

Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

REPRESENTACIONS CONFORMES

Jaume Puigbò Sanvisens

Director: Xavier Massaneda
Realitzat a: Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi. UB
Barcelona, 15 de juny de 2012

Índex

0.1	Introduction	5
0.2	Introducció	6
1	Holomorfia i conformalitat	9
2	El teorema de Riemann	15
2.1	Homografies o transformacions de Möbius	16
2.1.1	Definició i propietats bàsiques	16
2.1.2	Propietats geomètriques	17
2.1.3	Automorfismes de dominis simplement connexos	21
2.2	Transformacions de Schwarz-Christoffel	26
2.2.1	Introducció	26
2.2.2	Generalització	27
2.2.3	Polígons	28
3	Demostració del teorema de Riemann	35
3.1	El teorema de Montel	35
3.2	Demostració del teorema de Riemann amb famílies normals	40

3.3	Demostració del teorema de Riemann amb el problema de Dirichlet . . .	45
4	Aplicacions	51
4.1	Cartografia	51
4.1.1	La projecció de Mercator	51
4.1.2	La projecció estereogràfica	55
4.1.3	Projeccions còniques	57
4.2	Dinàmica de fluids	61

Introducció

0.1 Introduction

In this work we will discuss conformal mappings between simply connected domains in the complex plane, and more generally, in the Riemann sphere. Basic knowledge of complex analysis is assumed. The main theorem of the theory of conformal mapping, and the guideline of this work, is the Riemann's theorem, which proves the existence of a conformal map bijective between any simply connected domain and the unit disk. This proof is not constructive.

This memoir consists of four chapters.

In the first chapter we recall the relationship between holomorphicity and conformality: a function is conformal if and only if it is holomorphic with non-zero derivative. We also give simple examples of such transformations.

In the second chapter we state Riemann's theorem and we introduce two families of transformations corresponding to domains with simple geometry: the Möbius transformations and the Schwarz-Christoffel transformations. The first ones give often the explicit transformation stated by Riemann's theorem for domains limited by circles and straight lines, whereas the latter give transformations from the upper half-plane into a polygon.

In the third chapter we prove Riemann's theorem by two different methods. One is based on normal families of holomorphic functions, and the other, the method initially devised by Riemann, on the solution of the Dirichlet problem in bounded simply connected domains.

In the last chapter we show two applications of conformal mapping. Conformality is one of the attributes often desired in a projection of (a part of) the Earth on a map. We consider the three more usual conformal projections (or maps): the Mercator projection, the stereographic projection and the Lambert conical projection. The second application concerns ideal fluid dynamics in the plane: for irrotational and incompressible flows the streamlines can be obtained as level curves of a certain conformal map.

0.2 Introducció

En aquest treball parlarem sobre les representacions conformes entre dominis simplement connexos del pla complex, i més generalment, de l'esfera de Riemann. Donem per assumits coneixements bàsics d'anàlisi complexa per comprendre els continguts d'aquest treball. El teorema principal de la teoria de representacions conformes, i que serveix de guió d'aquest treball, és el teorema de Riemann, el qual prova l'existència d'una representació conforme i bijectiva entre qualsevol domini simplement connex i el disc unitat. La prova no és constructiva.

La memòria consta de quatre capítols.

En el primer capítol es recorda la relació entre holomorfia i conformalitat: una funció és conforme si, i només si, és holomorfa amb derivada no nul·la. Es donen també exemples senzills de transformacions d'aquesta mena.

En el segon capítol s'enuncia el teorema de Riemann i es veuen explícitament dues famílies de transformacions conformes que corresponen a casos de dominis geomètricament senzills: les transformacions de Möbius i les transformacions de Schwarz-Christoffel. Les primeres permeten sovint obtenir la transformació enunciada pel teorema de Riemann per a dominis limitats per cercles i rectes, mentre que les segones donen transformacions del semiplà superior a l'interior d'un polígon.

En el tercer capítol es prova el teorema de Riemann de dues maneres diferents. Una utilitzant famílies normals de funcions holomorfes, i l'altra, el mètode ideat per Riemann, a partir de la solució del problema de Dirichlet a dominis simplement connexos acotats.

En l'últim capítol es veuen dues aplicacions de la teoria de representacions conformes.

Sovint la conformalitat és una de les propietats desitjades a les projeccions de la Terra en un mapa. Veurem les tres projeccions conformes més usuals per a la realització de mapes: la projecció de Mercator, la projecció estereogràfica i la projecció cònica de Lambert. La segona aplicació és en la dinàmica de fluids ideals en el pla: per a fluids irrotacionals i incompressibles les línies de corrent es poden obtenir a partir de les corbes de nivell de una certa transformació conforme.

Capítol 1

Holomorfia i conformalitat

En aquest breu capítol introductori recordarem la relació entre holomorfia i conformalitat (preservació d'angles).

Definició. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, f una funció definida en Ω i $z_0 \in \Omega$. Direm que f és holomorfa en z_0 si existeix el límit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Si la funció f és holomorfa per a tots els punts de Ω es diu que f és holomorfa a Ω i es denota com $f \in H(\Omega)$. Les funcions holomorfes en tot el pla complex s'anomenen enteres.

Recordem que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ amb $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, aleshores f és diferenciable a $\mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0) si existeix $df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - df(x - x_0, y - y_0)\|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

L'aplicació df és la diferencial de f en (x_0, y_0) i s'escriu

$$df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Suposem ara que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és holomorfa a $z_0 \in \Omega$. Sigui $\lambda = f'(z_0) = \alpha + i\beta$ la derivada complexa al punt z_0 . Observem que $z \mapsto \lambda z$ és lineal, i si $z = x + iy$, aquesta aplicació lineal és equivalent a

$$\begin{aligned} x + iy &\mapsto (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant, es diu que una matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ és $\mathbb{C}$ -lineal si $a = d$ i $b = -c$.

Així tenim que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0. \end{aligned}$$

Resumint, hem demostrat:

Teorema 1.1. Sigui $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ i $z_0 = x_0 + iy_0$.

Aleshores f és holomorfa en z_0 si, i només si, f és diferenciable en el sentit real i la diferencial $df(x_0, y_0)$ és $\mathbb{C}$ -lineal, és a dir, es compleixen les equacions següents

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Aquestes equacions s'anomenen les equacions de Cauchy-Riemann.

Tot seguit mostrarem la relació entre holomorfia i conformalitat.

Definició. Una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diu que és conforme a $z_0 \in \Omega$ si $df(z_0)$ és invertible i preserva els angles.

Proposició 1.2. *Una funció f és conforme en z_0 si, i només si, f és holomorfa en z_0 i $f'(z_0) \neq 0$.*

A més, l'aplicació lineal $df(z_0)$ és un gir de $\text{Arg}(f'(z_0))$ seguit d'una dilatació de factor $|f'(z_0)|$.

Demostració. Observem que si $\gamma_1(t)$ i $\gamma_2(t)$ són dues corbes regulars tals que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$, $\gamma_1'(0) \neq 0$ i $\gamma_2'(0) \neq 0$, aleshores l'angle de γ_1 i γ_2 en el punt z_0 és l'angle entre els vectors tangents, és a dir, $\text{Arg} \left[\gamma_1'(0) \overline{\gamma_2'(0)} \right]$.

Sigui ara $\tilde{\gamma}_i(t) = f(\gamma_i(t))$ per $i = 1, 2$. Llavors el vector tangent a $\tilde{\gamma}_i$ en el punt $f(z_0)$ és

$$\tilde{\gamma}_i'(0) = (f \circ \gamma_i)'(0) = df(z_0)(\gamma_i'(0)) \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Per tant, l'angle que forma $\tilde{\gamma}_1$ amb $\tilde{\gamma}_2$ és

$$\text{Arg} \left[df(z_0)(\gamma_1'(0)) \overline{df(z_0)(\gamma_2'(0))} \right].$$

Observem que la condició que $df(z_0)$ sigui invertible és necessària per a poder parlar de l'angle entre $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{\gamma}_2$, perquè si no podria passar que una d'aquestes corbes tingués vector tangent nul en el punt $f(z_0)$.

Suposem ara que f és holomorfa al voltant del punt z_0 i que $f'(z_0) \neq 0$. Aleshores sabem que

$$df(z_0)(\gamma_i'(0)) = f'(z_0)\gamma_i'(0).$$

Per tant, l'angle entre $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{\gamma}_2$ és

$$\text{Arg} \left[f'(z_0)\gamma_1'(0) \overline{f'(z_0)\gamma_2'(0)} \right] = \text{Arg} \left[|f'(z_0)|^2 \gamma_1'(0) \overline{\gamma_2'(0)} \right] = \text{Arg} \left[\gamma_1'(0) \overline{\gamma_2'(0)} \right],$$

és a dir, f és conforme a z_0 .

Ara comparem la longitud del vector tangent a una corba amb la longitud del vector de la corba imatge, és a dir, comparem $|\gamma'(0)|$ amb $|df(z_0)(\gamma'(0))|$. Com que f és holomorfa tenim que

$$|df(z_0)(\gamma'(0))| = |f'(z_0)| |\gamma'(0)|.$$

Així resulta que la distorsió de la longitud provocada per f és la mateixa en totes les direccions i val $|f'(z_0)|$.

Veiem ara, recíprocament, que si f és conforme en z_0 , aleshores f és holomorfa en z_0 i $f'(z_0) \neq 0$, és a dir, volem veure que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Com que f és conforme en z_0 tenim que

$$\frac{df(z_0)(w)}{w} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \frac{\bar{w}}{w}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

té argument constant.

Sigui

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = Re^{i\psi} \quad \text{amb} \quad R > 0.$$

Prenem $w = e^{i\theta}$ amb $\theta \in [0, 2\pi]$ i tenim aleshores que

$$\frac{df(z_0)(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = Re^{i\psi} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-2i\theta}$$

té argument constant. Dividim per $e^{i\psi}$ i obtenim que

$$Re^{-i\psi} \frac{df(z_0)(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = R + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-i(2\theta+\psi)}$$

que té argument constant en variar θ . Això només és possible si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. □

Exemple 1. La transformació z^α amb $\alpha > 0$ és conforme en sectors d'angle $\leq \frac{2\pi}{\alpha}$. Essent

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha \log|z| + i\alpha \arg z}$$

on $\log z$ i $\arg z$ són determinacions del logaritme i de l'argument. Veiem que per a que hi hagi injectivitat cal que $0 \leq \alpha \arg z < 2\pi$, és a dir, $0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{\alpha}$.

Considerem la regió $\Omega_\beta = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < \theta < \beta, r > 0\}$. Observem que qualsevol altre sector del pla complex es pot enviar a un de l'estil de Ω_β amb el gir adequat.

Aleshores la funció $\varphi(z) = z^{\frac{\pi}{\beta}}$ envia Ω_β al semiplà superior $\mathbb{H}$.

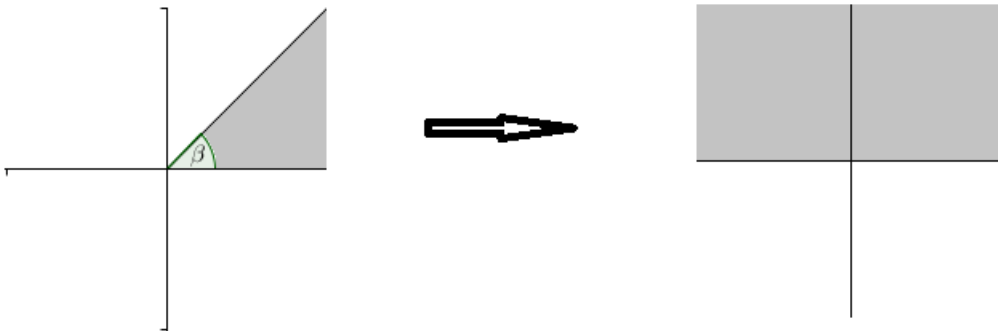


Figura 1.1: Transformació de Ω_β per $z^{\frac{\pi}{\beta}}$.

Observem que a $z_0 = 0$ (on $f'(z_0)$ s'anul·la o no és definit) no hi ha conformalitat. Això mostra que la hipòtesi $f'(z_0) \neq 0$ de la Proposició 1.2 no es pot eliminar.

Exemple 2. Si $z = x + iy$, l'exponencial té la forma $e^z = e^x e^{iy}$, així e^x és el mòdul i y és l'argument de e^z . Per tant, l'exponencial és conforme sobre tota banda horitzontal d'alçada estrictament menor a 2π .

Sigui $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha, \alpha \in (0, 2\pi)\}$. Observem que qualsevol banda horitzontal d'alçada menor a 2π es pot enviar a una banda horitzontal de la forma de B_α a partir d'una translació. De fet, de tota banda de $\mathbb{C}$ d'amplada α és pot arribar a una de la forma de B_α a base de translacions i rotacions.

Per tant, l'exponencial e^z envia bandes horitzontals B_α a sectors Ω_α amb $\alpha \in (0, 2\pi)$.

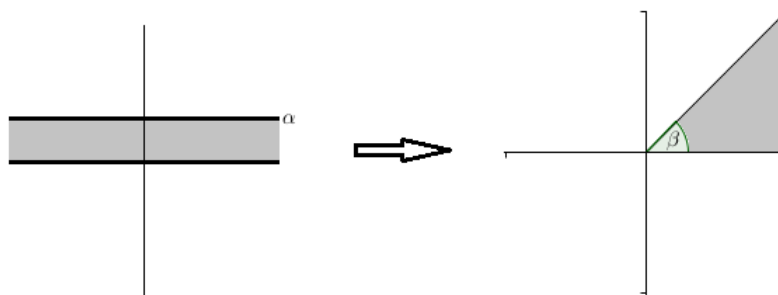


Figura 1.2: Transformació de la banda B_α al sector Ω_β ($\beta = \alpha$) mitjançant l'exponencial.

Observem també que la part esquerra de la banda horitzontal

$$E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}z < \alpha, \text{Re}z < 0\}$$

queda representada a la part del sector que queda dins del disc unitat $\mathbb{D}$, mentre que la part de la dreta

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}z < \alpha, \text{Re}z > 0\}$$

és enviada a la part del sector fora de $\mathbb{D}$.

Capítol 2

El teorema de Riemann

El teorema principal de la teoria de representacions conformes és el teorema de Riemann que diu que, des del punt de vista de l'anàlisi complexa, tots els dominis simplement connexos són equivalents. En aquest capítol enunciaré aquest teorema i veurem algunes famílies d'exemples de transformacions conformes de dominis del pla complex al disc unitat.

