PROBLEMES D'ELECTRÒNICA RESOLTS PAS A PAS I EXPLICATS EN DETALL

Autors:
Manuel Carmona.
Manel López
José María Gómez
José Bosch

ÍNDEX

I. INTRODUCCIÓ

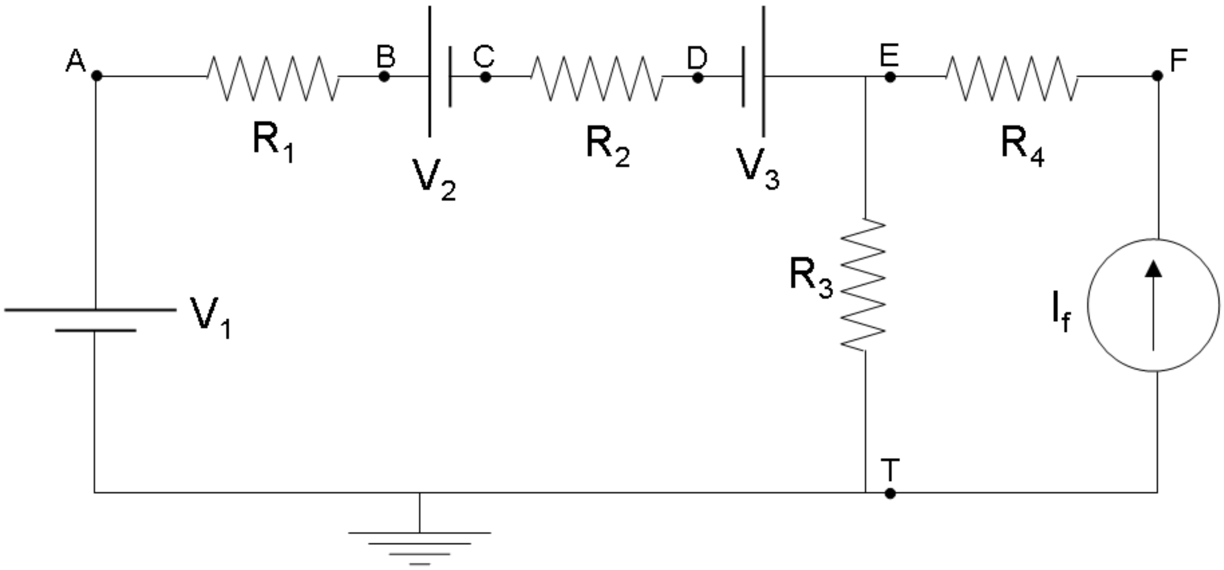
Aquest llibre pretén donar pautes per la resolució de problemes d'electrònica, des del nivell més bàsic (aplicant lleis de Kirchhoff) amb components lineals, fins a circuits incloent elements no-lineals, com són díodes i diferents tipus de transistors. Els problemes desenvolupats tracten de ser el més generals possibles, per poder acaparar el major rang de possibles problemes del mateix tipus.
Per cada apartat temàtic, s'especifica un procediment general de resolució de problemes.

II. CIRCUITS LINEALS

II.1. Problema 1

Amb el circuit de la figura:

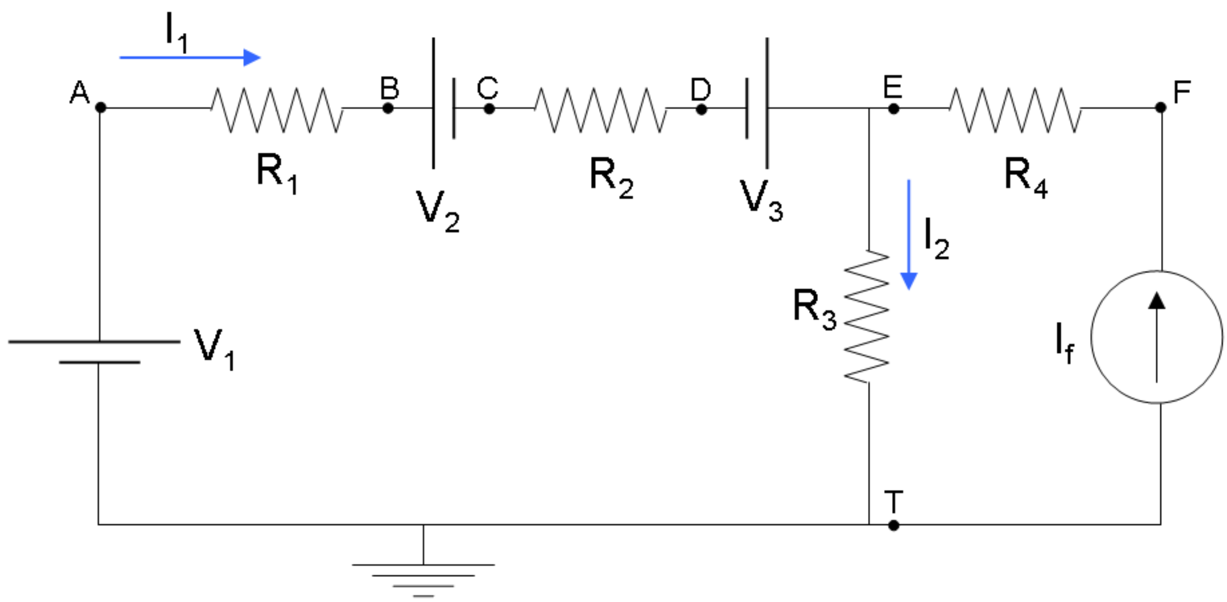
a) Resol el circuit (obtenir tots els corrents i totes les tensions) aplicant les lleis de Kirchhoff.
b) Obtenir les diferències de tensió següents, partint del punt de referència fins a arribar al punt final: V_{AC}, V_{CD}, V_{CE}, V_{CF}.
c) Sense utilitzar res del fet abans, ressoleu el circuit fent ús del principi de superposició per obtenir V_E.
d) Sense utilitzar res del fet abans, apliqueu l'equivalent Thévenin de la part esquerra del circuit, entre els punts E i T. Utilitzeu això per resoldre el circuit complet original per obtenir V_E.



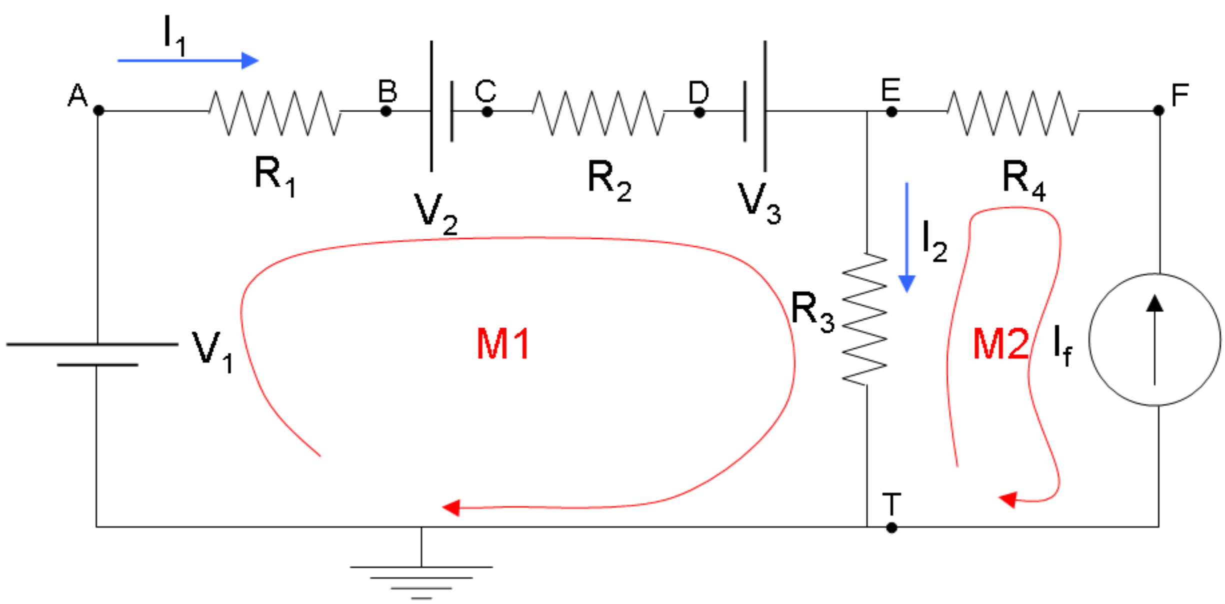
<u>Resolució</u>:

a) Resol el circuit (obtenir tots els corrents i totes les tensions) aplicant les lleis de Kirchhoff.

Per aplicar les lleis de Kirchhoff, primer de tot assignem corrents (nom i direcció) a les diferents branques (el sentit l'escollim de forma arbitrària; en aquest problema agafem les indicades a la gràfica, però es poden agafar com es vulgui):



No fa falta assignar cap corrent a la branca que conté R_4 ja que tenim una font de corrent que fixa el corrent per aquesta branca (I_f).
Seguidament, escollim les malles. Aquí és evident que necessitarem dues malles per resoldre el circuit ja que és necessari per passar per totes les branques del circuit. Aquí també existeixen diferents alternatives, però nosaltres agafem les indicades a la següent gràfica. A la vegada, indiquem en quin sentit recorrem les malles quan apliquem la llei de les malles de Kirchhoff:



Apliquem la llei dels corrents. Només fa falta aplicar-ho a un node (‘E’), que és a on coincideixen més de dues rames i, a més, no és terra (o qualsevol altre referència seleccionada del circuit).

$$I_2 = I_1 + I_f$$

Només tenim dues incògnites de corrents al circuit (I_1, I_2), ja que I_f és conegut. Amb aquesta equació, només ens queda una incògnita de corrent.
Apliquem ara la llei de malles a les dues malles del circuit. Amb les fonts de tensió, si la tensió puja o baixa segons el sentit de la malla és evident, mentre que per la font de corrent la podem agafar com volem; nosaltres l’agafem com un augment de tensió segons el sentit del corrent. A les resistències (com a tots els elements passius), ja sabem que la tensió baixa en el sentit del corrent, i puja en l’invers. Per totes dues malles, partim des del punt de terra, seguint el sentit de la malla. Llavors:

$$M1:\ +V_1 - I_1 \cdot R_1 - V_2 - I_1 \cdot R_2 + V_3 - I_2 \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 + V_3 - I_1 \cdot (R_1 + R_2) - I_2 \cdot R_3 = 0$$
$$M2:\ +I_2 \cdot R_3 + I_f \cdot R_4 - V_f = 0$$

És a dir, que tenim tres equacions, amb tres incògnites (I_1, I_2 i V_f). Així, ja hem plantejat el problema (el més important de tot) i només manca resoldre’l. Primer agafem la primera equació i substituïm totes les I_2 que apareixen en la segona equació:

$$V_1 - V_2 + V_3 - I_1 \cdot (R_1 + R_2) - (I_1 + I_f) \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 + V_3 - I_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - I_f \cdot R_3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{V_1 - V_2 + V_3 - I_f \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Com ja hem resolt I_1, podem obtenir I_2 amb la primera equació:

$$I_2 = I_1 + I_f = \frac{V_1 - V_2 + V_3 - I_f \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + I_f = \frac{V_1 - V_2 + V_3 + I_f \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Només manca obtenir V_f, que la podem obtenir de la tercera equació:

$$V_f = I_2 \cdot R_3 + I_f \cdot R_4 = \frac{V_1 - V_2 + V_3 + I_f \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3 + I_f \cdot R_4$$

Amb la solució de l’aplicació de les lleis de Kirchhoff, ja podem obtenir totes les tensions del circuit (respecte la referència del circuit que és el terra):

$$
\begin{aligned}
V_A &= V_1 \\
V_B &= V_1 - I_1 \cdot R_1 \\
V_C &= V_1 - I_1 \cdot R_1 - V_1 - V_2 \\
V_D &= I_2 \cdot R_3 - V_3 \\
V_E &= I_2 \cdot R_3 \\
V_F &= V_f
\end{aligned}
$$

Hi han formes alternatives per obtenir aquestes tensions. Alguns exemples són:

$$
\begin{aligned}
V_C &= I_2 \cdot R_3 - V_3 + I_1 \cdot R_2 \\
V_E &= V_f - I_f \cdot R_4 \\
V_F &= I_2 \cdot R_3 + I_f \cdot R_4
\end{aligned}
$$

Normalment sempre s'intenten obtenir les tensions de la forma més senzilla seguint el camí més curt.

b) Obtenir les diferències de tensió següents, partint del punt de referència fins a arribar al punt final: V_{AC}, V_{CD}, V_{CE}, V_{CF}.

És evident que amb l'apartat anterior ja podem obtenir aquestes tensions. Però aquest apartat ens demanen que no ho fem així.
V_{AC}, vol dir la tensió al punt A respecte el punt C (referència). És a dir, és com si ens demanen la tensió al punt A (la primera lletra), però agafant el punt C com si fos el terra del circuit. Per tant, el millor és partir des del punt C fins a arribar al punt A, sumant totes les tensions. Per tant:

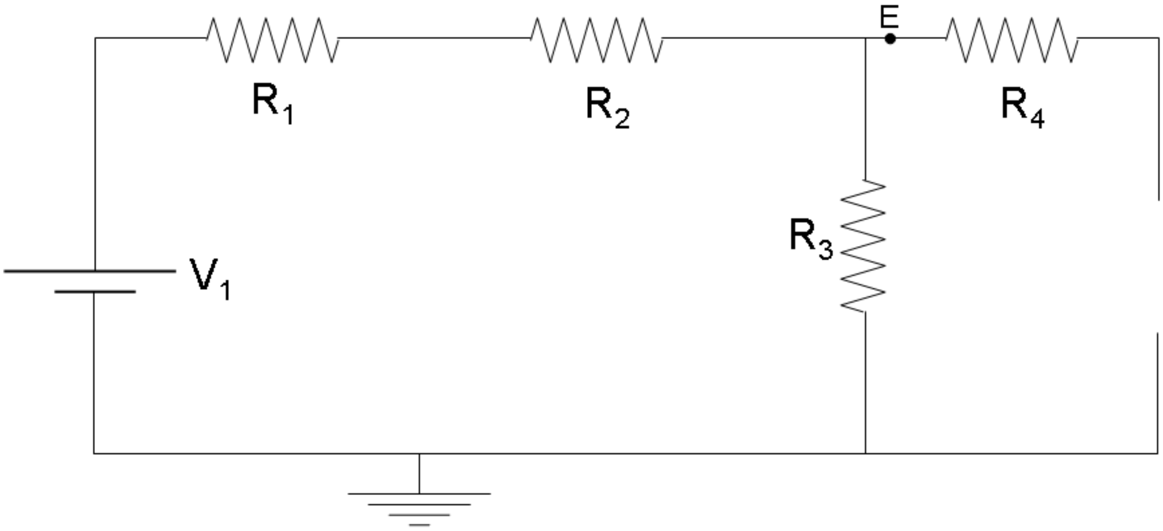
$$
\begin{aligned}
V_{AC} &= +V_2 + I_1 \cdot R_1 \\
V_{CD} &= +I_1 \cdot R_2 \\
V_{CE} &= -V_3 + I_1 \cdot R_2 \\
V_{CF} &= -I_f \cdot R_4 - V_3 + I_1 \cdot R_2
\end{aligned}
$$

També hi ha diverses alternatives per arribar a un punt des d'un altre. Igualment que abans, normalment busquem el camí més curt perquè és més fàcil de calcular. El resultat numèric ha de ser però sempre el mateix, independentment del camí.

