



UNIVERSITAT^{DE}
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Volatilitat implícita i models de valoració d'opcions

Autor: Néstor Zafrilla López

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia

Codirector: Òscar Burés Mogollón

Realitzat a: Departament de matemàtica econòmica,
financera i actuarial

Barcelona, 15 de gener de 2025

Abstract

This study examines two pivotal approaches to financial option pricing, focusing on the treatment of volatility: the classic Black-Scholes model and the Heston stochastic volatility model. The Black-Scholes framework assumes constant volatility, providing a simple yet foundational method for pricing derivatives. However, empirical observations of implied volatility patterns, such as the volatility smile and skew, challenge this assumption. To address these limitations, the Heston model incorporates stochastic volatility, capturing market dynamics more realistically by modeling volatility as a mean-reverting process.

Through theoretical analysis and practical implementation using real market data from the S&P 500 options, the research evaluates the effectiveness of both models. Results reveal that the Heston model aligns more closely with observed implied volatility surfaces, particularly for options with short maturities or far-from-the-money strikes. In contrast, the Black-Scholes model exhibits greater accuracy for options near the money with longer maturities but struggles to reflect the complexities of dynamic market conditions.

The findings underscore the importance of selecting the appropriate model based on the specific characteristics of the financial instrument and market environment. While Black-Scholes remains a cornerstone for its simplicity and analytical tractability, the Heston model offers superior precision in scenarios where volatility exhibits non-constant behavior.

Resum

Aquest estudi examina dues aproximacions clau per a la valoració d'opcions financeres, centrant-se en el tractament de la volatilitat: el model clàssic de Black-Scholes i el model de volatilitat estocàstica de Heston. El model de Black-Scholes assumeix una volatilitat constant, proporcionant una metodologia senzilla però fonamental per al càlcul del preu dels derivats. No obstant això, les observacions empíriques de patrons de volatilitat implícita, com el somriure de volatilitat i l'skew, desafien aquesta suposició. Per superar aquestes limitacions, el model de Heston incorpora la volatilitat estocàstica, modelant-la com un procés de reversió a la mitjana per capturar dinàmiques de mercat de manera més realista.

Mitjançant l'anàlisi teòrica i la implementació pràctica amb dades reals del mercat d'opcions sobre l'S&P 500, aquesta investigació avalua l'eficàcia de tots dos models. Els resultats mostren que el model de Heston s'alinea millor amb les superfícies de volatilitat implícita observades, especialment per opcions amb venciments curts o amb strikes lluny de l'ATM. Per contra, el model de Black-Scholes presenta també precisió per opcions properes a l'ATM amb venciments més llargs, però no pot reflectir les complexitats de les condicions de mercat dinàmiques.

Les conclusions subratllen la importància de seleccionar el model adequat segons les característiques específiques de l'instrument financer i l'entorn de mercat. Tot i que el model de Black-Scholes continua sent una pedra angular per la seva simplicitat i tractabilitat analítica, el model de Heston ofereix una precisió superior en escenaris on la volatilitat no és constant.

Agraïments

Vull agrair als meus tutors, el Dr. Josep Vives Santa Eulalia i l'Òscar Burés Mogollón, la seva assistència i ajuda durant la redacció d'aquest treball, proporcionant-me les eines necessàries per arribar a les conclusions adequades.

També vull agrair a la meva família per haver-me portat fins aquí, així com a tothom qui m'ha acompanyat en aquests anys a la universitat.

Índex

1	Introducció	1
1.1	El projecte	1
1.2	Estructura de la Memòria	1
2	Processos estocàstics i integració estocàstica	3
2.1	Processos estocàstics i martingales	3
2.2	Moviment brownià	4
2.3	Integració estocàstica	6
2.3.1	Integral estocàstica per a processos simples	7
2.3.2	Definició general de la integral estocàstica	8
2.4	Processos d'Itô i fórmula d'Itô	8
2.4.1	Fórmula d'Itô	9
3	El model de Black-Scholes	10
3.1	Aproximació	10
3.2	Descripció del model	12
3.2.1	Mesura de probabilitat neutral al risc	13
3.2.2	Propietats del model de Black-Scholes	14
3.2.3	Valoració d'opcions	15
4	La volatilitat al model de Black-Scholes	17
4.1	Volatilitat històrica	17
4.2	La volatilitat implícita	18
4.3	Càlcul numèric de la volatilitat implícita	19
4.3.1	Càlcul amb el mètode de Newton-Raphson	20
5	L'alternativa a Black-Scholes: el model de Heston	23
5.1	Els models de volatilitat estocàstica	23
5.2	Descripció del model de Heston	24

5.3	Valoració d'opcions europees segons el model de Heston	24
6	La superfície de volatilitat	26
6.1	Graficant la volatilitat	26
6.1.1	El somriure de volatilitat	27
6.1.2	Smirk	28
6.1.3	Altres patrons de volatilitat	28
6.2	Afegint el venciment	29
7	Aplicació pràctica	30
7.1	Càlcul de la volatilitat implícita	31
7.2	Superfície de volatilitat implícita empírica	34
7.3	Volatilitat efectiva al model de Heston	35
8	Conclusions	41

Capítol 1

Introducció

1.1 El projecte

En el món de les finances modernes, els productes derivats, i en particular les opcions, han esdevingut fonamentals per a la gestió del risc i la inversió estratègica. Entre els aspectes clau que determinen el preu d'aquests instruments, la volatilitat ocupa un lloc central, ja que reflecteix la percepció del mercat sobre la incertesa associada al preu dels actius subjacents.

No sorprèn que el problema de posar preu a les opcions abans de ser negociades hagi rebut gran part de l'atenció de la comunitat al llarg de l'història recent dels mercats de derivats. Un dels models més influents en aquest camp és el de Black-Scholes, introduït a principis dels anys 70. Aquest model ofereix una fórmula elegant i pràctica per a la valoració d'opcions europees, assumint una volatilitat constant.

Aquesta simplificació, però, sovint entra en conflicte amb les observacions empíriques dels mercats reals, on la volatilitat presenta dinàmiques complexes i variacions en funció de factors com el temps al venciment o la relació entre el preu d'exercici i el preu de l'actiu subjacent. Fenòmens com el *volatility smile* i el *volatility skew* posen de manifest les limitacions d'aquest model clàssic.

Amb l'objectiu de superar aquestes limitacions, s'han desenvolupat models més avançats que incorporen la volatilitat com un procés estocàstic. Entre ells, el model de Heston destaca per la seva capacitat de capturar de manera més precisa les dinàmiques del mercat mitjançant un procés de volatilitat que segueix unes dinàmiques més complexes basades en diversos factors del mercat. Aquest enfocament permet explicar de manera més coherent els patrons observats en les superfícies de volatilitat i ofereix una base matemàtica robusta per a l'anàlisi financera.

1.2 Estructura de la Memòria

Aquest treball se centra en l'exploració de la volatilitat dins dels dos models fonamentals esmentats: el de Black-Scholes i el de Heston. En primer lloc, es presenta una revisió teòrica que fonamenta la base matemàtica sobre la qual es construeixen els models presentats. Això implica conèixer la teoria de processos estocàstics a temps continu i martingales, i una introducció al càlcul estocàstic, acabant amb l'enunciat de la fórmula

d'Itô.

Seguidament es construeix el model de Black-Scholes, deduint-ne la fórmula de valoració d'opcions. Es dedicarà un capítol a l'anàlisi del terme de volatilitat en aquest model, acabant la part teòrica del treball presentant el model de Heston.

En darrer lloc, es realitza una aplicació pràctica utilitzant dades reals d'opcions europees sobre l'índex S&P 500 per analitzar les superfícies de volatilitat que utilitza cada model. Aquest anàlisi té com a objectiu principal avaluar l'adequació de cada model a les condicions reals del mercat i posar en evidència els avantatges de considerar una volatilitat estocàstica en situacions on el model de Black-Scholes es mostra insuficient.

Amb aquesta investigació, es pretén contribuir a una millor comprensió de la volatilitat en els models de valoració d'opcions i a l'avaluació dels mateixos que, malgrat la seva complexitat, poden oferir eines més precises per a la gestió del risc i la presa de decisions en mercats cada cop més dinàmics i sofisticats.

Capítol 2

Processos estocàstics i integració estocàstica

Comencem aquest primer capítol amb la voluntat de definir i clarificar certs conceptes i propietats que, si bé no constitueixen estrictament el nucli del treball, són imprescindibles per assolir amb suficiència els continguts centrals del mateix. Seguirem, en aquesta secció, [SSdf], [CT04] i [CKT12].

Principalment, farem un recordatori sobre els conceptes bàsics de processos estocàstics i teoria de martingales, definirem el moviment brownià, i acabarem el capítol tractant la integració estocàstica, els processos d'Itô i la fórmula d'Itô, a partir de la qual en capítols posteriors aconseguirem deduir la fórmula de Black-Scholes, un dels elements centrals del treball.

2.1 Processos estocàstics i martingales

Considerarem d'ara en endavant en aquesta secció l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on Ω és l'espai mostral, $\mathcal{F}$ és una σ -àlgebra subconjunt de les parts de Ω i P és la probabilitat associada, que compleix les condicions habituals d'una mesura de probabilitat, és a dir

1. **No-negativitat:** $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$.
2. **Normalització:** $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. **Additivitat numerable:** Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ és una col·lecció de conjunts disjunts a $\mathcal{F}$, és a dir, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, llavors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Recordem també la definició de σ -àlgebra.

Definició 2.1.1. Una σ -àlgebra $\mathcal{F}$ és una col·lecció de subconjunts d'un espai mostral Ω que compleix les següents propietats:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

2. (Tancament respecte al complementari) $A \in \mathcal{F} \implies A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. (Tancament respecte a unions numerables)

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Tenint en compte que la motivació de definir els processos estocàstics és estudiar l'evolució de fenòmens aleatoris, definim un conjunt anomenat S , espai d'estats, i la σ -àlgebra $\mathcal{S}$ de les parts de S .

Definició 2.1.2. *Un procés estocàstic amb espai d'estats S és una família $\{X_i, i \in I\}$ indexat per un conjunt I , on $X_i : \Omega \rightarrow S$ són variables aleatòries.*

Habitualment, es considera l'espai d'estats $S = \mathbb{R}$ i $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ -àlgebra generada pels oberts de $\mathbb{R}$. De la mateixa manera, usualment es consideren índexos continguts en $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}_+$ si es tracta d'un procés discret, o $I = \mathbb{R}_+$ en el cas continu.

Cal ara definir el concepte de filtració per introduir la noció de martingala.

Definició 2.1.3. *Una filtració associada a un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ és una successió de σ -àlgebres $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in I\}$ tals que:*

- $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \forall t \in I$
- $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t, s, t \in I$

Definició 2.1.4. *Donat un procés estocàstic X definim la seva filtració natural com la successió de σ -àlgebres generades per les pròpies variables del procés, és a dir:*

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{X_k : k \leq t\}$$

Definició 2.1.5. *Es diu que un procés estocàstic és adaptat a una filtració $\mathbb{F}$ si per a cada $i \in I$, X_i és $\mathcal{F}_i$ -mesurable.*

Definició 2.1.6. *Un procés estocàstic M és una martingala respecte la filtració $\mathbb{F}$ si i només si es compleix:*

- $M_t \in L^1(\Omega) \forall t > 0$
- M és un procés adaptat a $\mathbb{F}$
- $\mathbb{E}(M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$ per a tot $0 \leq s \leq t$.

2.2 Moviment brownià

En aquesta secció definirem un dels conceptes principals, el moviment brownià, punt clau al què volem arribar en aquest primer capítol.

El moviment brownià, en la seva definició més intuïtiva, és la trajectòria que descriu una partícula en suspensió en un medi fluid tenint en compte la interacció amb les pròpies partícules del fluid. És un exemple d'això el moviment d'una partícula de pols en suspensió a l'aire, o el d'una partícula de pol·len a l'aigua.

Aquesta trajectòria és evidentment aleatòria, però volem estudiar quines propietats té i si hi ha alguna que ens permeti predir, encara que sigui lleugerament, el seu comportament. És clar que el moviment brownià és, doncs, un procés estocàstic indexat per un interval continu de temps.

Abans d'introduir el moviment brownià, però, hem de recordar certes nocions sobre teoria de probabilitat i processos estocàstics.

Definició 2.2.1. *Les distribucions conjuntes de dimensió finita del procés $\{X_t, t \in I\}$ són les col·leccions de les lleis de probabilitat multidimensionals de qualsevol família finita de vectors aleatoris $X_{t_1}, \dots, X_{t_m}$, amb $t_1, \dots, t_m \in I$ i $m \in \mathbb{N}$.*

Cal ara fixar-nos en un subconjunt dels processos estocàstics en concret, al què després veurem que pertany el moviment brownià.

Definició 2.2.2. *Es diu que un procés estocàstic $\{X_t : t \in I\}$ és gaussià si per qualsevol $m \in \mathbb{N}$ i qualssevol $t_1, \dots, t_m \in I$ el vector aleatori $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ té una distribució normal (o gaussiana) m -dimensional.*

Un vector aleatori gaussià $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$, es caracteritza pel vector d'esperances i la matriu de covariances:

$$\mu_{t_1, \dots, t_m} = E(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) = (E(X_{t_1}), \dots, E(X_{t_m})), \quad (2.2.1)$$

$$\Lambda_{t_1, \dots, t_m} = (\text{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j}))_{1 \leq i, j \leq m}. \quad (2.2.2)$$

Així doncs, la llei de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$, té com a funció de densitat

$$f_{t_1, \dots, t_m}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det(\Lambda_{t_1, \dots, t_m})}} \times \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu_{t_1, \dots, t_m})^\top \Lambda_{t_1, \dots, t_m}^{-1} (x - \mu_{t_1, \dots, t_m}) \right), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

En darrer lloc abans d'introduir-nos totalment en el moviment brownià, enunciaré una definició que farem servir posteriorment.

