UNA REVISIÓN ECONÓMICA DEL VALOR: EL VALOR FINANCIERO. SU APLICACIÓN AL ANÁLISIS FINANCIERO DE LA INVERSIÓN

Dr. Alfonso M. Rodríguez Rodríguez
Catedrático de la Universidad de Barcelona
Académico de Número de la Real de Ciencias Económicas y Financieras

ABSTRACT

El análisis financiero convencional no satisface los requerimientos de las *operaciones complejas* en las que participan múltiples capitales en su *input* y en su *output*, principalmente debido a sus diversos plazos de *inmovilización financiera.* Por ello carecen de una inmovilización única común, que permita extender a ellas la definición de las magnitudes relativas temporales que son descriptivas en las *operaciones simples o elementales*. El estudio supera este obstáculo mediante la *reducción financiera* que, respetando la equivalencia financiera del mercado, define un *plazo financiero medio* (PFM) que habilita la rigurosa descripción de las operaciones complejas, tanto las de *financiación* (OFF)*,* como las de *inversión* (OFI). Para ello, introduce una formalización previa de la operación financiera (OF) siendo sus componentes las magnitudes básicas. Realiza una definición rigurosamente financiera de las magnitudes *renta* y *rentabilidad*, fundada en la medida del desequilibrio financiero pretendido por las operaciones de inversión (OFI). Ello supone una alternativa conceptual a la defectuosa y paradójica TIR, contrariamente fundada en un pretendido equilibrio financiero de la operación. Añade un estudio muy crítico y riguroso de la TIR que muestra sus imperfecciones, introduciendo, al paso, un cálculo original y completo de sus soluciones basado en la definición del PFM. Tal marco conceptual tiene aplicación inmediata en la selección financiera de inversiones ante una *alternativa*. Finalmente, mediante un particular caso numérico, muestra empíricamente su potencia descriptiva.

INDICE

0. INTRODUCCIÓN

El Departamento Universitario de "Matemática Económica, Financiera y Actuarial" de la Universidad de Barcelona ha desarrollado una investigación, expuesta en varias publicaciones[1], que permitió incorporar en sus Planes de Estudio una disciplina independiente, denominada **Matemática de la Inversión**, continuadora de la **Matemática de la Financiación**, ambas constitutivas de un estudio mas general de la **Matemática Financiera**.

En cuanto sigue, haremos una síntesis de los fundamentos conceptuales y metodológicos que permiten una prolongación del análisis financiero convencional de las operaciones financieras *simples o elementales* a las operaciones *complejas*. La **reducción financiera** introducirá las magnitudes que describen el rendimiento de una inversión como correctas **tasas de rendimiento**, que deben sustituir a la convencional y deficiente TIR. Permitirán, también, una más correcta selección financiera de la *opción óptima* en las alternativas de proyectos de inversión. Incorporaremos un estudio crítico sobre el estricto sentido financiero que tiene la TIR, todas sus posibles soluciones y el significado de sus evidentes paradojas.

Aportamos un método original para el estudio, cálculo y representación de las operaciones financieras (OF) mediante la introducción de la magnitud PFM (*plazo financiero medio*). Mostraremos, finalmente, una *aplicación informática* que describe la operación financiera de inversión (OFI) en cualquier *ambiente financiero* (la ETTI del mercado) basado en las *funciones financieras* PFM (plazo financiero medio) y DUR (duración), con sus auxiliares HIP (hipérbola) y DES (desviación).

1. INSUFICIENCIA ECONÓMICA DEL VALOR MONETARIO: LA VALORACIÓN FINANCIERA

El valor monetario de un bien, servicio o cualquier factor productivo, se expresa monetáriamente mediante una cuantía en la unidad de referencia dineraria. La valoración monetaria preside todas las transacciones económicas, tanto del consumo como de la producción. El mercado realiza una valoración *objetiva* que por su general aceptación, en un cierto entorno, justifica el equilibrio monetario de las transacciones. También existe otra valoración paralela, *subjetiva*, que la realizan los agentes económicos en sus tomas de decisión. La disparidad entre ambas valoraciones es el motor y la razón de las transacciones del mercado, donde ambas posiciones pretenden un resultado beneficioso. La valoración objetiva, por su generalidad, es la que describe toda Ciencia económica y es sólo la que interesa al presente estudio.

Cuando participan activos o elementos patrimoniales dotados de diferente "*grado de liquidez",* o bien pasivos afectados de distinto "*grado de exigibilidad"*, la valoración monetaria resulta insuficiente para la descripción económica completa de un patrimonio y de las transacciones patrimoniales. El *valor económico* no es indiferente al *tiempo de espera* que afecta a la unidad monetaria, referente del valor monetario, el *"diferimiento"* que media hasta su convertsión en *unidad líquida y disponible*. O bien, cuando se trata de un pasivo patrimonial, al *tiempo de espera* hasta su exigibilidad. La *preferencia por la liquidez* -en los activos- o la *aversión a la exigibilidad* -en los pasivos- tiene su fundamento en el mayor aprecio -valor económico- del dinero

[1] Alfonso Rodríguez. "Matemática de la Financiación"1974,1984 y 1994. Servicio Universidad Barcelona "Matemática de la Inversión"1983 y 1987. Romargraf. Barcelona. "Inmunidad Financiera"1994. Servicio Universidad Barcelona. "Fundamentos de la Matemática Financiera"1998. Gráficas Rey. Barcelona.

inmediato respecto al dinero *lejano* o *futuro*. Tal es el principio económico que otorga naturaleza al *fenómeno financiero.*

La *liquidez* de una cuantía monetaria se mide por su "*diferimiento*" temporal hasta momento del *vencimiento*. Mientras que la "*cuantía*" mide y representa el *valor monetario* de un elemento patrimonial (sea activo o pasivo), el "*diferimiento*" mide y representa su *grado de liquidez* o de *exigibilidad*. El *valor financiero* compendia y considera ambas medidas económicas del elemento patrimonial. Puede formalizarse mediante un *complejo binario* (C,T), denominado "*capital financiero*", en donde sus dos componentes, "*cuantía*" (C) y "*diferimiento*" (T), son números reales no negativos, medidas respectivas del *valor monetario* y de la *liquidez* del bien patrimonial,

$$(C,T);\quad C,T \in \mathbf{R}^{+}$$

Observemos que en los activos no financieros (carentes de un vencimiento definido) la liquidez también está presente y se evidencia por un "*proceso amortizativo", en* el inmovilizado, o en el de su "*realización*", en el circulante.

