Universitat de Barcelona

Electrònica Aplicada

Resolució dels Problemes

Departament d'Electrònica
Martí i Franquès, 1
08028 Barcelona (Spain)

Dr. Jordi Colomer
Anna Gené
Dr. Pere Miribel
Dr. Antonio Pardo

ÍNDEX

SECCIÓ 1. INTRODUCCIÓ

1) Una esfera conductora amb càrrega +Q es posa en contacte amb una altra esfera, també conductora, idèntica en mida a l'anterior i amb una càrrega nul·la. a) Quina és la càrrega de cada esfera després del contacte? Estant les esferes en contacte, una barra carregada positivament s'apropa a una de les esferes, causant una redistribució de les càrregues, de manera que la més pròxima a la barra té càrrega –Q. b) Quina és la càrrega de l'altra esfera?

a) La càrrega es distribueix entre les dos esferes. $Q = +\frac{1}{2}Q$

b) $x = 2Q$

$-Q + x = +Q \;\; \rightarrow x = -Q - Q = -2Q$

2) Calcular la relació entre la força elèctrica i la gravitatòria exercides entre el protó i l'electró d'un àtom d'Hidrogen.

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2} \qquad F_m = \frac{G\, m_p\, m_e}{r^2}$$

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{ke^2}{G\, m_p\, m_e} = \frac{(8.99 \cdot 10^9 \cdot \; (1.6 \cdot 10^{-19})^2)}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \; 1.6 \cdot 10^{-27} \cdot \; 9.1 \cdot 10^{-31}} = 2.27 \cdot 10^{29}$$

3) Un condensador de plaques paral·leles està format per dos conductors quadrats de 10cm de costat, separats 1mm de distància.

a) calcular la seva capacitat.

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \quad on \ \varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$$
$$\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$$
$$\varepsilon_r = 1.004$$

$$C = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r A}{d} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1.004 \cdot 100cm^2}{1mm} \cdot \frac{1000mm}{1m} \cdot \frac{1m^2}{10000cm^2}$$
$$= 88.8 \cdot 10^{-12} F$$

$$C = 88.8pF$$

b) Si es carrega a 12V. Quanta energia transfereix?

$$Q = C \cdot V = 88.8 \cdot 10^{-12} \cdot 12 = 1.06 \cdot 10^{-9} \simeq 1.1nC$$

c) Quines dimensions haurien de tenir les plaques per que la capacitat fos d'1 Faraday?

$$1F = \frac{\varepsilon A}{d} \rightarrow A = \frac{1 \cdot 0.001}{8.88 \cdot 10^{-12}} = 1.1 \cdot 10^8 m$$

$$l = \sqrt{A} = 10.6km$$

4) Un conductor de plaques paral·leles i quadrades, de costat 14cm i separades 2mm, es connecten a una bateria de 12V. Quina és la càrrega del condensador? Quanta energia s'emmagatzema dins el condensador? Es desconnecta de la bateria i es separen les plaques $3.5mm$. com varia la càrrega al modificar la separació? Quin és el voltatge final en aquest cas?

$$Q = C \cdot V$$

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.14^2}{0.002} = 86.7pF$$

$$Q = 86.7pF \cdot 12V = 1.04nC$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 6.24nJ$$

La càrrega no varia en desconnectar la bateria i separar les plaques, canvia C.

$$U_o = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_o} \qquad U_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_f}$$

$$\Delta U = U_f - U_o = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_o}\right) = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{d_f}{\varepsilon_o A} - \frac{d_o}{\varepsilon_o A}\right) = \frac{1}{2}\ \frac{Q^2}{\varepsilon_o A}\left(d_f - d_o\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ \frac{Q^2 \cdot d_o}{\varepsilon_o A}\left(\frac{d_f}{d_o} - 1\right)$$

$$\Delta U = U_o\left(\frac{d_f}{d_o} - 1\right) = 6.24nJ\left(\frac{3.5}{2} - 1\right) \simeq 4.7nJ$$

<u>Una altra manera de veure-ho</u>

Al separar les plaques ha de créixer l'energia potencial. Les càrregues de diferent signe s'atreuen més, s'ha de fer més treball per separar-les.

$$\Delta U = U_f - U_o = \frac{1}{2}\ QV - \frac{1}{2}QV_o = \frac{1}{2}Q(V - V_o)$$

El voltatge és el camp per la distància

$$V = E \cdot d$$

$$V_o = E \cdot d_o$$

El camp és proporcional a la densitat de càrrega, com que la càrrega no ha canviat, $E = E_o$

$$\frac{V}{V_o} = \frac{d}{d_o} \rightarrow V = V_o\frac{d}{d_o}$$

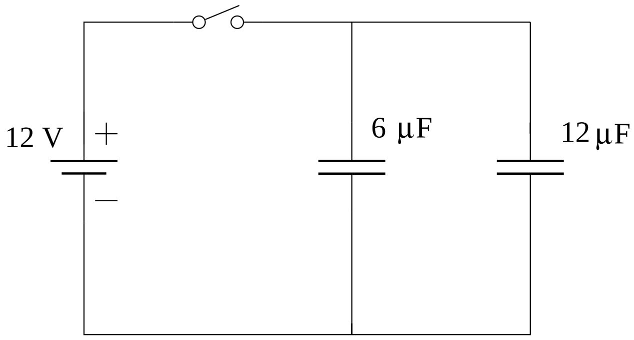
$$\Delta U = \frac{1}{2}Q(V - V_o) = \frac{1}{2}QV_o\left(\frac{d}{d_o} - 1\right) = U_o\left(\frac{d}{d_o} - 1\right)$$

$$\Delta U = 4.7nJ$$

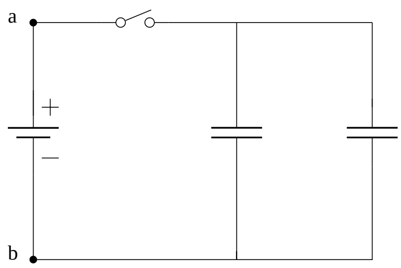
Voltatge final: $U_f = 6.2nJ + 4.7nJ = 10.9nJ$

$$U = \frac{1}{2}QV \rightarrow V = \frac{2U}{Q} \simeq 21V$$

5) Els condensadors del circuit de la figura estan inicialment descarregats. Es tanca l'interruptor i els condensadors es carreguen. Quan estan totalment carregats, s'obra l'interruptor, deixant de nou la bateria en circuit obert.



a) **Quin és el potencial de cada conductor? (Prendre com a referència 0 el terminal negatiu de la bateria)**



Una vegada carregades, el potencial sobre cada condensador és de 12V.

$V_a = 12\ ,\ \ V_b = 0V$

b) **Quina és la càrrega a cada placa dels condensadors**

$$Q_1 = C_1 \cdot V = 6\mu F \cdot 12V = 2\mu F$$
$$Q_2 = C_2 \cdot V = 12\mu F \cdot 12V = 144\mu F$$

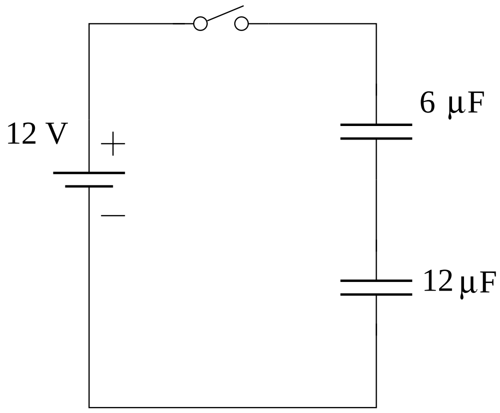
c) **Quina és la càrrega total que passa per la bateria?**

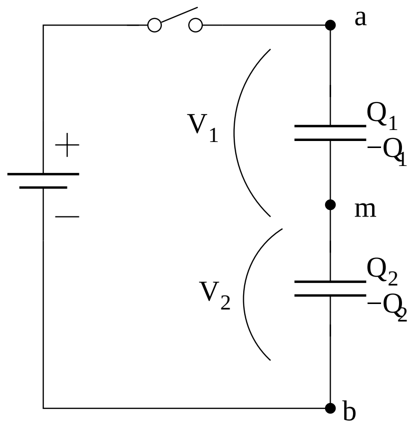
$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 216\mu F$$

d) **Quin valor tindria un condensador equivalent als dos condensadors del circuit?**

$$C_{eq} = \frac{Q_T}{V} = \frac{216\mu F}{12V} = 18\mu F$$

6) La disposició dels condensadors del problema anterior es canvia segons mostra la figura. Calcular de nou els potencials, càrregues i càrrega de la bateria, així com el condensador equivalent.





$V_1 = V_a - V_m \qquad Q_1 = C_1 \cdot V_1 = C_1(V_1 - V_m)$

$V_2 = V_m - V_b \qquad Q_2 = C_2 \cdot V_2 = C_2(V_m - V_b)$

$$V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \quad \text{però} \quad Q_1 = Q_2$$

$$V_a - V_b = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

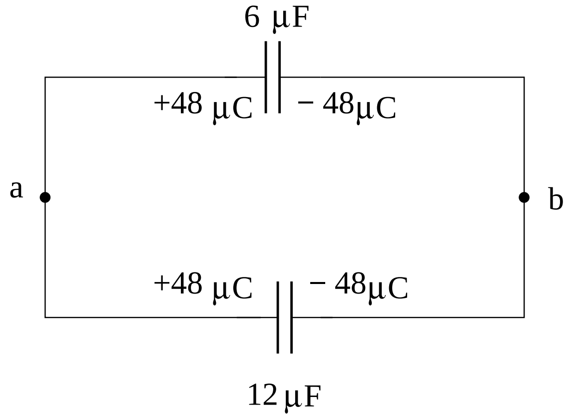
$$Q = \frac{V_a - V_b}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} = \frac{12}{\frac{1}{6\mu F} + \frac{1}{12\mu F}} = 48nC$$

Podem calcular V_m

$$V_m - V_b = \frac{Q}{C_2} \rightarrow V_m - 0 = \frac{48\mu C}{12\mu F} = 4V$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

7) Dos condensadors $C_1 = 6\ \mu F$ i $C_2 = 12\ \mu F$ estan carregats inicialment amb una càrrega $Q = 48\ \mu C$. Ambdós condensadors es connecten acuradament en un circuit com el de la figura. Determinar la diferència de potencial entre els punts a i b del circuit i la càrrega final en cada condensador. Calcular també l'energia emmagatzemada total abans de la connexió i després de la connexió.



$$C = \frac{Q}{V}$$

$$V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

La càrrega total és $96\mu C$

$Q_1 \cdot C_2 = Q_2 \cdot C_1 \rightarrow Q_1 \cdot 12 = Q_2 \cdot 6 \quad \rightarrow Q_2 = 2Q_1$

$Q_1 + Q_2 = 96 \qquad\qquad 3Q_1 = 96$

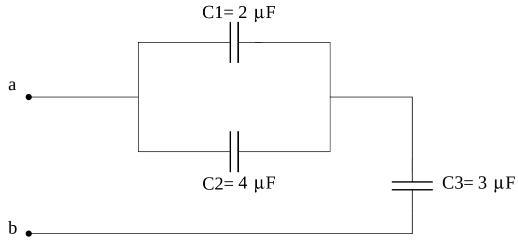
$$Q_1 = 32\mu C \quad Q_2 = 64\mu C$$

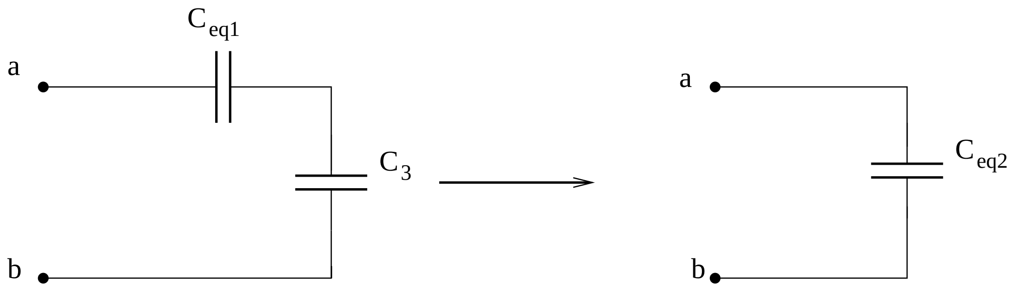
$$V_a - V_b = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{32\mu C}{6\mu F} = 5.3V$$

$$U_{o_{total}} = \frac{1}{2}\frac{Q_o^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_o^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{(48\mu C)^2}{6\mu F} + \frac{1}{2}\frac{(48\mu C)^2}{12\mu F} = 192\mu J + 96\mu J = 288\mu J$$

$$U_{f_{total}} = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{(32\mu C)^2}{6\mu F} + \frac{1}{2}\frac{(64\mu C)^2}{12\mu F} = 85.3\mu J + 170.6\ \mu J \simeq 256\mu J$$

8) Determinar la capacitat equivalent del circuit de la figura. Inicialment els condensadors estan descarregats. El circuit es connecta a una bateria de 6V entre els punts a i b. Determinar la diferència de potencial entre les plaques de cada condensador, les seves càrregues després de connectar-se a la bateria i l'energia final en cada condensador.

