



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Análisis de componentes
principales y optimización de
carteras de inversión

Autor: Héctor Zarzoso Altemir

Director: Dr. José Manuel Corcuera Valverde

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 6 de enero de 2025

Abstract

In portfolio management, an investor always faces the challenge of not knowing in which financial assets to invest his available capital and what proportion of his resources to allocate to each of them. The challenge is huge since the markets are unpredictable and, therefore, knowing the environment that surrounds you and your predisposition to the risks to which you are exposed will be essential when it comes to select the most efficient portfolio. This aversion or not to uncertainty scenarios and the returns that the investor expects to achieve when creating his portfolio, in order to know its efficiency, will be the hypotheses of the Markowitz model. In this way, this work focuses on responding to how investors can optimize their investment portfolios. To do this, the model presented by Harry M. Markowitz, the CAPM financial asset pricing model, will be seen from a static point of view and expanded from a dynamic point of view to understand the role of uncertainty in the Markowitz model. Finally, using the statistical technique of principal component analysis, a portfolio of a stock market index that explains the volatility of the market will be replicated to be able to choose and subsequently optimize the most efficient portfolios.

Resumen

En la gestión de carteras, un inversor siempre se enfrenta al reto de no saber en qué activos financieros invertir su capital disponible y qué proporción de sus recursos asignar a cada uno de ellos. El desafío es mayúsculo puesto que los mercados son impredecibles y, por tanto, conocer el entorno que te rodea y tu predisposición a los riesgos a los que te expones será fundamental a la hora de seleccionar la cartera más eficiente posible. Esta aversión o no a escenarios de incertidumbre y los rendimientos que el inversor espere conseguir a la hora de confeccionar su cartera, para poder conocer la eficiencia de ésta, van a ser las hipótesis del modelo de Markowitz. De esta forma, este trabajo se enfoca en dar respuesta a cómo los inversores pueden conseguir optimizar sus carteras de inversión. Para ello, se verá desde un punto de vista estático el modelo expuesto por Harry M. Markowitz, el modelo de valoración de activos financieros CAPM y se ampliará desde un punto de vista dinámico para comprender el papel de la incertidumbre en el modelo de Markowitz. Finalmente, se replicará, a partir de la técnica estadística del análisis de componentes principales, una cartera de un índice bursátil que explique la volatilidad del mercado para poder elegir y posteriormente optimizar las carteras más eficientes posibles.

Agradecimientos

Antes de empezar el trabajo me gustaría agradecer a mi tutor, José Manuel Corcuera Valverde, por toda su ayuda, por las ideas que me ha propuesto, por su dedicación y por sus recomendaciones durante todo el trabajo. También, me gustaría mencionar y agradecer a mi hermano, Óscar, por ser siempre mi inspiración y mi referente en todo.

Índice general

1. Introducción	1
2. El modelo de Markowitz	2
2.1. Consideraciones sobre el modelo	2
2.2. Definición del modelo	3
2.3. La importancia de la diversificación	5
2.4. El problema de Markowitz	7
2.4.1. Solución al problema de optimización	7
2.4.2. Cálculo de la C_{opt} única para un \bar{R} determinado	9
2.5. La frontera eficiente	11
2.5.1. La cartera de mínima varianza	12
2.5.2. Interpretación analítica	13
2.5.3. Análisis de la eficiencia de las carteras	16
2.6. <i>Two-Fund Theorem</i>	17
2.7. Cartera con un activo libre de riesgo	18
2.7.1. Una nueva frontera eficiente	19
3. El modelo CAPM	25
3.1. La <i>capital market theory</i>	25
3.2. La <i>Capital Market Line (CML)</i>	26
3.3. La fórmula del modelo CAPM	27
3.4. El riesgo sistemático del mercado y la <i>Security Market Line (SML)</i>	30
4. El modelo de Markowitz a partir de un análisis dinámico	32
5. Aplicación práctica en la optimización de carteras de inversión	35
5.1. Análisis de componentes principales	35
5.1.1. Definición de los componentes principales (PC)	36
5.1.2. Cómo encontrar los PC	36

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
5.1.3. Elección del subconjunto de los PC	38
5.1.4. Propiedades de los PC	38
5.1.5. Los PC definidos a partir de la matriz de correlaciones	39
5.1.6. Aplicación a la optimización de carteras de inversión	40
5.2. Ejemplo de PCA del IBEX-35 y optimización por Markowitz	42
5.2.1. Análisis de componentes principales del IBEX-35	42
5.2.2. Análisis del primer componente principal como cartera de inversión	44
5.2.3. Optimización mediante el modelo de Markowitz	45
6. Conclusiones	48

Capítulo 1

Introducción

Cuando un inversor decide acudir a los mercados financieros en búsqueda de productos financieros lo hace para obtener unos rendimientos de éstos que le permitan ganar dinero. A este concepto se le denomina inversión. Sin embargo, debido a la complejidad de los mercados, el comportamiento de los agentes que operan en él y la volatilidad en el precio de todos estos productos, el inversor está expuesto a un riesgo. Por tanto, si un inversor está dispuesto a tomar grandes riesgos puede conseguir grandes beneficios o, por el contrario, puede perder su inversión y consecuentemente su dinero. Es por este motivo que lo que le interesa a todo inversor es saber el riesgo y el rendimiento que le van a generar sus inversiones. En este trabajo se va a exponer este hecho para la gestión de carteras de inversión en activos financieros. Decimos que un activo financiero es aquel que se intercambia en los mercados financieros a precio de mercado como pueden ser las acciones, los bonos, las opciones, los ETFs, etc. Así pues, partiremos de la idea de que un inversor ha seleccionado una cartera de inversión, es decir, ha decidido los diferentes activos financieros en los que invertirá su dinero y quiere saber, de sus recursos, qué parte debe invertir en cada uno de ellos para obtener la inversión con mayor rendimiento y con el menor riesgo posible. Además, también querrá saber el rendimiento y el riesgo asociados a esta cartera que ha elegido para saber si ha sido una buena elección o si debe cambiar los activos que la conforman. El concepto de obtener el mayor rendimiento al menor riesgo posible es lo que denominamos como el óptimo y, según el tipo de inversor que seamos, los valores óptimos de rendimiento y riesgo serán unos u otros. Con todo esto, Harry M. Markowitz, en 1952, presentó en un artículo (véase [5]) su modelo para seleccionar y optimizar carteras de inversión mostrando la importancia de la diversificación en la elección de las carteras. Posteriormente, en 1990, Markowitz fue galardonado con el premio Nobel en ciencias económicas por su trabajo y demás aportaciones a la economía financiera.

Teniendo en cuenta todo esto, en el siguiente trabajo se va a desarrollar el modelo de Markowitz para optimizar carteras de inversión y el modelo CAPM que se planteó, más tarde, como alternativa a éste. Además, ampliaremos el modelo de Markowitz con un análisis dinámico considerando, mediante evoluciones temporales, la incertidumbre del momento en que se decide seleccionar y optimizar las carteras. Finalmente, se presenta la técnica del análisis de componentes principales para poder hacer una aplicación práctica en la optimización de carteras. Esta técnica estadística nos permitirá replicar una cartera del IBEX-35 mediante diferentes carteras definidas a partir de combinaciones lineales de los activos que conforman el índice bursátil y que explican el riesgo o variabilidad del índice para, posteriormente, optimizarla mediante el modelo de Markowitz.

Capítulo 2

El modelo de Markowitz

La Teoría moderna de carteras (en adelante MPT: *Modern Portfolio Theory*) o Análisis de media-varianza es el modelo que definió Markowitz para la optimización de carteras de inversión. Éste consiste en la maximización de los rendimientos esperados de los activos que la conforman, en la asignación más eficiente de la inversión a cada uno de éstos y en la minimización del riesgo para el inversor.

El modelo distingue entre dos magnitudes para analizar la eficiencia de la cartera de inversión. En primer lugar, la media; momento de primer orden y que hace referencia a los beneficios esperados y, en segundo lugar, la varianza; momento de segundo orden que evalúa el riesgo¹ asociado a ésta. Estos dos momentos son los fundamentales para entender a Markowitz y su teoría y nos permitirán conocer la optimalidad de la cartera una vez hayamos construido la frontera eficiente, que será el conjunto de todas las carteras óptimas.

2.1. Consideraciones sobre el modelo

Antes de nada, para poder comprender el modelo, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones del mercado y de los inversores que Markowitz en *The Journal of finance* [5] y en su otro libro [6] introduce sobre lo que la MPT supone:

- Los inversores son racionales por lo que son aversos al riesgo y siempre escogerán las distribuciones de sus recursos que impliquen menos riesgos.
- La cartera con mayor beneficio esperado no tiene por qué ser necesariamente la que tenga menor riesgo. De hecho, a mayor beneficio, mayor será la varianza del modelo.
- Una cartera diversificada es preferible a una que no lo esté. Asimismo, aunque es muy complicado que las correlaciones entre activos sean nulas para poder eliminar la covarianza entre éstos, es aconsejable que esta sea mínima para reducir el riesgo.
- Se trata de un modelo estático por lo que consideramos que no existe una evolución en el tiempo de la media y de la varianza. Todo sucede en un periodo en el que conocemos los datos, en el que no varía la inversión inicial ni varía el comportamiento del inversor.
- Se supone que los mercados son eficientes o completos. Es decir, los precios reflejan con exactitud toda la información de los valores de las empresas, no existen barreras de

¹La varianza es una medida de dispersión que nos permite evaluar cuánto varían nuestros datos y resultados respecto de la media de nuestra muestra. Es por este motivo definitorio que se utiliza esta magnitud para evaluar el riesgo ya que cuánto más alta sea ésta, nuestros valores más se alejan de la media y peor explican los modelos o fenómenos asociados.

entrada ni de salida del mercado y todos los inversores disponen de información completa e igual respecto a cualquier valor o empresa. Así pues, existe un equilibrio competitivo y se logra una asignación óptima de los activos.

- El inversor considera los rendimientos esperados como un aspecto deseable y la varianza como algo no deseable.

- En todo este trabajo vamos a considerar que la venta en corto está permitida, es decir, puede que tengamos asignaciones negativas en algunos recursos. Esto significa que, de la cuantía total que nosotros tenemos para invertir entre los diferentes activos que definirán el modelo puede ser que, en alguno de éstos invirtamos una proporción de la inversión inicial negativa. Esto significará que en nuestra actual cartera tenemos una cierta cantidad de recursos invertidos en un activo que, al optimizar nuestra cartera, nos es preferible vender a invertir de más en este activo en cuestión.

- Una cartera es más eficiente que otra si tiene menos riesgo para un mismo rendimiento esperado.

Observación 2.1.1. Respecto a la última consideración, podríamos definir que el inversor busca maximizar el retorno esperado en una situación de incertidumbre para un nivel de tolerancia de riesgo definido. Sin embargo, a lo largo de este trabajo, solo plantearemos y resolveremos el modelo a partir de un rendimiento esperado y evaluaremos en función del menor riesgo asociado a éste.

2.2. Definición del modelo

Aquí, seguimos. Dada una inversión inicial $X_0 > 0$ (variable determinista) y una cartera de n activos de riesgo que denotaremos por C , vamos a querer plantear el modelo de Markowitz para encontrar la asignación óptima de nuestros recursos entre éstos. Esto lo haremos a partir del cálculo de los rendimientos esperados y de la varianza de cada uno de ellos y una vez los tengamos, definiremos la rentabilidad y el riesgo de nuestra cartera. Así pues, definimos las siguientes variables aleatorias:

X_{0i} : cantidad de X_0 a invertir (en $t = 0$, momento inicial) en cada activo $i = 1, \dots, n$. Debido a que la venta en corto está permitida tenemos que X_{0i} puede ser negativo para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

X_{1i} : rentabilidad aleatoria pasado un periodo (en $t = 1$), por haber invertido X_{0i} , de cada activo $i = 1, \dots, n$.

B_i : beneficio relativo de cada activo por euro invertido en él.

$$B_i = \frac{X_{1i}}{X_{0i}}$$

r_i : tasa de retorno para cada activo.

$$r_i = \frac{X_{1i} - X_{0i}}{X_{0i}} = \frac{X_{1i}}{X_{0i}} - 1 = B_i - 1$$

Además, si definimos en forma vectorial $X_0 = (X_{01}, \dots, X_{0n})$ y $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})$, entonces se cumple que: $X_0 = X_{01} + \dots + X_{0n}$ (inversión inicial) y $X_1 = X_{11} + \dots + X_{1n}$ (rendimiento de la inversión inicial un periodo después).

Definición 2.2.1. Con estas variables descritas, definimos nuestra cartera C a partir del vector:

$$p = (p_1, \dots, p_n) = \left(\frac{X_{01}}{X_0}, \dots, \frac{X_{0n}}{X_0} \right) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

que nos indica el porcentaje de la inversión inicial que asignamos a cada activo i .

De este modo, tenemos nuestra cartera C definida a partir del vector p y podemos calcular dos variables (determinadas, ya no aleatorias) que son la media y la varianza de la siguiente forma.

Definición 2.2.2. A partir del vector $r = (r_1, \dots, r_n)$ de los n activos, definimos la **tasa de retorno** (R)

$$R := \sum_{i=1}^n p_i r_i,$$

la esperanza de los activos ($\mathbb{E}(r_i)$) o **tasa de rentabilidad esperada de cada activo** como

$$\bar{r}_i := \mathbb{E}(r_i); \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

el **rendimiento esperado de la cartera** (\bar{R}) viene dado por

$$\bar{R} := \mathbb{E}(R) = \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i$$

y el **riesgo de la cartera** (σ^2)

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \sigma_{ij}$$

donde: $\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) = \mathbb{E}(r_i r_j) - \bar{r}_i \bar{r}_j$ y $\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i) = \mathbb{E}(r_i^2) - \mathbb{E}(r_i)^2$.

Demostración de \bar{R} y σ^2 . Respecto al beneficio esperado de la cartera (\bar{R}):

$$\bar{R} = \mathbb{E}(R) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n p_i r_i \right) = \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}(r_i) = \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i$$

ya que los r_i son variables aleatorias pero los p_i no. Y el riesgo de la cartera (σ^2) es:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}(R) = \mathbb{E}((R - \mathbb{E}[R])^2) = \mathbb{E}(R^2) - \mathbb{E}(R)^2 = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n p_i r_i \right)^2 \right) - \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n p_i r_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i^2 \mathbb{E}(r_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \mathbb{E}(r_i r_j) - \sum_{i=1}^n p_i^2 \mathbb{E}(r_i)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \mathbb{E}(r_i) \mathbb{E}(r_j) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i^2 (\mathbb{E}(r_i^2) - \mathbb{E}(r_i)^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j (\mathbb{E}(r_i r_j) - \mathbb{E}(r_i) \mathbb{E}(r_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

□

Si expresamos todos estos conceptos en forma vectorial y matricial podemos reescribir el modelo de Markowitz para n activos de riesgo de la siguiente forma:

$r = (r_1, \dots, r_n)$: Vector de los rendimientos de los activos.

$\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$: Vector de los rendimientos esperados.

$p = (p_1, \dots, p_n)$: Vector de la proporción de inversión respecto de la inversión inicial en cada activo.

$[\Sigma_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$: Matriz de varianza-covarianza de los rendimientos, con $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

$$[\Sigma_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Observación 2.2.3. Suponemos que esta matriz es una matriz regular ($\det \neq 0$); así pues invertible, simétrica ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) y definida positiva ya que como los activos son todos de riesgo entonces tenemos que la varianza de todos ellos es estrictamente positiva, es decir, $\sigma_i^2 > 0; \forall i = 1, \dots, n$.

Así pues, mediante esta nueva notación, podemos reformular la media y la varianza de la siguiente forma:

$$\bar{R} = p^T \bar{r} \quad y \quad \sigma^2 = p^T \Sigma p$$

donde p^T denota el vector transpuesto de p .

Con todo esto, el modelo de optimización de carteras basado en la MPT nos permitirá conocer la proporción de la inversión que se debe asignar a cada activo que conforma nuestra cartera de forma que minimicemos la varianza a partir de un nivel de rendimiento (media) esperado definido. Así pues, plantearemos un modelo en el que fijando \bar{R} obten-gamos los p_1, \dots, p_n tales que σ^2 sea mínima y definiremos la cartera de inversión óptima como

$$C_{opt} = (p_1, \dots, p_n).$$

2.3. La importancia de la diversificación

Una de las consideraciones del modelo de media-varianza es la utilidad de la diversificación como instrumento para la obtención de una cartera más eficiente. Es fácil intuir que si nosotros como inversores colocamos nuestro dinero en diferentes activos estamos menos expuestos al riesgo de perder nuestro capital que si nos lo jugamos todo en uno solo. Además, matemáticamente, si X_1, \dots, X_n son variables independientes (por tanto, $Var(X_i + X_j) = Var(X_i) + Var(X_j)$ puesto que $Cov(X_i, X_j) = 0$) e idénticamente distribuidas con varianza σ^2 y usando que $Var(X_i) = Var(X_j)$ para todo $i \neq j$ y que $Var(aX) = a^2 Var(X)$, entonces la varianza de un promedio será

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} Var(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = n \frac{Var(X_1)}{n^2} \\ &= \frac{Var(X_1)}{n} \longrightarrow 0 \quad si \quad n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

En el supuesto en que las variables fueran idénticamente distribuidas pero existiese dependencia entre ellas entonces tendríamos que

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \frac{\text{Var}(X_1)}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2} \text{Cov}(X_1, X_2) \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

En nuestro caso, los X_i serán los p_i . Así pues; en este apartado, vamos a ver un ejemplo que clarifica la importancia de definir una cartera con muchos y distintos activos en los que invertir para poder plantear, en los siguientes puntos del trabajo, una cartera óptima.

Queremos estudiar cómo varía la varianza en función de variaciones porcentuales de las proporciones de inversión en los activos de la cartera, es decir, de los p_i . Con esto, trataremos de identificar el efecto de la diversificación viendo si de algún modo las correlaciones entre la cartera y los activos (σ_{iC}) generan una variación en la varianza (σ^2).

Vamos a verlo mediante el siguiente ejemplo que explica Prigent (ver [8]). Consideremos una cartera con n activos de riesgo y las fórmulas de \bar{R} y σ^2 definidas en el apartado anterior. En la fórmula de la varianza, σ^2 , podemos ver que para determinar el riesgo de la cartera no solo afecta el riesgo de cada uno de los activos si no que también juega un papel importante las correlaciones entre los diferentes activos que la conforman especificadas en la matriz Σ . Si derivamos la función de la varianza respecto al peso p_i de estos activos en ella obtenemos:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^n p_j \sigma_{ij} = 2 \sum_{j=1}^n p_j \text{cov}(r_i, r_j) = 2 \text{cov}\left(r_i, \sum_{j=1}^n p_j r_j\right) = 2 \text{cov}(r_i, R) = 2\sigma_{iC}.$$

Aquí podemos observar que la contribución marginal de cada activo i al riesgo de la cartera es dos veces la covarianza de cada uno de éstos a la cartera. Esto significa que, si definimos $p_i = \frac{1}{n}$ para todo $i = 1, \dots, n$, es decir, si asignamos a todos los activos la misma proporción de la inversión inicial entonces tenemos que:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n^2} \sigma_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \sigma_i^2\right) + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_{ij}.$$

Llamemos A a $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \sigma_i^2\right)$ y B a $\frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_{ij}$. Analizando esta expresión, si $n \rightarrow \infty$, es decir, si invertimos en muchos activos distintos y teniendo en cuenta que son de riesgo ($\sigma_i^2 > 0$) y el riesgo es finito puesto que está acotado ($\sigma_i^2 < K$; para un $K \in \mathbb{R}_+$ dado) entonces vemos lo siguiente.