En las transacciones financieras simples el diferente grado de liquidez se corrige frecuentemente mediante un "*plus de interés*" que restablece el equilibrio entre los diferentes valores financieros de la unidad monetaria. No obstante, hemos de resaltar que tal corrector financiero no resuelve la valoración en otros activos o patrimonios más complejos, compuestos por elementos no financieros que también ostentan diferente grado de liquidez o de exigibilidad. Un ejemplo paradigmático lo muestra el balance empresarial que sólo expresa el equilibrio contable *"monetario"* entre los agregados complejos de masas patrimoniales, activas o pasivas, de la empresa. Seguidamente lo mostramos.

2. EL BALANCE EMPRESARIAL: UN EQUILIBRIO MONETARIO

Consideremos este esquema sintético de un balance empresarial:

Activo		Pasivo	
Inmovilizado	2.000.000	Capital	1.500.000
Circulante	500.000	Acreedores l/plazo	1.000.000
Deudores	150.000	Acreedores c/plazo	175.000
Tesorería	50.000	Dividendos (accionistas) ..	25.000
Suma	2.700.000	uma	2.700.000

La suma del Activo expresa el valor monetario de un agregado de masas patrimoniales dotadas de muy diversa liquidez. Inmovilizados "*largos*", como terrenos y construcciones, son agregados a una tesorería de liquidez inmediata. Coexisten también otras cuentas intermedias, agregados a su vez de partidas de liquidez muy diversa. Es evidente que la suma del Activo no respeta el "*principio de homogeneidad financiera*" de los sumandos. La suma del Activo muestra el "*valor monetario*" del agregado que incorpora, pero **no explica** en absoluto su *"valor financiero".*

Del mismo modo, en el Pasivo coexisten fondos propios -no exigibles- con créditos vencidos inmediatamente exigibles. En cuentas intermedias se agregan a ellos pasivos de muy diferente exigibilidad. Tampoco la suma del Pasivo describe la *valoración financiera*, sino tan sólo la *valoración monetaria*.

El equilibrio que refleja el balance es sólo un equilibrio *contable* o *monetario* del Activo y del Pasivo. En su representación patrimonial el balance prescinde del análisis financiero, análisis que, además, contempla el "*grado de liquidez*" y "*de exigibilidad*" de las masas patrimoniales agregadas. Las partidas que las cuentas agregan monetáriamente, y el propio balance, carecen de *homogeneidad financiera*.

3. LA AGREGACIÓN FINANCIERA

Los patrimonios, tanto empresariales como particulares, y las propias transacciones patrimoniales, están integrados por agregados de elementos activos y pasivos. El *valor financiero* de tales agregados exige formalmente la definición de un álgebra muy particular en el conjunto de los capitales financieros, de "*un álgebra financiera*", por cuanto la *suma financiera* contempla la agregación de capitales financieros que son formalmente elementos complejos binarios. Siendo la suma financiera una *ley de composición interna* en el conjunto de los capitales financieros, el resultado ha de ser otro *capital financiero* que represente el valor financiero del agregado, con sus dos componentes bien definidas, la *cuantía* monetaria y el *diferimiento* temporal.

La "*cuantía*" de la suma financiera debe definirse en el *sentido monetario contable,* como suma aritmética de las cuantías que integran el agregado. La definición de la segunda componente de la suma financiera, el "*diferimiento*", ha de afrontar la inevitable dispersión de los diferimientos en grado de liquidez o de exigencia, en los elementos patrimoniales agregados. Para esta componente temporal la suma aritmética ya no es significativa. Más o menos conscientemente, ello impide al análisis financiero convencional un mayor desarrollo y una más precisión en la descripción de las operaciones financieras complejas, impidiéndole prolongar a éstas sus magnitudes descriptivas, como enseguida comprobaremos.

En los agregados de activos financieros de renta fija, la "*actualización financiera*" (el descuento financiero) proporciona una posible solución, pero basada en la sustitución de los valores *faciales* de los activos por sus *valores actuales,* logrando así un *equidiferimiento cero* en todos ellos. Definida una *ley financiera* (uno o varios tipos de interés) para la actualización de las cuantías, la suma aritmética de sus valores actuales es el valor actual del agregado de los activos. Esta cuantía monetaria con diferimiento cero (liquidez absoluta) tiene "*el mismo valor financiero*" que la suma financiera del agregado.

A la falta de realismo que comporta la *actualización financiera* -no existe la realización inmediata de los activos agregados- se añade una *conversión* o *sustitución* de la cuantía del capital suma por otra diferente cuantía (el agregado de los valores actuales), con desprecio absoluto del sentido monetario y contable que tiene (C), obviando también el fundamental significado financiero de la segunda componente (T). En definitiva, se reduce el complejo binario a un escalar, para así evitar la dificultad presente en la suma financiera compleja. Por otra parte, la actualización financiera necesita considerar una ley financiera que defina la "*relación de sustitución*" entre ambas componentes del capital financiero, (C) y (T). Esta ley financiera (un tipo de interés) condiciona definitivamente la cuantía monetaria actualizada. Ello conculca gravemente la naturaleza monetaria propia de la cuantía, siempre cierta e independiente del *ambiente financiero* y de los tipos de interés del mercado. Un capital financiero *actualizado*, dotado por ello de una menor cuantía y menor liquidez (diferimiento cero) que su antecedente, puede tener siempre -condicionado a la ley financiera- el *mismo valor financiero* que el capital financiero origen, pero nunca puede remplazarlo sin distorsionar su sentido monetario y su liquidez. La actualización financiera, aún en el caso de activos financieros de renta fija, homogeneíza *artificialmente* la liquidez de los activos al precio de *destruir su propia representación monetaria,* y su naturaleza real.

La *medida* del valor financiero es un capital financiero, un *vector binario complejo* no bidimensional (sus componentes son magnitudes diferentes, monetaria y temporal). Su agregación carece de la simplicidad operativa del álgebra escalar o numérica, propia de magnitudes cuya medida es un número real. El álgebra de valores financieros **ha de ser necesariamente un álgebra vectorial compleja**.

4. LA REDUCCIÓN FINANCIERA

El reto metodológico que plantea la agregación vectorial se resuelve fácilmente mediante la **reducción financiera** del agregado.