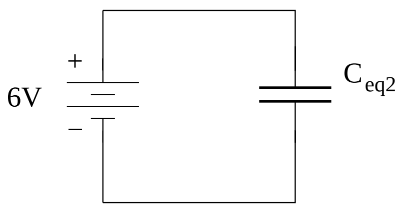




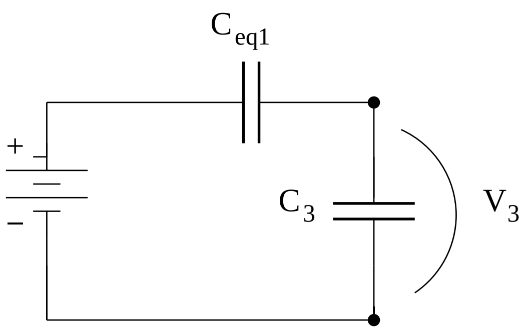
$$\mathrm{C_{eq1}} = C_1 + C_2 = 6\mu F$$

$$\mathrm{C_{eq2}} = \frac{C_{eq1} \cdot C_3}{C_{eq1} + C_3} = 2\mu F$$

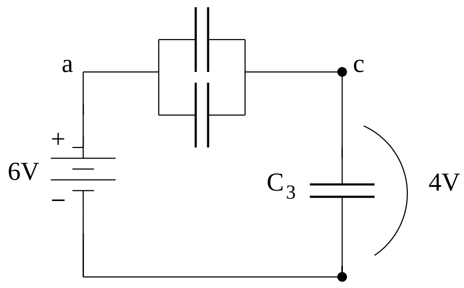
El circuit es connecta a una bateria:



$$C_{eq2} = \frac{Q}{V} \rightarrow Q = 12\mu C$$



$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3}\ , \qquad Q_3 = Q \ \rightarrow V_3 = \frac{12\mu C}{3\mu F} = 4V$$



$$V_a - V_c = 2V$$

$$2V = \frac{Q_1}{C_1} \rightarrow Q_1 = 2 \cdot 2 = 4\mu C$$

$$2V = \frac{Q_2}{C_2} \rightarrow Q_2 = 2 \cdot 4 = 8\mu C$$

$$4V = \frac{Q_3}{C_3} \rightarrow \; Q_3 = 12\mu C$$

Energia final en cada condensador:

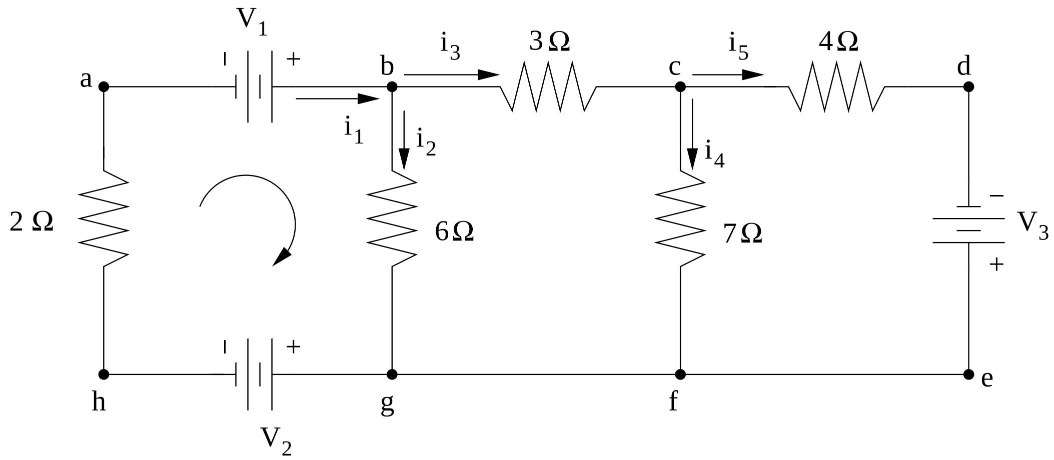
$$U_{C1} = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{(4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^{-6} J$$

$$U_{C2} = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{(8 \cdot 10^{-6})^2}{4 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^{-6} J$$

$$U_{C3} = \frac{1}{2}\frac{Q_3^2}{C_3} = \frac{1}{2}\frac{(12 \cdot 10^{-6})^2}{3 \cdot 10^{-6}} = 24 \cdot 10^{-6} J$$

<u>SECCIÓ 2. CIRCUITS AMB RESISTÈNCIES</u>

1) Donat el circuit de la figura, trobar els corrents si $\boldsymbol{V_1 = 4V}$, $\boldsymbol{V_2 = 1V}$ i $\boldsymbol{V_3 = 6V}$.



Malla *abgha* $\quad V_1 - 6I_2 - V_2 - I_1 \cdot 2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} &V_1 - 6I_2 - V_2 - I_1 \cdot 2 = 0 \\ &I_1 = I_2 + I_3 \quad \rightarrow I_2 = I_1 - I_3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} -6I_1 + 6I_3 - 2I_1 &= V_2 - V_1 \\ -8I_1 + 6I_3 &= -3 \qquad (1) \end{aligned}$$

Malla *bcfgb*

$$\left.\begin{aligned} &-I_3 \cdot 3 - I_4 \cdot 7 + 6I_2 = 0 \\ &I_3 = I_4 + I_5 \quad \rightarrow I_4 = I_3 - I_5 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} -3I_3 - 7I_3 + 7I_5 + 6I_1 - 6I_3 &= 0 \\ -16I_3 + 7I_5 + 6I_1 &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Malla cdefc $\quad -I_5 \cdot 4 + V_3 + I_4 \cdot 7 \qquad\qquad -4I_5 + 7I_3 - 7I_5 = -V_3$

$$-11I_5 + 7I_3 = -6 \quad (3)$$

$$\begin{cases} -8I_1 + 6I_3 = -3 \\ -16I_3 + 7I_5 + 6I_1 = 0 \\ -11I_5 + 7I_3 = -6 \end{cases}$$

$$I_5 = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 6 & -3 \\ 6 & -16 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 6 & -16 & 7 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{-768 - 126 - 0 - (0 + 0 - 216)}{-1408 + 0 + 0 - (0 - 392 - 396)} = \frac{-678}{-620} = 1.094\ A$$

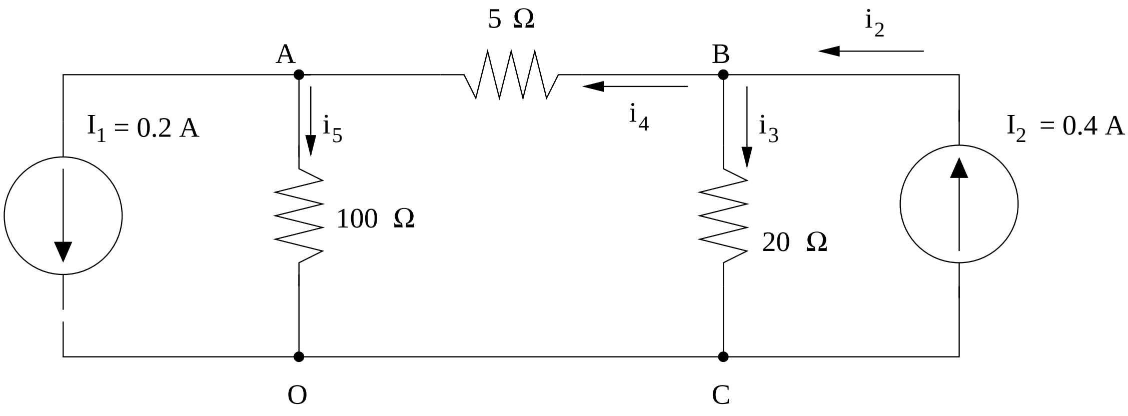
$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 6 & -16 & 7 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{(0+0+0)-(0+336+198)}{-620} = \frac{534}{620} = 0.861\ A$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -16 & 7 \\ -6 & +7 & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 6 & -16 & 7 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{-528-252+0-(0-147-0)}{-620} = 1.021\ A$$

$$I_2 = 1.021A - 0.861A = 0.160\ A$$

$$I_4 = 0.861A - 1.094A = -0.233A$$

2) Donat el circuit, determinar la caiguda de voltatge V_{AO}.



$$I_2 = I_3 + I_4$$

$$I_4 = I_5 + I_1$$

Malla ABCOA $\quad 5I_4 - 20I_3 + 100I_5 = 0$

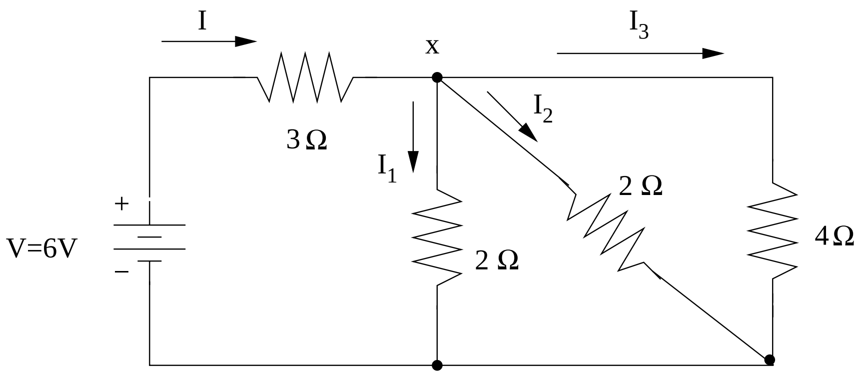
Necessitem saber I_5

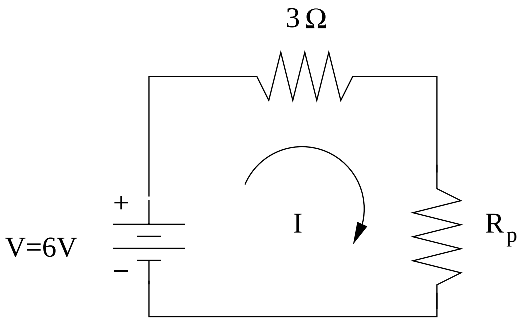
$$\left.\begin{aligned} &I_3 + I_4 = 0.4 \\ &0.2 + I_5 = I_4 \\ &5I_4 - 20I_3 + 100I_5 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &I_3 + I_4 = 0.4 \\ &I_4 - I_5 = 0.2 \\ &-20I_3 + 5I_4 + 100I_5 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$I_5 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ -20 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -20 & 5 & 100 \end{vmatrix}} = \frac{(0 - 4 + 0) - (-8 + 0 + 1)}{(100 + 20 + 0) - (0 + 0 - 5)} = \frac{3}{125} = 0.024\ A$$

$$V_{AO} = 100 \cdot 0.024 = 2.4V$$

3) La bateria de la figura té una resistència interna menyspreable. Calcular les intensitats sobre cada resistència i la potència subministrada per la bateria.





