SUR LE THEOREME LOCAL DES CYCLES INVARIANTS

F. Guillén et V. Navarro Aznar*

Introduction.

Si on considère une famille de variétés projectives complexes non singulières, c'est un fait aujourd'hui bien connu que les possibles variétés singulières vers lesquelles peut dégénerer cette famille doivent vérifier certaines contraintes, parmi lesquelles une importante relation entre la cohomologie de la fibre singulière, la cohomologie de la fibre générique et la monodromie de la famille, qui est precisée par le théorème local des cycles invariants prouvé par Clemens, Deligne et Steenbrink ([1], [4], [13]) : tous les cocycles de la fibre générique qui sont invariants par la monodromie autour d'une fibre singulière proviennent par spécialisation de la cohomologie de cette fibre singulière.

Le but de ce travail est de donner une preuve de ce théorème en suivant de près l'argumentation de [13] qui se base sur l'utilisation des structures de Hodge mixtes qui y sont présentes. Concrètement, nous prouverons que la filtration par le poids de la structure de Hodge mixte construite par Steenbrink sur la cohomologie de la fibre limite coïncide avec la filtration définie par la monodromie, d'où on déduit aisément le théorème des cycles invariants par un argument de Deligne. Or, dans notre démonstration, pour prouver la coïncidence de ces deux filtrations, nous utiliserons aussi un résultat récent de Deligne-Saito sur les modules de Hodge-Lefschetz polarisés ([5], [11]). Ceci nous permettra, comme dans [11], de compléter la preuve de Steenbrink qui était insuffisante, comme l'avait remarqué El Zein ([6]).

Les principaux ingrédients de la démonstration que nous présentons ici du théorème des cycles invariants sont, comme nous venons de dire, dûs à Deligne, Steenbrink et Saito, et notre seule contribution dans cet article est de prouver que le terme E_1 de la suite spectrale de Steenbrink est un module de Hodge-Lefschetz polarisé au sens de Deligne, ce qui rend possible l'application du résultat de [5]. Notre dernier objectif a

*Ce travail a été subventionné par le projet CICYT PB86-0348

été de donner une vue d'ensemble des arguments qui conduisent à ce théorème local des cycles invariants.

L'organisation de l'article est la suivante. Dans le § 1, nous étudions la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré $(\Omega^*_X(\log Y), W)$, pour un diviseur à croissements normaux d'une variété complexe compacte, et nous prouvons que la différentielle d_1 de cette suite spectrale est l'opposé du morphisme de Gysin. Au § 2, on rappelle la suite spectrale associée à la filtration par le poids définie par Steenbrink ([13]) sur le complexe des cycles proches d'un morphisme propre dont la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux, et nous explicitons la différentielle d_1 via le morphisme résidu. Au le § 3, nous étudions le cas où la fibre spéciale est kählerienne, et dans ce cas nous pouvons définir une polarisation sur le terme E_1 de la suite spectrale de Steenbrink. Le § 4 contient la théorie de Deligne-Saito des modules bigradués de Hodge-Lefschetz polarisés différentiels, et dans le § 5, on applique cette théorie au terme E_1 construit antérieurement, ce qui permet d'obtenir finalement le théorème local des cycles invariants.

Nous remercions profondément P. Deligne et M. Saito pour nous avoir aimablement communiqué leurs résultats non publiés et nous sommes reconnaissants à J. Steenbrink de l'intérêt qu'il a montré pour ce travail.

1. Le morphisme de Gysin et la suite spectrale de la filtration par le poids du complexe logarithmique.

(1.1) Soit X une variété différentiable compacte, orientée et de dimension pure m, nous noterons

$$\int_X : H^m(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

le morphisme trace défini par le $\frown$-produit avec la classe fondamentale de X.

Si X est une variété complexe de dimension n, un choix en $\mathbf{C}$ de $\sqrt{-1}$ définit une orientation de X, et le morphisme trace

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int_X : H^{2n}(X, \mathbf{Z})(n) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

ne dépend pas du choix de $\sqrt{-1}$.

(1.2) Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de variétés complexes compactes X et Y de dimension pure n et m , respectivement. Le morphisme

$$f^* : H^*(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^*(Y, \mathbf{Z})$$

induit, par la dualité de Poincaré, un morphisme de Gysin

$$f_! : H^*(Y, \mathbf{Z}[2m])(m) \longrightarrow H^*(X, \mathbf{Z}[2n])(n)$$

qui est défini par

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int_X f_!(\alpha) \smile \beta = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^m \int_Y \alpha \smile f^*(\beta)$$

pour tout $\alpha \in H^q(Y, \mathbf{Z}[2m])(m)$, $\beta \in H^{-q}(X, \mathbf{Z})$.