Definició 2.2.3. *Les trajectòries d'un procés estocàstic $\{X_t : t \in I\}$ són la família de funcions indexades per $\omega \in \Omega$, $X(\omega) : I \rightarrow S$, i es defineixen com $X(\omega)(t) = X_t(\omega)$.*

Finalment i un cop assolits els conceptes previs necessaris, farem la primera definició matemàticament rigorosa del moviment brownià

Definició 2.2.4. *Un procés estocàstic $X = \{X_t : t \geq 0\}$ és un Moviment Brownià si i només si:*

- (i) $X_0 = 0$ quasi segurament.
- (ii) $X_t - X_s$ és independent de X_r per qualssevol $0 \leq r \leq s \leq t$.
- (iii) $X_t - X_s$ és una variable aleatòria amb llei $N(0, t-s)$, per $0 \leq s \leq t$.

Alternativament, en determinats contextos s'utilitza de vegades la següent definició, fent servir la noció de procés estocàstic gaussià presentada abans.

Cal notar que el símbol $\wedge$ representa el mínim de dos elements dotats d'un ordre.

Definició 2.2.5. *El procés estocàstic $\{B_t : t \geq 0\}$ és un Moviment Brownià unidimensional si és gaussià, amb esperança nul·la i amb funció de covariança donada per $E(B_t B_s) = s \wedge t$.*

Enunciem ara les propietats més importants del moviment brownià, que seran necessàries a l'hora de formalitzar els models que farem servir.

Proposició 2.2.6. *Un Moviment Brownià satisfà la propietat de martingala respecte de la filtració natural.*

Demostració. Si B_t és un Moviment Brownià, per definició compleix:

- $B_t \in L^1(\Omega) \forall t \geq 0$, perquè és una variable amb llei normal.
- B té increments independents.

Clarament, B_t és un procés adaptat a la seva filtració natural. D'altra banda, també per definició, $B_t \in L^1(\Omega)$.

Com $B_0 = 0$, per cada $s > 0$, $\mathcal{F}_s$ és generat pels increments $B_r - B_u$ amb $0 \leq u \leq r \leq s$. Ara, per la propietat dels increments independents, tenim que $B_t - B_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$. Per tant tenim que

$$E(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0$$

ja que B_t i B_s tenen la mateixa esperança per $t \geq 0$. □

Proposició 2.2.7. *Un Moviment Brownià té trajectòries contínues i és no diferenciable quasi segurament.*

Demostració. Veure [CKT12]. □

2.3 Integració estocàstica

Considerem $\int_a^b f(t) dW(t)$, on $W(t)$ és un moviment brownià. És fàcil veure que si tractem aquesta integral com una integral convencional, per exemple de Riemann-Stieltjes, per a cada ω integrant $f(t, \omega)$ respecte $W(t, \omega)$ estaríem cometent una incorrecció, doncs la construcció de la integral de Riemann-Stieltjes només contempla integradors de variació finita, i les trajectòries del Moviment Brownià no tenen aquesta propietat.

Cal construir doncs una definició d'integral que ens permeti integrar com a mínim alguns processos estocàstics respecte del moviment brownià, i delimitar de manera clara quins són aquests processos.

Veiem ara quins processos estocàstics podem prendre com a integrands.

Definició 2.3.1. *Diem que un procés estocàstic X és de quadrat integrable si compleix*

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T X^2(t) dt \right) < \infty \quad (2.3.1)$$

Anomenem $\mathcal{M}^2$ al conjunt dels processos de quadrat integrable.

Podem descriure un subconjunt de processos de $\mathcal{M}^2$ de la següent manera, que ens permetrà comprovar més ràpidament i còmoda si un procés pertany o no a aquest subconjunt.

Observació 2.3.2. Si X és un procés adaptat i per algun $C \in \mathbb{R}$, $|X(t, \omega)| \leq C \forall t, \omega$, llavors $X \in \mathcal{M}^2$.

Demostració. Integrant primer respecte del temps obtenim:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X^2(t) dt\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^T C^2 dt\right) = \mathbb{E}(TC^2) = TC^2$$

□

2.3.1 Integral estocàstica per a processos simples

En aquest apartat volem començar a introduir-nos en els tipus de processos que seran integrables respecte d'un moviment brownià, o sota quines condicions podrem fer-ho.

Comencem amb un subconjunt senzill de processos estocàstics.

Definició 2.3.3. Un procés estocàstic $X \in \mathcal{M}^2$ és simple si existeix una partició $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ de $[0, T]$ i variables aleatòries ξ_k mesurables respecte a $\mathcal{F}_{t_k}$, amb $\mathbb{E}(\xi_k^2) < \infty$ per a $k = 0, 1, \dots, n-1$, tal que:

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k(\omega) \mathbf{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t). \quad (2.10)$$

Diem $X \in S^2$.

Proposició 2.3.4. Per cada procés $X \in \mathcal{M}^2$, existeix una successió $(X_n)_{n \geq 1}$ de processos simples tals que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T (X(t) - X_n(t))^2 dt = 0 \quad (2.3.2)$$

Aquesta proposició ens permet, d'alguna manera, veure que existeixen successions de processos simples prou properes en mòdul a qualsevol procés de quadrat integrable.

Aquest fet serà de vital importància si aconseguim definir una integral estocàstica per a processos simples, ja que podrem apropar-nos a una definició d'integral estocàstica per a processos de quadrat integrable.

Definició 2.3.5. Siguí $X \in S^2$. Definim la seva integral d'Itô (per a processos simples) com

$$I(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)),$$

Per qualsevol interval $[a, b] \subset [0, T]$, també podem posar

$$\int_a^b X(t) dW(t) = I(\mathbf{1}_{\{a, b\}} X). \quad (2.3.3)$$

Veiem a partir d'aquí com podem començar a aproximar-nos a aquest tipus d'integral. Enunciem una darrera propietat, que serà important més tard.

Proposició 2.3.6. (*Isometria de processos simples*) *Segui $X \in \mathcal{S}^2$, es compleix*

$$\mathbb{E}([\int_0^T X(t) dW(t)]^2) = \mathbb{E}(\int_0^T X^2(t) dt). \quad (2.3.4)$$

2.3.2 Definició general de la integral estocàstica

Per definir de manera general la integral estocàstica per qualsevol $X \in \mathcal{M}^2$ prendrem una successió simple, és a dir, com les descrites a la definició 2.3.3.

Tenim que cada X_n té una integral ben definida, ja que són processos simples, i volem veure si la successió $I(X_n)$ convergeix.

Per la propietat d'isometria es compleix

$$\mathbb{E}([\int_0^T (X_n(t) - X_m(t)) dW(t)]^2) = \mathbb{E}(\int_0^T (X_n(t) - X_m(t))^2 dt). \quad (2.3.5)$$

L'expressió de la dreta tendeix a zero si $m, n \rightarrow \infty$ i tenim

$$\int_0^T (X_n(t) - X_m(t)) dW(t) = \int_0^T X_n(t) dW(t) - \int_0^T X_m(t) dW(t). \quad (2.3.6)$$

Per tant $I(X_n) = \int_0^T X_n(t) dW(t)$ és de Cauchy en $L^2(\Omega)$ i convergeix. Arribats a aquest punt podem proseguir de la següent manera.

Definició 2.3.7. *Definim la integral estocàstica d'Itô del procés $X \in \mathcal{M}^2$ com*

$$I(X) = \int_0^T X(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n) \quad (2.3.7)$$

on $(X_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{S}^2$ és una successió de processos estocàstics simples com les definides a la definició 2.3.3.

2.4 Processos d'Itô i fórmula d'Itô

En la darrera secció hem acabat aconseguint una definició de l'integral estocàstica per a processos estocàstics de quadrat integrable a partir de la definició d'integral d'un procés simple.

Veurem ara un tipus concret de processos que ens faran combinar integrals convencionals amb integrals estocàstiques. Aquest tipus de processos i la fórmula que se'n dedueix prendran importància en el proper capítol.

Definició 2.4.1. *Direm que un procés tal que*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s) \quad (2.4.1)$$

per $t \in [0, T]$ és un procés d'Itô Els processos a, b són les característiques de X .

Podem prendre també la notació diferencial:

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \quad (2.4.2)$$

Definim algunes de les seves propietats.

Proposició 2.4.2. *Les trajectòries d'un procés d'Itô X són contínues quasi segurament.*

Proposició 2.4.3. *Si $a=0$, llavors X (procés d'Itô) és una martingala.*

Les proves d'aquests dos resultats són a [CKT12].

2.4.1 Fórmula d'Itô

Donada una funció $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotem les derivades parcials com

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t} \quad F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \quad F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2.4.3)$$

Si F té aquestes tres derivades contínues, direm que pertany al conjunt $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, o $\mathcal{C}^{1,2}$ si el context ho permet.

Acabem el capítol enunciant la definició que ens permetrà obtenir la fórmula de Black-Scholes, objectiu central d'estudi en aquest treball.

Teorema 2.4.4. *Sigui $F(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}$ i $dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$, on $b \in \mathcal{M}^2$, a i b tenen trajectòries contínues i X està afitat per una constant determinista. Llavors el procés $F(t, X(t))$ és un procés d'Itô i compleix la fórmula d'Itô*

$$F(t, X(t)) - F(0, 0) = \int_0^t F_t(s, X(s)) ds + \int_0^t F_x(s, X(s)) dX(s) \quad (2.4.4)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(s, X(s)) b^2(s) ds \quad (2.4.5)$$

Demostració. La prova està a [CKT12]. □

Capítol 3

El model de Black-Scholes

3.1 Aproximació

En aquesta secció enunciam els conceptes previs, tant matemàtics com de context, necessaris per arribar amb suficiència al model de Black-Scholes. Suposarem coneguts alguns resultats sobre processos estocàstics i integració estocàstica tractats en el primer capítol del treball. A tota aquesta secció seguirem [CT04], [CVdf], [CK12] i [SG23].

Comencem amb alguns conceptes financers.

Definició 3.1.1. *Una opció financera és un instrument financer derivat que s'estableix en un contracte que dona al seu comprador el dret, però no l'obligació, de comprar o vendre béns o valors a un preu predeterminat, fins a una data concreta.*

Les opcions que ens interessin en aquest treball són les europees, de les quals se'n distingeixen els dos següents tipus, segons si les adquireix el venedor o el comprador de l'actiu subjacent.

Definició 3.1.2. *Una opció financera Call europea és un instrument que ens dona l'opció, que no l'obligació, de comprar un actiu a un preu determinat, anomenat preu d'exercici o strike, a una data de venciment determinada. El perfil de benefici d'un call és*

$$(S(T) - K)^+ \quad (3.1.1)$$

on T és la data de venciment, S_T el preu de l'actiu al venciment i K el preu d'exercici o strike.

Definició 3.1.3. *Una opció financera Put europea és un instrument que ens dona l'opció, que no l'obligació, de vendre un actiu a un preu determinat, anomenat preu d'exercici o strike, a una data de venciment determinada. El perfil de benefici d'un Put és*

$$(K - S(T))^+ \quad (3.1.2)$$

on T és la data de venciment, $S(T)$ el preu de l'actiu al venciment i K el preu d'exercici o strike.

Seguim amb conceptes financers.

Proposició 3.1.4. *La paritat call-put estableix una relació entre el preu d'una opció Call europea i una opció Put europea sobre el mateix actiu subjacent, amb el mateix preu d'exercici K i la mateixa data de venciment T . Aquesta relació es pot expressar de la següent manera:*

$$C - P = S(0) - Ke^{-rT}$$

On:

- C és el preu de l'opció Call europea.
- P és el preu de l'opció Put europea.
- $S(0)$ és el preu unitari actual de l'actiu subjacent.
- K és el preu d'exercici (strike) de les opcions.
- r és el tipus d'interès lliure de risc.
- T és el temps fins a la data de venciment (en anys).

Anem a descriure breument cadascun dels elements introduïts en la proposició anterior, fent servir un exemple d'opció call europea sobre un actiu qualsevol.

Imaginem que un comerciant de fruita vol protegir-se davant d'una possible pujada del preu de la taronja, que serà en aquest cas l'actiu subjacent i tindrà actualment, en el moment de compra del call, un preu representat per $S(0)$, posem de 1000€/tona.

El comerciant, que preveu una pujada de cara a l'any següent, creu que li seria beneficiós assegurar-se un preu de compra de 1100€/tona si el preu de mercat puja i en aquell moment és superior, o comprar-la al preu de mercat si aquest és inferior a 1100€/tona. En aquest cas, 1100€ serà el preu d'exercici K i T serà el temps que falta per l'inici de la propera temporada de taronjes, és a dir, quan l'opció venç i el comerciant pot executar-la i comprar taronjes al preu fixat.

Cal ajustar també l'operació a les habituals fluctuacions pròpies de qualsevol mercat, i tenint en compte que un actiu sense risc, com pot ser una quantitat determinada de diners al banc, variarà seguint el tipus d'interès r .

Evidentment, l'opció de comprar taronjes a 1100€/tona és atractiva pel comerciant però no té per què ser-ho també pel productor, que podria guanyar més diners si les previsions de pujada del preu s'acaben complint. És per això que s'ha de fixar una quantitat, que anomenarem prima i simbolitzarem amb C , i que el comerciant ha de pagar en el moment actual, $t = 0$, per tal d'assegurar-se l'opció de comprar al preu desitjat a $t = T$.