$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow R_p = \frac{4}{5}$$

$$I = \frac{V}{R_s} \quad \text{amb } R_s = 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$$

$$I = \frac{6}{19/5} = \frac{30}{19}\ A$$

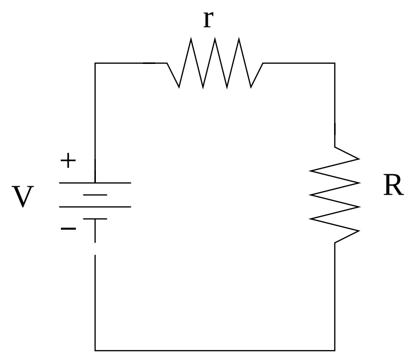
$$\left.\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ V_x &= I_1 \cdot 2 = I_2 \cdot 2 = I_3 \cdot 4 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} I_1 &= I_2 \\ I_3 &= \tfrac{I_2}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{30}{19} = 2I_2 + \frac{I_2}{2} \qquad \rightarrow \quad I_2 = \frac{30}{19} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{19} A$$

$$I_3 = \frac{6}{19} A$$

$$W = V \cdot I = 6 \cdot \frac{30}{19} = \frac{180}{19} A$$

4) Una bateria té una tensió V i una resistència interna r. Quan es connecta a una resistència de $R = 5\Omega$ el corrent que circula és de $0.5A$. Si la resistència és de $R = 11\Omega$ i el corrent és de $0.25A$. Calcular r i V.



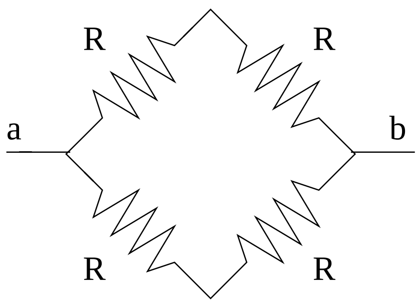
$$V = I(r + R)$$

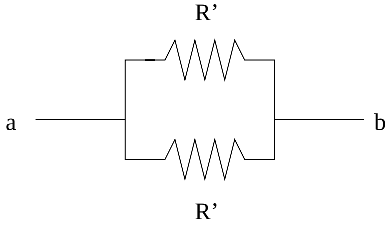
$$\begin{cases} V = 0.5(r + 5) \\ V = 0.25(r + 11) \end{cases}$$

$$r + 11 = 2(r + 5) = 2r + 10 \ \rightarrow r = 1\Omega$$

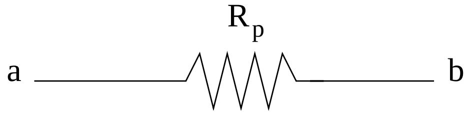
$$V = 0.5(1 + 5) = 0.5 \cdot 6 = 3V$$

5) Demostrar que la resistència entre a i b és R.



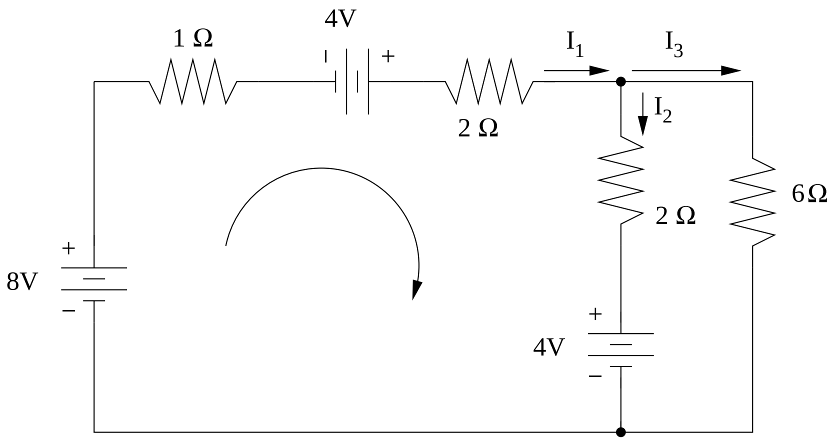


$$R' = 2R$$



$$R_p = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = \frac{4R^2}{4R} = R$$

6) Calcular els corrents que circulen pel circuit de la figura, així com les potències que subministra cada bateria i la potència consumida en les resistències.



$$\left.\begin{aligned} &-I_1 \cdot 1 + 4 - I_1 \cdot 2 - I_2 \cdot 2 - 4 + 8 = 0 \\ &-I_3 \cdot 6 + 4 + 2I_2 \\ &I_1 = I_2 + I_3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &3I_1 + 2I_2 = 8 \\ &2I_2 - 6I_3 = -4 \\ &I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1A \quad \rightarrow I_2 = (-4 + 6I_3) = 1A$$

$I_1 = 1 + 1 = 2A$

Potències de cada bateria $\qquad W = V \cdot I$

$W_{8V} = 8 \cdot 2 = 16W$

$W_{4V} = 4 \cdot 2 = 8W$

$W_{4V} = 4 \cdot 1 = 4W$

Potència en cada resistència $\qquad W = R \cdot I^2$

$W_{1\Omega} = 1 \cdot I_1^2 = 4W$

$W_{2\Omega} = 2 \cdot I_1^2 = 8W$

$W_{2\Omega} = 2 \cdot I_2^2 = 2W$

$W_{6\Omega} = 6 \cdot I_3^2 = 6W$

7) Una font d'alimentació de $5V$ té una resistència interna de 50Ω . Quina és la menor resistència que podem connectar en sèrie per que la caiguda de potencial entre els extrems de la resistència externa sigui major que $4.5V$?

$$V = 5V$$

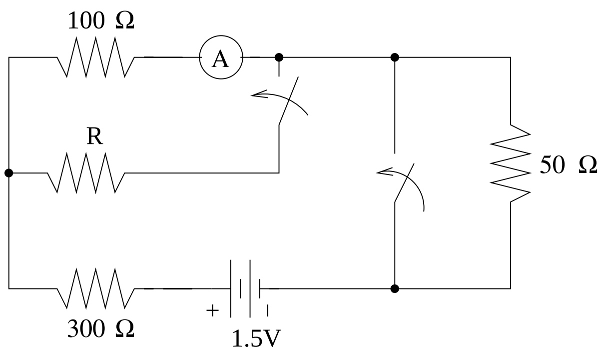
$$r = 50\Omega$$

$$V_R = V \cdot \frac{R}{r + R} \rightarrow \quad 4.5 = 5 \cdot \frac{R}{50 + R}$$

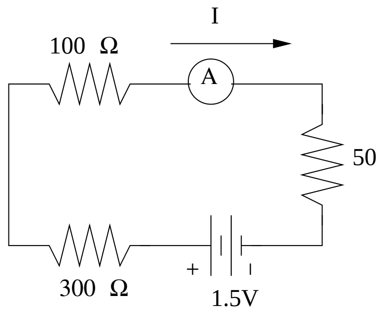
$$225 + 4.5R = 5R$$

$$R = \frac{225}{0.5} = 450\Omega$$

8) En el circuit indicat a la figura, la lectura de l'amperímetre és la mateixa quan ambdós interruptors estan oberts que quan estan tancats. Quant val R?



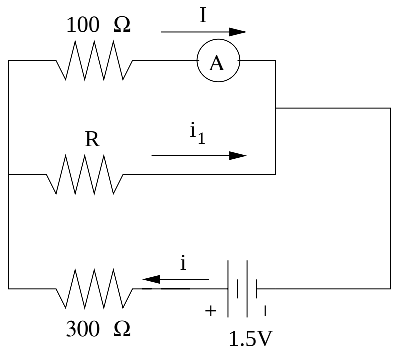
Quan els interruptors estan oberts:



$$1.5 = I \cdot 450$$

$$I = 300^{-1} = 3.3\ mA$$

Quan els interruptors estan tancats:

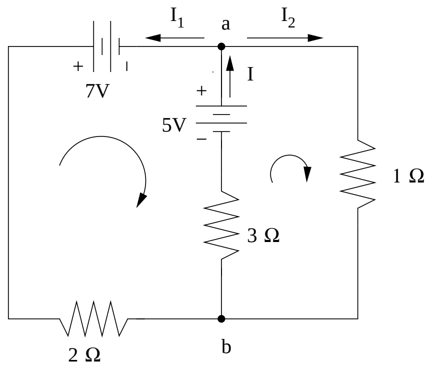


$$\left.\begin{array}{l} i = i_1 + I \\ 1.5 - i \cdot 300 = I \cdot 100 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 1.5 - i_1 300 - I \cdot 300 = 5 \cdot 100 \\ 1.5 - i_1 300 = I \cdot 400 \end{array}$$

$$i_1 = \frac{1.5 - I \cdot 400}{300} = \frac{1.5 - 413}{300} = 0.55mA$$

$$i_1 \cdot R = 3.3 \cdot 100 \quad \rightarrow \quad R = \frac{3.3 \cdot 100}{0.55} = 600\Omega$$

9) Calcular els corrents i la diferència de tensió entre els punts a i b, i les potències subministrades per les bateries.



$$I = I_1 + I_2$$

$$-I_2 - 3I + 5 = 0$$

$$-7 - 5 + 3I + 2I = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 12 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(0+0+0) - (10+12+0)}{(-2+0+0) - (6+3+0)} = -\frac{22}{-11} = 2A$$

$3I + 2I_1 = 12 \;\rightarrow\; 6 + 2I_1 = 12 \rightarrow I_1 = 3$

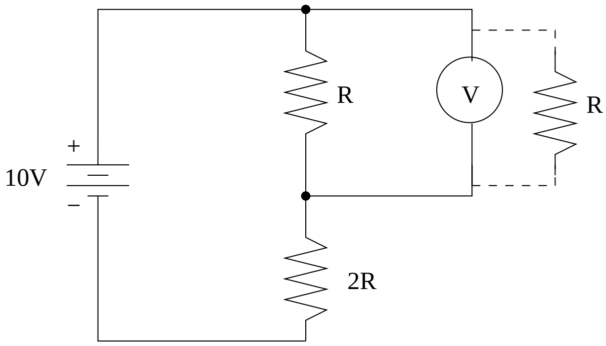
$3I + I_2 = 5 \quad \rightarrow \; I_2 = 5 - 3I = 5 - 6 = -1A$

$V_b - V_a = -I \cdot 3 + 5 = -1V$

$P_{V7} = 7 \cdot I_1 = 21W$

$P_{V5} = 5 \cdot I = 10W$

10) Un voltímetre digital està format per un voltímetre ideal amb una resistència en paral·lel de $10M\Omega$. a) Calcular el voltatge mesurat per aquest voltímetre en el circuit de la figura quan $R = 1k\Omega, 10\text{k}\Omega, 1\text{M}\Omega, 10\text{M}\Omega$ i $100\text{M}\Omega$. b) Quin és el màxim valor de R si volem que la diferència entre el valor mesurat i l'ideal sigui menor del 10%.



$$\text{Ideal} \qquad V_R = \frac{V}{3R} \cdot R = \frac{V}{3} = 3.\hat{3}V$$

$\boldsymbol{R = 1k\Omega}$)

$$R_{eq} = \frac{10M \cdot 1k}{10M + 1k} = 999.90\ \Omega$$

$$V_R = V\frac{R_{eq}}{R_{eq} + 2R} = 10 \cdot \frac{999.90}{999.90 + 2000} = 3.3331V$$