(1.3) Soit X une variété complexe compacte de dimension pure n et soit Y un diviseur à croisements normaux dans X , dont les composantes irréductibles $Y_1, \ldots, Y_m$ soient non-singulières.

Notons $\widetilde{Y}^{(0)} = X$; si $I = (i_1, \ldots, i_r)$, $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m$, est un ensemble d'index, posons $Y_I = Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_r}$, $| I |= r$ et

$$\widetilde{Y}^{(r)} = \coprod_{|I|=r} Y_I \, .$$

On a un morphisme évident

$$\delta_1^{(1)} : \widetilde{Y}^{(1)} \longrightarrow \widetilde{Y}^{(0)}$$

et, pour tout $r > 1$, $1 \le k \le r$, un morphisme

$$\delta_k^{(r)} : \widetilde{Y}^{(r)} \longrightarrow \widetilde{Y}^{(r-1)}$$

défini par les inclusions

$$\delta_k^I : Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_r} \longrightarrow Y_{i_1} \cap \ldots \cap \widehat{Y}_{i_k} \cap \ldots \cap Y_{i_r} \, .$$

Les variétés $\{\widetilde{Y}^{(r)}\}_{r \ge 0}$, avec les morphismes $\{\delta_k^{(r)}\}_{r \ge 1\,, 1 \le k \le r}$, définissent une variété complexe simpliciale stricte augmentée. On obtient donc un $\mathbf{Z}$-module gradué cosimplicial strict augmenté $(H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}), \rho_{\cdot}^{(r+1)})_{r \ge 0}$, où les morphismes face

$$\rho_k^{(r)} : H^*(\widetilde{Y}^{(r-1)}, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z})$$

sont définis par $\rho_k^{(r)} = (\delta_k^{(r)})^*$, $r \ge 1$, $1 \le k \le r$, et dualement un $\mathbf{Z}$-module gradué simplicial strict augmenté $(H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}[2n-2r])(n-r), \gamma_{\cdot}^{(r+1)})_{r \ge 0}$, où les morphismes face

$$\gamma_k^{(r)} : H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}[2n-2r])(n-r) \longrightarrow H^*(\widetilde{Y}^{(r-1)}, \mathbf{Z}[2n-2r+2])(n-r+1)$$

sont définis par $\gamma_k^{(r)} = (\delta_k^{(r)})_! \ , \ r \geq 1 \, , \ 1 \leq k \leq r$.

De ces objets simpliciaux on obtient les complexes de $\mathbf{Z}$-modules gradués associés: le complexe de cochaînes

$$(H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}), \rho^{(r+1)})_{r\geq 0} \, , \quad \rho^{(r+1)} = \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k-1} \rho_k^{(r+1)} \, ,$$

et le complexe de chaînes

$$(H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}[2n-2r])(n-r), \gamma^{(r+1)})_{r\geq 0} \, , \quad \gamma^{(r+1)} = \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k-1} \gamma_k^{(r+1)} \, .$$

Ces complexes sont duals au sens suivant: si $\alpha \in H^q(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}[2n-2r])(n-r)$, et $\beta \in H^{-q}(\widetilde{Y}^{(r-1)}, \mathbf{Z})$, alors

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r+1} \int_{\widetilde{Y}^{(r-1)}} \gamma^{(r)}(\alpha) \smile \beta = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r} \int_{\widetilde{Y}^{(r)}} \alpha \smile \rho^{(r)}(\beta) \, .$$

(1.4) Si X n'est plus compacte, mais il existe un entier $r_0 > 0$ tel que $\widetilde{Y}^{(r_0)}$ est compacte, la construction du morphisme de Gysin est encore valable sur le complexe r_0-tronqué: le complexe de chaînes

$$(H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}[2n-2r])(n-r), \gamma^{(r+1)})_{r\geq r_0}$$

et le complexe de cochaînes

$$(H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Z}), \rho^{(r+1)})_{r\geq r_0}$$

sont duals.

(1.5) Sous les hypothèses de (1.3), posons $U = X - Y$ et notons $j : U \longrightarrow X$ le morphisme d'inclusion.

