

# EL APRENDIZAJE DE PROBABILIDADES: APLICACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

JAIME ARNAU GRAS y M.<sup>a</sup> TERESA FERNANDEZ TEIXIDÓ

Departamento de Psicología Experimental  
Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación  
Universidad de Barcelona



## 1. *Introducción*

El aprendizaje de probabilidades (AP), junto con el aprendizaje de conceptos, aprendizaje de pares asociados y el aprendizaje serial, constituye una de las modalidades típicas del aprendizaje humano. No obstante, sólo a partir del año 1950 en que se publica la «Teoría estadística del aprendizaje», se convierte en una área de investigación de creciente interés.

Por otra parte el estudio del AP ha ejercido una notable influencia en la investigación psicológica, dado que orientó la atención de los investigadores hacia el estudio de las formas de aprendizaje típicamente humanas. Revisando, por ejemplo, las investigaciones realizadas sobre el aprendizaje de rutina durante las décadas que precedieron al año 1950, comprobamos que se basan, fundamentalmente, en experimentos realizados con sujetos animales. Y ello se debe a una actitud, compartida por la mayoría de los psicólogos de aquel entonces, según la cual el aprendizaje era considerado como una simple estructura jerárquica (Millward, 1971). Parecía evidente, por tanto, que los principios básicos del aprendizaje podían ser descubiertos a partir del estudio del comportamiento animal. De esta forma las leyes que sobre el aprendizaje se ponían de manifiesto en experimentos de animales con laberintos podían fácilmente extenderse a los sujetos humanos. Un claro ejemplo de esta postura la encontramos en la mayoría de teorías propuestas sobre el aprendizaje (Tolman, 1932; Guthrie, 1935; Skinner, 1938; Hull, 1943, etc.).

A partir de 1950 se constata entre los psicólogos un cambio radical de actitud, y ello se puede atribuir, en parte, a la publicación, como hemos dicho, de la Teoría estadística del aprendizaje, y en parte, a la poca capacidad predictiva que ofrecían las grandes construcciones teóricas propuestas sobre el aprendizaje. La teoría estadística del aprendizaje ejerció una doble influencia en la Psicología experimental. Por un lado suscita un creciente interés hacia las formas de aprendizaje humano, y por otro introduce, en «Psicología», la utilización de los modelos matemáticos como sistemas de descripción y medida de los datos empíricos. Uno de los campos donde ha sido más fecunda la aplicación de los modelos matemáticos ha sido sin duda, el del AP, y en ello estriba, fundamentalmente su importancia.

## 2. *Origen histórico del AP*

El origen concreto del AP, al igual que el de otras temáticas psicológicas, es el estudio del aprendizaje de laberinto. El esquema experimental básico del AP, se puede comparar a un laberinto de discriminación con dos brazos

de elección. El paralelismo queda claro cuando consideramos que en el laberinto de discriminación el sujeto llega a aprender el brazo al que se halla asociada la recompensa y, en el AP, la tasa aproximada de ocurrencia de un evento.

No obstante, las investigaciones más directamente relacionadas con el AP empiezan con el estudio llevado a cabo por Humphreys (1939). Humphreys, aplicando el paradigma básico del condicionamiento pavloviano al estudio del aprendizaje verbal, establece que éste puede ser considerado como una derivación de aquel por cuya razón lo denomina «condicionamiento verbal».

El esquema básico del condicionamiento pavloviano (o clásico) puede ser descrito como una señal o estímulo neutro (denominado estímulo condicionado, EC), que es seguido, inmediatamente, después de su presentación, por un fuerte estímulo evocador de respuesta (estímulo incondicionado, EI). A medida que se repiten los ensayos se constata que una respuesta parecida a la evocada por el EI sigue a la sola presentación del EC; Humphreys parte de este esquema elemental y lo adapta a una situación de aprendizaje verbal. Para ello instruye a los Ss. que predigan «si una luz va a encenderse o no a lo largo de una serie de ensayos». Cada ensayo iba precedido por la presentación de una señal (EC) —estímulo luminoso— y a continuación el S. hacía una predicción sobre si aparecería o no una segunda señal luminosa (EI). En esta nueva versión del condicionamiento pavloviano, la segunda señal luminosa actuaba de EI, cuyo efecto era la evocación de «una fuerte respuesta de expectancia o expectación». Se esperaba, por tanto, tras una prolongada serie de ensayos que la señal inicial suscitaría, por sí sola, «la respuesta de expectancia» y como consecuencia, se habría operado el condicionamiento.

En este experimento Humphreys utilizó una simple tabla vertical (actualmente denominada tabla de Humphreys). En ella se encuentran, en posición vertical, dos bugías: la del EC (superior) y la del EI (inferior). Al mismo tiempo tiene incorporada una llave morse que el S tiene que oprimir en el caso que su predicción sea positiva (es decir, el S esperaba que la segunda luz se encendería).

La variante característica del experimento de Humphreys consiste en que el EI sigue un sistema de presentación determinado al azar y con una probabilidad de ocurrencia fija. Los resultados obtenidos mediante este experimento demostraron que los Ss. ajustaban sus predicciones a dicha probabilidad.