$\boldsymbol{R = 10k\Omega}$)

$$R_{eq} = \frac{10M \cdot 10k}{10M + 10k} = 9990.01\ \Omega$$

$$V_R = 3.331V$$

$\boldsymbol{R = 1M\Omega}$)

$$R_{eq} = \frac{10M \cdot 1M}{10M + 1M} = 0.90909\ M\Omega$$

$$V_R = 3.12V$$

$\boldsymbol{R = 10M\Omega}$)

$$R_{eq} = \frac{10M \cdot 10M}{10M + 10M} = 5M\Omega$$

$$V_R = 2V$$

$\boldsymbol{R = 100M\Omega}$)

$$R_{eq} = \frac{10M \cdot 100M}{10M + 100M} = 9.0909\ M\Omega$$

$$V_R = 0.435V$$

b)

$$\frac{V_{ideal} - V_{meas}}{V_{ideal}} = 1 - \frac{V_{meas}}{V_{ideal}} < 0.1$$

$$V_{meas} = V\frac{R_{eq}}{R_{eq} + 2R} = V\frac{1}{1 + \frac{2R}{R_{eq}}}$$

$$\frac{2R}{R_{eq}} = \frac{2R}{10M \cdot R}(10M + R) = \frac{10M + R}{5M}$$

$$V_{meas} = V\frac{1}{1 + \frac{10M + R}{5M}} = V\frac{5M}{15M + R}$$

$$V_{ideal} = V \cdot \frac{R}{3R} = \frac{V}{3}$$

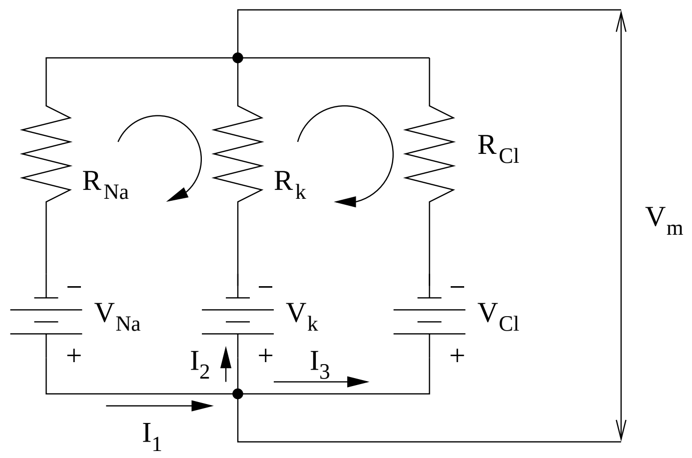
$$1 - \frac{V \cdot \frac{5M}{15M + R}}{\frac{V}{3}} = 1 - \frac{3 \cdot 5M}{15M + R} < 0.1$$

$$15M + R - 15M < 1.5M + 0.1R$$

$$0.9R < 1.5M$$

$$R < \frac{1.5M}{0.9} = 1.66M\Omega$$

11) Un model de membrana cel·lular d'una neurona, pel flux de càrrega iònica dels ions K^{+}, Na^{+} i Cl^{-} pot representar-se segons l'esquema elèctric que es mostra a la figura. Suposem que $R_k = 0.1k\Omega$, $R_{Na} = 2k\Omega$, $R_{Cl} = 0.25\Omega$, $V_k = -74\ mV$ $V_{Na} = 55\ mV$ i $V_{Cl} = -68mV$. Calcular Vm (potencial de membrana).



$$\left.\begin{array}{l} I_2 \cdot R_k + V_k - V_{Na} + I_1 R_{Na} = 0 \\ I_3 \cdot R_{Cl} + V_{Cl} - V_k - I_2 R_k = 0 \\ I_1 = I_2 + I_3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} R_{Na} I_1 + R_k I_2 = V_{Na} - V_k \\ -I_2 R_k + I_3 R_{Cl} = V_k - V_{Cl} \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_{Na} & V_{Na} - V_k & 0 \\ 0 & V_k - V_{Cl} & R_{Cl} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{Na} & R_k & 0 \\ 0 & -R_k & R_{Cl} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = 61.03\mu A$$

$$I_3 = 0.4\mu A$$

$$I_1 = 61.44\mu A$$

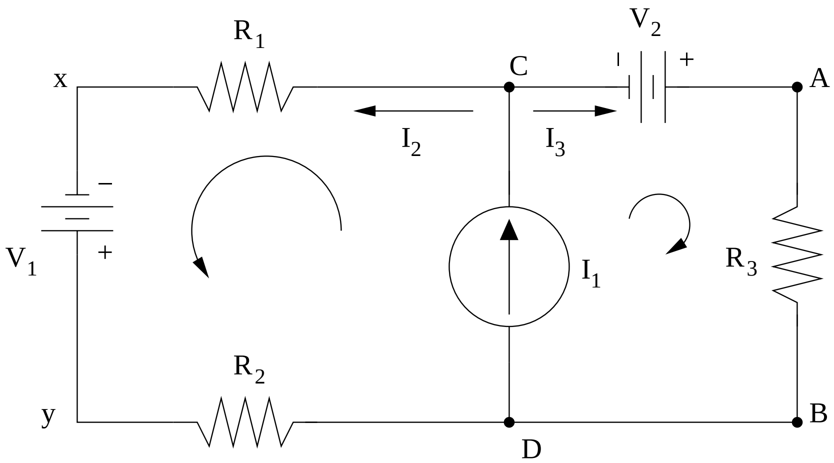
$$V_m = -V_k - I_2 \cdot R_k = 74mV - 61.03 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1k\Omega = 0.0678V$$

SECCIÓ 3: SISTEMES LINEALS EQUIVALENTS THÉVENIN I NORTON

1) Troba els equivalents Thévenin i Norton del circuit de la figura respecte als punts A i B i respecte als punts C i D.

Dades

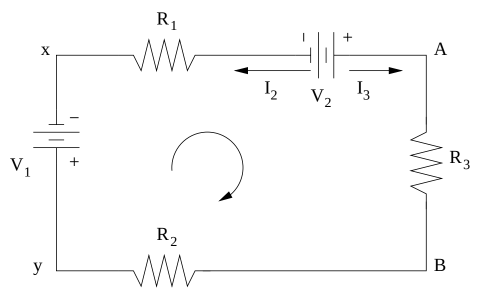
$\boldsymbol{R_1 = 1\Omega}$ $\quad \mathbf{R_2 = 1.5\Omega}$ $\quad \mathbf{R_3 = 2\Omega}$ $\quad \boldsymbol{I_1 = 3A}$ $\quad \boldsymbol{V_1 = 0.5V}$ $\quad \boldsymbol{V_2 = 2V}$



En la font de corrent cau una tensió V_x
Malla xCDyx:

(1) $-I_2R_1 + V_1 - I_2R_2 + V_x = 0$
(2) $I_1 = I_2 + I_3$ $(node\ C)$
(3) $V_2 - I_3R_3 + V_x = 0 \rightarrow$ $\qquad V_x = I_3R_3 \cdot V_2$ (4)

(4) en (1) $\rightarrow$ $-I_2(R_1 + R_2) + V_1 + I_3R_3 \cdot V_2 = 0$ Això és equivalent a tenir la malla externa.



$$I_2R_1 + V_2 - I_3R_3 + I_2R_2 - V_1 = 0$$

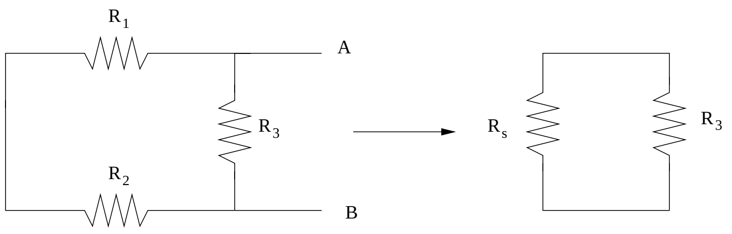
$$I_2(R_1 + R_2) - I_3R_3 + V_2 - V_1 = 0$$

Resumint:

$$\left.\begin{aligned} I_2(R_1+R_2)-I_3R_3 &= V_1-V_2 \\ I_2+I_3 &= I_1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2.5I_2-2I_3 &= -1.5 \\ 2I_2+2I_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$I_2 = 1A \quad I_3 = 2A$ Aquesta és la solució Kirchoff

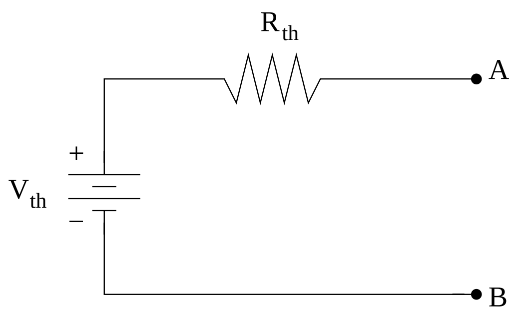
R_{th} → curtcircuitar les fonts de tensió i obrir les fonts de corrent:



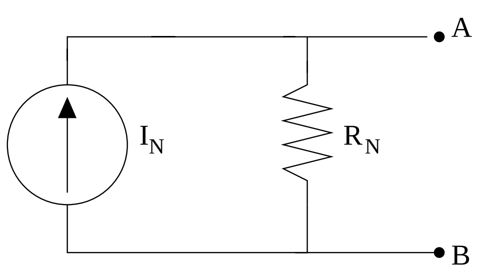
$$R_{th} = \frac{R_s \cdot R_3}{R_s + R_3} = \frac{(R_1+R_2)\cdot R_3}{R_1+R_2+R_3} = \frac{(1+1.5)\cdot 2}{1+1.5+2} = \frac{5}{4.5} = 1.1\Omega$$

$$V_{th} = i_3R_3 = 2 \cdot 2 = 4V$$

Equivalent Thévenin:



Equivalent Norton:



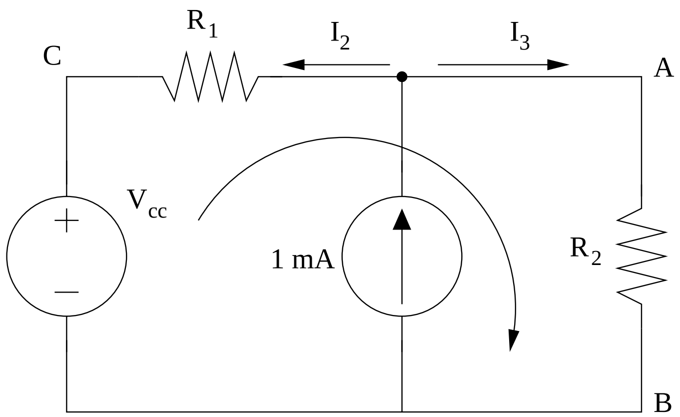
$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{4}{1.1} = 3.6A$$

$$R_N = R_{th} = 1.1\Omega$$

2) Calcula els paràmetres del circuit equivalent Thévenin i Norton del circuit de la figura:

<u>Dades</u>

$\boldsymbol{R_1 = 4k\Omega \quad \mathrm{R_2} = 1k\Omega \;\; I_{cc} = 1mA \quad V_{cc} = 2V}$



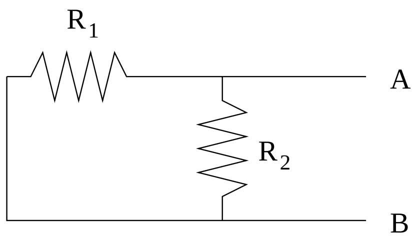
a) Entre els punts A i B

$$\left.\begin{aligned} 1mA &= I_2 + I_3 \\ 2V + I_2 \cdot 4k - I_3 \cdot 1k &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} I_2 &= 1mA - I_3 \\ 2V + 1mA \cdot 4k - I_3 \cdot 4k - I_3 \cdot 1k &= 0 \end{aligned}$$