Rappelons que Deligne a introduit dans [3] un diagramme de complexes de faisceaux sur X

$$K = ((K_{\mathbf{Q}}, W_{\mathbf{Q}}), (K_{\mathbf{C}}, W_{\mathbf{C}}, F))$$

qui, si X est kählerienne, munit la cohomologie de U d'une structure de Hodge mixte. Le diagramme K est défini par

$$(K_{\mathbf{Q}}, W_{\mathbf{Q}}) = (\mathbf{R}j_*\mathbf{Q}_U, \tau_{\leq}) \ , \ (K_{\mathbf{C}}, W_{\mathbf{C}}, F) = (\Omega_X^*(\log Y), W, F) \ ,$$

avec un quasi-isomorphisme filtré

$$\lambda : (K_{\mathbf{Q}}, W_{\mathbf{Q}}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \longleftrightarrow (K_{\mathbf{C}}, W_{\mathbf{C}}) \ .$$

Le morphisme λ induit un isomorphisme des suites spectrales correspondantes

$$E_s(\lambda) : ({}_{\mathbf{Q}}E_s^{*,*}, d_s) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \longrightarrow ({}_{\mathbf{C}}E_s^{*,*}, d_s) \ ,$$

pour tout $s \geq 1$, où

$$E_1^{-r,q+r} = H^q(X, \mathrm{Gr}_r^W K) \Longrightarrow H^q(X, K) \ .$$

(1.6) Pour tout $r \geq 0$, nous considérons le complexe décalé $\Omega^*_{\widetilde{Y}^{(r)}}[-r]$ muni de la différentielle $d_{[-r]} = (-1)^{-r} d$.

Rappelons qu'il existe un morphisme de complexes de faisceaux

$$\mathrm{Rés}_r : \mathrm{Gr}_r^W \Omega_X^*(\log Y) \longrightarrow \Omega^*_{\widetilde{Y}^{(r)}} \ [-r]$$

défini de la façon suivante. Soit $z_i = 0$ une équation locale de Y_i , $1 \leq i \leq m$, et posons $\left(\frac{d\,z}{z}\right)_I = \frac{d\,z_{i_r}}{z_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{d\,z_{i_r}}{z_{i_r}}$ pour tout ensemble d'index $I = (i_1, \ldots, i_r), 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$. Si ω est une section locale de $W_r\Omega_X^q(\log Y)$, on écrit ω comme

$$\omega = \left(\frac{d\,z}{z}\right)_I \wedge \alpha + \beta \,,$$

où α et β sont des sections locales de Ω_X^{q-r} et $\Omega_X^q(\log Y)$ respectivement, et β ne contient pas $\left(\frac{d\,z}{z}\right)_I$. Alors la composante $\mathrm{Rés}_I\omega$ de $\mathrm{Rés}_r\omega$ dans le facteur $\Omega^{q-r}_{Y_I}$ est

$$\mathrm{Rés}_I \omega = \alpha \ |_{Y_I} \ \ .$$

Le morphisme résidu $\mathrm{Rés}_r$ est un isomorphisme de complexes de faisceaux.

Remarque. Dans la littérature, on trouve parfois (voir [3], [6], [7], [10], [13]) le morphisme résidu défini par

$$\widetilde{\mathrm{Rés}}_I \left(\alpha \wedge \left(\frac{d\,z}{z}\right)_I + \beta \right) = \alpha \ |_{Y_I} \ ,$$

qui diffère par le signe du morphisme $\mathrm{Rés}_r$ que nous utiliserons: $\widetilde{\mathrm{Rés}}_r = (-1)^{r(q-r)} \mathrm{Rés}_r$.

(1.7) Le morphisme résidu est défini aussi au niveau rationnel: il existe un morphisme dans la catégorie dérivée de $\mathbf{Q}_X$-Modules

$$\mathrm{Rés}_r^{\mathbf{Q}} : \mathrm{Gr}_r^{W_{\mathbf{Q}}} K_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{Q}_{\widetilde{Y}^{(r)}}\,[-r](-r)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gr}_r^{W_{\mathbf{Q}}} K_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathrm{Rés}_r^{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{C}} & \mathbf{Q}_{\widetilde{Y}^{(r)}}\,[-r](-r) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \\
{\scriptstyle \mathrm{Gr}_r \lambda}\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Gr}_r^{W_{\mathbf{C}}} K_{\mathbf{C}} & \xrightarrow{\mathrm{Rés}_r} & \Omega^*_{\widetilde{Y}^{(r)}}\,[-r]
\end{array}$$

est commutatif, dans la catégorie dérivée de $\mathbf{C}_X$-Modules ([3]).