1. Si $n \rightarrow \infty \implies A \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} K = \frac{K}{n} \rightarrow 0$. Si invertimos en muchos activos de riesgo distintos entonces el riesgo asociado a cada uno de ellos por separado es indiferente para el cálculo del riesgo de la cartera.
2. Si $\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) = 0 \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\} \implies A \rightarrow 0, B = 0$. De manera que si los rendimientos de los diferentes activos son incorrelacionados, entonces el riesgo converge a 0 y la diversificación elimina completamente el riesgo.
3. Si $\sigma_{ij} \neq 0$ vemos que B, que implica $\frac{n(n-1)}{2}$ covarianzas, convergerá a la media asintótica de las covarianzas. Por tanto, no basta que $|\sigma_{ij}| \leq C$ para un $C \neq 0$ cualquiera ya que $B \leq \frac{2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} C \rightarrow 0$. Así pues, $B \rightarrow 0$ pero sí que se reduce el valor de σ .

Si por el contrario invirtiésemos todo el capital en un único activo entonces $p = p_1 = 1$ y tendríamos que $\sigma^2(R) = \sigma_1^2 \neq 0$. Así pues, este ejemplo muestra muy bien el efecto

de la diversificación. De esta forma, cuantos más activos incorrelacionados conformen tu cartera de inversión, más eficiente será tu cartera puesto que minimizará el riesgo asociado a ésta.

Observación 2.3.1. Pese a este ejemplo, cabe remarcar que nunca podremos conseguir una cartera con riesgo 0 debido a la existencia del riesgo sistemático, es decir, aquel que propiamente incorpora el activo correspondiente. Este riesgo de mercado será imposible de eliminar incluso en una cartera altamente diversificada.

2.4. El problema de Markowitz

Una vez definido el modelo de Markowitz para una cartera diversificada de n activos de riesgo debemos resolver el problema de saber cuál es la asignación óptima que hemos planteado anteriormente. Así pues definimos el siguiente problema.

Sea $C = (p_1, \dots, p_n)$ una cartera de inversión sin optimizar, representada por el par (σ, \bar{R}) donde σ es la desviación estándar²; fijado un beneficio esperado \bar{R} , la cartera óptima C_{opt} es la que minimice el riesgo asociado (min σ^2 posible).

Consideremos que tenemos C y con todos los elementos, vectores y matrices que definen el modelo de la media varianza introducidos en los puntos anteriores.

Definición 2.4.1 (Problema de Markowitz). *Encontrar $C_{opt} = (p_1, \dots, p_n)$ que es solución a:*

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \sigma^2 &= \min_{(p_1, \dots, p_n)} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \sigma_{ij} \right) \\ \text{sujeto a : } &\sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i = \bar{R} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{aligned}$$

Esto construye un problema de optimización con una función objetivo cuadrática y restricciones lineales.

2.4.1. Solución al problema de optimización

Para todo este apartado seguimos la solución definida por Sigman en su trabajo [12]. Tenemos, por la fórmula de la varianza, que nuestra función objetivo cuadrática es

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \sigma_{ij} \right).$$

Sin embargo, como es no negativa la podemos multiplicar por una constante no negativa sin alterar el resultado. Por lo que podemos definir el problema de minimización de

$$\min_{p_i} \frac{1}{2} \sigma^2.$$

²Definimos la desviación estándar como la raíz cuadrada de la varianza. Se suele utilizar este par (σ, \bar{R}) para definir una cartera puesto que gráficamente las dibujaremos en el plano $\sigma - \bar{R}$ y no en el plano $\sigma^2 - \bar{R}$.

Además, escribiendo $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \sigma_{ij} \right) = \left(\sum_{i=1}^n p_i p_i \sigma_{ii} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \sigma_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} = \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij}.\end{aligned}$$

Así pues, podemos reescribir el problema planteado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\min_{(p_1, \dots, p_n)} & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} \\ \text{sujeto a :} & \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i = \bar{R} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.\end{aligned}$$

Para resolverlo utilizamos, tal y como nos explica Sigman [12], los *multiplicadores de Lagrange*.

Definimos el Lagrangiano:

$$L(p, \alpha, \beta) = L((p_1, \dots, p_n), \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} - \alpha \left(\sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i - \bar{R} \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right).$$

Así pues, hemos convertido nuestro problema de n variables y 2 restricciones en uno de $n + 2$ variables y ninguna restricción. Este método consiste en encontrar los máximos y mínimos relativos de una función sujeta a restricciones, es decir, nos permite optimizar nuestra función objetivo sujeta a 2 restricciones. Para ello, hemos definido α y β como variables escalares desconocidas y dos funciones nuevas, una para cada restricción.

Ahora, optimizamos nuestro lagrangiano $L(p, \alpha, \beta)$, por tanto, derivamos respecto de los p_i , respecto de α y respecto de β e igualamos a 0 para plantear un sistema de ecuaciones lineales. Esto es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(p, \alpha, \beta)}{\partial p_i} &= 0 \\ \frac{\partial L(p, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial L(p, \alpha, \beta)}{\partial \beta} &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo para $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial L(p, \alpha, \beta)}{\partial p_i} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} - \alpha \left(\sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i - \bar{R} \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) \right)}{\partial p_i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n p_j \sigma_{ij} - \alpha \bar{r}_i - \beta \right)$$

$$\frac{\partial L(p, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i - \bar{R}$$

$$\frac{\partial L(p, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n p_i - 1$$

E igualando a 0 las tres derivadas parciales hemos generado un sistema compatible determinado con $n + 2$ ecuaciones para $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{j=1}^n p_j \sigma_{ij} - \alpha \bar{r}_i - \beta = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i = \bar{R} \quad (2.4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.4.3)$$

y $n + 2$ variables desconocidas a calcular $(p_1, \dots, p_n, \alpha, \beta)$.

Si lo ponemos en forma matricial y vectorial podemos representar este sistema como $Ax = b$ tal que:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} & -\bar{r}_1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 & -\bar{r}_n & -1 \\ \bar{r}_1 & \dots & \bar{r}_n & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{R} \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un sistema de ecuaciones factible³. De este modo, la solución será $x = A^{-1}b$ puesto que la matriz A es no singular (ya que Σ no lo era) y, por tanto, invertible.

Así pues, para cada conjunto $(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$ de rendimientos esperados factibles tal que tengamos \bar{R} prefijado, obtendremos una cartera óptima única $C_{opt} = (p_1, \dots, p_n)$ con un nivel de riesgo mínimo σ calculado.

Observación 2.4.2. Si los activos son independientes entre ellos, es decir, si $\sigma_{ij} = 0 \forall i \neq j$, entonces tendríamos que $p_i \sigma_i^2 - \alpha \bar{r}_i - \beta = 0$ y las restricciones seguirían siendo $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $\sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i = \bar{R}$. Por tanto, obtendríamos que los valores de α , β y p_i serán:

$$\alpha = \frac{\bar{R} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i^2}{\sigma_i^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i}{\sigma_i^2}\right)^2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}, \quad \beta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i^2}{\sigma_i^2} - \bar{R} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \quad y \quad p_i = \frac{\alpha \bar{r}_i + \beta}{\sigma_i^2}.$$

2.4.2. Cálculo de la C_{opt} única para un \bar{R} determinado

Todo lo utilizado en este apartado procede del artículo de Merton [7]. Ahora vamos a exponer otra forma de cálculo de los p_i y de la σ .

Partimos de la ecuación (2.4.1), utilizando la notación matricial y para $k = 1, \dots, n$ tenemos que la podemos reescribir de la forma $\sum_{k,j} \tau_{kj} p_j^T = \alpha \bar{r}_i + \beta$ y, como Σ es no singular, entonces $p_j^T = \Sigma_{kj}^{-1} (\alpha \bar{r}_i + \beta)$. Esto es $p_j^T = \alpha \Sigma_{kj}^{-1} \bar{r}_i + \beta \Sigma_{kj}^{-1}$ y entonces

$$p_k = \alpha \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j + \beta \sum_{j=1}^n \tau_{kj}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.4.4)$$

³Decimos que este sistema de ecuaciones lineales es factible si tiene solución para valores de \bar{R} que son factibles; es decir, si se cumple que $\sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i = \bar{R}$.

donde los τ_{ij} denotan los coeficientes de Σ_{ij}^{-1} .

Si, a esta expresión, la multiplicamos por \bar{r}_k y sumamos n veces obtenemos la fórmula:

$$\sum_{k=1}^n p_k \bar{r}_k = \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j \bar{r}_k + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_k \quad (2.4.5)$$

y si solo sumamos obtenemos;

$$\sum_{k=1}^n p_k = \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj}. \quad (2.4.6)$$

Ahora, definamos:

$$A = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j, \quad B = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j \bar{r}_k, \quad C = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \quad y \quad D = BC - A^2$$

con A, B y C constantes estrictamente positivas⁴, entonces vemos que; por (2.4.2), (2.4.3), (2.4.5) y (2.4.6), podemos volver a definir las restricciones del problema de la siguiente manera:

$$\alpha B + \beta A = \bar{R}, \quad \alpha A + \beta C = 1.$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas obtenemos que

$$\alpha = \frac{C\bar{R} - A}{BC - A^2}, \quad \beta = \frac{B - A\bar{R}}{BC - A^2}$$

y ($D = BC - A^2 > 0$)⁵. Una vez calculados α y β obtenemos p_k para todo $k = 1, \dots, n$. Utilizando (2.4.4) tenemos que

$$\begin{aligned} p_k &= \alpha \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j + \beta \sum_{j=1}^n \tau_{kj} = \left(\frac{C\bar{R} - A}{BC - A^2} \right) \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j + \left(\frac{B - A\bar{R}}{BC - A^2} \right) \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \\ &= \frac{(C\bar{R} - A) \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j + (B - A\bar{R}) \sum_{j=1}^n \tau_{kj}}{D} \\ &= \frac{C\bar{R} \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j - A \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j + B \sum_{j=1}^n \tau_{kj} - A\bar{R} \sum_{j=1}^n \tau_{kj}}{D} \\ &= \frac{\bar{R} \sum_{j=1}^n \tau_{kj} (C\bar{r}_j - A) + \sum_{j=1}^n \tau_{kj} (B - A\bar{r}_j)}{D}. \end{aligned}$$

Así pues, ya tenemos definida y calculada nuestra cartera óptima $C_{opt} = (p_1, \dots, p_n)$ dadas unas rentabilidades esperadas \bar{r}_i para cada activo $i = 1, \dots, n$ y para una rentabilidad esperada de la cartera \bar{R} . Solo nos falta encontrar el riesgo asociado a esta cartera para estos rendimientos, por tanto, calculamos σ .

Si multiplicamos por p_i la expresión (2.4.1) y hacemos la suma para $i = 1, \dots, n$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i + \beta \sum_{i=1}^n p_i,$$

⁴Esto es debido a que como Σ es definida positiva $\implies \Sigma^{-1}$ también lo es y a que nuestros rendimientos esperados han de ser positivos para tener una cartera eficiente.

⁵ $0 < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{ij} (A\bar{r}_i - B)(A\bar{r}_j - B) = A^2 B - 2A^2 B + B^2 C = B(BC - A^2) = BD$ y como que $B > 0$ (por definición) entonces, $D > 0$.

de manera que

$$\sigma^2 = \alpha \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i + \beta \sum_{i=1}^n p_i$$

y, por (2.4.2) y (2.4.3), acabamos viendo lo siguiente:

$$\sigma^2 = \alpha \bar{R} + \beta. \quad (2.4.7)$$

Sustituyendo α y β por las expresiones encontradas vemos que:

$$\sigma^2 = \frac{C\bar{R}^2 - 2A\bar{R} + B}{D}. \quad (2.4.8)$$

2.5. La frontera eficiente

Ahora ya tenemos definida nuestra cartera de inversión con n activos de riesgo, diversificada, definido el modelo de Markowitz para ésta y solucionado el problema de optimización que nos permite obtener la mejor asignación de nuestros recursos entre nuestros activos. Sin embargo, ésta no es la única distribución de beneficio-riesgo posible para nuestra inversión. De hecho, existen tantas opciones de carteras como pares (σ, \bar{R}) que vamos a calcular. A todos los pares factibles⁶ (σ_i, \bar{R}_i) para $\forall i$ (donde i indica cada una de las carteras C_{opt_i} fijado un \bar{R}_i) se les conoce como el *conjunto factible de carteras* y los podemos representar en el plano $\sigma - \bar{R}$.

Así pues, vamos a dibujar la ecuación (2.4.8) en el plano $\sigma - \bar{R}$ a ver qué nos sale. Como, comunmente, en el modelo el eje de abscisas es el de la σ encontramos \bar{R} en función de σ . De este modo:

$$\begin{aligned} 0 &= C\bar{R}^2 - 2A\bar{R} + B - D\sigma^2 \iff \bar{R} = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4CB + 4CD\sigma^2}}{2C} \\ &\iff \bar{R} = \frac{A}{C} \pm \frac{\sqrt{-(BC - A^2) + DC\sigma^2}}{C} \end{aligned}$$

y como $BC - A^2 = D$, finalmente:

$$\bar{R} = \frac{A}{C} \pm \frac{\sqrt{D(C\sigma^2 - 1)}}{C}. \quad (2.5.1)$$

Así pues, esta expresión nos describe para cualquier valor de σ la forma que tendrá la función de la rentabilidad esperada.

Sin embargo, nos planteamos si, realmente, toda cartera (σ_i, \bar{R}_i) es una cartera eficiente. Lo cierto es que no. Pueden suceder 3 cosas: que, efectivamente, sea una cartera eficiente con un nivel de beneficio y riesgo asociados determinados; que sea inalcanzable (imposible de conseguir) o que sea ineficiente (no óptimo). Para poder saber en cuál de las tres situaciones se encuentra nuestra cartera definiremos la frontera eficiente.

Definición 2.5.1. *La frontera eficiente es el conjunto de todas las carteras $C_{opt_i} = (\sigma_i, \bar{R}_i)$ óptimas. Es decir, que para un valor definido \bar{R}_i , σ_i es mínima.*

⁶Consideramos al conjunto de pares (σ, \bar{R}) como *pares factibles* si cumplen que existe, para cada uno de ellos, una cartera (p_1, \dots, p_n) tal que:

$$\sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i = \bar{R} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij}.$$

⁷Estas variables están representadas en el plano en %.

2.5.1. La cartera de mínima varianza

Para construir la frontera eficiente debemos, previamente, encontrar la *Cartera de mínima varianza*. Ésta, es la óptima con menor varianza de todas las posibles. A partir de ahora la denotaremos por $(\sigma_{min}, \bar{R}_{min})$. Para calcularla vamos a volver a definir el problema de Markowitz pero esta vez solo restringido al hecho de que la suma de los p_i ha de ser 1 porque son porcentajes ya que ahora no queremos imponer un beneficio esperado prefijado puesto que solo buscamos el punto de la frontera eficiente que tenga el menor valor de varianza independientemente del valor de \bar{R} . Así pues, planteamos el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{(p_1, \dots, p_n)} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} \\ \text{sujeto a :} \quad & \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{aligned}$$

Y, tal y como hemos hecho antes, resolvemos este problema mediante los multiplicadores de Lagrange. Definimos el escalar γ y el Lagrangiano

$$L(p, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} - \gamma \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right)$$

y volvemos a calcular las derivadas parciales para $i \in \{1, \dots, n\}$ e igualamos a 0 de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(p, \gamma)}{\partial p_i} &= \sum_{j=1}^n p_j \sigma_{ij} - \gamma = 0, \\ \frac{\partial L(p, \gamma)}{\partial \gamma} &= \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, operando, encontramos que la cartera de mínima varianza es el resultado de un sistema de ecuaciones lineales de $n + 1$ ecuaciones y $n + 1$ variables. Usando la misma notación que antes: $\sum_{k,j} p_j^T - \gamma = 0 \implies \sum_{k,j} p_j^T = \gamma \implies p_j^T = \sum_{k,j}^{-1} \gamma$ y usando la propiedad lineal del producto por escalar obtenemos

$$p_k = \gamma \sum_{j=1}^n \tau_{kj}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Ahora, si sumamos n veces p_k obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n p_k = \gamma \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj}$$

y como que, por la restricción definida, tenemos que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, entonces:

$$\gamma \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} = 1 \implies \gamma = \frac{1}{C}$$

por la definición de C dada en el apartado anterior. Con todo esto, obtenemos que;

$$p_k = \frac{\sum_{j=1}^n \tau_{kj}}{C}$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Los denotaremos de ahora en adelante por p_{min_i} para $i = 1, \dots, n$. De esta forma ya tenemos la *Cartera de mínima varianza* $C_{opt-min} = (p_{min_1}, \dots, p_{min_n})$ que es la óptima con rendimiento esperado

$$\bar{R}_{min} = \frac{A}{C} \quad (2.5.2)$$

ya que, usando el valor A que habíamos definido,

$$\bar{R}_{min} = \sum_{i=1}^n p_{min_i} \bar{r}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \bar{r}_i}{C} = \frac{A}{C}$$

y el menor valor de desviación estándar, usando (2.4.8), que es:

$$\sigma_{min} = \sqrt{\frac{C \frac{A^2}{C^2} - 2A \frac{A}{C} + B}{D}} = \sqrt{\frac{-A^2 + BC}{CD}} = \sqrt{\frac{D}{CD}} = \frac{1}{\sqrt{C}}. \quad (2.5.3)$$

2.5.2. Interpretación analítica

Con todo lo visto hasta el momento teníamos que las carteras óptimas las podíamos describir mediante el par (σ, \bar{R}) , sin embargo; al introducir el concepto de la cartera óptima de mínima varianza $(\sigma_{min}, \bar{R}_{min})$ nos tenemos que plantear cuáles de todas ellas son eficientes, cuáles son poco eficientes y cuáles son imposibles. Para ello, vamos a ver gráficamente qué está sucediendo en el modelo.

Si dibujamos en el plano $\sigma - \bar{R}$ la función (2.5.1), evaluaremos en qué situación se encuentra cada par calculado en relación a su eficiencia.

En primer lugar, esta función no tiene ningún punto de corte con el eje de ordenadas;

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \bar{R} = \frac{A \pm \sqrt{D(C0 - 1)}}{C} \Leftrightarrow \bar{R} = \frac{A \pm \sqrt{-D}}{C} \quad !!!$$

ya que $D > 0$ pero sí con el de abscisas ya que

$$\bar{R} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{D(C\sigma^2 - 1)} = -A \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{C} \left(\frac{A^2}{D} + 1 \right)}, \quad \text{con } C \neq 0.$$

En segundo lugar, el dominio es $\sigma \in (\frac{1}{\sqrt{C}}, +\infty)$ por el riesgo sistemático ($\sigma > 0$) y debido a que si buscamos los valores de σ para los cuales no existe un valor de \bar{R} vemos lo siguiente:

$$\nexists \bar{R} \Leftrightarrow C = 0 \quad \text{o} \quad D(C\sigma^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow \sigma^2 < \frac{1}{C} \Leftrightarrow \sigma < \frac{1}{\sqrt{C}}$$

y como $C > 0$ entonces solo puede ser la segunda desigualdad. El recorrido, por su parte,

$$\nexists \sigma \Leftrightarrow C\bar{R}^2 - 2A\bar{R} + B < 0 \Leftrightarrow \bar{R} < \frac{A \pm \sqrt{-D}}{C} \quad \text{o} \quad D = 0;$$

así pues, como no puede ser ninguna de las dos, es $\bar{R} \in \mathbb{R}$ ya que $\exists \sigma$ para todo valor de \bar{R} . Pese a esto, nosotros consideramos una cartera eficiente como aquella que tiene un beneficio esperado, por tanto, no tiene mucho sentido considerar que \bar{R} sea negativo o 0. Respecto al comportamiento asintótico;

(*asíntotas horizontales*):

$$\exists A.H \Leftrightarrow \exists \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{R}(\sigma)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{R}(\sigma) = +\infty \implies \nexists A.H.$$

Esta función tiende al infinito puesto que como hemos partido de un modelo que permite la venta en corto eso implica que; conforme aumente el rendimiento que se espera, aumentará el riesgo asociado a esta inversión y viceversa.

(*asíntotas verticales*):

$$\exists A.V \Leftrightarrow \exists \lim_{\sigma \rightarrow \pm a} \bar{R}(\sigma)$$

donde a son puntos de no dominio de la función, es decir $a = \frac{1}{\sqrt{C}}$ y vemos que nos sale entonces que $\bar{R}(\frac{1}{\sqrt{C}}) = \frac{A}{C} \implies \exists A.V : \sigma = \frac{1}{\sqrt{C}}$.