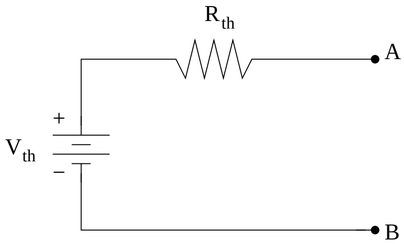
$2 + 4 - I_3 \cdot 5k = 0 \;\; \rightarrow \quad I_3 = 1.2\, mA$

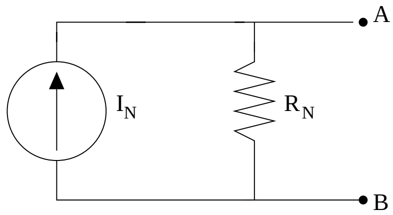
$1mA = I_2 + 1.2\, mA \quad \rightarrow \quad I_2 = -0.2\, mA$ (sentit contrari al plantejat)

$$V_{AB} = V_{th} = I_3 \cdot R_2 = 1k \cdot 1.2mA = 1.2V$$



$$R_{th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1} = \frac{1 \cdot 4}{1+4} = 0.8k\Omega$$

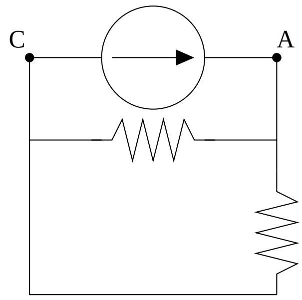




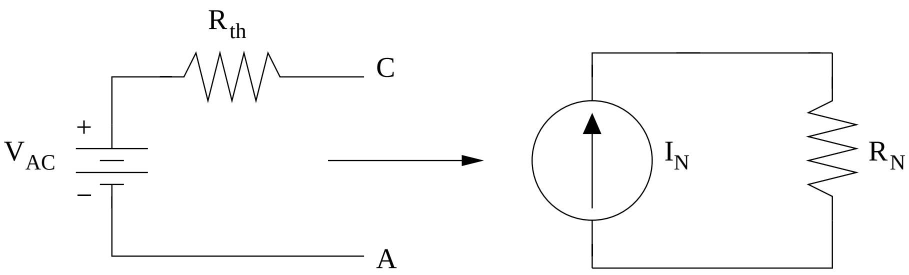
$$I_N = \frac{1.2}{0.8} = 1.5\ mA$$
$$R_N = R_{th} = 0.8k\Omega$$

b) Entre els punts A i C

$$V_{AC} - V_1 + I_3 \cdot R_2 = 0 \quad \rightarrow V_{AC} = 2 - 1.2 \cdot 1 = 0.8V$$



$$R_{th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1} = 0.8k\Omega$$

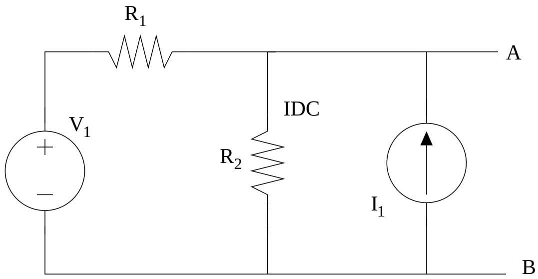


$$I_N = \frac{0.8}{0.8} = 1mA \quad R_N = 0.8k\Omega$$

3) Calcular els equivalents Thévenin i Norton del següent circuit respecte als punts A i B.

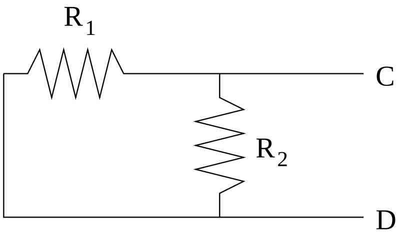
<u>Dades</u>

$\boldsymbol{R_1 = 4\Omega}$ $\quad$ $\mathbf{R_2 = 2\Omega}$ $\quad$ $\boldsymbol{I_1 = 3A}$ $\quad$ $\boldsymbol{V_1 = 30V}$

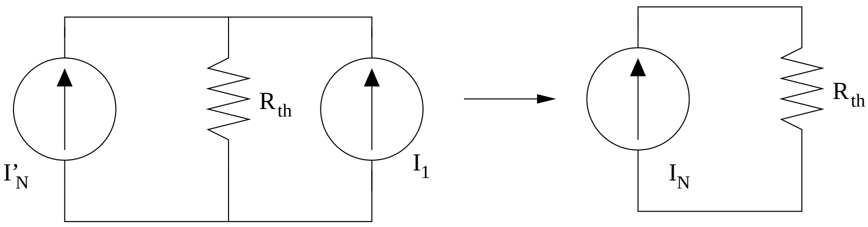


$$V_{AB} = V_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 30 \cdot \frac{2}{6} = 10V$$

R_{th})

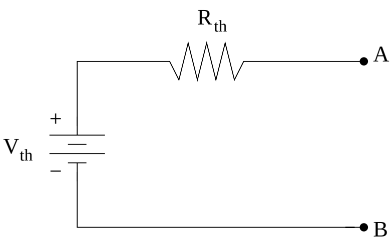


$$R_{th} = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{8}{6} = 1.\hat{3}$$



$$I'_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{10}{1.\hat{3}} = 7.5A$$

$$I_N = I'_N + I_1 = 10.5A \qquad R_{th} = R_N$$

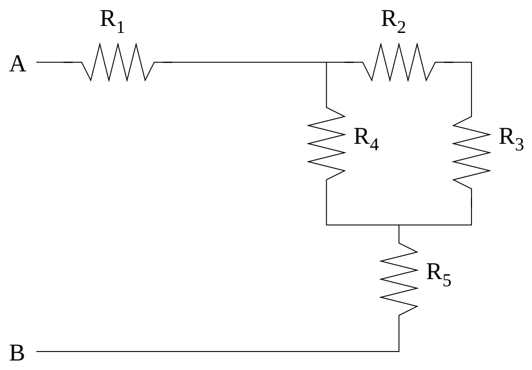


$$V_{th} = 10.5 \cdot 1.\hat{3} = 14V$$

4) Calcular la resistència equivalent des dels terminals A i B de la següent xarxa.

Dades

$\boldsymbol{R_1 = 6\Omega} \quad \mathbf{R_2 = 3\Omega} \quad \mathbf{R_3 = 18\Omega} \quad \mathbf{R_4 = 6\Omega} \quad \mathbf{R_5 = 10\Omega}$

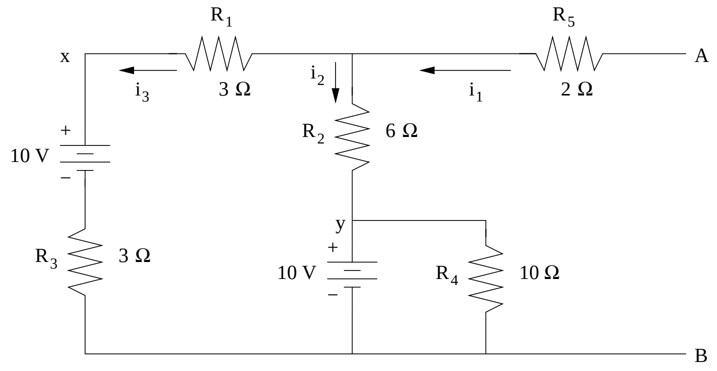


$$R_{eq} = R_1 + \frac{(R_2 + R_3) \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4} + R_5 = 6 + \frac{(3 + 18) \cdot 6}{3 + 18 + 6} + 10 = 20.66\ \Omega$$

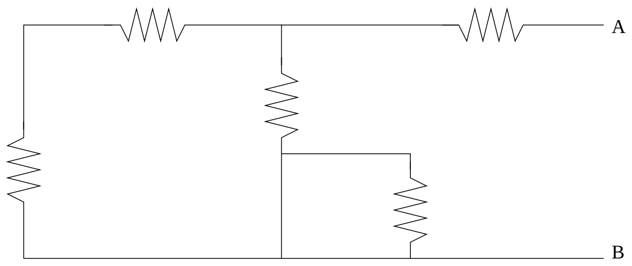
5) Calcular la resistència i tensió equivalent dels terminals A i B de la següent xarxa.

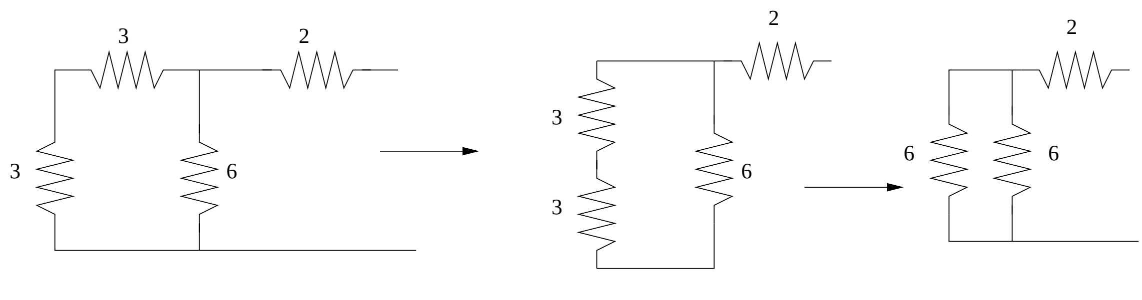
<u>Dades</u>

$$\boldsymbol{R_1 = 3\Omega \quad R_2 = 6\Omega \quad R_3 = 3\Omega \quad R_4 = 10\Omega \quad R_5 = 2\Omega \quad V_1 = V_2 = 10V}$$



Curtcircuitem les fonts:

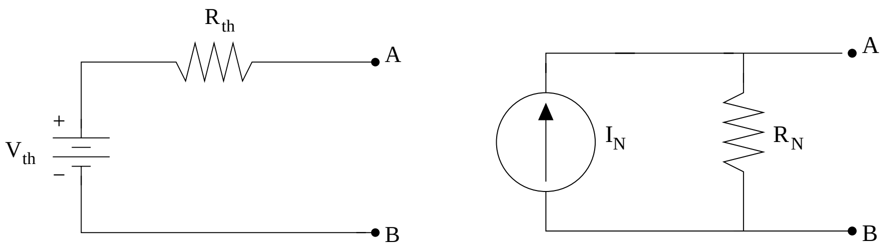




$$R_{eq} = 2 + \frac{6 \cdot 6}{6+6} = 2 + \frac{6}{2} = 5\Omega$$

En x i y hi ha $10V \rightarrow$ no hi pot haver corrent per R_1 ni per R_2

No hi ha corrent per R_5 $\rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = 0$