És evident que per què totes dues parts estiguin d'acord en la comercialització d'aquest tipus d'opcions, el preu de la prima ha de ser just, és a dir, cap de les dues parts ha d'esperar una pèrdua de diners amb la informació de la que es disposa en el moment de la formalització de l'acord.

El problema de trobar un preu el més just possible per aquesta prima és el que ens ocuparà en el que resta de treball, en el qual presentarem dos dels models més utilitzats i valorarem si s'ajusten o no a la realitat mercantil. Començarem, però, amb el model de Black-Scholes.

Com a anotació, usualment es classifiquen les opcions segons la relació entre el preu d'exercici K i el preu de l'actiu S . D'aquesta manera, tindrem la següent distinció:

- Una opció (Call o Put) serà *At the money* (ATM) si $K = S$.
- Una opció Call serà *Out of the money* (OTM) si $K > S$. D'altra banda, una opció Put serà OTM si $K < S$.
- Una opció call serà *In the money* (ITM) si $K < S$. Una opció Put serà ITM si $K > S$.

En altres paraules, una opció de qualsevol tipus és ITM si podem obtenir un benefici en executar-la, i és OTM si no té sentit exercir-la i és més profitós comprar o vendre a preu de mercat. En altre cas (si hi ha una igualtat) serà ATM.

3.2 Descripció del model

En primer lloc, plantejarem un mercat amb dos actius, que seràn els següents.

1. Un actiu sense risc descrit per la funció determinista

$$dA(t) = rA(t)dt, \quad (3.2.1)$$

amb $A(0) = 1$, $r > 0$.

És directe comprovar que aquesta equació té com a solució única $A(t) = e^{rt}$. Cal entendre aquest actiu com, per exemple, una quantitat de diners guardada al banc retribuïda segons un tipus d'interès r .

2. Un actiu amb risc representat pel procés d'Itô

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (3.2.2)$$

amb $S(0)$ donat, W un Moviment Brownià estàndard en un espai de probabilitat filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ i direm que $\mu \in \mathbb{R}$ és el drift i $\sigma > 0$ la volatilitat del preu S de l'actiu.

Cal entendre també aquest actiu com l'actiu subjacent sobre el qual s'emetràn les opcions que haurem d'estudiar i valorar en les properes seccions.

La filtració associada a l'espai de probabilitat és $\mathbb{F} = \sigma(\{S(u) : u \leq t\})$. És equivalent escriure

$$S(t) = S(0) + \mu \int_0^t S(u) du + \sigma \int_0^t S(u) dW(u) \quad (3.2.3)$$

Podem veure fàcilment que els coeficients de l'equació 3.2.2 són Lipschitz amb creixement lineal, per tant podem aplicar el teorema d'existència i unicitat per equacions diferencials estocàstiques. La prova la podem veure a [CKT12].

Anomenarem *cartera* al conjunt d'actius de tots dos tipus que tenim en possessió. Cal veure, però, com evolucionen aquestes quantitats al llarg del temps.

Definició 3.2.1. *Una estratègia en un mercat amb una sola acció i un actiu sense risc és un procés adaptat $(x, y) = \{(x(t), y(t)) : t \in [0, T]\}$, on $x(t)$ indica el nombre d'accions i $y(t)$ les unitats d'actiu sense risc a temps t .*

Tenim doncs que el valor de la nostra cartera és

$$V_{(x,y)}(t) = x(t)S(t) + y(t)A(t) \quad (3.2.4)$$

Hem d'entendre el risc associat a una estratègia com l'incertesa que comporta mantenir una posició determinada. Així doncs, l'objectiu de les estratègies, en el fons, és combinar unes quantitats determinades de cadascun dels actius per tal de minimitzar el risc en tot moment.

Definició 3.2.2. *Una estratègia de cobertura és una tàctica financera que té com a objectiu reduir o eliminar el risc associat a moviments adversos en el preu d'un actiu.*

Definició 3.2.3. *Donat un actiu $S(t)$, anomenem preu descomptat de l'actiu en l'instant t a $\tilde{S}(t) = S(t)e^{-rt}$, on r és el tipus d'interès de l'actiu lliure de risc.*

3.2.1 Mesura de probabilitat neutral al risc

Per tal d'estructurar correctament el model, cal dotar-lo d'una probabilitat sota la qual els preus descomptats siguin martingala. Això ens permetrà després obtenir la valoració d'opcions amb el model de Black-Scholes.

Considerem en primer lloc la derivada respecte del temps del preu descomptat de l'actiu S en el moment t , i operem.

$$\begin{aligned} d\tilde{S}(t) &= d(e^{-rt}S(t)) \\ &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) \\ &= e^{-rt}S(t)(-r dt + \mu dt + \sigma dW(t)) \\ &= \sigma\tilde{S}(t)d\left(-\frac{r-\mu}{\sigma}t + W(t)\right) \\ &= \sigma\tilde{S}(t)dW_{\mathcal{Q}}(t). \end{aligned}$$

On $W_{\mathcal{Q}}(t) = W(t) - \frac{r-\mu}{\sigma}t$.

Ens seria de gran utilitat provar que $W_{\mathcal{Q}}(t)$ és un moviment brownià. Ens valdrem del següent resultat.

Teorema 3.2.4. *(Girsanov - versió simple) El procés $W_{\mathcal{Q}}(t) = bt + W(t)$ és un moviment brownià sota la probabilitat $\mathcal{Q}$ definida com*

$$Q = \int_A e^{-\frac{1}{2}b^2T + bW(T)} dP \quad (3.2.5)$$

Demostració. Veure Capínski, Kopp (2012, pàg 13). □

Tenim doncs que $(W_{\mathcal{Q}}(t))_{0 \leq t \leq T}$ és un moviment brownià respecte de $\mathcal{Q}$ i per tant deduïm

$$\tilde{S}(t) = S(0)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)} \quad (3.2.6)$$

Queda provar que això és una martingala respecte de la mesura de probabilitat $\mathcal{Q}$.

Prenem $s < t$. Tenim

$$\mathbb{E}\left[\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(s)} \mid \mathcal{F}(s)\right] = \mathbb{E}\left(e^{\sigma(W(t)-W(s)) - \frac{\sigma^2(t-s)}{2}}\right)$$

Com que l'increment del moviment brownià segueix una distribució $N(0, t - s)$, tenim.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(s)}|\mathcal{F}(s)\right] &= \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma x - \frac{\sigma(t-s)}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x - \sigma(t-s))^2}{2(t-s)}} dx = 1\end{aligned}$$

Tenim finalment que

$$\mathbb{E}[\tilde{S}(t)|\mathcal{F}(s)] = \tilde{S}(s) \quad (3.2.7)$$

Que prova la condició de martingala.

Direm que la mesura de probabilitat $\mathcal{Q}$ és una mesura de probabilitat neutral al risc, i l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ és també neutral al risc.

3.2.2 Propietats del model de Black-Scholes

En aquesta secció tenim com a objectiu enunciar algunes de les propietats -les més rellevants- del model que estem tractant. Prendrà importància en algunes d'elles la probabilitat neutral al risc que hem presentat en la secció anterior.

Definició 3.2.5. Una estratègia $(x(t), y(t))$ és autofinançada si

$$dV(t) = x(t)dS(t) + y(t)dA(t) \quad (3.2.8)$$

Definició 3.2.6. Diem que una estratègia autofinançada (x, y) és admissible si

1. $V(t) \geq -L$, amb L positiu per a tot $t > 0$.
2. $\tilde{V}(t)$ és una $\mathcal{Q}$ -martingala

Definició 3.2.7. Diem que $(x(t), y(t))$ és una oportunitat d'arbitratge si és admissible i

- $V_{(x,y)}(0) = 0$.
- $\mathbb{P}(V_{(x,y)}(T) > 0) > 0$.

$$V_{(x,y,z)}(t) = x(t)S(t) + y(t)A(t) + z(t)H(t). \quad (3.2.9)$$

Definició 3.2.8. Una estratègia (x, y) replica el derivat amb perfil de beneficis H si $H = V_{(x,y)}(T)$. Si tota variable aleatòria $\mathcal{F}_T^{\mathcal{Q}}$ -mesurable és replicable, direm que el model de mercat és complet.

Seria interessant aconseguir que el nostre mercat fos complet, ja que això permetria dissenyar estratègies de cobertura adequades.

Proposició 3.2.9. No hi ha oportunitats d'arbitratge al model de Black-Scholes.

Demostració. Prenem una estratègia admissible (x, y) amb valor inicial zero, tenim

$$\tilde{V}_{(x,y)}(t) = \int_0^t y(s) d\tilde{S}(s)$$

Tenim ara que $\tilde{V}_{(x,y)}(t)$ és una martingala localment respecte la mesura $\mathcal{Q}$ i és acotada inferiorment, per tant és supermartingala. Per tant

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(\tilde{V}_{(x,y)}(T)) \leq 0$$

Com assumim que amb la probabilitat original, $\mathbb{P}(V_{(x,y)}(T) \geq 0) = 1$ i tenim $\mathbb{P} \sim \mathcal{Q}$, queda $V_{(x,y)}(T) = 0$ quasi segurament per les dues probabilitats. $\square$

Teorema 3.2.10. *Per a cada $H \geq 0$ $\mathcal{F}_T$ -mesurable amb $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(H^\alpha) < \infty$ per algun $\alpha \geq 2$, hi ha una estratègia admissible (x, y) que replica H tal que*

$$V_{(x,y)}(t) = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(e^{-r(T-t)} H | \mathcal{F}_t) \quad (3.2.10)$$

I per tant el model de Black-Scholes és complet sota aquestes condicions.

Demostració. Veure Capinski, Kopp (2012, pàg 48) [CK12]. $\square$

3.2.3 Valoració d'opcions

L'aplicació del model que més ens interessa és la que ens permet arribar a fixar un preu per la prima d'un Call de tipus europeu. Anem a deduir una fórmula que ens ho permeti calcular.

Amb la notació anterior, posem $H = (S(T) - K)_+$, i volem calcular $C(t, S(t))$. Cal en primer lloc enunciar una proposició.

Proposició 3.2.11. *Sota el model de Black-Scholes, $\frac{S(T)}{S(t)}$ és independent de $S(t)$.*

Demostració. Escrivim explícitament

$$\frac{S(T)}{S(t)} = \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma (W(T) - W(t)) \right\}$$

Tenim ara que $\frac{S(T)}{S(t)}$ és una funció dependent de $T - t$ i $W(T) - W(t)$. Per la definició de moviment brownià, sabem que els increments són independents i, per tant, $W(T) - W(t) \perp W(s)$ per qualsevol $s \leq t \leq T$. $\frac{S(T)}{S(t)}$ és clarament una funció mesurable respecte de $\mathcal{F}_T$, de $W(T) - W(t)$, que és independent de $S(t)$ i, per tant, queda provat. $\square$

Aquesta proposició ens permetrà transformar esperances condicionades en no condicionades. Comencem

$$C(t, S(t)) = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(e^{-r(T-t)} (S(T) - K)_+ \mid \mathcal{F}(t) \right) \quad (3.2.11)$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(S(T) \mathbf{1}_{\{S(T) > K\}} \mid \mathcal{F}(t) \right) - K e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\mathbf{1}_{\{S(T) > K\}} \mid \mathcal{F}(t) \right) \quad (3.2.12)$$

$$= e^{-r(T-t)} S(t) \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\frac{S(T)}{S(t)} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{S(T)}{S(t)} > \frac{K}{S(t)} \right\}} \right)_{x=S(t)} - K e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left(\mathbf{1}_{\left\{ \frac{S(T)}{S(t)} > \frac{K}{S(t)} \right\}} \right)_{x=S(t)}, \quad (3.2.13)$$

on, a la tercera igualtat, hem fet servir la proposició 3.1.15. Estudiem tots dos sumands per separat.

En primer lloc, si posem ϕ la funció de distribució d'una normal estàndard, tenim

$$\mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left(\mathbf{1}_{\left\{ \frac{S(T)}{S(t)} > \frac{K}{x} \right\}} \right) = \mathcal{Q} \left(\frac{S(T)}{S(t)} > \frac{K}{x} \right) \quad (3.2.14)$$

$$= \mathcal{Q} \left(\log \left(\frac{S(T)}{S(t)} \right) > \log \left(\frac{K}{x} \right) \right) \quad (3.2.15)$$

$$= \mathcal{Q} \left(\frac{W(T) - W(t)}{\sqrt{T-t}} > \frac{\log \left(\frac{K}{x} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \quad (3.2.16)$$

$$= \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right), \quad (3.2.17)$$

D'altra banda, si anomenem Y a una variable normal estàndard,

$$\begin{aligned} & e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left(\frac{S(T)}{S(t)} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{S(T)}{S(t)} > \frac{K}{x} \right\}} \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left(\exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma W(T-t) \right\} \mathbf{1}_{\left\{ \sigma W(T-t) > \log \left(\frac{K}{x} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right\}} \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left(\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \sigma W(T-t) \right\} \mathbf{1}_{\left\{ \sigma W(T-t) > \log \left(\frac{K}{x} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right\}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) - \sigma \sqrt{T-t} y - \frac{1}{2} y^2 \right\} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\sigma \sqrt{T-t} + y)^2 \right\} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u^2 \right\} du. \end{aligned}$$

Tornant a (3.2.13), si anomenem $d_{\pm} = \frac{\log \left(\frac{S(t)}{K} \right) + \left(r \pm \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$ ens queda la fórmula

$$C(t, S(t)) = S(t) \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-), \quad (3.2.18)$$

que és la fórmula de Black-Scholes per la valoració d'una opció europea de tipus Call.