(*asíntotas oblicuas*): puede tener ya que no tiene asíntotas horizontales, veámoslo.

Sean las asíntotas oblicuas las rectas $y = m\sigma + n$ (en nuestro caso: $\bar{R} = m\sigma + n$), donde

$$m = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\bar{R}(\sigma)}{\sigma} \quad y \quad n = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\bar{R}(\sigma) - m\sigma),$$

entonces vamos a ver si tiene o no.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\bar{R}(\sigma)}{\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A \pm \sqrt{DC\sigma^2 - D}}{C\sigma} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A}{C\sigma} + \frac{1}{C} \sqrt{\frac{DC\sigma^2 - D}{\sigma^2}} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A}{C\sigma} + \frac{1}{C} \sqrt{DC - \frac{D}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{C} \sqrt{DC} = \sqrt{\frac{DC}{C^2}} = \pm \sqrt{\frac{D}{C}} \end{aligned}$$

Calculamos, ahora, la n :

$$\begin{aligned} n &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\bar{R}(\sigma) - m\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A}{C} + \frac{1}{C} \sqrt{DC\sigma^2 - D} - \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{DC\sigma^2 - D}{C^2}} - \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A}{C} + \sqrt{\sigma^2 \left(\frac{D}{C} - \frac{D}{C^2\sigma^2} \right)} - \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A}{C} + \sigma \sqrt{\frac{D}{C} - \frac{D}{C^2\sigma^2}} - \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma = \frac{A}{C} \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos dos rectas oblicuas:

$$\bar{R}_1 = +\sqrt{\frac{D}{C}}\sigma + \frac{A}{C} \quad y \quad \bar{R}_2 = -\sqrt{\frac{D}{C}}\sigma + \frac{A}{C}.$$

Ahora vamos a estudiar la monotonía de la función. Para ello, analicemos qué sucede con la primera derivada respecto de σ .

$$\frac{\partial \bar{R}(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{D\sigma}{\sqrt{D(C\sigma^2 - 1)}}.$$

Entonces vemos lo siguiente:

$$\frac{\partial \bar{R}(\sigma)}{\partial \sigma} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{D(C\sigma^2 - 1)} > 0 \Leftrightarrow \sigma > \frac{1}{\sqrt{C}}$$

y si ponemos $-\sqrt{D(C\sigma^2 - 1)}$ entonces:

$$\frac{\partial \bar{R}(\sigma)}{\partial \sigma} < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{D(C\sigma^2 - 1)} < 0 \Leftrightarrow \sigma > \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Estas dos expresiones nos indican que para $\sigma \in (\frac{1}{C}, +\infty) \implies \bar{R}$ es estrictamente creciente y estrictamente decreciente por lo que vamos a estudiar qué está pasando en el punto $(\frac{1}{\sqrt{C}}, \frac{A}{C})$. Para ello, analicemos qué sucede derivando la inversa respecto \bar{R} :

$$\frac{\partial \sigma^2(\bar{R})}{\partial \bar{R}} = \frac{1}{D}(2C\bar{R} - 2A) > 0 \Leftrightarrow \bar{R} > A/C,$$

$$\frac{\partial \sigma^2(\bar{R})}{\partial \bar{R}} = \frac{1}{D}(2C\bar{R} - 2A) < 0 \Leftrightarrow \bar{R} < A/C.$$

Así pues, para $\bar{R} \in (\frac{A}{C}, +\infty) \implies$ la función σ es estrictamente creciente y para $\bar{R} \in (-\infty, \frac{A}{C}) \implies$ la función σ es estrictamente decreciente.

Por último, vamos a estudiar si esta función tiene puntos de extremos relativos, puntos de inflexión y de qué tipo son. Para ello, analicemos la primera y la segunda derivada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{R}(\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \Leftrightarrow \frac{D\sigma}{\sqrt{D(C\sigma^2 - 1)}} = 0 \Leftrightarrow D\sigma = 0 \quad !!!$$

Como esto es imposible ya que $D > 0$ y $\sigma > 0 \implies$ la función es estrictamente convexa ya que si hacemos la segunda derivada obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \bar{R}(\sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{-D^2}{\sqrt{(D(C\sigma^2 - 1))^3}} < 0$$

mediante la cual también vemos que no tiene ningún punto de inflexión. Pero, sin embargo, si analizamos en el punto $(\frac{1}{\sqrt{C}}, \frac{A}{C})$ qué sucede en la función inversa entonces

$$\frac{\partial \sigma(\bar{R})}{\partial \bar{R}} = 0 \Leftrightarrow \bar{R} = \frac{A}{C}$$

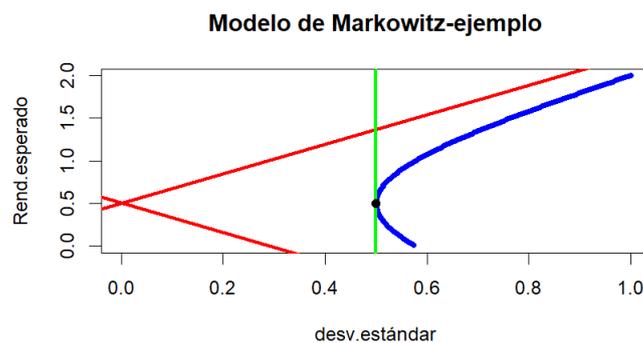
y analizando la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 \sigma^2(\bar{R})}{\partial \bar{R}^2} = \frac{2C}{D} > 0$$

vemos que como es estrictamente positiva estamos ante un mínimo.

Con toda esta información, nos sale que la función que estamos tratando de dibujar es una hipérbola, estrictamente convexa, con un único punto mínimo $(\frac{1}{\sqrt{C}}, \frac{A}{C})$ y descrita entre dos rectas oblicuas. La siguiente gráfica (Figura 2.1) dibuja el conjunto de carteras óptimas a partir de $A = 2$, $B = 4$ y $C = 4$ en la hipérbola que describe el conjunto de puntos en color azul, las dos rectas oblicuas (de color rojo) que intersecan en el punto $(0, \bar{R}_{min})$ y la asíntota vertical $\sigma = \frac{1}{\sqrt{C}}$ (de color verde). En este gráfico podemos ver todas las carteras que, a partir de un rendimiento esperado superior a 0 (ya que si no no tiene sentido querer una inversión que no nos dé beneficios) y menor a 2, tienen una desviación estándar de menos de 1. Esto es tan solo para que se pueda tener una intuición gráfica de lo que sucede al calcular las carteras óptimas mediante la MPT que nos describe nuestra función. Además, se indica con un punto negro el punto que hace referencia a la cartera de mínima varianza puesto que éste va a ser el punto a partir del cual definamos la frontera eficiente y que es el único extremo relativo de la función σ . También, es interesante ver que

$$\bar{R} = \bar{R}_{min} \pm \frac{\sqrt{D(C\sigma^2 - 1)}}{C}.$$

Figura 2.1: Función de $\sigma - \bar{R}$.

2.5.3. Análisis de la eficiencia de las carteras

Una vez tenemos ya definida esta curva de carteras que optimizan el modelo de Markowitz planteado definimos cuáles de ellas son eficientes, así pues; óptimas y cuáles no.

Definición 2.5.2. *Definimos el conjunto de carteras óptimas de inversión a todas aquellas descritas por el par (σ^*, \bar{R}^*) que cumplen que $\bar{R}^* \geq \bar{R}_{min}$ y que $\sigma^* \geq \sigma_{min}$. Es decir, todas aquellas con un rendimiento esperado superior y un riesgo superior a los determinados por la cartera de mínima varianza y que cumplen la función que resuelve el problema de Markowitz.*

Así pues, podemos situarlas en la parte estrictamente creciente de la curva que describe nuestra función, a partir del punto de mínima varianza. Y, tal y como ya habíamos introducido, a este conjunto se le conoce como *la frontera eficiente*.

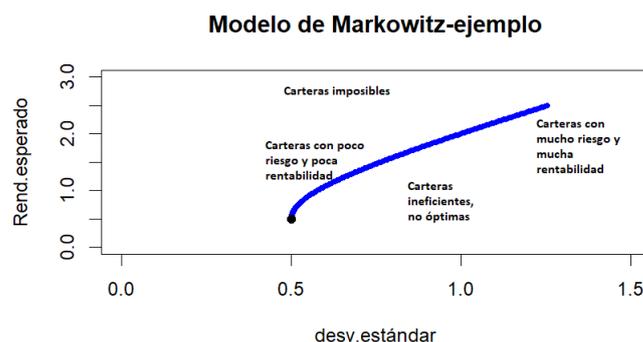


Figura 2.2: La frontera eficiente.

Además, ésta no está acotada por arriba debido a que hemos planteado un modelo, como ya se ha ido diciendo, en el que está permitida la venta en corto; es por este motivo que la curva tiende al infinito y es estrictamente creciente (véase Figura 2.2). Pero, aunque en esta parte de la curva todas nuestras carteras son eficientes, tendremos que distinguir y plantearnos si optar por aquellas que nos dan una rentabilidad menor pero también una menor exposición al riesgo o, si por el contrario, somos menos aversos al riesgo y queremos intentar obtener mayores beneficios de nuestras inversiones. Sin embargo, también vamos

a estudiar qué pasa con el resto. Si nos encontramos en la situación en que tenemos una cartera con $\bar{R} < \bar{R}_{min}$ y $\sigma > \sigma_{min}$, entonces no estamos siendo eficientes ya que el rendimiento que esperamos obtener no compensa el elevado riesgo al que nos exponemos. En otras palabras, no es una buena decisión. Cualquier otra situación que se nos pueda plantear nos es inviable, es decir, si por ejemplo queremos quedarnos con una cartera que tenga muy poco riesgo pero con mucha rentabilidad (véase $\sigma < \sigma_{min}$ y $\bar{R} > \bar{R}_{min}$), esto sería totalmente imposible de conseguir en una cartera con todo de activos de riesgo por la relación directamente proporcional de ambas variables.

2.6. Two-Fund Theorem

Con todo lo visto, hemos conseguido construir la frontera eficiente para poder conocer el conjunto de carteras de inversión, de n activos de riesgo, óptimas y la asignación más eficiente de nuestros recursos entre estos n activos. Sin embargo, no es necesario encontrar todo este conjunto infinito de pares (σ, \bar{R}) para construir esta curva.

Si nos fijamos en la fórmula (2.4.7) vemos que α y β no dependen del valor que nosotros tengamos fijado de \bar{R} si no que dependen de las correlaciones entre los activos (la matriz Σ) y del vector de rendimientos esperados de los activos $(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$. Lo que vamos a ver a continuación es que, a partir de tan solo dos carteras, podemos generar la frontera eficiente. Este hecho se le conoce por *Two-fund theorem* y la idea está en considerar estas dos carteras como si fuesen activos de riesgo como los que considerábamos hasta el momento y demostrar que toda cartera óptima por el modelo de la media-varianza de Markowitz se puede definir como un múltiplo de la inversión en estos dos.

La utilidad de este teorema radica en la noción de poder calcular cualquier cartera óptima tan solo invirtiendo en dos activos que se comportaran como dos fondos mutuos (*mutual funds*), lo que simplifica de forma interesante nuestro problema a optimizar.

Teorema 2.6.1 (Two-fund Theorem). *Sea $p^1 = (p_1^1, \dots, p_n^1)$ la solución al problema de Markowitz para una tasa de retorno esperada \bar{R}^1 y $p^2 = (p_1^2, \dots, p_n^2)$ la solución al problema de Markowitz para una tasa de retorno esperada \bar{R}^2 tal que $\bar{R}^1 \neq \bar{R}^2$, entonces; para cualquier número λ , la nueva cartera $p = \lambda p^1 + (1 - \lambda)p^2$ es solución al problema de Markowitz para una tasa de retorno esperada $\bar{R} = \lambda \bar{R}^1 + (1 - \lambda)\bar{R}^2$. De esta forma, con cada valor de λ se construye la frontera eficiente y todas las soluciones al problema de Markowitz pueden ser calculadas.*

Demostración. Queremos probar que la nueva cartera p se puede escribir como combinación lineal de p^1 y p^2 . Recordando que habíamos definido una solución al problema de Markowitz como la solución al sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ entonces vemos que, las combinaciones de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales también son soluciones. Sea x_1 solución para la cartera p^1 ; es decir, $x_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1, \alpha^1, \beta^1)$ tal que $Ax_1 = b_1$ con $b_1 = (0, \dots, 0, \bar{R}^1, 1)$ y x_2 solución para la cartera p^2 ; es decir, $x_2 = (p_1^2, \dots, p_n^2, \alpha^2, \beta^2)$ tal que $Ax_2 = b_2$ con $b_2 = (0, \dots, 0, \bar{R}^2, 1)$. Entonces, veamos si x es solución para el sistema $Ax = b$ tal que $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Sabemos que x será solución si $Ax = b$ con $b = (0, \dots, 0, \bar{R}^1 + (1 - \lambda)\bar{R}^2, 1) = \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$. Calculamos:

$$Ax = A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 = b$$

Así pues, x es solución por la suma y el producto de coeficientes lineales. De esta forma, la

combinación lineal de dos soluciones es solución al sistema de ecuaciones lineales planteado en el modelo de Markowitz. \square

Una vez demostrado este teorema, lo vamos a utilizar para demostrar el siguiente hecho.

Proposición 2.6.2. *Para cualquier valor esperado \bar{R} , la cartera óptima existe y es única.*

Demostración. Acabamos de ver que existe una cartera óptima p , con \bar{R}_p definido, que se puede escribir como combinación lineal de dos fondos mutuos vistos desde el punto de vista de dos activos que definen dos carteras óptimas pero nos falta ver que, ésta, es única para cada valor de λ que tomemos. Entonces, sea q otra cartera óptima que podemos escribir a partir de p^1 y p^2 tal que, usando la fórmula (2.4.7) tenemos que:

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \lambda\sigma_{p^1}^2 + (1-\lambda)\sigma_{p^2}^2 = \lambda(\alpha + \beta\bar{R}^1) + (1-\lambda)(\alpha + \beta\bar{R}^2) = \alpha + \beta(\lambda\bar{R}^1 + (1-\lambda)\bar{R}^2) \\ &= \alpha + \beta\bar{R}_p = \sigma_p^2.\end{aligned}$$

Como para cualquier valor de \bar{R} , q y p tienen el mismo riesgo asociado; entonces, $q = p$. \square

Observación 2.6.3. Se suele utilizar la cartera de mínima varianza ($\sigma_{min}, \bar{R}_{min}$) como uno de los fondos mutuos para definir la frontera eficiente en su totalidad.

2.7. Cartera con un activo libre de riesgo

A partir de este punto vamos a incorporar un nuevo activo a nuestra cartera de inversión con propiedades distintas. Supongamos que tenemos nuestra cartera de inversión C de n activos de riesgo e incluimos un activo libre de riesgo a ésta. De esta forma, definimos la nueva cartera, que denotaremos en adelante por C_{rf} , como la conformada por $n+1$ activos de los cuales uno es un activo libre de riesgo.

Definición 2.7.1. *Un activo libre de riesgo (Risk-free asset) es aquel que tiene un rendimiento esperado definido $\bar{R} = R_f$ y que no tiene riesgo asociado; es decir, $\sigma_i^2 = 0$ para i siendo el activo en cuestión.*

La gran ventaja de éstos es que proporcionan al inversor una rentabilidad asegurada sin riesgo a perder la inversión hecha. De esta forma, son títulos muy estables, nada volátiles y que permiten al tenedor de éstos cuantificar un beneficio conocido. Por el contrario, su principal inconveniente es que el beneficio que se extrae de ellos es bajo y menor al que se espera obtener de uno con riesgo.

Los tipos más frecuentes son los emitidos por los Estados tales como las letras del tesoro, bonos y otros títulos de deuda pública que emiten países con economías consolidadas. A pesar de que consideremos que tienen un riesgo nulo de pérdida, cabe remarcar que están expuestos a que los Estados quiebren y no puedan pagar estos rendimientos; lo cual es muy poco probable.

Para entender esta rentabilidad asegurada vamos a explicar brevemente en qué consisten estos títulos.

En un momento dado el Estado decide emitir una serie de contratos de títulos para financiarse; los conocidos como títulos de deuda soberana y el comprador de éstos, a cambio

del pago de una cuantía, adquiere el derecho, en una fecha de vencimiento, a cobrar otra cuantía. El valor que recibirá el tenedor de estos bonos o letras será el que pagó por obtenerlo más un pago adicional de intereses. Estos intereses a cobrar en la fecha de vencimiento se obtienen de aplicar un tipo de interés fijo a la operación. Este tipo de interés será el rendimiento que tendrá el título y que el inversor conocerá en el momento de compra del título. Sin embargo, también podemos considerar como activo libre de riesgo al efectivo ya que éste puede pagar unas rentabilidades aseguradas en el momento de la inversión aunque no es tan común definir en este modelo este tipo de activo como el activo de riesgo 0.

Así pues; la principal utilidad de incorporar este tipo de activos a una cartera es la de poder tener riesgo cero. Esto, nos podría hacer pensar que la decisión más eficiente sería la de confeccionar una cartera con solo activos libre de riesgo. Sin embargo; tal y como hemos dicho, el rendimiento de la cartera también decrecerá fuertemente por los bajos tipos de interés que pagan estos títulos. De esta forma, la gran utilidad de la incorporación de éstos a nuestra cartera ya confeccionada será la de ver cómo varía la frontera eficiente. Es decir, cómo varía la eficiencia de nuestra cartera si construimos una con altos rendimientos esperados por los activos de riesgo y nada de riesgo por el otro tipo de activo.

2.7.1. Una nueva frontera eficiente

Sea (q_1, \dots, q_n) la cartera de n activos de riesgo planteada hasta el momento con $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ y que vamos a definir por el par (σ_1, \bar{R}_1) y sea p_0 el porcentaje de inversión inicial en el activo libre de riesgo⁸, definimos nuestra nueva cartera de inversión $C_{r,f}$ como (p_0, \dots, p_n) con $\sum_{i=0}^n p_i = 1$. Si definimos por A_0 al activo libre de riesgo con rendimiento esperado dado por $\bar{R}_0 = R_f$ (que es un valor determinado) y riesgo $\sigma_0^2 = 0$ y por A_1 al activo conformado por la cartera planteada hasta este punto, vista como un fondo propio, con rentabilidad $\bar{R}_1 = \sum_{i=1}^n q_i \bar{r}_i$ y riesgo $\sigma_1^2 = \sum_{i,j=1}^n q_i q_j \sigma_{ij}$ entonces, por el *Two fund theorem*, podemos definir nuestra nueva cartera a partir de la inversión en estos dos activos vistos como fondos. El primero será A_0 e invertiremos p_0 y el otro será A_1 e invertiremos $1 - p_0$ de forma que $(p_0, \dots, p_n) = (p_0, (1 - p_0)(q_1, \dots, q_n))$ ya que

$$p_0 + \dots + p_n = 1 \implies \sum_{i=1}^n p_i = 1 - p_0 \quad y \quad q_i = \frac{p_i}{1 - p_0}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Además, sabiendo que $p_0 \neq \{0, 1\}$ porque no queremos invertir todo o nada en A_0 . Denotemos por $\bar{R}_{r,f}$ el rendimiento esperado de la nueva cartera, entonces tendremos

$$\bar{R}_{r,f} = p_0 \bar{R}_0 + (1 - p_0) \bar{R}_1$$

y su varianza será

$$\sigma_{r,f}^2 = (1 - p_0)^2 \sigma_1^2$$

ya que el rendimiento del activo sin riesgo es constante. De esta forma, podemos escribir nuestra nueva cartera mediante el par

$$(\sigma_{r,f}, \bar{R}_{r,f}) = (|1 - p_0| \sigma_1, p_0 \bar{R}_0 + (1 - p_0) \bar{R}_1).$$

⁸ p_0 puede ser positiva o negativa. En caso de que sea positiva querrá decir que compramos activos libres de riesgo. En caso contrario, significará que los vendemos en corto para financiar la cartera conformada por los activos de riesgo.