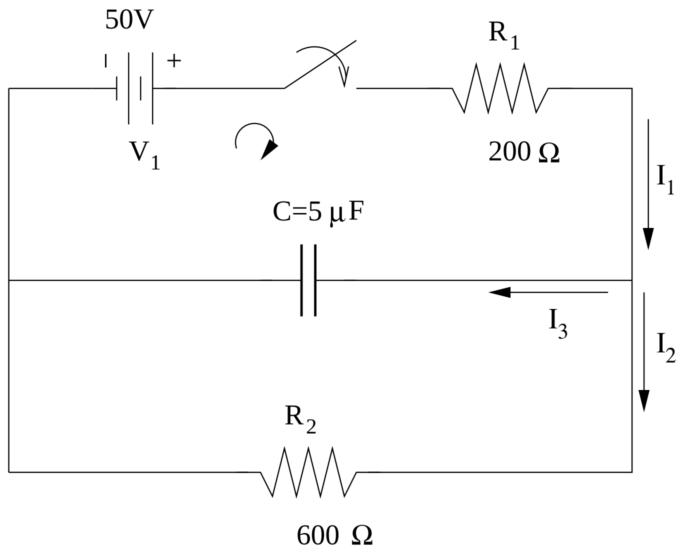


$$V_{AB} = V_{th} = i_1 \cdot 2\Omega + i_2 \cdot 6\Omega + 10 = 10V$$

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{V_{th}}{R_{eq}} = 2A$$

SECCIÓ 4: CIRCUITS RC

1) **En el circuit de la figura, l'interruptor S ha estat obert durant el suficient temps com per que el condensador estigui completament carregat. En l'instant $t = 0$, l'interruptor S es tanca.**



a) **En el moment $t = 0, V_c = 0$**

$$V_c - I_o \cdot 200 + V_c = 0$$
$$V = I_o \cdot 200 \;\rightarrow I_o = \frac{50}{200} = 0.250A$$

b) **Per $t = \infty \quad V_c = \frac{Q}{C}$ però no entra corrent per C**

$$V = I_\infty \cdot 200 + I_\infty \cdot 600$$
$$I_\infty = \frac{50}{800} = 62.5mA$$

c) **Com varia el corrent en funció del temps en la resistència $R_2 = 600\Omega$?**

$$V - I_1 R_1 - \frac{Q}{C} = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{Q}{C} - I_2 R_2 = 0 \qquad (2)$$

Derivant (1)

$$\frac{dV}{dt} - R_1\frac{dI_1}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0 - R_1\frac{dI_1}{dt} - \frac{1}{C}I_3$$

$$R_1\frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{C}I_3$$

Derivant (2)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{C} - I_2R_2\right) = I_3 \cdot \frac{1}{C} - R_2\frac{dI_2}{dt}$$

$$R_2\frac{dI_2}{dt} = I_3 \cdot \frac{1}{C}$$

Node) $I_3 = I_1 - I_2$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{R_2C}\ (I_1 - I_2) \qquad (3)$$

Aïllem I_1 de (1) i ho posem a (3)

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{R_2C}\left(\frac{V - \frac{Q}{C}}{R_1} - I_2\right)$$

Aïllem Q/C de (2) i ho posem a l'anterior

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{R_2C}\left(\frac{V - I_2R_2}{R_1} - I_2\right)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{V}{R_1R_2C} - \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}I_2 = A - BI_2 \quad on\ A = \frac{V}{R_1R_2C} \ \ i \ \ B = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}$$

$$\frac{dI_2}{A - BI_2} = dt$$
$$A - BI_2 = k$$
$$-BdI_2 = dk$$

Per t=0 $I_2 = 0 \quad \rightarrow k = A$

$$-\frac{1}{e}\int\frac{dk}{k} = \int dt \ \rightarrow lnk = -Bt + C$$

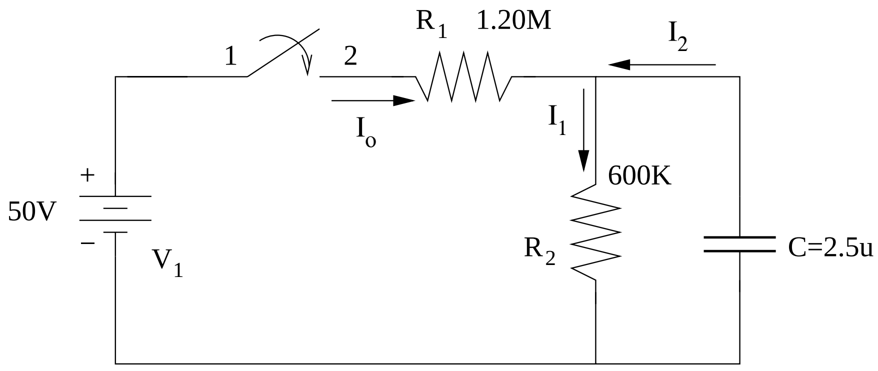
$k = M \cdot e^{-Bt} \rightarrow$ posant C.I. $\rightarrow M = A \ \rightarrow k = A \cdot e^{-Bt}$

$$A - BI_2 = Ae^{-Bt} \rightarrow I_2 = A(1 - e^{-Bt}) \cdot \frac{1}{B}$$

$$I_2 = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) = \frac{V}{R_1 + R_2}(1 - e^{-\left(\frac{t}{R_p C}\right)} \quad on \quad R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = 62.5mA\left(1 - e^{-\left(\frac{t}{0.750ms}\right)}\right)$$

2) En el circuit de la figura, l'interruptor S ha estat obert durant molt temps i en l'instant $t = 0$ es tanca.



a) **Quina és la intensitat inicial del corrent subministrat per la bateria immediatament després de tancar l'interruptor?**

Malla externa: $V - I_o R_1 - V_C = 0$

$$V_c(inicial) = 0$$

$$V = I_o R_1 \rightarrow I_0 = \frac{V}{R_1} = \frac{50}{1.2 \cdot 10^6} = 41.7\mu A$$

b) **I quan ha transcorregut molt temps des del tancament de S?**

$$V = I_\infty R_1 + I_\infty R_2$$

$$I_\infty = \frac{V}{R_1 + R_2} = 27.7\mu A$$

c) **Si després d'haver transcorregut molt temps, l'interruptor s'obre de nou, determinar la variació de la intensitat de corrent a través de la resistència de $600k\Omega$ en funció del temps.**

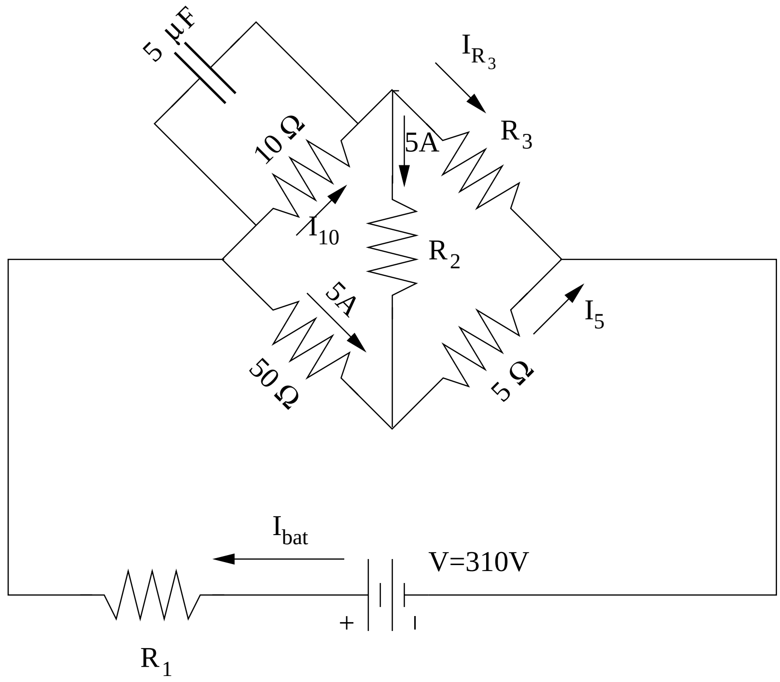
$$I(t) = \frac{V_c(t)}{R_2}$$

$$V_c(t) = V_{c_\infty} e^{-t/\tau}$$

$$I(t) = \frac{V_{c_\infty}}{R_2} e^{-t/\tau} = I_\infty e^{-t/\tau}$$

$$I(t) = \frac{V}{R_1 + R_2} e^{-t/R_2 C}$$

3) En estat estacionari, la càrrega del condensador de $5\mu F$ del circuit de la figura és de $1mC$. Determinar el corrent de la bateria i calcular les resistències R_1, R_2 i R_3.



$$I_{bat} = I_{10\Omega} + 5A$$

$$V_C = \frac{Q}{C} = I_{10\Omega} \cdot 10\Omega$$

$$I_{10\Omega} = \frac{Q}{C} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1mC}{5\mu F} \cdot \frac{1}{10} = 20A$$

$$I_{bat} = 20 + 5 = 25A$$

$$310 - I_{bat} \cdot R_1 - 5 \cdot 50 - I_5 \cdot 5 = 0$$

$$I_5 = 5A + 5A = 10A$$

$$310 - 25 \cdot R_1 - 250 - 50 = 0 \quad \rightarrow \quad R_1 = \frac{10}{25} = 0.4\Omega$$

$$310 - 25 \cdot 0.4 - 20 \cdot 10 - I_{R_3} \cdot R_3 = 0$$

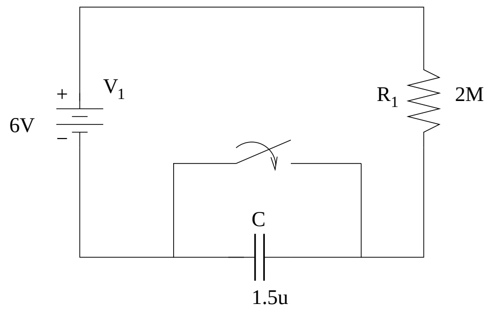
$$I_{R_3} = I_{10\Omega} - 5A = 15A$$

$$310 - 10 - 200 - 15R_3 = 0 \quad \rightarrow R_3 = \frac{100}{15} = 6.6\Omega$$

$$R_2 \cdot 5 = I_{R_3} \cdot R_3 - I_5 \cdot 5 \quad \rightarrow R_2 \cdot 5 = 100 - 10 \cdot 5$$

$$R_2 = 10\Omega$$

4) El condensador de la figura està connectat a una resistència de $2M\Omega$. El condensador és de $1.5\mu F$ i la bateria és de $6V$. L'interruptor ha estat tancat i s'obre en un moment determinat. Després de que hagi transcorregut un temps igual a la constant característica del temps del circuit. Quina és la càrrega del condensador? Quin és el ritme amb el que augmenta la càrrega? Quina és la potència de la bateria? Quina és la potència dissipada en la resistència?



A l'obrir S, el condensador es carrega. L'evolució de la càrrega és

$$Q(t) = Q_f(1 - e^{-t/\tau})$$

$$Q_f = V \cdot C$$

$$\tau = R \cdot C = 2 \cdot 10^6 \cdot 1.5 \cdot 10^{-6} = 3s$$

$$Q(t) = (6 \cdot 1.5 \cdot 10^{-6})(1 - e^{-1}) = 5.69\mu C$$

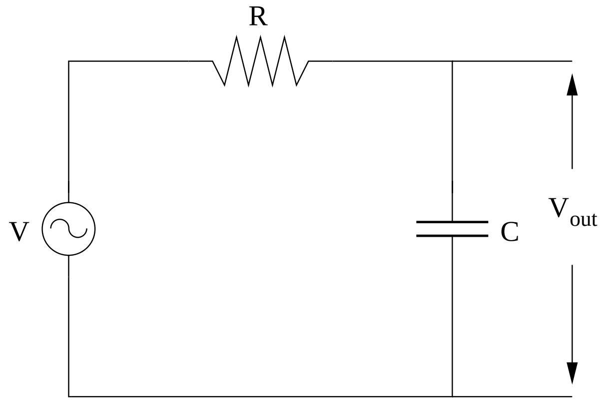
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_f}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q_f}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = I_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{dQ}{dt} = I = I_o e^{-t/\tau} = \frac{6}{2 \cdot 10^6}e^{-1} = 1.10\mu A$$

$$P_{bat} = I^2R = I \cdot V = 1.10 \cdot 10^{-6} \cdot 6 = 6.6\mu W$$

$$P_R = I^2R = (1.10 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 2M = 2.42\mu W$$

5) Una resistència R i un condensador C estan connectats en sèrie a un generador de senyal sinusoïdal $V = Vo\ \cos\ (\omega t)$. Trobar la tensió eficaç en el condensador.