Teorema de Riemann. *Sigui $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un obert simplement connex i $a \in \Omega$ un punt qualsevol. Aleshores existeix una única $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme que satisfà $f(a) = 0$ i $f'(a) > 0$.*

Observem que, pel teorema de Liouville, no pot haver-hi cap transformació conforme de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{D}$.

El teorema de Riemann ens prova l'existència i la unicitat, però no ens dona explícitament la transformació. En general, no és possible trobar aquesta expressió explícita. Tanmateix, en casos geomètricament senzills és possible obtenir explícitament aquestes transformacions.

Veiem tot seguit dues famílies de transformacions conformes entre dominis simplement connexos geomètricament senzills.

2.1 Homografies o transformacions de Möbius

2.1.1 Definició i propietats bàsiques

Vegen en aquesta secció les propietats més rellevants de les transformacions de Möbius pel que fa a la representació conforme.

Definició. Una homografia o transformació de Möbius és una funció racional de la forma

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{amb } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{i} \quad ad - bc \neq 0.$$

Notem $\mathcal{M}$ el conjunt de les transformacions de Möbius

Tal i com està definida inicialment, $\phi \in \mathcal{M}$ és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Ara bé, ϕ es pot estendre de manera natural a una transformació holomorfa de l'esfera S^2 en ella mateixa definint $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$ i $\phi(-\frac{d}{c}) = \infty$ (recordem que, per definició, ϕ es diu holomorfa a ∞ si $\phi(\frac{1}{z})$ és holomorfa a 0).

Identificant S^2 amb l'espai projectiu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ i prenent les coordenades homogènies a $\mathbb{C}$, és a dir, $z \mapsto [z : 1]$, tenim que

$$\phi(z) = \phi \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + b \\ cz + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + b \\ \frac{cz + d}{1} \end{bmatrix}$$

amb $ad - bc \neq 0$.

Amb aquest punt de vista veiem que $\phi(z)$ ve donada per una matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

amb $\det A \neq 0$ i, per tant, té una inversa donada per la matriu A^{-1} , és a dir,

$$\phi^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Aquest mateix punt de vista mostra que $\mathcal{M}$ té estructura de grup amb l'operació composició, que correspon al producte de matrius.

Vegem ara un primer resultat sobre l'estructura d'aquest grup.

Proposició 2.1. *Tota transformació de Möbius es pot expressar com a composició de aquests quatre tipus de transformacions elementals:*

1) *Traslació:* $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{C}$.

2) *Dilatació:* $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) *Rotació:* $z \mapsto e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) *Inversa:* $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Demostració. Si $c \neq 0$ tenim que

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} \right) \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1(z)$$

on

$$\phi_1(z) = z + \frac{d}{c} \quad (\text{traslació})$$

$$\phi_2(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{inversa})$$

$$\phi_3(z) = \left| \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} \right| z \quad (\text{dilatació})$$

$$\phi_4(z) = e^{i\alpha} z, \alpha = \arg\left(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}\right) \quad (\text{rotació})$$

$$\phi_5(z) = \frac{a}{c} + z \quad (\text{traslació}).$$

Si $c = 0$ tenim que

$$\phi(z) = \left| \frac{a}{d} \right| e^{i\beta} z + \frac{b}{d}$$

amb $\beta = \arg \frac{a}{d}$ i, per tant, ϕ és la composició d'una rotació, una dilatació i una translació. □

2.1.2 Propietats geomètriques

Veurem tot seguit que les transformacions de Möbius preserven els cercles de S^2 .

Observem primer de tot que els cercles a S^2 es veuen a $\mathbb{C}$ com a un cercle si el punt de l'infinit no pertany al cercle, o com a una recta si el punt de l'infinit pertany al cercle.

L'equació general d'un cercle a S^2 és

$$|\alpha z + \beta|^2 = R^2 \quad \text{amb} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{i} \quad R \geq 0.$$

Això és equivalent a

$$|\alpha|^2 z\bar{z} + \alpha\bar{\beta}z + \bar{\alpha}\beta\bar{z} + |\beta|^2 - R^2 = 0.$$

Si escrivim $A = |\alpha|^2$, $B = \alpha\bar{\beta}$ i $C = |\beta|^2 - R^2$ tenim que l'equació general d'un cercle a S^2 és de la forma

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

amb $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ i $|B|^2 > AC$.

Proposició 2.2. *Tota homogràfia transforma el conjunt de cercles a S^2 , és a dir, circumferències i rectes a $\mathbb{C}$, en si mateix.*

Demostració. Només cal veure-ho per a les quatre homogràfies bàsiques de la proposició 2.1. És obvi per a traslacions, dilatacions i rotacions. Veiem-ho pel cas de la transformació inversa $z \mapsto \frac{1}{z} = w$. Un cercle

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

amb $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ i $|B|^2 > AC$.

Dividim per $z\bar{z}$ i obtenim

$$A + \frac{\bar{B}}{\bar{z}} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z\bar{z}} = 0,$$

és a dir,

$$A + \bar{B}\bar{w} + Bw + Cw\bar{w} = 0,$$

que també és l'equació d'un cercle. □

Una transformació de Möbius queda determinada per la seva matriu, en la que hi ha tres paràmetres independents. En conseqüència, tota homografia queda unívocament determinada pel valor de tres punts diferents:

Proposició 2.3. *Donats tres punts diferents z_1, z_2, z_3 hi ha una única homografia ϕ tal que*

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{\phi} (0, 1, \infty).$$

Demostració. L'existència és immediata: si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ definim

$$\phi(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Si algun $z_j = \infty$, aleshores ϕ ve donada per

$$\phi(z) = \begin{cases} (z_2 - z_3) \frac{1}{z - z_3} & \text{si } z_1 = \infty \\ \frac{z - z_1}{z - z_3} & \text{si } z_2 = \infty \\ \frac{1}{z_2 - z_1} (z - z_1) & \text{si } z_3 = \infty. \end{cases}$$

Provem ara la unicitat de ϕ . Suposem que ϕ i $\tilde{\phi}$ són dues homografies tals que

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{\phi, \tilde{\phi}} (0, 1, \infty).$$

Considerem $\varphi = \phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$. Observem que $\varphi(z_j) = z_j$ per a $j = 1, 2, 3$ i φ és una homografia. Però una homografia diferent de la identitat no pot tenir tres punts fixos, ja que l'equació $\frac{az+b}{cz+d} = z$, és a dir,

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

només té dues solucions. Per tant, $\varphi = Id$ i $\tilde{\phi} = \phi$. □

Corol·lari 2.4. *Donades dues ternes de punts diferents (z_1, z_2, z_3) i (w_1, w_2, w_3) , existeix una única homografia ϕ tal que*

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{\phi} (w_1, w_2, w_3).$$

Demostració. Sigui ϕ_1 tal que

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{\phi_1} (0, 1, \infty)$$

i sigui ϕ_2 tal que

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{\phi_2} (0, 1, \infty).$$

Aleshores, $\phi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$ envia (z_1, z_2, z_3) a (w_1, w_2, w_3) .

Per veure la unicitat suposem que existeix una altra φ tal que

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{\phi} (w_1, w_2, w_3).$$

Aleshores, per la proposició anterior, tenim que $\phi_1 = \phi_2 \circ \varphi$, perquè tenen la mateixa imatge a (z_1, z_2, z_3) i, per tant, $\varphi = \phi$. $\square$

Exemple 3. Busquem l'homografia $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ que transforma $0, 1, \infty$ en $-1, 0, 1$, respectivament. Si prenem $a = 1$ i tenim en compte que $\phi(i) = 0$ obtenim $\phi(z) = \frac{z-i}{cz+d}$. Per altra banda observem que $\phi(\infty) = 1$ i $\phi(0) = -1$, així obtenim

$$\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Observem que ϕ envia l'eix real al cercle unitat i si prenem $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$ la seva imatge haurà de ser el disc unitat, ja que $\phi(i) = 0$.

L'homografia $\phi^{-1}(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ envia $\mathbb{H}$ al disc unitat.

Exemple 4. Considerem els dominis $\Omega = D(-1, \sqrt{2}) \cap D(1, \sqrt{2})$ i busquem la transformació de Möbius que envia Ω a $\mathbb{H}$ preservant el segment $(-i, i)$.

Considerem la transformació de Möbius ϕ que envia $-i$ a 0 , i a ∞ i 0 a 1 , és a dir $\phi(z) = \frac{i+z}{i-z}$. Aquesta transformació envia la recta imaginària a la recta que passa per $\phi(-i) = 0$ i $\phi(0) = 1$, és a dir, a la recta real. Per altra banda, $\phi(\Omega)$ és un sector simètric respecte la recta real. Com que l'angle que formen els dos cercles a $-i$ és $\pi/2$, aquest sector té també obertura $\pi/2$. Així, $\phi(\Omega) = \{re^{i\theta} : -\pi/4 < \theta < \pi/4\}$.

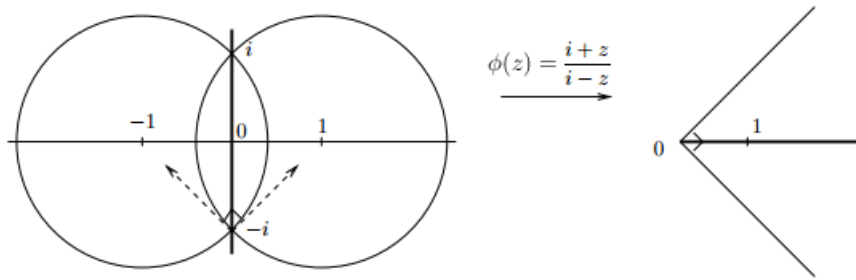


Figura 2.1: Exemple 4.

Fem ara z^2 i obtenim el semiplà de la dreta $\mathcal{D} = \{re^{i\theta} : -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. Finalment multiplicant per i obtenim $\mathbb{H}$. Per tant, la transformació de Möbius que envia Ω a $\mathbb{H}$ buscada és

$$\Phi(z) = \left(\frac{i+z}{i-z} \right)^2 i.$$

2.1.3 Automorfismes de dominis simplement connexos

En aquesta secció veiem com les transformacions de Möbius permeten classificar els automorfismes dels dominis simplement connexos del pla.

Definició. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domini. Un automorfisme de Ω és una aplicació holomorfa de Ω en Ω i bijectiva. Notem $\text{Aut}(\Omega)$ al conjunt dels automorfismes de Ω .

Lema 2.5. El conjunt dels automorfismes de $\mathbb{C}$ està format per les transformacions lineals $w = az + b$ amb $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{C}$, és a dir, $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$

Demostració. És obvi que $\text{Aut}(\mathbb{C}) \supseteq \{az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$.

Veiem que $\text{Aut}(\mathbb{C}) \subseteq \{az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$. Sigui $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un automorfisme i considerem $f(w) = \phi(\frac{1}{w})$, que és una funció holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mirem quin tipus de singularitat aïllada és el 0.

No és una singularitat evitable: si ho fos $f(w)$ seria acotada a l'entorn de $w = 0$. Això diria que $\phi(z)$ és acotada a una regió $|z| > R > 0$ i, per tant, a tot $\mathbb{C}$. Això contradiu el teorema de Liouville, que diu que les úniques funcions enteres i acotades són constants.

No és una singularitat essencial: si ho fos, el teorema de Casorati-Weierstrass diria que per a tot $\delta > 0$, $f(D(0, \delta))$ és dens a $\mathbb{C}$. Fixem $\delta > 0$ i prenem $\epsilon > 2\delta$. Pel teorema de l'aplicació oberta, $f(D(\epsilon, \frac{\epsilon}{2}))$ és obert, i com que $f(D(0, \delta))$ és dens a $\mathbb{C}$ tenim

$$f(D(0, \delta)) \cap f(D(\epsilon, \frac{\epsilon}{2})) \neq \emptyset$$

i això contradiu la injectivitat.

Per tant, la singularitat és un pol. Aleshores el desenvolupament de Laurent de f al punt $w = 0$ és de la forma

$$f(w) = \frac{c_{-n}}{w^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{w} + c_0 + c_1 w + \cdots + c_m w^m + \cdots$$

Això dona

$$\phi(z) = c_{-n}z^n + \cdots + c_{-1}z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_m}{z^m} + \cdots$$

Com que $\phi(z)$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ necessàriament $c_k = 0, \forall k > 0$ i, per tant,

$$\phi(z) = c_{-n}z^n + \cdots + c_{-1}z + c_0$$

és un polinomi. Com que ϕ és injectiva, pel teorema fonamental de l'àlgebra, tenim que ϕ ha de ser un polinomi de grau 1. $\square$

Proposició 2.6. *El conjunt dels automorfismes de S^2 és igual al conjunt de transformacions de Möbius, és a dir, $\text{Aut}(S^2) = \mathcal{M}$.*

Demostració. És obvi, pel que hem explicat a l'inici d'aquesta secció, que $\mathcal{M} \subseteq \text{Aut}(S^2)$.

Veiem que $\text{Aut}(S^2) \subseteq \mathcal{M}$. Sigui $\varphi \in \text{Aut}(S^2)$, aleshores existeix $a \in S^2$ tal que $\varphi(a) = \infty$. Prenem $\phi \in \mathcal{M}$ amb $\phi^{-1}(a) = \infty$. Llavors la composició $\varphi \circ \phi$ envia ∞ a ∞ i, per tant, és un automorfisme de $\mathbb{C}$.

Pel lema anterior tenim que existeixen $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{C}$ tals que $\varphi(\phi(\zeta)) = a\zeta + b$. Si $z = \phi(\zeta)$ tenim

$$\varphi(z) = a\phi^{-1}(z) + b.$$

Per tant, $\varphi \in \mathcal{M}$, ja que $\phi^{-1} \in \mathcal{M}$. $\square$

Passem tot seguit a classificar els automorfismes de $\mathbb{D}$. L'element principal per fer-ho és el següent lema:

Lema de Schwarz. *Sigui $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ una funció holomorfa. Si $f(0) = 0$, aleshores*

$$i) |f(z)| \leq |z| \text{ per tot } 0 < |z| < 1.$$

$$ii) |f'(0)| \leq 1.$$

iii) *Si en i) o ii) s'assoleix la igualtat per algun $z \neq 0$, aleshores $f(z) \equiv \lambda z$, on λ és una constant de mòdul igual a 1.*

Demostració. Sigui $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, aleshores $g(z)$ és holomorfa per a tot $0 < |z| < 1$ i té una singularitat evitable en $z = 0$, ja que $f(0) = 0$. Si definim

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$$

tenim que g és holomorfa en $\mathbb{D}$.

