leq|G\backslash B|$, por tanto, por hipótesis de inducción existe un conjunto $\mathcal{Q}'$ con $|\mathcal{P}|+1$ caminos disjuntos

de $A - B'$ cuyos finales incluyen a los finales de los caminos de $\mathcal{P}'$. Entonces, tenemos un camino $Q \in \mathcal{Q}'$ que termina en x, y un único camino Q' cuyo último vértice es y y este no está en los últimos vértices de los caminos de P'. Ahora si $y \in B$, no haría falta añadir nada a Q' y ya tendríamos los caminos disjuntos necesarios. Si $y \notin B$, tenemos dos casos: si $y \notin xP$, obtenemos $\mathcal{Q}$ de partir de $\mathcal{Q}'$ añadiendo xP a P_1, e yR a Q'; en caso que $y \in \mathring{x}P$ obtenemos P_1 a partir de Q' añadiendo xR a P_1 e yP a Q' (Figura 2.2).

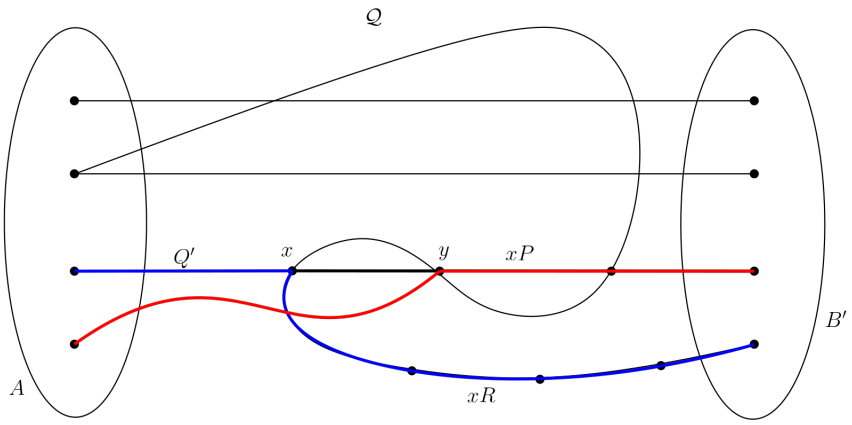

Figura 2.2: Ilustración de la primera demostración con los caminos añadidos de $\mathcal{Q}$

En el caso donde $A \cap B \neq \emptyset$, vemos que todo vértice de $A \cap B$, son caminos triviales de $A - B$. Por tanto, podemos ignorarlos y usar los argumentos anteriores con el grafo que se obtiene de $G' := G \backslash (A \cap B)$, y los conjuntos $A' := A \backslash (A \cap B)$ y $B' := G \backslash (A \cap B)$. $\square$

2.2. Segunda demostración

Proposición 2.2.1. *Dados G, A, B definidos como en el Teorema 1.2.2, sea k el mínimo número de vértices que separan A de B en G, entonces existen k caminos disjuntos de $A - B$.*

En esta segunda demostración probaremos la proposición por inducción sobre el número de vértices más el número de aristas, $|G| + ||G||$, que G tiene k caminos de $A - B$ disjuntos, es decir, veremos que se cumple el primer punto del Teorema 1.3.2. Antes de empezar, podemos ver que casos donde $k \in \{0, 1\}$ son triviales, pues si $k = 0$ quiere decir que el grafo ya es separado, y si $k = 1$ quiere decir que quitando 1 solo vértice podemos separa el grafo y siempre que el grafo no sea el trivial, se puede "dibujar" un camino en el grafo. Por tanto, supondremos que $k \geq 2$ para el resto de la demostración.

Demostración. Vemos que los casos iniciales de la inducción, para $|G|+||G|| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ observamos que $k < 2$ (por ejemplo para $|G| + ||G|| = 5$, si tenemos 3 vértices y 2 aristas, $k = 1$ pues quitando el vértice que tiene grado 2 podemos separar el grafo). Por tanto, tenemos el caso $|G| + ||G|| = 6$, con 3 aristas y 3 vértices (formando un triangulo), y tenemos $k = 3$ a lo sumo, que sería el caso donde $A = B = G$, en este caso, tendríamos que los 3 caminos serían los triviales. En el caso donde $A \subsetneq B = G$, tenemos $k = 2$ si $|A| = 2$, en este caso también podemos usar los caminos triviales y si $|A| = 1$, tendríamos $k = 1$, que es un caso que ya hemos visto. Y por último si $A \cap B = \emptyset$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $|A| = 1$, tendríamos $k = 1$.

Ahora como hipótesis de inducción, dado un grafo G, A, B con $k \geq 2$, suponemos que se cumple para grafos con un número de vértices más pequeño, es decir que dado un grafo G, quitando uno o más vértices, existen $k - 1$ caminos de $A - B$ disjuntos. Primero supondremos el caso donde existe un vértice $x \in A \cup B$, entonces $G \backslash \{x\}$ se puede separar A de B por $k - 1$ vértices, y existen $k - 1$ caminos disjuntos por hipótesis de inducción. Luego añadiendo el camino trivial $\{x\}$ obtenemos los k caminos disjuntos en G.

Por tanto a partir de ahora también podemos suponer que $A \cap B = \emptyset$. Veremos primero el caso donde A y B están separados por un conjunto $X \subseteq V$ con $|X| = k$ y $X \neq A, B$. Entonces sea C_A la unión de componentes de $G \backslash X$ tales que tienen algún componente en A, podemos observar que $C_A \neq \emptyset$ pues $|A| \geq k = |X|$ y $X \neq A$. Análogamente definimos el conjunto C_B. Además $C_A \cap C_B = \emptyset$. Definimos $G_A := G[V(C_A) \cup X]$ y $G_B := G[V(C_B) \cup X]$.

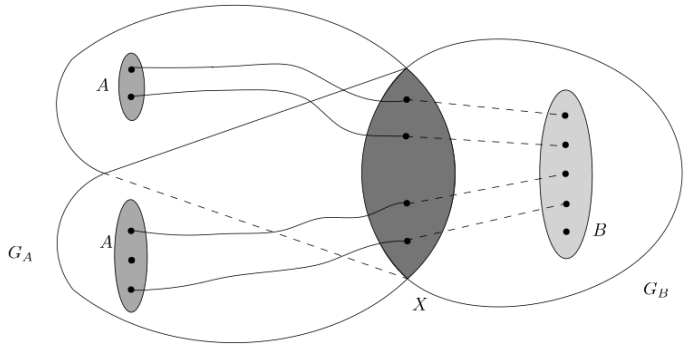

Figura 2.3: Caminos disjuntos de $A - B$ en G_A de la segunda demostración

Ahora todo camino de $A-B$ en G contiene un camino de $A-X$ en G_A por definición, por tanto no podemos separar A de X en G_A por menos de k vértices. Por tanto, tenemos $|G_A| < |G|$, por hipótesis de inducción tenemos que G_A contiene k caminos de $A - X$ disjuntos (Figura 2.3). Análogamente para G_B, también contiene k caminos disjuntos de $X - B$. Luego como $|X| = k$ podemos unir estos k caminos de $A - X$ en G_A con los vértices X y con los k caminos de $X - B$ en G_B para formar k caminos disjuntos de $A - B$.

Para el caso general, es decir cuando A y B están separados por un conjunto $X \subseteq V$ con $|X| \leq k$ y $X \neq A, B$. Sea P un camino cualquiera de $A-B$. Por hipótesis, $A \cap B = \emptyset$, es decir que P contiene una arista ab con $a \notin B$ y $b \notin A$. Entonces, definimos Y el mínimo número de vértices posibles que separan A de B en $G\backslash\{ab\}$ (Figura 2.4). También definimos $Y_a := Y \cup \{a\}$ y $Y_b := Y \cup \{b\}$ ambos separan A de B en G y por definición de k tenemos $|Y_a|, |Y_b| \geq k$. Si tenemos igualdad, es decir $|Y_a| = |Y_b| = k$, podemos asumir que $\{Y_a, Y_b\} \subseteq \{A, B\}$, pues si no, podemos aplicar el caso que hemos visto anteriormente, usando $X = Y_a$ si $Y_a \not\subset A$ o $X = Y_b$ si $Y_b \not\subset B$. Entonces $\{Y_a, Y_b\} = \{A, B\}$ pues $a \notin B$ y $b \notin A$, por tanto $Y = A \cap B$ y como $|Y| \geq k - 1 > 1$ lo que contradice la hipótesis $A \cap B = \emptyset$. Pues tenemos el caso contrario, $|Y_a| > k$ o $|Y_b| > k$ y como $|Y| \geq k$ por hipótesis de inducción existen k caminos disjuntos de $A - B$ incluso en $G\backslash\{ab\} \subset G$. □

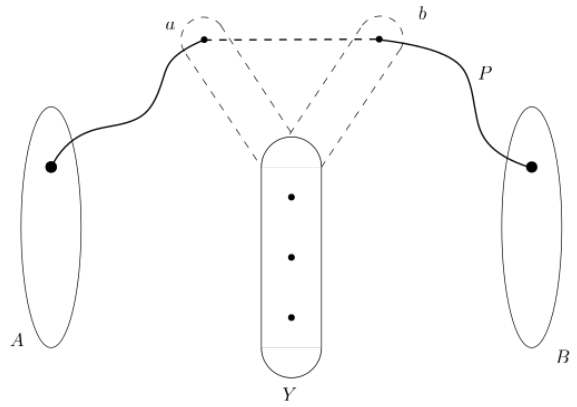

Figura 2.4: Separando A de B en $G\backslash\{ab\}$ en la segunda demostración

2.3. Tercera demostración

Para esta tercera demostración primero necesitamos introducir la definición de *caminos alternados*. Sean G, A, B definidos en el Teorema 1.2.2, sea $\mathcal{P}$ un conjunto de caminos disjuntos de $A - B$, y escribiremos:

$$V[\mathcal{P}] := \cup\{V[P] \mid P \in \mathcal{P}\}$$
$$E[\mathcal{P}] := \cup\{E[P] \mid P \in \mathcal{P}\}$$

Entonces un recorrido $W = x_0e_0x_1e_1 \dots e_{n-1}x_n$ en G con $e_1 \neq e_j \ \forall i \neq j$ se dice que es alternado respecto a $\mathcal{P}$ si se cumplen las siguientes condiciones para todo $i < n$ (Figura 2.5):

(i) Si $e_i = e \in E[\mathcal{P}]$, entonces $x_{i+1} \in P\mathring{x}_1$ para algún $P \in \mathcal{P}$. Es decir, si el recorrido tiene una arista en común con un camino de $\mathcal{P}$, entonces W recorre la arista e hacia atrás.