Los *diferimientos* de los elementos de un agregado muestran una dispersión cuya descripción corresponde metodológicamente a la reducción estadística. En el presente caso a la "*reducción estadístico-financiera*". Ella proporciona la definición de un **diferimiento medio** (**T**)[2] del agregado, como aquel diferimiento que junto a la suma aritmética de sus cuantías ($\mathbf{C}=\Sigma C_r$) determina un capital financiero ($\mathbf{C},\mathbf{T}$) representativo del valor financiero del agregado complejo,

$$\{(C_r, T_r)\}; \;\; r = 1,2,..n$$

Tal activo simple ($\mathbf{C},\mathbf{T}$), de cuantía y diferimiento bien definidos, sustituye y describe financieramente el agregado complejo $\{(C_r, T_r)\}$ con múltiples cuantías y diversos diferimientos, sin alterar su valor su monetario ni el equilibrio financiero de las transacciones en las que participe, debido a su definición condicionada por la equivalencia financiera. Se define como **suma financiera** del agregado complejo, y habilita la operación "*agregación*" en un álgebra de vectores binarios,

$$\Sigma\{(C_r, T_r)\} = (\mathbf{C},\mathbf{T}) \,/\, \{(C_r, T_r)\} \sim (\mathbf{C},\mathbf{T})$$

Retornando ahora al balance empresarial anteriormente considerado, las sumas del Activo ($\mathbf{C}_A$) y del Pasivo ($\mathbf{C}_P$) serían las componentes monetarias de los respectivos agregados que se completarían con los "*diferimientos medios*" respectivos ($\mathbf{T}_A$) y ($\mathbf{T}_P$), sus segundas componentes temporales. Entonces, el "*equilibrio monetario*" del balance entre su Activo y Pasivo,

$$\mathbf{C}_A = \mathbf{C}_P$$

se complementa con la descripción de su posible "*desequilibrio financiero*",

$$\mathbf{T}_A \neq \mathbf{T}_P$$

exponente de la diferente liquidez existente entre ambos. La diferencia, $\mathbf{T}_A - \mathbf{T}_P$, informa precisamente, con su signo y cuantía, del sentido y grado de liquidez que corresponde al balance empresarial.

[2] El cálculo del *diferimiento medio* exige la consideración del *ambiente financiero* descrito por la ETTI (estructura de tipos de interés del mercado). El análisis que realizamos dispone de los algoritmos y aplicaciones informáticas que permiten determinarlo en cualquier ambiente financiero, estacionario o dinámico.

5. REDUCCIÓN FINANCIERA DE LAS OPERACIONES

En transacciones complejas se intercambian múltiples elementos patrimoniales con diversa liquidez. Una **operación compleja** puede formalizarse como un esquema *input-output* de conjuntos de capitales financieros emergentes y salientes, del siguiente modo[3]

$$\textit{input}: \quad \{(C_r,T_r)\}; \quad r = 1,2,..n$$
$$\textit{output}: \{(C'_s,T'_s)\}; \quad s = 1,2,..m$$

La reducción financiera de los agregados, miembros de la operación,

$$\{(C_r,T_r)\} \sim (\mathbf{C},\mathbf{T})$$
$$\{(C'_s,T'_s)\} \sim (\mathbf{C'},\mathbf{T'})$$

permite **reducir una operación compleja** a otra **elemental o simple**, sin merma alguna de sus propiedades en el equilibrio financiero del mercado (propiedad transitiva de la relación de equivalencia). La "*operación elemental reducida equivalente*" es pues

$$\textit{input}: \quad (\mathbf{C},\mathbf{T})$$
$$\textit{output}: \quad (\mathbf{C'},\mathbf{T'})$$

Seguidamente mostraremos la extraordinaria potencia operativa y descriptiva que aporta al análisis financiero la reducción financiera de las operaciones.

6. MAGNITUDES BÁSICAS EN LA INVERSIÓN FINANCIERA: CUANTÍA, INMOVILIZACIÓN Y RENDIMIENTO

La **operación de inversión** supone una afectación de activos (*inputs*), con la restitución de otros (*outputs*), en un ambiente financiero de certeza o incertidumbre (difícilmente estocástico). Si los activos son financieros la operación de inversión tiene bien definidas las cuantías y la liquidez de los capitales participantes. Si los activos no son financieros también es posible su descripción, mediante los capitales financieros que los representan.

En la descripción de una operación de inversión (OFI) la **cuantía inmovilizada** es la suma aritmética de las cuantías de los *inputs*. Coincide así con la cuantía (**C**) de la suma financiera del *input*. El **plazo de la inmovilización** no es único en las operaciones complejas, pues coexisten diferentes plazos en las unidades monetarias que participan, en función de las fechas de ingreso y recuperación (dificultad no resuelta por el análisis financiero convencional).

El **rendimiento absoluto** es la diferencia entre las cuantías agregadas del *output* y del *input,*

$$\mathbf{R} = \mathbf{C'} - \mathbf{C}$$

es independiente del plazo de la inmovilización y su determinación incumple el principio de *homogeneidad financiera* de los términos, pues las cuantías sumas (**C'**) y (**C**) ostentan diferente liquidez, **T'** ≠ (**T**).

[3] Su equivalencia financiera o no equivalencia, en el mercado del dinero, las distingue como **operación de financiación** (OFF), o bien **operación de inversión** (OFI).

El **rendimiento relativo** (*la rentabilidad*) relaciona el *rendimiento absoluto* con la *cuantía* y el *plazo de la inmovilización*. En las *operaciones elementales* o *simples* ambas magnitudes, cuantía y plazo, están bien definidas. Por tanto también lo está el rendimiento relativo. En las *operaciones complejas* la indefinición del plazo de inmovilización impide la definición directa de la rentabilidad. El análisis financiero convencional, ante la necesidad de obviar esta indefinición del plazo, recurre a una medida indirecta de la rentabilidad muy discutible, la TIR (Tasa de Rendimiento Interno). Ésta, aparte de obviar en su cálculo el plazo de la inmovilización, también ignora el ambiente financiero existente (los tipos de interés del mercado). Ello resulta muy paradójico en una medida con pretensión financiera.