Passem ara a valorar una opció de tipus Put. Partint de la paritat Call-Put, tenim

$$P(t) = C(t) - S(t) + K e^{-r(T-t)}$$

Fent servir la fórmula de valoració del Call europeu que acabem de deduir i substituint-la, obtenim

$$\begin{aligned} P(t, S(t)) &= S(t) \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-) - S(t) + K e^{-r(T-t)} \\ &= S(t) (\Phi(d_+) - 1) + K e^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d_-)) \end{aligned}$$

Del que es dedueix la fórmula de Black-Scholes per la valoració d'opcions Put europees

$$P(t, S(t)) = -S(t) \Phi(-d_+) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_-). \quad (3.2.19)$$

Capítol 4

La volatilitat al model de Black-Scholes

La volatilitat, concepte de vital importància en la matemàtica financera, és el principal indicador de risc o incertesa amb el què podem treballar.

Al model de Black-Scholes, la volatilitat ve representada pel paràmetre $\sigma > 0$ i es defineix com a constant per la construcció del model. Això, tal com es comprova empíricament amb càlculs històrics de volatilitat, és en la majoria de casos incorrecte o, com a mínim, poc precís. L'objectiu final del treball, tal com veurem, serà fer aquesta comprovació i provar de donar-ne una solució.

Les darreres tendències en matemàtica financera ens conviden a qüestionar els models amb volatilitat constant, com a Di Nunno et al. [DNKMYT23] i a Fukasawa et al. [FTW19], que es planteja la hipòtesi d'una volatilitat de tipus *rough*.

4.1 Volatilitat històrica

En l'àmbit financer, la primera mesura de volatilitat a la qual es pren atenció és la de la volatilitat històrica. Aquesta té un caràcter retrospectiu i per tant només ens dona informació sobre l'evolució anterior del preu de l'actiu a estudiar.

Com a mesura de volatilitat històrica d'un actiu $S(t)$ en un període de temps determinat farem servir la desviació estàndard $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(S(t) - \mu)^2]}$, on $\mu = \mathbb{E}(S(t))$.

Anem a veure com es comporta aquesta mesura en mercats reals a períodes de temps constants. Tenim que la volatilitat històrica al període juliol - desembre de 2024, calculada diàriament amb un període de regressió de 10 dies i amb 252 retorns anuals de l'indicador S&P 500 ve representada per aquest gràfic.



Figura 4.1: Volatilitat històrica a 10 dies, S&P 500, jul-des 2024 (Font: Yahoo finance)

És clar que aquest paràmetre no pren un valor constant, i a més pren valors entre 5.00 i 25.00 en aquest període, fet que ens fa reflexionar sobre l'adequació de prendre la volatilitat com un valor constant a l'hora de fer valoracions d'opcions. A més, tenint en compte que en mercats reals es comercialitzen opcions europees de tipus Call i Put sobre valors com l'S&P 500, és raonable intuir que el càlcul per Black-Scholes de les primes d'aquestes opcions estaran, d'una manera o altra, afectats per la poca precisió en el paràmetre de la volatilitat.

4.2 La volatilitat implícita

Recuperem ara la fórmula de Black-Scholes per la valoració d'una opció europea tipus call. Recordem

$$C(t, S(t)) = S(t) \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-) \quad (4.2.1)$$

amb

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Veiem clarament que la volatilitat pren un paper en l'expressió que ens impedeix aïllar-la per trobar una expressió explícita que ens permeti calcular-la directament. Ara bé, anem a veure com trobar una inversió d'aquesta fórmula respecte de σ , encara que no sigui de manera explícita.

Comencem l'argument provant que $C(t, S(t))$ és derivable i monòtona creixent respecte de σ . Tenim que Φ són funcions de distribució normal i per tant són derivables. D'altra banda, $d_{\pm}$ també depèn de σ de manera derivable, i per composició de funcions derivables tenim que $C(t, S(t))$ és derivable respecte de la volatilitat.

El següent pas és provar la monotonia creixent de $C(t, S(t))$ respecte de σ . Calculant la seva derivada parcial respecte de la volatilitat, queda

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S(t) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(d_-) \frac{\partial d_-}{\partial \sigma} \quad (4.2.2)$$

Justifiquem ara que 4.1.2 és sempre positiu. Podem considerar el preu de l'actiu, $S(t)$, i l'strike K també positius, així com la taxa d'interès r i el temps de venciment T , per motius de realitat del mercat i hipòtesi. Tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_+}{\partial \sigma} &= \frac{\sqrt{T-t} \left[(T-t)\sigma^2 - \left(\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right) \right]}{\sigma^2(T-t)} = \sqrt{T-t} - \frac{d_+}{\sigma} = -\frac{d_-}{\sigma}, \\ \frac{\partial d_-}{\partial \sigma} &= \frac{\sqrt{T-t} \left[(T-t)\sigma^2 - \left(\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right) \right]}{\sigma^2(T-t)} - \sqrt{T-t} = -\frac{d_+}{\sigma}. \end{aligned}$$

les derivades parcials de $d_{\pm}$, ja que $d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T-t}$. Podem veure doncs ara que

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= S(t) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(d_-) \frac{\partial d_-}{\partial \sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_+^2}{2}} \left[-\frac{S(t)d_-}{\sigma} + \frac{K e^{-r(T-t)} d_+}{\sigma} e^{\frac{d_+^2}{2} - \frac{d_-^2}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Notem doncs ara que

$$e^{\frac{d_+^2}{2} - \frac{d_-^2}{2}} = \frac{\phi(d_-)}{\phi(d_+)} = e^{\ln(\frac{S(t)}{K}) + r(T-t)} = \frac{S(t)}{K} e^{r(T-t)}$$

Per tant

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= \phi(d_+) \left[-\frac{S(t)d_-}{\sigma} + \frac{K e^{-r(T-t)} d_+ S(t)}{\sigma K} e^{r(T-t)} \right] \\ &= \phi(d_+) \left[-\frac{S(t)d_-}{\sigma} + \frac{S(t)d_+}{\sigma} \right] \\ &= \phi(d_+) \left[-\frac{S(t)}{\sigma} (d_+ - d_-) \right] \\ &= \phi(d_+) \frac{S(t)}{\sigma} \sigma \sqrt{T-t} \\ &= \phi(d_+) S(t) \sqrt{T-t} > 0 \end{aligned}$$

I queda, per tant, provada la monotonia estrictament creixent respecte de la volatilitat de la funció de valoració d'un Call europeu per Black-Scholes.

Podem concloure doncs que, donat C^{mkt} un preu observat per al call que estem estudiant, si definim $C^{mkt} = BS(\sigma, S, K, T, r)$, llavors existeix una funció

$$\hat{\sigma}(K, T) = BS^{-1}(C^{mkt}, S, K, T, r) \quad (4.2.3)$$

que a més és única.

Això, però, no ens aporta cap solució en el sentit pràctic, doncs el fet de conèixer l'existència i unicitat de la funció no implica que es pugui conèixer una descripció explícita de la mateixa. A priori, i en el que aquest treball respecta, només ens plantejarem obtenir valors per aquesta funció des del punt de vista aproximat i mitjançant mètodes numèrics.

Abans farem un petit incís sobre quines implicacions té aquesta nova concepció de la volatilitat que acabem de trobar des del punt de vista purament econòmic i d'inversió.

En primer lloc, a diferència de la volatilitat històrica plantejada en l'apartat anterior, que estava calculada en funció de dades anteriors i tenia caràcter retrospectiu, la volatilitat definida de manera implícita com ho acabem de fer té un caràcter prospectiu. Això converteix aquest paràmetre, des del punt de vista de l'inversor, en una eina molt més útil a l'hora de dissenyar una estratègia d'inversió ja que reflecteix de manera més versemblant la realitat actual del mercat.

D'altra banda, cal tenir en compte que només s'ha definit aquest tipus de volatilitat per opcions, i més concretament en el nostre cas per opcions de tipus europeu. És a dir, no podem esperar, com a mínim amb la informació que tenim fins ara, trobar un valor de volatilitat implícita sense una opció d'aquest tipus. És a dir, si un actiu no és opcional (no s'emeten opcions sobre ell), no trobarem la seva volatilitat implícita.

Observem en darrer lloc que la funció $\hat{\sigma}$ s'ha definit amb dependència només sobre l'strike K i el temps de venciment T . Aprofundirem en aquest fet més endavant.

4.3 Càlcul numèric de la volatilitat implícita

Ha quedat provada en l'anterior secció l'existència i unicitat de la funció volatilitat $\sigma = BS^{-1}(t, S(t), K, C(t))$, i l'intenció final d'aquest treball és provar o refusar l'adequació del model de Black-Scholes tenint en compte que pren la volatilitat com a constant.

Sabent això, ens agradaria, tot i no poder trobar una expressió explícita de la funció σ , trobar un mètode numèric adequat pel seu càlcul. Definim $\tau = T - t$. Seguirem a partir d'ara en aquesta secció [OT17].

Reprenem l'equació (4.2.3). Podem definir una funció

$$g(\hat{\sigma}) = BS(S, \tau, K, r, \hat{\sigma}) - C^{mkt}(S, \tau, K) \quad (4.3.1)$$

En aquest cas, doncs, plantegem un primer mètode de càlcul de la volatilitat implícita reduint el problema a un càlcul d'arrels de la funció $g(\hat{\sigma})$. En efecte:

$$\begin{aligned} g(\hat{\sigma}) &= BS(S, \tau, K, r, \hat{\sigma}) - C^{mkt}(S, \tau, K) = 0 \\ BS(S, \tau, K, r, \sigma^*) &= C^{mkt}(S, \tau, K) \\ BS^{-1}(C^{mkt}, S, K, \tau, r) &= \hat{\sigma}(K, T). \end{aligned}$$

Aquest problema es pot abordar mitjançant els habituals mètodes iteratius per trobar arrels.

4.3.1 Càlcul amb el mètode de Newton-Raphson

El primer mètode que farem servir serà el de Newton-Raphson. Aquest mètode és ampliament conegut i permet trobar arrels d'una funció $f(x) \in \mathcal{C}^1$ fent servir una aproximació inicial x_0 i la següent seqüència iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En el nostre cas, l'efectuarem de la següent manera: partint d'una primera aproximació σ_0^* arbitrària i escollida amb els criteris habituals del mètode, tenim

$$\hat{\sigma}_{k+1} = \hat{\sigma}_k - \frac{C(\hat{\sigma}_k) - C^{mkt}}{g'(\hat{\sigma}_k)} \quad (4.3.2)$$

Les successives iteracions del mètode, si s'ha executat escollint els paràmetres inicials correctes i la funció g és prou regular, ens portaran a un zero de la funció g .

Veiem com obtenir $g'(\hat{\sigma})$. Ja hem calculat la derivada respecte de la volatilitat del subjaent a la secció anterior. Habitualment s'anomena *Vega* i es denota amb la lletra ν .

Recordem que explícitament l'expressió de ν venia donada per $\phi(d_+)S(t)\sqrt{T-t}$. Anem a estudiar quines condicions ha de tenir $g'(\hat{\sigma})$ per assegurar la convergència del mètode, i com hauríem d'escollir l'aproximació inicial.

Partint de ν , derivem per obtenir $g''(\sigma)$. Tenim

$$g''(\sigma) = \frac{\partial \nu}{\partial \sigma} = \phi(d_+)S(t)\sqrt{T-t}(-d_+)\frac{\partial d_+}{\partial \sigma} \quad (4.3.3)$$

$$= \phi(d_+)S(t)\sqrt{T-t}\frac{d_+d_-}{\sigma} \quad (4.3.4)$$

Enunciem ara una proposició que ens permetrà determinar amb més precisió quins valors podem prendre per tenir convergència.

Proposició 4.3.1. Si $\frac{\log(S/Ke^{-r(T-t)})}{\sqrt{T-t}} = 0$, llavors $C(\sigma)$ és còncava a $(0, +\infty)$ però si $\frac{\log(\frac{S}{Ke^{-r(T-t)}})}{\sqrt{T-t}} \neq 0$ llavors $C(\sigma)$ és convexa en $(0, \sigma_F)$ i còncava en $(\sigma_F, +\infty)$, on

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{2|\log(S/K)|}{T-t}} \quad (4.3.5)$$

És el punt d'inflexió de $C(\sigma)$.

Demostració. Ja hem calculat $C''(\sigma) = \frac{\partial \nu}{\partial \sigma} = \phi(d_+)S(t)\sqrt{T-t}\frac{d_+d_-}{\sigma}$. Es té:

$$C''(\sigma) = 0 \iff d_+d_- = 0 \iff \frac{\frac{\log(S/Ke^{-r(T-t)})}{\sqrt{T-t}}}{\sigma^2} - \sigma^2 \frac{1}{2}\sqrt{T-t} = 0 \iff \sigma = \sigma_F \quad (4.3.6)$$

Per tant tenim que $C(\sigma)$ és convexa a $(0, \sigma_F)$ i còncava a $(\sigma_F, +\infty)$. $\square$

Necessitem ara una altra proposició, també necessària per estudiar la convergència.

Proposició 4.3.2. Si $\sigma \rightarrow 0$ llavors el preu del Call, $C(\sigma)$ tendeix al benefici de l'opció, en canvi si $\sigma \rightarrow +\infty$, llavors $C(\sigma)$ tendeix al preu de l'actiu subjacent S , o el que és el mateix:

- $\lim_{\sigma \rightarrow 0} C(\sigma) = \max(0, S - Ke^{-r(T-t)})$.
- $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} C(\sigma) = S$

Demostració. Comencem provant el primer punt, fent ús d'una distinció de casos. En primer lloc, si $\frac{\log(S/Ke^{-r(T-t)})}{\sqrt{T-t}} > 0$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} d_+(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} d_-(\sigma) = +\infty$$

Per tant

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \Phi(d_+(\sigma)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \Phi(d_-(\sigma)) = 1$$

i queda que $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} C(\sigma) = S - Ke^{-r(T-t)}$.