Ahora, tal y como hicimos en los apartados anteriores, vamos a calcular las carteras factibles y óptimas. Para ello, remarcamos que si invirtiésemos todo en A_0 ; es decir, $p_0 = 1$, entonces nuestra cartera no tendría riesgo y tendría la rentabilidad dada por éste, por todo lo que hemos dicho hasta este punto. Sin embargo, si $p_0 \neq 0$ entonces queremos saber cuáles son los valores óptimos p_1, \dots, p_n de nuestros activos de riesgo si invertimos en una cartera con activos con y libre de riesgos. Para responder a esta pregunta vamos a plantear el problema de Markowitz para estos n activos como antes pero teniendo en cuenta que ahora existe A_0 y que puesto que el valor de \bar{R}_0 es determinado, hemos podido comprobar que el activo libre de riesgo no tiene ningún tipo de incidencia en el cálculo de la varianza asociada a esta nueva cartera. En otras palabras, si existe A_0 , vamos a querer calcular las asignaciones óptimas de nuestros activos de riesgo que definirán, por consiguiente, la asignación óptima de la inversión en A_0 . Así pues,

$$\begin{aligned} \min_{p_i} \frac{1}{2} \sigma_{rf}^2 &= \min_{p_i} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} \\ \text{suje}to \quad a : \quad \bar{R}_{rf} &= \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i \right) \bar{R}_0 + \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i. \end{aligned}$$

De forma análoga a las anteriores veces, usamos los multiplicadores de Lagrange para resolver este problema. Sea $\mu \in \mathbb{R}$, definimos el lagrangiano:

$$L(p, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} - \mu \left(\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0 - \sum_{i=1}^n p_i (\bar{r}_i - \bar{R}_0) \right)$$

Derivando respecto de p_i y respecto de μ e igualando a 0 obtenemos:

$$\frac{\partial L(p, \mu)}{\partial p_i} = \sum_{i,j=1}^n p_j \sigma_{ij} - \mu (\bar{r}_i - \bar{R}_0) = 0 \quad (2.7.1)$$

$$\frac{\partial L(p, \mu)}{\partial \mu} = \bar{R}_{rf} - \bar{R}_0 - \sum_{i=1}^n p_i (\bar{r}_i - \bar{R}_0) = 0$$

Y ahora resolvemos con la misma notación y por los mismos argumentos usados durante todo el trabajo:

$$\sum_{i,j} p_j^T = \mu (\bar{r}_i - \bar{R}_0) \Rightarrow p_j^T = \mu \sum_{i,j}^{-1} (\bar{r}_i - \bar{R}_0) \implies p_k = \mu \sum_{j=1}^n \tau_{kj} (\bar{r}_j - \bar{R}_0); \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

De la restricción vemos que:

$$\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0 = \sum_{i=1}^n p_i \bar{r}_i - \bar{R}_0 \sum_{i=1}^n p_i \quad (2.7.2)$$

Sumando n veces p_k y, también, multiplicándolo por \bar{r}_k , obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^n p_k = \mu \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} (\bar{r}_j - \bar{R}_0) \right) = \mu \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j - \bar{R}_0 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \right) = \mu (A - \bar{R}_0 C)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k \bar{r}_k &= \mu \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} (\bar{r}_j - \bar{R}_0) \bar{r}_k \right) = \mu \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_j \bar{r}_k - \bar{R}_0 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \bar{r}_k \right) \\ &= \mu(B - \bar{R}_0 A). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas dos expresiones en (2.7.2), obtenemos finalmente;

$$\begin{aligned} \bar{R}_{rf} - \bar{R}_0 &= \mu(B - \bar{R}_0 A) - \bar{R}_0 \mu(A - \bar{R}_0 C) = \mu(B - \bar{R}_0 A - \bar{R}_0 A + \bar{R}_0^2 C) \\ &= \mu(B - 2\bar{R}_0 A + \bar{R}_0^2 C) \implies \mu = \frac{\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0}{B - 2\bar{R}_0 A + \bar{R}_0^2 C}. \end{aligned}$$

Por tanto, el porcentaje a invertir en cada uno de los activos de riesgo de nuestra cartera con un activo libre de riesgo es:

$$p_k = \frac{\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0}{B - 2\bar{R}_0 A + \bar{R}_0^2 C} \sum_{j=1}^n \tau_{kj} (\bar{r}_j - \bar{R}_0); \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

con $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^n p_k$. Ahora, para calcular la varianza, multiplicamos por p_i la ecuación (2.7.1) y usando (2.7.2):

$$\sum_{i=1}^n p_i p_j \sigma_{ij} = \mu \left(\sum_{i=1}^n p_i (\bar{r}_i - \bar{R}_0) \right) = \frac{\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0}{B - 2\bar{R}_0 A + \bar{R}_0^2 C} (\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0)$$

obtenemos que el riesgo de la nueva cartera es:

$$\sigma_{rf}^2 = \frac{(\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0)^2}{B - 2\bar{R}_0 A + \bar{R}_0^2 C} \implies \sigma_{rf} = \frac{|\bar{R}_{rf} - \bar{R}_0|}{\sqrt{B - 2\bar{R}_0 A + \bar{R}_0^2 C}}$$

tal y como describe Merton en su artículo [7]. Así pues, en el plano $\sigma - \bar{R}$ podemos describir este nuevo conjunto de carteras factibles como las carteras que cumplan la siguiente ecuación:

$$\bar{R} = \bar{R}_0 \pm \sigma \sqrt{\bar{R}_0^2 C - 2A\bar{R}_0 + B} \quad (2.7.3)$$

y ahora debemos estudiar cuál de todas estas serán eficientes y cuáles no.

De esta ecuación extraemos las siguientes observaciones. En primer lugar, se trata de una ecuación lineal que dibuja dos rectas en el plano $\sigma - \bar{R}$ que intersecan en el punto $(0, \bar{R}_0)$, que será el punto en que lo invertiríamos todo en A_0 y de origen de ambas puesto que $\sigma \geq 0$. En segundo lugar, si lo invirtiésemos todo en el fondo conformado por la cartera de n activos de riesgo entonces tendríamos el punto (σ_1, \bar{R}_1) que ya teníamos definido. Y, en tercer lugar, estas dos rectas tienen pendiente dada por la expresión $+\sqrt{\bar{R}_0^2 C - 2A\bar{R}_0 + B}$ y $-\sqrt{\bar{R}_0^2 C - 2A\bar{R}_0 + B}$ respectivamente y tienden a $+\infty$ cuando σ tiende a $+\infty$.

Con esto presente Prigent, en su libro sobre optimización de carteras, a la hora de explicar la optimización estática (ver [8]) concluye en que, por la propiedad del *two fund theorem*, la nueva frontera eficiente será la unión de la frontera eficiente de los n activos de riesgo que ya teníamos con la nueva frontera eficiente que nos define la recta con pendiente positivo⁹ definida en (2.7.3). En otras palabras, la nueva frontera eficiente será la recta

⁹Nos quedamos con la expresión de (2.7.3) con pendiente positivo puesto que el inversor es racional y prefiere rendimientos positivos y solo nos interesará tener rendimientos superiores a los de la nueva cartera de mínima varianza.

que une la cartera $(0, \bar{R}_0)$ con la cartera (σ_t, \bar{R}_t) , que será la cartera que es el punto de tangencia de la frontera eficiente de la cartera con un activo libre de riesgo que acabamos de detallar con la de n activos de riesgo. Además, esta nueva frontera eficiente puede ser descompuesta en dos partes. La primera, consiste en el segmento entre $(0, \bar{R}_0)$ y (σ_t, \bar{R}_t) y es el conjunto de carteras en que $p_0 > 0$. En este segmento, el inversor es racional (averso al riesgo) y prefiere minimizar el riesgo a maximizar la rentabilidad esperada. La segunda, por el contrario, sería el segmento a partir de (σ_t, \bar{R}_t) y sería para aquel inversor que prioriza la maximización de sus beneficios y corresponde a endeudarse e invertir en activos con riesgo tal que $p_0 < 0$. Esta nueva frontera eficiente es la conocida como *capital allocation line* (CAL en adelante) y describe el conjunto de carteras óptimas si uno de nuestros activos que la conforman es un activo libre de riesgo.

Así pues, una vez tenemos definida esta nueva frontera eficiente, Sigman en sus apuntes (ver [11]) nos introduce un nuevo teorema.

Teorema 2.7.2 (One fund theorem). *En un mercado abierto en que todo inversor puede escoger entre los mismos activos y todos tienen el mismo rendimiento para el activo libre de riesgo que denotaremos por $\bar{R}_0 = R_f$, toda cartera puede ser calculada a partir de un mismo y único fondo A_1 y el activo libre de riesgo A_0 . Este fondo $A_1 = (q_1, \dots, q_n)$ del **one fund theorem** es la cartera única dada por las asignaciones óptimas*

$$q_i = \frac{p_i}{\sum_{k=1}^n p_k}$$

con los p_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ que hemos calculado en este apartado y que maximizan la pendiente de la nueva frontera eficiente.

Demostración. La demostración que da Sigman en sus apuntes [11] corresponde a todo lo mencionado desde la página 20. Por tanto, todo lo visto hasta este momento, prueba este teorema. \square

Observación 2.7.3. Hablamos de unicidad de la cartera puesto que suponemos que los activos de riesgo no están perfectamente correlacionados 2 a 2; es decir, que $|Cov(r_i, r_j)| < 1$; $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$.

Para poder ejemplificar un poco todo esto, vamos a volver a suponer el caso anterior en que $A = 2$, $B = 4$ y $C = 4$ para poder ver gráficamente lo que hemos comentado. Para ello, vamos a considerar tres casos en que en todos ellos las rectas rojas describen la frontera eficiente con el activo libre de riesgo definida en (2.7.3) y la curva azul es la frontera eficiente de la cartera de n activos de riesgo definida en los apartados anteriores del trabajo.

El primero, sea $(\sigma_{min_1}, \bar{R}_{min_1})$ la cartera de mínima varianza de la cartera con n activos de riesgo, definimos $\bar{R}_0 = R_f = 0,5$. En este caso, dado el valor definido para \bar{R}_0 , tenemos que $\bar{R}_0 = \bar{R}_{min_1} = \frac{A}{C}$; es decir, que la cartera de mínima varianza de con y sin activo libre de riesgo tienen la misma rentabilidad esperada.

Esto quiere decir que, como se puede ver en el siguiente gráfico (Figura 2.3), las dos fronteras eficientes son disjuntas y no intersecan jamás puesto que la expresión del rendimiento esperado resultante sería la de

$$\bar{R}_r = \bar{R}_{min_1} \pm \sigma \sqrt{\bar{R}_{min_1}^2 C - 2A\bar{R}_{min_1} + B} = \frac{A}{C} \pm \sigma \sqrt{\frac{D}{C}} \sigma$$

que es exactamente la expresión de las asíntotas oblicuas calculadas en apartados anteriores. Por la definición que acabamos de hacer un par de párrafos antes de la frontera eficiente, este no sería el caso en que se define la CAL.



Figura 2.3: La frontera eficiente con un activo libre de riesgo; $\bar{R}_0 = \bar{R}_{min_1}$.

Sin embargo; si $\bar{R}_0 > \bar{R}_{min_1}$ o si $\bar{R}_0 < \bar{R}_{min_1}$, las fronteras eficientes ya sí son tangentes. En el libro de Prigent [8] se enuncia que, en este caso, las fronteras eficientes con y sin activo libre de riesgo tienen un punto de tangencia t que corresponde a la cartera $p_t = (p_{1_t}, \dots, p_{n_t})$ o bien la podemos representar por el par (σ_t, \bar{R}_t) . De esta forma, estas fronteras son tangentes en este punto definido por:

$$p_t = \frac{\Sigma^{-1}(\bar{r} - (1, \dots, 1)\bar{R}_0)}{(A - C\bar{R}_0)}$$

y con rendimiento y riesgo asociado (usando producto escalar):

$$\bar{R}_t = p_t^T \bar{r} \frac{B - A\bar{R}_0}{A - C\bar{R}_0}$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{C\bar{R}_0^2 - 2A\bar{R}_0 + B}{(A - C\bar{R}_0)^2}},$$

utilizando la notación definida en los primeros apartados del trabajo. Así pues según si la raíz es positiva o no, estaremos ante un caso u otro.

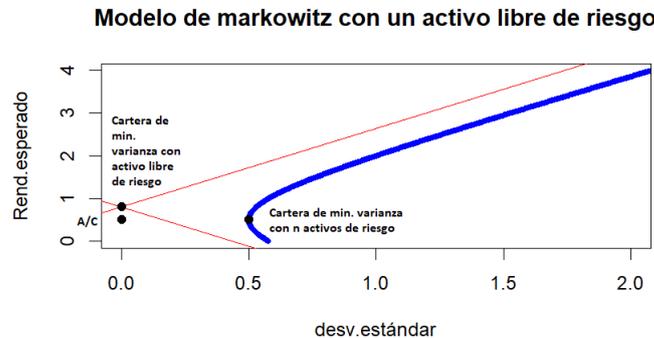


Figura 2.4: La frontera eficiente con un activo libre de riesgo; $\bar{R}_0 > \bar{R}_{min_1}$.

El segundo caso, que vemos gráficamente en la Figura 2.4, muestra que nuestra nueva cartera de mínima varianza tiene un rendimiento menor a la conformada por los n activos de riesgo, por lo que $\bar{R}_0 > \bar{R}_{min_1}$, y las dos fronteras eficientes serán tangentes en un rendimiento inferior al mencionado. Este caso no será una decisión eficiente a no ser que nos encontremos, tal y como comenta Prigent en su libro [8], en un mercado bajista¹⁰ ya que por como el modelo define al inversor y por definición de frontera eficiente, no queremos una cartera que tenga un rendimiento menor al de la cartera de mínima varianza. Este caso no nos va a interesar puesto que como tenemos que $\sigma > 0$, no tiene mucho sentido estudiarlo.

El tercer caso (Figura 2.5) también tendrá un punto de tangencia entre ambas fronteras eficientes pero, por el contrario, este sí que nos permitirá dibujar, finalmente, la recta que será nuestra nuevo conjunto de carteras óptimas (CAL).

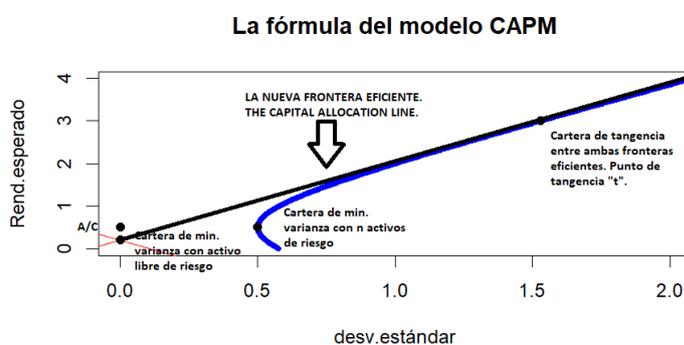


Figura 2.5: La frontera eficiente con un activo libre de riesgo; $\bar{R}_0 < \bar{R}_{min_1}$.

Esto es debido a que al tener rentabilidades superiores a la de la cartera de mínima varianza, el inversor podrá maximizar la rentabilidad de su cartera.

Por tanto, de los tres casos posibles, el que definirá nuestra CAL será el tercero; que es el que describe la situación en que en la recta, que va desde $(0, \bar{R}_0)$ y que pasa por la cartera p_t tangente a la frontera eficiente de los n activos de riesgo, se encuentra el conjunto de todas las carteras eficientes.

¹⁰Definimos a un mercado como bajista (*Bearish market*) cuando se da una caída prolongada del valor de los activos o de los índices de más del 20%.

Capítulo 3

El modelo CAPM

Hasta este momento y tras el último apartado, hemos definido las carteras eficientes como aquellas que se encuentran en la recta calculada a partir del activo libre de riesgo y el fondo representado por la cartera de riesgo. Así pues, hemos sido capaces de estudiar la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera a partir del cálculo del menor valor de varianza σ^2 posible. Este hecho es definido, en su libro, por William Sharpe (véase [9]) como el método de optimización de carteras a partir de la teoría de carteras definida por Markowitz. Sin embargo, Sharpe introduce la teoría del mercado de capitales (*Capital market theory*) para no estudiar solamente la relación entre rendimiento y riesgo de la cartera si no también averiguar cuál es la relación o si existe relación entre el rendimiento de la cartera de inversión y el riesgo de los diferentes activos que la conforman. Para responder a esta pregunta, Sharpe define esta teoría que nos propondrá un nuevo modelo de cálculo de las asignaciones óptimas de nuestros activos a partir de la valoración del mercado y estudiará las correlaciones que existen entre éstos y el propio mercado en el que se encuentran.

3.1. La *capital market theory*

Por el *two fund theorem*, si existe un activo libre de riesgo, toda cartera eficiente es una combinación de éste y la cartera de riesgo (la definida en el *one fund theorem* que hemos visto que es única). Como hemos visto que todas las carteras situadas sobre la CAL son eficientes, eso quiere decir que, según el tipo de inversor que seamos; en equilibrio, preferiremos una cartera u otra de esta línea pero todos nosotros tendremos el mismo punto de tangencia entre ambas fronteras eficientes por la unicidad del fondo. Para entender esto Sharpe en su libro [9] explica las consideraciones de esta teoría. En primer lugar, cada inversor actúa en función de las predicciones del comportamiento futuro de los activos financieros. Estas predicciones son en términos de rendimientos esperados, desviaciones estándar y coeficientes de correlación de las tasas de retorno. En segundo lugar, cada inversor elige una cartera como hemos explicado hasta el momento, es decir, mediante los mismos métodos de optimización. En tercer lugar, el rendimiento del activo libre de riesgo es el mismo para todos los inversores.

Así pues, todos los inversores están ante la misma situación de optimización, todos tienen el mismo valor de $\bar{R}_0 = R_f$, hacen todas las mismas predicciones y calculan de la misma forma la combinación más eficiente de sus activos de riesgo. Es por esto, que todos calculan de igual forma σ^2 y aunque algunos decidan que $p_0 > 0$ y otros que $p_0 < 0$, todos obtienen

el mismo punto de tangencia entre fronteras eficientes. A este punto de tangencia, que maximiza la pendiente de la frontera eficiente con un activo libre de riesgo, lo denota por M y lo denomina como **la cartera de mercado** y será la cartera óptima única utilizada por todos los inversores.

Sea M esta cartera de mercado o fondo eficiente que hemos definido en el *one fund theorem*, esta teoría pretende demostrarnos que, como esta cartera es la misma para todos los inversores, podemos encontrar una forma de optimizar nuestra cartera de inversión a partir de un equilibrio sin necesidad de utilizar los métodos de optimización de Markowitz planteados hasta este punto. Sigman argumenta en sus apuntes [10] que podemos definir el peso o porcentaje de inversión que debemos asignar a cada uno de nuestros activos que conforman M (todos de riesgo) a partir del cociente del valor del activo entre el valor total del mercado. El valor total del mercado V se puede definir como $V = V_1 + \dots + V_n$ donde cada V_i para $i \in \{1, \dots, n\}$ es el valor del activo definido como $V_i = P_i Q_i$ donde P_i es el precio del activo en el mercado y Q_i es la cantidad de títulos adquiridos del activo en el mercado. Así pues, las asignaciones se definirán de la siguiente forma:

$$p_i = \frac{P_i Q_i}{\sum_{j=1}^n P_j Q_j}; \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

De esta forma, esta teoría define un modelo en que las carteras eficientes vendrán dadas por las variaciones en las fuerzas de la oferta y la demanda y no en la optimización de funciones; por lo que no será necesario el cálculo de varianzas, ni rendimientos esperados ni nada de lo usado hasta este momento. Por tanto, este nuevo modelo o planteamiento para el análisis de carteras es lo que se conoce formalmente como el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Éste, es un modelo de valoración¹ de activos financieros que nos permitirá conocer la rentabilidad que debemos exigir a nuestra inversión en función de su riesgo, las correlaciones entre el mercado M y los activos y el riesgo y el rendimiento del mercado según el comportamiento de cada activo.