Posteriormente, Estes y Straughan (1954), con objeto de comprobar la capacidad predictiva de un modelo matemático, planificaron un experimento basado en una versión modificada del de Humphreys. Así, con objeto de evitar confusiones de interpretación, Estes y Straughan introdujeron dos luces y dos llaves e instruyeron a los Ss. que predijeran mediante la pulsación de la correspondiente llave cuál de las dos luces se encendería. Se trata, pues, de un procedimiento de respuesta forzada, en que se obliga al S. a oprimir en

cada uno de los ensayos, una de las dos llaves. Con ello se corrige una serie de problemas implícitos en el experimento de Humphreys. Es obvio que en el experimento de Humphreys cuando el S. no emitía respuesta alguna, esto podía ser interpretado de muchas formas (distracción, que no pensaba que se encendería la luz, un tiempo de reacción lento, etc.). Mediante la variación propuesta por Estes y Straughan el S. tiene que dar en cada uno de los ensayos, una de las dos respuestas: oprimir la llave que se encontraba a la derecha o bien a la izquierda del panel. Por otra parte, utilizan dos programas de refuerzo aleatorio en relación al EI. A título de ejemplo indicaremos que uno de los grupos del experimento pasó la prueba de forma que en el 70 % de los ensayos se encendía la luz del lado izquierdo y en el 30 %, la del lado derecho.

Estes y Straughan (1954) confirmaron, en su experimento, los resultados publicados tres años antes por Hake, Grant y Hornseth (1951), quienes comprobaron que los Ss. predicen la aparición o encendido de la luz derecha o izquierda con la misma frecuencia con que fueron reforzados. De esta forma se comprobó que los Ss. son capaces de aprender las probabilidades de aparición de dos eventos.

### 3. Paradigma básico del AP

Un experimento típico de AP puede describirse de la siguiente forma. Cada sujeto debe estar sentado frente a una mesa separada de las restantes mediante tablas de madera. Sobre la mesa se halla un panel con dos luces —derecha e izquierda— junto con las respectivas llaves o palancas de operación. Desde su posición cada S. es capaz de ver una tabla con dos bugías o luces-señal. El ensayo empieza con el encendido de las luces-señal por un intervalo de 2 segundos. Un segundo más tarde aparece la correspondiente luz o estímulo reforzador en los paneles individuales, con una duración de 0,8 segundos. En el intervalo que media entre la aparición de las luces-señal y el correspondiente refuerzo (1 segundo), el S. tiene que emitir la correspondiente respuesta de pulsación de palanca o tecla. Los ensayos están espaciados por 0,4 segundos.

La cantidad de ensayos que se utilizan en estos experimentos suele variar de 100 a 1.000 de acuerdo con los intereses del investigador. A continuación describiremos las dos situaciones básicas que, en relación al sistema de refuerzo, se dan en el AP a) la situación no-contingente, y b) la situación contingente.

3.1. *Situación no-contingente.* En la situación no-contingente, la más estudiada por los investigadores, la distribución de la probabilidad de un determinado suceso o refuerzo a lo largo de los «n» ensayos de que consta el experimento no queda afectada por las posibles respuestas dadas por los Ss.

Por tanto, la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso (encendido de la luz derecha o izquierda) se halla bajo control experimental; es decir, queda establecido o fijado previamente por el experimentador. De ahí, que el hecho de que en un ensayo concreto se encienda una de las dos luces no depende de la respuesta emitida por el S. (no es contingente a la misma), sino que depende de una programación previamente aleatorizada. En teoría de la probabilidad una secuencia de esta clase se conoce como «secuencia de Bernoulli», cuya representación diagramática viene a ser la siguiente:

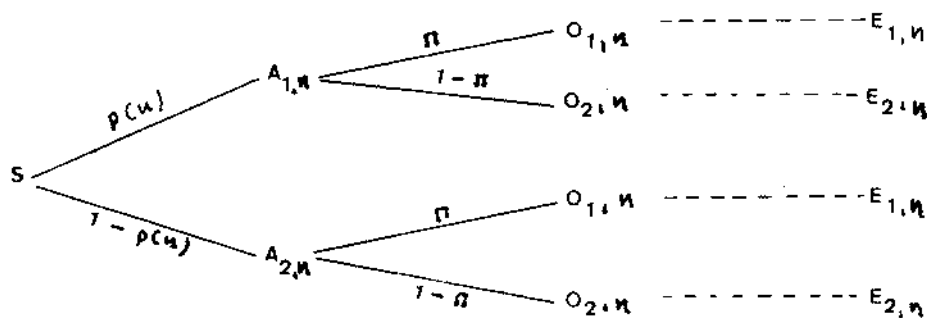


FIG. 1. Representación paradigmática del AP no-contingente. S significa señal;  $p(n)$  la probabilidad de ocurrencia de la respuesta  $A_1$  en el ensayo  $n$ ,  $p(A_{1,n})$ . La probabilidad de ocurrencia de un suceso «i» en el ensayo  $n$  viene simbolizado por  $p(O_{i,n}) = \pi$ .  $O_{i,n}$ ;  $E_{i,n}$  representa el supuesto refuerzo que recibe la respuesta como consecuencia de  $O_{i,n}$ .

Esta representación proporciona las notificaciones básicas para describir la secuencia del AP no-contingente. Las dos posibles alternativas o luces (estímulos reforzantes) vienen representadas por  $O_1$  y  $O_2$ , e indican la ocurrencia de uno de los posibles valores de «i» (es decir, luz derecha o izquierda). Las respectivas respuestas, dada por el S a estos dos eventos, quedan simbolizadas por  $A_1$  y  $A_2$ . Por último,  $E_{i,n}$ , representa la consecuencia reforzante del evento una vez el S. ha emitido la respuesta. Es decir, si el E. emite la respuesta  $A_1$ , y a continuación se da  $O_1$ , se sigue una consecuencia reforzante para el S.

En los experimentos de AP la variable dependiente es la probabilidad de que la respuesta  $A_1$  ocurra en el ensayo  $n$ ,  $p(n)$ . La variable independiente es la probabilidad que tiene el evento  $O_1$  de ocurrir en el ensayo  $n$ , ( $\pi$ ). Esta probabilidad queda fijada de antemano por el experimentador.

3.2. *Situación contingente.* En la situación de AP contingente, la predicción hecha por el S. afecta «la probabilidad de ocurrencia del hecho predicho». De esta forma la probabilidad de ocurrencia de un hecho o suceso se hace condicional y por tanto dependiente de la predicción o respuesta emitida.