D'altra banda, si $\frac{\log(S/Ke^{-r(T-t)})}{\sqrt{T-t}} = 0$ tenim que $S = Ke^{-r(T-t)}$ i per tant

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} d_+(\sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} d_-(\sigma) = 0 \\ \implies \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \Phi(d_+(\sigma)) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \Phi(d_-(\sigma)) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per tant

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} C(\sigma) = \frac{1}{2}(S - Ke^{-r(T-t)}) = 0.$$

Per acabar amb el límit al zero, si $\frac{\log(S/Ke^{-r(T-t)})}{\sqrt{T-t}} < 0$ ens queda

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} d_+(\sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} d_-(\sigma) = -\infty \\ \implies \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \Phi(d_+(\sigma)) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \Phi(d_-(\sigma)) = 0. \end{aligned}$$

Per tant $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} C(\sigma) = 0$ En el cas del límit a l'infinit, tenim

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} d_+(\sigma) &= +\infty \\ \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} d_-(\sigma) &= -\infty\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \Phi(d_+(\sigma)) &= 1 \\ \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \Phi(d_-(\sigma)) &= 0\end{aligned}$$

I queda $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} C(\sigma) = S$. □

Estudiem ara la convergència del mètode de Newton-Raphson si escollim com a aproximació inicial el punt d'inflexió trobat, σ_F .

El mètode de Newton-Raphson és, per definició, convergent localment. Volem veure la convergència global. Presentem ara un teorema que ens permetrà escollir l'aproximació inicial correcta per assolir una convergència global del mètode.

Proposició 4.3.3. *Sigui f una funció diferenciable convexa (o còncava) a un interval $I \subset \mathbb{R}$. Aleshores, si $f'(x) \neq 0$, la seqüència,*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{4.3.7}$$

convergeix a una arrel de f per un x_0 donat.

Donat que estem buscant arrels de la funció $g(\sigma)$ i que si escollim un σ_0 en el mateix interval de concavitat/convexitat que l'arrel $\hat{\sigma}$ tindrem convergència, si prenem $\sigma_0 = \sigma_F$, per la proposició 4.3.1, o bé tindrem concavitat a $(0, +\infty)$ o bé a l'esquerra del punt d'inflexió. En el primer cas, ja tenim la convergència assegurada per la proposició anterior.

En el segon cas, tenim que σ_1 serà la projecció a g de l'intersecció de la tangent a $g(\sigma_F)$ amb l'eix de les abscisses, i per la monotonia estricta creixent de la funció g (conseqüència directa de la monotonia estricta creixent de $C(\sigma)$ provada anteriorment) tindrem que σ_1 estarà al mateix interval de concavitat que l'arrel única (ja que la funció és monòtona) de g . Queda, per tant, provada la convergència del mètode.

Capítol 5

L'alternativa a Black-Scholes: el model de Heston

Com ja s'ha comentat, el principal objectiu d'aquest treball és avaluar la precisió del model de Black-Scholes en termes de volatilitat. Un cop vist que no és precís prendre la volatilitat constant, tal i com ho fa el model de Black-Scholes, ens plantegem buscar un altre model, amb altres característiques, que s'ajusti més a la realitat en termes de volatilitat. És per això que recorrem al model de Heston.

El model de Heston s'engloba en un conjunt de models classificats com *de volatilitat estocàstica*. Això, a grans trets, implica que es prendrà la volatilitat com un procés estocàstic enlloc de com a constant, tal i com es fa a Black-Scholes.

Seguirem en aquesta secció [Gat06], [Rou15] i [BP09].

5.1 Els models de volatilitat estocàstica

Considerarem primerament, amb més generalitat, una descripció dels models de volatilitat estocàstica de reversió a la mitjana. Prendrem el model de Black-Scholes, però considerant, tal com s'ha comentat, la volatilitat com un procés estocàstic. Així, tindrem

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t). \quad (5.1.1)$$

En referència a aquesta fórmula, tenim que $W(t)$ és un moviment brownià del preu de l'actiu subjacent, $S(t)$ el preu de l'actiu subjacent, μ el drift i $\sigma(t)$ el procés estocàstic del terme de volatilitat.

Cal descriure com es comportarà el terme de la volatilitat. Presentem, per això, els anomenats processos d'Ornstein-Uhlenbeck. Aquests processos venen descrits per la següent expressió

$$dx(t) = -\theta x(t)dt + \delta d\tilde{W}(t) \quad (5.1.2)$$

on $\tilde{W}$ és un moviment brownià, $\theta > 0$ i $\delta > 0$ paràmetres del procés. Usualment, també s'afegeix un tercer paràmetre al procés, que anomenarem m i serà també positiu, transformant l'equació anterior en

$$dx(t) = \theta(m - x(t))dt + \delta d\tilde{W}(t). \quad (5.1.3)$$

Més generalment, es pot considerar δ com $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ i doncs tindrem

$$dx(t) = \theta(m - x(t))dt + \delta(x(t))d\tilde{W}(t) \quad (5.1.4)$$

i per tant aquest terme serà també un procés estocàstic adaptat.

Convindrem doncs que, en aquest tipus de models, la volatilitat és un procés del tipus $\sigma(t) = f(x(t))$, amb $x(t)$ el descrit en aquesta secció.

5.2 Descripció del model de Heston

Ja s'ha esmentat el fet de que el model de Heston pertany al grup de models de volatilitat estocàstica. Cal, però concretar i precisar sota quines condicions hi pertany, és a dir, principalment, determinar quina funció f definida en la secció anterior determina la volatilitat que es pren al model.

Començarem fent la transformació pertinent a l'equació (5.1.1). Escriurem

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{x(t)}S(t)dW(t). \quad (5.2.1)$$

Notem que el que hem fet és definir $\sigma(t) = f(x(t)) = \sqrt{x(t)}$ amb la notació de la secció anterior.

Cal ara determinar més precisament la dinàmica de $x(t)$. Tindrem doncs

$$dx(t) = \lambda(m - x(t))dt + \eta\sqrt{x(t)}d\tilde{W}(t) \quad (5.2.2)$$

on $\tilde{W}$ és un moviment brownià.

Cal precisar, per últim, que s'ha de complir també

$$\langle dW(t), d\tilde{W}(t) \rangle = \rho dt \quad (5.2.3)$$

Direm que λ és la velocitat de reversió de $x(t)$ a la seva mitjana a llarg termini m .

5.3 Valoració d'opcions europees segons el model de Heston

Cal recordar que el motiu que ens ha portat a descriure aquest model és la seva relació amb les opcions europees. Veiem com valorar-les fent ús del model.

Hem de suposar que fins ara estàvem definint el model en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ amb la σ -àlgebra generada pels moviments brownians, i la mesura de probabilitat $\mathbb{P}$, de vegades anomenada *mesura física*.

De la mateixa manera que en el model de Black-Scholes, ens calen processos $S(t)$ i $x(t)$ definits sota la probabilitat neutral al risc $\mathbb{Q}$ que fa que els preus actualitzats siguin una martingala. Tindrem que la dinàmica sobre aquesta mesura serà

$$dS(t) = \mu^* S(t)dt + \sqrt{x(t)}S(t)dW_2(t) \quad (5.3.1)$$

$$dx(t) = \lambda^*(m^* - x(t))dt + \eta\sqrt{x(t)}d\tilde{W}_2(t) \quad (5.3.2)$$

i tindrem també que $\mathbb{E}[dW_2(t), d\tilde{W}_2(t)] = \rho dt$

Les equivalències entre els paràmetres anteriors i els del procés amb mesura neutral al risc seran $\lambda^* = \lambda + \delta$ i $m^* = \frac{\lambda m}{(\lambda + \delta)}$.

Segui H el perfil de beneficis d'una opció, tal i com es defineix en altres models, el cost de la prima de l'opció es calcula mitjançant

$$V(t) = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-r(T-t)} H | \mathcal{F}(t)]. \quad (5.3.3)$$

Per raons pràctiques, i donat que l'intenció del treball és estudiar els models en el que es refereix a les opcions de tipus call europeu, només donarem solució al problema de valorar les opcions d'aquest tipus.

Recordem de seccions anteriors que el *payoff* d'un call europeu és $(S(t) - K)^+$. Apliquem-ho doncs a la fórmula de valoració.

$$C(t) = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-r(T-t)} (S(t) - K)^+ | \mathcal{F}(t)] \quad (5.3.4)$$

tal com es veu a [Gat06], i deduït de la transformada de Fourier, s'ha de complir:

$$-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2}x C_{11} - \frac{1}{2}x C_1 + \frac{1}{2}\eta^2 x C_{22} + \rho\eta x C_{12} - \lambda(x - m)C_2 = 0 \quad (5.3.5)$$

on $\tau = T - t$ i els subíndexos 1 i 2 es refereixen a les derivades parcials respecte de $y = \log(\tilde{S}(t)/K)$ i x , respectivament.

Es pot veure que, doncs, la solució d'aquesta equació ens porta a

$$C(t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[(S(t) - K)^+] \quad (5.3.6)$$

$$= S(t)P_1 - K e^{-r\tau} P_2 \quad (5.3.7)$$

que és una expressió similar a la de Black-Scholes. Cal, però, concretar P_1 i P_2 . Introduïm la darrera equació a la 5.3.5,

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2}x \frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{2} - j\right)x \frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{1}{2}\eta^2 x \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} \quad (5.3.8)$$

$$+ \rho\eta x \frac{\partial^2 P_j}{\partial y \partial x} + (a - b_j x) \frac{\partial P_j}{\partial x} = 0 \quad (5.3.9)$$

amb $j = 0, 1$, $a = \lambda m$ i $b_j = \lambda - j\rho\eta$. Es pot veure que la solució a aquesta equació, segons [Gat06] és

$$P_j(y, x, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp(C_j(u, \tau)m + D_j(u, \tau)x + iuy)}{iu} \right\} du. \quad (5.3.10)$$

on

$$D_j(\tau, u) = \frac{b_j - \rho\eta iu + d_j}{\eta^2} \frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - g_j e^{-d_j\tau}}, \quad (5.3.11)$$

$$C_j(\tau, u) = r i u \tau + \frac{a}{\eta^2} \left[(b_j - \rho\eta iu + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{-d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right], \quad (5.3.12)$$

i també

$$d_j = \sqrt{(\rho\eta iu - b_j)^2 - \eta^2(2(\frac{1}{2} - j)u - u^2)}, \quad (5.3.13)$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\eta iu + d_j}{b_j - \rho\eta iu - d_j}. \quad (5.3.14)$$

i $i = \sqrt{-1}$ la unitat complexa.

Capítol 6

La superfície de volatilitat

L'objectiu final d'aquest treball, com ja hem comentat anteriorment, és estudiar el model de Black-Scholes en termes de volatilitat i, finalment, presentar-ne una alternativa més precisa en el que a aquest paràmetre es refereix, tot comprovant empíricament que ho és.

Cal, però, si es parla de volatilitat, fer menció i estudi de la manera més gràfica que es té d'entendre aquesta mesura de risc. Farem un petit avís, però, de que aquesta secció serà més aviat pràctica i no s'introduiran gaires conceptes puraments matemàtics, sinó més aviat d'observació i contextualització econòmica

En aquest capítol tornarem a recórrer a [Gat06], una de les referències en l'àmbit i en menor mesura a

6.1 Graficant la volatilitat

S'ha dedicat un capítol ja en aquest treball a la construcció i càlcul de la volatilitat implícita, i a contextualitzar més generalment el concepte de volatilitat. Anem a recuperar la volatilitat implícita i reflexionar sobre quina seria una representació gràfica adequada.

Recordem que definíem la fórmula del càlcul d'una opció tipus Call europea com $BS(S, \tau, K, r, \sigma)$. Conseqüentment, la volatilitat implícita era

$$\hat{\sigma} = BS^{-1}(C^{mkt}, S, K, \tau, r)$$

on C^{mkt} és el preu d'un Call europeu obtingut empíricament d'un mercat real.

Volem estudiar la dependència de la funció $\hat{\sigma}$ pensant tant en una adequació matemàtica com en el context econòmic, que no hem de perdre de vista. En primer lloc, cal veure que no és adequat representar gràficament la variable r , doncs habitualment és un paràmetre que no té grans variacions i aquestes no són gaire transcendents.

En segon lloc, si estem estudiant la volatilitat implícita en opcions sobre un mateix actiu subjacent, és útil estudiar diferents preus d'exercici i venciments, però el preu actual de l'actiu, és a dir en el moment de compra de l'opció, serà fix en aquell instant, per tant no és útil considerar-lo com a variable. Finalment, el preu empíric de l'opció depèn de l'Strike K i del venciment τ .

Un cop feta aquesta petita reflexió, arribem a la conclusió de que la manera de representar gràficament d'una manera útil la volatilitat implícita serà en funció de les variables

τ i K . Això donarà lloc a un gràfic tridimensional en forma de superfície, que anomenarem superfície de volatilitat.

Abans de fer aquest pas, però, reduïrem encara més el problema fixant també el temps de venciment, cosa que també té un sentit pràctic en l'ús d'opcions. Per tant, en aquest cas ens quedarà un gràfic sobre el pla de la volatilitat implícita en funció del preu d'exercici o Strike K . Anem a veure com es comporten aquests gràfics.

Prendrem doncs a partir d'ara en aquesta secció un temps de venciment fixat, un actiu subjacent fixat (i per tant serà fix també el preu de l'Stock) i la resta de paràmetres també fixos a excepció de l'Strike K . Serà de vital importància recordar els conceptes *At the money*, *out of the money* i *in the money*, ja que el comportament de la volatilitat vindrà marcat pel tipus d'opció que tractem segons aquesta classificació.