Dejando para más adelante un análisis que haremos más profundo y crítico de la TIR, abordaremos -sin el concurso de ésta tasa- una correcta medida financiera del rendimiento relativo o rentabilidad en las operaciones de inversión compleja. Ello nos lo permite la reducción financiera de las operaciones, lo cual proporciona una solución sencilla a la indefinición del plazo de inmovilización existente en las operaciones de inversión complejas.

7. EL PLAZO FINANCIERO MEDIO (PFM)

La reducción financiera permite definir un **plazo financiero medio** (PFM) de inmovilización para las unidades monetarias invertidas en la operación de inversión compleja, con la capacidad de sustituir los plazos efectivamente inmovilizados sin alterar sus propiedades financieras en las transacciones, ni tampoco en la equivalencia financiera.

En la *operación simple*,

input: (C,T)
output: (C’,T’)

el plazo de inmovilización de la cuantía inicial (C) está bien definido por diferencia entre ambos diferimientos del *output* y del *input*,

$$t = T' - T$$

Este plazo es *efectivo* y *común* a todas las unidades monetarias que integran (C), invertidas en (T) y que se recobran en (T’). Entonces, también en la “*operación simple reducida”*, equivalente a la compleja, las unidades monetarias que integran la cuantía inmovilizada ($\mathbf{C} = \Sigma C_r$), suma aritmética de las cuantías del *input* de la operación, tienen bien definido el plazo de la inmovilización como diferencia de los *diferimientos medios* respectivos de la operación compleja, del *output* (**T**’) y del *intput* (**T**). Es decir,

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}' - \mathbf{T}$$

o bien, mostrando su dependencia respecto al tipo de interés del mercado (ρ^o),

$$\mathbf{t}(\rho^o) = \mathbf{T}'(\rho^o) - \mathbf{T}(\rho^o)$$

pues los *diferimientos medios* de los conjuntos *input* y *output* son funciones del mismo.

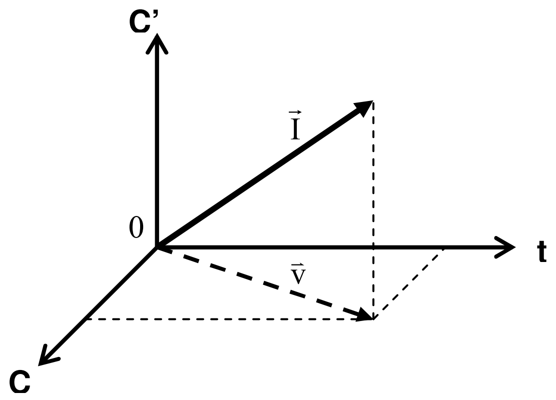
El **plazo financiero medio** se comporta estadísticamente como un “*plazo medio”* del conjunto de plazos diversos que participan en la inmovilización. Por su propia definición financiera, considerar la diversidad de los plazos de inmovilización existentes para cada una de las unidades monetarias participantes resulta equivalente (según la ley que habilita su cálculo) a atribuir a todas ellas el mismo PFM. La ausencia de un plazo de inmovilización único en las operaciones complejas, que imposibilitaba la directa definición de la rentabilidad, ahora se salva introduciendo el PFM. Es decir, se obvia esta dificultad sustituyendo la operación compleja por su equivalente elemental reducida. Ello nos permite un correcto estudio de la rentabilidad en las operaciones complejas, similar al de las elementales, resultando innecesario el actual y deficiente recurso a la TIR.

8. REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA OPERACIÓN FINANCIERA (OF)

En todo operación financiera existen tres magnitudes básicas que la describen financieramente. Son las que definen la operación elemental equivalente: la cuantía agregada del *input* (**C**), el PFM (**t**) y la cuantía agregada del *output* (**C**'). De ellas se pueden deducir las restantes magnitudes derivadas que la describen. Ellas permiten formalizar la operación financiera mediante un vector financiero en un espacio tridimensional,

$$\vec{I} \equiv (\mathbf{C}, \mathbf{t}, \mathbf{C'})$$

Las dos primeras componentes del vector, (**C**) y (**t**), definen la **inmovilización financiera** en cuantía y en diferimiento, siendo componentes del vector proyección de $\vec{I}$ sobre el plano, $\vec{v} \equiv (\mathbf{C}, \mathbf{t})$. La restante componente (**C**'), junto con las anteriores componentes, permite determinar el **rendimiento** en sus diferentes acepciones.



9. LA *RENTABILIDAD-PRODUCTIVIDAD*

En su acepción más vulgar, la rentabilidad de un capital invertido se identifica con el sentido técnico-económico de "*productividad*". En efecto, el capital invertido e inmovilizado es, en la actividad inversora, el "*factor productivo*" cuyo "*producto*" es el rendimiento de la inversión. La productividad de un factor es la relación existente entre las *unidades físicas* del producto obtenido y las *unidades físicas* del factor consumido. En la inversión financiera el *producto-rendimiento* se expresa en unidades *monetarias*, mientras que el *factor* (inmovilización) es una magnitud *monetario-temporal*. La relación entre ambas,

$$r = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{C.t}}$$

define la "*productividad financiera*" de la inversión, como rendimiento monetario por unidad monetaria-año invertida. La productividad financiera se considera así como **rentabilidad** de la inversión.

En esta acepción de "*rentabilidad-productividad*" cabe otra definición, aún más precisa, si consideramos la paulatina reinversión del rendimiento obtenido y no retirado en la propia operación inversora. Ello sucede siempre en la operación simple o elemental, en la que los rendimientos se incrementan a la inmovilización inicial paulatinamente durante el plazo, no siendo retirados hasta su final conjuntamente con la cuantía invertida. Considerando entonces que la reinversión del rendimiento origina una inmovilización variable creciente, la **rentabilidad estricta** en la operación elemental es [4]

$$\rho = \frac{1}{t} \ln \frac{C'}{C}$$

que también es extensible a una operación compleja como rentabilidad estricta, si se calcula en la operación reducida equivalente elemental.

Ni el "*rendimiento absoluto*", ni la "*rentabilidad-productividad*", sea o no estricta, descuentan del resultado el *coste de la financiación* del capital inmovilizado. O, alternativamente, descuentan el *coste de oportunidad*, cuando la inversión está financiada por el propio inversor. Siendo (**I**) el interés del mercado correspondiente a la cuantía (**C**), y al plazo de inmovilización (**t**), (**I**) será el *coste financiero de la inversión*. Considerando ahora los tantos de interés del mercado, (i^o) nominal, y (ρ^o) continuo, las expresiones

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} - \mathbf{I} \\ \hat{r} &= r - i^o \\ \hat{\rho} &= \rho - \rho^o \end{aligned}$$

definen, respectivamente, las magnitudes derivadas, **rendimiento neto absoluto** y las **rentabilidades netas**, **no estricta y estricta**.