La representación paradigmática de un ensayo «n» con refuerzo contingente es la siguiente:

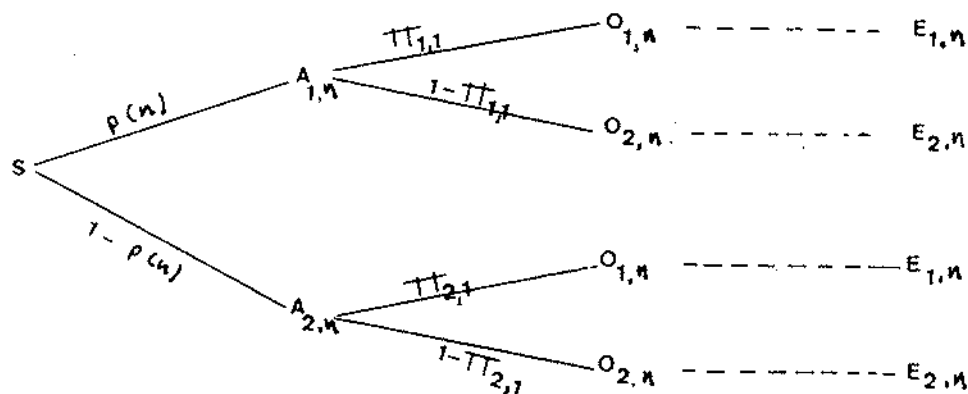


FIG. 2. Representación paradigmática del AP contingente.  $\pi_{ij}$  es la probabilidad de un resultado  $O_j$  después de una respuesta  $A_i$ . De esta forma  $[p(O_j|A_i) = \pi_{ij}]$ .

Aunque han habido pocos estudios relevantes en relación al AP contingente, se puede admitir que las confirmaciones empíricas de predicciones asintóticas para el caso contingente han sido similares a las obtenidas en el caso no-contingente.

#### 4. Fenómenos básicos del AP

Dentro del área de aprendizaje de probabilidades se han detectado una serie de fenómenos específicos como el de recencia negativa y pautas de respuestas, cuyo estudio y análisis ha suscitado el interés de algunos investigadores. Sin embargo, se puede señalar que lo que se ha comprobado con mayor generalización ha sido, fundamentalmente, los fenómenos de *apareo de frecuencias* y *apareo de probabilidad*.

Un hecho ampliamente verificable en los trabajos de AP es que «la frecuencia relativa de las respuestas de predicción de un individuo tiende a reflejar, a largo plazo, las frecuencias reales de los correspondientes sucesos» (Estes, 1972, p. 82). En efecto, si  $p_i(n)$  simboliza la proporción de casos en que un S predice el resultado «i» en los  $n$  primeros ensayos de una serie, y  $\pi_i(n)$ , la proporción real de ocurrencia, se puede afirmar que a medida que aumente el número de ensayos ( $n$ ),  $p_i(n)$  tiende a acercarse a  $\pi_i(n)$ .

Se ha podido verificar experimentalmente que cuando un sujeto realiza una gran cantidad de ensayos, se produce dicha tendencia, tendencia que se pone de manifiesto para grupos de individuos. Este fenómeno de ajuste o

$$P_{i,n+1} = \pi_i[(1 - s/N) P_{i,n} + s/N] \quad (2)$$

mientras que con una probabilidad  $1 - \pi_i$  de que se dé otro resultado, la cantidad de información de que dispondrá el sujeto vendrá dada por:

$$P_{i,n+1} = (1 - \pi_i) (1 - s/N) P_{i,n} \quad (3)$$

La ecuación (2) se aplica a aquellos casos en que todos los elementos que han sido muestreados se asocian con el resultado «i» del ensayo. Es decir, en las situaciones en que la predicción hecha por el sujeto coincide con el resultado del ensayo. En cambio, la ecuación (3) se refiere a los casos en que predicción y evento no coinciden; es decir, cuando se da un resultado «j» distinto de «i». En tal caso todos los elementos de la muestra que se hallaban asociados a «i» se conectan con «j», con lo que se reduce el número de elementos de la población asociados a «i».

En general, la expectativa de « $P_{i,n}$ » a lo largo de toda la serie posible de ensayos es:

$$\begin{aligned} P_{i,n+1} &= \pi_i[(1 - s/N)P_{i,n} + s/N] + (1 - \pi_i) (1 - s/N)P_{i,n} = \\ &= (1 - s/N)P_{i,n} + \pi_i s/N \end{aligned} \quad (4)$$

La curva media de aprendizaje que se deriva de la ecuación (4) es la siguiente:

$$P_{i,n} = \pi_i - (\pi_i - P_{i,1}) (1 - s/N)^{n-1} \quad (5)$$

La ecuación anterior que es la de una curva de crecimiento positiva posee un parámetro,  $s/N$ , que debe ser inferido o estimado a partir de los datos. Este parámetro refleja la tasa de aprendizaje, y lógicamente ello se debe a las diferentes capacidades de los individuos, y por ello no se puede derivar teóricamente.