Fixat $0 < r < 1$, si $|z| = r$ tenim que

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}.$$

Pel principi del mòdul màxim tenim que $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ per a tot $|z| < r$. Aleshores fixat $z \in \mathbb{D}$ i fent tendir r a 1 obtenim

$$|g(z)| \leq 1.$$

Això es compleix per a tot $z \in \mathbb{D}$. Per tant, tenim que

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \quad \text{per a tot } 0 < |z| < 1,$$

és a dir,

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{per a tot } 0 < |z| < 1.$$

Per altra banda, també hem vist que

$$|g(0)| = |f'(0)| \leq 1.$$

Per provar iii) observem que si s'assoleix la igualtat, aleshores hi ha un punt $z \in \mathbb{D}$ tal que $|g(z)| = 1$. Pel principi del mòdul màxim tenim que $g(z) \equiv \lambda$ amb $|\lambda| = 1$. Per tant, $f(z) \equiv \lambda z$. $\square$

Teorema 2.7. *Els automorfismes de $\mathbb{D}$ són les transformacions de Möbius que envien $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$. Més explicitament,*

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} : a, \lambda \in \mathbb{C}, \quad |a| < 1 \quad i \quad |\lambda| = 1 \right\} \subset \mathcal{M}.$$

Observació. Aquest resultat amb combinació del teorema de Riemann permet classificar els automorfismes de qualsevol domini Ω simplement connex: si $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ és la representació conforme donada pel teorema de Riemann, aleshores

$$Aut(\Omega) = \{\varphi^{-1} \circ \phi \circ \varphi : \phi \in Aut(\mathbb{D})\}.$$

Demostració. Veiem primer que

$$Aut(\mathbb{D}) \supseteq \left\{ \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} : a, \lambda \in \mathbb{C}, \quad |a| < 1 \quad \text{i} \quad |\lambda| = 1 \right\}.$$

Observem que, per un càlcul directe, si $|\lambda| = 1$,

$$1 - \left| \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

Aleshores si $|z| = 1$ tenim que

$$1 - \left| \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} = 0$$

i si $z \in \mathbb{D}$ i $a \in \mathbb{D}$ tenim que

$$1 - \left| \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0$$

de manera que $\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \in \mathbb{D}$.

Això mostra que aquestes transformacions de Möbius envien $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$ i, per tant, són automorfismes de $\mathbb{D}$.

Veiem ara que no n'hi ha d'altres, és a dir,

$$Aut(\mathbb{D}) \subseteq \left\{ \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} : a, \lambda \in \mathbb{C}, \quad |a| < 1 \quad \text{i} \quad |\lambda| = 1 \right\}.$$

Sigui $\phi \in Aut(\mathbb{D})$, llavors existeix $a \in \mathbb{D}$ amb $\phi(a) = 0$. Prenem $\varphi(\zeta) = \frac{a-\zeta}{1-\bar{a}\zeta} = z$. Així tenim que $\varphi(0) = a$ i

$$\begin{aligned} \phi \circ \varphi : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \\ \zeta &\mapsto w = (\phi \circ \varphi)(\zeta) \end{aligned}$$

amb $(\phi \circ \varphi)(0) = 0$. Per altra banda

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} \circ \phi^{-1} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ w &\longmapsto \zeta = (\varphi^{-1} \circ \phi^{-1})(w)\end{aligned}$$

amb $(\varphi^{-1} \circ \phi^{-1})(0) = 0$.

Pel lema de Schwarz tenim que

$$|(\phi \circ \varphi)(\zeta)| \leq |\zeta|$$

i també

$$|(\varphi^{-1} \circ \phi^{-1})(w)| \leq |w|,$$

és a dir,

$$|\zeta| \leq |(\phi \circ \varphi)(\zeta)|.$$

Resumint, hem vist que

$$|(\phi \circ \varphi)(\zeta)| = |\zeta|$$

i, per tant, pel lema de Schwarz

$$(\phi \circ \varphi)(\zeta) = \lambda \zeta.$$

En termes de z ,

$$\phi(z) = \lambda \varphi^{-1}(z) = \lambda \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \in \mathcal{M},$$

ja que $\varphi^{-1}(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. □

Corol·lari 2.8. *Siguin $a, b \in \mathbb{D}$. Aleshores existeix $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ conforme tal que $\varphi(a) = b$.*

Demostració. Considerem

$$\phi(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{i} \quad \tilde{\phi}(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}.$$

Prenem $\varphi = \tilde{\phi}^{-1} \circ \phi$ i tenim que $\varphi(a) = b$. □

Observem que, segons el teorema d'uniformització, les úniques superfícies de Riemann simplement connexes són equivalents a $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ o S^2 . Per tant, mitjançant $\mathcal{M}$ es classifiquen tots els automorfismes de les superfícies de Riemann simplement connexes.

2.2 Transformacions de Schwarz-Christoffel

La segona família de transformacions conformes que veurem són les anomenades transformacions de Schwarz-Christoffel, que donen representacions conformes per a polígons. Christoffel era un matemàtic alemany que va estudiar a Berlin i després va anar a Zurich a treballar de professor. Allà va publicar els primers papers sobre les fórmules de Schwarz-Christoffel en l'any 1862. Uns anys més tard, Schwarz va publicar un contigut que abarcava tot el territori de Christoffel i alguns aspectes més sobre les fórmules de Schwarz-Christoffel aparentment independent de Christoffel i amb fórmules més explícites com, per exemple, per a triangles o rectangles.

2.2.1 Introducció

Sigui $x_0 \in \mathbb{R}$ fixat i considerem una funció $f(z)$ amb derivada

$$f'(z) = (z - x_0)^\alpha,$$

on $-1 < \alpha < 1$. Escollim la branca de l'argument de manera que

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(z - x_0) \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Estudiem la imatge de l'eix real per f . Suposem primer que $z \in (x_0, \infty)$, aleshores $f(z)$ és conforme, ja que $f'(z) \neq 0$. Observem que

$$\arg f'(z) = \alpha \arg(z - x_0) = 0.$$

Per tant, $f((x_0, \infty))$ és paral·lel a l'eix real.

Suposem ara que $z \in (-\infty, x_0)$. Com abans, $f(z)$ és conforme i tenim que

$$\arg f'(z) = \alpha \arg(z - x_0) = \alpha\pi.$$

És a dir, $f((-\infty, x_0))$ és una semirecta que forma un angle $\alpha\pi$ amb l'eix real.

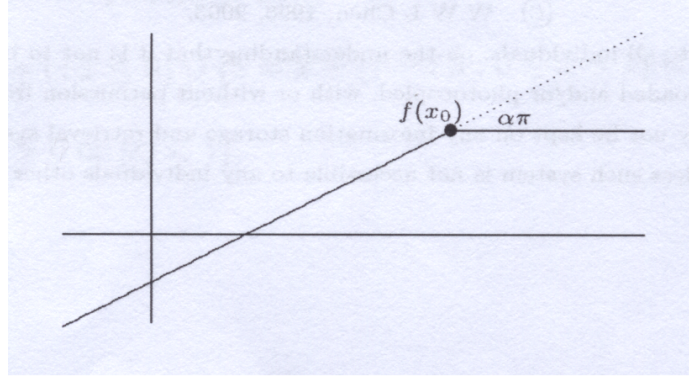


Figura 2.2: Transformació de l'eix real per f amb $f'(z) = (z - x_0)^\alpha$.

2.2.2 Generalització

Sigui $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ fixats amb $x_1 < \dots < x_k$ i considerem una funció $f(z)$ amb derivada

$$f'(z) = \lambda(z - x_1)^{\alpha_1} \cdots (z - x_k)^{\alpha_k},$$

on $-1 < \alpha_1, \dots, \alpha_k < 1$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aleshores

$$\arg f'(z) = \arg \lambda + \alpha_1 \arg(z - x_1) + \cdots + \alpha_k \arg(z - x_k).$$

Així tenim que, si $z \in \mathbb{R}$,

$$\arg f'(z) = \begin{cases} \arg \lambda & \text{si } z > x_k \\ \arg \lambda + \alpha_k \pi & \text{si } x_{k-1} < z < x_k \\ \vdots & \\ \arg \lambda + \alpha_k \pi + \cdots + \alpha_2 \pi & \text{si } x_1 < z < x_2 \\ \arg \lambda + \alpha_k \pi + \cdots + \alpha_1 \pi & \text{si } z < x_1. \end{cases}$$

Essent $\arg z$ contínu a $\mathbb{C} \setminus (\{iy : y \leq 0\})$, tenim que f és holomorfa en el domini

$$\mathbb{C} \setminus (\{x_1 + iy : y \leq 0\} \cup \cdots \cup \{x_k + iy : y \leq 0\}).$$

Per tant, per a tot $z \in \mathbb{H}$, on $\mathbb{H}$ és el semiplà superior, podem escriure

$$f(z) = \int_{z_0}^z f'(\zeta) d\zeta + B = \lambda \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{\alpha_1} \cdots (\zeta - x_k)^{\alpha_k} d\zeta + B$$

amb $z_0 \in \overline{\mathbb{H}}$. Les transformacions d'aquesta forma són les anomenades transformacions de Schwarz-Christoffel.

2.2.3 Polígons

Volem utilitzar les transformacions de Schwarz-Christoffel per a construir transformacions conformes de $\mathbb{H}$ a un polígon donat.

Sigui P un polígon amb vèrtexs $w_1, \dots, w_k$ ordenats en el sentit antihorari i siguin $\theta_1\pi, \dots, \theta_k\pi$ els angles dels respectius vèrtexs $w_1, \dots, w_k$, on $-1 < \theta_1, \dots, \theta_k < 1$ i de manera que

$$\theta_1\pi + \cdots + \theta_k\pi = -2\pi.$$

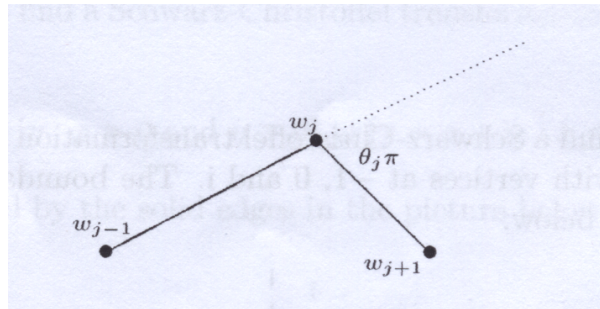


Figura 2.3: Ordenació d'angles i vèrtexs.

Observem que si coneixem els vèrtexs $w_1, \dots, w_{k-1}$ i els angles $\theta_1\pi, \dots, \theta_{k-1}\pi$, llavors el vèrtex w_k i l'angle $\theta_k\pi$ estan determinats de manera única. La idea per a trobar els nombres reals $x_1 < \cdots < x_{k-1}$ és que siguin les preimatges dels vèrtexs $w_1, \dots, w_{k-1}$ respectivament, i que $x = \infty$ sigui la preimatge del vèrtex w_k .

Aleshores

$$g(z) = \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{\theta_1} \cdots (\zeta - x_{k-1})^{\theta_{k-1}} d\zeta$$

transforma l'eix real en un polígon Q amb k vèrtexs amb angles $\theta_1\pi, \dots, \theta_k\pi$ similar al polígon P , però no necessàriament és el polígon P . Per aconseguir el polígon P hauríem de fer una dilatació, una translació i una rotació.

Veiem tot seguit un recíproc del que acabem de veure. Per a enunciar i provar el teorema canviarem la notació dels angles del polígon, $\theta = \alpha - 1$, per tal de facilitar la demostració.

Teorema 2.9. *Sigui g una representació conforme del semiplà $\mathbb{H}$ sobre un polígon de n costats que té els angles interiors de mides $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ i siguin $x_1, \dots, x_n$ els punts de l'eix real que g aplica a en els vèrtexs del polígon. Aleshores, fixat un punt $z_0 \in \mathbb{H}$*

$$g(z) = A \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{\alpha_1-1} \cdots (\zeta - x_{k-1})^{\alpha_n-1} d\zeta + B.$$

Observeu primer que

$$g(z) = A \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{\alpha_1-1} \cdots (\zeta - x_{k-1})^{\alpha_n-1} d\zeta + B$$

és equivalent a

$$g'(z) = A(z - x_1)^{\alpha_1-1} \cdots (z - x_n)^{\alpha_n-1}$$

i també a

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{\alpha_1 - 1}{z - x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n - 1}{z - x_n}.$$

Això ens mostra que $\frac{g''(z)}{g'(z)}$ té un pol simple amb residu $\alpha_k - 1$ al voltant del punt x_k .

Demostració. Estudiarem el comportament de $\frac{g''(z)}{g'(z)}$, que és holomorfa a $\mathbb{H}$, al voltant d'un punt x_k amb $g(x_k) = w_k$. Considerem la funció $f_k(z) = (g(z) - w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$ que és holomorfa a $\mathbb{H}$. Quan z tendeix a l'eix real, $\text{Im} f_k(z)$ tendeix a 0 i, pel principi de simetria, $f_k(z)$ és holomorfa en un entorn de x_k amb $f_k(x_k) = 0$ i $f'_k(x_k) \neq 0$, ja que si $f'_k(x_k) = 0$ hi hauria punts del semiplà inferior que anirien a parar per g a l'interior de del polígon.

Per tant, podem escriure $f_k(z) = (z - x_k)\varphi_k(z)$ amb $\varphi_k(z)$ holomorfa en un entorn de x_k i $\phi_k(x_k) \neq 0$. Sigui $h_k(z)$ una determinació de $\varphi_k(z)^{\alpha_k}$. Per tant,

$$f_k(z) = (g(z) - w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}} = (z - x_k)\varphi_k(z)$$

i, elevant a la potència α_k ,

$$g(z) - w_k = (z - x_k)^{\alpha_k} h_k(z)$$

on $h_k(z)$ és holomorfa en un entorn de x_k i $h_k(x_k) \neq 0$.