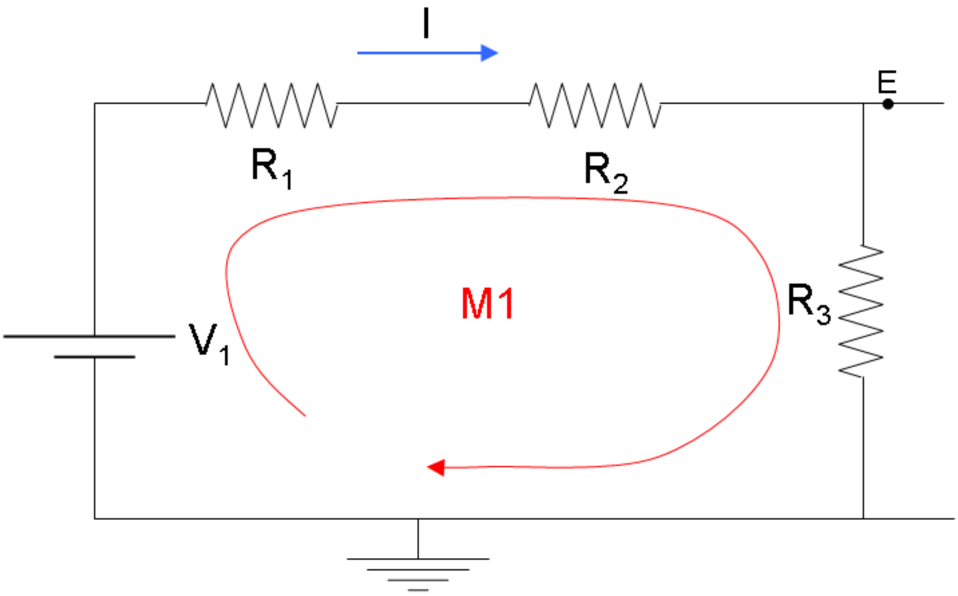
c) Sense utilitzar res del fet abans, ressoleu el circuit fent ús del principi de superposició per obtenir V_E.

Amb circuits amb elements lineals, sempre podem fer ús del principi de superposició per resoldre el problema per parts més senzilles de resoldre (només hem de resoldre circuits amb una única font).

En aquest circuit tenim quatre fonts. Per tant, haurem de resoldre 4 circuits. Haurem d'obtenir VE per cadascun d'aquests circuits simplificats i el resultat final total (de tot el circuit original) coincideix amb la suma d'aquests quatre valors.
Per tant, comencem amb la font V_1, eliminant la rest de fonts. Recordem que eliminar fonts de tensió significa curtcircuitar-les (és a dir, eliminem la font i connectem amb un cable conductor els dos terminals del circuit a on es connectava la font). Mentre que eliminar una font de corrent significar treure la font i deixar la branca on era connectada en circuit obert (no circula corrent). Per tant, el circuit queda en aquest cas com:



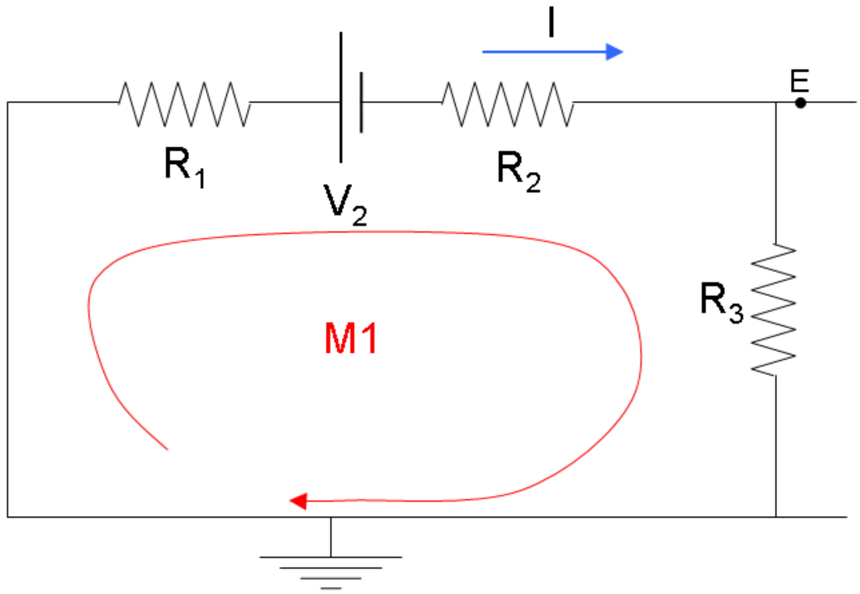
Si no circula corrent per la malla de R_4, no farà falta tenir en compte aquesta branca oberta, ja que no afectarà per res al circuit.
I la resolució és molt més senzilla que abans ja que només tenim una malla:



$$+V_1 - I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Rightarrow \quad V_{E1} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

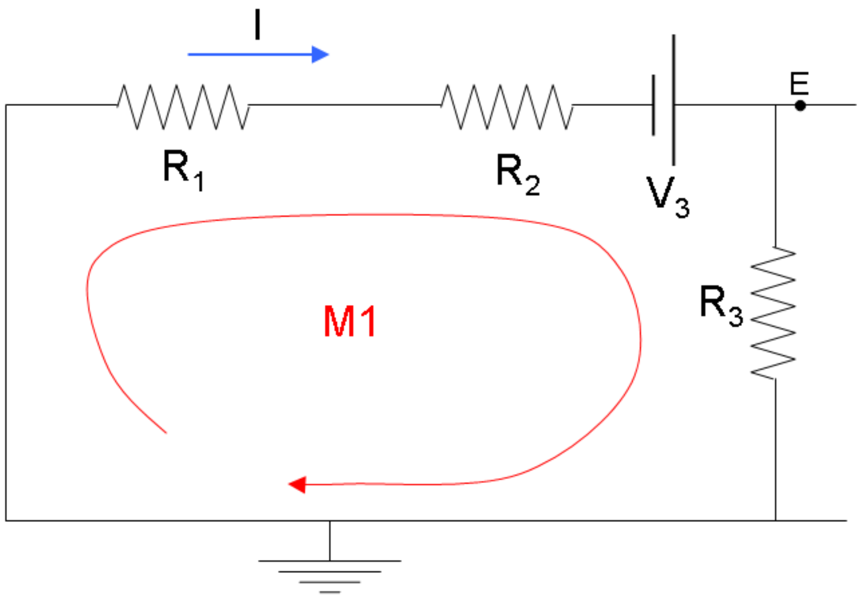
Fem el mateix per V_2 i per V_3.

V_2:



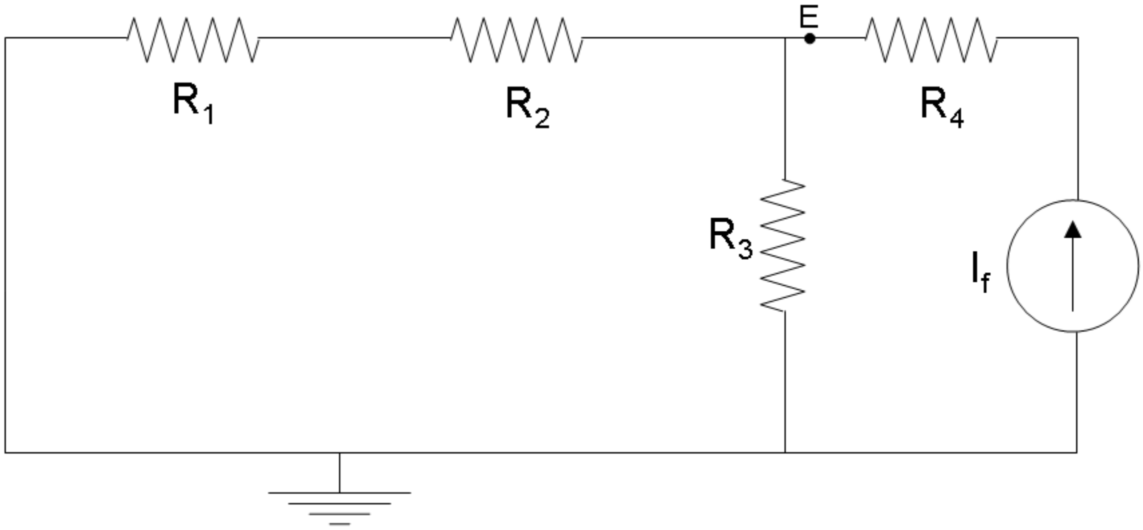
$$-I \cdot R_1 - V_2 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{-V_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Rightarrow \quad V_{E2} = \frac{-V_2}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

V_3:

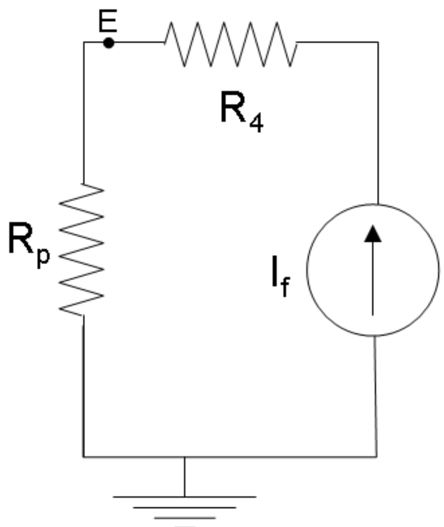


$$-I \cdot R_1 - I \cdot R_2 + V_3 - I \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Rightarrow \quad V_{E3} = \frac{V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

I per la font de corrent:



Veiem que R_1 està en sèrie amb R_2 (per tant podem substituir-les pel seu equivalent R_1+R_2). La resistència resultant, està en paral·lel amb R_3. Per tant, resolem el circuit simplement com una branca amb la font I_f, R_4 i la resistència equivalent:



$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Per tant: $$V_{E4} = I_f \cdot R_p = I_f \cdot \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

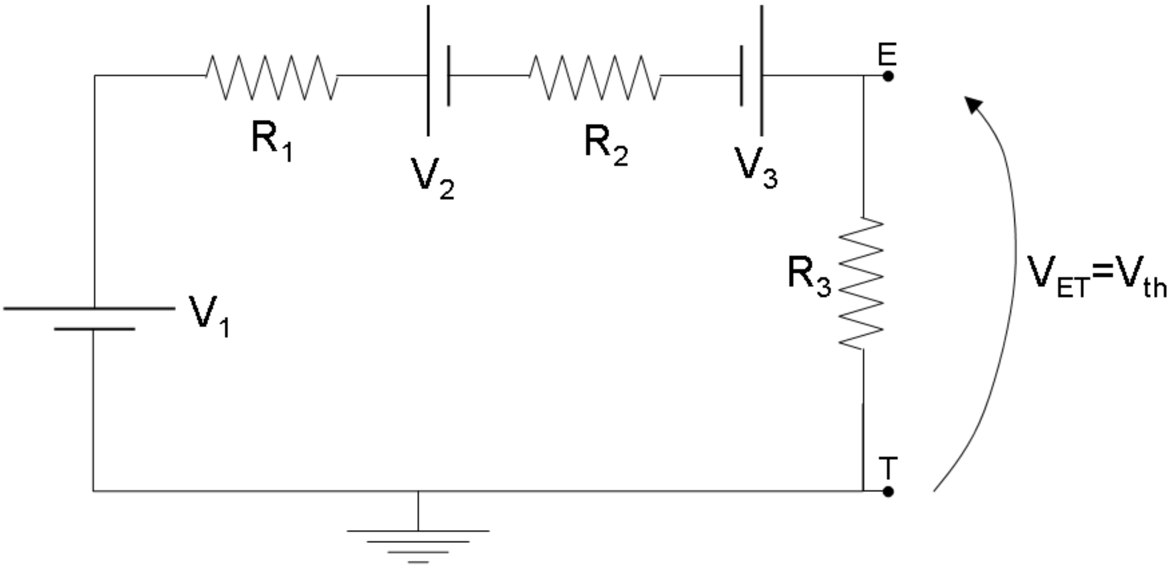
Per tant, el resultat de V_E del circuit original és la suma d'aquestes quatre tensions:

$$V_E = V_{E1} + V_{E2} + V_{E3} + V_{E4} = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3 + I_f \cdot \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{V_1 - V_2 + V_3 + I_f \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

Es pot comprovar que coincideix amb el valor obtingut al primer apartat ($I_2 \cdot R_3$).

d) Apliqueu l'equivalent Thévenin de la part esquerra del circuit, entre els punts E i T.

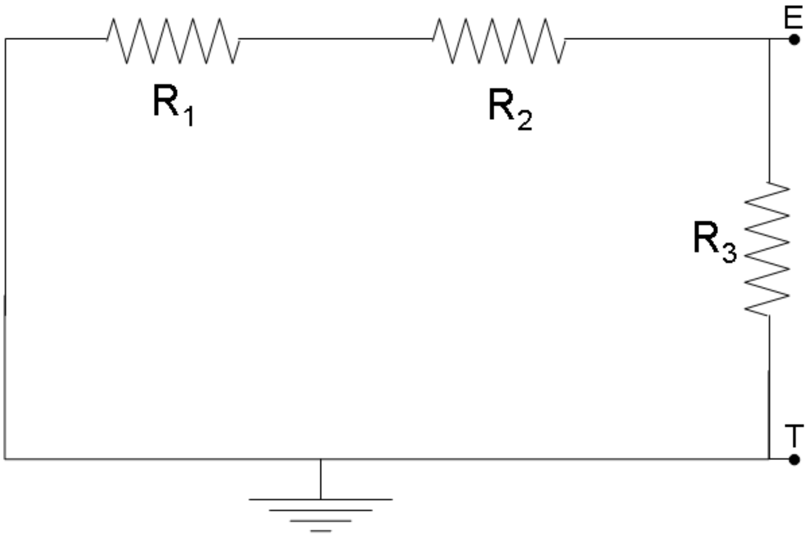
El teorema de Thévenin també ens permet resoldre circuits mitjançant la resolució de "subcircuits" més petits i, per tant, més fàcils de resoldre que el problema original.
Ens demanen fer l'equivalent de la part esquerra, entre els punts E i T. Per tant, per obtenir aquest equivalent Thévenin, eliminem el que hi ha a la part dreta, deixant els terminals (E i T) oberts:



Hem d'obtenir els dos components de l'equivalent Thévenin: la tensió i la resistència. La tensió Thévenin la calculem resolent aquest circuit (és a dir, l'original sense la part dreta i oberts els terminals E i T) i calculant la caiguda de tensió entre E i T (aquesta caiguda de tensió és la tensió Thévenin, tal com s'indica a la figura anterior).
El circuit resultant és senzill. Només hi ha una malla i, per tant, només un corrent. Així doncs:

$$V_1 - I \cdot R_1 - V_2 - I \cdot R_2 + V_3 - I \cdot R_3 = 0 \quad \Rightarrow I = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Rightarrow V_{th} = V_{ET} = V_E = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