## 5.2. Modelo lineal

El modelo lineal fue propuesto inicialmente por Bush y Mosteller (1951), y ha tenido una amplia aplicación en experimentos de predicción binaria con «sucesos reforzantes controlados por el experimentador». El modelo de Bush y Mosteller utiliza el operador matemático «Q», que aplicado a la probabilidad «p» produce un nuevo valor de probabilidad  $Qp$ . El modelo presupone que este nuevo valor « $Qp$ » puede ser expresado en términos del anterior valor de «p». El operador es utilizado para conseguir una transformación lineal de «p» y su desarrollo puede quedar expresado en esta ecuación:

$$Qp = p + a(1 - p) - bp \quad (6)$$



Este constituye el operador básico del modelo, y la «ecuación (6)» afirman Bush y Mosteller, 1951, p. 315, «será usada como piedra angular para nuestro desarrollo teórico». A continuación, Bush y Mosteller pasan a definir los parámetros de dicha transformación:

«Puesto que "a" es positivo, se observa que el término,  $a(1-p)$ , de la ecuación (6) corresponde a un incremento en  $p$  que es proporcional al incremento máximo posible  $(1-p)$ . Por otra parte, puesto que  $b$  es positivo, el término  $-bp$ , corresponde a un decremento en  $p$  que es proporcional al decremento máximo posible,  $-p$ . Por consiguiente, asociamos con el parámetro  $a$  aquellos factores que siempre incrementan la probabilidad, y con el parámetro  $b$  aquellos factores que siempre decrementarán la probabilidad» (Bush y Mosteller, 1951, página 315).

Esta es la razón básica por la que convierten dicho operador en la expresión propuesta en la ecuación (6). Imaginemos, un tipo de experimento en el que el S. tiene que predecir el encendido de una de dos luces (izquierda y derecha). La aparición o encendido de la luz izquierda ( $O_1$ ) incrementa la probabilidad  $P_n$ , de que el sujeto tienda a presionar el botón izquierdo hasta alcanzar un punto límite  $\lambda = 1$ . El encendido de la luz derecha reduce  $p_n$  hasta alcanzar el punto límite  $\lambda = 0$ . Introduzcamos los siguientes presupuestos:

- a) Todos los eventos son complementarios y, por consiguiente, los parámetros tienen igual tasa ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ).
- b) Los puntos límites son, también, complementarios ( $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$ ).

De acuerdo con estos presupuestos los operadores y reglas de aplicación del modelo quedan establecidas en los siguientes términos:

$$P_{n+1} \begin{cases} Q_1 P_n = \alpha P_n + (1 - \alpha)\lambda & \text{si } \lambda = 1 \\ Q_2 P_n = \alpha P_n & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Recusivamente de la ecuación (6) se obtiene la siguiente ecuación general de aprendizaje:

$$P_{i,n+1} = \alpha_{ij} P_{i,n} + (1 - \alpha_{ij})\lambda_j \quad (7)$$

La ecuación (7) puede interpretarse en el sentido de que en un experimento de dos posibles alternativas la probabilidad de una respuesta  $A_i$  por parte del sujeto, siendo  $i = 1, 2$ , en el ensayo  $n + 1$ , es igual a la probabilidad  $p_i$  que poseía el sujeto en el ensayo  $n$  ( $p_{i,n}$ ), por la probabilidad de ocu-

encia de «i» para cada uno de los dos posibles resultados «j», más lo que falta para que los valores de «i» alcancen su asintota gracias al refuerzo o resultado del ensayo  $(1 - \alpha_j)\lambda_j$ .

Los modelos lineales fueron sistemáticamente tratados por Bush y Mosteller (1959), siendo también utilizados por muchos otros autores (Estes y Straughan, 1954; Estes y Suppes, 1959; Friedman y col., 1964, etc.).

### 5.3. Modelo lineal simple

Estes, dentro del marco de su teoría estadística del aprendizaje (Estes y Suppes, 1959; Estes, 1972), realiza una adaptación del modelo lineal de Bush y Mosteller, denominado «modelo lineal simple». Para ello salva la dificultad que podría suponer su especial concepción del estímulo, partiendo del supuesto que en aquellos experimentos en los que los estímulos disponibles son los mismos en todos los ensayos puede prescindirse del postulado sobre el «muestreo del estímulo». De acuerdo con esta adaptación, establece los siguientes postulados:

1. Si el sujeto, en el ensayo  $n$ , recibe una consecuencia reforzante para su conducta ( $E_i$ ), la probabilidad de la respuesta «i» en el ensayo  $n + 1$  viene dado por la siguiente ecuación:

$$P_{i,n+1} = (1 - \beta) P_{i,n} + \beta \quad (8)$$

Es decir, si ocurre un resultado reforzante ( $E_i$ ), correspondiente a la respuesta  $A_i$  en el ensayo  $n$ , independientemente de la respuesta que se haya dado en el ensayo « $n$ », la probabilidad de  $A_i$ ,  $P_{i,n}$ , aumenta por una transformación lineal del valor que tenía anteriormente.

2. Si el sujeto recibe una consecuencia reforzante negativa ( $E_j$ ), siendo  $j \neq i$ , y  $j \neq 0$ , en el ensayo  $n$ , se obtiene lo siguiente:

$$P_{i,n+1} = (1 - \beta) P_{i,n} \quad (9)$$

Lo cual significa que si en el ensayo « $n$ » no ocurre un resultado distinto de  $E_i$ , la probabilidad de la respuesta decrece, debido a una transformación lineal de su antiguo valor.

3. Si el sujeto recibe un hecho o consecuencia  $E_0$  en el ensayo  $n$ , la probabilidad no varía:

$$P_{i,n+1} = P_{i,n} \quad (10)$$

Este axioma hace referencia a la ocurrencia de un hecho neutral ( $E_0$ ), en cuyo caso la probabilidad anterior no cambia.

Aplicando este modelo a un tipo de AP no-contingente, de forma que  $\pi_i$  sea la probabilidad de ocurrencia del resultado «i» en cualquier ensayo, y  $1 - \pi_i$ , la probabilidad de que se dé otro resultado, el modelo anterior queda modificado en los siguientes términos:

$$P_{i,n+1} = \pi_i[(1 - \beta) P_{i,n} + \beta] \quad (11)$$

Lo cual significa la probabilidad de que un sujeto prediga el resultado «i» en el ensayo  $n + 1$ , después de haber recibido un refuerzo positivo en el ensayo anterior. En caso contrario, la probabilidad resultante es la siguiente:

$$P_{i,n+1} = (1 - \pi_i) (1 - \beta) P_{i,n} \quad (12)$$

La ecuación (12) representa la probabilidad de que el sujeto prediga en el ensayo  $n + 1$  el resultado «i» para aquellos casos en los que su respuesta en el ensayo anterior no hubiese sido reforzada.