Calculant resulta que

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{\alpha_k(\alpha_k - 1)(z - x_k)^{\alpha_k - 2} h_k(z) + 2\alpha_k(z - x_k)^{\alpha_k - 1} h'_k(z) + (z - x_k)^{\alpha_k} h''_k(z)}{\alpha_k(z - x_k)^{\alpha_k - 1} h_k(z) + (z - x_k)^{\alpha_k} h'_k(z)}$$

i

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} - \frac{\alpha_k - 1}{z - x_k} = \frac{2\alpha_k h'_k(z) + (z - x_k) h''_k(z) - (\alpha_k - 1) h'_k(z)}{\alpha_k h_k(z) + (z - x_k) h'_k(z)}.$$

Per tant, la singularitat aïllada en el punt x_k és un pol simple amb residu $\alpha_k - 1$.

Finalment, estidiem $\frac{g''(z)}{g'(z)}$ al voltant del punt de l'infinit. Suposem que l'infinit es correspon a un punt w_0 de la frontera del polígon que no sigui un vèrtex. Tot i així podem considerar que és un vertex amb angle π , és a dir, tenim $\alpha_0 = 1$. Aleshores, com abans podem veure que

$$g(z) = w_0 + \frac{1}{z} + h(z)$$

amb $h(z)$ holomorfa a l'entorn de l'infinit. Si $|z|$ és prou gran tenim que

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = -\frac{2}{z} + \dots$$

Per tant, $\frac{g''(z)}{g'(z)}$ és holomorfa i nul·la a l'infinit. Considerem ara $\varphi(z) = \overline{g(\bar{z})}$ definida en el semiplà inferior i observem que és holomorfa al semiplà inferior. Fixem l'interval (x_k, x_{k+1}) i apliquem a φ el gir que transforma el costat $[w_k, w_{k+1}]$ del polígon en un segment de l'eix real, llavors aquesta funció girada de φ serà la reflexió de g a través de (x_k, x_{k+1}) en el sentit que empalmarà contínuament amb g sobre aquest interval. Si això ho fem per a tot $k = 1, \dots, n$ trobarem diverses reflexions, però el valor de $\frac{g''(z)}{g'(z)}$ és el mateix per a totes, ja que aplicar un gir és multiplicar per una constant de mòdul 1.

Per tant, resulta que $\frac{g''(z)}{g'(z)}$ és una funció meromorfa a l'esfera de Riemann que té un pol simple a cada x_k amb residu $\alpha_k - 1$ i nul·la i holomorfa a l'infinit. Per tant ha de ser de la forma

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{\alpha_1 - 1}{z - x_1} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - x_n},$$

tal i com volíem veure. $\square$

A continuació veurem dos exemples de la utilització de les fórmules de Schwarz-Christoffel. Tornarem a canviar la notació dels angles per la inicial.

Exemple 5. *Trobem la transformació de Schwarz-Christoffel que envia el semiplà superior $\mathbb{H}$ a l'interior del triangle amb vèrtexs als punts $-1, 0, i$.*

Considerem

$$w_1 = i, \quad w_2 = -1, \quad w_3 = 0,$$

així que

$$\theta_1 = -\frac{3}{4}, \quad \theta_2 = -\frac{3}{4}, \quad \theta_3 = -\frac{1}{2}.$$

Prenent $x_1 = -1, x_2 = 1$ i $z_0 = 0$ obtenim

$$f(z) = A \int_0^z (\zeta + 1)^{-\frac{3}{4}} (\zeta - 1)^{-\frac{3}{4}} d\zeta + B = A \int_0^z (\zeta^2 - 1)^{-\frac{3}{4}} d\zeta + B.$$

Imposem $f(-1) = i$ i $f(1) = -1$ i escrivint

$$\kappa = \int_0^1 (\zeta^2 - 1)^{-\frac{3}{4}} d\zeta$$

tenim que

$$-A\kappa + B = i \quad i \quad A\kappa + B = -1.$$

Resolem i obtenim que

$$A = \frac{-1 - i}{2\kappa} \quad i \quad B = \frac{i - 1}{2}.$$

Per tant,

$$f(z) = \frac{-1 - i}{2\kappa} \int_0^z (\zeta^2 - 1)^{-\frac{3}{4}} d\zeta + \frac{i - 1}{2}.$$

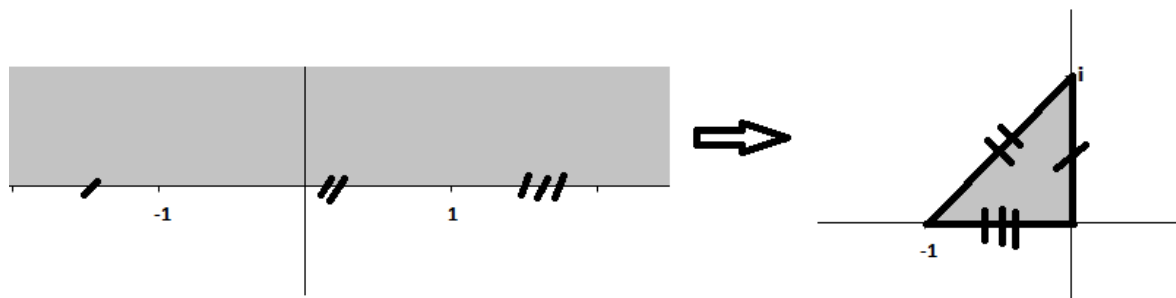


Figura 2.4: Exemple 5.

Exemple 6. Trobem la transformació de Schwarz-Christoffel que envia el semiplà superior $\mathbb{H}$ al domini

$$P = \{z = x + iy : x > 0, y > 0\} \cup \{z = x + iy : x \leq 0, y > 1\}.$$

Considerem

$$w_1 = i, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = \infty,$$

així que

$$\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}.$$

Penent $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ i $z_0 = 1$ obtenim que

$$\begin{aligned} f(z) &= A \int_1^z (\zeta + 1)^{\frac{1}{2}} (\zeta - 1)^{-\frac{1}{2}} d\zeta + B = A \int_1^z \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)^{\frac{1}{2}} d\zeta + B \\ &= A \left((z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \log(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) \right) + B, \end{aligned}$$

suposant que hem escollit una branca del logaritme adequada per tal que la funció sigui holomorfa a $\mathbb{H}$. Imposem que $f(-1) = i$ i $f(1) = 0$, tenim que

$$A \log(-1) + B = i \quad i \quad A \log 1 + B = 0$$

i resolent obtenim que $A = \frac{1}{\pi}$ i $B = 0$. Per tant,

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \left((z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \log(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) \right).$$

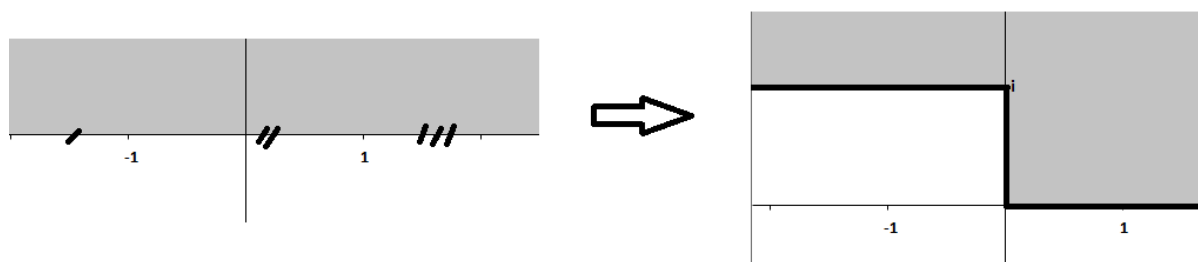


Figura 2.5: Exemple 6.

Capítol 3

Demostració del teorema de Riemann

En aquest capítol veurem dues proves del teorema de Riemann enunciat al capítol anterior. La primera prova es basa en certes propietats d'uniformitat de les famílies de funcions holomorfes. La segona prova, la que originalment va concebre Riemann, utilitza eines de la teoria del potencial.

3.1 El teorema de Montel

Una família de funcions $\mathcal{F}$ es diu normal si tota successió de $\mathcal{F}$ té una parcial uniformement convergent sobre compactes. En aquesta secció provarem el teorema de Montel, que diu que tota família acotada de funcions holomorfes és normal.

Comencem amb un resultat clàssic que permet provar que la conformalitat es preserva en fer límits uniformes a compactes.

Teorema 3.1. (Hurwitz) *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i sigui $\{f_n\} \subset H(\Omega)$ una successió de funcions que convergeix a $f \in H(\Omega)$ uniformement en compactes a Ω . Suposem $f \neq 0$, $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$ i $f(z) \neq 0 \forall z \in \partial D(a, r)$.*

Aleshores $\exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$ $\{f_n\}$ i f tenen el mateix nombre de zeros (comptant multiplicitats) a $D(a, R)$.

Demostració. Com que $f(z) \neq 0, \forall z \in \partial D(a, R)$ tenim que

$$\inf_{|z-a|=R} |f(z)| = \delta > 0.$$

Aleshores, per la convergència uniforme en compactes, podem triar un n prou gran de manera que

$$\sup_{|z-a|=R} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2}.$$

Per tant, $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2} < \delta \leq |f(z)|, z \in \partial D(a, R)$ i pel teorema de Rouché tenim que

$$\#(Z(f_n) \cap D(a, R)) = \#(Z(f) \cap D(a, R)).$$

□

Corol·lari 3.2. *Segui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i sigui $\{f_n\} \subset H(\Omega)$ una successió de funcions tals que $f_n(z) \neq 0, \forall z \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$. Suposem que $\{f_n\}$ convergeix uniformement a f . Si $f(z) = 0$ per a cert $z \in \Omega$, aleshores $f \equiv 0$.*

Demostració. Si $f \neq 0$, però $f(a) = 0$, aleshores podem escollir $R > 0$ prou petit per tal que a sigui l'únic zero de f en $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$. Llavors, pel teorema de Hurwitz, f_n per n prou gran té un zero en $\overline{D(a, R)}$. Contradicció! □

Corol·lari 3.3. *Segui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i sigui $\{f_n\} \subset H(\Omega)$ una successió de funcions injectives i holomorfes tals que $\{f_n\}$ convergeix uniformement a f . Aleshores f és constant o injectiva.*

Demostració. Suposem que f no és constant ni injectiva. Aleshores $\exists a, b \in \Omega$ amb $a \neq b$ tals que $f(a) = f(b) = w$.

Considerem les funcions

$$g_n(z) = f_n(z) - w \quad \text{i} \quad g(z) = f(z) - w.$$

Prenem $\delta > 0$ prou petit per tal que

$$\overline{D(a, \delta)} \subset \Omega, \quad \overline{D(b, \delta)} \subset \Omega, \quad \overline{D(a, \delta)} \cap \overline{D(b, \delta)} = \emptyset$$

i $f(z) \neq 0, \forall z \in \partial D(a, \delta), \forall z \in \partial D(b, \delta)$.

Aleshores pel teorema de Hurwitz aplicat a g i g_n , si n és prou gran, $\exists a_n \in D(a, \delta)$ tal que $f_n(a_n) = w$ i anàlogament $\exists b_n \in D(b, \delta)$ tal que $f_n(b_n) = w$ i $a_n \neq b_n$. Contradicció!

□

Definició. Sigui Ω un obert. Es diu que una família de funcions $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ és acotada si $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K < +\infty, \forall K \subset \Omega$ compacte, és a dir, les funcions de $\mathcal{F}$ són uniformement acotades per cada compacte de Ω .

Definició. Sigui Ω un obert. Es diu que una família de funcions $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ és equicontínua a $z_0 \in \Omega$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ aleshores, $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}$.

Remarquem que fixat $\epsilon > 0$, el mateix $\delta > 0$ va bé per a totes les funcions de $\mathcal{F}$.

Teorema 3.4. Sigui $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ una família de funcions acotada. Aleshores $\mathcal{F}$ és equicontínua a tot $z_0 \in \Omega$.

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Aleshores $\forall z \in D(z_0, r)$ i $f \in \mathcal{F}$ tenim, per la fórmula de Cauchy,

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{w \in \partial D(z_0, r)} \left| \frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(w)}{w - z_0} \right| 2\pi r = \\ &= r |z - z_0| \sup_{w \in \partial D(z_0, r)} \left| \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} \right| = |z - z_0| \sup_{w \in \partial D(z_0, r)} \frac{|f(w)|}{|w - z|}. \end{aligned}$$

Per altra banda, com que $f \in \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}$ és acotada, tenim que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\overline{D(z_0, r)}} = M_r < +\infty.$$

Essent $\inf_{w \in \partial D(z_0, r)} |w - z| = r - |z - z_0|$ obtenim

$$|z - z_0| \sup_{w \in \partial D(z_0, r)} \frac{|f(w)|}{|w - z|} \leq |z - z_0| M_r \sup_{w \in \partial D(z_0, r)} \frac{1}{|w - z|} = |z - z_0| \frac{M_r}{r - |z - z_0|}.$$

En particular, si $|z - z_0| < \frac{r}{2}$ tenim que

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \frac{2M_r}{r} \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

□

Teorema 3.5. *Sigui $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ una família equicontínua per a tot $z_0 \in \Omega$ i sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions de $\mathcal{F}$ tal que $\{f_n\}$ convergeix puntualment a f a un conjunt dens $S \subseteq \Omega$.*

Aleshores, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ i $\{f_n\}$ convergeix uniformement a f per a tot $K \subset \Omega$ compacte.

Demostració. Sigui $\epsilon > 0$ i sigui $w \in \Omega$. Aleshores, per l'equicontinuitat, existeix $\delta_w > 0$ tal que si $|z - w| < \delta_w$, aleshores $|f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon, \forall f_n \in \{f_n\}$.

Passant al límit obtenim

$$|f(z) - f(w)| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad |z - w| < \delta_w$$

i, per tant, f és contínua a w . Això mostra que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Veiem que $\{f_n\}$ convergeix puntualment a tot $w \in \Omega$. Per fer-ho veiem que $\{f_n\}$ és de Cauchy per a tot $w \in \Omega$. Fixem $w \in \Omega$ i prenem $z \in D(w, \delta_w) \cap S$, que és possible perquè S és dens a Ω . Aleshores, si n i m són prou grans, tenim

$$|f_m(w) - f_n(w)| \leq |f_m(w) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| < 3\epsilon,$$

ja que

- $|f_m(w) - f_m(z)| < \epsilon$ i $|f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon$ per l'equicontinuitat de $\mathcal{F}$.
- $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$, perquè $\{f_n(z)\}$ convergeix puntualment a $f(z)$ a tot $z \in S$.