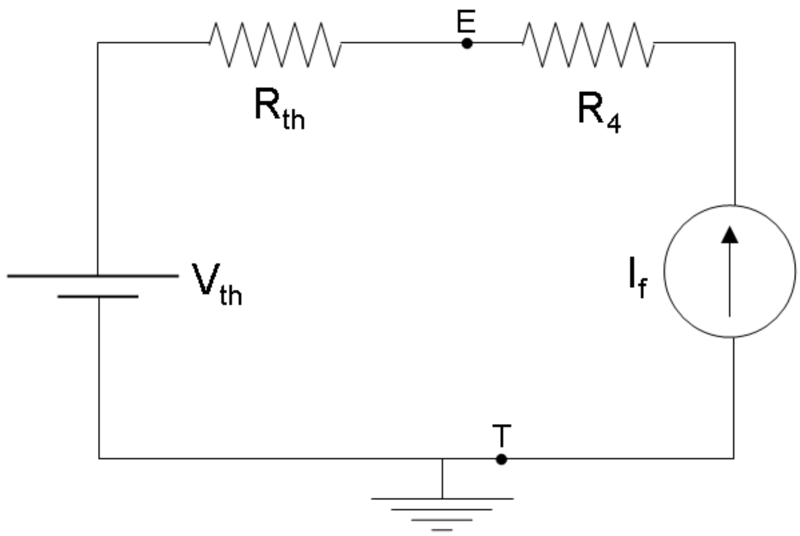
Ara manca la resistència Thévenin. Partint del mateix circuit que abans (l'original sense la part dreta i oberts els terminals T i E, hem d'eliminar les fonts (ara només hi ha de tensió):



Veiem que R_1 i R_2 estan en sèrie. I aquesta resistència equivalent, està en paral·lel amb R_3. Per tant, la resistència equivalent entre els terminals T i E és:

$$R_{th} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Per tant, ja tenim el circuit equivalent Thévenin de la part esquerra del circuit.
Per resoldre tot el circuit només hem d'unir ambdós circuits per reconstruir el circuit original, però aquesta vegada amb l'equivalent Thévenin de la part esquerra:



En principi hauríem de resoldre amb les lleis de Kirchhoff aquest circuit. Però no fa falta ja que ens podem adonar que podem obtenir V_E automàticament amb els valors que coneixem:

$$V_E = V_{th} + I_f \cdot R_{th} = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3 + I_f \cdot \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{V_1 - V_2 + V_3 + I_f \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3$$

Que també coincideix amb els obtinguts en apartats anteriors.

III. Díodes

III.1. Procediment general de resolució

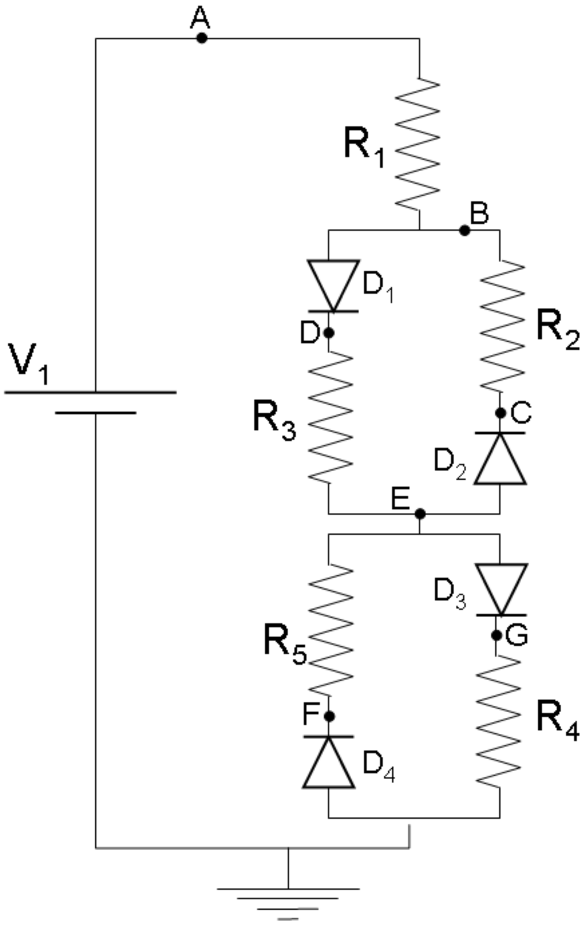
El procediment general proposat és el següent:

a) Si és possible, identificar els díodes que estan en directa i en inversa. Pels que estiguin en inversa, fem que la seva branca estigui oberta (o utilitzem resistència inversa).
b) En alterna, intentar identificar per quins valors de Vi estan en directa i en inversa. (si no és possible, fer una suposició).
c) Substituir els díodes pels seus corresponents models i solucionar el circuit aplicant Kirchhoff.
d) Si algun dels díodes no està clar si està en directa o no, solucionar amb el díode en directa i comprovar que la solució concorda amb aquesta suposició (sentit del corrent correcte).

III.2. Problema 1

Amb el circuit de la figura:

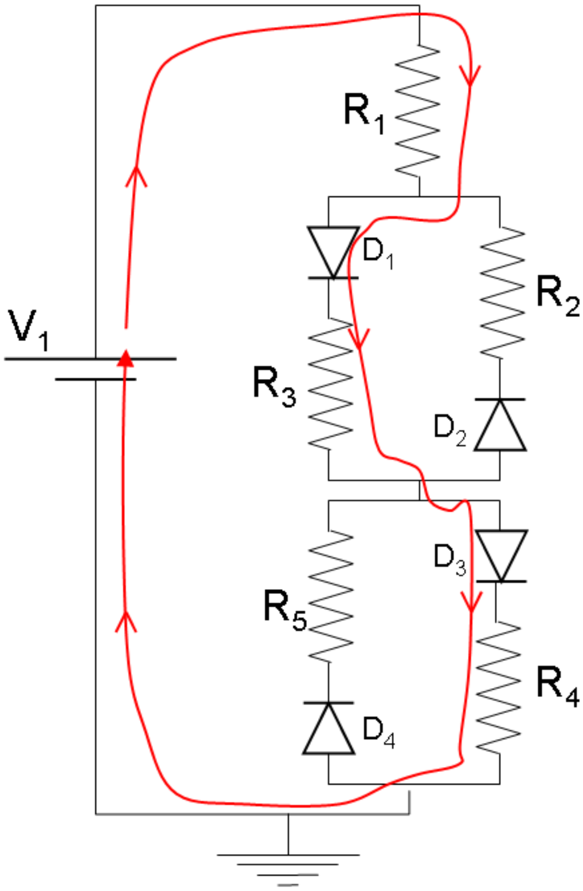
a) Argumenta raonadament quins dels díodes poden ser en conducció (polaritzats en directa) i quins en tall (polaritzats en inversa).
b) Resol el circuit amb el model ideal del díode més simple (V_γ = 0 V). (Recorda que resoldre el circuit vol dir obtenir tots els corrents i totes les tensions).
c) Fes el mateix que a l'apartat b, però ara amb V_γ= 0.7 V.
d) Resol el circuit amb el model lineal amb V_γ= 0.7 V i r_D = 10 Ω. Pels díodes polaritzats en inversa, els considerarem ideals (circuit obert).


A
R1
B
D1
D
R2
V1
R3
C
D2
E
D3
G
R5
F
R4
D4

Resolució:

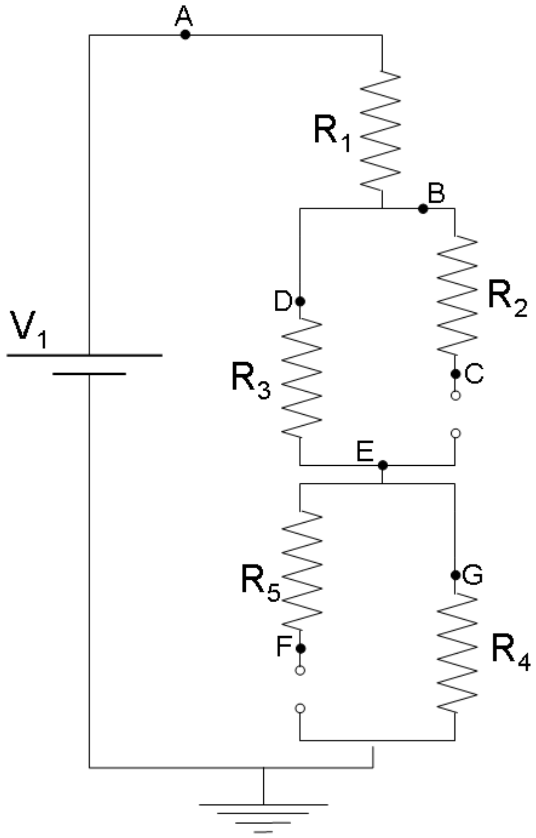
a) Argumenta raonadament quins dels díodes poden ser en conducció (polaritzats en directa) i quins en tall (polaritzats en inversa).

Només hi ha una font al circuit, posant una tensió positiva a la part alta del circuit respecte el terra (part baixa del circuit). El corrent, per tant, tindrà la tendència a circular de la part alta a la baixa, mentre que la tensió anirà caient als components, també de dalt a baix.
El díodes que s'oposen a aquest fluxe de corrent són els D_2 i D_4. Per tant, aquests díodes estaran polaritzats en inversa. Els altres dos díodes (D_1 i D_3) estan a favor d'aquest fluxe de corrent. Per tant, estaran polaritzats en directa i conduiran el corrent. Veiem que aquests dos díodes permeten el pas de corrent entre A i el terra i, per tant, sí que hi haurà conducció elèctrica al circuit. Per tant, la circulació del corrent serà com l'indicat a la figura següent:

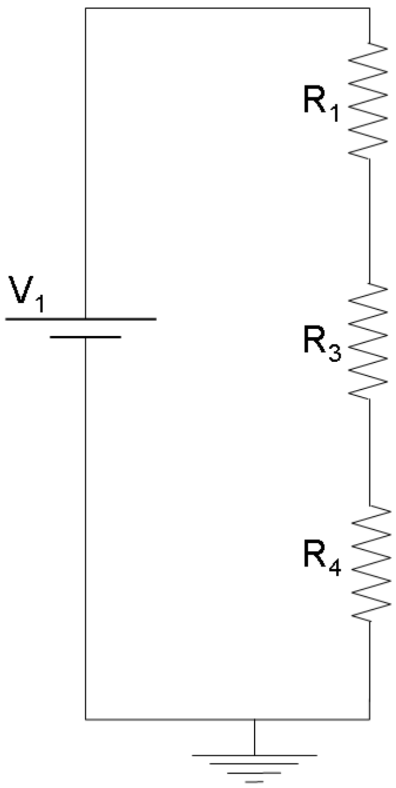


b) Resol el circuit amb el model ideal del díode més simple (V_γ = 0 V). (Recorda que resoldre el circuit vol dir obtenir tots els corrents i totes les tensions).

El model ideal més simple es realment fàcil de resoldre. Si el díode està en directa, aquest no presenta cap resistència (r_D = 0 Ω) ni caiguda de tensió (V_γ = 0 V). Per tant, els substituïm per un curtcircuit. Si el díode està polaritzat en inversa, no passarà cap corrent pel díode. És a dir, que és equivalent a posar la seva branca en circuit obert i, per tant, no tindrà cap contribució en la resolució del circuit.
Seguint el raonament de l'apartat a), el circuit queda de la següent forma:



Si eliminem els elements innecessaris, ens queda un circuit molt senzill de resoldre:



Aplicant la llei de malles de Kirchhoff (partint des de terra i prenent sentit horari del corrent):

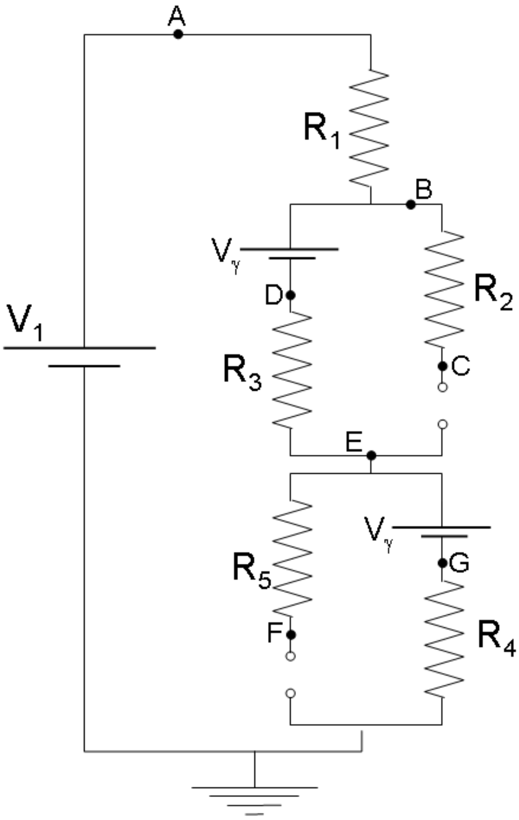
$$V_1 - I\cdot R_1 - I\cdot R_3 - I\cdot R_4 = 0 \quad \Rightarrow I = \frac{V_1}{R_1 + R_3 + R_4}$$

Manca obtenir les tensions a tots els punts del circuit (prenent de referència el terra (0V)):

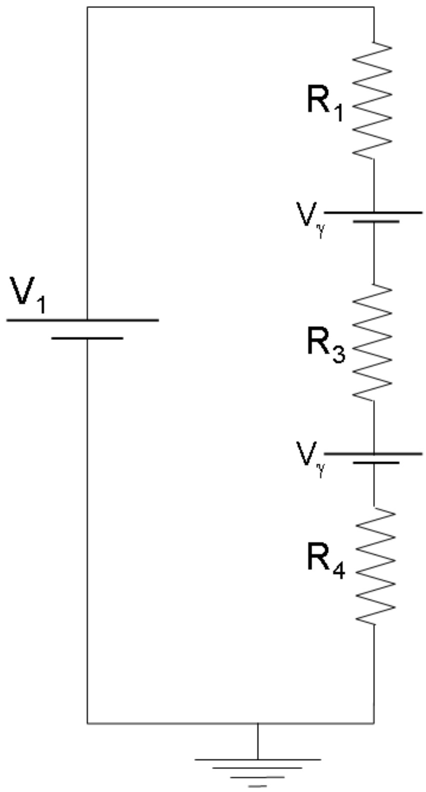
$$V_A = V_1$$
$$V_B = V_1 - I\cdot R_1$$
$$V_C = V_B \quad \text{(ja que el corrent per la branca es nul --> } \Delta V = I\cdot R = 0V)$$
$$V_D = V_B \quad \text{(aquest díode actua com un curtcircuit)}$$
$$V_E = V_B - I\cdot R_3 = V_1 - I\cdot R_1 - I\cdot R_3 = V_1 - I\cdot(R_1 + R_3) \quad ó \quad V_E = I\cdot R_4$$
$$V_F = V_E$$
$$V_G = V_E$$

c) Fes el mateix que a l'apartat b, però ara amb V_γ= 0.7 V.