A partir de las ecuaciones (11) y (12) se puede llegar a la expresión general de la probabilidad de predicción del resultado «i»:

$$\begin{aligned} P_{i,n+1} &= \pi_i[(1 - \beta) P_{i,n} + \beta] + (1 - \pi_i) (1 - \beta) P_{i,n} = \\ &= (1 - \beta) P_{i,n} + \pi_i \beta \end{aligned} \quad (13)$$

De acuerdo con los axiomas del modelo lineal simple, la curva media de aprendizaje queda establecida en los siguientes términos:

$$p(A_{i,n}) = \pi_i - [\pi_i - p(A_{i,1})] (1 - \beta)^{n-1} \quad (14)$$

Siendo  $A_i$  una de las posibles respuestas que puede emitir el sujeto, y  $\pi_i$  la probabilidad de ocurrencia del evento «i». Dicha probabilidad queda fijada previamente por el experimentador. Asimismo, el valor del parámetro  $\beta$  tiene que ser estimado a partir de los datos.

Si en el modelo lineal, propuesto por Bush y Mosteller, se introducen los siguientes presupuestos simplificadores (Estes, 1972):  $\alpha_{ij} = 1 - \beta$ , para todo  $i$  y  $j$ ;  $\lambda_j = 1$ , si  $j = i$  y,  $\lambda_j = 0$ , si  $j \neq i$ , se llega a la conclusión de que el modelo lineal simple es similar al modelo propuesto por Bush y Mosteller.

## 6. Aplicación del modelo lineal simple al AP

Es obvio constatar, en función de dicho modelo, que si un resultado  $O_i$ , al que va asociado una consecuencia reforzante  $E_i$ , ocurre indefinidamente en cada ensayo, la probabilidad de emisión de la respuesta  $A_i$  alcanzará, en

alguno de los ensayos, la unidad. Al mismo tiempo, la tasa con que la probabilidad « $p_{j,n}$ » alcanzará la asíntota depende, lógicamente, del valor  $\pi$ .

El problema, sin embargo, cambia totalmente, cuando en la situación experimental pueden darse dos ocurrencias,  $O_1$  y  $O_2$ , que se presentan al azar con probabilidades  $\pi$  para  $O_1$  y  $1 - \pi$  para  $O_2$ . Consideremos las implicaciones del modelo a partir de esta situación.

En una situación de refuerzo aleatorio, la ecuación (8) será aplicable a la proporción de ensayos, y la ecuación (9) a la proporción  $1 - \pi$ . Combinando estas dos ecuaciones, la probabilidad promedia ( $p$ ) de la respuesta  $A_1$  después del ensayo  $n + 1$  quedará determinada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \pi[(1 - \delta) p_n + \delta] + (1 - \pi)(1 - \delta)p_n = \\ &= \pi(1 - \delta) p_n + \pi\delta + (1 - \pi)(1 - \delta)p_n = \\ &= (1 - \delta) p_n(\pi + 1 - \delta) + \pi\delta = \\ &= (1 - \delta) p_n + \pi\delta \end{aligned} \quad (15)$$

Si un grupo de sujetos empieza un experimento con un valor  $p(A_{1,1})$  al final del primer ensayo, tendremos para el segundo ensayo, la siguiente probabilidad:

$$p(A_{1,2}) = (1 - \delta) p(A_{1,1}) + \pi\delta.$$

De igual modo, la probabilidad para el tercer ensayo será:

$$\begin{aligned} p(A_{1,3}) &= (1 - \delta) [(1 - \delta) p(A_{1,1}) + \pi\delta] + \pi\delta = \\ &= \pi - [\pi - p(A_{1,1})] (1 - \delta)^2 \end{aligned}$$

y para el final del cuarto ensayo:

$$p(A_{1,4}) = \pi - [\pi - p(A_{1,1})] (1 - \delta)^3, \quad \text{etc...}$$

Generalizando dicha expresión mediante inducción matemática, se puede llegar a establecer la siguiente hipótesis para el final del  $n$ -ésimo ensayo:

$$p(A_{1,n}) = \pi - [\pi - p(A_{1,1})] (1 - \delta)^{n-1} \quad (16)$$

Puesto que  $1 - \delta$  es una fracción constante, con un valor entre 0 y 1, se deduce que la ecuación (16) representa una curva de crecimiento negativamente acelerada, que va desde el valor inicial ( $p(A_{1,1})$ ) hasta la asíntota  $\pi$ .

Es necesario, por otra parte, para confirmar las predicciones teóricas que se obtienen a partir de la fórmula (16), diseñar un experimento de AP, y comprobar una vez estimado el parámetro, hasta qué punto dichas predic-

ciones coinciden o no con los resultados empíricos del experimento. Sólo así tendremos una verificación experimental del modelo.

## APLICACIÓN DEL MODELO SIMPLE

### *Experimento*

*Método.* El experimento se realizó en una habitación donde estaba instalado el proyector de diapositivas. Los sujetos, en grupos de tres, se sentaron en una mesa delante de la pantalla y se entregó a cada uno una hoja de respuestas.

El orden de presentación de los estímulos se realizó al azar y fue el mismo para todos los sujetos, siendo el tiempo de exposición de cada estímulo de 2 segundos; el tiempo que mediaba entre la presentación de dos estímulos (2 segundos con la pantalla en blanco) era utilizado para que los sujetos dicran su predicción.