3.2. La *Capital Market Line* (CML)

Recordando las fórmulas para el rendimiento esperado y la varianza de la cartera de inversión con un activo libre de riesgo y que ahora hemos definido a nuestro fondo único eficiente A_1 por M tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= p_0 \bar{R}_0 + (1 - p_0) \bar{R}_1 = p_0 \bar{R}_0 + (1 - p_0) \bar{R}_M \\ y \quad \sigma^2 &= (1 - p_0)^2 \sigma_1^2 = (1 - p_0)^2 \sigma_M^2. \end{aligned}$$

Sea (σ_M, \bar{R}_M) la cartera correspondiente a M , entonces todas las carteras óptimas (σ, \bar{R}) escogidas por los inversores racionales se encuentran en la línea dada por la siguiente expresión:

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \frac{\bar{R}_M - \bar{R}_0}{\sigma_M} \sigma. \quad (3.2.1)$$

Esta expresión sale de reescribir estas dos fórmulas de la siguiente forma

$$\bar{R} = p_0 \bar{R}_0 + (1 - p_0) \bar{R}_M = (1 - p_0)(\bar{R}_M - \bar{R}_0) + \bar{R}_0,$$

¹Sigman en su trabajo sobre el modelo CAPM [10] nos explica que este modelo nos da una fórmula para poder valorar los activos de ahí que el modelo lleve *pricing* en su nombre.

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_M^2} = (1 - p_0)^2 \implies \frac{\sigma}{\sigma_M} = 1 - p_0$$

y sustituyendo obtenemos (3.2.1). En la sección anterior del trabajo hemos visto que, por el *one fund theorem*, la CAL la obteníamos con la expresión que nos maximizaba la pendiente de la nueva frontera eficiente que ahora acabamos de definir con la expresión (3.2.1). Sin embargo, tal y como acabamos de introducir, el modelo CAPM prescinde de todos los métodos de optimización y nuestra nueva frontera eficiente es la definida por esta expresión (3.2.1) que son las carteras eficientes de todos los inversores. De esta forma, a esta nueva línea, el modelo CAPM, la denomina como la línea del mercado de capitales (*capital market line*), en adelante CML. Así pues, en equilibrio, todos los inversores escogerán un punto (cartera) de esta línea.

Analizando un poco la CML, Sharpe [9] nos hace hincapié en que existe una relación lineal entre el riesgo y el rendimiento esperado de las carteras eficientes y nos define el precio del riesgo (*price of risk*) como:

$$\frac{\bar{R}_M - \bar{R}_0}{\sigma_M}$$

que representan valores no fijos debido a, tal y como hemos mencionado, los cambios en la oferta y la demanda pero sí que muestran la variación del rendimiento esperado por cada variación unitaria de la desviación estándar en un periodo de tiempo determinado.

3.3. La fórmula del modelo CAPM

Consideremos ahora A como un activo cualquiera de riesgo que visto como una cartera propia es representado por el par (σ_A, \bar{R}_A) y que no se encuentra sobre la CML, por lo que no es una cartera óptima². Si, por el *two fund theorem*, definimos nuestra cartera como la combinación de este activo A y la cartera de mercado M , queremos saber cómo variará nuestra frontera eficiente. La idea de plantear este supuesto es la de tratar de averiguar cómo podemos medir la relación entre el riesgo de los activos con el rendimiento de la cartera, si es que la hay.

A partir de esta nueva cartera, que denotamos por $C_{capm} = (\sigma, \bar{R})$, definimos p_A como el porcentaje de la inversión en el activo A y p_M el porcentaje en la cartera de mercado cumpliendo, por definición, que $p_A + p_M = 1$. Así pues, por las fórmulas y la notación definidas en el apartado anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= p_A \bar{R}_A + p_M \bar{R}_M \\ y \quad \sigma^2 &= p_A^2 \sigma_A^2 + 2p_A p_M \sigma_{AM} + p_M^2 \sigma_M^2. \end{aligned}$$

Con esto, sabemos que la cartera C_{capm} se encontrará en una nueva curva entre la cartera A y la de mercado M . Tal y como explica Sharpe en su libro [9], será el valor de la covarianza, σ_{AM} , la que describa la forma de esta curva y los valores de p_A y p_M los que marquen la posición exacta de esta nueva cartera C_{capm} en esta curva. Por consiguiente, será la correlación entre activo y mercado la que nos defina el riesgo asociado del activo con respecto al mercado y no la varianza de cada uno de los activos como hasta el momento.

²Hecho que argumenta Sharpe en su libro [9] para ejemplificar que la inversión en tan solo un activo financiero no es eficiente.

Con esta idea, para poder calcular esta nueva medida de riesgo que será la de mercado, definiremos un nuevo valor que nos determinará el riesgo de cualquier activo respecto al mercado. Para ello, impondremos que la curva que hemos definido entre A y M sea tangente a la CML. En otras palabras, impondremos que en el punto M de la CML, cuando $p_A = 0$ y $p_M = 1$, el precio del riesgo sea igual a la fórmula dada por el siguiente teorema que nos enuncia y demuestra Sigman en sus apuntes [10] adaptado a la notación usada hasta este momento.

Teorema 3.3.1 (La fórmula del modelo CAPM). *Para cualquier activo A ,*

$$\bar{R}_A - \bar{R}_0 = \beta_A(\bar{R}_M - \bar{R}_0),$$

donde

$$\beta_A = \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_M^2}$$

es la denominada **beta** del activo A . Este valor de la beta nos permite medir el riesgo de los activos individuales, vistos como carteras y diferente a la varianza (σ_A^2), que mide la parte del riesgo no diversificable.

En general, para cualquier cartera $C = (p_1, \dots, p_n)$ de n activos de riesgo representada por el par (σ, \bar{R}) , su beta (β_C) puede ser calculada como la media ponderada de las betas de cada activo de forma individual tal que:

$$\bar{R} - \bar{R}_0 = \beta_C(\bar{R}_M - \bar{R}_0),$$

donde

$$\beta_C = \frac{\sigma_{CM}}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^n p_i \beta_i.$$

Demostración fórmula CAPM. Sea C_{capm} la cartera formada por el activo A y la cartera de mercado M con $(p_A, p_M) = (\alpha, 1 - \alpha)$, con $\alpha \in [0, 1]$. La tasa de retorno es por consiguiente $\bar{R}(\alpha) = \alpha\bar{R}_A + (1 - \alpha)\bar{R}_M$. Asumimos que el activo A , como ya hemos dicho, no es eficiente por lo que no se encuentra en la frontera eficiente pero sí en la región de carteras factibles. De este modo, cuando α varía esta cartera dibuja una curva en la región factible (σ, \bar{R}) , $\alpha \rightarrow (\sigma(\alpha), \bar{R}(\alpha))$ parametrizada por α donde:

$$\bar{R}(\alpha) = \alpha\bar{R}_A + (1 - \alpha)\bar{R}_M = \alpha(\bar{R}_A - \bar{R}_M) + \bar{R}_M \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \sqrt{\alpha^2\sigma_A^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{AM} + (1 - \alpha)^2\sigma_M^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{AM}) + 2\alpha(\sigma_{AM} - \sigma_M^2) + \sigma_M^2}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Cuando $\alpha = 0$, $(\sigma(\alpha), \bar{R}(\alpha)) = (\sigma_M, \bar{R}_M)$ y cuando $\alpha = 1$, $(\sigma(\alpha), \bar{R}(\alpha)) = (\sigma_A, \bar{R}_A)$. De este modo, la curva toca la CML en el punto de la cartera de mercado (σ_M, \bar{R}_M) y se encuentra fuera de la CML pero en el conjunto de puntos factibles donde incluso toca la cartera (σ_A, \bar{R}_A) . Podemos concluir que la curva es tangente a la CAL en el punto (σ_M, \bar{R}_M) y por consiguiente cuando $\alpha = 0$, la derivada de la curva

$$\frac{\partial \bar{R}(\alpha)}{\partial \sigma(\alpha)}_{\alpha=0}$$

es idéntica a la pendiente de la CAL en el punto M . La pendiente de la línea es dada por la fórmula del precio del riesgo. Así pues, se concluye que, para $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial \bar{R}(\alpha)}{\partial \sigma(\alpha)}_{\alpha=0} = \frac{\bar{R}_M - \bar{R}_0}{\sigma_M}.$$

Sabiendo que podemos reescribir esta derivada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{R}(\alpha)}{\partial \sigma(\alpha)} = \frac{\frac{\partial \bar{R}(\alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma(\alpha)}{\partial \alpha}} \quad (3.3.3)$$

entonces, derivando las fórmulas (3.3.1) y (3.3.2) y evaluando en $\alpha = 0$, obtenemos:

$$\frac{\frac{\partial \bar{R}(\alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma(\alpha)}{\partial \alpha}} = \frac{\bar{R}_A - \bar{R}_M}{(\sigma_{AM} - \sigma_M^2)/\sigma_M}.$$

Ahora, por la igualdad descrita en (3.3.3) vemos que tenemos:

$$\frac{\bar{R}_A - \bar{R}_M}{(\sigma_{AM} - \sigma_M^2)/\sigma_M} = \frac{\bar{R}_M - \bar{R}_0}{\sigma_M}. \quad (3.3.4)$$

Resolviendo para el valor de \bar{R}_A obtenemos la fórmula del modelo de CAPM para el activo A como $\bar{R}_A - \bar{R}_0 = \beta_A(\bar{R}_M - \bar{R}_0)$ tal y como queríamos probar. Para el caso general, siendo A_i cada uno de los activos de riesgo para $i \in \{1, \dots, n\}$ vemos que:

$$\begin{aligned} \bar{R} - \bar{R}_0 &= -\bar{R}_0 + \sum_{i=1}^n p_i \bar{R}_{A_i} = \sum_{i=1}^n p_i (\bar{R}_{A_i} - \bar{R}_0) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \beta_i (\bar{R}_M - \bar{R}_0) = (\bar{R}_M - \bar{R}_0) \sum_{i=1}^n p_i \beta_i. \end{aligned}$$

□

Como ya se ha explicado anteriormente y en la demostración recién vista, definimos esta fórmula en el punto tangente de esta curva parametrizada que une los puntos A y M respecto de la CML. Esto se debe, tal y como explica Sharpe en su libro [9], al hecho de que hemos definido la CML como la frontera eficiente de nuestro modelo por lo que describe el conjunto de todas las carteras óptimas. Entonces, si esta curva no es tangente a la CML, es decir que $p_M \neq 1$, obtendremos una cartera por encima de la CML y de esta forma una cartera que para el mismo nivel de varianza tenga mayor rendimiento y por tanto más eficiente y esto no puede ser por la definición de la CML. Resumiendo, si no imponemos la tangencia en el punto en el que se sitúa la cartera M , rompemos el equilibrio que define el modelo CAPM. En cambio, si lo imponemos, el *trade-off* entre el rendimiento esperado y el riesgo de ligeros cambios en el porcentaje de inversión en el activo A es igual al *trade-off* en el mercado de capitales visto como un fondo único. De esta forma, esto implica que la pendiente de la curva dada por la unión de A con M es igual que el precio del riesgo de las carteras eficientes, cosa que se define formalmente, tal y como hemos visto, en la fórmula del modelo CAPM.

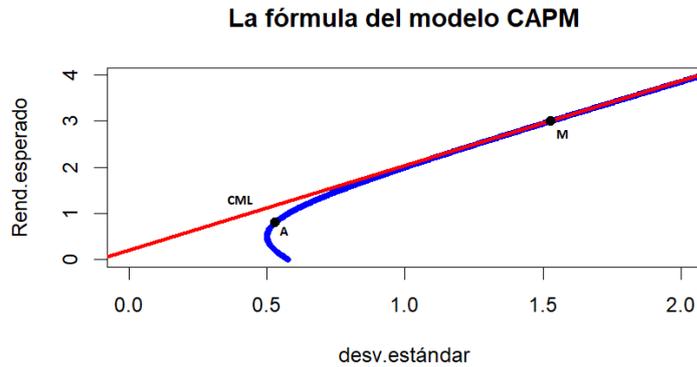


Figura 3.1: La fórmula del modelo CAPM.

3.4. El riesgo sistemático del mercado y la *Security Market Line* (SML)

En la fórmula del modelo CAPM hemos definido las β_A como los valores que miden el riesgo no diversificable de cada activo A como cartera. A este riesgo no diversificable se le conoce por riesgo sistemático del mercado y es definido como la parte del riesgo correlacionado con el mercado que no se puede reducir con la diversificación de los activos que conforman la cartera de activos de riesgo. De esta forma, el modelo CAPM nos permite calcular el riesgo de mercado en función de cuánto estén correlacionados los activos y el propio mercado. Por tanto, definimos los β_A como el riesgo del mercado en relación al riesgo del activo A o riesgo sistemático.

Teniendo clara esta definición, estudiamos los casos extremos. Si $\beta_A = 0$, el activo A y el mercado M están incorrelacionados, por lo que este activo no tiene ningún tipo de incidencia en la valoración del riesgo del mercado, como sería el caso del activo libre de riesgo. Si, por el contrario, $\beta_A > 0$ entonces el riesgo del mercado depende de cómo se comporte el activo A , siendo $\beta_A = 1$ cuando el mercado es exactamente el activo. De esta forma, los activos que tienen un valor de beta mayor son aquellos que están más relacionados con el mercado y su comportamiento tiene una incidencia mayor sobre el comportamiento y el riesgo del mercado. En conclusión, la beta es una medida de sensibilidad del rendimiento de un activo al rendimiento del mercado.

Si ahora tomamos la igualdad descrita en (3.3.4) y la reescribimos de la siguiente forma:

$$\bar{R}_A = \bar{R}_0 + \sigma_{AM} \left(\frac{\bar{R}_M - \bar{R}_0}{\sigma_M^2} \right)$$

obtendremos la ecuación que nos da exactamente la relación que se establece entre la rentabilidad del activo y la covarianza de éste con el mercado. Utilizando la definición de β_A obtenemos finalmente:

$$\bar{R}_A = \bar{R}_0 + \beta_A(\bar{R}_M - \bar{R}_0).$$

Por tanto, si definimos en el plano $\beta - \bar{R}$ todo el conjunto de carteras (los activos) en equilibrio del modelo CAPM, éstas se sitúan en la recta descrita por esta ecuación que es la conocida como *security market line*, en adelante SML.

Pero, si nuestro activo financiero no se encuentra sobre esta recta, entonces pueden

sucedan dos cosas. La primera, puede ser que éste esté sobrevalorado por lo que el rendimiento que nosotros esperamos de él sea superior al que realmente tenga. En este caso, se encontrará por debajo de la SML. La segunda, que pase todo lo contrario y que esté infravalorado y el rendimiento esperado sea menor al real y entonces lo encontraremos por encima de la SML.

Así pues, con todo esto, hemos visto que el modelo CAPM nos permite tener una idea de cómo valorar el riesgo del mercado en función de la rentabilidad que nosotros esperemos obtener de la inversión en un activo de riesgo a partir de una cartera conformada por un activo libre de riesgo y la de n activos de riesgo vista como la cartera de mercado de referencia. Todo esto lo hace asignando la inversión inicial a cada activo en función del valor del capital y del propio activo financiero y no mediante métodos de optimización como los vistos en el modelo de Markowitz. Por tanto, este modelo nos da una alternativa real de estudio de la rentabilidad de inversiones en carteras con un activo libre de riesgo de referencia y activos de riesgo a la planteada por Markowitz que es muy interesante a tener en cuenta ya que no estudia el riesgo de la cartera en sí si no que evalúa la cartera en función del riesgo de mercado.

Observación 3.4.1. Como curiosidad del modelo CAPM, al precio del riesgo que hemos definido durante todo este punto dado por la ecuación

$$\frac{\bar{R}_M - \bar{R}_0}{\sigma_M}$$

se le suele conocer como el ratio de Sharpe (*Sharpe's ratio*) porque fue introducido y desarrollado por William Sharpe para conocer el rendimiento de una inversión comparado con el riesgo ajustado del mercado y de la propia inversión.

Capítulo 4

El modelo de Markowitz a partir de un análisis dinámico

Una vez ya hemos visto y definido el modelo de Markowitz a partir de un análisis estático ahora vamos a intentar estudiarlo desde un punto de vista dinámico. Para ello, vamos a plantear un modelo dinámico¹, es decir, vamos a volver a solucionar el problema de Markowitz con una cartera de n activos de riesgo (que es estático) pero considerando que la media \bar{r} y la varianza σ^2 son variables deterministas pero que dependen de una nueva variable que es el tiempo t y posteriormente lo haremos para la cartera con un activo libre de riesgo. De esta forma, vamos a definir t en un horizonte temporal finito tal que $t \in [0, T]$. Así pues, mediante este nuevo supuesto vamos a querer ver cómo evoluciona el conjunto factible de carteras de inversión y la frontera eficiente respecto al tiempo.

Para poder hacerlo, definimos los vectores μ , δ , c y k de n dimensiones donde μ_j , δ_j , c_j y k_j denotan las constantes no negativas $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ con las cuales definimos las siguientes evoluciones:

$$\begin{aligned}\bar{r}_j &= \mu_j t + c_j \\ \sigma_j^2 &= \delta_j t + k_j.\end{aligned}$$

Estas constantes μ_j y δ_j son la tendencia de la media y la varianza, respectivamente.

Observación 4.0.1. Estas dos evoluciones se podrían haber definido de diferente forma pero esta es la que en este trabajo se va a plantear para poder definir la evolución temporal de las medias y de las varianzas.

Con estas evoluciones definidas, reformulamos la media y la varianza del modelo de Markowitz de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \sum_{i=1}^n p_i (\mu_i t + c_i) \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^n p_i^2 (\delta_i t + k_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j \sigma_{ij}.\end{aligned}$$

Ahora, también han cambiado las expresiones de las covarianzas, si definimos dos nuevas constantes $\omega_{ij} > 0$ y $\zeta_{ij} > 0$ que dependen tanto de i como de j para $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,

¹Decimos que un modelo es dinámico si éste evoluciona con el tiempo.

entonces la covarianza la escribiremos como

$$\sigma_{ij} = \omega_{ij}t + \zeta_{ij}.$$

De mismo modo, la matriz de varianzas y covarianzas también se verá afectada por estos cambios pero vamos a seguir utilizando la notación tal que τ_{ij} denotan los coeficientes de la matriz inversa de covarianzas Σ^{-1} pese a que los valores ahora sean distintos. Así pues, con todo esto, vamos a ver cómo cambia el cálculo de la C_{opt} única para un \bar{R} determinado con estas evoluciones temporales y cómo se ve afectada la frontera eficiente.

Si reescribimos las fórmulas (2.4.5) y (2.4.6) vistas en los primeros apartados del trabajo y consideramos las evoluciones temporales recién planteadas tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k(\mu_k t + c_k) &= \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj}(\mu_j t + c_j)(\mu_k t + c_k) + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj}(\mu_k t + c_k) \\ \sum_{k=1}^n p_k &= \alpha \sum_{k=1}^n \tau_{kj}(\mu_j t + c_j) + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj}. \end{aligned}$$

Ahora, los nuevos valores de A , B , C se ven afectados por el cambio en la definición de los \bar{r}_i , σ_i y σ_{ij} y dependerán también del tiempo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj}(\mu_j t + c_j) \\ B &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj}(\mu_j t + c_j)(\mu_k t + c_k) \\ C &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{kj} \end{aligned}$$

donde C se definirá igual pero teniendo en cuenta que los coeficientes de τ_{kj} son diferentes y ahora dependen del tiempo como acabamos de mencionar en el anterior párrafo. La $D = BC - A^2$ la seguimos definiendo de igual manera pero como A , B y C han cambiado y ahora evolucionan respecto el tiempo, D también lo hará.