10. LA *RENTABILIDAD "ECONÓMICA"*

La Teoría Económica define la "*rentabilidad*" de un factor productivo, en un sentido más económico-financiero, como relación existente entre el "*valor monetario*" del producto obtenido y el "*coste monetario*" del factor productivo (magnitudes monetarias ambas, no físicas). Debido a la naturaleza monetaria de la inversión financiera el valor monetario del producto coincide con el rendimiento. El coste monetario de la inversión es el coste financiero de la inmovilización. Entonces, en un sentido estrictamente económico,

$$\delta = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{I}} \quad \text{y} \quad \hat{\delta} = \frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathbf{I}}$$

son respectivamente las magnitudes derivadas **rentabilidad bruta** y **rentabilidad neta**, según que se considere el rendimiento absoluto o el neto en su determinación.

---

[4] La *rentabilidad estricta* se obtiene de la ecuación $C' = C.e^{\rho.t}$.

Entre ellas existe la relación

$$\delta = \hat{\delta} + 1$$

que justifica su indiferencia como medio de selección de la inversión óptima en una alternativa inversora con *criterio económico-financiero*.

11. EL SIGNIFICADO FINANCIERO DE LA "TIR"

El análisis financiero convencional desconoce la reducción financiera de la operación, y la definición de un PFM en la descripción de las operaciones complejas. La inexistencia de un plazo único, unida a una importante **confusión conceptual** entre rendimiento e interés, han abocado al recurso a la TIR como medida de la rentabilidad en las operaciones complejas, con el sentido descrito *rentabilidad-productividad*.

La TIR es un **tipo de interés implícito**. Como tasa, tiene naturaleza "*estricta"* pues su definición incluye la acumulación del interés generado por la propia operación (cálculo en el régimen financiero de interés compuesto). Ahora nos corresponde mostrar el grave error conceptual que introduce la TIR al confundir el *interés* con el *rendimiento*. En efecto:

a) El *interés* es un **precio** del mercado del dinero que retribuye la liquidez cedida. Su definición es **externa** y **exógena** a la operación inversora. Como precio, el interés *define un equilibrio* de mercado, el del mercado del dinero en este caso. Además, como todo precio, el interés siempre tiene valor **positivo**.
b) El *rendimiento*, por el contrario, es una magnitud **interna** de la operación inversora. Es el resultado de la operación. Procede del *desequilibrio* entre los valores financieros del *inutput* y del *ouput.* Su naturaleza es **endógena** y **marginal**, como todo resultado empresarial. El valor del rendimiento sí acepta el doble signo, **positivo** o **negativo**, significativo de un beneficio o de una pérdida.

No obstante estas esenciales diferencias, la práctica financiera confunde el *interés* con el *rendimiento*, con desconocimiento notable de su naturaleza y funcionalidad económica tan diferentes.

El "*rendimiento bruto"* engloba el *"rendimiento neto"* y el *"interés"*. Cuando el inversor invierte su propio capital recibe conjuntamente ambos como un rendimiento bruto de naturaleza mixta. Si, contrariamente, el inversor se financia con capital ajeno debe descontar el interés satisfecho por la financiación externa, para así determinar su "*rendimiento neto"*.

El interés (**I**), sumado a la cuantía agregada del *input* (**C**), (**C**+**I**), permite una comparación financieramente homogénea con la cuantía agregada del *output,* (**C'**)*, pues* ambas tienen el mismo diferimiento (**T**'). La diferencia entre ambas es el "*rendimiento neto"*. Contrariamente, el "*rendimiento bruto"* es una diferencia entre cuantías monetarias financieramente no homogéneas (**C'**) y (**C**), pues son distintos sus diferimientos respectivos (**T**') y (**T**).

La TIR **no es una tasa de rendimiento**, la TIR es una tasa implícita de interés. Cuando una operación se realiza en el mercado del dinero (OFF) (operación financieramente equilibrada), sin explicitar la tasa de interés del mercado, ésta se puede deducir del *equilibrio financiero* entre el *input* y el *output* como una **tasa implícita**. Ello es lo que estrictamente calcula la TIR como solución de una ecuación polinómico-exponencial[5]. Esta ecuación, debido a su estructura analítica, puede tener soluciones

[5] La ecuación que condiciona y determina la TIR ρ es: $\sum_r C_r . e^{\rho . T_r} = \sum_s C'_s . e^{\rho . T'_s}$

múltiples, una sóla o ninguna. Incluso pueden coexistir las soluciones positivas con otras negativas. No obstante, la medida de la rentabilidad no puede tener más de una medida, tampoco ninguna, *debe tener una sola solución*. La explicación de esta evidente **paradoja** deriva, precisamente, de la confusión existente entre *rendimiento* e *interés*.

Mientras que la medida de la rentabilidad ha de ser única, es posible que varios tipos de interés satisfagan el mismo *equilibrio financiero* cuando se trata de una operación compleja. También puede suceder que no sea posible tal equilibrio entre *input* y *output* con ningún posible tipo de interés. Entonces, la operación diseñada sería imposible en un mercado equilibrado. La particular estructura financiera de una operación compleja hacen factibles todas estas circunstancias[6].

La reducción financiera, aparte definir el PFM, y habilitar un estudio correcto de la rentabilidad en las operaciones complejas, introduce una metodología propia que permite definir un partucular **algoritmo**[7] para el cálculo de la TIR, con el reconocimiento de parámetros que ya anticipan el signo y el número de las posibles soluciones (aspectos que rebasan cualquier análisis convencional). Esta investigación permite afirmar que el número máximo de soluciones de la TIR son **tres,** una con signo contrario a las otras dos. Entonces, si como máximo sólo pueden existir dos soluciones positivas, el equilibrio financiero de la operación sólo puede lograrse, a lo más, con dos tipos de interés.