A cada sujeto se le pasaron un total de 240 diapositivas, verdes y azules, con una probabilidad de ocurrencia de 0,65 y 0,35 respectivamente.

*Sujetos.* Pertenecían a la población de estudiantes de la Universidad Central de Barcelona de tercer curso de psicología, de la que se estrajo al azar una muestra de 12 sujetos.

*Procedimiento.* Los sujetos pasaron la prueba en grupos de tres, a los que se les entregó una hoja de respuestas una vez sentados. A continuación el experimentador leyó las siguientes instrucciones: «Dentro de unos momentos vamos a proyectar en la pantalla una serie de diapositivas de color verde o azul, en orden aleatorio. Vuestra tarea consistirá en predecir qué color va a aparecer en la pantalla. Deberéis efectuar la predicción en el espacio de 2 segundos en que la pantalla aparece en blanco y sólo en este tiempo; luego aparecerá en la pantalla durante 2 segundos el color y seguidamente realizaréis otra predicción hasta finalizar la prueba. Deberéis escribir «V» cuando creáis que va a aparecer el color verde y una «A» cuando creáis que va a aparecer el color azul. Si alguno no ha entendido bien lo que se os ha dicho que lo pregunte.»

*Resultados.* Las frecuencias medias totales de predicción al color verde fue 140,166 siendo la frecuencia real de 156 y la proporción de predicciones al color verde en el último bloque de 40 ensayos fue 0,622. Estos resultados confirman la teoría del aprendizaje de probabilidades, en sus dos aspectos básicos: apareo de frecuencias y apareo de probabilidades.

Si bien, a nivel empírico los resultados del experimento confirman plenamente las expectativas relativas al aprendizaje de probabilidades, nuestro interés ha sido el de aplicar el modelo lineal simple propuesto por Estes.

En la aplicación del modelo lineal simple a nuestra situación experimental, se establece que el sujeto sólo puede dar una de las dos respuestas siguientes:  $A_1$  (color verde) y  $A_2$  (color azul); siendo, al mismo tiempo, los eventos reforzantes,  $E_1$  (o aparición en pantalla del color verde) y  $E_2$  (aparición del color azul). La probabilidad de que el sujeto emita la respuesta  $A_1$  en el ensayo siguiente se calcula a partir de las ecuaciones (8) y (9) y depende, por otra parte, de la ocurrencia de  $E_1$  ó  $E_2$ , cuyas probabilidades teóricas de aparición son 0,65 y 0,35, respectivamente.

Introduciendo una modificación a la ecuación general (14) que representa la curva media de aprendizaje en un ensayo dado, tenemos:

$$p(A_{1,n}) = \pi - [\pi - p(A_{1,0})] (1 - \beta)^{n-1} \quad (14a)$$

expresión en la que se considera el primer ensayo como ensayo «0». Del mismo modo que mediante (14a) se puede estimar el valor de « $p_n$ » para cada ensayo, podemos buscar la proporción promedio de respuestas « $A_1$ » para cada bloque de 20 ensayos. Para ello llamamos « $m$ » al número del bloque que puede tomar los valores  $k = 1, 2, \dots, 12$ . La proporción promedio de respuestas « $A_1$ » en un bloque es igual a la suma de las proporciones de respuesta « $A_1$ » de cada ensayo dividido por el número de ensayos, así se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(m)} &= \frac{P_{(n)} + P_{(n+1)} + \dots + P_{(n+20)}}{20} = \\ &= \pi - \frac{[\pi - p_{(0)}] (1 - \beta)^{20(m-1)}}{20 \beta} = [1 - (1 - \beta)^{20}] \end{aligned} \quad (15)$$

A partir de la ecuación (15) se puede obtener la curva teórica, sustituyendo  $p_{(0)}$  por 0,50 y  $\beta$  por su valor estimado a partir de los datos. No obstante, para obtener más exactitud se sustituye el valor  $p_{(0)}$  por  $\bar{P}_{(1)}$  o proporción de color verde predicha en el primer bloque:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(1)} &= \pi - \frac{[\pi - p_{(0)}] (1 - \beta)^{20(1-1)}}{20 \beta} = [1 - (1 - \beta)^{20}] \\ \bar{\bar{P}}_{(1)} &= \pi - \frac{[\pi - p_{(0)}]}{20 \beta} = [1 - (1 - \beta)^{20}] \end{aligned}$$

despejando  $[\pi - p_{(0)}]$ . Se tiene:

$$[\pi - p_{(0)}] = \frac{[\pi - \bar{P}_{(1)}] 20 \vartheta}{1 - (1 - \vartheta)^{20}}$$

sustituyendo en la ecuación (15), se obtiene (15a):

$$P_{(m)} = \pi - [\pi - \bar{P}_{(1)}] (1 - \vartheta)^{20(m-1)} \quad (15a)$$

con la que calculamos la curva teórica; y donde  $\bar{P}_{(1)}$  es 0,496,  $\pi$  es 0,65 y el parámetro  $\vartheta$  se estima en la ecuación (15a) con la suma de todos los valores de  $\bar{P}_{(m)}$  obtenidos en los  $k$  bloques de ensayos. El valor del total de  $\bar{P}_{(m)}$ , se obtiene de los datos empíricos sumando las proporciones medias de respuesta «A<sub>1</sub>» cuyo valor es 7,01. Aplicando este valor a la ecuación (15a) y despejando  $\vartheta$ , se obtiene el valor de 0,0108:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \bar{P}_{(m)} &= \pi - [\pi - \bar{P}_{(1)}] (1 - \vartheta)^{20(m-1)} = \\ &= k\pi - [\pi - \bar{P}_{(1)}] \frac{[1 - (1 - \vartheta)^{20k}]}{1 - (1 - \vartheta)^{20}} \end{aligned}$$

Por último se calculan las curvas teóricas, mediante la ecuación (15a) para  $\pi = 0,65$ ;  $\bar{P}_{(1)} = 0,496$  y  $\vartheta = 0,0108$ . Los valores resultantes constituyen las probabilidades medias de predicciones «E<sub>1</sub>» para cada bloque de 20 ensayos. Estos valores están recogidos en la tabla 1 y representados en la figura n.º 3.