Sigui ara $K \subset \Omega$ un compacte. Considerem el recobriment infinit obert de K

$$\bigcup_{w \in K} D(w, \delta_w) \supseteq K.$$

Essent K compacte existeixen $w_1, \dots, w_m \in K$ tals que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m D(w_j, \delta_{w_j}).$$

Per la convergència puntual de $\{f_n\}$ als punts w_j , podem escollir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(w_j) - f(w_j)| < \epsilon$, $\forall j = 1, \dots, m$, $\forall n > n_0$.

Aleshores si $z \in D(w_j, \delta_{w_j})$ i $n > n_0$ tenim que

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f(w_j)| + |f(w_j) - f_n(w_j)| + |f_n(w_j) - f_n(z)| < 3\epsilon,$$

ja que

- $|f(z) - f(w_j)| < \epsilon$ perquè f és contínua a w_j .
- $|f(w_j) - f_n(w_j)| < \epsilon$ perquè $\{f_n\}$ convergeix puntualment a f als punts w_j .
- $|f_n(w_j) - f_n(z)| < \epsilon$ perquè $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}$ és una família equicontínua.

Per tant, $\{f_n\}$ convergeix uniformement a f en K . □

Arribem finalment al resultat desitjat.

Teorema 3.6. (Montel) Sigui $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ una família acotada de funcions. Aleshores tota successió $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ té una successió parcial convergent en compactes.

Demostració. Sigui $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ una successió de funcions i sigui $S = \{z_1, z_2, \dots\}$ un conjunt numerable i dens a Ω .

Com que $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ és una família acotada, $\mathcal{F}$ és equicontínua. Per aplicar el teorema anterior volem construir una parcial que convergeix puntualment a tots els punts de S . Ho fem amb un procés diagonal:

La successió $\{f_n(z_1)\}_{n=1}^\infty \subset K$ té una parcial convergent $\{f_{n_1}(z_1)\}_{n=1}^\infty$ a un valor que anomenem $f(z_1)$.

Ara mirem la successió $\{f_{n_1}(z_2)\}_{n=1}^\infty$, que té una parcial convergent $\{f_{n_2}(z_2)\}_{n=1}^\infty$, que convergeix a un valor que anomenem $f(z_2)$. Òbviament, $\{f_{n_2}(z_1)\}_{n=1}^\infty$ també convergeix a $f(z_1)$.

Així successivament obtenim una successió $\{f_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_k) = f(z_k)$$

i també

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_j) = f(z_j) \quad \forall j < k.$$

Definim $g_n = f_{n_n}$. Llavors $\{g_n\}$ és una parcial de $\{f_n\}$ i $\{g_n(z_k)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix a $f(z_k)$, $\forall z_k \in S$.

Finalment, aplicant el teorema anterior a $\{g_n\}$ deduïm que $\{g_n\}$ convergeix uniformement en compactes. $\square$

3.2 Demostració del teorema de Riemann amb famílies normals

En aquesta secció utilitzarem els resultats que acabem de veure per a provar el teorema de Riemann. Recordem l'enunciat:

Teorema de Riemann. *Sigui $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un obert simplement connex i $a \in \Omega$ un punt qualsevol. Aleshores existeix una única $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme que satisfà $f(a) = 0$ i $f'(a) > 0$.*

Veiem primer la unicitat. Suposem que existeix una altra $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme tal que $g(a) = 0$ i $g'(a) > 0$, aleshores tenim que $f \circ g^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ també és conforme. De fet, $(f \circ g^{-1})(z) = e^{i\theta}z$, ja que es tracta d'automorfisme del disc que envia 0 a 0 (veure Teorema 2.7).

Observem que

$$(f \circ g^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0)) \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{f'(a)}{g'(a)} > 0.$$

Per tant, tenim que $e^{i\theta} > 0$, és a dir, $\theta = 0$ i $(f \circ g^{-1})(z) = z$ o, equivalentment, $f(z) = g(z)$.

Per a provar l'existència ho farem en uns quants passos:

Lema 3.7. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert simplement connex i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$, aleshores $\exists g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω tal que $g^2(z) = f(z)$.*

Demostració. Com que Ω és un obert simplement connex existeix una branca de $\log f$. Aleshores només cal pendre

$$g(z) = e^{\frac{1}{2} \log f(z)}.$$

□

Lema 3.8. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert connex amb la propietat que tota funció holomorfa que no s'anul·la mai a Ω té una arrel quadrada holomorfa, aleshores $\exists f : \Omega \longrightarrow f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ injectiva.*

Demostració. Agafem $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ i considerem $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ amb $g(z) = \sqrt{z - b}$, és a dir, $g^2(z) = z - b$. Aleshores, si $z_1, z_2 \in \Omega$

$$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow g(z_1)^2 = z_1 - b = z_2 - b = g(z_2)^2 \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Per tant, g és injectiva i pel teorema de l'aplicació oberta $g(\Omega)$ és un obert.

Agafem ara $w_0 \in g(\Omega)$ i $r > 0$ de manera que $D(w_0, r) \subset g(\Omega)$.

Observem que $D(-w_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus g(\Omega)$, ja que si existeix un punt $w \in D(-w_0, r) \cap g(\Omega)$ llavors $w = g(z_1)$ amb $z_1 \in \Omega$ i $-w \in D(w_0, r) \subset g(\Omega)$ i $-w = g(z_2)$ amb $z_2 \in \Omega$.

Però

$$\begin{aligned} g(z_1) = -g(z_2) &\Rightarrow g(z_1)^2 = g(z_2)^2 \Rightarrow z_1 - b = z_2 - b \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow g(z_2) = g(z_1) = -g(z_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(z_2) = 0 \Rightarrow 0 = g(z_2)^2 = z_2 - b \Rightarrow z_2 = b \in \mathbb{C} \setminus g(\Omega) \quad \text{Contradicció!} \end{aligned}$$

Considerem ara $f(z) = \frac{r}{2(g(z) + w_0)}$. Tenim:

- $f \in H(\Omega)$. En efecte, $|g(z) + w_0| = |g(z) - (-w_0)| > r > 0$.
- f injectiva. En efecte, $f(z) = \lambda \Leftrightarrow \frac{r}{2(g(z) + w_0)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{r}{2\lambda} = g(z) + w_0 \Leftrightarrow g(z) = \frac{r}{2\lambda} - w_0$.

Per a cada λ la solució és única, ja que g és injectiva.

- $|f(z)| = \frac{r}{2|g(z) + w_0|} < \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}, \forall z \in \Omega$.

Per tant, $f(\Omega) \subseteq \overline{D(0, \frac{1}{2})} \subset \mathbb{D}$. □

Lema 3.9. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex amb la propietat que tota funció holomorfa que no s'anul·la mai a Ω té una arrel quadrada holomorfa. Fixat un punt $a \in \Omega$, existeix una funció holomorfa i injectiva en Ω , g tal que $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $g(a) = 0$ i $g'(a) > 0$.*

Demostració. Considerem f com la del lema anterior i l'automorfisme del disc, $\Phi(z) = e^{i\theta} \frac{z-f(a)}{1-\overline{f(a)}z}$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Considerem $g = \Phi \circ f$. Òbviament, es compleix $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$ i $g(a) = 0$. Veiem que podem triar θ de manera que $g'(a) > 0$. Tenim

$$g'(a) = \Phi'(f(a))f'(a) = e^{i\theta} \frac{1 - |f(a)|}{(1 - |f(a)|)^2} f'(a) = \frac{e^{i\theta}}{1 - |f(a)|} f'(a),$$

ja que si $\phi(z) = \frac{z-b}{1-\overline{b}z}$ tenim que $\phi'(b) = \frac{1}{1-|b|^2}$.

Triant $\theta = -\text{Arg } f'(a)$ obtenim la g desitjada. □

Lema 3.10. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex, $\Omega \neq \mathbb{C}$ amb la propietat de que tota funció holomorfa que no s'anul·la mai a Ω té una arrel quadrada holomorfa. Fixat $a \in \Omega$ existeix $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme tal que $f(a) = 0$ i $f'(a) > 0$.*

Observem que demostrant aquest lema ja haurem demostrat l'existència de la representació conforme donada per el teorema de Riemann.

La idea d'aquesta prova és agafar, d'entre les funcions donades pel Lema 3.9, la que ocupa una part més gran del disc, és a dir, la que té $f'(a)$ màxima.

Demostració. Sigui

$$\mathcal{F} = \{f \in H(\Omega) : \text{injectiva amb } f(\Omega) \subset \mathbb{D}, f(a) = 0, f'(a) > 0\} \cup \{0\}.$$

Pel lema anterior sabem que $\mathcal{F}$ conté alguna $f \neq 0$.

Com que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{D}} \leq 1$$

$\mathcal{F}$ és acotada i, pel teorema de Montel, tota $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ té una parcial uniformement convergent en compactes.

Veiem ara que $\mathcal{F}$ és tancat. Pel Corol·lari 3.3, tot límit

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (\text{uniformement en compactes})$$

és o bé constant, o bé una funció injectiva. Essent $f_n(a) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, si el límit és constant ha de ser la constant $0 \in \mathcal{F}$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ no és constant tenim que

- f injectiva pel corol·lari 3.3.
- $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = 0$.
- $f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ ja que sabem que $f(\Omega) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ i, pel teorema de l'aplicació oberta, tenim que $f(\Omega)$ és obert, és a dir, tenim que $\partial\mathbb{D} \cap f(\Omega) = \emptyset$.
- $f'(a) > 0$ ja que $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(a) \geq 0$, però si $f'(a) = 0$ f no seria injectiva i tindríem una contradicció.

En conclusió $\mathcal{F}$ és tancada i, per tant, compacte.

Considerem $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \mapsto f'(a)$. Ψ és una funció contínua en un compacte i, per tant, ha de tenir un valor màxim absolut.

Prenem f amb valor $f'(a) > 0$ màxim i vegem que $f(\Omega) = \mathbb{D}$.

Suposem que $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$ i escollim $w \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$. Aleshores podem trobar $h \in H(\Omega)$ tal que

$$h(z)^2 = \frac{f(z) - w}{1 - \overline{w}f(z)},$$

ja que $\frac{f(z)-w}{1-\overline{w}f(z)}$ no s'anul·la (pel Lema 3.7).

Sigui ara

$$g(z) = \lambda \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)}h(z)}$$

on $|\lambda| = 1$ es tria de manera que $g'(a) > 0$. Tenim $g \in \mathcal{F}$, i si $\phi(\varsigma) = \lambda \frac{\varsigma - h(a)}{1 - \overline{h(a)}\varsigma}$,

$$g(z) = (\phi \circ h)(z).$$

Per tant,

$$g'(a) = |g'(a)| = |(\phi \circ h)'(a)| = |\phi'(h(a))h'(a)| = \frac{1}{1 - |h(a)|^2} |h'(a)|,$$

ja que

$$\phi'(\varsigma) = \lambda \frac{1 - \overline{h(a)}\varsigma + (\varsigma - h(a))\overline{h(a)}}{(1 - \overline{h(a)}\varsigma)^2} = \lambda \frac{1 - |h(a)|^2}{1 - \overline{h(a)}\varsigma}$$

i

$$|\phi'(h(a))| = \left| \lambda \frac{1 - |h(a)|^2}{(1 - |h(a)|^2)^2} \right| = \frac{1}{1 - |h(a)|^2}.$$

Derivem $h(z)^2 = \frac{f(z) - w}{1 - \overline{w}f(z)}$ i obtenim

$$2h(z)h'(z) = \frac{1 - \overline{w}f(z) + \overline{w}(f(z) - w)}{(1 - \overline{w}f(z))^2} f'(z) = \frac{1 - |w|^2}{(1 - \overline{w}f(z))^2}.$$

Si avaluem en $z = a$ obtenim $2h(a)h'(a) = (1 - |w|^2)f'(a)$.

Per tant, tenim que

$$|h'(a)| = \frac{(1 - |w|^2)f'(a)}{2|h(a)|} = \frac{(1 - |w|^2)f'(a)}{2\sqrt{|w|}},$$

ja que

$$h(a)^2 = \frac{f(a) - w}{1 - \overline{w}f(a)} = -w.$$

Aleshores,

$$g'(a) = \frac{1}{1 - |h(a)|^2} |h'(a)| = \frac{1}{1 - |w|} \frac{1 - |w|^2}{2\sqrt{|w|}} f'(a) = \frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} f'(a) > 0,$$

ja que

$$1 + |w| > 2\sqrt{|w|} \Rightarrow 1 - 2\sqrt{|w|} + |w| > 0 \Rightarrow (1 - \sqrt{|w|})^2 > 0.$$

Per tant, $g'(a) > f'(a)$, la qual cosa contradiu la maximitat de $f'(a)$ i, per tant, $f(\Omega) = \mathbb{D}$. $\square$

3.3 Demostració del teorema de Riemann amb el problema de Dirichlet

A continuació veurem breument la demostració que va pensar el propi Riemann del teorema de Riemann, tot i que la prova que va donar al 1851 no era completa. Molts matemàtics, com ara Schwarz o Poincaré, van provar de completar-la. No fou fins el 1900 que Osgood, un matemàtic americà, va donar una prova rigorosa del teorema.

Suposarem conegut que, per a un domini simplement connex i acotat, el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} i) & \Delta u = 0 \\ ii) & u|_{\partial\Omega} = f, \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega) \end{cases}$$

té solució.

Recordem primer que una funció $h \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ és harmònica si $\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$. Per altra banda recordem també que si Ω és un domini simplement connex i h és una funció harmònica en Ω , aleshores existeix una funció holomorfa, f , tal que $\operatorname{Re} f = h$. També cal recordar que la composició d'una funció harmònica amb una funció holomorfa és harmònica.

Definició. Una funció $G_\Omega(z_0, z)$, com a funció de la variable z , es diu que és la funció de Green a Ω amb pol a $z_0 \in \Omega$ si compleix les propietats següents:

- 1) $G_\Omega(z_0, z)$ és contínua a $\overline{\Omega} \setminus \{z_0\}$ i harmònica a $\Omega \setminus \{z_0\}$.
- 2) $G_\Omega(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} \log |z - z_0|$ és harmònica a Ω .
- 3) $G_\Omega(z_0, z) = 0$ quan $z \in \partial\Omega$.