Cal tenir en compte que, en el fons, estem tractant amb productes financers, i aquests sovint es regeixen per determinants difícilment quantificables. Hem d'atendre, per tant, al context econòmic per comprendre correctament el comportament dels gràfics de volatilitat. Presentem ara les dinàmiques més comunes a les que obeeixen les corbes que estudiem.

6.1.1 El somriure de volatilitat

Més comunament conegut per l'anglicisme *volatility smile*, és la forma que prenen determinades corbes de volatilitat. Aquest tipus de corbes presenten una forma convexa, amb volatilitats altes tant per opcions call molt ITM com en calls molt OTM (inversament per puts) i assoleixen volatilitats mínimes usualment per opcions *at the money*, és a dir, amb Strikes similars al preu de l'actiu subjacent.

El gràfic d'una volatility smile es veuria de la següent manera:

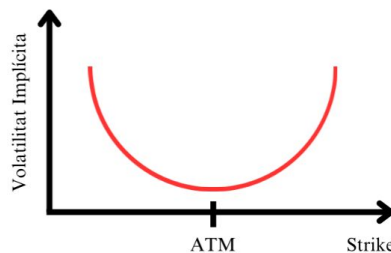


Figura 6.1: Volatility smile.

S'anomena *skew* al paràmetre $\frac{\partial \sigma}{\partial K}$. En aquests casos, tenim

- $\frac{\partial \sigma}{\partial K} < 0$ per calls ITM
- $\frac{\partial \sigma}{\partial K} = 0$ per calls ATM
- $\frac{\partial \sigma}{\partial K} > 0$ per calls OTM

i a l'inversa en el cas dels puts.

Trobem somriures de volatilitat amb més freqüència en opcions en mercats de divises, ja que sovint els moviments afecten simètricament a les dues monedes involucrades. També es veuen en opcions sobre índexs d'accions, depenent del context i la tendència del mercat. Això reflecteix actius amb incertesa de moviment, ja que es pot preveure tant una baixada com una pujada en els preus.

6.1.2 Smirk

Aquest segon cas descriu corbes amb volatilitats més grans com més ITM estan els calls (OTM en el cas de puts) i aquestes van decreixent a mesura que els strikes es van fent grans. Pren també la forma d'un somriure però amb una asimetria per strikes alts. En ocasions és anomenat *smirk*. El gràfic es veuria de la següent manera:

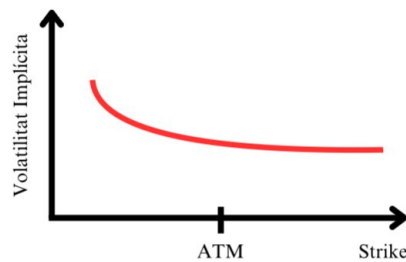


Figura 6.2: Smirk.

És evident que l'*skew* que es presenta en aquestes ocasions compleix $\frac{\partial \sigma}{\partial K} < 0$ per totes les opcions. Aquesta dinàmica, en la pràctica més freqüent que la del somriure, implica que el mercat prefereix opcions que protegeixen contra una caiguda de l'actiu subjacent que les que aprofiten el creixement. Es dona en ocasions en opcions sobre mercats als quals hi ha inquietud per caigudes en el preu de l'actiu subjacent, com en casos de possibles recessions.

6.1.3 Altres patrons de volatilitat

Altres alternatives que es poden trobar són dinàmiques de volatilitat creixent, és a dir amb $\frac{\partial \sigma}{\partial K} > 0$, que impliquen que els participants en el mercat preveuen pujades en el preu de l'actiu i es volen protegir.

En ocasions s'observen també, tant en dinàmiques monòtones de creixement com de decreixement, és a dir, d'*skew* positiu com negatiu, petits somriures en strikes propers al preu de l'actiu. Això reflecteix la reducció d'incertesa que provoca que les opcions estiguin a prop de l'ATM.

En darrer lloc, en mercats molt estables podem trobar patrons amb volatilitats constant, si no es preveuen ni pujades ni baixades en els preus dels actius.

Cal destacar que és habitual anomenar *volatility smile* a qualsevol patró seguit per un gràfic de volatilitat implícita, tot i que això no sigui el més precís. Es fa únicament per simplicitat.

6.2 Afegint el venciment

Fins ara hem treballat els gràfics de volatilitat implícita amb dependència únicament del preu d'exercici. És, però, també útil preguntar-nos què passa quan variem el temps al venciment com a variable a estudiar.

Tindrem doncs $\hat{\sigma}(K, \tau)$ i el gràfic d'aquesta funció, amb S i r fixats, serà la coneguda superfície de volatilitat. Aquesta superfície es comportarà en l'eix relatiu al preu d'exercici tal i com hem descrit en l'anterior secció, i tindrà un altre tipus de comportament en el relatiu als temps de venciment.

És habitual que en temps de venciment extremadament curts (inferiors a un mes) es presentin volatilitats molt altes, tant per condicions de mercat com per característiques del càlcul numèric que s'implementa (recordem la secció de càlcul numèric). També és prou habitual que la superfície de volatilitat es suavitzi per venciments més grans.

El darrer punt a comentar sobre la superfície de volatilitat és que, en moltes ocasions, la variable *Strike* K es substitueix pel *moneyness*, de vegades representat per $M = K/S$ i en altres casos per $M = S/K$ en funció de la font que consultem. Això té una utilitat principal, que és la d'identificar les opcions estudiades segons la seva relació amb l'*at the money*, punt de referència important tal com hem vist en la secció anterior.

El resultat final a esperar serà una superfície com la de la següent figura:

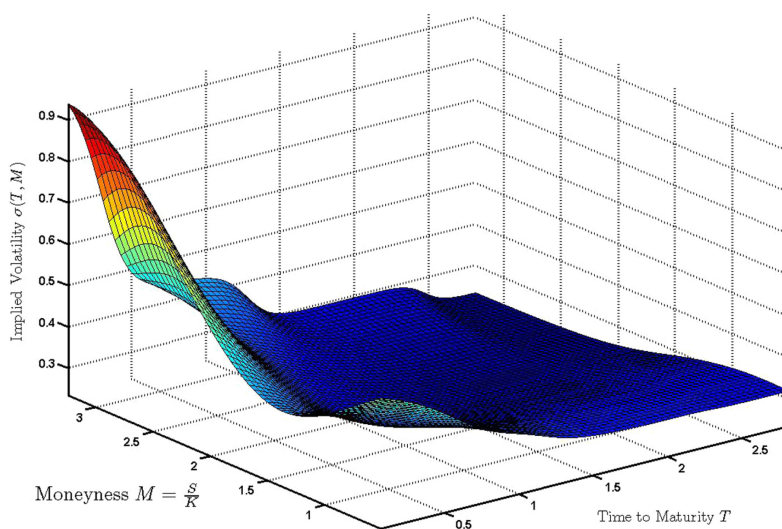


Figura 6.3: Superfície de volatilitat. Font: [OT17]

Com veiem, en aquest cas es presenten volatilitats implícites més altes per temps de venciment curts que es van reduint majoritàriament quan augmenta el venciment, es disparen per temps de venciment curts i strikes petits i, en general, la volatilitat fa una petita vall al voltant de l'ATM per la majoria de temps de venciment.

Capítol 7

Aplicació pràctica

Dedicarem aquest capítol a fer una aplicació pràctica dels coneixements adquirits fins ara i tractarem d'arribar a una conclusió més o menys ferma sobre l'adequació o no dels models presentats.

Per fer-ho, farem ús d'un conjunt de dades d'opcions europees tipus call obtingudes empíricament d'un mercat real i fiable, actuals i negociades al 2024 (totes en un mateix dia), amb tots els temps de venciment disponibles entre 1 dia i 4 anys - veurem si hem de considerar totes les opcions - i amb preus d'exercici entre 1000 i 9000 dòlars americans per un actiu subjacent que en el moment de la negociació tenia un valor de 6040,04 USD. Tenim doncs que el nostre moneyness -que d'ara en endavant definirem com $M = K/S$ per simplicitat, doncs així tindrem major moneyness per strikes més grans. Considerarem, més endavant, un conjunt més petit d'aquestes opcions, doncs quan el preu d'exercici s'allunya molt del de l'actiu, per les característiques del mercat estudiat, hi ha molt poques transaccions sobre les opcions, i per tant poden alterar la nostra mostra.

Són dades d'opcions call europees sobre l'índex l'S&P 500, obtingudes del *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), organisme que regula la compra i venda d'aquestes opcions i ofereix les dades que utilitzarem.

Les dades que extraurem seran el temps al venciment en anys, el preu de l'Stock al moment del càlcul i els preus d'exercici corresponents, a més del preu de l'opció negociada. El fitxer de dades amb el què treballarem serà de la següent forma

Temps al venciment (Anys)	Preu Call	Strike	Preu Stock
0.0027397260273972603	73.95	5960.0	6040.04
0.0027397260273972603	70.98	5965.0	6040.04
0.0027397260273972603	68.89	5970.0	6040.04
0.0027397260273972603	62.7	5975.0	6040.04
0.0027397260273972603	56.1	5980.0	6040.04
0.0027397260273972603	54.74	5985.0	6040.04
0.0027397260273972603	48.62	5990.0	6040.04
0.0027397260273972603	44.0	5995.0	6040.04
0.0027397260273972603	39.21	6000.0	6040.04
0.0027397260273972603	36.04	6005.0	6040.04
0.0027397260273972603	31.51	6010.0	6040.04
0.0027397260273972603	26.4	6015.0	6040.04

Figura 7.1: Arxiu de dades sobre opcions

Amb les corresponents variacions de venciment i preu d'exercici. Cal tenir en compte que disposem de dades de més de 6000 opcions, per tant és una mostra prou àmplia.

7.1 Càlcul de la volatilitat implícita

Ha quedat clar al llarg del treball que el nostre objecte d'estudi serà la volatilitat implícita. És adequat, doncs, procedir en primer lloc provant de calcular-la per a les opcions de les que disposem dades. Recordem que al capítol dedicat a la volatilitat implícita es va presentar un mètode numèric, el de Newton-Raphson, aplicat al càlcul d'opcions, i es va estudiar la seva convergència.

Recordem: cal trobar, donats els preus empírics C^{mkt} de les opcions, els valors de σ que fan que $BS(\sigma) = C^{mkt}$. Això és equivalent a trobar arrels de

$$g(\sigma) = BS(\sigma) - C^{mkt}$$

. Per trobar-les s'implementa el següent mètode iteratiu:

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{BS(\sigma_k) - C^{mkt}}{g'(\sigma_k)} = \sigma_k - \frac{g(\sigma_k)}{g'(\sigma_k)}$$

fent servir com a aproximació inicial $\sigma_F = \sqrt{\frac{2|\log(S/K)|}{T-t}}$.

És evident que aquests càlculs no es poden fer manualment. És per això que dissenyarem un codi en llenguatge Python que ens permeti obtenir aquests resultats. En primer lloc cal afegir les llibreries que ens permetran fer els càlculs adequadament.

```
import pandas as pd
import numpy as np
import math
from scipy.stats import norm
```

La llibreria **pandas** ens permetrà accedir, llegir i escriure en arxius (particularment en el fitxer que conté les dades de les opcions). La llibreria **math** serveix per fer càlculs matemàtics bàsics, mentre que **numpy** incorpora altres funcionalitats més avançades, també de caire matemàtic. Finalment **norm** de **scipy.stats** ens permetrà fer ús de la funció de distribució d'una normal.

Començant ja amb la part calculística, el primer que haurem de fer serà construir la funció $g(\sigma)$. Cal, per això, abans, dissenyar una funció que, donats uns valors S, σ, K, T, r calculi la simulació per Black-Scholes del preu de l'opció. El codi corresponent serà el següent

```
def BSCall(S, sigma, K, T, r):
    try:
        d1 = (np.log(S / K)
              + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
        d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
        return S * norm.cdf(d1)
        - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    except:
        return np.nan
```

Aquesta funció rep els paràmetres necessaris per fer el càlcul de l'opció i posteriorment procedeix a fer-lo: en primer lloc, calcula els termes d_1 i d_2 fent servir la fórmula habitual, i després els fa servir en l'equació de Black-Scholes pel càlcul d'un call, fent servir `norm.cdf()` pel càlcul de la distribució de la normal. En darrer lloc, s'afegeix una condició que gestiona les excepcions com divisions entre zero o valors no vàlids pel logaritme, i retorna `nan` en aquests casos.

En segon lloc calcularem la derivada de la funció $g(\sigma)$, és a dir, la **vega** de l'opció. Recordem

$$\nu = \phi(d_+)S(t)\sqrt{T-t}$$

. El codi serà aquest:

```
def vega(S, sigma, K, T, r):
    try:
        d1 = (np.log(S / K)
              + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
        return S * norm.pdf(d1) * np.sqrt(T)
    except:
        return 0.0
```

Fa un càlcul genèric de la **vega** d'una opció, rebent els paràmetres necessaris en l'argument. Val la pena notar que en aquest cas es fa servir `norm.pdf()` enlloc del `norm.cdf()` que es fa servir en el càlcul de les opcions.

Seguirem amb el càlcul de la primera aproximació del mètode. Farem servir el punt d'inflexió descrit al capítol 4.