El procediment és exactament el mateix que a l'apartat b); només hem de tenir en compte que hem d'afegir la font de tensió corresponent a la tensió llindar dels díodes polaritzats en directa. La col·locació de la font és clara: la part negativa anirà sempre endavant (segons la direcció del corrent) ja que al díode en directa sempre caurà tensió. Per tant, ara el circuit queda com:



Eliminant els elements innecessaris per la resolució del problema, ens queda el circuit:



Encara és un circuit molt senzill de resoldre. Aplicant la llei de malles de Kirchhoff de la mateixa forma que abans obtenim:

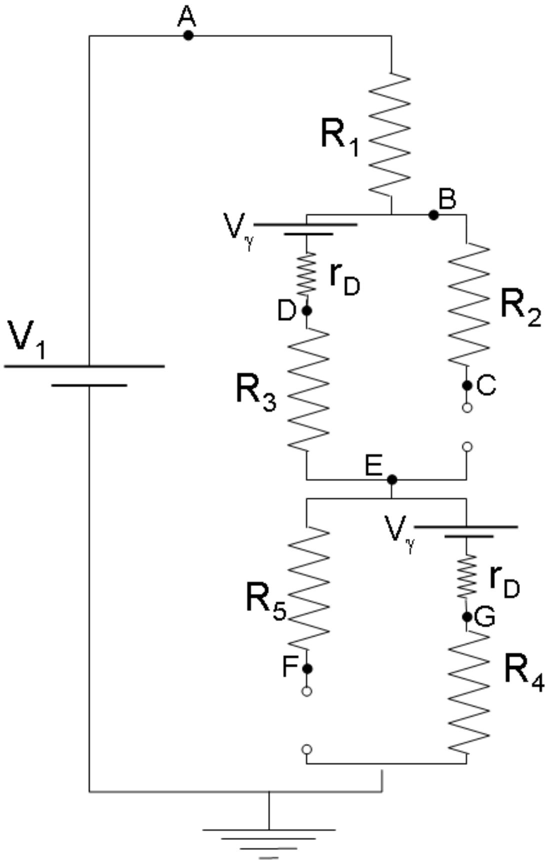
$$V_1 - I \cdot R_1 - V_\gamma - I \cdot R_3 - V_\gamma - I \cdot R_4 = 0 \quad \Rightarrow I = \frac{V_1 - 2 \cdot V_\gamma}{R_1 + R_3 + R_4}$$

I les tensions al circuit són, per tant:

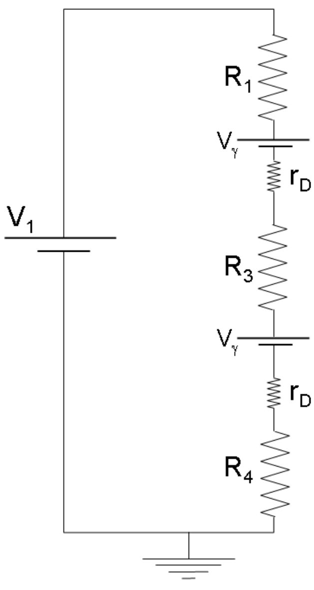
$$V_A = V_1$$
$$V_B = V_1 - I \cdot R_1$$
$$V_C = V_B$$
$$V_D = V_B - V_\gamma = V_1 - I \cdot R_1 - V_\gamma$$
$$V_E = V_D - I \cdot R_3 = V_1 - I \cdot R_1 - V_\gamma - I \cdot R_3 = V_1 - V_\gamma - I \cdot (R_1 + R_3) \quad ó \quad V_E = I \cdot R_4 + V_\gamma$$
$$V_F = V_E$$
$$V_G = I \cdot R_4$$

d) Resol el circuit amb el model lineal amb V_γ= 0.7 V i r_D = 10 Ω. Pels díodes polaritzats en inversa, els considerarem ideals (circuit obert).

Pel model lineal, els díodes polaritzats en directa es representen per una font (amb valor la tensió llindar) i una resistència en sèrie (en general, amb valor de resistència petit). Així donçs, ara el circuit quedarà com:



Que simplificant queda:



Al igual que abans, aquest circuit continua essent fàcil de resoldre. Aplicant la llei de malles de Kirchhoff obtenim:

$$V_1 - I \cdot R_1 - V_\gamma - I \cdot r_D - I \cdot R_3 - V_\gamma - I \cdot r_D - I \cdot R_4 = 0 \quad \Rightarrow I = \frac{V_1 - 2 \cdot V_\gamma}{R_1 + R_3 + R_4 + 2 \cdot r_D}$$

I les tensions són:

$$\begin{aligned}
V_A &= V_1 \\
V_B &= V_1 - I \cdot R_1 \\
V_C &= V_B \\
V_D &= V_B - V_\gamma = V_1 - I \cdot R_1 - V_\gamma - I \cdot r_D = V_1 - V_\gamma - I \cdot (R_1 + r_D) \\
V_E &= V_D - I \cdot R_3 = V_1 - V_\gamma - I \cdot (R_1 + r_D) - I \cdot R_3 = V_1 - V_\gamma - I \cdot (R_1 + r_D + R_3) \\
V_F &= V_E \\
V_G &= I \cdot R_4
\end{aligned}$$

IV. Transistors bipolars

IV.1. Procediment general de resolució

El procediment general proposat és el següent:

a) Intentar determinar a priori el possible mode de treball del transistor. (tall o activa directa).
b) No estant en tall, normalment suposar que està en mode activa directa. (és més senzill resoldre'l que en saturació).
c) Resoldre el circuit (com sempre, utilitzant lleis de Kirchhoff). Agafar malles que incloguin V_{BE} (generalment 0.7V).
d) Amb els corrents obtinguts, determinar les tensions V_B, V_E, V_C. Veure si són compatibles amb el mode activa directa.
e) Si no és compatible, resoldre el circuit pel mode de saturació. Normalment requerirà al menys resoldre dues malles (una que inclogui V_{CE} (generalment 0.2V) i una altre V_{BE}).

IV.2. Problema 1

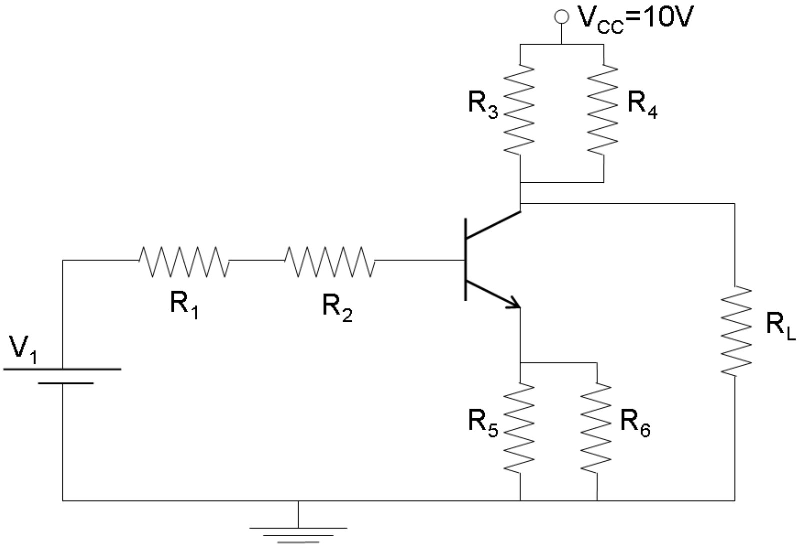
a) Resoleu el circuit de la figura agafant els següents valors de resistències i tensions de fonts:

$$R_1 = R_2 = 50\ k\Omega, \quad R_3 = R_4 = 4\ k\Omega, \quad R_5 = R_6 = 10\ k\Omega, \quad R_L = 10\ k\Omega,$$
$$V_{CC} = 10\,V, \quad V_1 = 5\,V$$

Si es necessita, utilitzar els següents valors: $\beta = 100, \quad V_\gamma = 0.7\,V$.

b) Elimineu del circuit la resistència R_L i resoleu el circuit en mode de saturació, però ara utilitzant els següents valors:

$$R_1 = R_2 = 50\ k\Omega, \quad R_3 = R_4 = 10\ k\Omega, \quad R_5 = R_6 = 4\ k\Omega,$$
$$V_{CC} = 10\,V, \quad V_1 = 5\,V$$

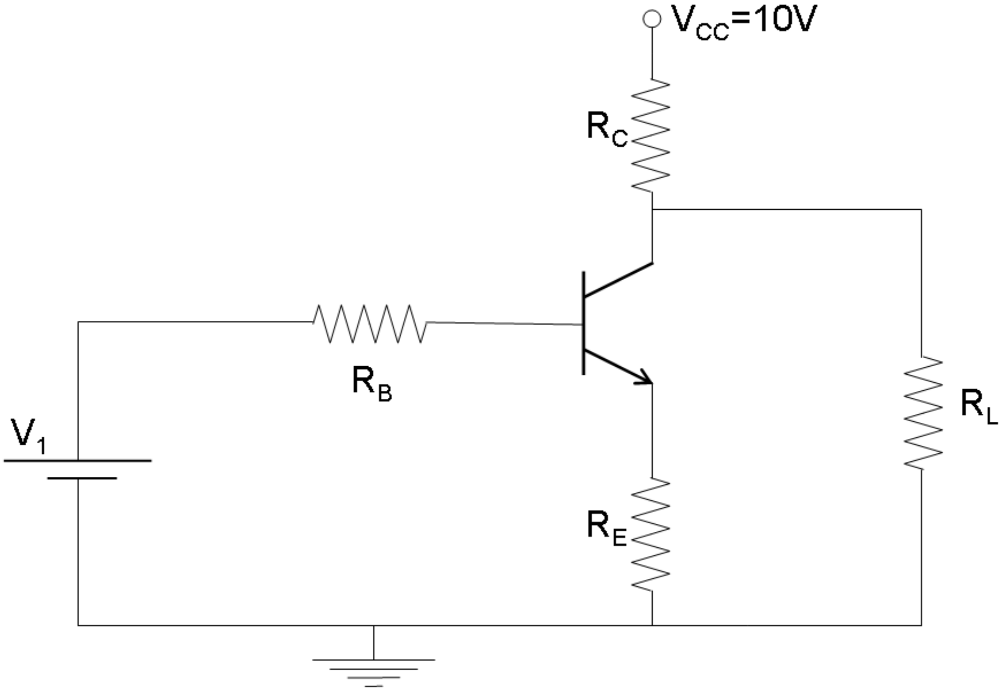


Resolució:

a) **Resoleu el circuit de la figura agafant els següents valors de resistències i tensions de fonts:**

$$R_1 = R_2 = 50\,k\Omega, \quad R_3 = R_4 = 4\,k\Omega, \quad R_5 = R_6 = 10\,k\Omega, \quad R_L = 10\,k\Omega,$$
$$V_{CC} = 10\,V, \quad V_1 = 5\,V$$

Ens adonem que el transistor és del tipus NPN.
El primer pas que podem fer és simplificar el circuit degut a les resistències sèrie i paral·lel que n'hi han. Entre V_1 i el terminal de base del transistor tenim dues resistències en sèrie (fixeu-vos que no surt cap branca al punt entre R_1 i R_2). Per tant les podem substituir per una única resistència de valor $R_1 + R_2$. Entre V_{CC} i el col·lector del transistor tenim dues resistències en paral·lel, a l'igual que entre l'emissor del transistor i el terra. Per tant, el circuit simplificat queda de la següent forma:



a on,

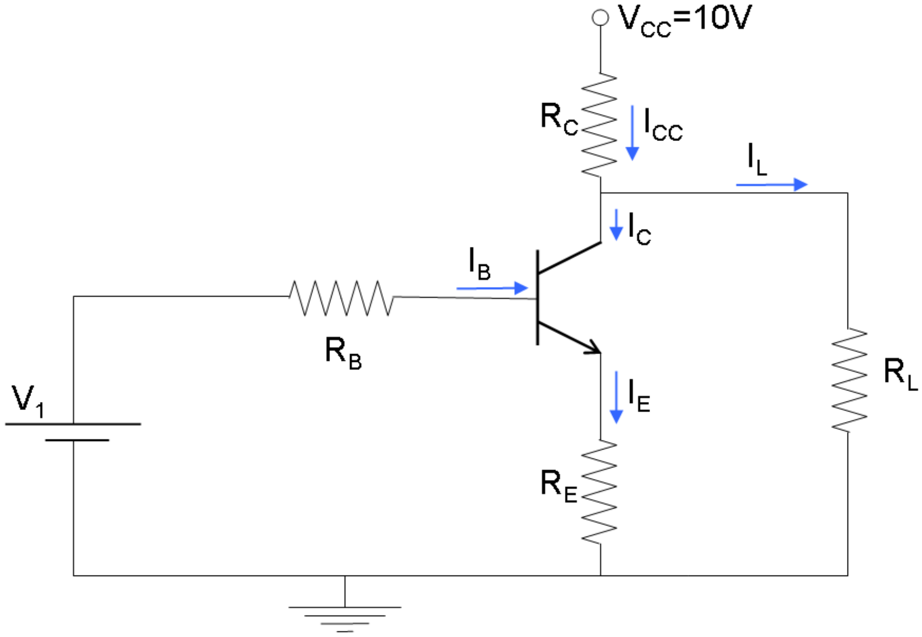
$$R_B = R_1 + R_2 = 100\,k\Omega$$
$$\frac{1}{R_C} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_3 + R_4}{R_3 \cdot R_4} \quad \Rightarrow R_C = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 2\,k\Omega$$
$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{R_5 + R_6}{R_5 \cdot R_6} \quad \Rightarrow R_E = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = 5\,k\Omega$$

(Nota: La resistència equivalent de dues resistències iguals en paral·lel, és igual a la meitat del valor d'una de les resistències. Exemple: $R_E = 0.5 \cdot R_5$).

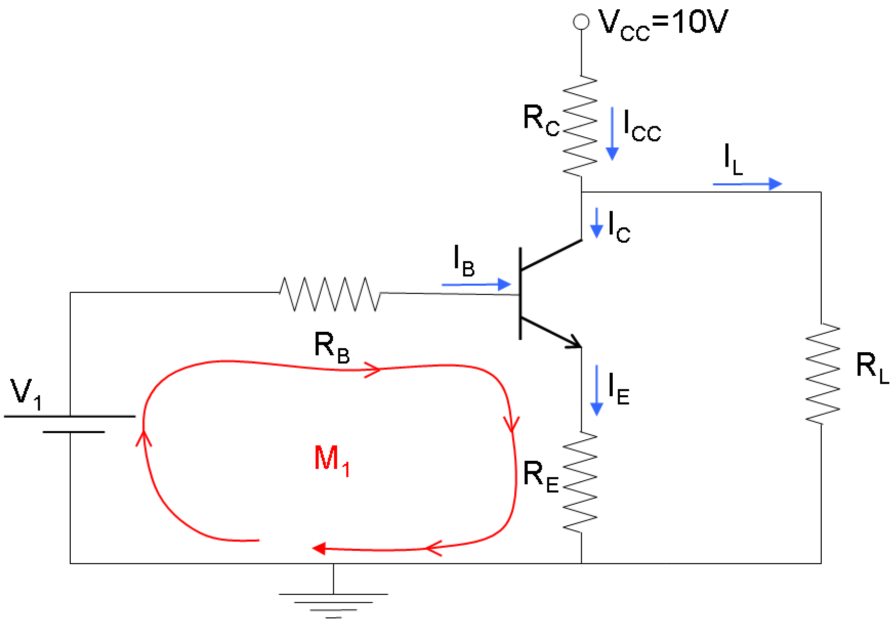
Ara podem seguir el procediment general per resoldre circuits amb transistors bipolars. La diferència amb altres circuits vistos a classe radica en l'existència de la resistència de càrrega R_L

connectada al col·lector del transistor. Però com en tota resolució de circuits, haurem de fer ús de les lleis de Kirchhoff per resoldre tot el circuit.