La interpretación de la TIR como tasa de rendimiento puede alcanzar **resultados aberrantes**. Aparte de la comentada multiplicidad absurda de las soluciones, y la contradicción del doble signo, añadamos ahora que la TIR actualiza los capitales participantes con el *propio tipo de interés interno* que ella misma define. En ningún caso actualiza con el *tipo de interés del mercado*. Entonces, una TIR negativa que calificase un proyecto de inversión como ruinoso, lo basa en la actualización de los capitales participantes con un *tipo de interés negativo*, contra la más elemental lógica financiera. Sin embargo, analizado el mismo proyecto inversor con la actualización al tipo de interés del mercado (siempre positivo), el proyecto inversor podría ser extraordinariamente rentable. También es posible la inexistencia de solución para la TIR en un proyecto inversor que sí tiene muy bien definida la rentabilidad[8].

12. CONSIDERACIONES SOBRE LA PERMANENCIA PRÁCTICA DE LA "TIR"

Pese a las críticas y absurdos expuestos -que en nada afectan al propio significado de la TIR como tipo de interés implícito- la TIR mantiene una regular presencia en los análisis financieros de los proyectos de inversión. Ello fácilmente se explica por las siguientes razones:

a) El desconocimiento convencional de otras magnitudes alternativas que midan más correctamente la rentabilidad de las operaciones complejas (las "*tasas financieras de rendimiento*" que más adelante definimos).
b) En las operaciones elementales la TIR tiene solución única. Coincide además con la *"tasa financiera de rendimiento bruto*", pudiendo deducirse de ella la "*tasa de rendimiento neto",* por diferencia con el tipo de interés del mercado. No muy conscientemente, tales propiedades, únicamente propias de la *operación elemental*, se generalizan incorrectamente a las demás *operaciones complejas*.

[6] En "Fundamentos de la Matemática Financiera", op.cit. pags. 59 y 60, se exponen tres casos numéricos de operaciones financieras que muestran las circunstancias señaladas.
[7] La descripción del algoritmo en "Matemática de la Financiación", op.cit. pag. 211 y sgts.
[8] En "Matemática de la Financiación", op.cit. pag. 217 y sgts., se muestran varios casos numéricos.

c) En las operaciones *cuasi-elementales* (el *input* unitario y el *output* múltiple, ej. la adquisición de un bono al contado) la TIR existe con solución única. No obstante, ya no coincide con la "*tasa de rendimiento bruto*", y realiza una medida incorrecta de la rentabilidad de la operación (tampoco le es lícito deducir la tasa de "*rendimiento neto*" por diferencia con el tipo de interés del mercado).
d) En las restantes operaciones *complejas* (*input* y *output* múltiples) las soluciones pueden ser múltiples o inexistentes, pero sólo en circunstancias muy particulares. En el caso de soluciones múltiples, una de las dos posibles soluciones positivas es rechazable como tipo de interés del mercado debido a su valor anormal. Por otra parte, el cálculo convencional de la TIR sólo detecta una de las posibles soluciones múltiples (la más reducida), ignorando las restantes posibles. En todo caso, ninguna corresponde a la "*tasa de rendimiento bruto*", no siendo lícito obtener el "*rendimiento neto*" por diferencia con el tipo de interés del mercado.
e) La TIR elude el estudio del "*ambiente financiero*" (la ETTI del mercado). Ello, aún siendo incorrecto en cualquier análisis financiero, lo simplifica y lo facilita extraordinariamente (no le es preciso pronunciarse sobre el *tipo calculatorio*).
f) Finalmente, si la TIR se aproxima al tipo de interés del mercado, lo cual supone un rendimiento neto mínimo (la operación se próxima al equilibrio financiero), el error que la TIR introduce resulta naturalmente muy mermado.

13. ALTERNATIVAS A LA TIR: LA TASA FINANCIERA DE RENDIMIENTO

La "*tasa de rendimiento bruto estricta*" (TFR), aludida en un apartado anterior, corresponde a la expresión

$$\rho = \frac{1}{\mathbf{t}(\rho^{o})} \ln \frac{\mathbf{C'}}{\mathbf{C}}$$

Su valor es función del tipo de interés del mercado (ρ^o) (tipo de interés continuo). Difiere de la TIR cuya expresión obtenida de la operación reducida, solución de la ecuación [9], es

$$\rho = \frac{1}{\mathbf{t}(\rho)} \ln \frac{\mathbf{C'}}{\mathbf{C}}$$

La comparación entre ambas permite realizar las siguientes observaciones:

a) En la TIR se aprecia la sustitución del tipo de interés del mercado ($\rho°$) por la propia TIR (ρ), confirmando así su utilización en la actualización de los capitales que participan.
b) La TFR tiene definido su valor, mientras que la TIR puede tener soluciones múltiples, una sola o ninguna.
c) En las *operaciones elementales* el PFM, denominador en ambas expresiones, es una constante que no depende del tipo de interés, razón por la que coinciden ambas tasas TFR y TIR. Por el contrario, en las *operaciones complejas* el PFM es una función del tipo de interés ($\rho°$), mientras que la TIR es una función de ella misma (ρ). Ambas tasas ya no pueden coincidir ($\rho°\neq\rho$), aproximándose solamente cuando (ρ) se acerca a ($\rho°$).
d) La extraordinaria sensibilidad de las tasas de rendimiento a la volatilidad de los tipos de interés implica que su interpretación por la TIR, en el análisis de una

[9] Se obtiene ρ de la ecuación: $C' = C.e^{\rho.t(\rho)}$.

alternativa inversora, puede alterar decisivamente la selección y la preferencia por la opción[10].

e) La "*tasa de rendimiento neto*" se obtiene restando de la tasa de rendimiento bruto TFR el tipo de interés del mercado. La TIR no introduce en su cálculo el tipo de interés del mercado, teniendo la naturaleza de una tasa de rendimiento bruto. La "*tasa de rendimiento neto*" sólo puede deducirse de la TIR en las operaciones elementales, en las que la TIR coincide con la TFR. No así en las operaciones complejas.
f) Si la TIR se aleja del tipo de interés del mercado, el error que introduce en el análisis es muy significativo, no siendo sus resultados fiables en la selección de proyectos de inversión.

En todo caso, la magnitud más **significativa** para la decisión y selección inversora no debiera ser una tasa de "*rentabilidad-productividad*" (TIR o TFR), sino la tasa de "*rentabilidad económica*" (δ), tanto en su forma *bruta* como en la *neta*.