Aquestes propietats defineixen $G_\Omega(z_0, z)$ de manera única: si $H_\Omega(z_0, z)$ té les mateixes propietats que $G_\Omega(z_0, z)$. Llavors

- $G_\Omega(z_0, z) - H_\Omega(z_0, z)$ és harmònica a Ω per la propietat 2).
- $G_\Omega(z_0, z) - H_\Omega(z_0, z)$ és nul·la a $\partial\Omega$ per la propietat 3).

i, per tant, pel principi del màxim, és nul·la a l'interior, és a dir, $G_{\Omega}(z_0, z) = H_{\Omega}(z_0, z)$.

Veiem tot seguit que la transformació conforme preserva la funció de Green.

Proposició 3.11. *Siguin Ω, Ω' dos dominis acotats del pla complex, $z_0 \in \Omega$, $w_0 \in \Omega'$ i $f : \Omega' \longrightarrow \Omega$ una representació conforme tal que $f(w_0) = z_0$.*

Si $G_{\Omega}(z_0, z)$ és la funció de Green de Ω amb pol a $z_0 \in \Omega$, aleshores $G_{\Omega}(z_0, f(w))$ és la funció de Green de Ω' amb pol a w_0 , és a dir,

$$G_{\Omega'}(w_0, w) = G_{\Omega}(z_0, f(w)) \quad w \in \overline{\Omega'} \setminus \{w_0\}.$$

Demostració. Només cal veure que la funció $G_{\Omega}(z_0, f(w))$ compleix les condicions 1), 2) i 3) a Ω' i per $w_0 \in \Omega'$.

Si w tendeix a $\partial\Omega'$, aleshores $f(w)$ tendeix cap a $\partial\Omega$. En efecte, sigui $\{w_n\}$ una successió de punts de Ω' que tendeix a $\partial\Omega'$, és a dir, $\forall K' \subset \Omega'$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \notin K', \forall n \geq n_0$. Prenem un compacte $K \subset \Omega$ i volem veure que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(w_n) \notin K, \forall n \geq n_0$. Aleshores

$$f(w_n) \in K \Leftrightarrow f^{-1}(f(w_n)) = w_n \in f^{-1}(K)$$

i com que $f^{-1}(K)$ és compacte i $\{w_n\}$ tendeix a $\partial\Omega'$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \notin f^{-1}(K), \forall n \geq n_0$.

Per tant, $f(w)$ tendeix cap a $\partial\Omega$.

Per altra banda, com que $G_{\Omega}(z_0, z)$ s'anul·la a la frontera de Ω i Ω és acotat tenim que $G_{\Omega}(z_0, f(w))$ és contínua a $\overline{\Omega'} \setminus \{z_0\}$ i s'anul·la a $\partial\Omega'$. També tenim que $G_{\Omega}(z_0, f(w))$ és una funció harmònica a $\Omega' \setminus \{w_0\}$ per ser la composició de una funció holomorfa amb una funció harmònica.

Per últim sabem que existeix una funció h harmònica a Ω tal que

$$G_{\Omega}(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} \log |z - z_0| = -h(z), \quad z \in \Omega.$$

Per tant,

$$G_{\Omega}(z_0, f(w)) - \frac{1}{2\pi} \log |f(w) - z_0| = -h(f(w))$$

és harmònica a Ω' i

$$G_{\Omega}(z_0, f(w)) - \frac{1}{2\pi} \log |w - w_0| = -h(f(w)) - \frac{1}{2\pi} \log |w - w_0| + \frac{1}{2\pi} \log |f(w) - z_0|$$

és una funció harmònica a Ω' , ja que

$$\log |f(w) - z_0| - \log |w - w_0| = \log \left| \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} \right|$$

i $\frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0}$ és holomorfa i no nul·la al voltant de w_0 , ja que per la conformalitat $f'(w_0) \neq 0$. $\square$

Exemple 7. La funció de Green de $\mathbb{D}$ amb pol al origen és

$$G_{\mathbb{D}}(0, z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|,$$

ja que compleix les condicions 1), 2) i 3).

Si ara volem determinar la funció de Green amb pol a $z_0 \in \mathbb{D}$ prenem la representació conforme $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\phi(z_0) = 0$, és a dir,

$$\phi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}.$$

Per la proposició anterior, tenim llavors

$$G_{\mathbb{D}}(z_0, z) = G_{\mathbb{D}}(0, \phi(z)) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|.$$

Exemple 8. En general, donat Ω un domini acotat i simplement connex del pla i $z_0 \in \Omega$ podem trobar la funció de Green de Ω amb pol a z_0 a partir de la representació conforme donada pel teorema de Riemann.

Pel teorema de Riemann sabem que existeix una representació conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$. Per tant, per la proposició anterior tenim que

$$G_{\Omega}(z_0, z) = G_{\mathbb{D}}(0, f(z)) = \frac{1}{2\pi} \log |f(z)|, \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\}.$$

Així, el coneixement de la representació conforme d'un domini simplement connex sobre el disc ens permet saber la funció de Green del domini. Ara veurem que, recíprocament, la funció de Green permet construir la representació conforme.

Proposició 3.12. *Sigui Ω un domini simplement connex i acotat del pla complex i sigui $z_0 \in \Omega$. Si existeix la funció de Green de Ω amb pol a z_0 , aleshores existeix una representació conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$.*

Demostració. Si $G_\Omega(z_0, z)$ és la funció de Green amb pol a z_0 , sabem que hi ha una funció h , contínua a $\overline{\Omega}$ i harmònica a Ω tal que

$$G_\Omega(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} \log |z - z_0| = -h(z).$$

Com que Ω és simplement connex la funció h té una funció harmònica conjugada, $\tilde{h}$, és a dir, tal que $h + i\tilde{h}$ és holomorfa.

Considerem ara la funció

$$f(z_0, z) = (z - z_0)e^{-2\pi(h(z) + i\tilde{h}(z))},$$

que és holomorfa a Ω amb un zero simple en el punt z_0 . A més, $|f(z_0, z)| = |z - z_0|e^{-2\pi h(z)}$ tendeix a 1 quan z tendeix cap a $\partial\Omega$, ja que

$$\log |f(z_0, z)| = \log |z - z_0| - 2\pi h(z) = 2\pi G_\Omega(z_0, z).$$

Com que $|f(z_0, z)|$ és contínua a $\overline{\Omega}$, pel principi del màxim, tenim que $|f(z_0, z)| \leq 1$, $\forall z \in \Omega$.

Per tant, $f(z_0, z)$ aplica Ω en el disc unitat i s'anul·la en z_0 . Ara cal veure que $f(z_0, z)$ és injectiva a Ω i que pren tot valor $w \in \mathbb{D}$. Així la proposició quedarà provada, ja que només cal pendre $f(z) = \lambda f(z_0, z)$ amb $|\lambda| = 1$ adequat de manera que $f'(z_0) > 0$.

Veiem que $f(z_0, z)$ és injectiva a Ω : Sigui $z_1 \in \Omega$, definim la funció

$$\phi(z_0, z_1, z) = \frac{f(z_0, z) - f(z_0, z_1)}{1 - \overline{f(z_0, z_1)}f(z_0, z)}.$$

Observem que ϕ és holomorfa a Ω , $|\phi(z_0, z_1, z)| \leq 1$, $\phi(z_0, z_1, z_1) = 0$ i $|\phi(z_0, z_1, z)| = 1$ si $z \in \partial\Omega$.

Sigui $f(z_1, z)$ construïda de forma anàloga a $f(z_0, z)$. Com que $f(z_1, z)$ té un zero simple en z_1 tenim que la funció

$$h(z) = \frac{\phi(z_0, z_1, z)}{f(z_0, z)}$$

és holomorfa a Ω i $|h(z)| = 1$ si $z \in \partial\Omega$. Per tant, pel principi del màxim, tenim que $|h(z)| \leq 1, \forall z \in \Omega$. En particular,

$$|h(z_0)| = \left| \frac{f(z_0, z_1)}{f(z_1, z_0)} \right| \leq 1$$

i com que z_0, z_1 són dos punts qualsevols de Ω , es poden intercanviar entre sí per obtenir $|f(z_0, z_1)| = |f(z_1, z_0)|$ i així, $|h(z_0)| = 1$. Per tant la funció $|h|$ agafa el seu màxim en un punt de Ω i és necessàriament constant.

Aleshores tenim que

$$|\phi(z_0, z_1, z)| = |f(z_1, z)| \neq 0 \quad \text{si} \quad z \neq z_1$$

i, per tant, $f(z_0, z) \neq f(z_0, z_1)$ si $z \neq z_1$. Així tenim que $f(z_0, z)$ és injectiva.

Veiem ara que $f(z_0, z)$ és exhaustiva. Sigui $w \in \mathbb{D}$ i suposem que $f(z_0, z)$ no pren el valor w a Ω . Aleshores la funció

$$g(z) = \frac{f(z_0, z) - w}{1 - \overline{w}f(z_0, z)}$$

és holomorfa a Ω i $g(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$. Però $|g(z)| = 1$ si $z \in \partial\Omega$ i, per tant, $\frac{1}{g(z)}$ és holomorfa i $\left| \frac{1}{g(z)} \right| = 1$ si $z \in \partial\Omega$. Aleshores, pel principi del màxim, tenim que $|g(z)| = 1$ si $z \in \Omega$, de fet g és constant de mòdul 1. Però $|g(z_0)| = |w| < 1$. Contradicció! $\square$

A continuació veurem la prova del teorema de Riemann per a un obert obert simplement connex i acotat. El cas general es pot reduir al cas acotat de manera senzilla. En particular, si $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$ podem fer una rotació de l'esfera de Riemann de manera que $\infty \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$.

Demostració. Sigui Ω un obert simplement connex i acotat. Resolem el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} i) & \Delta u = 0 \\ ii) & u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

amb $f(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z - z_0| \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Sigui h la solució i definim

$$G_{\Omega}(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \log |z - z_0| - h(z).$$

Veiem que $G_{\Omega}(z_0, z)$ compleix les tres propietats que caracteritzen les funcions de Green.

- 1) Clarament, $G_{\Omega}(z_0, z)$ és contínua a $\overline{\Omega} \setminus \{z_0\}$ i harmònica a $\Omega \setminus \{z_0\}$.
- 2) $G_{\Omega}(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} \log |z - z_0| = -h(z)$ és harmònica a Ω per i).
- 3) $G_{\Omega}(z_0, z) = 0$ quan $z \in \partial\Omega$ per ii).

Per la Proposició 3.12, l'existència de la funció de Green amb pol a z_0 assegura l'existència de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme tal que $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$. $\square$

Capítol 4

Aplicacions

Aquest capítol el dediquem a dues aplicacions clàssiques de la representació conforme. La primera fa referència a la construcció de mapes, i la segona a l'estudi de la dinàmica de fluids ideals al pla.

4.1 Cartografia

En la projecció de la Terra en un mapa sovint es desitja que es preservin els angles com, per exemple, en la navegació. Veurem aquí una família de projeccions cartogràfiques conformes (vegeu [D]). Començarem amb els dos casos més coneguts de representacions d'aquesta família.

4.1.1 La projecció de Mercator

Mercator va néixer a Flandes

La projecció de Mercator va ser presentada per Gerardus Mercator (1512-1594) el 1569. La idea de Mercator era fer un mapa per a la navegació transoceànica. Les eines bàsiques de navegació de l'època eren el compàs, que permetia determinar els rumbos, i l'astrolabi, que permetia determinar la latitud, però no la longitud. Les propietats bàsiques

del mapa havien de ser:

- i) En la direcció vertical tenir la direcció nord-sud.
- ii) En la direcció horitzontal tenir la direcció oest-est, preservant la llargària de l'equador.
- iii) Les línies de rumb constant (loxodromes) s'havien de transformar en línies rectes.

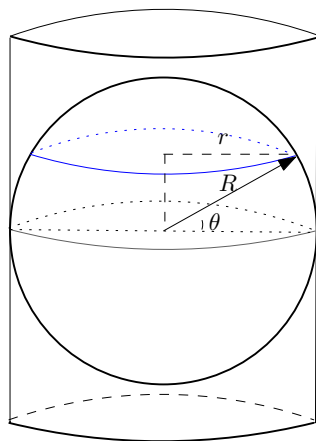
Vegem tot seguit com ha de ser una transformació amb aquestes propietats.

Per simplificar suposarem que el radi de l'esfera és igual a 1. Les dues primeres propietats impliquen que la imatge de l'esfera es troba en una zona del pla d'amplada 2π . Els meridians seran línies verticals i els paral·lels seran línies horitzontals. Queda per determinar a quina alçada cal dibuixar els paral·lels per a tenir iii), és a dir, per a tenir una transformació conforme.

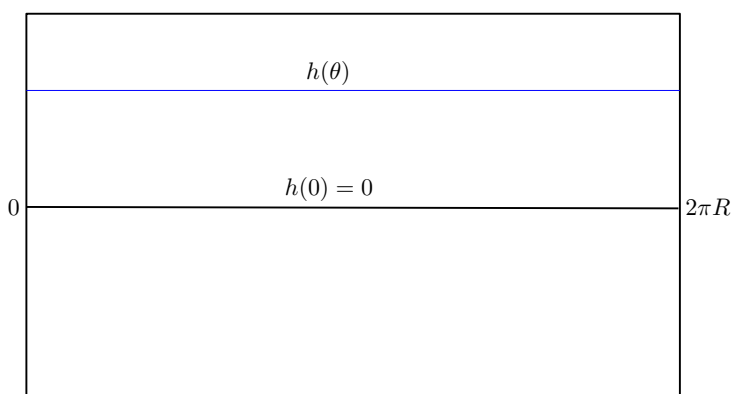
Parametritzem l'esfera amb les coordenades esfèriques:

$$x = \cos \varphi \cos \theta, \quad y = \sin \varphi \cos \theta, \quad z = \sin \theta,$$

on $\varphi \in [-\pi, \pi]$ és la longitud i $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ és la latitud.



Paral·lel de latitud θ (blau):



Llargària a la Terra: $2\pi r = 2\pi R \cos(\theta)$

Llargària al mapa: $2\pi R$

Figura 4.1: Representació del paral·lel de latitud θ .

Observem primer que la llargària del paral·lel de latitud θ és $2\pi \cos \theta$, ja que el radi del paral·lel és $\cos \theta$. En representar el paral·lel al pla tindrà una llargària de 2π , la qual cosa vol dir que l'hem magnificat en un factor de $\frac{1}{\cos \theta}$, i això no depèn del radi. Per tant, com més ens allunyem de l'equador més distorsionades són les distàncies del mapa.