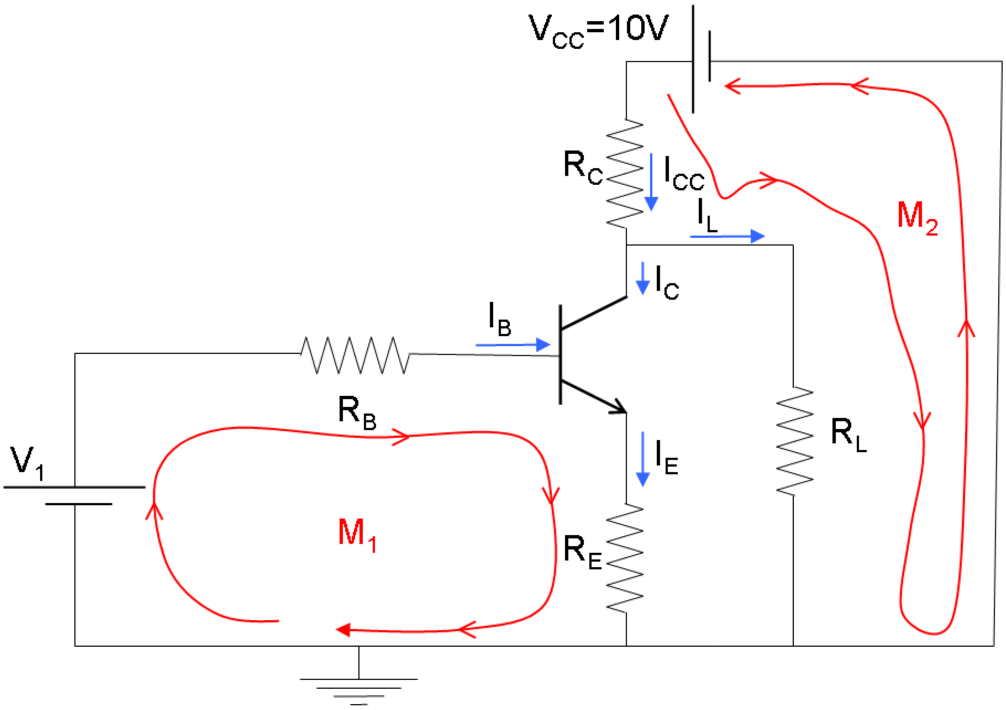
En primer lloc mirem el circuit amb atenció i intentem veure si és plausible que el transistor estigui treballant en mode 'activa directa'. La rama on està connectat el col·lector del transistor té una font de 10 V, mentre que la rama de la base té una font amb 5 V. Per tant, sembla possible que la tensió del col·lector pugui tenir una tensió major a la de la base. I com que la branca de l'emissor està connectada a terra, també es possible que la unió base-emissor (BE) estigui polaritzada en directa.
Per tant, anem a resoldre en primer lloc el circuit assumint que el transistor treballa en mode 'activa directa' que, com ja sabem, és la manera més fàcil (comparat amb saturació) de resoldre circuits amb aquests transistors.
En primer lloc, dibuixem tots els corrents el circuit:



En mode 'activa directa', pel que fa als corrents del transistor, només tenim una incògnita (un dels corrents), ja que els altres dos es poden sempre calcular amb les expressions corresponents a aquest mode d'operació. Per tant, hem d'intentar plantejar una llei de malles que pugui resoldre aquesta variable. El més habitual es agafar la malla que passa per la base, va a l'emissor, fins tancar el circuit, tal i com mostra l'esquema:



Amb aquesta malla coneixerem els tres corrents del transistor. Podem considerar ‘com si’ la malla M_1 hagués passat per totes les branques del transistor (inclosa la branca de col·lector). Però, tot i això, aquesta malla no inclou totes les branques del circuit (no passa per la branca de R_C ni per la de R_L). O, el que és el mateix, tenim altres dues corrents incògnites: I_{CC} i I_L. I és que, com en la resolució de tot circuit, ens manca aplicar les lleis de Kirchhoff també a la resta del circuit. Quan s’ha afegit R_L, s’ha afegit automàticament un node amb tres branques al circuit (el node de col·lector). Per tant, aplicarem la llei de corrents al node del col·lector i necessitarem una malla més per incloure, al menys, aquestes branques. Agafarem la malla que parteix des de V_{CC}, passa per R_C, per R_L i a terra. Recordeu que, tal i com està indicat, V_{CC} vol dir que tenim una font de tensió connectada entre aquest punt i el terra. Per tant, les malles necessàries són dues, com es mostra a la següent figura:



Per totes dues malles partirem des del terra. Per tant, les equacions obtingudes aplicant Kirchhoff són les següents:

$$I_{CC} = I_L + I_C$$
$$M_1: \quad V_1 - I_B \cdot R_B - V_\gamma - I_E \cdot R_E = 0$$
$$M_2: \quad V_{CC} - I_{CC} \cdot R_C - I_L \cdot R_L = 0$$

Tots els corrents del transistor els posem en funció de I_B (per exemple). Això és possible per què suposem que el transistor treballa en mode 'activa directa', i en aquest mode coneixem les següents relacions entre corrents:

$$I_E = (\beta + 1) \cdot I_B$$
$$I_C = \beta \cdot I_B$$

Si les introduïm en les expressions anteriors, i arreglant una mica les expressions, ens queda:

$$I_{CC} = I_L + \beta \cdot I_B$$
$$V_1 - V_\gamma - [R_B + (\beta + 1) \cdot R_E] \cdot I_B = 0$$
$$V_{CC} - I_{CC} \cdot R_C - I_L \cdot R_L = 0$$

Així tenim tres equacions amb tres incògnites.

Amb la segona equació podem calcular I_B (treballem amb unitats de V, kΩ i mA):

$$I_B = \frac{V_1 - V_\gamma}{R_B + (\beta + 1) \cdot R_E} = \frac{5 - 0.7}{100 + 101 \cdot 5} = 7.11\,\mu A$$

i, com ja sabem, podem obtenir els altres dos corrents corresponents al transistor en aquest mode:

$$I_E = (\beta + 1) \cdot I_B = 101 \cdot 7.11\,\mu A = 0.718\,mA$$
$$I_C = \beta \cdot I_B = 0.711\,mA$$

Si a la tercera equació introduïm I_{CC} de la primera, podrem obtenir I_L:

$$V_{CC} - (I_L + \beta \cdot I_B) \cdot R_C - I_L \cdot R_L = 0 \quad \Rightarrow V_{CC} - I_L \cdot (R_L + R_C) - \beta \cdot I_B \cdot R_C = 0$$
$$\Rightarrow I_L = \frac{V_{CC} - \beta \cdot I_B \cdot R_C}{R_L + R_C} \quad \Rightarrow I_L = \frac{10 - 100 \cdot 0.00711 \cdot 2}{10 + 2} = 0.715\,mA$$

I amb la primera equació calculem I_{CC}:

$$I_{CC} = I_L + \beta \cdot I_B = 0.715 + 100 \cdot 0.00711 = 1.43\,mA$$

Tenint tots els corrents, ja podem obtenir les tensions per poder comprovar si realment el transistor es troba treballant en mode 'activa directa':

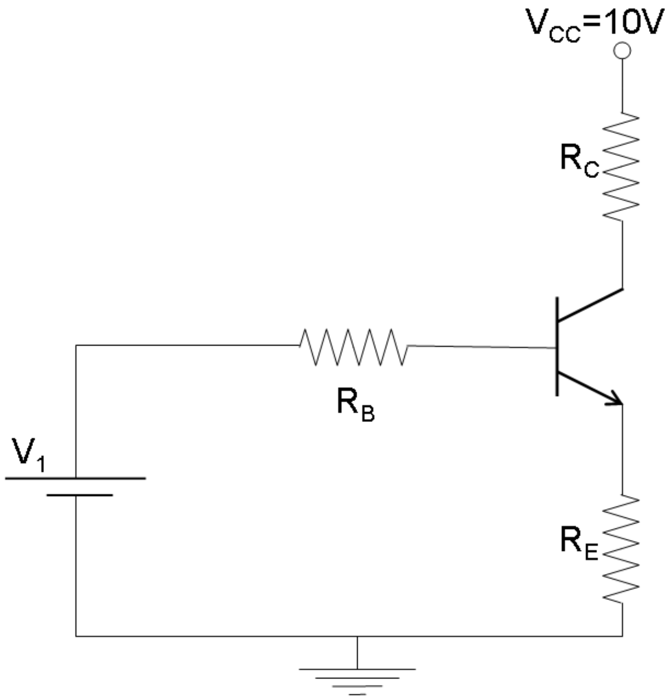
$$V_E = +I_E \cdot R_E = 0.718 \cdot 5 = 3.59\,V$$
$$V_B = V_E + V_\gamma = 3.59 + 0.7 = 4.29\,V$$
$$V_C = V_{CC} - I_{CC} \cdot R_C = 10 - 1.43 \cdot 2 = 7.14\,V$$

Els corrents han sortit positius (és a dir, que corresponen a les direccions dels corrents per l'estat de 'activa directa'. A més, veiem que V_C > V_B. V_{BE} = 0.7 V per què l'hem imposat nosaltres en la resolució del problema. Per tant, la nostra suposició inicial de mode de treball era correcta.

b) Elimineu del circuit la resistència R_L i resoleu el circuit en mode de saturació, però ara utilitzant els següents valors:

$$R_1 = R_2 = 50\,k\Omega, \quad R_3 = R_4 = 10\,k\Omega, \quad R_5 = R_6 = 4\,k\Omega,$$
$$V_{CC} = 10\,V, \quad V_1 = 5\,V$$

Llavors, el circuit a resoldre és el següent:



però hem de tornar a calcular els valors de les resistències:

$$R_B = 100\ k\Omega$$
$$R_C = 5\ k\Omega$$
$$R_E = 2\ k\Omega$$

En 'mode saturació' és important recordar que ja no es compleixen les relacions entre els corrents que vam veure pel mode de 'activa directa':

$$\cancel{I_E = (\beta + 1)\cdot I_B}$$
$$\cancel{I_C = \beta \cdot I_B}$$

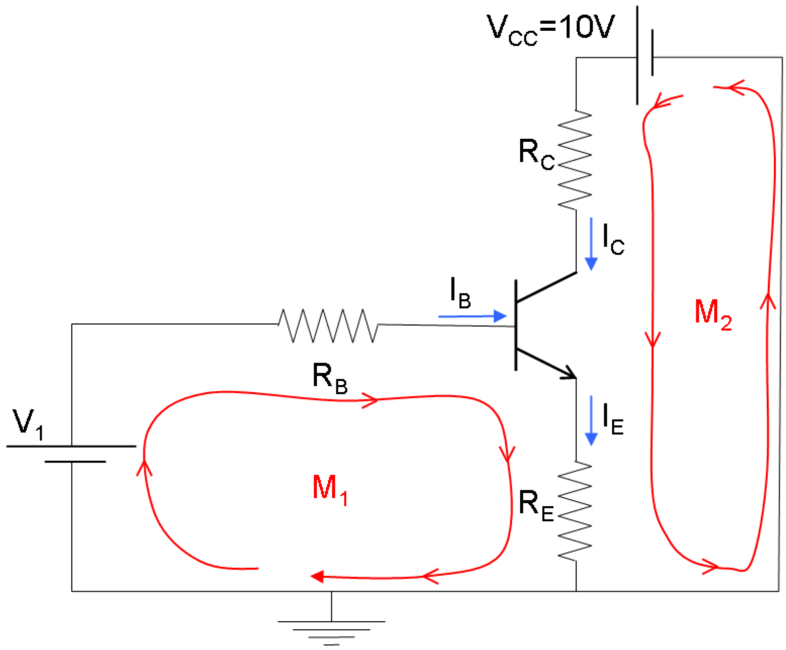
L'únic que sempre es compleix és la relació entre els tres corrents (no deixa de ser una aplicació de la llei de corrents de Kirchhoff aplicat al transistor com si fos un node amb tres branques):

$$I_E = I_B + I_C$$

A més, en el 'mode saturació' també coneixem la següent dada:

$$V_{CE} = 0.2\,V$$

És a dir, que hem de conèixer dos corrents del transistor per poder calcular el tercer dels corrents (tenim, per tant, dues incògnites). Això vol dir que necessitarem dues malles per resoldre el transistor. Les dues malles escollides són les següents:



M_1 és la mateixa que abans, ja que igualment sabem que $V_{BE} = V_\gamma$. La segona malla passa pels terminals C i E. En saturació no és cap problema (com sí que ho és en el cas de mode 'activa directa') ja que coneixem quant val V_{CE}.
Per tant, les equacions són (per les malles, partim en ambdós casos de terra):

$$I_E = I_B + I_C$$
$$M_1: \quad V_1 - I_B \cdot R_B - V_\gamma - I_E \cdot R_E = 0$$
$$M_2: \quad V_{CC} - I_C \cdot R_C - V_{CE} - I_E \cdot R_E = 0$$

Primer substituïm I_B de la primera equació en la segona (corresponent a la malla M_1):

$$V_1 - (I_E - I_C) \cdot R_B - V_\gamma - I_E \cdot R_E = 0 \quad \Rightarrow V_1 - V_\gamma + I_C \cdot R_B - I_E \cdot (R_E + R_B) = 0$$
$$\Rightarrow I_E = \frac{V_1 - V_\gamma + I_C \cdot R_B}{R_E + R_B} = \frac{5 - 0.7 + I_C \cdot 100}{2 + 100} = \frac{4.3 + 100 \cdot I_C}{102}$$

I substituint aquest resultat a la tercera equació (corresponent a la malla M_2):

$$V_{CC} - I_C \cdot R_C - V_{CE} - \frac{V_1 - V_\gamma + I_C \cdot R_B}{R_E + R_B} \cdot R_E = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{CC} - V_{CE} - \frac{R_E}{R_E + R_B} \cdot (V_1 - V_\gamma) - I_C \cdot \left(R_C + \frac{R_B \cdot R_E}{R_E + R_B} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - \frac{R_E}{R_E + R_B} \cdot (V_1 - V_\gamma)}{\left(R_C + \frac{R_B \cdot R_E}{R_E + R_B} \right)} = \frac{10 - 0.2 - \frac{2}{102} \cdot 4.3}{5 + \frac{100 \cdot 2}{102}} = 1.396\, mA$$

Ara ja podem obtenir els altres dos corrents:

$$\Rightarrow I_E = \frac{4.3 + 100 \cdot 1.396}{102} = 1.411\, mA$$
$$\Rightarrow I_B = I_E - I_C = 0.015\, mA$$

En el mode de saturació, els corrents també han de tenir el mateix sentit que en activa directa. És a dir que han de ser positius si els agafem en la direcció "esperada". Com que han donat positiu, vol dir aquests valors són compatibles amb l'estat de saturació.