El codi que calcula el punt d'inflexió és el següent.

```
def punt_inflexio(S, K, T, r):
    try:
        m = S / (K * math.exp(-r * T))
        return max(0.01, math.sqrt(2 * np.abs(math.log(m)) / T))
    except:
        return 0.1
```

Com es pot observar, incorpora alguns criteris de gestió d'excepcions, que imposen una aproximació inicial de 0.1 si el punt d'inflexió és menor a aquesta quantitat o si hi ha algun error de càlcul que impliqui operacions no executables.

Anem a implementar la funció que executi les iteracions del mètode de Newton-Raphson per una opció de tipus call.

```
def volimplicita(O, S, K, T, r, tol=1e-10, max_iter=700):
    x0 = punt_inflexio(S, K, T, r)
    for _ in range(max_iter):
        try:
            p = BScall(S, x0, K, T, r)
            v = vega(S, x0, K, T, r)
            if v == 0 or np.isnan(v) or v < 1e-6:
                return np.nan

            correccio = (p - O) / v
            x0 -= correccio
```

```

        if x0 < 0.01 or x0 > 5:
            return np.nan
        if abs(p - O) < tol:
            return x0
    except:
        return np.nan
return np.nan

```

Aquesta funció, única per opcions de venda i compra, reb com a paràmetres el preu empíric de l'opció, el preu de l'Stock, el preu d'exercici de l'opció, el temps al venciment en anys, el valor de r i els criteris de parada del mètode iteratiu, tant de tolerància com de màxim d'iteracions.

En primer lloc, calcula l'aproximació inicial del mètode cridant la funció `punt_inflexio` descrita abans. Després, obre un bucle que calcula els iterats en cada pas, cridant les funcions `BScall` i `vega`, a la què se li afegeix una condició per no dividir per un valor massa proper a 0. Al final de cada iteració es comprova que no es tingui encara la tolerància demanada i que els valors no siguin massa llunyats de l'esperat. En cas contrari, es retorna l'iterat corresponent o cap valor. La pròpia funció `for` s'encarrega d'aturar el procés si s'arriba al màxim d'iteracions marcat.

Finalment s'obre l'arxiu de dades i es crida la funció de càlcul de la volatilitat per a cadascuna de les opcions. La funció que obre l'arxiu és així, i s'inclou per entendre el context de la funció principal

```

dir_arxiu = 'direccio-de-l'arxiu'
dades_opcions = pd.read_csv(dir_arxiu)

```

després es fixa un valor adequat per r , en aquest cas 0.03, i s'executen els càlculs

```

r = 0.03
vol_imp_calls = []
for _, row in dades_opcions.iterrows():
    try:
        S = row['Preu-Stock']
        K = row['Strike-']
        T = row['Temps-al-venciment-(Anys)-']
        C = row['Preu-Call']
        call_iv = volimplicita(C, S, K, T, r)
        vol_imp_calls.append(call_iv)
    except:
        vol_imp_calls.append(np.nan)

```

Aquest fragment va llegint les files de l'arxiu de dades i calculant la volatilitat implícita per cadascuna d'elles. Gestiona les excepcions de la mateixa manera que s'ha fet en les anteriors funcions. Posteriorment, les dades del càlcul s'inclouen en un data frame i s'afegeixen a un arxiu de tipus CSV per veure-les correctament.

```

dades_opcions['Volatilitat-implicita'] = vol_imp_calls
dir_arxiu_sortida = 'direccio-de-l'arxiu de sortida'
dades_opcions.to_csv(dir_arxiu_sortida, index=False)

```

La sortida que trobarem a l'arxiu de dades serà la següent:

Temps al venciment (Anys)	Preu Call	Strike	Preu Stock	Volatilitat implícita
0.0027397260273972	36.04	6005.0	6040.04	0.07017493390980876
0.0027397260273972	31.51	6010.0	6040.04	0.07271918867055217
0.0027397260273972	26.4	6015.0	6040.04	0.06172669434684892
0.0027397260273972	23.68	6020.0	6040.04	0.08198033597882938
0.0027397260273972	19.22	6025.0	6040.04	0.07541436272632897
0.0027397260273972	15.73	6030.0	6040.04	0.07580113754445193
0.0027397260273972	12.43	6035.0	6040.04	0.07459350454254124
0.0027397260273972	9.48	6040.0	6040.04	0.07302018785143542
0.0027397260273972	6.97	6045.0	6040.04	0.07154144585620158
0.0027397260273972	5.0	6050.0	6040.04	0.07087789081409168
0.0027397260273972	3.7	6055.0	6040.04	0.0726538617883964
0.0027397260273972	2.45	6060.0	6040.04	0.07153113378945113

Figura 7.2: Sortida del càlcul de volatilitat

Aquestes dades de volatilitat seran les que graficarem en la següent secció.

7.2 Superfície de volatilitat implícita empírica

Podem prendre els resultats del codi anterior per graficar la volatilitat implícita. Aquest gràfic reflectirà la volatilitat que faria, en cas d'introduir-la en la fórmula de càlcul d'un call per Black-Scholes, que coincidís amb el preu de mercat del call.

Per fer-ho, evidentment i considerant que disposem d'un fitxer de dades que tot i ser extens és finit, caldrà interpolar la resta de punts per obtenir una superfície més o menys suau. Aquestes operacions no són d'interès en el treball i per això no s'inclouran explícitament. Només comentarem que s'han fet mitjançant llenguatge Python i fent us de les llibreries `matplotlib.pyplot` i `mpl_toolkits.mplot3d`.

La superfície de volatilitat serà la següent:

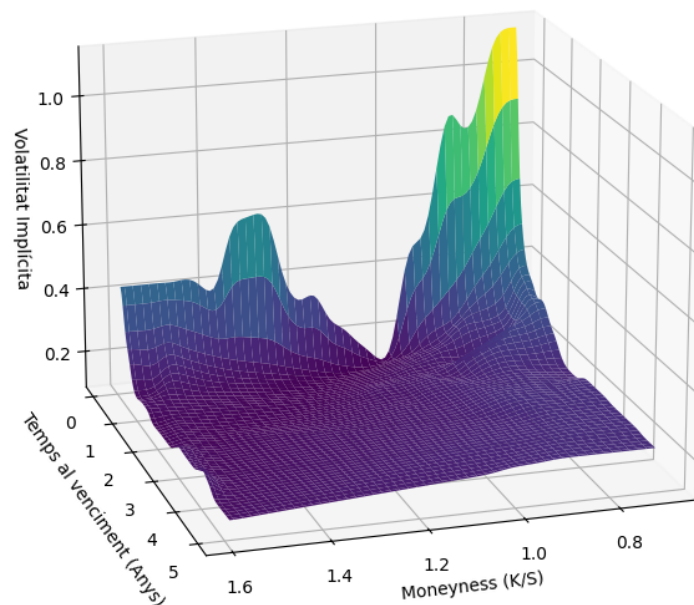


Figura 7.3: Superfície de volatilitat. Vista eix moneyness.

Inclourem diverses vistes per facilitar-ne l'anàlisi.

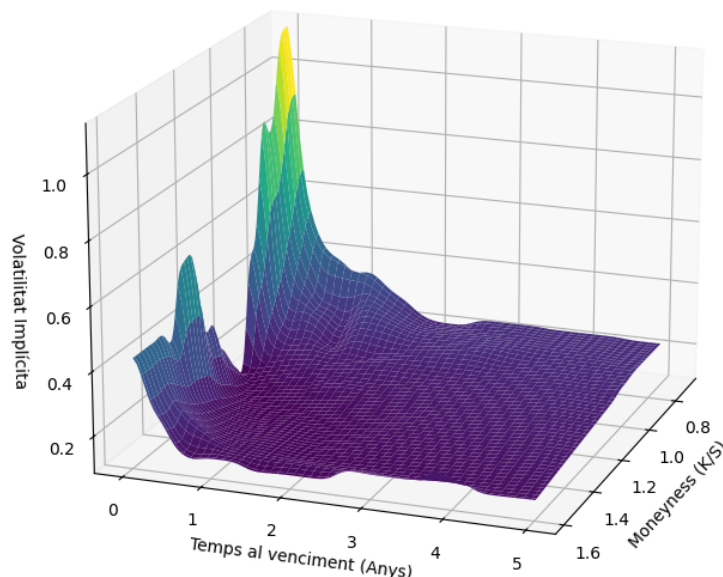


Figura 7.4: Superfície de volatilitat. Vista eix venciment.

En aquest exemple veiem algunes de les dinàmiques presentades en el capítol anterior: analitzem-les.

Disposem d'un gràfic que depèn de dues variables: el *moneyness* i el temps al venciment. Fem-ne talls temporals i analitzem la dinàmica relativa als diners.

En primer lloc, per temps de venciment baixos (menors a un any, accentuant-se més quan més proper és el venciment) veiem clarament un somriure quan el preu d'exercici de l'opció és proper al preu de l'Stock. És el conegut com a somriure de volatilitat i és una dinàmica comú ja presentada al capítol anterior.

Clarament, però, la volatilitat implícita es dispara quan tant el *moneyness* com el temps al venciment són molt petits. Això és degut a què són opcions amb característiques molt extremes, i a més aquestes mateixes poden causar divergències o dinàmiques poc adequades en el mètode de càlcul.

Per temps al venciment més grans d'un any, trobem que la superfície es suavitza i comença una dinàmica descendent inversa a l'Strike, com si d'un *Smirk* es tractés.

Resumint: en general, per venciments menors a un any, tenim un *skew* $\frac{\partial \sigma}{\partial K} < 0$ si el *moneyness* $m < 1$, i $\frac{\partial \sigma}{\partial K} > 0$ si $m > 1$. Per venciments més grans, la dinàmica general és de $\frac{\partial \sigma}{\partial K} < 0$.

7.3 Volatilitat efectiva al model de Heston

Volem veure com es comporta el terme de volatilitat al model de Heston fent servir les mateixes dades de les que disposàvem a la secció anterior. Hi ha diversos mètodes per arribar a aquest resultat, però n'escollirem un amb el qual podrem aprofitar el codi presentat a la secció anterior.

Per saber quina volatilitat fa servir el model de Heston en la seva simulació dels preus dels calls presentats, procedirem de la següent manera:

- (i) Simularem els preus dels calls pel mètode de Heston, fent servir les dades d'Strike, preu de l'actiu subjacent i de venciment de les què disposem, prenent els altres paràmetres com es fa usualment
- (ii) Passarem les dades de calls simulats al programa que calculava la volatilitat implícita i prendrem els resultats com a volatilitat efectiva del model de Heston.

Aquest procés, en el fons, és el mateix que resoldre numèricament l'equació

$$BS(S, K, \tau, r, \sigma) = C_{Heston} \quad (7.3.1)$$

On BS és la fórmula de valoració d'un call per Black-Scholes, i C_{Heston} és el preu del call valorat mitjançant el model de Heston.

És clar que resoldre aquesta equació és el mateix que trobar zeros a la funció

$$g(\sigma) = BS(S, K, \tau, r, \sigma) - C_{Heston} \quad (7.3.2)$$

Presentem doncs el codi que fa la valoració dels calls per Heston. Assumim incloses les llibreries necessàries. Cal dir que és una adaptació a llenguatge Python, i implementat iterativament a totes les opcions de la nostra base de dades, del codi presentat a [Rou15]. No aprofundirem molt en els detalls del codi, doncs és útil per comprovar el resultat que necessitem, però l'objectiu del treball no és el de valorar opcions mitjançant el model de Heston.

La primera funció inclosa és la que conté el càlcul principal del preu del Call

```
def heston(S, K, r, theta, v0, kappa, xi, rho, sigma, T, t):
    tau = T - t
    disc = np.exp(-r * tau)
    integral_res = integ_trap(S, K, r, theta, v0, kappa, xi, rho, sigma, tau)
    call_price = 0.5 * (S - K * disc) + integral_res / np.pi
    return np.real(call_price)
```

Fa servir els càlculs realitzats al capítol 5. Cal, però, definir les dues funcions que crida. En primer lloc, la que calcula la integral. És la següent:

```
def integ_trap(S, K, r, theta, v0, kappa, xi, rho, sigma, tau):
    n_pas = 500
    phi_vals = np.linspace(1e-6, 100, n_pas)
    pas_size = phi_vals[1] - phi_vals[0]

    integral = 0
    for phi in phi_vals:
        g_menys_i = Gheston(phi - 1j, S, r, theta, v0,
                               kappa, xi, rho, sigma, tau)
        g = Gheston(phi, S, r, theta, v0,
                     kappa, xi, rho, sigma, tau)

        num = np.exp(r * tau) * g_menys_i - K * g
```

```

den = 1j * phi * np.power(K, 1j * phi)
integral += num / den

return integral * pas_size

```

El càlcul de la integral es fa mitjançant el mètode dels trapezis, un mètode de càlcul numèric d'integrals molt comú. En darrer lloc, presentem el codi que calcula la funció característica g del model de Heston.

```

def Gheston(phi, S, r, theta, v0,
kappa, xi, rho, sigma, tau):
    t_complex = rho * sigma * phi * 1j
    beta = kappa + xi
    delta = np.sqrt((t_complex - beta) ** 2
+ (sigma ** 2) * (phi * 1j + phi ** 2))

    gamma = (beta - t_complex + delta)
    / (beta - t_complex - delta)

    exp_sum = (tau * kappa * theta
/ sigma ** 2 * (beta - t_complex + delta) +
(v0 / sigma ** 2) * (beta - t_complex + delta) *
((1 - np.exp(delta * tau))
/ (1 - gamma * np.exp(delta * tau))))

    exp_total = np.exp(exp_sum)

    prod1 = np.exp(tau * phi * r * 1j + np.log(S) * phi * 1j)
    base_gamma = (1 - gamma * np.exp(delta * tau)) / (1 - gamma)
    pot_gamma = (-2 * kappa * theta) / (sigma ** 2)
    return prod1 * np.power(base_gamma, pot_gamma) * exp_total

```

Fent servir els paràmetres adequats usualment utilitzats. Tota la teoria relativa a aquest càlcul està feta al capítol 5.