14. APLICACIÓN: SELECCIÓN DE LA INVERSIÓN ÓPTIMA ANTE UNA ALTERNATIVA INVERSORA

Una **alternativa inversora** es formalmente un conjunto de ν opciones o vectores inversores,

$$\{\vec{\mathrm{I}}_j\};\ \text{siendo}\ \vec{\mathrm{I}}_j(\mathbf{C'}_j,\mathbf{t}_j,\mathbf{C}_j);\quad j = 1,2..\nu$$

Su **ordenación** con *criterio económico-financiero* permite seleccionar inmediatamente la "*opción inversora óptima*".

Dos criterios financieros son posibles en la ordenación de una alternativa, el "*rendimiento absoluto*" y el "*rendimiento relativo*". En la selección convencional tales criterios se corresponden con los denominados "*del valor capital*" y "*de la TIR*", respectivamente.

En alternativas inversoras con opciones de "*inmovilización flexible*" en cuantía y plazo (permiten agotar la financiación total disponible), ambos criterios siempre coinciden. No así en alternativas inversoras con opciones de "*inmovilización rígida*", donde cada una determina exactamente la cuantía a invertir, el plazo de la inmovilización o ambas magnitudes.

Para la ordenación de la alternativa según el "*criterio del rendimiento absoluto*", la magnitud más representativa es el "*valor actual del rendimiento neto*" actualizado con el tipo de interés del mercado, ($\hat{\mathbf{R}}_0^{\,j}$). Coincide con el "*valor capital*" de la inversión y se justifica por su *equidiferimiento* (nulo) que le permite comparar y así ordenar todas las opciones. El rendimiento neto sin actualizar, ($\hat{\mathbf{R}}^{j}$), tiene para cada opción la liquidez que fija el diferimiento medio de su *output*, ($\mathbf{T'}_j$), no resultando por ello comparable entre diferentes opciones de la alternativa.

Para la ordenación de la alternativa por el "*criterio del rendimiento relativo*", la magnitud más representativa es la "*rentabilidad económica neta*", ($\hat{\delta}$), no siéndolo la TIR por las razones ya expuestas. Es **adimensionada**, e invariante por tanto al cambio de unidades monetarias y temporales. Admite la comparación entre distintas opciones de la alternativa.

[10] Varios casos numéricos en los que se produce esta alteración se muestran en "Matemática de la Inversión". Op.cit. pags. 84 y sgts.

La indiferencia entre ambos criterios de ordenación, en las alternativas con opciones de "*inmovilización flexible*", ahora resulta fácil de comprobar. En efecto, por tener todas las opciones la misma inmovilización, en cuantía y plazo (inversión total del capital), todas soportan el mismo coste financiero, el interés (**I**), y también su valor actual ($\mathbf{I}_0$). Entonces, siempre coinciden los denominadores en la expresión de $\hat{\delta}^j$ para todas las opciones de la alternativa,

$$\hat{\delta}^j = \frac{\hat{\mathbf{R}}^j}{\mathbf{I}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_0{}^j}{\mathbf{I}_0}$$

resultando así indiferente para la ordenación y la selección cual de los dos criterios sea el elegido, el del rendimiento absoluto ($\hat{R}_0{}^j$) o el del relativo ($\hat{\delta}^j$).

Por el contrario, en las opciones de "*inmovilización rígida*" difieren los costes financieros de las opciones (I^j), no resultando ambos criterios indiferentes. Ello aclara una conocida controversia sobre la identificación de los criterios convencionales, el del valor capital (*el rendimiento absoluto*) y el de la TIR (*el rendimiento relativo*).

En alternativas inversoras con opciones rígidas, la preferencia por uno de los criterios es *subjetiva*. Una elevada rentabilidad no justifica la preferencia si la inmovilización es muy exigua, frente a otra opción de inferior rentabilidad, pero mayor rendimiento absoluto debido a su inmovilización superior. La frontera entre ambos criterios, el relativo y el absoluto, es totalmente subjetiva. La elección de uno de ellos no responde ya a un análisis objetivo.

Aún así, se puede ilustrar al inversor avanzando algo más la descripción de la alternativa. En una escala de preferencias (0–1) se puede definir un parámetro λ, tal que el 0 corresponda a la "*preferencia objetiva*" por el rendimiento relativo, y el 1 a la *"preferencia objetiva"* por el rendimiento absoluto. Los restantes valores, entre 0 y 1, corresponden a los "*grados de preferencia subjetiva*" situados entre ambos criterios. Diseñado un "*índice de preferencia*" que combina ambos criterios,

$$\gamma = \hat{\mathbf{R}}_0{}^{\lambda} . \hat{\delta}^{1-\lambda}$$

éste permite determinar un **valor crítico** λ_{rs} para cada par de opciones $(\vec{I}_r, \vec{I}_s)$ en la alternativa, que sea frontera del cambio de criterio y de la consiguiente ordenación del par $(\vec{I}_r, \vec{I}_s)$. Tales valores críticos, de naturaleza absolutamente objetiva, permiten la *ordenación objetiva* de la alternativa particionando la escala (0-1) en los subintervalos definidos por los valores críticos de todos los pares. Tal ordenación simultanea ambos criterios de ordenación, el absoluto y el relativo[11].

Esta descripción de la alternativa agota la *información objetiva* que se puede deducir de los caracteres financieros de las opciones, con independencia del criterio finalmente elegido por el inversor cuya decisión en este caso es siempre *subjetiva*. Una vez adoptada ésta, el inversor conocerá el intervalo en el que situó su desconocido

[11] La ordenación completa de la alternativa inversora, considerando ambos criterios y el parámetro λ, que define la posición relativa entre ambos en la escala (0–1), así como la determinación de los valores críticos de cada par de opciones en los que se produce una alteración en su ordenación, han sido programados en una aplicación informática que tan sólo precisa la introducción de los datos financieros que definen las opciones y los tipos de interés del mercado (ETTI). Ejemplos numéricos ilustran esta aplicación en la obra "Matemática de la Inversión", op.cit. pags. 91 y sgts.

parámetro λ, lo cual le informará de cual fue el nivel relativo de su decisión entre ambos criterios financieros.

15. APLICACIÓN INFORMÁTICA DESCRIPTIVA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS (OF)

El análisis financiero mostrado permite describir la operación financiera de inversión mediante una aplicación informática, programada para que a partir de los datos financieros del *input* y del *output* muestre las propiedades más características de la operación.