I amb els corrents, ja podem calcular les tensions:

$$V_E = +I_E \cdot R_E = 1.39 \cdot 2 = 2.78\, V$$
$$V_B = V_E + V_\gamma = 2.78 + 0.7 = 3.48\, V$$
$$V_C = V_E + V_{CE} = 2.78 + 0.2 = 2.98\, V$$

(Nota: En saturació, aquestes tensions no serveixen per comprovar si el transistor està realment en saturació o no ja que, havent fixat V_{CE} i V_{BE} a la resolució del circuit, sempre s'obtindran les tensions esperades en aquest mode de funcionament).

V. Transistors FETs

V.1. Procediment general de resolució

El procediment general proposat és el següent:

a) I_G=0 sempre $\rightarrow$ Facilita molt la resolució de circuits. En moltes ocasions, V_G es podrà obtenir independentment del transistor.
b) I_S=I_D sempre $\rightarrow$ Prenem només una I (I_D).
c) Intentar determinar a priori el mode de treball dels transistors o descartar algun (ex: tall). ($V_{DS}>V_{GS}-V_T$; $V_{DG}>V_T$).
d) Si no es coneix el mode, suposar saturació (més senzill). Expressar les tensions en funció d'I_D i substituir en la expressió característica ($I_D(V_{GS}, V_{DS})$). Obtenim així I_D.
e) Apliquem Kirchhoff a les parts del circuit que siguin necessàries.
f) Calcular les tensions a partir dels corrents obtinguts.
g) Comprovar que les tensions obtingudes compleixen la condició de saturació ($V_{GS}>V_T$ i $V_{DS}>V_{GS}-V_T$).
h) Si no la compleix, resoldre igualment però utilitzant l'expressió en mode de tríode (o tríode lineal).

V.2. Problema 1

Amb el circuit de la figura:

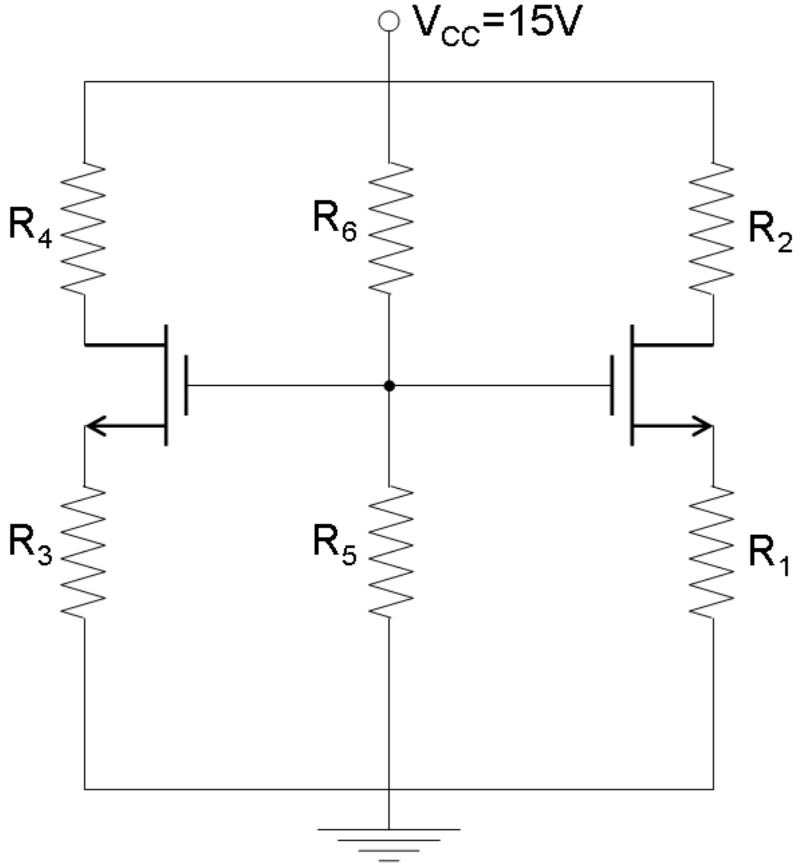
a) Resol el circuit (obtenir tots els corrents i totes les tensions del circuit). Preneu aquests valors de resistències:

$$R_1 = 20\,k\Omega,\quad R_2 = 10\,k\Omega,\quad R_3 = 20\,k\Omega,\quad R_4 = 50\,k\Omega,\quad R_5 = 2\,k\Omega,\quad R_6 = 1\,k\Omega$$

Si ho necessiteu, utilitzeu els següents valors pels transistors:

$$V_T = 1.5\,V,\quad A_d = \frac{1}{2}\cdot K_n^{'}\cdot\frac{W}{L} = 0.1\,mA/V^2$$

Si heu de resoldre en zona de tríode, utilitzeu les expressions per la zona de tríode lineal.


V_{CC}=15V
R_4
R_6
R_2
R_3
R_5
R_1

Resolució:

a) **Resol el circuit (obtenir tots els corrents i totes les tensions del circuit). Preneu aquests valors de resistències:**
$R_1 = 20\,k\Omega, \quad R_2 = 10\,k\Omega, \quad R_3 = 20\,k\Omega, \quad R_4 = 50\,k\Omega, \quad R_5 = 2\,k\Omega, \quad R_6 = 1\,k\Omega$

Si ho necessiteu, utilitzeu els següents valors:

$$V_T = 1.5\,V, \quad A_d = \frac{1}{2}\cdot K_n \cdot \frac{W}{L} = 0.1\,mA/V^2$$

Si heu de resoldre en zona de tríode, utilitzeu les expressions per la zona de tríode lineal.

En primer lloc, ens adonem que els dos transistors son FETs i de tipus NMOS.

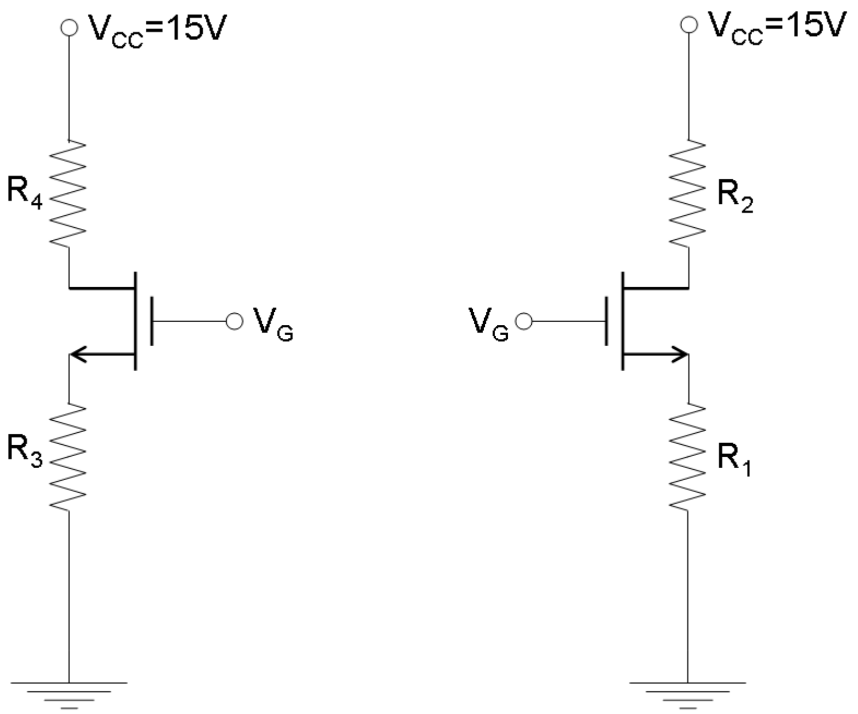
Treballarem sempre amb unitats de V, mA i kΩ.

Ens podem fixar que amb aquest circuit, el transistors podran estar treballant en saturació o en tríode ja que sembla probable que la tensió de porta sigui suficientment més alta de 0 V i podria ser possible que fos major que la tensió de font ("source") del transistor.

Com que el corrent de porta dels 2 transistors sempre és nul, la dues resistències centrals constitueixen un divisor de tensió (s'aplica V_{CC} entre les dues resistències i només hi ha un únic corrent). Per tant, podem obtenir fàcilment la tensió de porta dels dos transistors:

$$V_G = \frac{R_5}{R_5 + R_6}\cdot V_{CC} = \frac{2}{2+1}\cdot 15 = 10\,V$$

Fixeu-vos que només V_G es comú entre el circuit d'una columna d'un transistor i de l'altre. Això vol dir, que podem resoldre independentment aquests dos circuits:



Comencem resolent el transistor de la dreta. I farem el procediment general per resoldre'l.
Aquest circuit és relativament senzill per què no té res més que les branques connectades al transistor. Com sempre, suposarem que el transistor es troba treballant en la zona de saturació (la raó és que és més senzill resoldre el circuit en aquest mode). Al final, comprovarem que realment el resultat és compatible amb aquesta suposició. Suposant una certa I_D, obtindrem les tensions mitjançant I_D i aplicarem l'expressió del transistor a la zona de saturació. Les tensions són:

$$V_S = +I_D \cdot R_1$$
$$V_D = V_{CC} - I_D \cdot R_2$$

I les utilitzem per introduir-les a l'equació del transistor en saturació:

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot K_n^{'} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_T)^2 \quad \rightarrow \quad I_D = 0.1 \cdot (V_G - V_S - V_T)^2 \quad \rightarrow \quad I_D = 0.1 \cdot (10 - I_D \cdot R_1 - 1.5)^2$$
$$\Rightarrow I_D = 0.1 \cdot (8.5 - I_D \cdot R_1)^2 \quad \rightarrow \quad I_D = 0.1 \cdot \left(8.5^2 - 2 \cdot 8.5 \cdot I_D \cdot R_1 + I_D^2 \cdot R_1^{\ 2}\right)$$
$$\Rightarrow 10 \cdot I_D = 8.5^2 - 17 \cdot I_D \cdot R_1 + I_D^2 \cdot R_1^{\ 2}$$
$$\Rightarrow R_1^{\ 2} \cdot I_D^2 - 27 \cdot R_1 \cdot I_D + 72.25 = 0$$

D'aquesta equació sabem extreure el resultat:

$$I_D = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{27 \cdot R_1 \pm \sqrt{(-27 \cdot R_1)^2 - 4 \cdot R_1^2 \cdot 72.25}}{2 \cdot R_1^2} = \frac{540 \pm \sqrt{540^2 - 4 \cdot 20^2 \cdot 72.25}}{2 \cdot 20^2} = \frac{540 \pm \sqrt{176000}}{800} = \begin{cases} = 1.2\ mA \\ = 0.15\ mA \end{cases}$$

Obtenim les tensions i veurem si està en saturació o no:

$$I_D = 1.2\,mA \quad \to V_S = I_D \cdot R_1 = 1.2 \cdot 20 = 24\,V \qquad V_D = V_{CC} - I_D \cdot R_2 = 15 - 1.2 \cdot 10 = 3\,V$$
$$I_D = 0.15\,mA \quad \to V_S = I_D \cdot R_1 = 0.15 \cdot 20 = 3\,V \qquad V_D = V_{CC} - I_D \cdot R_2 = 15 - 0.15 \cdot 10 = 13.5\,V$$

Veiem que el primer cas no correspon amb la regió de saturació ja que no es compleix la primera de las condicions; és a dir, $V_{GS} > V_T$ (amb V_{GS} = 10 - 24 = - 14 V).
Amb el segon resultat, veiem que es compleix aquesta primera condició ja que ara V_{GS}= 10-3 = 7 V, i per tant es compleix que $V_{GS} > V_T$.
La segona condició es la condició de saturació estrictament: $V_{DS} > V_{GS} - V_T$
Calculem els dos primers termes per poder avaluar aquesta condició:

$$V_{DS} = V_D - V_S = 13.5 - 3 = 10.5\,V$$
$$V_{GS} = V_G - V_S = 10 - 3 = 7\,V$$

I, per tant, es compleix la condició de saturació:

$$10.5 > 7 - 1.5$$
$$10.5 > 5.5$$

Ara resolem el circuit de l'esquerra. Com que R_3 = R_1, l'aplicació de l'equació del transistor en saturació és exactament igual que abans i obtindrem els mateixos resultats per I_D. L'única cosa que canvia és el valor de V_D, que depèn de R_4, que és diferent de R_2. Per tant, anem a obtenir ara un altre vegada els valors de tensions, tenint en compte els nous valors de resistències

$$I_D = 1.2\,mA \quad \to V_S = I_D \cdot R_3 = 1.2 \cdot 20 = 24\,V \qquad V_D = V_{CC} - I_D \cdot R_4 = 15 - 1.2 \cdot 20 = -9\,V$$
$$I_D = 0.15\,mA \quad \to V_S = I_D \cdot R_3 = 0.15 \cdot 20 = 3\,V \qquad V_D = V_{CC} - I_D \cdot R_4 = 15 - 0.15 \cdot 50 = 7.5\,V$$

El primer cas és evident que no pot ser possible en saturació.
Pel segon cas, la primera condició es segueix complint igualment. Però hem de tornar a calcular la condició de saturació:

$$V_{DS} = V_D - V_S = 7.5 - 3 = 4.5\,V$$
$$V_{GS} = V_G - V_S = 10 - 3 = 7\,V$$

$$4.5 > 7 - 1.5$$
$$4.5 > 5.5$$

Ara no es compleix la condició de saturació per cap de les solucions. Per tant, haurem de resoldre en tríode. Com diu l'enunciat, utilitzarem les equacions de la zona de tríode lineal (que són una mica més fàcil de resoldre.

$$I_D = K_n^{'} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_T) \cdot V_{DS} \quad \rightarrow \quad I_D = 0.2 \cdot (V_G - V_S - V_T) \cdot (V_D - V_S)$$
$$\Rightarrow I_D = 0.2 \cdot (10 - I_D \cdot R_3 - 1.5) \cdot (V_{CC} - I_D \cdot R_4 - I_D \cdot R_3) \quad \rightarrow \quad I_D = 0.2 \cdot (8.5 - I_D \cdot R_3) \cdot (15 - I_D \cdot (R_3 + R_4))$$
$$\Rightarrow 5 \cdot I_D = 8.5 \cdot 15 - 8.5 \cdot I_D \cdot (R_3 + R_4) - I_D \cdot R_3 \cdot 15 + I_D \cdot R_3 \cdot I_D \cdot (R_3 + R_4)$$
$$\Rightarrow 5 \cdot I_D = 127.5 - I_D \cdot [8.5 \cdot 70 + 15 \cdot 20] + I_D^2 \cdot 20 \cdot 70$$
$$\Rightarrow 5 \cdot I_D = 127.5 - I_D \cdot 895 + I_D^2 \cdot 1400$$
$$\Rightarrow 127.5 - I_D \cdot 900 + I_D^2 \cdot 1400 = 0$$

Resolem igual que abans:

$$I_D = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{900 \pm \sqrt{(-900)^2 - 4 \cdot 1400 \cdot 127.5}}{2 \cdot 1400} = \frac{900 \pm \sqrt{96000}}{2800} = \begin{cases} = 0.432\, mA \\ = 0.211\, mA \end{cases}$$

Calculem les tensions per les dues solucions:

$$I_D = 0.432\, mA \quad \rightarrow V_S = I_D \cdot R_3 = 0.432 \cdot 20 = 8.64\, V \qquad V_D = V_{CC} - I_D \cdot R_4 = 15 - 0.432 \cdot 50 = -6.6\, V$$
$$I_D = 0.211\, mA \quad \rightarrow V_S = I_D \cdot R_3 = 0.211 \cdot 20 = 4.22\, V \qquad V_D = V_{CC} - I_D \cdot R_4 = 15 - 0.211 \cdot 50 = 4.45\, V$$

La primera solució no és vàlida ja que V_D no pot ser negatiu (voldria dir que I_D hauria d'anar de S a D, ja que V_S es positiva).