(ii) Si $x_i = x_j$ con $i \neq j$, entonces $x_i \in V[\mathcal{P}]$. Si el recorrido pasa por un vértice dos veces entonces este es de algun camino de $\mathcal{P}$]

(iii) Si $x_i \in V[\mathcal{P}]$, entonces $\{e_{i-1}, e_i\} \cap E[\mathcal{P}] \neq \emptyset$. Si un vértice del recorrido está en un camino de $\mathcal{P}$, entonces una de sus aristas también tiene que estarlo (Para el caso $i = 0$, diremos que $\{e_{i-1}, e_i\} := \{e_0\}$).

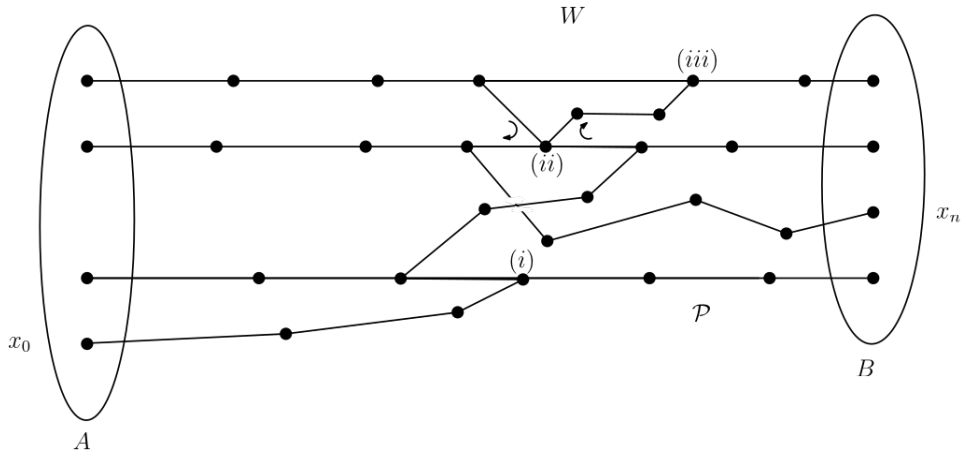

Figura 2.5: Camino alternado de $A - B$ con las propiedades (i),(ii),(iii) de la tercera demostración marcadas

Ahora, consideremos un recorrido $W = x_0e_0x_1e_1 \dots e_{n-1}x_n$ que va de $A \setminus V[\mathcal{P}]$ hasta $B \setminus V[\mathcal{P}]$, alternado respecto $\mathcal{P}$. Por la condición (ii), todo vértice que no sea de $V[\mathcal{P}]$ puede aparecer como mucho una vez en W. Además, como todas las aristas e_i de W son diferentes por definición, por la propiedad (iii), cualquier vértice de $V[\mathcal{P}]$ aparece como mucho dos veces en W. Esto último puede ocurrir de dos formas: si $x_i = x_j$ con $0 < i < j < n$, entonces

$$\text{o bien } e_{i-1}, e_j \in E[\mathcal{P}] \text{ y } e_i, e_{j-1} \notin E[\mathcal{P}]$$

$$\text{o } e_ie_{j-1} \in E[\mathcal{P}] \text{ y } e_{i-1}, e_j \notin E[\mathcal{P}]$$

A continuación probaremos un lema que nos servirá para la demostración:

Lema 2.3.1. *Si el recorrido W como hemos definido existe, entonces G contiene $|\mathcal{P}|+1$ caminos disjuntos de $A-B$.*

Demostración. Sea H el grafo en $V[\mathcal{P}] \cup \{x_0, \dots, x_n\}$ donde las aristas son la diferencia simétrica de $E[\mathcal{P}]$ con $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ ($E[H] = E[\mathcal{P}] \backslash \{e_0, \dots, e_{n-1}\} \cup \{e_0, \dots, e_{n-1}\} \backslash E[\mathcal{P}]$). Entonces, en H los finales de los caminos de $\mathcal{P}$ y de W tienen grado 1 (o 0, si el camino W fuera trivial) y todos los otros vértices tienen grado 0 o 2. Para cada uno de los $|\mathcal{P}|+1$ vértices $a \in (A \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x\}$ el componente de H que contiene a es un camino $P = v_o, \dots, v_k$ que empieza en a y termina en A o B.Usando las condiciones (i) y (iii) podemos ver que por inducción sobre $i = 0, \dots, k-1$ que P cruza cada una de sus aristas $e = v_i v_{i-1}$ hacia adelante respecto $\mathcal{P}$ o W. Formalmente: si $e \in P'$ con $P' \in \mathcal{P}$, entonces $v_i \in P' \mathring{v}_{i+1}$; y si $e = e_j \in W, v_i = x_j$ y $v_{i+1} = x_{i+1}$. Por tanto, P acaba en B. Como tenemos $|\mathcal{P}|+1$ caminos disjuntos como P, acaba la demostración. □

Ahora sí veamos la tercera demostración del teorema. Aunque, en realidad lo que se demuestra se puede ver como una versión del Teorema 1.3.2 usando la noción de caminos alternados:

Proposición 2.3.2. *Sea G un grafo, y sean A, B dos conjuntos de vértices de G. Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de caminos disjuntos de $A-B$, sea $|\mathcal{P}|$ el número de caminos que contiene $\mathcal{P}$, entonces ocurre una de las dos:*

- *existe un camino alternado como en el lema 2.3.1; o*
- *existe un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ con $|X| = |\mathcal{P}|$ tal que todo camino entre $A-B$ contiene un vértice de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ un conjunto con el máximo número de caminos disjuntos de $A-B$. Si no se dice lo contrario, los recorridos alternados que se definan serán respecto a $\mathcal{P}$. Definimos:

$$A_1 := A \cap V[\mathcal{P}] \text{ y } A_2 := A \backslash A_1$$
$$B_1 := B \cap V[\mathcal{P}] \text{ y } B_2 := B \backslash B_1$$

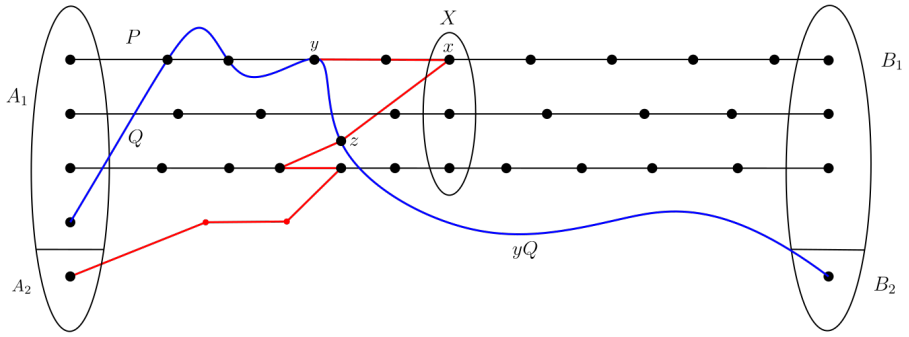

Figura 2.6: Ilustración para la tercera demostración

Para todo camino $P \in \mathcal{P}$, sea x_p el último vértice de P que coincida con algún recorrido alternado en A_2. Si no existe, sea x_p el primer vértice de P. Por definición, el conjunto $X := \{x_p | P \in \mathcal{P}\}$ tiene cardinal $|\mathcal{P}|$, y por tanto, es suficiente ver que X separa A de B.

Sea Q un camino de $A-B$ en G, veremos que Q cruza X, es decir, Q tiene un vértice en X. Supongamos que no. Entonces, por definición de $\mathcal{P}$, el camino Q se cruza con el conjunto de vértices $V[\mathcal{P}]$, si no ya tendríamos un camino disjunto más, por tanto, cumpliría el lema y ya lo tendríamos. Como el camino Q restringido a $A - V[\mathcal{P}]$ es un camino alternado por definición, si la primera vez que se cruza con $V[\mathcal{P}]$ es después del conjunto X, entonces el vértice de la intersección formaría parte de X lo que contradice que Q no cruza con X, por tanto tenemos que Q se cruza con el conjunto de vértices $V[\mathcal{P}']$ con $\mathcal{P}' := \{Px_p | P \in \mathcal{P}\}$. Definimos y como el último vértice de Q en $V[\mathcal{P}']$, sea P el camino que contiene y y sea $x := x_p$. También, W como el recorrido alternado de $A_2 - x$. Como asumimos que Q evade X, y por tanto a x, entonces $y \in P\mathring{x}$ y $W \cup xPyQ$ es un recorrido de $A_2 - B$ (Figura 2.6). Si este recorrido es alternado y termina en B_2 entonces G tiene $|\mathcal{P}| + 1$ caminos disjuntos de $A - B$ por el lema y por tanto contradice la hipótesis que $\mathcal{P}$ es máximal.