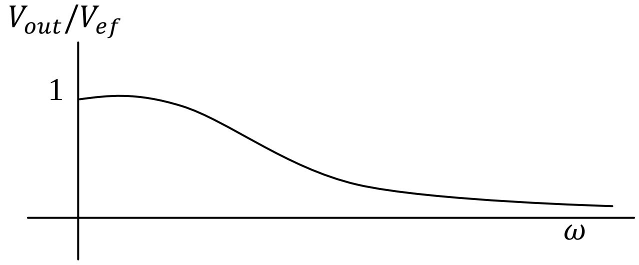


$$V_{out} = \frac{X_c}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} \cdot V \qquad on\ X_c = \frac{1}{\omega C}$$

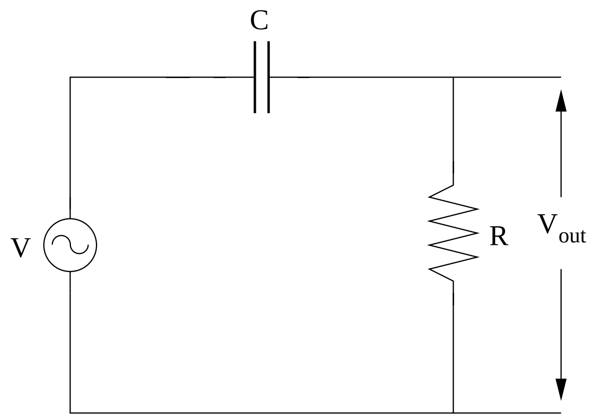
$$V_{out_{ef}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{X_c^2}}} \cdot V_{ef} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$per\ \ \omega \to 0 \quad V_{out} \to V_{ef}$$

$$per\ \ \omega \to \infty \quad V_{out_{ef}} \to 0$$



6) El següent circuit és un filtre "passa-alts". Justificar el nom.

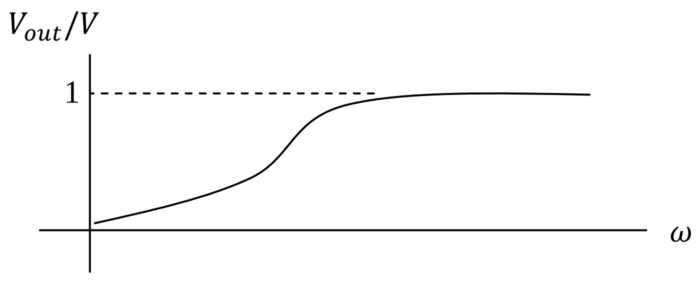


$$V_{out} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} \cdot V = \frac{V}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{X_c^2}}} \qquad on \;\; X_c = \frac{1}{\omega C}$$

$$V_{out} = \frac{V}{\sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}}$$

$$per \;\; \omega \to 0 \quad V_{out} \to \frac{V}{\sqrt{1+\infty}} = 0$$

$$per \;\; \omega \to \infty \quad V_{out} \to \frac{V}{\sqrt{1+0}} = V$$



7) Es desitja utilitzar un filtre RC passa-alts com el de la figura anterior, per filtrar un so de freqüències fins a $60Hz$. Calcular el valor del condensador C si la resistència és de $20k\Omega$ i si la atenuació ha de ser d'un factor 10.

$$V = V_o \cdot \cos(2\pi 60t)$$

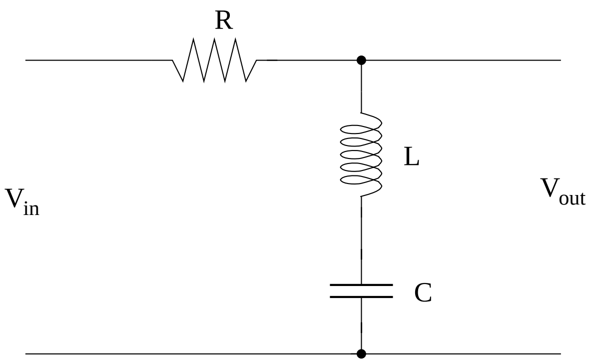
$$R = 20k\Omega$$

$$V_{out} = \frac{V}{\sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}}$$

$$\frac{V_{out}}{V} = \frac{1}{10} = V_{out} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}} \quad \rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}} = 10$$

$$1 + \frac{1}{(RC\omega)^2} = 100 \quad \rightarrow (RC\omega)^2 = \frac{1}{99} \quad \rightarrow C = \frac{1}{R\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} = 13.3\ nF$$

8) El circuit de la figura es denomina circuit trampa. Aquest tipus de circuit rebutja els senyals de freqüència $\boldsymbol{\omega = \frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}}}$. Demostrar-ho. Com depèn de la resistència R l'amplada de la banda rebutjada? (SOL: $\boldsymbol{\omega - \omega_{tr} \simeq \frac{R}{2L}}$)



$$Z_{tr} = X_L + X_C$$

$$V_{out} = \frac{Z_{tr}}{R + Z_{tr}} \cdot V_{in}$$

$$si\ Z_{tr} = 0 \quad V_{out} = 0$$

$$Z_{tr} = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

L'ample de banda és : $\Delta\omega = |\omega - \omega_{tr}|$ i el definim com la freqüència en la que $|Z_{tr}| = R$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R$$

$$\omega^2 LC - 1 = \omega RC \quad \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_{tr}}\right)^2 - 1 = \omega RC$$

Per $\omega \approx \omega_{tr}$ $\quad \left(\frac{\omega}{\omega_{tr}}\right)^2 - 1 = \omega_{tr} RC$

$$\frac{\omega^2 - \omega_{tr}^2}{\omega_{tr}^2} \simeq \omega_{tr} RC$$

$$\frac{(\omega + \omega_{tr})(\omega - \omega_{tr})}{\omega_{tr}^2} \simeq \omega_{tr} RC$$

$$\frac{2\omega_{tr}(\omega - \omega_{tr})}{\omega_{tr}^2} \simeq \omega_{tr} RC$$

$$\omega - \omega_{tr} \simeq \frac{\omega_{tr} RC}{2} = \frac{RC}{2}\frac{1}{LC}$$

$$\omega - \omega_{tr} \simeq \frac{R}{2L}$$

SECCIÓ 5: SISTEMES LTI I ANÀLISIS DE FOURIER

1) Un sistema LTI té una resposta en freqüència $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$. Per una certa entrada $x(t)$, la sortida és $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$. Quina ha estat l'entrada?

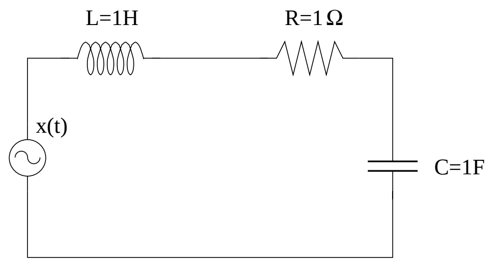
$$y(t) \to T.F. \to Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)} \cdot (3+j\omega) = \frac{1}{4+j\omega}$$

$$x(t) = e^{-4t}u(t)$$

2) Determinar la resposta impulsiva del sistema LTI causal representat pel següent circuit RLC.



$y(t)$ és la tensió sobre el condensador

$$Q = C \cdot y \ \rightarrow i = C \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\text{La tensió a la bobina és } \ L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\text{La tensió a la resistència és } \ R \cdot i$$

$$x(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + y(t)$$

$$x(t) = L \cdot C \, \frac{d^2y}{dt} + R \cdot C \, \frac{dy}{dt} + y(t)$$

$$L = C = R = 1 \quad \rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$(j\omega)^2 + Y(j\omega) + j\omega \, Y(j\omega) + Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1}$$

$$j\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

$$H(j\omega) = \frac{A}{j\omega + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j} + \frac{B}{j\omega + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j}$$

$$A\left(j\omega + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) + B\left(j\omega + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A + B = 0 & \rightarrow A = -B \\ A\left(j\omega + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) + B\left(j\omega + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) = 1 & \frac{-B}{2} - \frac{B\sqrt{3}}{2} j + \frac{B}{2} - \frac{B\sqrt{3}}{2} j = 1 \end{array} \right.$$

$$H(j\omega) = -\frac{1}{\sqrt{3}j}\left(\frac{-1}{j\omega + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j} + \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j}\right)$$

$$h(t) = -\frac{1}{\sqrt{3}i}\left[-e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)t} + e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)t}\right]\cdot u(t)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}i}\left[-e^{-\left(\frac{1}{2}\right)t}\cdot e^{kt} + e^{-\left(\frac{1}{2}\right)t}\cdot e^{-kt}\right]\cdot u(t)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}i}\left[-e^{-\left(\frac{1}{2}\right)t}[\cdot\, e^{kt} - e^{-kt}]\right]\cdot u(t) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{2}\right)t}}{\sqrt{3}i}2i\, sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$h(t) = \frac{2e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

3) Demostrar que els dos sistemes LTI definits mitjançant les següents respostes impulsives $\boldsymbol{h_1(t) = u(t)}$ i $\boldsymbol{h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)}$, tenen la mateixa resposta davant un senyal $\boldsymbol{x(t) = \cos(t)}$.

$*\quad h_1(t) = u(t) \quad \rightarrow H_1(\omega) = \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$x(t) = \cos(t) \quad \rightarrow X(j\omega) = \pi[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)]$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H_1(j\omega)$$
$$= \frac{\pi}{j\omega}\delta(\omega+1) + \pi^2\delta(\omega+1)\delta(\omega) + \frac{\pi}{j\omega}\delta(\omega-1) + \pi^2\delta(\omega-1)\delta(\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{\pi}{j\omega}\delta(\omega+1) + \frac{\pi}{j\omega}\delta(\omega-1) = \frac{\pi}{j\cdot 1}\delta(\omega+1) + \frac{\pi}{j\cdot(-1)}\delta(\omega-1)$$

$$Y(j\omega) = \frac{\pi}{j}\big(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\big) \qquad \rightarrow y(t) = \sin(t)$$

$*\quad h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t) \quad \rightarrow H_2(j\omega) = -2 + \dfrac{5}{2+j\omega}$

$$Y(j\omega) = \left(-2 + \frac{5}{2+j\omega}\right)\cdot\pi\delta(\omega-1) + \left(-2 + \frac{5}{2+j\omega}\right)\cdot\pi\delta(\omega+1)$$

$$Y(j\omega) = \left(-2 + \frac{5}{2-j}\right)\cdot\pi\delta(\omega-1) + \left(-2 + \frac{5}{2+j}\right)\cdot\pi\delta(\omega+1)$$

$$-2 + \frac{5}{2+j} = \frac{-2(2+j)+5}{2+j} = \frac{1-2j}{2+j} = \frac{(1-2j)(2-j)}{(2+j)(2-j)} = \frac{2-4j-j-2}{5} = -j$$

$$-2 + \frac{5}{2-j} = \frac{-2(2-j)+5}{2-j} = \frac{1+2j}{2-j} = \frac{(1+2j)(2+j)}{(2-j)(2+j)} = \frac{2+j+4j-2}{5} = +j$$

$$Y(j\omega) = -j\pi\delta(\omega-1) + j\pi\delta(\omega+1) = \frac{\pi}{j}\big(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\big) \quad \rightarrow y(t)$$
$$= \sin(t)$$

Important: Davant una entrada de tipus sinusoïdal, diferents sistemes donen la mateixa sortida. La resposta d’un cosinus no identifica de forma única a un sistema LTI

4) Un sistema LTI està descrit per la següent equació diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

Quina és la seva resposta impulsiva?