Así pues, con estos nuevos valores A , B , C y D el cálculo de α y β no varía pero sí sus valores y también lo harán los valores óptimos para $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ de las asignaciones que serán

$$p_k = \frac{\bar{R} \sum_{j=1}^n \tau_{kj}(C(\mu_j t + c_j) - A) + \sum_{j=1}^n \tau_{kj}(B - A(\mu_j t + c_j))}{D}.$$

Y la expresión (2.4.7) que habíamos definido ahora se mantendrá tan solo que la podremos escribir como

$$\sigma^2 = \alpha \sum_{i=1}^n p_i(\mu_i t + c_i) + \beta \sum_{i=1}^n p_i.$$

Además, la cartera de mínima varianza también se verá afectada por estas evoluciones temporales y aunque la seguiremos definiendo igual que lo habíamos hecho antes como depende de A y C , también dependerá del momento t en el que se estudie la cartera.

Si ahora consideramos el caso en que nuestra cartera está formada por los n activos de riesgo y un activo libre de riesgo, el rendimiento y el riesgo de la cartera también se verán afectados por la variable tiempo. Si redefinimos estos valores y, además, definimos la evolución temporal para el rendimiento del activo libre de riesgo

$$\bar{R}_0 = \varepsilon t + s$$

con $\varepsilon > 0$ y $s > 0$, entonces, plantearemos la media y la varianza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{rf} &= p_0(\varepsilon t + s) + (1 - p_0) \left(\sum_{i=1}^n q_i(\mu_i t + c_i) \right) \\ \sigma_{rf}^2 &= (1 - p_0)^2 \left(\alpha \sum_{i=1}^n q_i(\mu_i t + c_i) + \beta \sum_{i=1}^n q_i \right).\end{aligned}$$

Entonces, por las expresiones utilizadas en el apartado correspondiente del trabajo respecto a la cartera con un activo libre de riesgo, tendremos que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$,

$$p_k = \frac{p_0(\varepsilon t + s) + (1 - p_0) \left(\sum_{i=1}^n q_i(\mu_i t + c_i) \right) - (\varepsilon t + s)}{B - 2(\varepsilon t + s)A + (\varepsilon t + s)^2 C} \sum_{j=1}^n \tau_{kj}((\mu_j t + c_j) - (\varepsilon t + s)),$$

que $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^n p_k$, que el riesgo de la nueva cartera sea

$$\sigma_{rf}^2 = \frac{(p_0(\varepsilon t + s) + (1 - p_0) \left(\sum_{i=1}^n q_i(\mu_i t + c_i) \right) - (\varepsilon t + s))^2}{B - 2(\varepsilon t + s)A + (\varepsilon t + s)^2 C}$$

y que el rendimiento cumpla la ecuación

$$\bar{R} = (\varepsilon t + s) \pm \sigma \sqrt{B - 2(\varepsilon t + s)A + (\varepsilon t + s)^2 C}.$$

Con todo esto, lo que acabamos de ver es que el conjunto de todos los pares factibles de carteras de inversión óptimas que solucionan el problema de Markowitz cuando la media y la varianza dependen de una evolución temporal implican que las constantes A , B , C y D que habíamos usado tal y como hace Merton en su artículo [7] para resolver el problema de optimización sean distintas. Serán distintas porque ahora dependerán de una nueva variable a estudiar $t \in [0, T]$ por lo que dependerán de la tendencia de la media y de la varianza si $t > 0$ y de una constante arbitraria si $t = 0$. Por tanto, según el momento en que nosotros como inversores decidamos optimizar nuestra cartera, las asignaciones serán unas o serán otras por lo que introducimos en el trabajo un nuevo factor a tener en cuenta que será el momento en que nosotros queramos optimizar nuestra cartera. En otras palabras, ahora debemos prestar atención a los rendimientos que queramos de nuestra cartera, a la volatilidad o riesgo que éstos generen y al momento en que nosotros queramos optimizar esta cartera. De hecho, conforme dejemos pasar más tiempo, es decir, t vaya creciendo, tendremos valores de riesgo más elevados por el simple hecho de que tendremos que evaluar la incertidumbre que nos genera el comportamiento de la carteras y de los activos en momentos futuros.

Capítulo 5

Aplicación práctica en la optimización de carteras de inversión

Llegados a este punto, queremos plantear una aplicación práctica a la necesidad que puede tener un inversor para optimizar su cartera de inversión. Vamos a suponer que queremos formar una cartera de inversión con activos del IBEX-35¹ y queremos que ésta sea óptima. Para ello podríamos definir una cartera con los 35 activos que conforman el índice y mediante el modelo de Markowitz encontraríamos la cartera de mínima varianza y el porcentaje de inversión óptimo a invertir en cada uno de los 35 activos. Sin embargo, existe una técnica que nos va a permitir optimizar la selección de nuestra cartera para poder aplicar Markowitz y obtener el resultado más eficiente en términos de volatilidad posible. Esta técnica es conocida como **Análisis de componentes principales**, en adelante PCA (*Principal components analysis*). Para este punto del trabajo, vamos a utilizar las ideas, definiciones y propiedades definidas por Jolliffe en su libro (ver [4]).

5.1. Análisis de componentes principales

La PCA es una técnica estadística de análisis multivariante que nos permite reducir o simplificar un conjunto de datos que se explican mediante variables interrelacionadas en unos componentes en los cuales se retiene la máxima variación posible del conjunto de datos. Estos componentes que conoceremos como *Componentes principales* (en adelante, PC (*Principal components*)) estarán ordenados de mayor a menor varianza, no estarán correlacionados entre ellos y se definirán a partir de transformaciones lineales que ahora definiremos. Esta técnica se centra en el análisis de la varianza y las correlaciones de los datos, por tanto, será un método basado en la matriz de covarianzas o en la matriz de correlaciones. La de covarianzas es la matriz $[\Sigma_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ que hemos definido en el trabajo con coeficientes σ_{ij} mientras que la de correlaciones es la que sus coeficientes se denotan por el coeficiente de correlación ρ_{ij} y se definen como $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

¹La página web de BME (Bolsas y Mercados Españoles) [1] define el IBEX 35 como el índice bursátil de referencia en el mercado bursátil español, compuesto por las 35 empresas más líquidas y de mayor capitalización del mercado español. El índice refleja el comportamiento de las acciones de estas compañías y es un indicador clave para evaluar la salud económica y financiera de España.

Así pues, para la optimización de carteras, la PCA nos permitirá obtener distintas posibilidades de carteras vistas como PCs en el que cada una de estas sea una combinación lineal de las variables originales, es decir, como combinación lineal de los diferentes 35 activos del índice. Además, la cartera como primer componente principal nos informará del máximo riesgo que tiene todo el conjunto del índice pero simplificado en una combinación lineal de acciones de éste. Es por este motivo que, gracias a la PCA, el inversor podrá seleccionar la cartera conformada por la combinación lineal de activos del IBEX-35 más diversificada para poder, posteriormente, optimizarla mediante el modelo de Markowitz.

5.1.1. Definición de los componentes principales (PC)

Sea $X = (X_1, \dots, X_p)$ un vector de p variables aleatorias, $\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2$ sus varianzas y $Cov(X_i, X_j)$ las covarianzas para $\forall i \neq j$. La idea está en estudiar algunas variables derivadas de éstas que sean muchas menos que p y que contengan la suficiente información sobre su variabilidad que nos daría el estudio de las p varianzas y las $\frac{p(p-1)}{2}$ covarianzas. Para ello, Jolliffe en su libro [4] nos enumera los siguientes pasos a seguir: En primer lugar, vamos a definir una función lineal ($\alpha_1^T X$) de la forma

$$\alpha_1^T X = \alpha_{11}X_1 + \dots + \alpha_{1p}X_p = \sum_{j=1}^p \alpha_{1j}X_j$$

tal que tenga varianza máxima y donde α_1^T denota el vector de p constantes $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1p}$ transpuesto.

Una vez definida esta primera función lineal, vamos a buscar otra ($\alpha_2^T X$) tal que no esté correlacionada con la primera y que también tenga varianza máxima.

Vamos haciendo este proceso tal que encontremos una función lineal ($\alpha_k^T X$) para un $k < p$ tal que no esté correlacionada con las $k - 1$ anteriores y que tenga varianza máxima.

De esta forma, todos estos $\alpha_1^T X, \dots, \alpha_k^T X$ son los componentes principales que, por definición, son combinaciones lineales de las variables originales.

Observación 5.1.1. Pueden haber tantos PC como p variables aleatorias pero, tal y como hemos comentado, la idea de la técnica es encontrar k PCs con $k \ll p$ que nos informen de la varianza del conjunto total de variables.

5.1.2. Cómo encontrar los PC

Sea Σ la matriz de covarianzas, la k -ésima PC viene dada por $z_k = \alpha_k^T X$ para $k \in \{1, \dots, n\}$ donde α_k es un vector propio² de Σ correspondiente al k -ésimo valor propio más grande de Σ que denotamos por λ_k . Entonces, Jolliffe [4] nos comenta los siguientes pasos para obtener estos z_k :

Consideremos $\alpha_1^T X$ tal que α_1 maximiza la varianza, es decir, $Var(\alpha_1^T X) = \alpha_1^T \Sigma \alpha_1$. Para maximizar este valor vamos a normalizar α_1 , por tanto, $\alpha_1^T \alpha_1 = 1$. Con todo esto, vamos a tener que maximizar $\alpha_1^T \Sigma \alpha_1$ sujeto a $\alpha_1^T \alpha_1 = 1$. Para ello, aplicamos multiplicadores de Lagrange de forma que sea λ un valor cualquiera entonces tenemos el lagrangiano $L(\alpha_1, \lambda) = \alpha_1^T \Sigma \alpha_1 - \lambda(\alpha_1^T \alpha_1 - 1)$. Ahora, derivando respecto de α_1 e igualando a 0

²Se define un vector propio como el vector v tal que cumple que $Mv = \lambda v$ o de igual forma que $(M - \lambda I)v = 0$, donde M es una matriz que define una aplicación lineal, I es la matriz identidad de igual dimensiones que A y λ es el valor propio asociado a este vector propio.

obtenemos que

$$\frac{\partial L(\alpha_1, \lambda)}{\partial \alpha_1} = \Sigma \alpha_1 - \lambda \alpha_1 = 0 \implies (\Sigma - \lambda I) \alpha_1 = 0$$

donde I es la matriz identidad cuadrada de dimensiones $p \times p$. Así pues, λ es el valor propio de Σ y α_1 es el vector propio asociado a λ . Entonces, como que $Var(\alpha_1^T X) = \alpha_1^T \Sigma \alpha_1$, para saber cuál de los p vectores propios maximiza esta expresión vemos que la cantidad a maximizar será

$$\alpha_1^T \Sigma \alpha_1 = \alpha_1^T \lambda \alpha_1 = \lambda \alpha_1^T \alpha_1 = \lambda$$

y λ tiene que ser lo más grande posible. Así pues, α_1 es el vector propio del valor propio más grande de Σ y $Var(\alpha_1^T X) = \alpha_1^T \Sigma \alpha_1 = \lambda_1$ es el valor propio más grande.

Para $k = 2$, Jolliffe [4] prueba este caso de la siguiente forma:

El segundo PC, $\alpha_2^T X$, maximiza $\alpha_2^T \Sigma \alpha_2$ sujeta al hecho que debe estar incorrelacionado con $\alpha_1^T X$ o de forma equivalente a $Cov(\alpha_1^T X, \alpha_2^T X) = 0$. Pero, $Cov(\alpha_1^T X, \alpha_2^T X) = \alpha_1^T \Sigma \alpha_2 = \alpha_2^T \Sigma \alpha_1 = \alpha_2^T \lambda_1 \alpha_1^T = \alpha_1 \alpha_2^T \alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1^T \alpha_2$. De esta forma, cualquiera de las ecuaciones $\alpha_1^T \Sigma \alpha_2 = 0$, $\alpha_2^T \Sigma \alpha_1 = 0$, $\alpha_1^T \alpha_2 = 0$ o $\alpha_2^T \alpha_1 = 0$ pueden ser utilizadas para especificar la incorrelación entre ambos PC. Cogiendo, de forma arbitraria, la última de éstas y utilizando de nuevo una restricción de normalización, la cantidad a maximizar es

$$\alpha_2^T \Sigma \alpha_2 - \lambda(\alpha_2^T \alpha_2 - 1) - \phi \alpha_2^T \alpha_1$$

donde λ y ϕ son multiplicadores de Lagrange. Derivando respecto de α_2 obtenemos que $\Sigma \alpha_2 - \lambda \alpha_2 - \phi \alpha_1 = 0$ y multiplicando esta ecuación por la izquierda por α_1^T obtenemos

$$\alpha_1^T \Sigma \alpha_2 - \lambda \alpha_1^T \alpha_2 - \phi \alpha_1^T \alpha_1 = 0$$

donde, como que los dos primeros términos son cero y $\alpha_1^T \alpha_1 = 1$, entonces $\phi = 0$. Por tanto, $\Sigma \alpha_2 - \lambda \alpha_2 = 0$ o equivalentemente $(\Sigma - \lambda I) \alpha_2 = 0$ y entonces λ es de nuevo un valor propio de Σ y α_2 es su correspondiente vector propio. De nuevo, $\lambda = \alpha_2^T \Sigma \alpha_2$, donde λ es lo más grande posible. Asumiendo que Σ no tiene dos valores propios iguales, $\lambda \neq \lambda_1$ ya que si no entonces tendríamos que $\alpha_2 = \alpha_1$ y no se cumpliría la restricción $\alpha_1^T \alpha_2 = 0$. Así pues, λ es el segundo valor propio más grande de Σ .

De forma general, tal y como desarrolla Jolliffe en su libro, tendremos que α_k es el vector propio del valor propio k -ésimo más grande λ_k y $Var(\alpha_k^T X) = \alpha_k^T \Sigma \alpha_k = \lambda_k$.

Observación 5.1.2. Si α_k es unitario $\implies \alpha_k^T \alpha_k = 1$ con el producto escalar $\implies Var(z_k) = \lambda_k$.

Observación 5.1.3. En todo el trabajo vamos a considerar que los valores propios son todos distintos y todos no nulos. En el caso en que alguno de ellos fuera 0 entonces el rango de Σ ya no sería máximo y definiría una relación lineal constante entre elementos de X y querría decir que alguna variable es redundante.

Por tanto, la PCA nos va a ordenar los PCs según valor de la varianza desde más valor a menos de forma que, en otras palabras, la PCA nos va a ordenar los PCs según el valor propio de cada uno de ellos y nosotros estudiaremos aquellos con el valor propio más grande ya que definirán de forma más precisa la variabilidad del conjunto inicial de variables.

5.1.3. Elección del subconjunto de los PC

Como queremos encontrar el menor valor de variables que nos definan la varianza del conjunto inicial sin perder información sobre ésta, tenemos que saber qué tan pequeño puede ser un valor que denotaremos a partir de ahora por m tal que $m \ll p$ y que nos reduzca la dimensión del problema.

Para ello, Jolliffe [4] presenta algunos métodos, pero en este trabajo vamos a considerar el uso del porcentaje acumulativo de la variación total. En otras palabras, m será el valor más pequeño de PCs para el cual el 70 % o 90 % de la variación total es excedida. Consideremos, entonces, que tenemos los siguientes PCs ordenados de mayor a menor varianza: z_1 con varianza λ_1 , z_2 con varianza λ_2, \dots, z_m con varianza λ_m, \dots, z_p con varianza λ_p y definimos que la suma de las p varianzas de los PC es igual a la suma de la varianza de de los p elementos del vector X , es decir, que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = \sum_{j=1}^p \sigma_{jj}$$

entonces, el porcentaje de variación para los m primeros PC, que Jolliffe [4] denota por t_m , es

$$t_m = 100 \frac{\sum_{k=1}^m \lambda_k}{\sum_{j=1}^p \sigma_{jj}} = 100 \frac{\sum_{k=1}^m \lambda_k}{\sum_{k=1}^p \lambda_k}.$$

Así pues, para un $t \in (70, 90) \%$ vamos a obtener el valor de m tal que $t_m > t$ y de esta forma nos aseguramos que los m primeros componentes principales contienen la mayor parte de la información de la variabilidad del vector X .

5.1.4. Propiedades de los PC

Hemos definido antes el k -ésimo PC como z_k , por tanto, vamos ahora a definir el vector de componentes principales z tal que $z = (z_1, \dots, z_p)$. Así pues, como $z_k = \alpha_k^T X$, entonces ahora tendremos que

$$z = A^T X$$

donde A es la matriz ortogonal que tiene en cada columna el vector propio α_k de Σ para $k = 1, \dots, p$. Como los α_k los hemos estandarizado y son ortogonales entonces los z_k están definidos por una transformación lineal ortonormal de X . Como tenemos esta transformación ortonormal entonces podemos escribir A a partir de la siguiente descomposición³:

$$\Sigma A = AD \implies \Sigma = ADA^T$$

donde D es la matriz diagonal que contiene los valores propios (λ_k) de Σ . La idea en este punto es poder definir tres propiedades que tiene esta transformación lineal de X para poder encontrar los vectores y valores propios de la matriz Σ a partir de esta transformación. Las propiedades que nos define Jolliffe [4] son las siguientes:

³Esta idea procede del teorema de existencia de los valores singulares siguiente de los apuntes de la Universidad de Granada [13].

Para toda matriz $A_{m \times n}(\mathbb{R})$, existen matrices U y V ortogonales de dimensión m y n respectivamente tal que $V^T A U = D$ es diagonal $m \times n$ con entradas d_1, \dots, d_p con $p = \min\{m, n\}$. Demostración en los apuntes de la Universidad de Granada, página 30 [13]. Además, si A es una matriz ortogonal, entonces es regular por lo que es invertible y se cumple que $A^T = A^{-1}$.

Proposición 5.1.4 (Propiedad 1). Para cualquier entero q , $1 \leq q \leq p$, consideremos la transformación lineal ortonormal

$$y = B^T X$$

donde y es un vector de q elementos y B^T es una $q \times p$ matriz, y sea $\Sigma_y = B^T \sigma B$ la matriz de varianzas y covarianzas para y . Entonces la traza⁴ de Σ_y , denotada como $\text{tr}(\Sigma_y)$, es máxima tomando $B = A_q$, donde A_q son las primeras q columnas de A .

Demostración. Ver Jolliffe (2002) propiedad 1 [4]. □

Proposición 5.1.5 (Propiedad 2). Consideremos de nuevo la transformación ortogonal

$$y = B^T X$$

con X , B , A y Σ_y están definidas como en la propiedad anterior. Entonces, la $\text{tr}(\Sigma_y)$ es mínima cuando $B = A_q^*$, donde A_q^* son las q últimas columnas de A .

Demostración. Ver Jolliffe (2002) propiedad 2 [4]. □

Proposición 5.1.6 (Propiedad 3: Descomposición espectral de Σ). $\Sigma = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^T + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^T + \dots + \lambda_p \alpha_p \alpha_p^T$.

Demostración. Ver Jolliffe (2002) propiedad 3 [4]. □

La primera propiedad nos permite explicar la varianza máxima de los datos con el mínimo número de componentes principales. La segunda nos expone el hecho de que los últimos PC, es decir los que explican ya muy poca varianza de los datos, pese a que parecen que carecen de importancia sí que tienen un papel significativo al poder explicar relaciones lineales casi constantes entre nuestras variables a estudiar. Por último, la tercera nos permite poder escribir la varianza de nuestros datos a partir del sumatorio del producto de los distintos valores propios y vectores propios de cada uno de los componentes principales a partir de la descomposición espectral.

5.1.5. Los PC definidos a partir de la matriz de correlaciones

Todo lo definido hasta el momento respecto a la PCA ha sido considerando el estudio de la matriz de covarianzas Σ , sin embargo, es más común considerar el uso de la matriz de correlaciones que hemos definido previamente. Esto es debido a que, como ahora las p varianzas serán unitarias puesto que están estandarizadas, nos es más fácil poder comparar y estudiar las correlaciones de las variables iniciales ya que, usando Σ , los PCs se ven afectados por las unidades en que están definidas los elementos de X y la matriz de correlaciones elimina estas unidades estandarizando estos elementos.