Mirem ara a quina alçada cal dibuixar els paral·lels. Hem de triar $h(\theta)$ de manera que l'angle a l'esfera i l'angle al mapa coincideixin (conformalitat).

Conformalitat: $A/B = A'/B'$

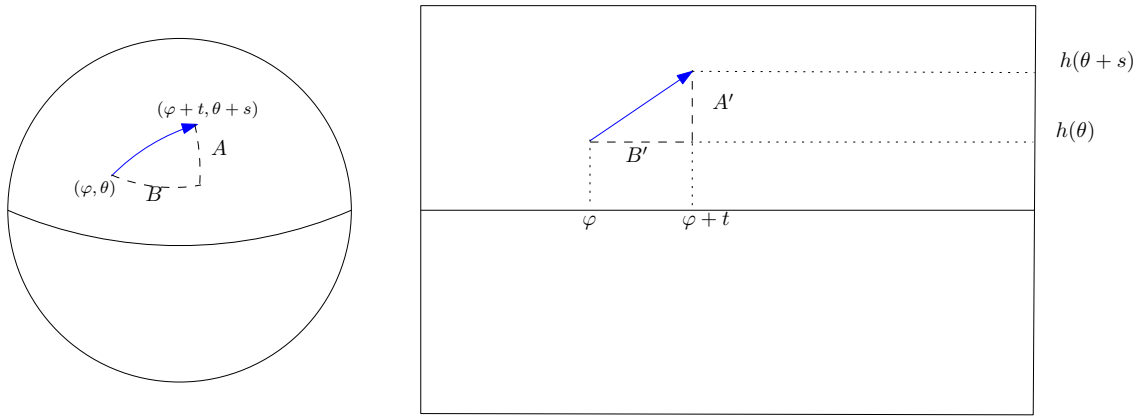


Figura 4.2: Transformació de l'esfera al pla.

Diem s a un increment infinitesimal de latitud i t a un increment infinitesimal de longitud.

Cal que $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ per preservar els angles (veure la figura de sobre). En altres paraules la conformalitat dóna

$$\frac{s}{t} \approx \frac{h(\theta + s) - h(\theta)}{\frac{t}{\cos \theta}},$$

és a dir,

$$\frac{1}{\cos \varphi} \approx \frac{h(\theta + s) - h(\theta)}{s}$$

Per tant, la conformalitat equival a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(s + \theta) - h(\theta)}{s} = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Aleshores hem de resoldre l'equació diferencial:

$$\begin{cases} h'(\theta) = 1/\cos(\theta) \\ h(0) = 0 . \end{cases}$$

Integrant, amb un canvi de variable, arribem a

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \int \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \int \frac{\cos(\theta)}{1 - \sin^2(\theta)} d\theta = \int \frac{dx}{1 - x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \\ &= \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) . \end{aligned}$$

És a dir, per a dibuixar el mapa hem de fer una escala en la latitud de $\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ per tal que es preservin els angles en el mapa.

Els mapes de Mercator són bons perquè preserven els angles, però no les àrees o distàncies, sobretot si som lluny de l'equador. Per exemple, Groenlandia i Àfrica es veuen de la mateixa mida, però Àfrica és en realitat 14 vegades més gran.

A l'època de Mercator no es coneixia el logarime. De fet, el va donar una taula que no se sap molt bé com la va obtenir. Més tard es va observar que els nombres de la taula de Mercator i els de la taula del logaritme de la tangent coincidien.

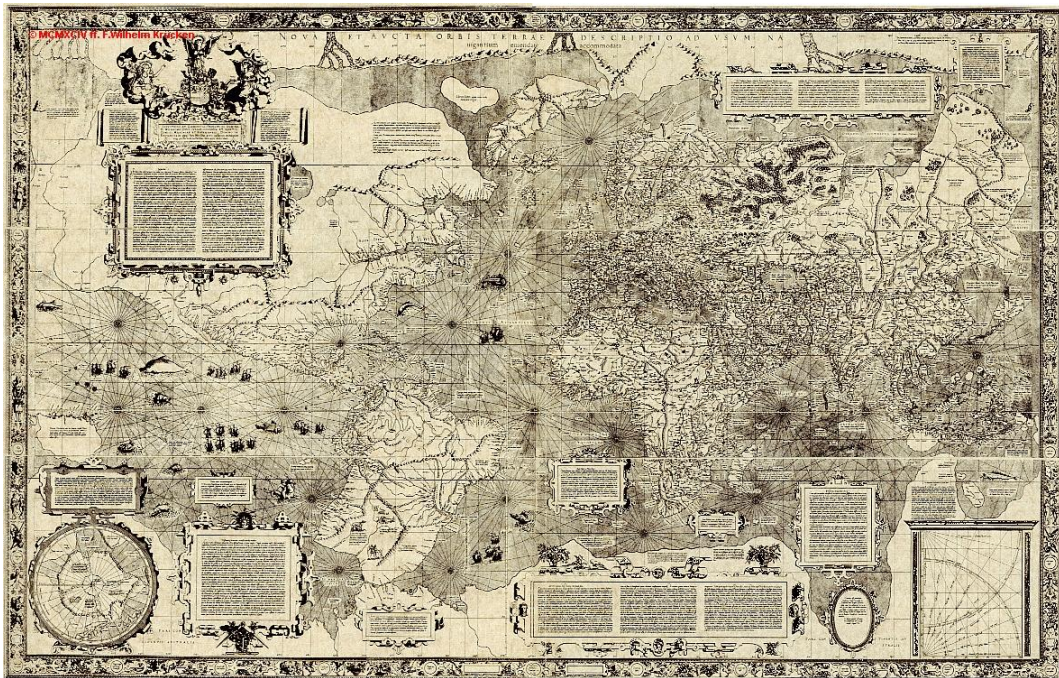


Figura 4.3: Mapamundi de Mercator de l'any 1569.

4.1.2 La projecció estereogràfica

La projecció estereogràfica projecta l'esfera al pla. La més usual és la de projectar desde el pol nord al pla tangent al pol sud com mostra la figura següent:

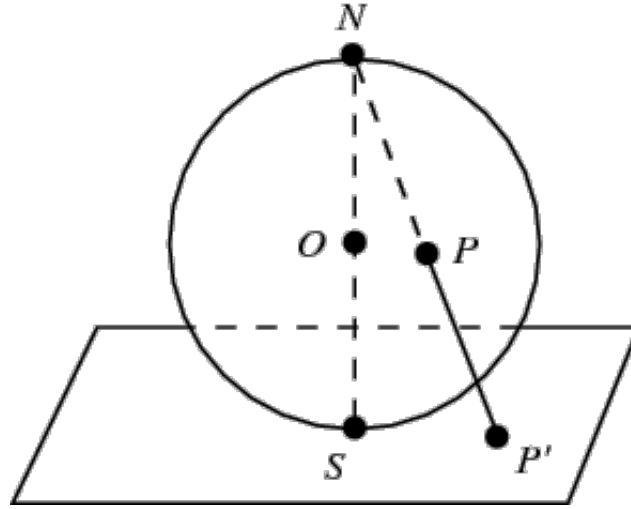


Figura 4.4: Projecció estereogràfica.

Si P és un punt de l'esfera, aleshores P' és la projecció de P tal com mostra la figura. Observem que tot punt P de l'esfera de latitud θ està a una distància $r = \overline{SP'}$ de l'origen del pla. Sigui T de manera que $\overline{OT} = \sin \theta$, aleshores els triangles $\overline{NPT}$ i $\overline{NP'S}$ són similars. Per tant, tenint en compte que el radi de l'esfera és 1 i que $\overline{PT} = \cos \theta$ tenim

$$\frac{r}{2} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta + 1} = \frac{1}{\tan \theta + \sec \theta}.$$

En les coordenades cartesianes s'escriu

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = \frac{2}{\tan \theta + \sec \theta} \sin \varphi \\ y(\varphi, \theta) = -\frac{2}{\tan \theta + \sec \theta} \cos \varphi. \end{cases}$$

No és usual fer mapes de la Terra amb la projecció estereogràfica, ja que, com és de imaginar, hi ha una distorsió molt gran en el pol nord. En canvi, sí que s'utilitzen per a fer mapes regionals de les zones polars.

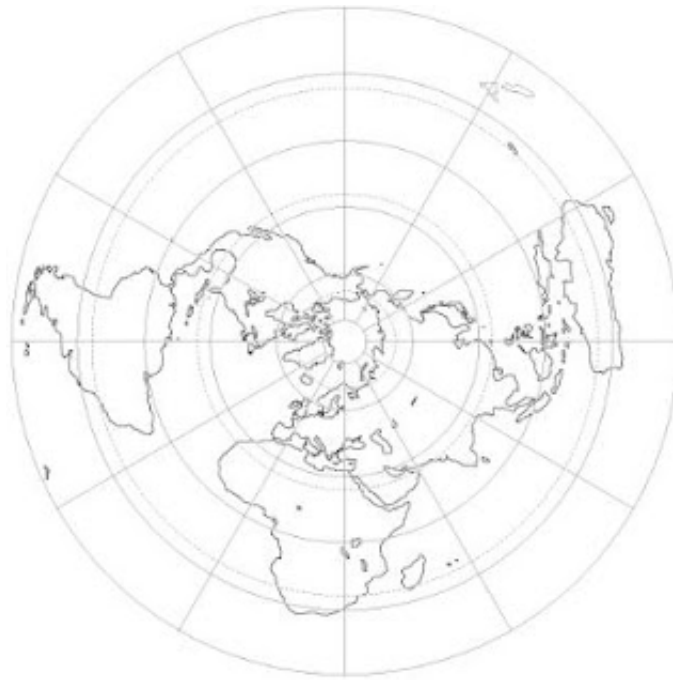


Figura 4.5: Mapa de la Terra amb la projecció estereogràfica des del pol Sud.

4.1.3 Projeccions còniques

Vegem tot seguit una família de projeccions, dissenyades per Lambert a l'any 1772, que generalitzen les dues que acabem de veure.

Per a les projeccions còniques ens hem d'imaginar un con tangent a l'esfera en un paral·lel de referència de latitud θ_0 com a la figura següent:

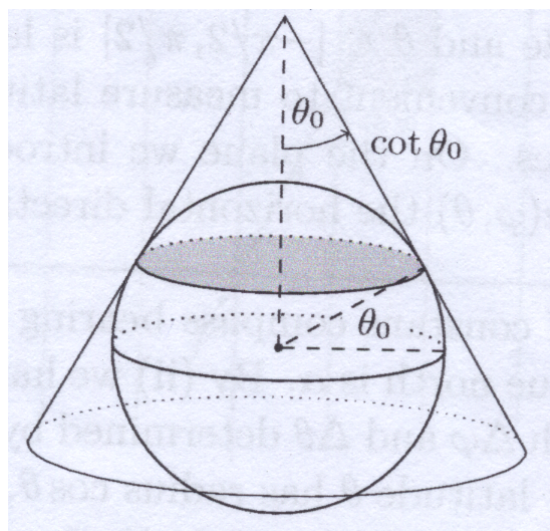


Figura 4.6: Projecció cònica amb paral·lel de referència θ_0 .

Observem que al desplegar el con, els medidians es transformen en rectes que convergeixen a l'origen del sector de cercle i els paral·lels són arcs de circumferència de radi $\rho(\theta)$ amb centre a $(0, \rho_0)$ com mostra la figura següent:

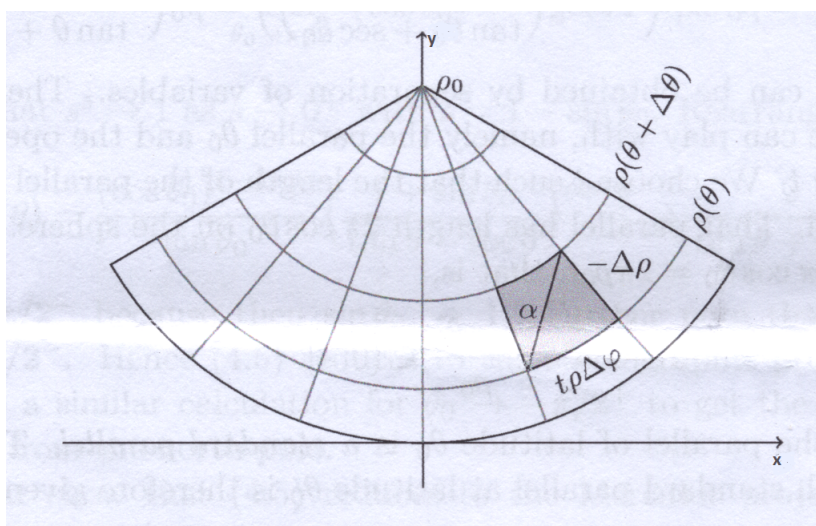


Figura 4.7: Coordenades de la projecció cònica.

Fixem-nos que hem posat les coordenades de manera que el paral·lel de referència de latitud θ_0 passi per l'origen, és a dir, $\rho(\theta_0) = \rho_0$. Quan despleguem el con forma un sector de cercle amb angle menor a 2π , de fet aquest angle és $2\pi k$ on $k = \cos \theta_0$. Per tant, expressat amb coordenades cartesianes s'escriu

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = \rho(\theta) \sin(k\varphi) \\ y(\varphi, \theta) = \rho_0 - \rho(\theta) \cos(k\varphi). \end{cases}$$

Veiem ara com hem de triar $\rho(\theta)$ de manera que la transformació sigui conforme. Considerem un rectangle com el de la figura 4.7 i notem $t = \nabla\theta$, $s = \nabla\varphi$. Aleshores, com que volem que es preservin els angles cal

$$\frac{\rho(\theta + t) - \rho(\theta)}{ks\rho(\theta)} \approx \frac{2\pi t}{2\pi s \cos \theta},$$

és a dir,

$$\frac{\rho(\theta + t) - \rho(\theta)}{t} = k\rho(\theta) \frac{1}{\cos \theta} = k\rho(\theta) \sec \theta.$$

Així, doncs, hem de resoldre l'equació diferencial de variables separables

$$\begin{cases} \rho'(\theta) = -k\rho(\theta) \sec \theta \\ \rho(\theta_0) = \rho_0. \end{cases}$$

Observeu que el signe negatiu es degut a que $\rho(\theta)$ decreix a mesura que θ creix.