Pel que fa a la segona solució, es pot veure fàcilment que la primera condició ($V_{GS} > V_T$) es compleix.

Ens manca comprovar la condició de zona de tríode: $V_{DS} < V_{GS} - V_T$

Calculem les tensions d'aquesta equació:

$$V_{DS} = V_D - V_S = 4.45 - 4.22 = 0.23\, V$$
$$V_{GS} = V_G - V_S = 10 - 4.22 = 5.78\, V$$

Per tant la condició queda:

$$0.23 < 5.78 - 1.5$$
$$0.23 < 4.28$$

I, per tant, es compleix.

VI. Senyals, transferència i resposta

VI.1. Procediment general de resolució

El procediment general proposat per resoldre circuits utilitzant l'espai de Laplace és el següent:

a) Hem de transformar tot a l'espai de Laplace:
   1. Dispositius: R, L, C, etc.
   2. Fonts: de tensió i de corrent.
   3. Les tensions del circuit seran V(s) (és la transformada de v(t)) i la corrents I(s) (transformada d'i(t)).

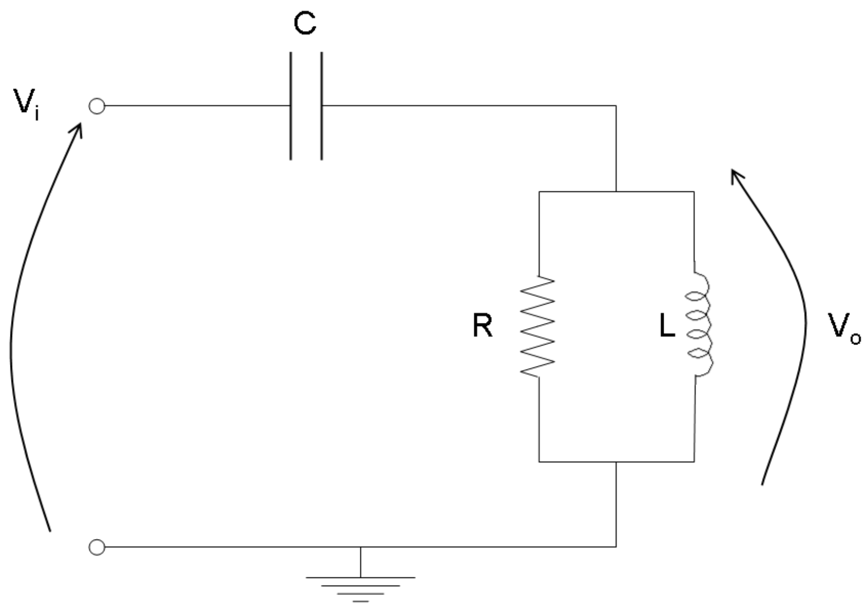
b) Resolem el circuit aplicant les lleis de Kirchhoff, però a l'espai de Laplace:
   1. També es compleixen les lleis a l'espai transformat.

c) Finalment antitransformem per a obtenir el senyal "real".

VI.2. Problema 1

Amb el circuit de la figura:

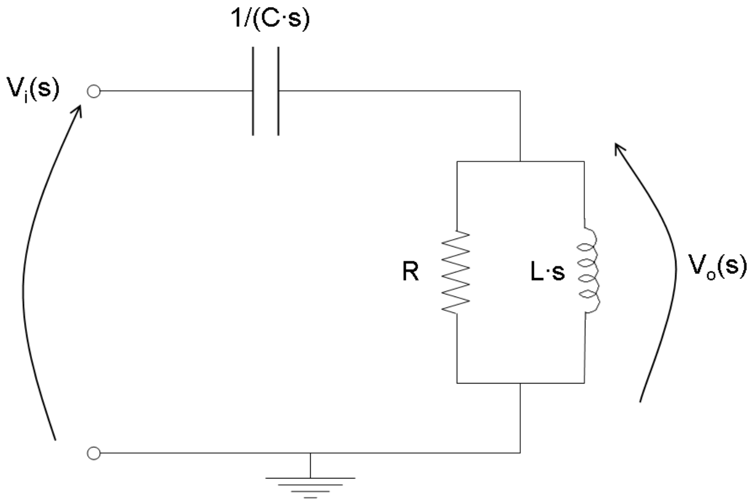
a) Resol el circuit a l'espai de Laplace (doneu totes les tensions i els corrents del circuit). Preneu condicions inicials nul·les.
b) Calcula la funció de transferència del circuit amb sortida V_o i entrada V_i.
c) Obtenir el senyal d'entrada a l'espai temporal per una entrada esglaó, d'amplada V. Preneu condicions inicials nul·les. (Preneu els valors següents: R = 1 kΩ, L = 0.8 mH, C = 1 nF).



<u>Resolució</u>:

a) Resol el circuit a l'espai de Laplace (doneu totes les tensions i els corrents del circuit). Preneu condicions inicials nul·les.

El primer pas consisteix en transformar el circuit a l'espai de Laplace, tenint en compte que a l'enunciat del problema ens indiquen que prenguem condicions inicials nul·les. Llavors, el circuit queda de la següent forma:



Per resoldre el circuit, només hem de fer el mateix que fem amb circuits que només tenen resistències (tant el condensador com la bobina ara es consideren com resistències, però amb valors $1/Cs$ i Ls respectivament).
Es pot resoldre de diferents formes. Una és simplement aplicant les lleis de Kirchhoff, com sempre. Jo ho faré d'altres forma. Primer calculem la impedància equivalent de R i L (estan en paral·lel):

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L \cdot s} = \frac{R + L \cdot s}{R \cdot L \cdot s} \quad \Rightarrow Z_p = \frac{R \cdot L \cdot s}{R + L \cdot s}$$

Aquesta resistència es troba en sèrie amb el condensador. Per tant, la resistència total serà:

$$Z_T = \frac{1}{C \cdot s} + Z_p = \frac{1}{C \cdot s} + \frac{R \cdot L \cdot s}{R + L \cdot s} = \frac{R + L \cdot s + C \cdot R \cdot L \cdot s^2}{C \cdot s \cdot (R + L \cdot s)} = \frac{s^2 \cdot C \cdot R \cdot L + s \cdot L + R}{s \cdot (R \cdot C + s \cdot L \cdot C)} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}{s \cdot \left(s + \frac{R}{L}\right)}$$

Ara podem calcular el corrent que travessa Z_T, ja que coneixem la tensió aplicada (V_i). Aquest corrent serà el mateix que el que travessa el condensador i també Z_p:

$$I_T = \frac{V_i}{Z_T} = \frac{V_i}{R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}{s \cdot \left(s + \frac{R}{L}\right)}} = V_i \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{s \cdot \left(s + \frac{R}{L}\right)}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Ara també podem calcular la tensió que cau a Z_P, que serà la mateixa que la que cau a R i a L:

$$V_P = V_o = I_T \cdot Z_P = \frac{R \cdot L \cdot s}{R + L \cdot s} \cdot V_i \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{s \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right)}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}} = V_i \cdot \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Ara només ens resta obtenir els corrents que passen per R i L. Com que coneixem V_P, llavors és fàcil obtenir aquests corrents amb la llei d'Ohm:

$$I_R = \frac{V_P}{R} = V_i \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$I_L = \frac{V_P}{L \cdot s} = V_i \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

b) Calcula la funció de transferència del circuit amb sortida V_o i entrada V_i.

Recordar primer, que la funció de transferència s'ha d'obtenir amb condicions inicials nul·les. Com a l'apartat anterior ja hem resolt el circuit amb aquesta suposició, es pot obtenir la funció de transferència immediatament:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_P}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

c) Obtenir el senyal d'entrada a l'espai temporal per una entrada esglaó, d'amplada V. Preneu condicions inicials nul·les. (Preneu els valors següents: R = 1 kΩ, L = 0.8 mH, C = 1 nF).

A l'espai de Laplace, un senyal esglaó d'amplada V ve donat per: $V_i = \frac{V}{s}$

Com que ens diuen que prenem condicions inicials nul·les, podem fer servir directament la funció de transferència. Per tant, el senyal de sortida a l'espai de Laplace serà:

$$V_o = H(s) \cdot V_i = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \frac{V}{s} = V \cdot \frac{s}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Per obtenir el senyal a l'espai temps, haurem de antitransformar aquesta expressió. Com que *V* és una constant, haurem d'antitransformar:

$$\frac{s}{s^2 + s\cdot\frac{1}{R\cdot C} + \frac{1}{L\cdot C}}$$

Per això, seguirem el mètode general que s'ha explicat a classe. Per tant, el primer pas és trobar les arrels (pols) del polinomi del denominador (treballem amb units del SI):

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-\frac{1}{R\cdot C} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2\cdot C^2} - 4\cdot\frac{1}{L\cdot C}}}{2} = \frac{-10^6 \pm \sqrt{10^{12} - 5\cdot 10^{12}}}{2} = \frac{-10^6 \pm \sqrt{-4\cdot 10^{12}}}{2}$$

Per tant, les dues solucions són:

$$s_1 = -0.5\cdot 10^6 + j\cdot 10^6$$
$$s_2 = -0.5\cdot 10^6 - j\cdot 10^6$$

D'aquesta forma, el polinomi del denominador es pot posar com: $(s - s_1)\cdot(s - s_2)$

El segon pas consisteix en obtenir la funció a transformar en la forma de suma de termes $1/(s+a)$, ja que això es pot antitransformar fàcilment. Per tant, intentem fer:

$$F(s) = \frac{s}{(s - s_1)\cdot(s - s_2)} = \frac{A}{(s - s_1)} + \frac{B}{(s - s_2)}$$

Només hem d'obtenir *A* i *B*. I això ja s'ha vist a classe:

$$A = F(s)\cdot(s - s_1)\Big|_{s=s_1} = \frac{s}{(s - s_1)\cdot(s - s_2)}\cdot(s - s_1)\Bigg|_{s=s_1} = \frac{s_1}{(s_1 - s_2)} = \frac{-0.5\cdot 10^6 + j\cdot 10^6}{(2\cdot j\cdot 10^6)} = 0.5 + j\cdot 0.25$$

(aquí hem utilitzat dues relacions relacionades amb j:

$$j\cdot j = -1$$
$$\frac{1}{j} = -j$$

La primera relació és evident sabent que $j = \sqrt{-1}$, mentre que la segona és fàcil de veure (multipliqueu i dividiu per *j*).
)

Fent el mateix per B:

$$B = F(s)\cdot(s-s_2)\big|_{s=s_2} = \frac{s}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)}\cdot(s-s_2)\Bigg|_{s=s_2} = \frac{s_2}{(s_2-s_1)} = \frac{-0.5\cdot10^6 - j\cdot10^6}{(-2\cdot j\cdot10^6)} = 0.5 - j\cdot0.25$$

Per tant, el nostre senyal de sortida a l'espai de Laplace queda com:

$$V_o(s) = V\cdot\left(\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}\right) = V\cdot\left(\frac{0.5+j\cdot0.25}{s-\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)}+\frac{0.5-j\cdot0.25}{s-\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)}\right)$$

Ara podem fer l'antitransformació:

$$V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot\left(\left(0.5+j\cdot0.25\right)\cdot e^{\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)t}+\left(0.5-j\cdot0.25\right)\cdot e^{\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)t}\right)$$

Hem de desenvolupar aquesta expressió per tal d'eliminar els termes amb *j*. A l'espai temporal, el senyal ha de ser real (no complexe):

$$V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot\left(0.5\cdot\left(e^{\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)t}+e^{\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)t}\right)+j\cdot0.25\cdot\left(e^{\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)t}-e^{\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)t}\right)\right)=$$
$$= u(t)\cdot V\cdot\left(0.5\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\left(e^{j\cdot10^6\cdot t}+e^{-j\cdot10^6\cdot t}\right)+j\cdot0.25\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\left(e^{j\cdot10^6\cdot t}-e^{-j\cdot10^6\cdot t}\right)\right)=$$

Ara fem ús de les següent relacions:

$$e^{j\cdot a} = \cos(a)+j\sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$

Per tant:

$$V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(0.5\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)+\cos\left(-10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(-10^6\cdot t\right)\right)+j\cdot0.25\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)-\cos\left(-10^6\cdot t\right)-j\cdot\sin\left(-10^6\cdot t\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot0.5\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)+\cos\left(10^6\cdot t\right)-j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)+j\cdot0.25\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)-\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(0.5\cdot2\cdot\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot0.25\cdot2\cdot j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)$$
$$\Rightarrow V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)-0.5\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)$$

Ara ja hem pogut posar l'expressió només en termes reals, i per tant ja hem acabat de resoldre aquest apartat.

VII. Processat Analògic del Senyal

VII.1. Procediment general de resolució

El procediment general proposat per resoldre circuits lineals (amb realimentació negativa) amb amplificadors operacionals és el següent:

a) Utilitzem la condició $V_{-} = V_{+}$.
b) En la zona lineal, l'amplificador és com un component lineal. Per tant, es poden utilitzar els mateixos principis aplicats a circuits amb components lineals: superposició, Thévenin, etc.
c) També pot aplicar-se Laplace.

VII.2. Problema 1

Tenim un micròfon que pretén mesurar el so dels ocells a la naturalesa. Aquest sensor ens dóna a la sortida senyals elèctrics sinusoïdals (corresponents als sons; realment és una suma d'aquests senyals sinusoïdals), en un rang màxim de 0V fins a +5 mV.

a) Dissenyeu una etapa de processat del senyal de sortida del sensor, de forma que tinguem senyals elèctrics en el rang de -5V fins a 5V.
b) Ens hem adonat que el que mesurem conté un alt nivell de soroll ambient. La raó és que els senyals corresponents als ocells són molt petits en comparació amb l'ambient. Una forma de reduir aquest soroll consisteix en restringir el rang de freqüències a les freqüències esperades pel cant del ocells. Aquest rang l'hem fixat entre 0 Hz i 20 kHz. Dissenyeu un filtre que elimini les freqüències no corresponents a aquest rang i que mantingui el mateix rang de tensió de l'apartat a).
c) Hi ha un ocell (l'electronicus informaticus) molt perillós que emet un so molt característic. Conté un component de senyal sinusoïdal amb una freqüència de 5.6 kHz. De les mesures amb el sistema anterior, hem vist que l'amplitud d'aquest senyal sol ser entre 0.1V i 0.5V. Penseu en un sistema d'alarma que avisés quan el nostre aparell ha captat aquest so tant característic.