Pero veamos cómo podría $W \cup xPyQ$ no ser un recorrido alternado. Podría ser que W ya haya usado una arista de xPy. Pero entonces si definimos x' el primer vértice de W de $xP\mathring{y}$ tenemos que $W' := Wx'Py$ es un recorrido alternado de $A_2 - Y$. Pero incluso el nuevo recorrido $W'yQ$ podría no es alternado: W' puede cruzarse con $\mathring{y}Q$. Ahora por definición de P' y W y la definición de y en Q, tenemos: $V(W') \cap V[\mathcal{P}] \subseteq V[P']$ y $V(\mathring{y}Q) \cap V[\mathcal{P}'] = \emptyset$. Es decir, W' y $\mathring{y}Q$ solo se pueden cruzar fuera de $\mathcal{P}$. Entonces, si W' se cruza con $\mathring{y}Q$, definimos z como el primer vértice de W' en $\mathring{y}Q$. Como hemos puntualizado antes $z \notin V[\mathcal{P}]$, y por tanto, por la condición (ii) solo se puede cruzar con W' una vez. Entonces definimos $W'' := W'zQ$, y si no se cruzan W' con $\mathring{y}Q$, definimos $W'' := W' \cup yQ$.

Entonces tanto si W' se cruza con $\mathring{y}Q$, como si no se cruza, W'' es un camino alternado respecto $\mathcal{P}'$, porque W' lo es y $\mathring{y}Q$ no se cruza con $V[\mathcal{P}']$. (Vemos que solo el caso donde W' no se cruza con $\mathring{y}Q$, W'' cumple la condición (iii) en y) Por definición de $\mathcal{P}'$, W'' no se cruza con $V[\mathcal{P}] \backslash V[\mathcal{P}']$ (Si yQ cruza $V[\mathcal{P}]$, en un vértice digamos α, tendríamos un camino alternado que tiene último vértice que interseca $V[P]$ y por tanto $\alpha \in X$) en particular $V(\mathring{y}Q) \cap V[\mathcal{P}] = \emptyset$. Por tanto W'' es alternado respecto $\mathcal{P}$ y acaba en B_2 (Vemos que y no puede ser el último vértice de W'' porque $y \in P\mathring{x}$ y por tanto $y \notin B$). Además W'' empieza en A_2 pues W también empieza en A_2. Entonces aplicando el lema, obtenemos una contradicción de que $\mathcal{P}$ es maximal. □

Capítulo 3

Conjetura de Menger para k=2

Ahora que ya hemos visto el Teorema de Menger con sus demostraciones, pasemos a la demostración del Teorema 1.3.3. Como he mencionado en la introducción, explicaré la demostración que proponen Nguyen, Scott y Seymour[1]. Pero antes, hay que introducir algunos unos conceptos y lemas sobre intervalos que usan los autores.

3.1. Intervalos

Un *intervalo* es un par de enteros (a, b) con $a \leq b$, diremos que su *longitud* es $b - a$.

Definición 3.1.1. *Sea $\mathcal{H} = \{a_i, b_i : 1 \leq i \leq t\}$ con $t \geq 1$ un conjunto de intervalos, si $\mathcal{H}$ es tal que $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_t < n$ y $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_t < n$ con $n \geq 1$, diremos que es la forma estándar de $\mathcal{H}$.*

Observación 3.1.2. $\mathcal{H}$ puede ser escrito de forma estándar si y solo si no existen dos intervalos diferentes $(a, b), (c, d) \in \mathcal{H}$ con $a \leq c \leq d \leq b$

Definición 3.1.3. *Dados dos intervalos $(a, b), (c, d)$, diremos que (a, b) captura (c, d) si $a \leq c \leq d \leq b$. Diremos que un conjunto de intervalos $\mathcal{H}$ captura (c, d) si existe algún intervalo $(a, b) \in \mathcal{H}$ tal que (a, b) captura (c, d).*

Definición 3.1.4. *Sean ℓ, n dos enteros con $0 < \ell \leq n$ diremos que un conjunto $\mathcal{H}$ de intervalos es ℓ-poderoso en $(0, n)$ si:*

- *$0 \leq a \leq b \leq n$ para todo $(a, b) \in \mathcal{H}$*
- *$\mathcal{H}$ captura todo intervalo de longitud capturado por $(0, n)$ (es decir que los intervalos de $\mathcal{H}$ son al menos de longitud ℓ).*

Ahora lo que queremos ver en de la demostración es que a partir de un conjunto ℓ-poderoso $\mathcal{H}$, encontrar un subconjunto $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ que sea ℓ'-poderoso para un ℓ' no mucho más pequeño que ℓ, pero que los extremos de sus intervalos estén alejados entre ellos. Para construir tal conjunto, vamos a empezar por el siguiente lema:

Lema 3.1.5. *Si $0 < \ell < n$ y $\mathcal{H}$ un conjunto de intervalos ℓ-poderosos en $(0, n)$ y minimal con esta propiedad, entonces en la forma estándar $a_j \geq b_i - \ell + 2$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ con $j \geq i + 2$.*

Demostración. (Ver la Figura 3.1) Sea $1 \leq i, j \leq t$, con $j \geq i+2$. Por minimalidad, existe un $h \in \{0, n-\ell\}$ tal que $(a_{i+1}, b_{i+1}$ captura $(h, h+\ell)$ y ningún otro intervalo de $\mathcal{H}$ lo hace. Como (a_i, b_i) no captura $(h, h+\ell)$ y $a_i < a_{i+1} \leq h$ (por $\mathcal{H}$ estár en forma estándar), tenemos $b_i < h+\ell$. Análogamente, (a_j, b_j) no captura $(h, h+\ell)$ y $b_j > b_{i+1} \geq h+\ell$, se sigue que $a_j > h$. Juntando las dos desigualdades, $h \geq b_i - \ell + 1$ y $a_j \geq h+1$, obtenemos $a_j \geq b_i - \ell + 2$ como queríamos ver. □

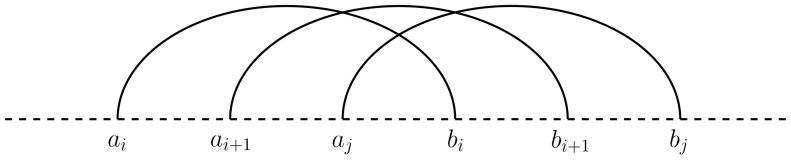

Figura 3.1: Ilustración para el lema 3.0.5

Podemos observar que si $\mathcal{H}$ puede ser escrito en forma estándar, dado un subconjunto de intervalos, $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$, también puede ser escrito en forma estándar. Además algunas de las desigualdades que demostraremos en los lemas són hereditarios, es decir las propiedades valen para $\mathcal{H}$ entonces también valen para el subconjunto $\mathcal{H}'$.

Lema 3.1.6. *Con las propiedades del lema anterior, si $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ con $\mathcal{H} = \{a_i, b_i : 1 \leq i \leq t\}$, $\mathcal{H}' = \{a'_i, b'_i : 1 \leq i \leq t\}$, en forma estándar, si $a_j \geq b_i - l + 2$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ con $j \geq i+2$, entonces $a'_j \geq b'_i - \ell + 2$ para todo $i', j' \in \{1, \ldots, t'\}$ con $j' \leq i' + 2$.*

Demostración. Sea $(a_h, b_h) \in \mathcal{H} \backslash \mathcal{H}'$, veamos los casos posibles. Si $(a_h, b_h) = \{(a_1, b_1), (a_t, b_t)\}$, se cumple pues el lema vale también para $\mathcal{H} \backslash \{(a_1, b_1), (a_t, b_t)\}$. Si $(a_h, b_h) = (a_i, b_i)$ para algún $i \in \{1, \ldots, t\}$, usando $a_h = a_j$ y $b'_j = b_{i-1}$, como $b_{i-1} \leq b_i$ y $j \leq i+3 \leq i+2$, se cumple $a_j \geq b_{i-1} - l + 2$. Análogamente, si $(a_h, b_h) = (a_t, b_t)$, podemos usar $a_h = a_{j+1}$ y $b_i = b_i$. Y por último si $(a_h, b_h) = (a_k, b_k)$ para algún $k \in (i, j)$ entonces podemos usar cualquiera de los dos casos anteriores manteniendo la condición $j \geq i+2$. □

Lema 3.1.7. *Si $0 < 2\ell \leq n$ y $\mathcal{H}$ un conjunto de intervalos $2\ell-$poderoso en $(0, n)$ entonces existe un $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ minimalmente ℓ-poderoso, que puede ser escrito como $\mathcal{H}' = \{(a_i, b_i) : 1 \leq i \leq t\}$ en forma estándar, tal que:*

- *$a_j \geq b_i - \ell + 2$ para todo $1 \leq i, j \leq t$ con $j \geq i+2$;*
- *$b_i - b_{i-1} \geq \ell$ para todo $1 < i < t$ y $b_{i-1} - a_i \geq \ell$ para todo $1 < i \leq t$.*

Demostración. Primero escogemos un $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ minimal tal que se $2\ell-$poderoso en $(0, n)$ y escogemos un $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$ tal que:

- $\mathcal{H}_2$ captura los intervalos $(0, 2\ell)$ y $(n-2\ell, n)$;
- Si $(a, b) \in \mathcal{H}_2$ y $b + \ell \leq n$ entonces algún elemento de $\mathcal{H}_2$ captura el intervalo $(b-\ell, b+\ell)$;
- $\mathcal{H}_2$ es minimal con estas propiedades.