$(j\omega)^2Y(j\omega) + 6j\omega Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8}$$

$$j\omega = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = -2 \text{ ó } -4$$

$$\omega_1 = 2i \qquad \omega_2 = 4i$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} = \frac{A}{\omega - 2i} + \frac{B}{\omega - 4i}$$

$A(\omega - 4i) + B(\omega - 2i) = 2$

$B - 2i = 2 \quad \to B = -i$

$A(-2i) = 2 \quad \to A = i$

$$H(j\omega) = \frac{i}{\omega - 2i} - \frac{i}{\omega - 4i} = \frac{-1}{2 + i\omega} + \frac{1}{4 + i\omega}$$

Mirant a les taules podem trobar:

$$h(t) = e^{-4t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

Quina és la resposta del sistema per un senyal $\boldsymbol{x(t) = te^{-2t}u(t)}$?

$$X(j\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)^2}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} \cdot \frac{1}{(2 + j\omega)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)}$$

$$Y(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)} \cdot \frac{1}{(2 + j\omega)^2} = \frac{1}{(2 + j\omega)^3(j\omega + 4)}$$

$$= \frac{A}{j\omega + 2} + \frac{B}{(j\omega + 2)^2} + \frac{C}{(j\omega + 2)^3} + \frac{D}{j\omega + 4}$$

$A(j\omega + 2)^2(j\omega + 4) + +B(j\omega + 2)(j\omega + 4) + C(j\omega + 4) + D(j\omega + 2)^3 = 2$

$per \quad \omega = 2i \quad A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 2 + D \cdot 0 = 2 \quad \rightarrow C = 1$

$per \quad \omega = 4i \quad A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot (-8) = 2 \quad \rightarrow C = -1/4$

$per \quad \omega = 0 \quad A \cdot 2^2 \cdot 4 + B \cdot 2 \cdot 4 + C \cdot 4 + D \cdot 8 = 2$

$A \cdot 16 + 3 \cdot 8 + 4 - 2 = 2 \quad \rightarrow 16A + 8B = 0$ (1)

$per \quad \omega = 2i \quad A \cdot 1^2 \cdot 3 + B \cdot 1 \cdot 3 + C \cdot 3 + D = 2 \quad \rightarrow C = 1$

$A \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 - \frac{1}{4} = 2 \quad \rightarrow 3A + 3B = -\frac{3}{4}$ (2)

De (1) i (2) trobem $A = \frac{1}{4} \quad B = -\frac{1}{2}$

$$Y(j\omega) = \frac{1/4}{j\omega + 2} + \frac{-1/2}{(j\omega + 2)^2} + \frac{1}{(j\omega + 2)^3} + \frac{-1/4}{j\omega + 4}$$

Amb l’ajuda de les taules trobem:

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}te^{-2t}u(t) + t^2e^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-4t}u(t)$$

5) Un sistema LTI causal i estable té per resposta en freqüència

$$\boldsymbol{H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega}}$$

Determinar l'equació diferencial que relaciona $\boldsymbol{x(t)}$ amb la sortida $\boldsymbol{y(t)}$. Determinar la resposta impulsiva.

$$Y(j\omega) \cdot [6 - \omega^2 + 5j\omega] = X(j\omega)[j\omega + 4]$$

$$6Y(j\omega) + (j\omega)^2 Y(j\omega) + 5j\omega Y(j\omega) = j\omega\, X(j\omega) + 4X(j\omega)$$

$$6y(t) + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

$$6 + (j\omega)^2 + j\omega = 0 \qquad \rightarrow j\omega_1 = -2 \qquad j\omega_2 = -3$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega} = \frac{j\omega + 4}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} = \frac{A}{j\omega + 2} + \frac{B}{j\omega + 3}$$

$$A(j\omega + 3) + B(j\omega + 2) = (j\omega + 4) \qquad B = -1 \quad \text{i} \quad A = 2$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3}$$

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

Quina és la sortida quan l'entrada és $\boldsymbol{x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)}$?

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4} - \frac{1}{(j\omega + 4)^2} = \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 4)^2}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = \left(\frac{2}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3}\right) \cdot \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 4)^2} = \frac{1}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)}$$

$$Y(j\omega) = \frac{A}{j\omega + 2} + \frac{B}{j\omega + 4}$$

$$A(j\omega + 4) + B(j\omega + 2) = 1 \qquad A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 2} - \frac{1/2}{j\omega + 4}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-4t}u(t)$$

6) Determinar la sortida d'un sistema LTI amb resposta impulsiva $\boldsymbol{h(t)=\frac{\sin(4t)}{\pi t}}$ davant les entrades:

$$\boldsymbol{x_1(t)=\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt)}$$

De les taules:

$$* \; x_1(t)=\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right) \;\rightarrow X(j\omega)=\pi e^{j\frac{\pi}{12}}\delta(\omega-6)+\pi e^{j\frac{\pi}{12}}\delta(\omega+6)$$

$$Y_1(j\omega)=H(j\omega)\cdot X_1(j\omega)=0 \quad \rightarrow y_1(t)=0$$

$$* \; x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt) \quad \rightarrow X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \{\delta(\omega-3\mathrm{k})-\delta(\omega-3\mathrm{k})\}\right]$$

$$Y_2(j\omega)=H(j\omega)\cdot X_2(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\frac{1}{2}\left(\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)\right)\right]$$

$$y_2(t)=\frac{1}{2}\sin(3t)$$

7) Estimar la resposta impulsiva del següent sistema

$$\boldsymbol{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=2\frac{d^2x(t)}{dt^2}-2x(t)}$$

$$H(j\omega)=\frac{2(j\omega)^2-2}{(j\omega)^2+\sqrt{2}j\omega+1}=2+\frac{-j2\sqrt{2}\omega-4}{(j\omega)^2+\sqrt{2}j\omega+1}$$

$$-\omega^2+j\omega\sqrt{2}+1=0 \quad \rightarrow \omega_1=\frac{-j\sqrt{2}+\sqrt{2}}{-2} \qquad \omega_2=\frac{-j\sqrt{2}-\sqrt{2}}{-2}$$

$$\frac{-j2\sqrt{2}\omega-4}{(j\omega)^2+\sqrt{2}j\omega+1}=\frac{-j2\sqrt{2}\omega-4}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}=\frac{A}{\omega-\omega_1}+\frac{B}{\omega-\omega_2}$$

$$A=\sqrt{2}-\sqrt{2}j \qquad B=-\sqrt{2}-\sqrt{2}j$$

$$h(t)=2\delta(t)-\sqrt{2}\,(1+2j)e^{-\frac{(1+j)t}{\sqrt{2}}}\,u(t)-\sqrt{2}\,(1-2j)e^{-\frac{(1-j)t}{\sqrt{2}}}\,u(t)$$

8) Considerem un sistema LTI inicialment en repòs i descrit per l'equació

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

L'invers d'aquest sistema també està en repòs inicial i està descrit per una equació diferencial. Trobar l'equació diferencial i les respostes impulsives d'ambdós sistemes.

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+3j\omega+2}{(j\omega)^2+6j\omega+9}=\frac{-\omega^2+3j\omega+2}{-\omega^2+6j\omega+9}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=\frac{-\omega^2+6j\omega+9}{-\omega^2+3j\omega+2}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+6\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

$$h(t)=\delta(t)-3e^{-3t}u(t)+2te^{-3t}u(t)$$

$$g(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t)+4e^{-t}u(t)$$

SECCIÓ 6: SISTEMES LTI I TRANSFORMADA DE LAPLACE

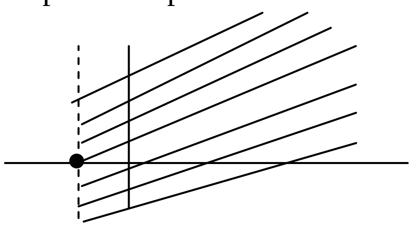
1) Calcular la funció de transferència i la regió de convergència (ROC) d'un sistema que té com a resposta: $\boldsymbol{h(t) = e^{-t} \cdot u(t)}$

$h(t) = 0\ \ \forall t < 0 \rightarrow$ sistema causal

Mirant les taules $e^{at} \cdot u(t) \rightarrow \frac{1}{s-a}$

$$h(t) = e^{-t} \cdot u(t) \rightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Els sistemes causals tenen la regió de convergència que s'estén fins a la dreta a partir del pol més a la dreta



-1

2) Un sistema LTI té per funció de transferència

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}}$$

Trobar la seva resposta impulsiva i decidir si el sistema és estable en funció de la ROC

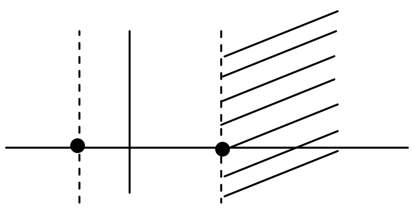
$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$A(s-2) + B(s+1) = s-1$$

Per s=2 $\quad A \cdot 0 + B \cdot 3 = 1\ \rightarrow B = \frac{1}{3}$

Per s=-1 $\ A \cdot (-3) + B \cdot 0 = -2\ \rightarrow A = \frac{2}{3}$

$$H(s) = \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}\ \rightarrow h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$



-1 2

És causal. Aquesta solució no inclou a la transformada de Fourier i per tant no és estable

3) Un sistema LTI es defineix amb la següent equació diferencial

$$\frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{3y(t)} = \boldsymbol{x(t)}$$

Quina és la resposta impulsiva?

Aplicant la propietat de la derivada (suposant C.I.=0)

$$s \cdot Y(s) + 3Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

Si el sistema és causal, la ROC serà $Re(s) > -3 \rightarrow h(t) = e^{-3t}u(t)$

Si no és no causal, la ROC serà $Re(s) < -3 \rightarrow h(t) = -e^{-3t}u(-t)$.

4) En un sistema LTI, per una entrada $\boldsymbol{x(t) = e^{-3t}u(t)}$ la sortida és $\boldsymbol{y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)}$. Determinar la funció de transferència i la seva ROC, així com l'equació diferencial (suposant condicions inicials de repòs).

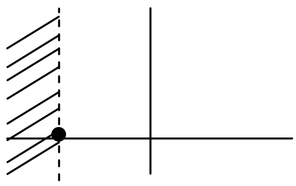
$$x(t) = e^{-3t}u(t) \;\rightarrow X(s) = \frac{1}{s+3}\,, \quad Re(s) > -3$$

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\;, \quad Re(s) > -1$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

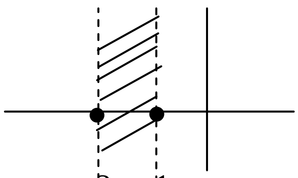
Pols en -2 i -1. 3 opcions per a la ROC.

a) A l'esquerra de -2



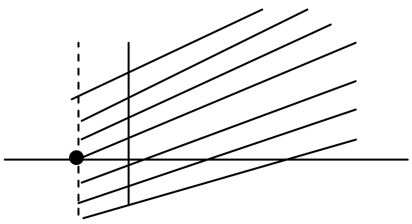
-2

b) Entre -1 i -2



-2 -1

c) A la dreta de -1



-1

Com $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ les ROC de H(s) i X(s) han de complir que

$$ROC\big(H(s)\big) \cap ROC\big(X(s)\big) = ROC(Y(s))$$

L'única opció possible és la c. Sistema causal i estable.

La seva equació diferencial és:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

5) En un sistema LTI descrit per l'equació diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

Determinar la funció de transferència H(s), dibuixar un diagrama de pols i zeros, estimar la resposta impulsiva suposant que el sistema sigui a) estable, b) causal i c) no causal i inestable.

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \quad \rightarrow s = 2 \; i \; s = -1$$

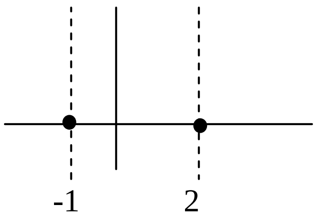
$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$A(s+1) + B(s-2) = 1$$

$$s = -1 \;\; \rightarrow \;\; A \cdot 0 + B(-3) = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$s = 2 \;\; \rightarrow \;\; A \cdot 3 + B \cdot 0 = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$H(s) = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}$$



Estable $(j\omega)$inclòs → $h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$,

Causal → Dreta → $h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$,

No causal i no estable → $h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$