Resolució:

a) Dissenyeu una etapa de processat del senyal de sortida del sensor, de forma que tinguem senyals elèctrics en el rang de -5V fins a 5V.

El primer que hem de fer és trobar les operacions matemàtiques que ens passin el rang de 0 – 5 mV, al rang de -5V - +5V. Veiem que una multiplicació únicament no és suficient. Però és evident que amb una multiplicació i una resta seran suficients.
La multiplicació ha de portar la diferència del primer rang (és a dir 5mV – 0V = 5 mV) a la diferència del segon rang (és a dir +5V – (-5V) = 10V). Per tant, això serà una factor 2000:

$$factor\ d'amplificació = \frac{10V}{5mV} = 2000$$

Ara només hem de portar els valors obtinguts amb aquesta amplificació al rang -5V fins a 5V. Veiem que multiplicar per 2000 el primer rang obtindríem el rang: 0V fins a 10V. Per tant, per obtenir el rang desitjat només hem de restar 5V. Hi ha altres opcions. Per exemple, primer podem amplificar per -2000, i com a segona etapa hauríem de sumar 5V.
En definitiva, necessitem una etapa d'amplificació seguida d'una altre etapa de resta. Això es pot aconseguir de diverses formes. Nosaltres farem la segona d'aquestes implementacions. Primer agafarem dos amplificadors inversor per obtenir una amplificació total de +2000. (Agafem dos amplificadors per què si agaféssim només un, la relació de les resistències de l'amplificador seria massa alta, i això sol portar problemes). Per exemple, podem utilitzar guanys de 50 i 40 pels dos amplificadors (guany total = (-50) · (-40) = 2000). Per aquest amplificador, això vol dir agafar:

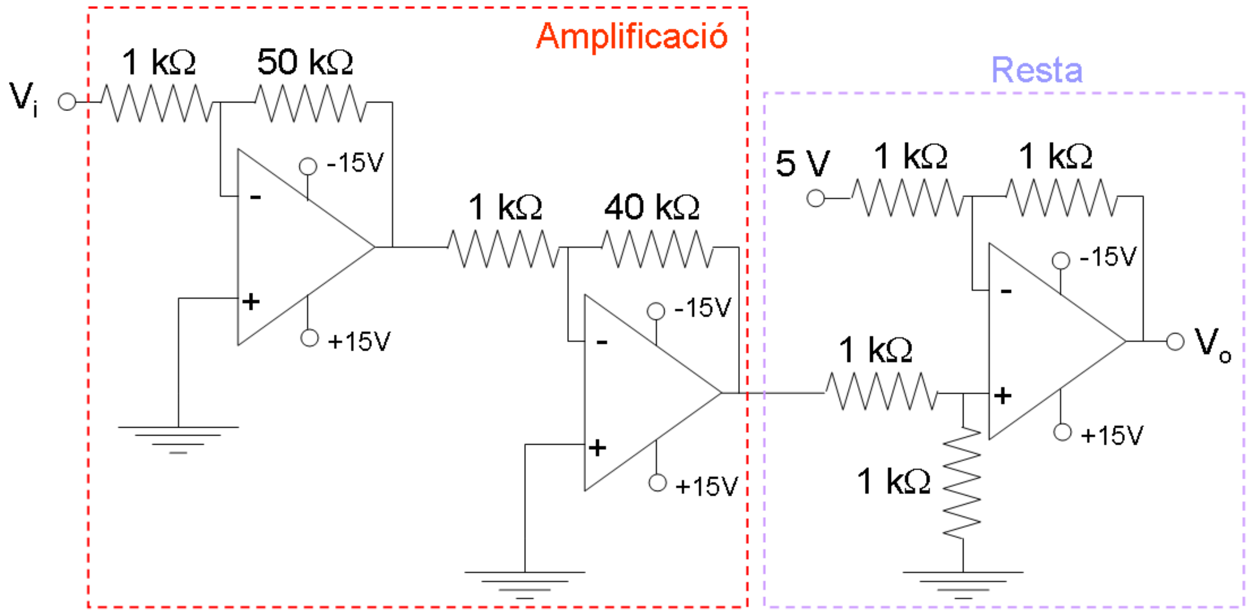
$$Amplicador\ 1: \quad \frac{R_2}{R_1} = 50$$

$$Amplicador\ 2: \quad \frac{R_4}{R_3} = 40$$

Per exemple, podem agafar $R_1 = R_3 = 1\ k\Omega$, $R_2 = 50\ k\Omega$ i $R_4 = 40\ k\Omega$.
Respecte l'alimentació dels amplificadors, ens hem de fixar que a la sortida del segon amplificador podrem tenir valors de fins 10V. Per tant, l'alimentació ha de ser com a mínim de 10V. Per curar-nos en salut, agafarem una alimentació de 15V.

Ara només manca l'etapa de resta. I per això agafem el bloc de processament analògic corresponent. Agafarem totes les resistències iguals (per exemple 1 kΩ) i posarem com a font de tensió per la resta una tensió de 5V.

Resumint, el circuit de processat analògic del senyal quedarà com:



b) Ens hem adonat que el que mesurem conté un alt nivell de soroll ambient. La raó és que els senyals corresponents als ocells són molt petits en comparació amb l'ambient. Una forma de reduir aquest soroll consisteix en restringir el rang de freqüències a les freqüències esperades pel cant del ocells. Aquest rang l'hem fixat entre 0 Hz i 20 kHz. Dissenyeu un filtre que elimini les freqüències no corresponents a aquest rang i que mantingui el mateix rang de tensió de l'apartat a).

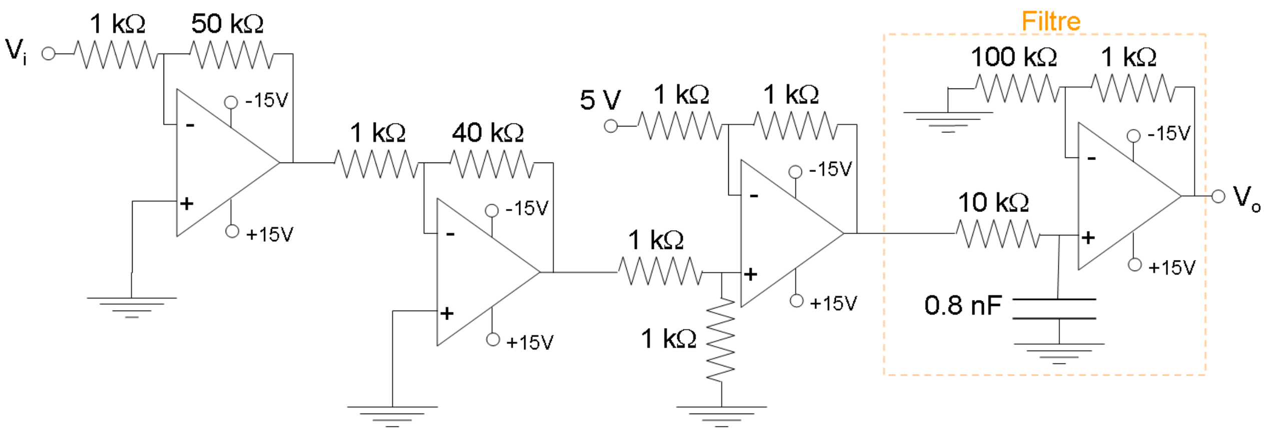
Clarament hem de aplicar un filtre passa-baixos, de tal forma que a la sortida només pugui haver contribució del senyals sinusoïdals amb freqüències baixes (de 0 fins a 20 kHz), i eliminem a la sortida qualsevol component sinusoïdal de freqüència major. Encara que, a més, es podria aplicar un guany d'amplitud, ens demanen en aquest apartat que es mantingui el mateix rang de tensió. Per tant, agafarem R_2 molt menor que R_1.
Per tant, el més senzill consistiria en agafar un filtre passa-baixos de primer ordre (ja vist a classe) i amb guany 1. Agafem la cel·la de Sallen & Key corresponent. L'agafarem de tal forma que la freqüència de tall estigui als 20 kHz. Per tant:

$$w_c = 2 \cdot \pi \cdot f_c = 125.66\, krad/s = \frac{1}{R \cdot C}$$

Per tant, si agafem una resistència de 10kΩ, necessitarem una capacitat de:

$$C = \frac{1}{R \cdot 125.66\, krad/s} \cong 0.8\, nF$$

Per tant, el circuit total ens quedaria ara com:



c) Hi ha un ocell (l'electronicus informaticus) molt perillós que emet un so molt característic. Conté un component de senyal sinusoïdal amb una freqüència de 5.6 kHz. De les mesures amb el sistema anterior, hem vist que l'amplitud d'aquest senyal sol ser entre 0.1V i 0.5V. Penseu en un sistema d'alarma que avisés quan el nostre aparell ha captat aquest so tant característic.

Com sempre, poden haver moltes formes de realitzar aquest sistema. Nosaltres farem una d'aquestes possibilitats.

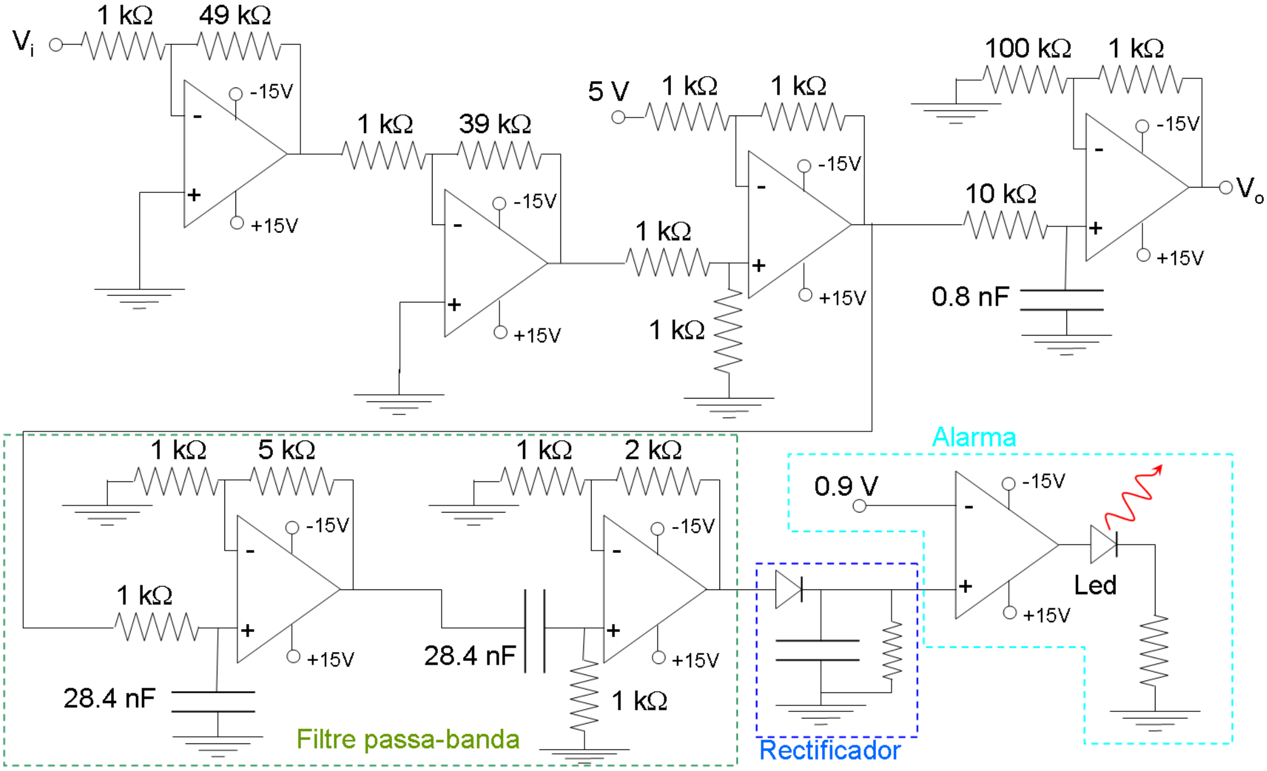
En primer lloc, sembla lògic haver d'obtenir, d'alguna forma, només el senyal sinusoïdal a la freqüència de 5.6 kHz. Encara que és molt difícil agafar només aquesta sinusoïdal, una forma de fer-ho es aplicar un filtre passa-banda que, encara que agafi una sèrie de freqüències (no una sola), és una operació similar. Això s'aconsegueix fàcilment amb la combinació en sèrie enter un filtre passa-alts i un altre passa-baixos. Nosaltres farem la solució més senzilla d'agafar cel·les de Sallen & Key d'ordre 1 (tot i que per millorar el sistema hauríem d'agafar ordres majors).
Per no complicar massa la solució, agafarem les freqüències de tall dels dos filtres a la mateixa freqüència de 5.6 kHz. Per la freqüència de tall, el guany es redueix per $1/2^{0.5}$. Per tant, després de travessar els dos filtres, l'amplitud per aquesta freqüència es reduirà en un factor $(1/2^{0.5})\cdot(1/2^{0.5}) = 0.5$. Si agafem una resistència de 1 kΩ, el valor de C serà per tots dos casos:

$$w_c = 2\cdot\pi\cdot f_c = \frac{1}{R\cdot C} \quad \Rightarrow C = \frac{1}{R\cdot 2\cdot\pi\cdot 5.6\cdot 10^3} = 28.4\; nF$$

Podem fer ús també de l'amplificació de les cel·les per tal d'obtenir un senyal més gran que el real. Com que el màxim esperat es de 0.5 V, podem fer, per exemple, que s'amplifiqui un factor 9, fins a un màxim de 4.5 d'amplitud. I afegint un factor addicional per compensar els 0.5 anteriors, farem una multiplicació total de 9·2 = 18. Farem una etapa amb guany 6 i altre amb 3.

Una vegada tenim una sortida amb la sinusoïdal desitjada, el que podem fer ara és utilitzar el sistema d'alarma senzill (utilitzant un comparador amb un AO) que s'ha vist a una de les pràctiques (utilitzant leds). Però per això, primer hem d'obtenir un senyal continu a partir d'aquest sinusoïdal. I això ho podem fer amb els rectificadores fets amb díodes.
La tensió d'alarma la podem calcular com el valor d'amplitud mínim del senyal, multiplicat per tots els guanys. És a dir: 0.1V·0.5·18 = 0.9V

Per tant, el sistema total podria quedar tal com això:



Vi
1 kΩ
49 kΩ
-15V
+15V
1 kΩ
39 kΩ
-15V
+15V
5 V
1 kΩ
1 kΩ
-15V
+15V
1 kΩ
1 kΩ
100 kΩ
1 kΩ
-15V
+15V
10 kΩ
0.8 nF
Vo
1 kΩ
5 kΩ
-15V
+15V
1 kΩ
28.4 nF
1 kΩ
2 kΩ
-15V
+15V
28.4 nF
1 kΩ
Filtre passa-banda
Alarma
0.9 V
-15V
+15V
Led
Rectificador