Entonces podemos escribir $\mathcal{H}_2$ de forma estándar, $\mathcal{H}_2 = \{(a_i, b_i) : 1 \leq i \leq t)$ para algún $t \geq 1$ y $a_1 = 0, b_t = n$, por tanto el primer punto del lema se cumple por el lema 3.7. Ahora vamos a ver que:

(1) *Para* $1 < i < t, b_{i-1} \leq n - \ell$ *y* (a_i, b_i) *captura* $(b_{i-1} - \ell, b_{i-1} + \ell)$ *y no hay ningún otro intervalo* (a_j, b_j), $i \neq j$ *que lo capture.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre i, entonces debemos asumir que $i = 2$ o que se cumple para $i - 1$. Como $a_i > a_1 > 0$, y $b_i < b_t < n$, (a_i, b_i) no captura $(0, 2\ell)$ ni $(n - 2\ell, n)$, por minimalidad de $\mathcal{H}_2$, existe $h \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $b_n \leq n - \ell$ y $b_i < b_t = n$, (a_i, b_i) captura $(b_h - \ell, b_h\ell)$ y no hay ningún $j \in \{1, \ldots, t\}$ con $j \neq i$ tal que (a_j, b_j) captura $(b_h - \ell, b_h + \ell)$. Entonces $h < i$ porque $b_h < b_i$, además $h > i - 2$ porque si $h \leq i - 2$ entonces por hipótesis de inducción, no hay un $j \neq h + 1$ tal que (a_j, b_j) captura $(b_h - \ell, b_h + \ell)$. Entonces $h = i - 1$ y por tanto se cumple para i. □

Por tanto ahora tenemos $b_i - b_{i-1} > \ell$ y $b_{i-1} - a_i \geq \ell$ para $1 < i < t$. Para el segundo punto aún tenemos que ver que $b_{t-1} - a_t \geq l$. Para $b_{t-1} \geq n - \ell$ se cumple pues (a_t, b_t) captura $(n - 2\ell, n)$. Para $b_{t-1} < n - \ell$ aplicamos el (1) y tenemos que (a_t, b_t) captura $(b_{t-1} - \ell, b_{t-1} + \ell)$, por tanto $\mathcal{H}_2$ satisface el segundo punto.Veamos ahora que $\mathcal{H}_2$ es $\ell-$poderoso en $(0, n)$, para ver esto consideramos $0 \leq h \leq n - \ell$, queremos ver que existe algún intervalo de $\mathcal{H}_2$ que capture $(h, h + \ell)$. Podemos asumir que $h < n - 2\ell$ pues algún elemento de $\mathcal{H}_2$ captura $(h, h + \ell)$. Escogemos $i \in \{1, \ldots, t\}$ maximal tal que $a_i \leq h$. Podemos asumir que $b_i < h + \ell$, pues si no (a_i, b_i) captura $(h, h + \ell)$. Tenemos entonces $b < h - \ell$ y usando (1) tenemos que (a_{i+1}, b_{i+1}) captura $(b_i - \ell, b_i + \ell)$. Pero por la elección de i, $a_i + 1 > h$, pero $a_{i+1} \leq b_i - \ell$, por tanto, $b_i \geq a_i + \ell > h + \ell$, contradicción. Por tanto $\mathcal{H}_2$ es $\ell-$poderoso en $(0, n)$. Ahora escogemos $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}_2$, minimal tal que es $l-$poderoso en $(0, n)$. Entonces por el lema 3.7 el primer punto se cumple y el segundo también porque es hereditario. □

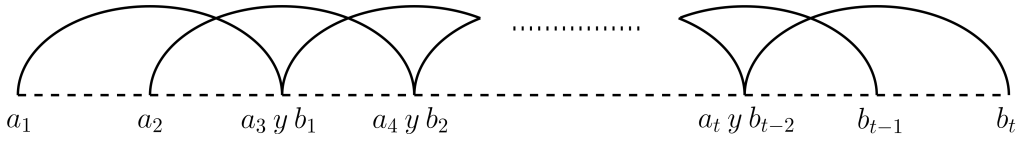

Figura 3.2: Ilustración del lema 3.1.8, los a_i, b_{i-2} se dibujan en el mismo punto porque no sabemos a priori cuál es más grande.

Lema 3.1.8. *Si* $0 \leq 4\ell \leq n$ *y* $\mathcal{H}$ *un conjunto de intervalos que es* $4\ell-$*poderoso en* $(0, n)$, *entonces existe* $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$, $\ell-$*poderoso en* $(0, n)$, *que puede ser escrito* $\mathcal{H}' = \{(a_i, b_i) : 1 \leq i \leq t\}$ *en forma estándar, tal que el orden de los números* $a_1, \ldots, a_t$ *y* $b_1, \ldots, b_t$ *es:*

$$0 = a_1 < a_2 < \text{mín}(a_3, b) < \text{máx}(a_3, b_1) < \text{mín}(a_4, b_2) < \text{máx}(a_4, b_2) < \ldots$$
$$\ldots < \text{mín}(a_t, b_{t-2}) < \text{máx}(a_t, b_{t-2}) < b_{t-1} < b_t$$

Y cada par de $a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t$ *están separados por* ℓ, *excepto posiblemente los pares* $(a_1, a_2), (b_{t-1}, b_t)$ *y* (a_i, b_{i-2}) *para* $3 \leq i \leq t$ *(representado en la Figura 3.2).*

Demostración. Usando el lema 3.1.7 con un $\ell' = 2\ell$ existe un $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ que es $\ell'-$poderoso, es decir que es $2l-$poderoso y satisface las desigualdades del lema. volviendo a aplicar el lema a $\mathcal{H}_1$ con el orden de $\{0, \ldots n\}$ invertido, existe un $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$ minimalmente $l-$poderoso en $(0, n)$ tal que en forma estándar cumple:

- $b_i - b_{i-1} \geq 2\ell$ para $1 < i < t$ y $b_{i-1} - a_i \geq 2\ell$ para $1 < i \leq \ell$, heredada de $\mathcal{H}_1$;
- $a_{i+1} - a_i \geq \ell$ para $1 < i < t$;
- $a_j \geq b_i - \ell + 2$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ con $j \geq i + 2$.

Obtenemos entonces que $b_j - b_i \geq \ell$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ con $j > i$ y $(i, j) \neq (t-1, t)$. También tenemos que $a_j - a_i \geq \ell$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ con $j > i$ y $(i, j) \neq (1, 2)$. Ahora sea $i, j \in \{1, \ldots, t\}$, queremos ver que $|a_j - b_j| \geq \ell$, a no ser que $i = j - 1$. Si $i > j$ tenemos $b_i \geq b_j + \ell \geq a_j + \ell$. Si $j = i$, por la minimalidad de $\mathcal{H}_2$ tenemos que $b_1 - a_1 \geq \ell$. Si $i = j - 1$, por el primer punto tenemos $b_i - a_j \geq 2\ell$. Ahora suponemos que $i \geq j - 3$. Entonces $b_{j-2} \leq a_j + \ell - 2$ y $b_{j-2} \geq b_j + \ell \geq a_j + l$, por lo que tenemos $a_j + \ell - 2 \geq b_{j-3} + 2\ell$, combinando las desigualdades obtenemos $a_j \geq b_{j-3} + \ell + 2$, como $b_{j-3} + 2 \geq b_i$ para $i < j - 3$, por tanto $a_j \geq b_{j-3} + \ell + 2 \geq b_i + \ell$. □

3.2. Demostración

Para ver la demostración de este teorema, aplicaremos el resultado del Teorema 1.3.4, este nos dice que es suficiente con demostrarlo para $d = 3, k = 2$, así que es lo que haremos:

Teorema 1.3.3. *Sea G un grafo no vacío y sea $A, B \subseteq V(G)$, entonces se cumple una de las dos:*

- *existen dos caminos de $A - B$ con distancia como mínimo 3; o*
- *existe un $x \in V(G)$ tal que cada camino de $A - B$ contiene un vértice a distancia a lo sumo 161 de x.*

Demostración. Para demostrarlo, supondremos que el segundo punto es falso, y por tanto se tiene que cumplir el primer punto. Sean dos enteros $c \geq 7$ y $\ell \geq 2c + 5$, veremos que el teorema se cumple para 161, observamos que $161 \leq 8\ell + c + 2$. Podemos asumir que G es conexo y que hay al menos un camino de $A - B$. Sea R el camino con longitud mínima, sean $r_1, \ldots, r_{n-1}$ los vértices ordenados, con $r_1 \in A$ y $r_{n-1} \in B$. Como hemos supuesto que el segundo punto es falso, entonces existe un camino P de $A - B$ con $d(r_1, P) > 8\ell + c + 2$ y podemos asumir que $d(P, R) \leq 2$ pues si no, se cumpliría el primer punto y ya habríamos acabado. Por tanto, $n - 2 \geq 8\ell + c + 1$. En particular, $A \cap B = \emptyset$ y no hay ninguna arista que las una.

Sea W el conjunto de vértices con distancia a lo sumo c de R (Figura 3.3). Llamaremos *superficie* al conjunto de vértices v con $d(v, R) = c$. Para cada $v \in V(G)$, definimos $a(v) = 0$ si $v \in A$ y $d(v, R) \geq c + 4$; en caso contrario $a(v)$ es el $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$ más pequeño tal que existe un camino entre $v - r_i$ con longitud $d(v, R)$. Análogamente, $b(v) = n$ si $v \in B$ y $d(v, R) \geq c + 4$; en caso contrario $b(v)$ es el $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$ más grande tal que existe un camino entre $v - r_i$ con longitud $d(v, R)$. Ahora, para cada $w \in W$ por la elección de R tenemos $0 \leq b(w) - a(w) \leq 2d(w, R) \leq 2c$. La desigualdad $b(w) - a(w) \leq 2d(w, R)$ viene porque si $b(w) - a(w) \geq 2d(w, R)$, entonces el camino $Rv_{a(w)} \cup v_{a(w)}w \cup wv_{b(w)} \cup v_{b(w)}R$ seria un camino más corto que el propio R lo que sería una contadicción.