La solució d'aquesta equació diferencial lineal ve donada per

$$\rho(\theta) = \rho_0 \exp \left(-k \int_{\theta_0}^{\theta} \sec \vartheta d\vartheta \right) = \rho_0 \exp \left(-k \log \left(\frac{\tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta_0 + \sec \theta_0} \right) \right) = \rho_0 \left(\frac{\tan \theta_0 + \sec \theta_0}{\tan \theta + \sec \theta} \right)^k.$$

Escollim k de manera que la llargària del paral·lel de latitud θ_0 es preservi. És a dir, que es compleixi

$$2\pi \cos \theta_0 = 2\pi \rho_0 k$$

que implica

$$t = \frac{\cos \theta_0}{\rho_0}.$$

Per tant, la projecció cònica conforme amb paral·lel de referència de latitud θ_0 ve donada per

$$\rho(\theta) = \rho_0 \left(\frac{\tan \theta_0 + \sec \theta_0}{\tan \theta + \sec \theta} \right)^{\frac{\cos \theta_0}{\rho_0}}$$

amb la condició $\cos \theta_0 \leq \rho_0$.

En el nostre cas en el que el con és tangent a l'esfera tenim, com podem observar en la figura 4.6, que $\rho_0 = \cot \theta_0$ i, per tant,

$$\rho(\theta) = \cot \theta_0 \left(\frac{\tan \theta_0 + \sec \theta_0}{\tan \theta + \sec \theta} \right)^{\sin \theta_0}.$$

Així expressat en coordenades cartesianes tenim

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = \cot \theta_0 \left(\frac{\tan \theta_0 + \sec \theta_0}{\tan \theta + \sec \theta} \right)^{\sin \theta_0} \sin(\varphi \sin \theta_0) \\ y(\varphi, \theta) = \cot \theta_0 - \cot \theta_0 \left(\frac{\tan \theta_0 + \sec \theta_0}{\tan \theta + \sec \theta} \right)^{\sin \theta_0} \cos(\varphi \sin \theta_0). \end{cases}$$



Figura 4.8: Mapa d'Europa realitzat amb la projecció de Lambert.

Les projeccions cartogràfiques que s'utilitzen en realitat a l'hora de fer mapes no són exactament les que acabem de presentar. Aquí hem modelitzat la Terra per una esfera, però en realitat un model el·lipsoïdal és més acurat, i és aquest el que s'utilitza. Això és degut a la rotació de la Terra, i a la força centrífuga associada que provoquen un lleuger aixafament dels pols. Actualment l'el·lipsoide estàndard utilitzat és l'anomenat WGS84, que té un eix major de 6.378.173m, i un eix menor de 6.356.752,3142m.

Per altra banda, a la projecció cònica de Lambert s'utilitzen dos paral·lels de referència propers, de manera que el con no és tangent sinó que secciona l'el·lipsoide en aquests paral·lels.

4.2 Dinàmica de fluids

Considerem el moviment d'un fluid en un domini D simplement connex del pla. Pensem en el fluid com a una col·lecció de partícules en moviment i diem $v(z)$ el vector de velocitat en el punt z . La direcció de $v(z)$ és la direcció en la que es mou la partícula i la longitud $|v(z)|$ és la velocitat en la que es mou la partícula.

Suposem que:

- 1) La velocitat $v(z)$ no depèn del temps.
- 2) No entra ni surt fluid a D .
- 3) El flux és incompressible, és a dir, la densitat del fluid és la mateixa en tots els punts de D .
- 4) El flux és irrotacional, és a dir, no hi ha circulació al voltant de petits cercles dins D .

Mirem quina és l'expressió matemàtica d'aquestes condicions. Sigui γ una corba diferenciable en D . Notem $\vec{t}$ al vector tangent unitari a la corba γ i $\vec{n}$ al vector normal unitari de γ . Si parametritzem γ amb el paràmetre arc, $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, aleshores tenim que

$$\vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right), \quad \vec{n} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right).$$

Definim el flux a través de γ com

$$F = \int_{\gamma} v \cdot \vec{n} ds.$$

Si $v(z) = (P, Q)$ el flux a través de γ és aleshores

$$F = \int_{\gamma} v \cdot \vec{n} ds = \int_{\gamma} (P, Q) \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) ds = \int_{\gamma} (P dy - Q dx).$$

Per altra banda, si γ és una corba tancada podem definir la circulació a través de γ com

$$C = \int_{\gamma} v \cdot \vec{t} ds.$$

També la podem expressar com

$$C = \int_{\gamma} v \cdot \vec{t} ds = \int_{\gamma} (P, Q) \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_{\gamma} (P dx + Q dy).$$

Aplicant el teorema de Green obtenim

$$\begin{aligned} F &= \int_{\gamma} v \cdot \vec{n} ds = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy, \\ C &= \int_{\gamma} v \cdot \vec{t} ds = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

on Ω indica la regió tancada per la corba γ .

Per tant, per les hipòtesis 2) i 3) tenim que a D es compleix

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \text{o} \quad \nabla \cdot v = 0$$

i per la hipòtesi 4)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \text{o} \quad \nabla \times v = 0.$$

Aquestes són les equacions de Cauchy-Riemann per a la funció $f = P - iQ$ que, per tant, és holomorfa en D .

Per la condició $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i pel lema de Poincaré, existeix un potencial ϕ del camp (P, Q) , és a dir, una funció ϕ tal que

$$\nabla\phi = (P, Q).$$

Observem que ϕ és harmònica, ja que el flux és nul. En efecte,

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Essent D simplement connex, existeix una funció harmònica conjugada φ , és a dir, φ de manera que $h = \phi + i\varphi$ és holomorfa. De fet, es diu que h és un potencial complex de (P, Q) .

Observem que les equacions de Cauchy-Riemann per a h impliquen que els gradients de ϕ i φ són ortogonals:

$$\nabla\phi \cdot \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \cdot \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = 0.$$

Com que $\nabla\varphi$ també és ortogonal a les corbes de nivell de φ , deduïm que $\nabla\phi = (P, Q)$ i les corbes de nivell de φ tenen la mateixa direcció. És a dir, les línies de moviment del fluid són precisament les corbes de nivell de la funció φ .

Exemple 9. El camp més senzill en el pla és $V = (\alpha, \beta)$ on α, β són constants. El potencial $\phi(x, y) = \alpha x + \beta y$ satisfà $\nabla\phi = (\alpha, \beta)$ i ϕ és harmònic en tot $\mathbb{C}$. La funció $\varphi(x, y) = \alpha y - \beta x$ és l'harmònica conjugada de ϕ . Així, doncs, les línies de moviment del fluid són les rectes

$$\alpha y - \beta x = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Per altra banda observem que el potencial complex de $V = (\alpha, \beta)$ és

$$h = \phi + i\varphi = (\alpha x + \beta y) + i(\alpha y - \beta x) = (\alpha - i\beta)z.$$

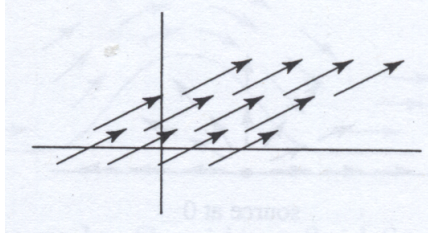


Figura 4.9: Exemple 9.

Exemple 10. Considerem el camp $V = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{z}{|z|^2}$. El potencial

$$\phi(z) = \log |z| = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2),$$

que satisfà

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

és harmònic a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Per a trobar l'harmònica conjugada recordem que tota determinació del logaritme és de la forma

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

amb $\arg z$ contínu a $\mathbb{C} \setminus r_\alpha$ on $r_\alpha = \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C} : r \in (-\infty, 0]\}$. Per tant, l'harmònica conjugada és localment $\varphi(z) = \arg z$, però no es pot definir de manera global a tot $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Considerem ara la circumferència $|z| = r_0$ i calculem el flux a través d'aquesta corba

$$F = \int_{|z|=r_0} V \cdot \vec{n} ds.$$

En coordenades polars tenim $V = \frac{1}{r_0}(\cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ i la parametrització de la circumferència $\gamma(\theta) = (r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta)$. Així obtenim que $\gamma'(\theta) = (-r_0 \sin \theta, r_0 \cos \theta)$ i $\|\gamma'(\theta)\|d\theta = r_0 d\theta$.

Per tant,

$$\begin{aligned} F &= \int_{|z|=r_0} V \vec{n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0} (\cos \theta, \sin \theta) (\cos \theta, \sin \theta) r_0 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

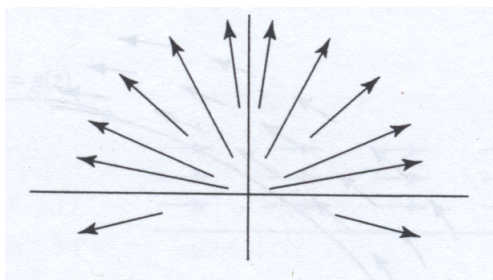
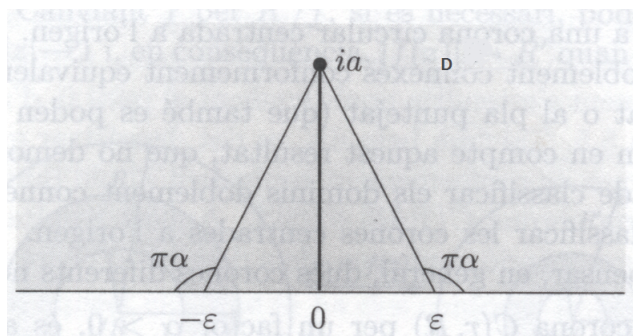


Figura 4.10: Exemple 10.

Aquest exemple mostra que si el domini no és simplement connex, l'existència d'un potencial complex no implica que el flux sigui nul (cosa que sí que passa en dominis simplement connexos).

Exemple 11. Considerem $D = \mathbb{H} \setminus s$, on s és el segment rectilini que uneix els punts 0 i ia .

Busquem ara la representació conforme del semiplà superior $\mathbb{H}$ sobre D . Ens mirarem D com a límit dels dominis que s'obtenen en treure un triangle de base 2ϵ i altura a quan ϵ tendeix a 0 tal i com mostra la figura següent.

Figura 4.11: El domini D com a límit de complementari de triangles .

Pel complementari del triangle la representació g_ϵ que compleix $g_\epsilon(-1) = -\epsilon$, $g_\epsilon(1) = \epsilon$ i $g_\epsilon(0) = ia$ ve donada per

$$g_\epsilon(z) = A \int_0^z (\zeta + 1)^{\alpha-1} \zeta^{2-2\alpha} (\zeta - 1)^{\alpha-1} d\zeta + B,$$

on α és tal i com es mostra a la Figura 4.11. Ara, quan ϵ tendeix a 0, α tendeix a $\frac{1}{2}$ i ens queda

$$g(z) = A \int_0^z \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - q}} d\zeta + B = A\sqrt{z^2 - 1} + B.$$

Imposem $g(-1) = 0$, $g(0) = ia$ i obtenim que $A = a$, $B = 0$. Per tant,

$$g(z) = a\sqrt{z^2 - 1},$$

que envia ∞ al ∞ .

Es diu que un camp és uniforme a D si és la imatge del camp $V(w) = V(X + iY) = A + i0$ per la representació conforme g . Observem que a $\mathbb{H}$ el potencial complex del camp V és $h(w) = Aw$, de manera que $\phi(X, Y) = AX$ i $\varphi(X, Y) = AY$. Les línies de corrent d'aquest camp a $\mathbb{H}$ són línies amb part imaginària zero, és a dir, de la forma $t + ic$ amb $t \in \mathbb{R}$ i $c > 0$. Per tant les línies de corrent a D són

$$\gamma(t) = h(t + ic) = a\sqrt{(t + ic)^2 - 1}.$$

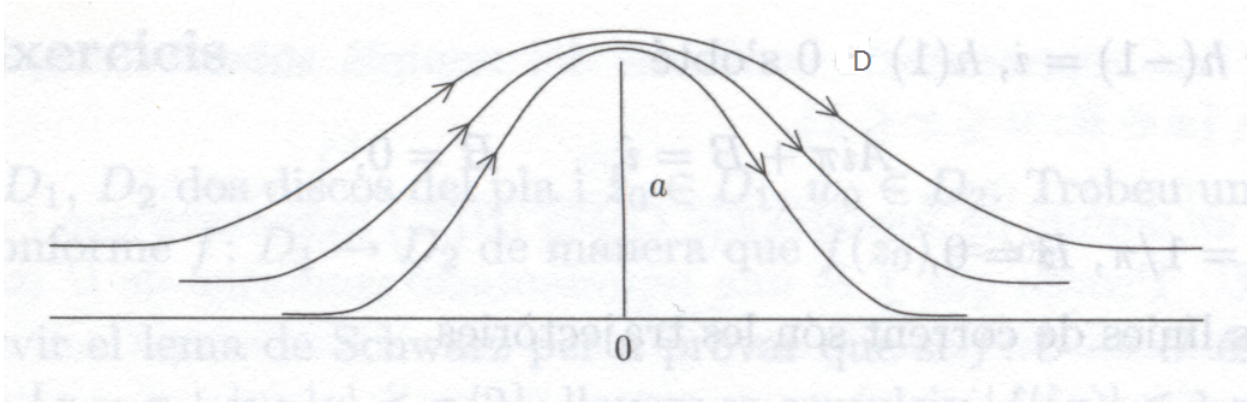


Figura 4.12: Trajectòries de les línies de corrent del camp uniforme.

Bibliografia

- [BC] *Joaquim Bruna, Julià Cufí*, Anàlisi complexa, Universitat Autònoma de Barcelona Servei de Publicacions, Bellaterra, 2008.
- [G] *Theodore W. Gamelin*, Complex analysis, Springer, Nova York, 2001.
- [D] *Daniel Daners*. The Mercator and stereographic projections, and many in between. American Mathematical Monthly, **119** (2012), 199–210 .
- [Ti] *Richard M. Timoney*. Complex Analysis for JS & SS Mathematics. <http://www.maths.tcd.ie/~richardt/414/>
- [Ash] *Robert B. Ash, W.P. Novinger*. Complex variables. <http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV.html>
- [Ch] *WWL Chen*. Introduction to complex analysis. <http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnicafolder/lnica.html>
- [Wa] *J. L. Walsh*. History of the Riemann mapping theorem. American Mathematical Monthly, **80** (1973), 270–276.
- [Cal] *J. B. Calvert*. The Lambert Projection. <http://mysite.du.edu/~jcalvert/math/lambert.htm>