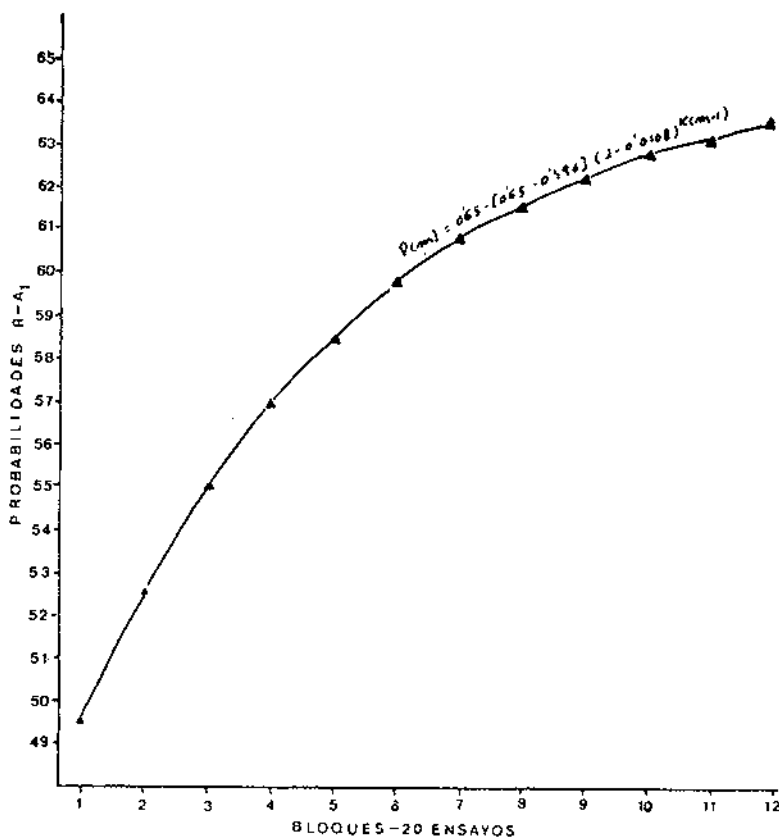


FIG-3) CURVA TEORICA DE APRENDIZAJE

TABLA 1

Probabilidades teóricas y empíricas de predicción «E<sub>1</sub>»,  
para 12 bloques de 20 ensayos

Bloques	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Empíricas	.496	.542	.525	.546	.550	.567	.571	.604	.671	.692	.650	.596
Teóricas	.496	.546	.550	.570	.585	.598	.608	.616	.623	.628	.632	.636

Aplicando el mismo procedimiento que se ha utilizado para hallar la curva teórica media de aprendizaje, de todo el grupo, se pueden hallar las curvas de aprendizaje individuales para comprobar si se cumple la teoría estadística que predice que las curvas individuales también se acercan a la asíntota. Al mismo tiempo comprobaremos, si las diferencias individuales



que se producen durante el aprendizaje se reflejan por alguna diferencia entre la curva media teórica y las empíricas representadas en la figura 4. Los valores de  $\beta$  individuales son: 0,0028; 0,0250; 0,0043; 0,0100; 0,0150; 0,0400; 0,0220; 0,0110; 0,0040; 0,0060; 0,0040 y 0,0250.