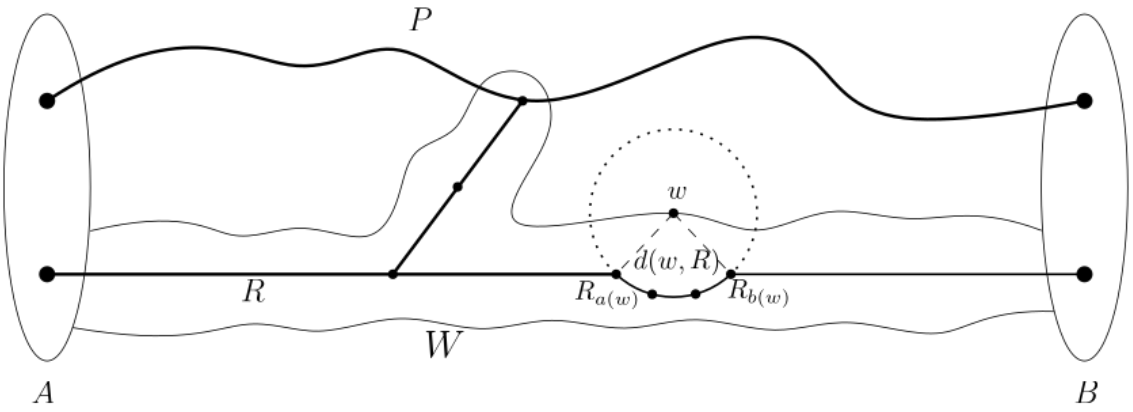

Figura 3.3: Ilustración del camino R de la demostración del Teorema 1.3.3, representado por una recta. El camino P a distancia a los sumo 2 representado por una curva en la parte superior. Las curvas finas representan la superficie. El punto w representa un vértice la superficie y la bola de puntos es de radio $d(w, R)$. Los puntos punto $R_{a(w)}, R_{b(w)}$ representan los vértice de R con índice $a(w), b(w)$ respectivamente.

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de componentes de $G \backslash W$, para cada componente $C \in \mathcal{C}$, definimos $N(C)$ como el conjunto de vértices en W con un vecino en $V(C)$. Entonces $N(C) \neq \emptyset$ y vemos que $N(C)$ es un subconjunto de la superficie. Escribiremos $a(C) = \text{mín}\{a(v) \mid v \in V(C)\}$, análogamente, $b(C) = \text{máx}\{a(v) \mid v \in V(C)\}$. Por tanto tenemos $0 \leq a(C) \leq b(C) \leq n$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

A continuación vamos a dar algunos lemas y definiciones más para poder construir el camino que cumpla con el teorema. Las demostraciones de los lemas se pueden encontrar en el artículo [6]:

Lema (Teorema 3.4 (1) del Artículo [6]). *El conjunto de intervalos* $\{a(C), b(C) : C \in \mathcal{C}\}$ *es* 16ℓ*-poderoso en* $(0, n)$.

A partir del lema 3.1.8, aplicándolo para un $\ell' = 4\ell$, existe un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ tal que el conjunto de intervalos $\{(a(C), b(C)C \in \mathcal{D}\}$ que es ℓ'-poderoso, es decir 4ℓ-poderoso, y los elementos de $\mathcal{D}$ pueden ser numerados como $D_1, \ldots, D_t$ tales que:

- $0 = a(D_1) < a(D_2) < \ldots < a(D_t) \leq n$ y $0 \leq b(D_1) < b(D_2) < \ldots < b(D_t) = n$; y
- $a(D_1) - b(D_{i-3}) \geq 4\ell$ para $4 \leq i \leq t$.

Lema (Teorema 3.4 (2) del Artículo [6]). *Para* $1 \leq i, j \leq t$, *si* $j \geq i + 3$ *entonces* $d(D_i, D_j) \geq 4\ell - 2c + 2$.

Sea $\mathcal{J}$ la unión de los conjuntos de vértices de los elementos de $\mathcal{D}$. Si $X \subseteq V(G)$, sea $\mathcal{J}(X)$ el conjunto de $D \in \mathcal{D}$ con $X \cap N(D) \neq \emptyset$. Llamaremos *junta* a un subconjunto $X \subseteq V(G)$, induciendo un subgrafo conexo, tal que

- $|\mathcal{J}(X)| \geq 2$;
- si $|\mathcal{J}(X)| = 2$ entonces $|X| \leq 3$;
- si $|\mathcal{J}(X)| \leq 3$ entonces $|X| \leq 8$;

- $|\mathcal{J}(X)| \leq 29$; y
- cada vértice de $X \cap W$ pertenece a un camino de $G[X]$ con los dos finales en la superficie.

Lema (Teorema 3.4 (3) del Artículo [6]). *Para cada junta X, $|\mathcal{J}(X)| \leq 3$, y entonces $|X| \leq 8$; y*

$$d(X, R) \geq c - (|X| - 1)/2.$$

Sea Z la unión de todas las juntas. Para cada componente de $G[Z \cup \mathcal{J}]$ los llamaremos *supercomponente*. Podemos ver que cada supercomponente incluye al menos un elemento de $\mathcal{D}$, pero podría contener varias juntas y elementos de $\mathcal{D}$

Lema (Teorema 3.4 (4) del Artículo [6]). *Sean F_1, F_2 dos supercomponentes diferentes, y sea Q el camino que con los finales $f_1 \in V(F_1)$ y $f_2 \in V(F_2)$. Si los dos finales f_1, f_2 pertenecen a dos juntas entonces $|Q| \geq 16$; si solo uno de los dos finales pertenece a f_1, f_2 pertenece a una junta X entonces $|Q| \geq 8$, y $|Q| \geq 24$ si $|\mathcal{J}(X)| \geq 3$; y si ninguno de los dos finales f_1, f_2 pertenece a una junta entonces $|Q| \geq 6$. En cualquier caso, $d(F_1, F_2) \geq 5$.*

Lema (Teorema 3.4 (5) del Artículo [6]). *Si F_1, F_2 son supercomponentes diferentes, y sea A un camino de longitud a lo sumo $c + 1$ de $F_2 - R$, entonces $d(F_1, A) \geq 3$.*

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de supercomponentes. Para cada $F \in \mathcal{F}$, sea $a(F) = \text{mín}\{a(V) \mid v \in V(F)\}$, análogamente $b(F) = \text{máx}\{a(V) \mid v \in V(F)\}$. Como cada $D \in \mathcal{D}$, entonces existe un $F \in \mathcal{F}$ con $D \subseteq F$. Por tanto, tenemos $a(F) \leq a(D) \leq b(D) \leq b(F)$, se sigue que el conjunto de intervalos $\{(a(F), b(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ son 4ℓ-poderoso. Por el lema 3.1.8, entonces existe un $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\{(a(F), b(F) \mid F \in \mathcal{H}\}$ son ℓ-poderoso, y $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_s\}$, donde, si escribimos $a(H_1) = a_i$ y $b(H_i) = b_i$ para todo i:

Lema (Teorema 3.4 (6) del Artículo [6]). *El orden de los números $a_1, \ldots, a_s$ y $b_1, \ldots, b_s$ es:*

$$0 = a_1 < a_2 < \text{mín}(a_3, b) < \text{máx}(a_3, b_1) < \text{mín}(a_4, b_2) < \text{máx}(a_4, b_2) < \ldots$$
$$\ldots < \text{mín}(a_s, b_{s-2}) < \text{máx}(a_t, b_{t-2}) < b_{s-1} < b_s = n$$

Y cada par de $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$ están separados por ℓ, excepto posiblemente los pares $(a_1, a_2), (b_{s-1}, b_s)$ y (a_i, b_{i-2}) para $3 \leq i \leq t$.

Ahora vamos a construir los dos caminos de $A - B$ que están a distancia tres (Figura 3.4). Como $a(H_i) = 0$, hay un vértice $v \in H$ con $a(v) = 0$, y por tanto $v \in A$ y $d(v, R) \geq c + 4$, llamaremos A_1 a este vértice. Para $2 \leq i \leq s$, sea A_i el camino más corto con un final en $V(H_i)$ y el otro en r_{a_i}. Análogamente, definimos B_s el camino donde solo tiene el vértice v, como $B_s = n$, tenemos $v \in V(H_2) \cap B$ con $b(v) = n$. Para cada $1 \leq i < s$, sea B_1 el camino más corto con un final en $V[H_1]$ y el otro en r_{b_i}. Por tanto, vemos que A_1, B_i tienen longitud a lo sumo $c + 1$. Entonces, sea Q_i el camino de H_i que une los finales de A_i y los de B_i en H_i. Para $1 \leq i, j \leq n - 1$, sea $R(i, j) = R(j, i)$ el subcamino de R con finales r_i, r_j. Definimos $b_0 = 1$ y $a_{s-1} = n - 1$. Ahora se sigue que la unión de los caminos

- $A_i \cup Q_i \cup B_i$ para $i \in \{1, \ldots, s\}$ impar;
- $R(b_i, a_{i+2})$ para $i \in \{0, \ldots, s - 1\}$ impar

Contienen un camino de $A-B$ (podría no se un camino porque A_3, B_1 podrían intersecar. Por otro lado, la unión de los caminos

- $A_j \cup Q_j \cup B_j$ para $j \in \{1, \ldots, s\}$ par;
- $R(b_j, a_{j+2})$ para $j \in \{0, \ldots, s-1\}$ impar

también contiene un camino de $A - B$.