Ce diagramme induit un diagramme commutatif d'isomorphismes des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels d'hypercohomologie:

$$\begin{array}{ccc}
{}_{\mathbf{Q}}E_1^{-r,q+r} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathrm{Rés}_r^{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}} & H^q(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{C}\,[-r]) \\
{\scriptstyle E_1(\lambda)}\downarrow & & \downarrow \\
{}_{\mathbf{C}}E_1^{-r,q+r} & \xrightarrow{\mathrm{Rés}_r} & H^q(\widetilde{Y}^{(r)}, \Omega^*_{\widetilde{Y}^{(r)}}\,[-r])\,.
\end{array}$$

Le résultat suivant explicite la différentielle d_1 de la suite spectrale de (1.5) en terme du morphisme résidu.

(1.8) Proposition (cf. [7], (5.21))**.** *Pour tout* $r \geq 1$ *, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
{}_{\mathbf{Q}}E_1^{-r,q+r} & \xrightarrow{\mathrm{Rés}_r^{\mathbf{Q}}} & H^q(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{Q}\,[-r])(-r) \\
\downarrow{\scriptstyle d_1} & & \downarrow{\scriptstyle -\gamma^{(r)}} \\
{}_{\mathbf{Q}}E_1^{-r+1,q+r} & \xrightarrow{\mathrm{Rés}_{r-1}^{\mathbf{Q}}} & H^{q+1}(\widetilde{Y}^{(r-1)}, \mathbf{Q}\,[-r+1])(-r+1)
\end{array}$$

est commutatif.

Preuve. Il suffit de prouver le résultat sur $\mathbf{C}$, car le foncteur $\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$ est fidèle.

Soient $I = (i_1, \ldots, i_r)$ un ensemble d'index, $\alpha \in H^{q-r}(Y_I, \Omega^*_{Y_I})$. Soit $\omega \in {}_{\mathbf{C}}E_1^{-r,q+r}$ tel que $\mathrm{Rés}_r\,\omega = \alpha$. On représente la classe ω par une forme différentielle ω sur X , C^∞ sur U avec des pôles logarithmiques de poids r le long de Y_I et telle que le poids de $d\omega$ est $r-1$. Alors $d_1\,\omega$ est la classe de $d\omega$ dans $E_1^{-r+1,q+r}$.

Puisque $\gamma^{(r)}(\alpha) = \sum_k (-1)^{k-1}\gamma_k^I \alpha$ où $\gamma_k^I = (\delta_k^I)_!$, il suffit de prouver que, si $J = (i_1, \ldots, \widehat{i_k}, \ldots, i_r)$, on a

$$\text{Rés}_J \, d\,\omega = -(-1)^{k-1}\gamma_k^I \alpha \ ,$$

ce qui d'après (1.2) équivaut à la relation

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r+1} \int_{Y_J} \text{Rés}_J d\,\omega \wedge \beta = -\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r} \int_{Y_I} (-1)^{k-1} \alpha \wedge \rho_k^I(\beta)$$

pour tout $\beta \in H^{2n-r-q}(Y_J, \Omega^*_{Y_J})$.

Pour ceci remarquons d'abord que, si $Y(J)$ dénote le diviseur de Y_J induit par Y, on a un morphisme de complexes de faisceaux

$$\text{Rés}_J : \Omega^*_X(\log Y) \longrightarrow \Omega^*_{Y_J}(\log Y(J))\,[-r+1]$$

défini localement par

$$\text{Rés}_J \left(\left(\frac{d\,z}{z} \right)_J \wedge \alpha + \beta \right) = \alpha \,|_{Y_J} \ ,$$

où β ne contient pas $\left(\dfrac{d\,z}{z} \right)_J$.

On a aussi un morphisme de complexes de faisceaux

$$\text{Rés}_I^J : \Omega^*_{Y_J}(\log Y(J)) \longrightarrow \Omega^*_{Y_I}(\log Y(I))\,[-1]$$

défini localement par

$$\text{Rés}_I^J \left(\frac{d\,z_{i_k}}{z_{i_k}} \wedge \alpha + \beta \right) = \alpha \,|_{Y_I} \ ,$$

où β ne contient pas $\dfrac{d\,z_{i_k}}{z_{i_k}}$, et on a

$$\text{Rés}_I^J \text{Rés}_J = (-1)^{r-k} \text{Rés}_I \ ,$$

car $d\,z_I = (-1)^{r-k} d\,z_J \wedge d\,z_{i_k}$.