Finalment, s'apliquen aquestes funcions a totes les dades d'opcions de les què disposem. El resultat serà un fitxer amb el següent aspecte:

Temps al venciment (anys)	Preu Call mercat	Strike	Preu Stock	Preu Calls Heston
0.0027397260273972	106.82	5930.0	6040.04	112.0139726401708
0.0027397260273972	102.44	5935.0	6040.04	106.54530401746828
0.0027397260273972	99.82	5940.0	6040.04	101.13105863378468
0.0027397260273972	94.92	5945.0	6040.04	95.78121723980433
0.0027397260273972	81.63	5950.0	6040.04	90.50571363758885
0.0027397260273972	80.65	5955.0	6040.04	85.31437582653828
0.0027397260273972	73.95	5960.0	6040.04	80.21686786345367
0.0027397260273972	70.98	5965.0	6040.04	75.22263281333133
0.0027397260273972	68.89	5970.0	6040.04	70.34083715737074
0.0027397260273972	62.7	5975.0	6040.04	65.58031701198448
0.0027397260273972	56.1	5980.0	6040.04	60.94952649770175
0.0027397260273972	54.74	5985.0	6040.04	56.456488579888685

Figura 7.5: Resultat del càlcul d'opcions per Heston

A aquest fitxer de dades de calls simulats per Heston li aplicarem el codi de càlcul

de volatilitat implícita fent servir el mètode de Newton-Raphson, canviant el preu del call al mercat pel simulat per Heston. Això ens proporcionarà, tal i com hem explicat, la volatilitat que fa servir el model de Heston, i volem veure si aquesta s'aproxima més a la implícita, que ja hem calculat, que la volatilitat constant que fa servir el model de Black-Scholes.

Presentem primer com es veuria la superfície de volatilitat que fa servir el model de Black-Scholes. Aquesta, com hem vist, és constant i és un input que hem de donar nosaltres al càlcul. en aquest cas prendrem la volatilitat implícita a l'ATM, que és aproximadament 0.1. Tenim que la superfície de volatilitat efectiva de Black-Scholes és

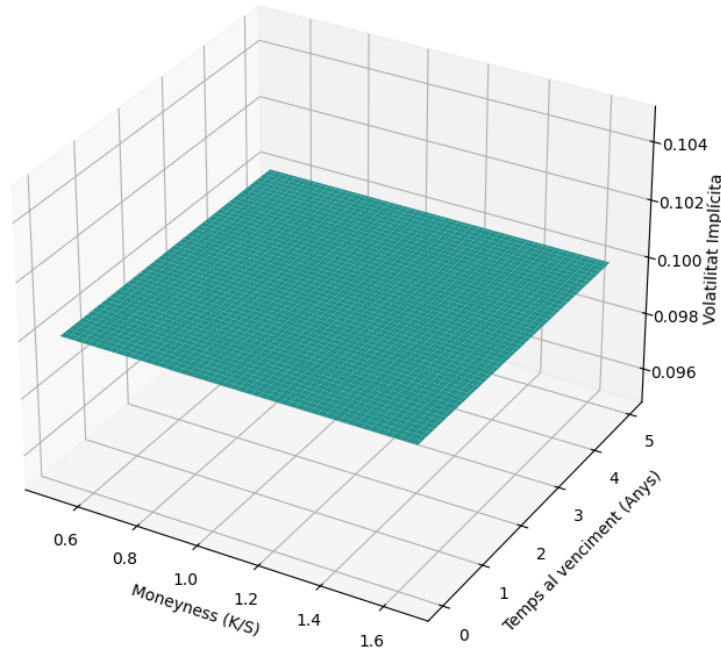


Figura 7.6: Superfície de volatilitat usada pel model de Black-Scholes

Aquesta superfície evidentment no s'assembla gaire a la de volatilitat implícita, principalment pel seu comportament amb moneyness baixos i venciments curts.

Veiem ara quina superfície de volatilitat efectiva ens presenta el model de Heston, un cop passades les simulacions al programa que efectua el mètode de Newton-Raphson. La superfície resultant és la següent:

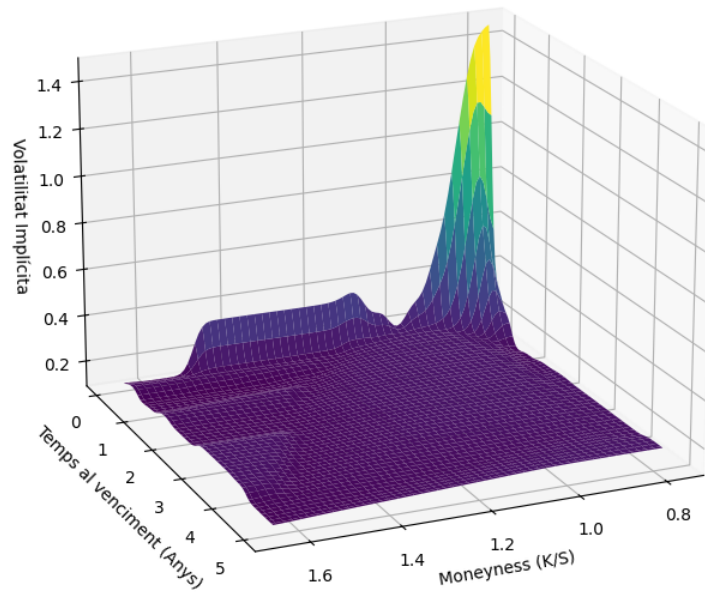


Figura 7.7: Superfície de volatilitat usada pel model de Heston

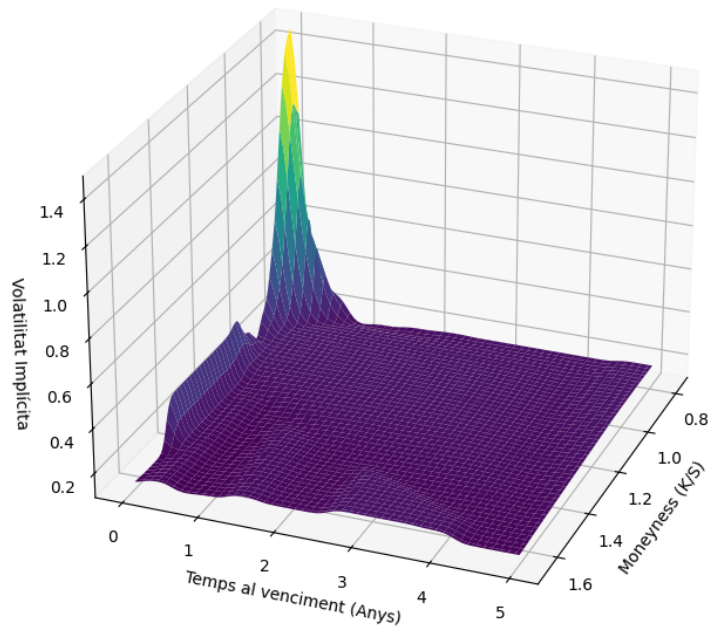


Figura 7.8: Superfície de volatilitat usada pel model de Heston

És clar que aquesta superfície s'assembla més a la de la volatilitat implícita que la de Black-Scholes. De fet, tenim que presenta una dinàmica descendent quan els moneyness es van fent més grans, volatilitats més altes a prop del venciment i un petit somriure quan el moneyness és proper a 1 i el venciment és imminent. A la resta de la superfície, quan s'assembla més a un pla, està al voltant del 0.1, valor que havíem determinat adequat al model de Black-Scholes, ja que és la volatilitat implícita per les opcions ATM.

Fent una anàlisi numèrica i analitzant les diferències entre les volatilitats sobre les mateixes opcions, tenim que la norma L_∞ és menor per a la distància entre la volatilitat

implícita i la usada pel model de Heston (0.38 punts en el cas del model de Heston, 1.06 en el cas de la distància amb la volatilitat emprada per Black-Scholes), és a dir, que el suprem de les distàncies és significativament menor si fem servir el model de Heston). Més precisament:

$$\|\sigma^{imp} - \sigma^{BS}\|_{\infty} = \max_{i,j} |\sigma_{ij}^{imp} - \sigma_{ij}^{BS}| \approx 1.06 \quad (7.3.3)$$

$$>> \|\sigma^{imp} - \sigma^{Heston}\|_{\infty} = \max_{i,j} |\sigma_{ij}^{imp} - \sigma_{ij}^{Heston}| \approx 0.38 \quad (7.3.4)$$

On i, j representen els diferents valors per venciment i moneyness, respectivament. Això es deu principalment al valors de volatilitat implícita que es donen amb venciments curts, tal i com hem vist, i que el model de Black-Scholes serà incapaç d'interpretar adequadament.

Cal dir, en favor del model de Black-Scholes, que per opcions amb venciments més grans a sis mesos aproximadament, la volatilitat implícita és prou propera a 0.1 i, per tant, el model pot donar resultats més precisos en aquest sentit.

Podem concloure doncs que, en aquest cas, en el relatiu a les volatilitats, el model de Heston és molt més precís que el de Black-Scholes per les opcions amb venciments menors i allunyades de l'ATM, però que per opcions amb venciments més llunyans la diferència entre els models es minimitza.

Capítol 8

Conclusions

La volatilitat, com a mesura de la incertesa i el risc inherents als mercats financers, ha demostrat ser un component fonamental en la valoració d'opcions i altres productes derivats. Aquest treball ha explorat dues perspectives principals per abordar aquest fenomen: el model clàssic de Black-Scholes, que assumeix una volatilitat constant, i el model de Heston, que introdueix la volatilitat estocàstica per capturar de manera més precisa les dinàmiques reals del mercat.

L'anàlisi teòrica i pràctica realitzada posa de manifest les limitacions del model de Black-Scholes, especialment en contextos on els patrons empírics de volatilitat implícita, com el *volatility smile* o el *volatility skew*, divergeixen de l'assumpció de constància. Tot i que aquest model continua sent una eina valuosa per la seva simplicitat i aplicabilitat, s'ha observat que en situacions amb venciments curts o opcions allunyades de l'*at the money*, els seus resultats poden ser significativament menys precisos.

Per contra, el model de Heston ha mostrat una millor capacitat per ajustar-se a les superfícies de volatilitat implícita observades empíricament. En particular, la seva estructura de volatilitat estocàstica, basada en un procés de reversió a la mitjana, permet capturar fenòmens com l'elevada volatilitat en venciments curts o el comportament asimètric en funció del *moneyness*. Aquesta aproximació aporta una interpretació més realista de les expectatives del mercat i resulta especialment útil en entorns financers dinàmics o davant de moviments extrems dels preus dels actius subjacents.

No obstant això, cal reconèixer que el model de Heston comporta una major complexitat computacional i un nombre més elevat de paràmetres, la qual cosa pot suposar un desafiament a l'hora de calibrar-lo amb dades reals. Això ens porta a considerar un equilibri entre simplicitat i precisió en funció de les necessitats específiques de l'aplicació financera.

En conclusió, mentre que el model de Black-Scholes continua sent una referència clau i una base teòrica fonamental, el model de Heston representa una alternativa més sofisticada i precisa, especialment en situacions on la volatilitat no pot ser considerada constant. Això subratlla la importància de triar el model adequat per a cada context, tenint en compte les característiques del mercat i les limitacions pràctiques de cada metodologia. Aquest treball no només destaca les diferències entre els dos models a nivell de volatilitat, sinó que també reforça la necessitat de continuar investigant i millorant les eines matemàtiques per entendre i gestionar millor la complexitat dels mercats financers moderns.

Bibliografia

- [BP09] Jean-Philippe Bouchaud and Marc Potters. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing : From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, 01 2009.
- [CK12] Marek Capinski and P. Ekkehard Kopp. *The Black-Scholes model*. Mastering mathematical finance. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [CKT12] Marek Capinski, 1944 Kopp, P. Ekkehard, and Janusz Traple. *Stochastic calculus for finance*. Mastering mathematical finance. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [CT04] Rama Cont and Peter Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman Hall/CRC financial mathematics series. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, Fla, 2004.
- [CVdf] José Manuel Corcuera Valverde. *Introducción a las finanzas cuantitativas*. Universitat de Barcelona, Barcelona, 2009, <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/9042/1/ifqf11.pdf>.
- [DNKMYT23] Giulia Di Nunno, Kestutis Kubilius, Yuliya Mishura, and Anton Yurchenko-Tytarenko. From constant to rough: A survey of continuous volatility modeling. *Mathematics*, 11(19), 2023.
- [FTW19] Masaaki Fukasawa, Tetsuya Takabatake, and Rebecca Westphal. Is volatility rough ?, 2019.
- [Gat06] Jim Gatheral. *The Volatility Surface: A Practitioner’s Guide*. Wiley finance series. John Wiley & Sons, 2006.
- [OT17] Giuseppe Orlando and Giovanni Tagliatela. A review on implied volatility calculation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 320:202–220, 2017.
- [Rou15] Fabrice Rouah. *The Heston model and its extensions in VBA + website*. Wiley Finance Series. Wiley, Hoboken, New Jersey, 1st ed. edition, 2015.
- [SG23] Carla Sánchez González. Introducción a la volatilidad estocástica: El modelo de heston. *Universitat de Barcelona*, 2023.
- [SSdf] Marta Sanz-Solé. *An elementary course on stochastic processes*. Facultat de matemàtiques. Universitat de Barcelona, Barcelona, 2010, <https://www.ub.edu/probabilitats-seminaribcn/Sanz-Sole/llibres/lnprocesses.pdf>.