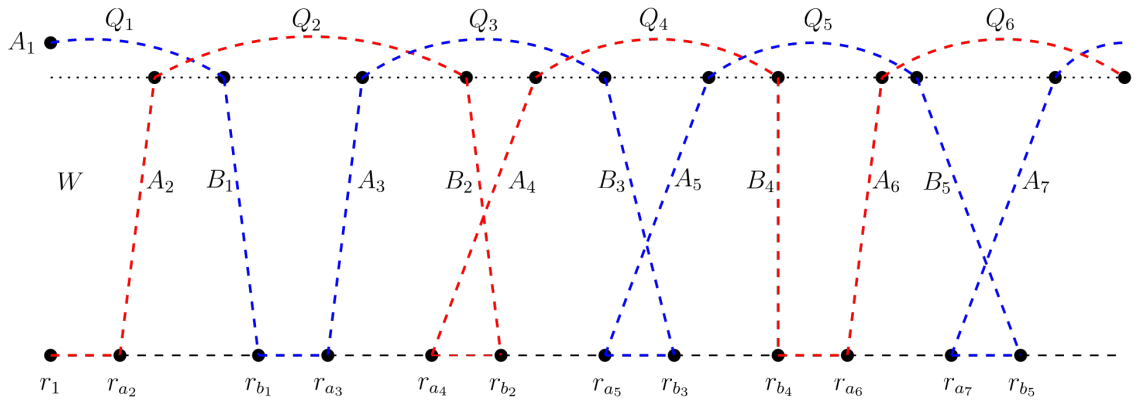

Figura 3.4: La línea de puntos es la frontera de W. Todas las líneas discontinuas representan caminos, la negra de abajo es R. Las líneas de colores serán los caminos con los que construiremos los dos caminos de $A - B$ con distancia tres. Cada camino de Q_i son tales que el interior es disjunto de W, pero los finales de estos podrían no serlo. Cada uno de estos caminos Q_i pertenece a un supercomponente, pero cada supercomponente podría entrar dentro de W mediante las juntas. Es por eso que los finales se han dibujado justo en la superficie, pero podrían estar muy cerca, tanto dentro como fuera de W.

Ahora debemos comprobar que la distancia entre ellos son de al menos tres. Esto es cierto para $s = 1$, pues un camino está fuera de W y el otro en R. Por tanto asumimos que $s \geq 2$ y vamos a comprobar que, para todo i impar y j par, tenemos:

(i) $d(Q_i, Q_j) \geq 3$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, s\}$;

(ii) $d(A_i, A_j)$, $d(A_i, B_j)$, $d(B_i, A_j)$, $d(B_i, B_j) \geq 3$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, s\}$;

(iii) $d(R(b_i, a_{i+2}), R(b_j, a_{j+2})) \geq 3$ para todo $i, j \in \{0, \ldots, s-1\}$;

(iv) $d(Q_i, A_j)$, $d(Q_i, B_j)$, $d(A_i, Q_j)$, $d(B_i, Q_j) \geq 3$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, s\}$;

(v) $d(Q_i, R(b_j, a_{j+2})) \geq 3$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{0, \ldots, s-1\}$; y

$d(R(b_i, a_{i+2}), Q_j) \geq 3$ para todo $i \in \{0, \ldots, s-1\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$;

(vi) $d(A_i, R(b_j, a_{j+2}))$, $d(B_i, R(b_j, a_{j+2})) \geq 3$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{0, \ldots, s-1\}$;

$d(R(b_i, a_{i+2}), A_j)$, $d(R(b_i, a_{i+2}), B_j) \geq 3$ para todo $i \in \{0, \ldots, s-1\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Para el punto (i) sigue del lema (6) de la demostración.

Para el punto (ii) supongamos primero el caso donde $i, j \neq 1, s$. Como todo vértice en A_i tiene distáncia a lo sumo $c + 1$ de r_{a_i}, igual para B_i, A_j, B_j es suficiente con ver

que $d(r_{a_i}, r_{a_j}) \geq 2c + 5$. En particular, tenemos que ver que las distancias $|a_i, a_j|$, $|b_i, a_j|$, $|a_i, b_j|$, $|b_i, b_j|$, pero por el punto (6) estas distancias son mayores que $\ell \geq 2c + 5$. Si $i = 1, j \neq s$, los mismos argumentos sirven para ver que $d(B_1, A_j)$, $d(B_1, B_j) \geq 3$. Ahora veamos las distancias $d(A_1, A_j)$, $d(A_1, B_j)$, en estos casos $v(A_1)$ es el vértice tal que $v \in A$ con $d(v, R) \geq c+4$, como hemos visto A_j, B_j tienen distancia a lo sumo $c+1$ y por tanto $d(v, A_j)$, $d(v, B_j) \geq 3$. Análogamente se ven los caso para $i = s, j = s$.

Para el punto (iii) vemos por el lema (6) que los subcaminos $R(b_i, a_{i+2}), R(b_j, a_{j+2})$ son disjuntos entre ellos y la distancia entre ellos es de al menos $\ell \geq 3$.

Para el punto (iv) es directo por el lema (5).

Para el punto (v), por el lema (3) implica que cada camino de un supercomponente a R tienen longitud de al menos $c - (8 - 1)/2 \geq 3$

Por último para el punto (vi) veremos que $d(A_i, R(b_j, a_{j+2})) \geq 3$ para todo i, j con $i \in \{1, \ldots, s\}$ impar, $j \in \{0, \ldots, s - 1\}$ par. Si $i = 1$ entonces se cumple pues $d(A_1, R) \geq c + 4 \geq 3$, por tanto podemos asumir que $i \geq 3$. Por el lema (6) la distancia entre r_{a_i} y $R(b_j, a_{j+2})$ es de al menos ℓ. Y la distancia entre r_{a_i} y cualquier vértice de A_i es de al menos $c + 1$, por tanto la distancia entre A_i y $R(b_j, a_{j+2})$ es de al menos $\ell - c - 1 \geq 3$

Y con esto termina la demostración □

Capítulo 4

Contraejemplo para el caso k=3

En esta capítulo daremos el contraejemplo propuesto por Nguyen, Scott y Seymour[6] para caso $k = 3, d = 3$ de la conjetura de la generación del Teorema de Menger.

4.1. Demostración

Teorema 1.3.5. *Para cualquier entero $\ell > 0$ existe un grafo G y dos conjuntos A, B de vértices de G, tales que:*

- *no existen 3 caminos entre $A - B$, P_1, P_2, P_3, tales que $d(P_i, P_j) \geq 3$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$;*
- *no existe ningún conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ con $|X| \leq 2$ tal que $d(P, X) \leq \ell$ para todo camino P de $A - B$.*

La idea de la demostración es que para todo $\ell > 0$, construiremos un grafo G_ℓ que cumpla los dos puntos del Teorema 1.3.5.

En la demostración se usan un tipo de grafo que se denominan *árbol* (Figura 4.1). El vértice de la cima r se denomina *raíz* y es el único de grado 2. Los vértices última fila se denominan *hojas* y son los únicos que tienen 1. Para todo vértice que no sea la raíz o una hoja, los *hijos* de v son los dos vecinos más lejanos a r. Los hijos de los hijos de un vértice que no sea una hoja, los denominaremos por *descencientes*. Denominaremos *profundidad del árbol* por máx$\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\} + 1$. Y por último un árbol es *binario y uniforme* si todo vértice, que no sea una hoja, tiene exactamente dos hijos.

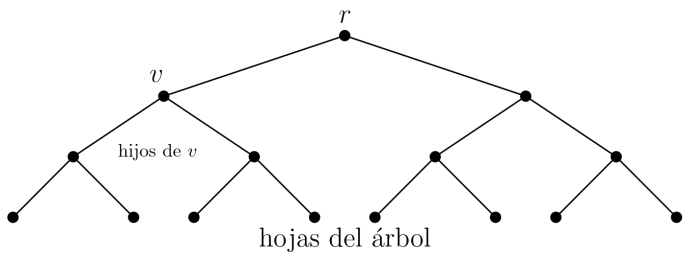

Figura 4.1: Ilustación de un árbol binario uniforme de profundidad 4.

Demostración. Empezaremos viendo el segundo punto, es decir, que para todo conjunto $X \in V(G)$ con $|X| \leq 2$, hay un camino P de $A - B$ tal que la distancia hasta X es mayor que un ℓ.

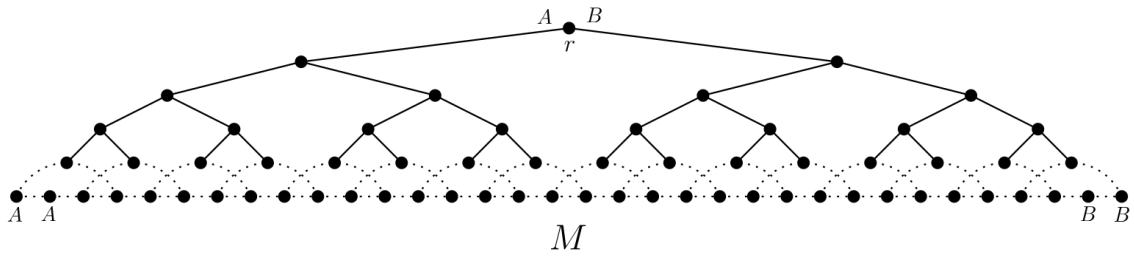

Figura 4.2: Grafo para el contraejemplo de la Proposición 4.1.1, las curvas de puntos representan caminos de longitud mayor que 2ℓ.