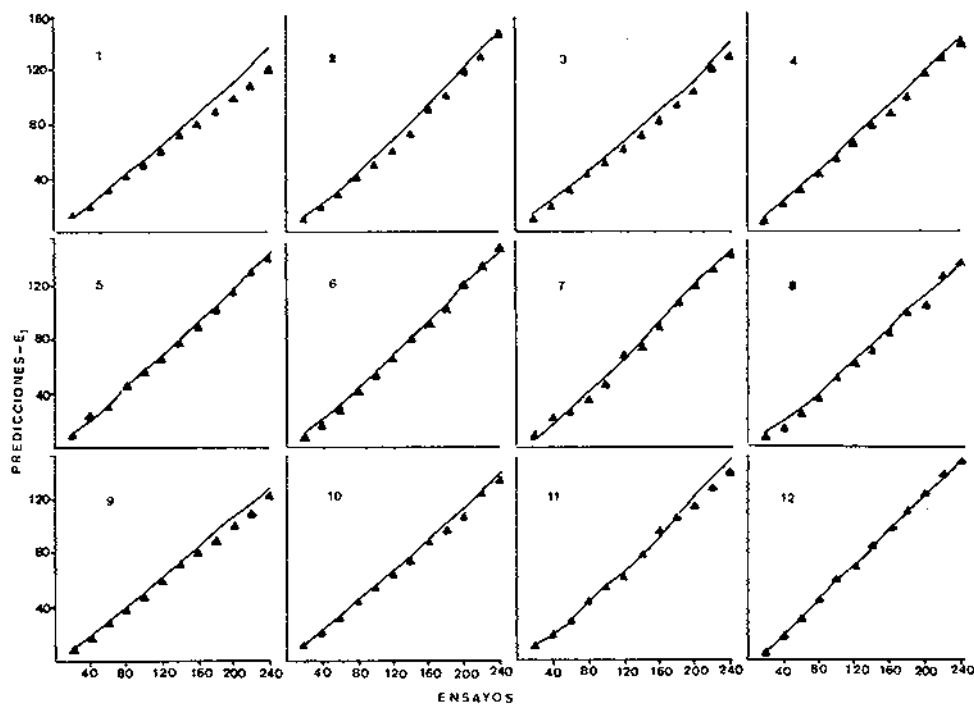


FIG. (4) CURVAS ACOMODATIVAS DE RESPUESTA EMPÍRICAS Y TEÓRICAS INDIVIDUALES

## RESUMEN

Una de las áreas que en estos últimos años ha suscitado mayor interés entre los psicólogos experimentales ha sido, sin duda, la del aprendizaje de probabilidad. En este trabajo se presenta un estudio teórico de los aspectos más importantes que se han descubierto con respecto a este tipo de aprendizaje, al tiempo que se presentan los paradigmas y modalidades básicas del aprendizaje de probabilidad. A continuación se analizan dos modelos matemáticos básicos que se han aplicado a este tipo de fenómenos: El modelo de tamaño fijo de muestra y el modelo lineal. Este último ha sido adaptado por Estes dentro de su teoría estadística del aprendizaje, dando lugar al modelo lineal simple.

La segunda parte del trabajo consiste en la presentación de un experi-

mento de aprendizaje de probabilidad con cuyos resultados se aplicó el modelo lineal simple de Estes. En este experimento se utilizaron 12 sujetos que tuvieron que hacer 240 predicciones en relación a dos posibles resultados —verde y azul— con probabilidades de ocurrencia teórica de 0,65 y 0,35 respectivamente. Después de haber aplicado el modelo se pudo comprobar que existía en gran ajuste entre las probabilidades teóricas y las empíricas.

## RESUMÉ

L'un des domaines qui pendant ces dernières années a suscité davantage d'intérêt parmi les psychologues expérimentaux a sans doute été celui de l'apprentissage de probabilité. L'A. présente ici une étude théorique des principales découvertes par rapport à ce genre d'apprentissage, ainsi que les paradigmes et les modalités essentielles de l'apprentissage de probabilité. Sont ensuite analysés deux modèles mathématiques de base qui ont été appliqués à ces phénomènes: le modèle d'échantillon à dimension fixe et le modèle linéaire. Celui-ci a été adapté par Estes dans le cadre de sa théorie statistique de l'apprentissage, devenant ainsi le modèle linéaire simple.

Dans la deuxième partie de l'article l'A. rend compte d'une expérimentation d'apprentissage de probabilité, dont les résultats ont été soumis à l'application du modèle linéaire simple d'Estes. Douze sujets furent utilisés, ayant à faire 240 prédictions par rapport à deux résultats possibles —vert et bleu— avec des probabilités d'occurrence théorique de 0,65 et 0,35. Après l'application du modèle il a été constaté qu'il y avait un grand ajustement entre probabilités théoriques et probabilités empiriques.

## SUMMARY

The probability learning is, no doubt, one of the areas which, over the last years, has roused the strongest interest among experimental psychologists. The article is a theoretical investigation of the most important aspects discovered in relation with this type of learning. It also presents the paradigms and basic modes of probability learning.

It then goes on to analyze two basic mathematical models, which have been applied to this type of phenomena: the model of the fixed-size sample, and the lineal model. The latter has been adapted by Estes in the frame of his statistical learning theory, resulting in the simple lineal model.

The second half of the investigation presents an experiment of probability learning, to the results of which Estes' simple lineal model was applied. In this experiment, 12 subjects were asked to make 240 predictions in relation with two possible results —green and blue— the theoretic occurrence probabilities being 0,65 and 0,35 respectively. By applying the model, a con-

siderable adjustment between the theoretical and empirical probabilities could be verified.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- BUSH, R. R. y MOSTELLER, F.: A mathematical model for simple learning. *Psychol. Rev.*, 1951, 58, 313-323.
- BUSH, R. R. y MOSTELLER, F.: *Stochastics models for learning*. Nueva York: J. Wiley, 1955.
- ESTES, W. ff.: Toward a statistical theory of learning. *Psychol. Rev.*, 1950, 57, 94-107.
- ESTES, W. K.: Research and theory on probability learning. *J. amer. statis. Assoc.*, 1972, 67, 81-102.
- ESTES, W. K. y STRAUGHAN, J. H.: Analysis of a verbal conditioning situation in terms of statistical learning. *J. exp. Psychol.*, 1954, 47, 225-234.
- ESTES, W. K. y SUPPES, P.: Foundations of linear models. En R. R. Bush y W. K. Estes (Eds.), *Studies in mathematical learning theory*. Stanford Univ. Press, 1959, pp. 137-179.
- FRIEDMAN, M. P. y col.: Two-choice behavior under extended training with shifting probabilities of reinforcement. En R. C. Atkinson (Ed.), *Studies in mathematical psychology*. Stanford: Stanford Univ. Pres., 1964, pp. 250-316.
- GUTHRIE, E. R.: *The psychology of learning*. Nueva York: Harper y Row, 1935.
- GRANT, D. A.; HAKE, H. W., y HORNSETH, J. P.: Acquisition and extinction of a verbal conditioned response with differing percentages of reinforcement. *J. exp. Psychol.* 1951, 42, 1-5.
- HULL, C. L.: *Principles of psychology*. Nueva York: Appleton-Century-Crofts, 1943.
- HUMPHREYS, M. E.: Acquisition and extinction of verbal expectations in a situation analogous to conditioning. *J. exp. Psychol.*, 1939, 25, 294-301.
- MILLWARD, R. B.: Theoretical and experimental approaches to human learning. En J. W. Kling y L. A. Riggs (Eds.), *Woodworth and Schlosberg's Experimental Psychology*. Nueva York: Holt, 1971, pp. 905-979.
- SKINNER, B. F.: *The behavior of organisms*. Nueva York: Appleton-Century-Crofts, 1938.
- TOLMAN, E. C.: *Purposive behavior in animals and men*. Nueva York: Appleton-Century-Crofts, 1932.