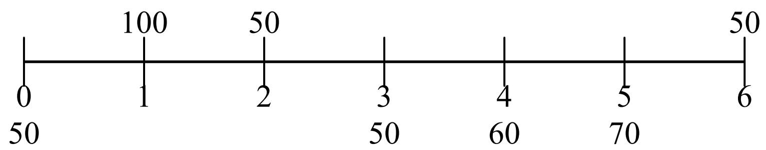
La **aplicación** cuantifica las magnitudes básicas (*inmovilización, plazo financiero medio, rendimientos absoluto y relativo, brutos y netos, valor capital, TIR, rentabilidades brutas y netas*) en función del tipo de interés del mercado. Informa de los "*parámetros críticos*", de los *"tipos de inmunización"* y de los "*intervalos de degeneración*".

La representación gráfica de la operación se realiza mediante las "*funciones financieras características*", PFM y DUR, y sus auxiliares HIP y DES[12].

No pretendemos extendernos más en el análisis expuesto, que figura detallado en las publicaciones citadas. Tan sólo a efectos ilustrativos, y sin más desarrollo, ofrecemos los resultados obtenidos en una operación compleja diseñada por su riqueza en propiedades financieras.

16. ESTUDIO NUMÉRICO DE UNA OPERACIÓN DE INVERSIÓN COMPLEJA (OFI)

Un proyecto inversor está subvencionado en su origen con 100 u.m. Durante su desarrollo se producen las aportaciones y los reintegros financieros que detalla el siguiente esquema temporal. Finalmente, el cierre definitivo del proyecto exige satisfacer gastos por importe de 50 u.m. El tipo de interés para la financiación es del 4,5%.



inputs: (100;1), (50;2)

outputs: (50;0), (50;3), (60;4), (70;5)

Son su sparámetros básicos:

$$\mathbf{C}=200;\ \mathbf{C}'=230;\ \mathbf{t}=0{,}7317;\ \ \vec{I} \equiv (200;0{,}7317;230)$$

[12] Son las funciones características y auxiliares:

PFM. $t(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(\ln\frac{\mathbf{C}'}{\mathbf{C}} - \ln\frac{\sum C'_s . e^{-\rho.T'_s}}{\sum C_r . e^{-\rho.T_r}} \right)$; DUR. $d(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(\ln\frac{\mathbf{C}'}{\mathbf{C}} - \ln\frac{\sum C'_s . T'_s . e^{-\rho.T'_s}}{\sum C_r . T_r . e^{-\rho.T_r}} \right)$

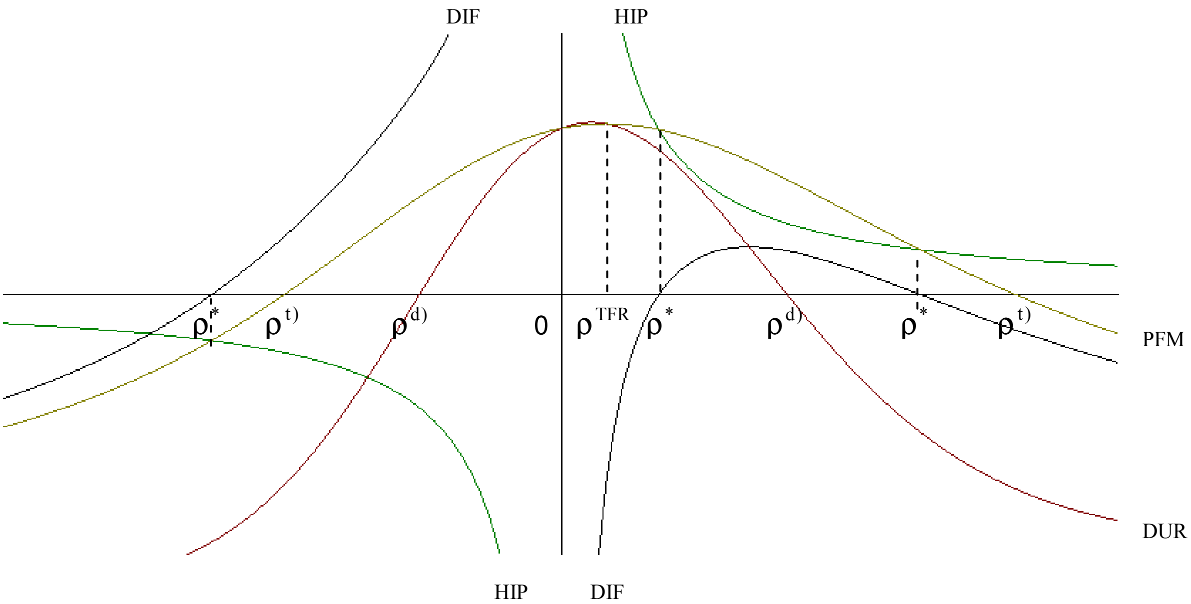
HIP. $t(\rho) = \frac{1}{\rho}\ln\frac{\mathbf{C}'}{\mathbf{C}}$; DES. $\Delta(\rho) = t(\rho) - d(\rho)$

La función DUR supone una extensión a la OFI de la *duratio* (Macauley) sólo en el sentido de elasticidad (Hicks). Otra interpretación -como un plazo financiero medio- no cumpliría la equivalencia financiera.

Resultados:

- Rendimiento bruto, $R = 30$
- Coste financiación, $I = 6{,}5454$
- Rendimiento neto, $\hat{R} = 23{,}4536$
- Valor capital, $\hat{R}_0 = 20{,}4250$
- Tasa de rendimiento bruto, TFR = 21,0467%[13]
- Tasa de rendimiento neto, TFRN = 15,8242%
- Tasa de *rentabilidad* bruta, $\partial = 4{,}5827$
- Tasa de *rentabilidad* neta, $\hat{\partial} = 3{,}5827$
- Resultados de la TIR:
  1) –50,6471%
  2) 21,6916%
  3) 106,2396%

A esta operación de inversión compleja (OFI) le corresponde la siguiente representación gráfica



ρ^{*} ≡ TIRs *tasas implícitas*

$\rho^{t)}$ ≡ *tasas de degeneración*

$\rho^{d)}$ ≡ *tasas de inmunidad (rentabilidad)*

ρ^{TFR} ≡ *tasa de inmunidad (productividad)*

[13] La TFR goza de *inmunidad financiera* para un tipo de interés de financiación del 9,5%.