Proposición 4.1.1. *Sea $\ell \geq 1$ un entero, y sea un grafo G como la Figura 4.2, donde el árbol binario tiene profundidad mayor que $2\ell+2$, y cada uno de las curvas representan un camino de longitud mayor que 2ℓ. Sea los conjuntos A, B como se muestra en la figura. Si $|X| \subseteq V(G)$ con $|X| \leq 2$, entonces hay un camino P entre $A - B$ tal que $d(X, P) > \ell$.*

Demostración. Sea r la raíz del árbol binario. Por como hemos construido el grafo, $r \in A \cap B$ y por tanto, podemos asumir que existe un $x_1 \in X$ tal que la distancia de r a x_1 es a lo sumo ℓ, pues si no ya habríamos acabado. Pero como todos los caminos representados por los puntos (los llamaremos *caminos de puntos*) están a distancia de al menos $2\ell + 1$ de r, estos están a distancia mayor que ℓ de x_1.

Llamaremos M al camino de puntos que va de $A - B$ que se encuentra en la parte inferior de la Figura 4.2, podemos asumir que el otro vértice $x_2 \in X$ está a distancia a lo sumo ℓ de M. Entonces el conjunto de vértices de G que están a distancia menor o igual a ℓ de x_2 es por una lado un subconjunto de vértices del conjunto de vértices de uno de los caminos de puntos de M; o por otro es el conjunto formado por uno de los vértice de los finales de un camino de puntos de M, v, junto al subconjunto de los interiores de los caminos de puntos que intersecan v (Figura 4.3).

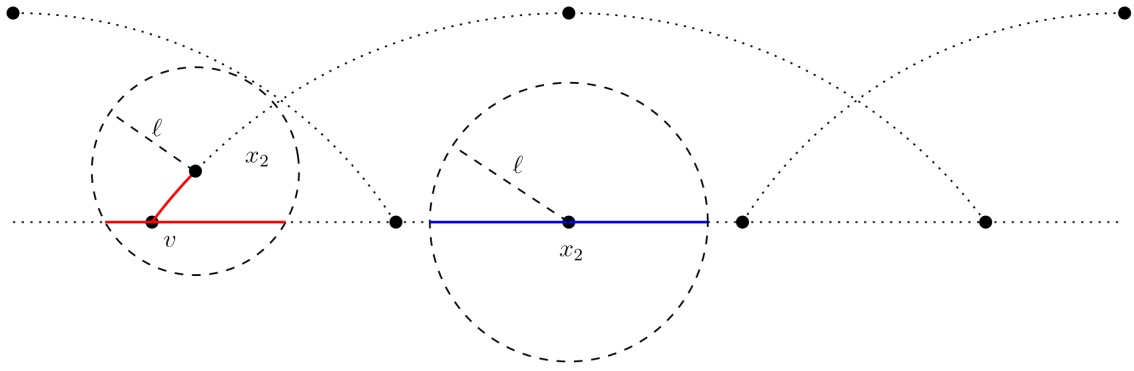

Figura 4.3: Para la Proposición 4.1.1. En azul un subconjunto de vértices del conjunto de vértices de uno de los caminos de puntos de M. En rojo un conjunto formado por uno de los vértice de los finales de un camino de puntos de M, v, junto al subconjunto de los interiores de los caminos de puntos que intersecan v.

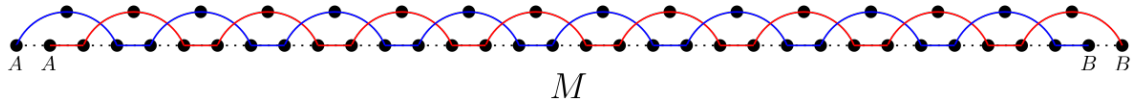

Figura 4.4: Ilustración de dos caminos de $A - B$ de la Proposición 4.1.1.

Para el primer caso, en azul en la Figura 4.3, hay uno de los dos caminos de $A - B$ que evita toda la bola centrada en ese x_2 y de radio ℓ (ver Figura 4.4), y por tanto se encuentra a una distancia mayor que ℓ de x_2.

En el segundo caso para cualquier elección de v, hay un camino de $A - B$ formado por la unión de caminos de puntos, y ninguno es incidente con v (ver Figura 4.4). Por tanto en este caso también habría un camino a distancia mayor que ℓ de X. □

Para demostrar el segundo punto del teorema, es decir, que no existen tres caminos de $A - B$ tal que estén a distancia d dos a dos, vamos a definir un grafo G_k a partir de un árbol binario G, con el que para cierto k tendrá las mismas propiedades que el grafo de la Proposición 4.1.1.

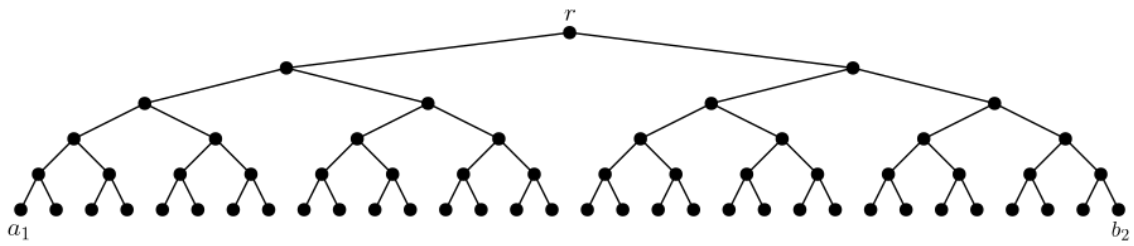

Figura 4.5: Ilustración de árbol binario G con profundidad k para la Proposición 4.1.2.

Sea $k \geq 2$ un entero. Denominaremos por G a un árbol binario uniforme de con profundidad k (Figura 4.5). Entonces G tiene $2^k - 1$ vértices y la distancia de cualquier camino de una hoja a la raíz r es de $k - 1$. Ahora añadimos dos vértices más al conjunto de hojas y denominaremos por Z al conjunto de las hojas de G con estos dos nuevos vértices. Finalmente unimos los vértices de Z con un camino M, y denominamos G_k al grafo obtenido (Figura 4.6). Podemos observar que para cada vértice v de B que no sea una hoja, hay una copia de algún G_h con raíz v, formado por v, sus descendientes en G y dos vértices extra. El argumento para la demostración consistirá en aplicar la hipótesis de inducción a estos grafos más pequeños. Por último, denominaremos por a_1, b_2 los extremos de M y por a_2, b_1 a sus vecinos respectivamente, y $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$.

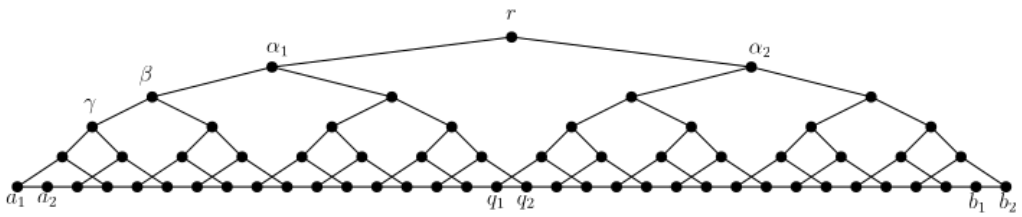

Figura 4.6: Ilustración del árbol binario G_k, en este caso $k = 6$, para la Proposición 4.1.2. El vértice b es algún vértice del camino de $a_1 - \alpha_1$, podría no estar adjunto a α_1, incluso podría ser el mismo α_1.

Ahora que ya tenemos definido el grafo que usaremos, vamos a probar una proposición más fuerte por inducción sobre la profundidad del árbol binario. A la hora de analizar esta demostración, nos dimos cuenta que faltaba un argumento, por lo que añadimos el punto (2) de la proposición, más adelante, en la sección 4.2:

Proposición 4.1.2. *Para todo entero $k \geq 2$, si P_1, P_2 son dos caminos disjuntos de G_k de $A - B$, entonces:*

(1) *(i) Existe un camino de $P_1 - P_2$ de longitud a lo sumo 2 y no usa los vértices de Z; o (ii) uno de los dos caminos es el camino de G de $a_1 - s_2$ y pasa por r.*

(2) *Si P_1 es un camino de $a_1 - r$ y P_2 es un camino de $a_2 - B$, entonces se cumple la propiedad (i).*

Demostración. Empecemos con la inducción. Si $k = 1$, es un solo vértice y se cumple el punto (ii). Si $k = 2$, solo existen dos caminos posibles de $A - B$ y uno de ellos es el camino descrito en (ii) (Figura 4.7). Por tanto, para la hipótesis de inducción, asumiremos que $k \geq 2$ y el resultado se cumple para valores más pequeños que k.

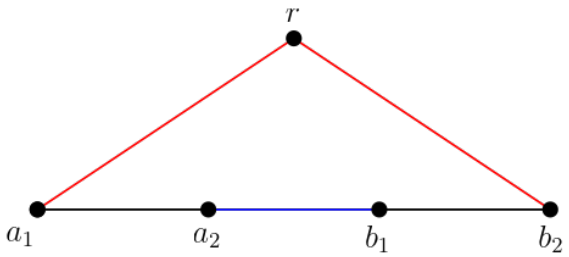

Figura 4.7: Ilustración del caso k=2 de la proposicón 4.1.2.