Con esta matriz, Jolliffe [4] define los PC a partir de la expresión

$$z = A^T X^*$$

donde ahora A es la matriz que contiene los vectores propios de la matriz de correlaciones en sus columnas y X^* es el vector aleatorio con las variables estandarizadas. Decimos

⁴Se define la traza de una matriz como la suma de los elementos de su diagonal principal.

que las variables están estandarizadas cuando se definen de la forma $X_j^* = \frac{X_j}{\sigma_j}$ donde σ_j denota la desviación estándar de las variables $j = 1, \dots, p$. Así pues, tendremos que plantear la PCA de la forma que lo hemos hecho hasta ahora pero teniendo en cuenta que utilizaremos esta nueva matriz para una información más precisa.

Observación 5.1.7. Las propiedades vistas en el punto anterior siguen siendo válidas para este caso.

Observación 5.1.8. Si los PCs encontrados de la matriz de correlaciones se expresan en términos de X mediante una transformación de X^* , entonces éstos son diferentes a los encontrados directamente de Σ , a excepción de circunstancias especiales. Este hecho es debido a que, como que los vectores propios son invariantes por transformaciones ortogonales, los PCs son invariantes por transformaciones ortogonales de X pero no en cualquier tipo de transformación. Así pues, puesto que la transformación de X a X^* no es ortogonal, entonces los PCs de la matriz de correlaciones y los de la matriz de covarianzas no nos dan la misma información. Es también por este hecho que utilizaremos la matriz de correlaciones en detrimento de Σ .

5.1.6. Aplicación a la optimización de carteras de inversión

Ahora, una vez definida la técnica PCA, vamos a plantear la manera de poder obtener diferentes carteras vistas como PCs del índice IBEX-35. Para ello, nos vamos a basar en las ideas presentadas en el trabajo redactado por George J. Feeney y Donald D. Hester [2].

Consideremos X el vector aleatorio formado por las 35 empresas que lo definen y X_j para $j = 1, \dots, 35$ la variable aleatoria definida por la tasa de retorno de las acciones de cada una de estas empresas. Así pues, con la notación usada durante todo el trabajo, tenemos que

$$X = (X_1, \dots, X_{35}) = (r_1, \dots, r_{35}).$$

Ahora, sea $t \in [0, T]$ la variable tiempo, donde $t = T$ es la última fecha de nuestros datos y $t = 0$ es la primera fecha, entonces, para cada t , r_{jt} es la tasa de retorno del activo j en el momento t . Como hemos dicho que vamos a utilizar la matriz de correlaciones, lo primero que tenemos que hacer es plantear nuestro vector X^* de variables estandarizadas. De esta forma, definimos

$$X^* = (X_1^*, \dots, X_{35}^*) = \left(\frac{r_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{r_{35}}{\sigma_{35}} \right)$$

y, además, como que todas las variables queremos que tengan una incidencia igual en el cálculo de las componentes de la PCA, en el trabajo de Feeney y Hester [2], también se considera que cada variable tenga a parte de varianza unitaria también media cero, por tanto, tenemos que

$$X_{jt}^* = \frac{r_{jt} - \bar{r}_j}{\sigma_j}, \quad \text{con } t \in [0, T] \quad \text{y } j = 1, \dots, 35$$

donde \bar{r}_j es la media de las tasas de retorno para todo t , es decir, $\bar{r}_j = \mathbb{E}[r_j]$. Con esta expresión, las variables, mediante una transformación lineal normal, han sido estandarizadas.

Ahora, construimos la matriz de correlaciones con diagonal principal con todo unos puesto que las variables se han estandarizado y las covarianzas $\sigma_{i,j}$ para $i \neq j \in \{1, \dots, 35\}$ definidas como $\sigma_{ij} = Cov(X_i^*, X_j^*)$. La denotamos por C y tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \implies C = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} & \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{1,35}}{\sigma_1\sigma_{35}} \\ \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_2\sigma_1} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_{2,35}}{\sigma_2\sigma_{35}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{35,1}}{\sigma_{35}\sigma_1} & \frac{\sigma_{35,2}}{\sigma_{35}\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{35}^2}{\sigma_{35}^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{1,35}}{\sigma_1\sigma_{35}} \\ \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \dots & \frac{\sigma_{2,35}}{\sigma_2\sigma_{35}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{35,1}}{\sigma_{35}\sigma_1} & \frac{\sigma_{35,2}}{\sigma_{35}\sigma_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como queremos encontrar los componentes principales, vamos a calcular los z_k para $k = 1, \dots, 35$ que definen el vector correspondiente a la expresión

$$z = A^T X^* \implies z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{35} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_{35}^* \end{pmatrix}$$

donde los α_k corresponden a los vectores propios de la matriz de correlaciones con $\alpha_k = (\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{35,k})$. Además, los valores propios asociados a estos vectores propios serán los λ_k tal que la $Var(z_k) = \lambda_k$ sea máxima y que los describiremos en la matriz diagonal D descrita por la transformación ortogonal siguiente:

$$\begin{aligned} D &= A^T C A \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,35} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,35} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{35,1} & \alpha_{35,2} & \dots & \alpha_{35,35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{1,35}}{\sigma_1\sigma_{35}} \\ \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \dots & \frac{\sigma_{2,35}}{\sigma_2\sigma_{35}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{35,1}}{\sigma_{35}\sigma_1} & \frac{\sigma_{35,2}}{\sigma_{35}\sigma_2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{35,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{35,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,35} & \alpha_{2,35} & \dots & \alpha_{35,35} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{35} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una vez tengamos esta descomposición hecha ya tendremos la información que queríamos, es decir, sabremos cuáles son los componentes principales (los vectores propios α_k) y cuáles son las varianzas asociadas a cada uno de estos componentes (los valores propios λ_k asociados a los α_k). De esta forma, procederemos a ordenar los λ_k de mayor a menor valor y nos quedaremos con los m componentes principales que nos expliquen, por ejemplo, un 80% la varianza del conjunto de datos originales.

Supongamos que tenemos que $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{35}$ entonces nos quedaremos con los m primeros componentes principales que serán las carteras que expliquen mejor la volatilidad del índice IBEX-35 a partir de la combinación lineal más eficiente de los activos de las empresas que lo conforman. Ejemplificado, tendremos lo siguiente:

$$PC_1 = z_1 \rightarrow Var(z_1) = \lambda_1 \leftarrow t_1 = 100 \frac{\lambda_1}{\sum_{k=1}^p \lambda_k} < 80\%$$

$$\begin{aligned}
PC_2 = z_2 &\rightarrow Var(z_2) = \lambda_2 \leftarrow t_2 = 100 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{k=1}^p \lambda_k} < 80 \% \\
&\vdots \\
PC_{m-1} = z_{m-1} &\rightarrow Var(z_{m-1}) = \lambda_{m-1} \leftarrow t_{m-1} = 100 \frac{\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^p \lambda_k} < 80 \% \\
PC_m = z_m &\rightarrow Var(z_m) = \lambda_m \leftarrow t_m = 100 \frac{\sum_{k=1}^m \lambda_k}{\sum_{k=1}^p \lambda_k} > 80 \% \\
&\vdots \\
PC_p = z_p &\rightarrow Var(z_p) = \lambda_p \leftarrow t_p = 100 \% > 80 \%.
\end{aligned}$$

5.2. Ejemplo de PCA del IBEX-35 y optimización por Markowitz

En este último apartado vamos a realizar una aplicación práctica de optimización de una cartera formada por activos de riesgo del IBEX-35. Para ello, primero llevaremos a cabo la técnica del PCA para definir diferentes carteras vistas como componentes principales a partir de combinaciones lineales de los activos de las empresas que definen el índice y, posteriormente, optimizaremos diferentes carteras para compararlas. Para todo este punto los datos del IBEX-35 han sido extraídos de la página web *Investing.com* [3] y hacen referencia a los precios de cierre diarios de las acciones de las 35 empresas del índice en un intervalo temporal que va del 27-01-2020 al 25-10-2024. Además, también se hace constar que las dos últimas empresas del IBEX se incorporaron al índice en fechas posteriores al 27-01-2020 por lo que en las fechas en las que no hay registro se ha considerado como valor un 0 puesto que o si no los datos eran escasos para extraer unos resultados acordes a la realidad pero no varían el análisis posterior.

5.2.1. Análisis de componentes principales del IBEX-35

Se han calculado las tasas de retorno de las acciones de las 35 empresas y, posteriormente, se han estandarizado restando la media y dividiendo entre la desviación estándar. De aquí, se ha pasado a calcular la matriz de covarianzas y la de correlaciones en Microsoft Excel. Con esta última matriz hemos escrito un pequeño programa en Rstudio (Figura 5.1) donde *data_activos_tfg* es el nombre del excel en el que está calculada la matriz de correlaciones para poder llevar a cabo el estudio de los componentes principales y poder obtener los siguientes datos respecto a varianza explicada por los 35 PCs (Figura 5.2):

```

data_activos_tfg #fichero de Excel que contiene la matriz de correlaciones.
M<-as.matrix(data_activos_tfg) #convertimos los datos en una matriz en Rstudio.
M #visualizamos la matriz.
vaps<-eigen(M) #esta función nos calcula los VAPS y VEPS de la matriz.
vaps$values #nos da los valores propios.
vaps$vectors #nos da los vectores propios.
pca<-princomp(M) #función que lleva a cabo PCA respecto de la matriz.
summary(pca) #nos indica la desv.estándar, la varianza y la varianza acumulada de cada PC.
pca$loadings #nos indica todos los PC.
pca$loadings[,1:6] #visualizamos tan solo los 6 primeros PC porque explican más del 80% de la varianza total.

```

Figura 5.1: Código en Rstudio para realizar la PCA.

Importance of components:

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5
Standard deviation	0.7384480	0.4191112	0.25478192	0.1893060	0.17514672
Proportion of Variance	0.4994636	0.1608876	0.05945675	0.0328241	0.02809752
Cumulative Proportion	0.4994636	0.6603512	0.71980797	0.7526321	0.78072959
	Comp.6	Comp.7	Comp.8	Comp.9	Comp.10
Standard deviation	0.16591519	0.15325035	0.14586439	0.14003728	0.13265808
Proportion of Variance	0.02521368	0.02151131	0.01948779	0.01796186	0.01611875
Cumulative Proportion	0.80594328	0.82745459	0.84694238	0.86490423	0.88102299
	Comp.11	Comp.12	Comp.13	Comp.14	
Standard deviation	0.12142217	0.11646613	0.10364516	0.101694162	
Proportion of Variance	0.01350392	0.01242405	0.00983925	0.009472313	
Cumulative Proportion	0.89452691	0.90695096	0.91679021	0.926262524	
	Comp.15	Comp.16	Comp.17	Comp.18	
Standard deviation	0.098805984	0.087151187	0.084763411	0.081478703	
Proportion of Variance	0.008941914	0.006956817	0.006580833	0.006080681	
Cumulative Proportion	0.935204438	0.942161255	0.948742087	0.954822768	
	Comp.19	Comp.20	Comp.21	Comp.22	
Standard deviation	0.079634925	0.075380959	0.071608984	0.066047694	
Proportion of Variance	0.005808596	0.005204599	0.004696767	0.003995575	
Cumulative Proportion	0.960631364	0.965835963	0.970532730	0.974528305	
	Comp.23	Comp.24	Comp.25	Comp.26	
Standard deviation	0.064478446	0.060813577	0.057567941	0.055740656	
Proportion of Variance	0.003807966	0.003387389	0.003035466	0.002845825	
Cumulative Proportion	0.978336271	0.981723661	0.984759127	0.987604951	
	Comp.27	Comp.28	Comp.29	Comp.30	
Standard deviation	0.058090752	0.048416661	0.046152506	0.041337910	
Proportion of Variance	0.002292651	0.002146563	0.001950908	0.001610933	
Cumulative Proportion	0.989897603	0.992044266	0.993995254	0.995606187	
	Comp.31	Comp.32	Comp.33	Comp.34	
Standard deviation	0.041037843	0.037594342	0.0323368911	0.0255728980	
Proportion of Variance	0.001542528	0.001294521	0.0009577684	0.0005989599	
Cumulative Proportion	0.997148715	0.998443236	0.9994010041	1.0000000000	
	Comp.35				
Standard deviation	0				
Proportion of Variance	0				
Cumulative Proportion	1				

Figura 5.2: Resultados de las varianzas tras realizar la PCA.

Además, en la Figura 5.2 podemos ver que con los 6 primeros PCs ya se explica más del 80 % de la varianza del conjunto de datos original.

Los primeros 6 PCs son los siguientes:

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5	Comp.6
ACS	0.1877685869	1.075785e-01	0.14880548	0.056380347	0.0462860597	0.207820956
ACERINOX	0.1998375405	6.671566e-05	0.12998456	-0.192510849	0.1657290875	0.245448942
BBVA	0.2732829676	-2.126542e-02	-0.08804282	-0.127969825	-0.0080326792	-0.049293250
BANKINTER	0.2803285051	-7.402977e-02	-0.18092575	-0.116973750	-0.0790499989	-0.091563961
ACCIONA	-0.0388986455	2.886614e-01	-0.09073158	-0.240870380	-0.1075909254	0.118165040
CAIXABANK	0.2833249184	-7.056984e-02	-0.24613124	-0.144444652	-0.0733111039	-0.033731425
ENIAGÁS	-0.0085951186	2.955264e-01	-0.25801250	0.205523039	0.0726405779	0.054190079
NATURGY	0.0204451100	2.954695e-01	-0.16767638	0.127358154	0.0755860346	-0.036433915
GRIFOLS	-0.0593282821	-7.634500e-04	0.04773718	-0.009915246	-0.1017690574	-0.464586014
FERROVIAL	0.1472050765	1.914675e-01	0.19608930	0.120007318	0.0345669423	0.075149292
REDEIA	-0.0921216454	3.583006e-01	-0.23054286	0.192086925	0.0181310344	-0.027165487
INDITEX	0.1587359055	1.196558e-01	0.18376519	0.117364909	0.0904209963	-0.003505693
REPSOL	0.2045204586	2.733170e-02	0.04441270	0.020435854	0.0940274187	0.311069791
IBERDROLA	-0.0253471844	3.389726e-01	-0.11095297	-0.118629821	0.0727213283	0.032144183
INDRA	0.1333870803	1.487542e-02	0.11644858	0.018621766	0.1624693796	0.002680585
MAPFRE	0.2149943699	6.008393e-02	-0.16347747	0.033157127	0.0142887002	-0.013069201
TELEFÓNICA	0.1381481333	1.170991e-01	-0.28414531	0.099852646	0.0583567388	-0.041403509
SACYR	0.1480824910	1.111473e-01	0.06728827	-0.023543669	0.0900551496	0.152463865
SABADELL	0.2948132546	-8.887231e-02	-0.21092558	-0.092923652	-0.0732005297	-0.108850299
SANTANDER	0.2847189141	-1.399280e-02	-0.11714468	-0.109638792	-0.0388058379	-0.024593203
COLONIAL	0.1182750980	1.611764e-01	0.27702695	0.1301115135	-0.2611920259	-0.064320449
IAG	0.2316782121	4.519936e-02	0.26412745	0.080544758	-0.1564373462	-0.034071797
ENDESA	-0.0184323112	3.488696e-01	-0.12072635	0.042148930	0.0723700451	0.007190611
AMADEUS	0.1809556554	7.843299e-02	0.24539146	0.028890493	-0.0680961008	-0.096471784
ROVI	-0.0412288488	-4.254997e-02	0.09898472	-0.190940923	0.5308413062	-0.207524599
SOLARIA	-0.1153549917	2.110600e-01	0.06372640	-0.403898284	-0.1160592618	0.194855865
FLUIDRA	-0.0005143328	6.028486e-02	0.20681735	-0.221568495	0.2245708331	-0.141332549
ARCELORMITTAL	0.2081000013	1.768463e-02	0.14682966	-0.175709083	0.1801694270	0.281303521
MERLIN	0.1328467834	1.136180e-01	0.21714621	0.136425063	-0.3126496857	-0.127818978
LOGISTA	0.0919611252	5.676431e-02	0.04540604	0.175235924	0.1397279219	-0.190260047
AENA	0.1758730070	1.532894e-01	0.17229268	0.174152338	0.0763083041	-0.104152478
CELLNEX	-0.1356543048	2.403192e-01	0.13733534	-0.075643423	0.1199572631	-0.13226161
UNICAJA	0.2385066447	-9.045909e-02	-0.17316203	-0.115200147	-0.0932807842	-0.153399323
ACCIONA ENERGÍA	-0.1403061443	1.510974e-01	0.02851741	-0.400239377	-0.4622933043	0.066063689
PUIG	-0.0642941330	-2.248804e-01	-0.05692820	0.340194816	-0.1295400126	0.446380311

Figura 5.3: Resultados de los 6 primeros PCs tras realizar la PCA.

Por tanto, si nos fijamos tan solo en el primer PC que se indica en la Figura 5.3 podemos extraer el siguiente análisis. Este componente define una posible cartera de inversión de las 35 posibles que explica casi el 50 % de la volatilidad total del índice en el que se quiere invertir, por lo descrito en la Figura 5.2. Entonces, para poder analizar esta posible cartera, en la Figura 5.3 se describe el peso que ha de tener cada acción de las 35 empresas para la inversión en este índice. Feeney y Hester [2] comentan dos datos interesantes respecto a estos valores que tenemos en la Figura 5.3 en negativo. El primero, explican que aquellos activos con precios mayores tienden a tener un peso mayor en la descripción del PC.

El segundo, hace referencia a los activos que, cito textualmente, *por varias razones son altamente erráticos durante el periodo también tendrán un peso elevado*. Respecto a este segundo hecho, entendemos un comportamiento errático de los activos como un valor de varianza elevado ya que son activos con un riesgo mayor. Podemos verlo a partir de la siguiente imagen de una hoja de Excel que muestra el valor del rendimiento y el riesgo de cada empresa en el periodo mencionado. En ella, Figura 5.4, podemos ver que, marcados en gris, están los rendimientos de las empresas que son negativos y que, a excepción de Colonial que justamente tiene una volatilidad elevada, coinciden con las que empresas que tienen valores negativos especificados en la Figura 5.3. Sin embargo, aunque estas dos observaciones que hacen Feeney y Hester [2] en su trabajo pueden ser orientativas para extraer resultados a interpretar en un posterior análisis de los PC, hay que buscar algún aspecto que cumplan las empresas para entender qué pasa exactamente en esta cartera.

	ACS	ACERINOX	BBVA	BANKINTER	ACCIONA	CAIXABANK	ENAGÁS	NATURGY	GRIFOLS	FERROVIAL	REDEIA	INDITEX
rendimiento medio	0,053%	0,019%	0,087%	0,071%	0,039%	0,085%	-0,035%	0,015%	-0,043%	0,038%	0,003%	0,065%
varianza	0,0005157	0,00040015	0,00060658	0,00053369	0,0004402	0,00052817	0,00023315	0,00030717	0,00092007	0,00029479	0,00018346	0,00034015
desv.est	2,271%	2,000%	2,463%	2,310%	2,098%	2,298%	1,527%	1,753%	3,033%	1,717%	1,354%	1,844%
	REPSOL	IBERDROLA	INDRA	MAPFRE	TELEFÓNICA	SACYR	SABADELL	SANTANDER	COLONIAL	IAG	ENDESA	AMADEUS
rendimiento medio	0,027%	0,044%	0,059%	0,022%	0,001%	0,041%	0,103%	0,055%	-0,035%	0,009%	-0,004%	0,019%
varianza	0,00052379	0,00021056	0,00047457	0,00032545	0,00034961	0,00043865	0,00099417	0,00056576	0,00046213	0,00114065	0,00024826	0,00051462
desv.est	2,289%	1,451%	2,178%	1,804%	1,870%	2,094%	3,153%	2,379%	2,150%	3,377%	1,576%	2,269%
	ROVI	SOLARIA	FLUIDRA	ARCELORMITMERLIN	LOGISTA	AENA	CELLNEX	UNICAJA	ACCIONA	PUIG		
rendimiento medio	0,113%	0,064%	0,089%	0,080%	0,006%	0,034%	0,039%	0,015%	0,046%	-0,026%	-0,198%	
varianza	0,00047244	0,00089699	0,00063484	0,00077623	0,0004131	0,00017992	0,00043218	0,00039211	0,00062114	0,00037509	0,00042535	
desv.est	2,174%	2,995%	2,520%	2,786%	2,032%	1,341%	2,079%	1,980%	2,492%	1,937%	2,062%	

Figura 5.4: Rendimiento medio, varianza y desviación estándar de las 35 empresas del IBEX-35.

5.2.2. Análisis del primer componente principal como cartera de inversión

Si nos fijamos en los datos del primer PC de la Figura 5.3 extraemos las siguientes conclusiones. Las empresas con mayor peso en este primer componente son del sector bancario. Es el caso de BBVA (0.27), Bankinter (0.28), Caixabank (0.28), Banco de Sabadell (0.29), Banco Santander (0.28) y Unicaja (0.24). Por el contrario, las empresas con peso en negativo en este componente son, casi todas, del sector energético. Es el caso de Acciona (-0.04), Enagás (-0.01), Redeia (-0.09), Iberdrola (-0.03), Endesa (-0.02), Solaria (-0.12), Acciona Energía (-0.14) y Naturgy pese a no tener un coeficiente negativo presenta un valor muy pequeño (0.02). Además, las dos empresas farmacéuticas del índice también tienen un valor negativo, véase Grifols (-0.06) y Rovi (-0.04). Aquí se ve cuál es uno de los motivos para hacer el análisis de componentes principales y es que, teniendo en cuenta el tipo de empresas y sus valores positivos o negativos, podemos sugerir que en esta posible cartera de inversión que es la que explica la mitad del riesgo del IBEX-35, una mayor inversión en las empresas del sector de la banca tiene una mayor incidencia en el rendimiento y el riesgo de la cartera que la inversión en empresas del sector energético o farmacéutico. Así pues, la PCA nos ha permitido construir una cartera en la que ya sabemos cuáles son los activos más importantes para poder construir carteras más diversificadas o que se ajusten mejor al propio inversor.

5.2.3. Optimización mediante el modelo de Markowitz

Una vez hecho el análisis de componentes principales ya podemos construir una cartera de inversión para, ahora sí, optimizarlo mediante el modelo de Markowitz expuesto en este trabajo. En este caso, nuestra cartera a seleccionar la conformarán una serie de activos, todos de riesgo, que pertenecen al IBEX-35. Para ver la utilidad de la información que nos ha proporcionado la PCA, vamos a construir 3 carteras diferentes para poder hacer un análisis comparativo entre ellas. Para cada una de ellas encontraremos la cartera de mínima varianza optimizando las carteras usando el modelo de Markowitz y el conjunto de carteras factibles mediante la función *Solver* de Microsoft Excel.

La primera cartera será para los 6 activos financieros de las empresas bancarias del índice mencionadas en el punto anterior, es decir, BBVA, Bankinter, Caixabank, Banco de Sabadell, Banco Santander y Unicaja. Siguiendo con la notación expuesta en las primeras páginas del trabajo respecto al rendimiento y riesgo de la cartera $\bar{R} = p^T \bar{r}$ $\sigma^2 = p^T \Sigma p$ calculamos la cartera de mínima varianza imponiendo tan solo que $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$ de forma que minimicemos la varianza. Usando la matriz de covarianzas para estos 6 activos financieros

	BBVA	BANKINTER	CAIXABANK	SABADELL	SANTANDER	UNICAJA
BBVA	0,00060608	0,00038764	0,00040342	0,00054986	0,00048989	0,00036423
BANKINTER	0,00038764	0,00053326	0,00041436	0,00052756	0,00039114	0,00035272
CAIXABANK	0,00040342	0,00041436	0,00052774	0,00055548	0,00040776	0,00037146
SABADELL	0,00054986	0,00052756	0,00055548	0,00099335	0,00055296	0,00051791
SANTANDER	0,00048989	0,00039114	0,00040776	0,00055296	0,0005653	0,00036803
UNICAJA	0,00036423	0,00035272	0,00037146	0,00051791	0,00036803	0,00062063

Figura 5.5: Matriz de Varianzas y Covarianzas de los 6 activos bancarios.

obtenemos la cartera de mínima varianza tal y como se indica en la siguiente figura.

	BBVA	BANKINTER	CAIXABANK	SABADELL	SANTANDER	UNICAJA
rendimiento esperado	0,087%	0,071%	0,085%	0,103%	0,055%	0,046%
varianza	0,000606582	0,00053369	0,00052817	0,00099417	0,00056576	0,00062114
dev. estándar	2,463%	2,310%	2,298%	3,153%	2,379%	2,492%
porcentaje inversión	15,901%	33,318%	32,697%	-33,050%	21,401%	29,733%
porcentaje inversión total	100,000%					
CARTERA DE MIN.VARIANZA						
rendimiento de la cartera	0,057%					
riesgo de la cartera	1,97%					
varianza de la cartera	0,000389035					

Figura 5.6: Cartera de mínima varianza de los 6 activos bancarios.

Además, con Excel calculamos y visualizamos las carteras factibles:

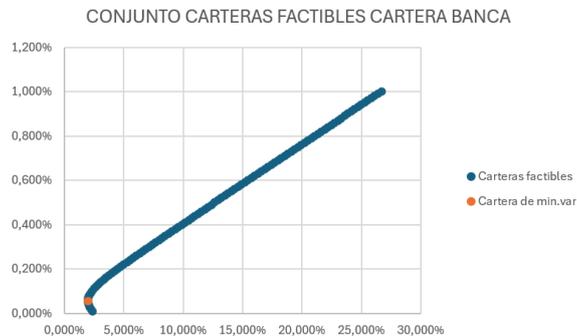


Figura 5.7: Carteras factibles y frontera eficiente de los 6 activos bancarios.

Éstas, cumplen el modelo de Markowitz y la frontera eficiente que empieza con la cartera de mínima varianza (denotada en otro color).

La segunda cartera será la conformada por las empresas del sector energético y farmacéutico siguientes: Acciona, Enagás, Naturgy, Grifols, Redeia, Iberdrola, Endesa, Rovi, Solaria y Acciona Energía. De forma análoga obtenemos la matriz de covarianzas (Figura 5.8), calculamos la cartera de mínima varianza (Figura 5.9) y la curva que forman las carteras factibles y la frontera eficiente (Figura 5.10).

	ACCIONA	ENAGÁS	NATURGY	GRIFOLS	REDEIA	IBERDROLA	ENDESA	ROVI	SOLARIA	ACCIONA ENERGÍA
ACCIONA	0,00043984	0,00016276	0,0001775	0,00013137	0,00013848	0,00017518	0,00016457	8,818E-05	0,00032606	0,000158531
ENAGÁS	0,00016276	0,00023296	0,00015332	8,7755E-05	0,00013274	0,00010895	0,0001303	4,9208E-05	0,00013183	5,32042E-05
NATURGY	0,0001775	0,00015332	0,00030691	0,00010769	0,00012205	0,00013551	0,00014436	6,5949E-05	0,00015305	6,34508E-05
GRIFOLS	0,00013137	8,7755E-05	0,00010769	0,00091932	8,6412E-05	9,3675E-05	8,5015E-05	0,00010648	0,00022784	7,66029E-05
REDEIA	0,00013848	0,00013274	0,00012205	8,6412E-05	0,00018331	0,00010752	0,00013184	2,6512E-05	0,00013682	5,45603E-05
IBERDROLA	0,00017518	0,00010895	0,00013551	9,3675E-05	0,00010752	0,00021039	0,00015684	6,7823E-05	0,00019862	7,87123E-05
ENDESA	0,00016457	0,0001303	0,00014436	8,5015E-05	0,00013184	0,00015684	0,00024806	6,4884E-05	0,00018578	6,93652E-05
ROVI	8,818E-05	4,9208E-05	6,5949E-05	0,00010648	2,6512E-05	6,7823E-05	6,4884E-05	0,00047205	0,00012042	3,80379E-05
SOLARIA	0,00032606	0,00013183	0,00015305	0,00022784	0,00013682	0,00019862	0,00018578	0,00012042	0,00089625	0,000208381
ACCIONA ENERGÍA	0,00015853	5,3204E-05	6,3451E-05	7,6603E-05	5,456E-05	7,8712E-05	6,9365E-05	3,8038E-05	0,00020838	0,000261564

Figura 5.8: Matriz de Varianzas y Covarianzas de las 10 empresas energéticas y farmacéuticas.

	ACCIONA	ENAGÁS	NATURGY	GRIFOLS	REDEIA	IBERDROLA	ENDESA	ROVI	SOLARIA	ACCIONA ENERGÍA
rendimiento medio	0,039%	-0,035%	0,015%	-0,043%	0,003%	0,044%	-0,004%	0,113%	0,064%	-0,026%
varianza	0,0004402	0,00023315	0,00030717	0,00092007	0,00018346	0,00021056	0,00024826	0,00047244	0,00089699	0,000375093
desv.est	2,098%	1,527%	1,753%	3,033%	1,354%	1,451%	1,576%	2,174%	2,995%	1,937%
porcentaje inversión	-12,352%	13,729%	3,666%	3,099%	30,760%	19,621%	1,398%	15,209%	-6,455%	31,325%
porcentaje inversión total	100,000%									
CARTERA DE MIN.VARIANZA										
rendimiento de la cartera	0,004%									
riesgo de la cartera	0,999%									
varianza de la cartera	9,9889E-05									

Figura 5.9: Cartera de mínima varianza de las 10 empresas energéticas y farmacéuticas.

Obtenemos:

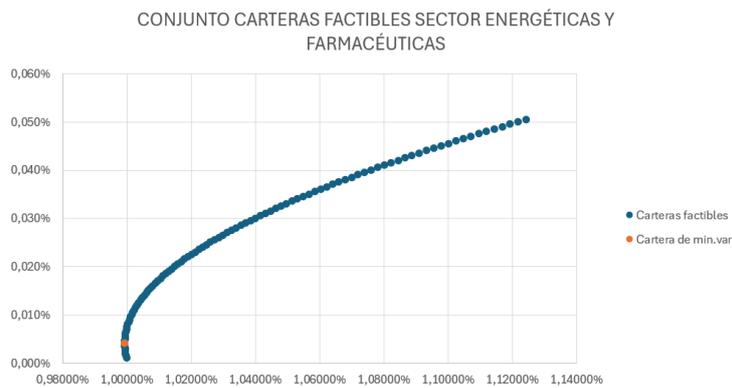


Figura 5.10: Carteras factibles y frontera eficiente de las 10 empresas energéticas y farmacéuticas.

La tercera cartera será la formada por los activos del sector bancario junto con todos aquellos de las empresas que han tenido coeficientes no negativos (sean del sector que sean) en el análisis del primer componente principal. Debido a que la matriz de covarianza es grande, directamente adjuntamos los resultados de la cartera de mínima varianza que han sido calculados de igual forma que los dos casos anteriores en las imágenes de la página siguiente.

	ACS	ACERINOX	BBVA	BANKINTER	CAIXABANK	NATURGY	FERROVIAL	INDITEX	REPSOL	INDRA	MAPFRE	
rendimiento esperado	0,053%	0,019%	0,087%	0,071%	0,085%	0,015%	0,038%	0,065%	0,027%	0,059%	0,022%	
varianza	0,0005157	0,00040015	0,00060658	0,00053369	0,00052817	0,00030717	0,00029479	0,00034015	0,00052379	0,00047457	0,00032545	
desv.estándar	2,271%	2,000%	2,463%	2,310%	2,298%	1,753%	1,717%	1,844%	2,289%	2,178%	1,804%	
porcentaje inversión	0,430%	16,399%	-6,588%	3,785%	5,556%	11,122%	13,298%	7,234%	3,960%	4,299%	10,674%	
	TELEFÓNICA	SACYR	SABADELL	SANTANDER	COLONIAL	IAG	AMADEUS	ARCELORMIT	MERLIN	LOGISTA	AENA	UNICAJA
rendimiento esperado	0,001%	0,041%	0,103%	0,055%	-0,035%	0,009%	0,019%	0,080%	0,006%	0,034%	0,039%	0,046%
varianza	0,00034961	0,00043865	0,00099417	0,00056576	0,00046213	0,00114065	0,00051462	0,00077623	0,0004131	0,00017992	0,00043218	0,00062114
desv.estándar	1,870%	2,094%	3,153%	2,379%	2,150%	3,377%	2,269%	2,786%	2,032%	1,341%	2,079%	2,492%
porcentaje inversión	11,933%	-4,070%	-9,752%	-7,276%	0,649%	-8,040%	1,896%	-8,572%	4,127%	41,362%	0,988%	6,587%
porcentaje inversión total	100,000%											
CARTERA DE MIN.VARIANZA												
rendimiento de la cartera	0,017%											
riesgo de la cartera	1,024%											
varianza de la cartera	0,00010487											

Figura 5.11: Cartera de mínima varianza de todas las empresas con coeficiente positivo en el PC 1.

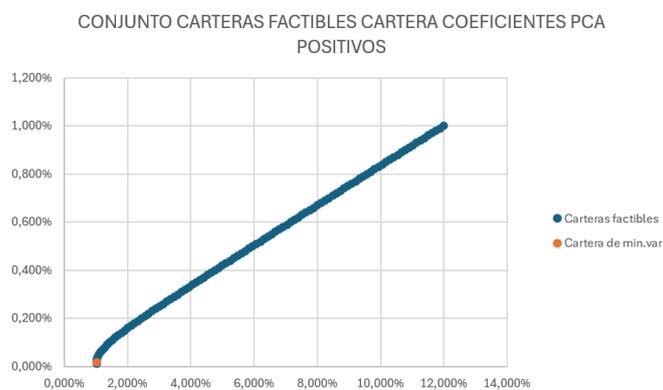


Figura 5.12: Carteras factibles y frontera eficiente de todas las empresas con coeficiente positivo en el PC 1.

Una vez calculadas las carteras de mínima varianza de las tres carteras definidas vemos lo siguiente. Gracias a la técnica de la PCA podemos verificar que una cartera formada por solo acciones de activos del sector de la banca tienen un riesgo mayor pero también un rendimiento mayor a una formada por empresas del sector energético, farmacéutico y la combinación de empresas de distintos sectores. Este hecho demuestra el motivo por el cual en la PCA tenían coeficientes tan elevados puesto que se nos estaba indicando la gran incidencia que tendrían en una cartera que replicase este índice bursátil. Además, podemos ver que la cartera conformada por más activos, la tercera, reduce significativamente la volatilidad y por tanto el rendimiento de nuestra cartera de inversión, hecho que evidencia el efecto de la diversificación comentado al inicio de este trabajo. En otras palabras, pese a que conformamos una cartera con los activos financieros que más incidencia tienen en la volatilidad del índice, el hecho de aumentar el número de activos en los que invertimos genera una disminución en el riesgo de la propia cartera. También, podemos comprobar que una cartera conformada por activos de las empresas que la PCA nos indicaba que tenían poca influencia efectivamente implican la cartera menos volátil. Por último, también se hace constar que una vez tenemos calculadas las carteras óptimas, cualquier cartera factible de cualquiera de los tres casos se obtendrá, como ha sido explicado durante todo el trabajo, imponiendo la rentabilidad que queramos para calcular el correspondiente riesgo asociado a la cartera.

Capítulo 6

Conclusiones

En primer lugar, hemos expuesto, desde un punto de vista estático, el modelo de Markowitz para la optimización de carteras de inversión así como la solución al problema de optimización para el caso de una cartera de n activos de riesgos y otra con un activo libre de riesgo. Se ha definido el conjunto de carteras eficientes para un nivel de riesgo y rendimiento mediante la frontera eficiente y cómo ésta varía conforme tenemos una cartera con o sin un activo libre de riesgo. Además, se ha presentado y definido el modelo de valoración de activos financieros CAPM, sus consideraciones y propiedades, su relación y sus diferencias con el modelo de Markowitz y la fórmula que define la relación entre el mercado y los activos que conforman una cartera de inversión.

Después, hemos definido, mediante evoluciones temporales; las medias, las varianzas y las covarianzas de los activos para poder definir y solucionar el problema de Markowitz a partir de un análisis dinámico. De esta forma, lo que hemos podido comprobar es que tanto el rendimiento como el riesgo de las carteras de inversión dependían de una nueva variable, el tiempo. Por tanto, desde un punto de vista dinámico, el modelo de Markowitz tiene en cuenta la media y la varianza de la cartera y también la incertidumbre del momento en el que el inversor decida seleccionar la cartera o invertir sus recursos. Es por ello que hemos podido comprobar que la frontera eficiente, en este caso, varía y lo hará en función del momento en el que se decida invertir en los diferentes activos financieros.

Por último, hemos planteado la técnica estadística del análisis de componentes principales para poder escoger diferentes carteras de inversión con mayor o menor riesgo para tratar de encontrar una cartera formada por activos de las empresas que conforman el IBEX-35 lo más óptima posible. Esta técnica nos ha permitido conformar hasta 35 carteras a partir de combinaciones lineales de los activos que conforman el índice pero hemos escogido la primera, como componente principal, para analizar la cartera más representativa de la volatilidad del mercado bursátil español. En ella, hemos podido identificar las empresas de los sectores que más incidencia tienen en el riesgo del índice y hemos construido tres carteras, que hemos posteriormente optimizado mediante el modelo de Markowitz, para ver la incidencia de los resultados del análisis de componentes principales a la hora de seleccionar y más tarde optimizar una cartera de inversión.

Así pues, este trabajo nos ha permitido ver, entender y calcular las carteras óptimas de inversión y, posteriormente, el análisis de componentes principales nos ha permitido reducir la dimensión de las posibles carteras que nos explican el riesgo de un mercado en particular para poder aplicar todos estos conocimientos, desde un punto de vista estático y dinámico, en una aplicación práctica para un inversor cualquiera.

Bibliografía

- [1] Bolsas y Mercados Españoles (BME) [en línea]. [consulta: 26 de noviembre de 2024]. Disponible en:
<https://www.bolsasymercados.es/bme-exchange/es/Preguntas-Frecuentes/que-es-ibex-35>.
- [2] Feeney, G. J.; Hester, D.D, (1964): *Stock Market Indices: A Principal Component Analysis*, *Cowles Foundation Discussion Papers*, 405. Disponible en:
<https://elischolar.library.yale.edu/cowles-discussion-paper-series/405>.
- [3] Investing.com [en línea]. [Consulta: 20 de noviembre de 2024]. Disponible en:
<https://es.investing.com/>.
- [4] Jolliffe, I.T. (2002): *Principal Component Analysis*, 2nd ed. New York [etc: Springer]. ISBN 0387954422.
- [5] Markowitz, H.M. (1952): *Portfolio Selection*, *The Journal of finance (New York)*, vol.7, no. 1, pp.77-91. ISSN 0022-1082. DOI 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
- [6] Markowitz, H.M. (1987): *Mean-Variance Analysis in portfolio choice and capital markets*, Cambridge [Mass.][etc: Basil Blackwell]. ISBN 0631153810.
- [7] Merton, R.C. (1972): *An analytic derivation of the efficient portfolio frontier*, *The Journal of financial and quantitative analysis*, vol.7, no. 4, pp.1851-1872. ISSN 0022-1090. DOI 10.2307/2329621.
- [8] Prigent, J. L. (2007): *Portfolio Optimization and Performance Analysis*, Boca Raton: *Chapman and Hall/CRC financial mathematics series*. ISBN 1584885785.
- [9] Sharpe, W. F. (2000): *Portfolio theory and capital markets*, New York [etc: McGraw-Hill]. ISBN 0071353208.
- [10] Sigman, K. (2005): *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*. Disponible en:
<https://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-CAPM.pdf>.
- [11] Sigman, K. (2005): *Fund theorems*. Disponible en:
<https://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-funds.pdf>.
- [12] Sigman, K. (2005): *Portfolio mean and variance*. Disponible en:
<https://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-portfolio-I.pdf>.
- [13] Universidad de Granada, Facultad de ciencias. Matrices simétricas y ortogonales. [Consulta: 15 de noviembre de 2024]. Disponible en:
https://www.ugr.es/~eaznar/matgeo/apuntes/simetricas_y_ortogonales.pdf.

Nota: Todas las imágenes y gráficos utilizados en este trabajo son de elaboración propia así como los cálculos realizados en Microsoft Excel.