Supongamos que P_1, P_2 son dos caminos disjuntos de G_k de $A - B$, y el punto (i) es falso. Denominaremos r para la raíz de G y por α_1 el vecino de r en el camino de $r - a_1$ en G, y análogamente para α_2. Supongamos primero que ninguno de los dos caminos P_1, P_2 contiene r. Entonces podemos asumir que P_1 contiene q_2 y P_2 contiene q_1, ya por la construicción de nuestro grafo, que cualquier camino de $A - B$ que no pase por r, tiene que pasar por estos dos vértices centrales (ver la Figura 4.6). Por tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción a las dos copias de G_{k-1} con raíces α_1 y α_2 y obtenemos que el camino P_1 contiene el camino de G de $a_1 - q_2$ y el camino P_2 contiene el camino de G de $a_2 - q_1$. Por tanto, el camino P_1 contiene α_1 y el camino P_2 contiene α_2, pero como r es adjunto a α_1 y a α_2, los dos caminos estarían a distancia 2, lo que contradice la suposición que el punto (i) es falso (Figura 4.8).

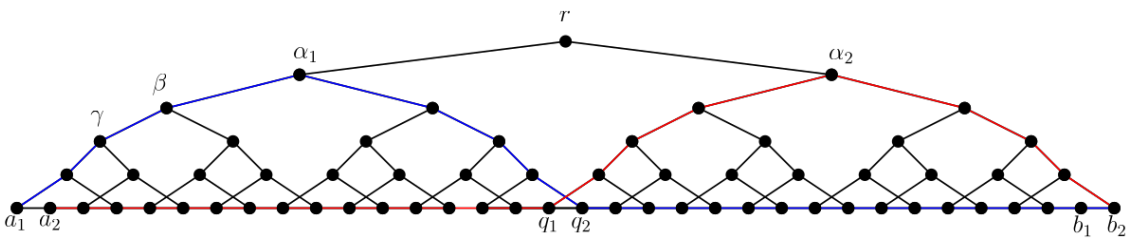

Figura 4.8: Ilustración de los caminos de $A - B$, P_1 en azul, y P_2 en rojo de la Proposición 4.1.2

Por tanto, suponemos que uno de los dos caminos, P_1 o P_2, contienen r, podemos suponer sin perdida de generalidad que es P_1. Queremos ver que P_1 contiene los dos subcaminos de G de $r - a_1$ y de $r - b_2$. Supongamos que P_1 no contiene el primero, denominaremos por $\mathcal{A}$ a este camino. Ahora escogemos el máximo subcamino común entre $\mathcal{A}$ y P_1, $\mathcal{A}_1$, con finales α_1 y β sus finales. Observamos que $\beta = a_1$, pues si no P_1 contiene el camino $\mathcal{A}$ y ya habríamos terminado; y tampoco puede ser adjunto a a_1 pues la arista de G que está adjunta a a_1 tiene que ser usada por uno de los dos caminos: si es usada P_1, entonces $P_1 = A$; si es usada por P_2, los caminos no serían disjuntos. Por tanto, el subcamino de A de $\beta - a_1$ tiene longitud h para un $h \geq 2$.

Ahora denominemos por γ al hijo de β en G. Y nos fijaremos solamente en el grafo G_h con raíz β. Queremos ver que el camino P_1 tiene que usar la arista $\beta\gamma$. Por tanto, supongamos no usa la arista $\beta\gamma$. Denominemos por P_1' al subcamino de P_1 en G_h, vemos que Pero como P_1' va de a_1 a b. Por otro lado denominaremos por P_2' al subcamino de P_2 en G_4. Entonces aplicamos el punto (1) de la hipótesis de inducción sobre el subgrafo G_{h-1} con raíz γ y obtenemos que P_1' contiene el camino de G de $a_1 - q_2'$ que pasa por γ (Figura 4.9). Pero como P_1' va de a_1 a b y P_2 es un camino que va de a_2 a B', aplicando el punto (2) de la hipótesis de inducción, se cumpliría el punto (i), cosa hemos supuesto al principio de la demostración que era falso.

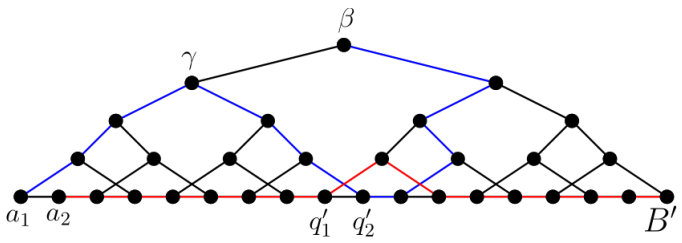

Figura 4.9: Ilustración del paso de induccion sobre el grafo G_h con raíz β de la Proposición 4.1.2

Por tanto, tenemos que el camino P_1 usa la arista $\beta\gamma$ cosa que contradice el hecho que el camino A_1 es el máximo camino común. A partir de aquí se sigue que P_1 debe contener A_1 y por tanto cumple con el punto (ii) de la proposición. □

A partir de la Proposición 4.1.2, vemos que para obtener el grafo de la Figura 4.2, basta con sustituir las aristas del grafo $G_{2\ell+3}$ (Figura 4.6) incidentes con los vértices de Z por caminos largos. Además dados los conjuntos $A - B$ de la Figura 4.2, no existen tres caminos disjuntos de $A - B$, P_1, P_1, P_3 tales que estén a distancia a lo sumo tres entre ellos. Pues uno de los caminos consiste solo en el vértice r y por tanto, los otros dos no pueden usar r, por lo que se cumple el punto (i) de la Proposición 4.6.

Por tanto, hemos construido un grafo tales que cumplen los dos puntos del Teorema 1.3.5. □

4.2. Discusión de la proposición 4.1.2

Como hemos dicho en la sección anterior, para la Proposición 4.1.2 añadimos el segundo punto:

(2) Si P_1 es un camino de $a_1 - r$ y P_2 es un camino de $a_2 - B$, entonces existen un camino de $P_1 - P_2$ de longitud a lo sumo 2 y no sus los vértices de Z.

En la proposición original, Proposición 2.2 del Artículo [6] solo usan los dos puntos:

Proposición 4.2.1. *Para todo entero $k \geq 2$, si P_1, P_2 son dos caminos disjuntos de G_k de $A - B$, entonces:*

(i) Existe un camino de $P_1 - P_2$ de longitud a lo sumo 2 y no usa los vértices de Z; o

(ii) Uno de los dos caminos es el camino de G de $a_1 - s_2$ y pasa por r.

La primera parte de la demostración que proponen Tung Nguyen, Alex Scott, and Paul D. Seymour [6], donde suponemos que ninguno de los caminos P_1, P_2 contiene el vértice r, es prácticamente igual a la que hemos explicado en el documento. Sin embargo, en la segunda parte, donde sabemos que uno de los dos caminos tiene que contener r, después de definir el vértice γ (Ellos usan c), argumentan que ninguno de los dos caminos P_1, P_2 contiene este vértice. Sin embargo, en la Figura 4.6, podemos ver un posible camino P_1 que contiene este vértice. Sin embargo, vimos que este caso contradice la condición (i) de la proposición, cosa que habiamos supuesto falsa al principio de la demostración. Es por eso que añadimos el argumento (2), para completar la demostración y explicarla de una forma más clara.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos empezado viendo uno de los teoremas fundamentales de la teoría de grafos, el Teorema de Menger, junto con tres de sus demostraciones, cada una usando diferentes conceptos y argumentos. Para mí, la primera me ha parecido la más sencilla y elegante, pues es la que usa los argumentos más claros y directos. Mientras que la tercera demostración me pareció la más compleja de las tres, pues al usar el concepto de caminos alternados, me ha costado más visualizar algunas implicaciones de los caminos descritos.

Luego, hemos visto los dos casos de la conjetura que generaliza el teorema, que a pesar de la sencillez de sus enunciado, sus demostraciones contienen argumentos complejos de visualizar. En particular, la demostración de la conjetura para el caso $k = 2$, aunque se supone que es más sencilla a las propuestas anteriormente, se me hizo bastante complicada de entender y no he conseguido desglosarla al completo para poder explicarla de una forma más clara y sencilla.

Además podemos observar que a pesar de que el teorema se demostró hace casi un siglo, los avances de la conjetura son bastante recientes. En particular, los dos casos analizados fueron resueltos en los años 2023 y 2024, lo que indica que todavía queda mucho por investigar sobre la conjetura.

Durante el proceso de investigación del trabajo y el análisis de las demostraciones, con la orientación de mi tutor, el Dr.Knauer, hemos encontrado algunos aspectos que podrían ser necesarios aclarar. En particular, vimos que en la demostración de la Proposición 4.1.2 (basada de la Proposición 2.2 del Artículo [6]) le podría faltar un argumento extra.

Por último, aunque el objetivo fue explicar los teoremas analizados, quizás se podría haber planteado estudiar el caso abierto con $d = 2$ y un k arbitrario, así como la conjetura donde X no es de tamaño $k - 1$, sino que depende de los parámetros d, k.

Bibliografía

[1] Sandra Albrechtsen, Tony Huynh, Raphael W. Jacobs, Paul Knappe, and Paul Wollan. A Menger-type theorem for two induced paths. *SIAM J. Discrete Math.*, 38(2):1438–1450, 2024.

[2] Reinhard Diestel. *Graph theory.*, volume 173 of *Grad. Texts Math.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2000.

[3] Agelos Georgakopoulos and Panos Papasoglu. Graph minors and metric spaces. Preprint, arXiv:2305.07456 [math.CO] (2023), 2023.

[4] Kevin Hendrey, Sergey Norin, Raphael Steiner, and Jérémie Turcotte. On an induced version of Menger's theorem. *Electron. J. Comb.*, 31(4):research paper p4.28, 21, 2024.

[5] K. Menger. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundam. Math.*, 10:96–115, 1927.

[6] Tung Nguyen, Alex Scott, and Paul D. Seymour. A counterexample to the coarse Menger conjecture. Preprint, arXiv:2401.06685 [math.CO] (2024), 2024.