Rappelons maintenant que, d'après le théorème des résidus de la théorie de Leray [9], si V est une variété complexe compacte de dimension pure N, W est un diviseur lisse de V, et η est une forme différentielle C^∞ sur $V - W$, avec des pôles logarithmiques le long de W et telle que $d\,\eta$ est régulière sur tout V, alors on a

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{N} \int_V d\,\eta = -\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{N-1} \int_W \text{Rés}\,\eta \ .$$

Il résulte donc que, pour $V = Y_J$, $W = Y_I$, $\eta = \text{Rés}_J\omega \wedge \beta$, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r+1}\int_{Y_J}\text{Rés}_J d\,\omega\wedge\beta &= (-1)^{r-1}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r+1}\int_{Y_J} d(\text{Rés}_J\omega\wedge\beta)\\ &= -(-1)^{r-1}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r}\int_{Y_I}\text{Rés}_I^J(\text{Rés}_J\omega\wedge\beta)\\ &= -(-1)^{r-1}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-r}\int_{Y_I}(-1)^{r-k}\text{Rés}_I\omega\wedge\rho_k^I(\beta)\ ,\end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.

Remarque. Avec la définition du résidu $\widetilde{\text{Rés}}$, donnée dans la remarque de (1.6), on a $\widetilde{\text{Rés}}_{r-1}\circ d_1 = -(-1)^{q-r}\gamma^{(r)}\circ\widetilde{\text{Rés}}_r$, sur $E_1^{-r,q+r}$. Ceci est en acord avec [7], qui donne $d_1 = \pm\gamma$, mais interpréter la phrase "la différentielle d_1 se déduit des morphismes de Gysin" de [7], p. 80, comme signifiant $d_1 = \gamma$ n'est pas correct, bien que dans d'autres situations ce signe est sans importance et on peut se dispenser d'être plus précis (cf. [3], [6], [13]).

(1.9) Si on suppose seulement que $\widetilde{Y}^{(r)}$ est compacte pour $r \geq r_0$ (voir (1.4)), le résultat antérieur est valable pour $r-1 \geq r_0$. Nous utiliserons ce résultat pour $r_0 = 1$ dans (2.7).

2. La suite spectrale de la filtration par le poids du complexe des cycles proches.

(2.1) Soit X une variété complexe de dimension pure $n+1$, et soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre sur le disque unité S de $\mathbf{C}$, lisse en dehors de $Y = f^{-1}(0)$, et tel que Y_{red} soit une réunion de diviseurs lisses $Y_1, \ldots, Y_m$ de X, qui se coupent transversalement. Soit $X^* = X - Y$, $S^* = S - \{0\}$, $p : \widetilde{S}^* \longrightarrow S^*$ un revêtement universel et soit $\widetilde{X}^* = X \times_S \widetilde{S}^*$. Notons $\widetilde{j} : \widetilde{X}^* \longrightarrow X$, $j : X^* \longrightarrow X$, et $i : Y \longrightarrow X$ les morphismes naturels. On a donc le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}\widetilde{X}^* \arrow[r] \arrow[d] & X^* \arrow[r, "j"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & Y \arrow[l, "i"'] \arrow[d]\\ \widetilde{S}^* \arrow[r, "p"] & S^* \arrow[r] & S & \{0\} \arrow[l]\end{tikzcd}\ .$$

Nous utiliserons les notations de (1.3), et supposerons que $\widetilde{S}^*$ est le demi-plan $\{u \in \mathbf{C}\,;\, \mathrm{Re}\, u > 0\}$ et que $p(u) = e^u$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbf{Z}$-Modules sur X . On définit, d'après [2], le complexe des cycles proches par

$$\mathbf{R}\psi^*(\mathcal{F}) = i^{-1}\mathbf{R}\widetilde{j}_*\widetilde{j}^*\mathcal{F}\ ,$$

muni de la monodromie T induite par la translation $u \longmapsto u + 2\pi\sqrt{-1}$ de $\widetilde{S}^*$.

(2.2) Par la suite, nous supposerons que Y est réduit, bien que l'on pourrait aussi démontrer les résultats principaux de ce travail sans ces hypothèses en utilisant, par exemple, le théorème de réduction semi-stable (voir [7], cf. [14] et [10]).

Posons

$$\psi^*(\mathbf{C})_1 = \mathbf{C}[u] \otimes_{\mathbf{C}} \Omega_X^*(\log Y) = \sum_{p \geq 0} \mathbf{C}u^p \otimes_{\mathbf{C}} \Omega_X^*(\log Y)\,,$$

avec $d(u \otimes 1) = 1 \otimes \dfrac{d\,f}{f}$, qu'on identifie à la sous-algèbre différentielle graduée de $\widetilde{j}_*\Omega^*_{\widetilde{X}^*}$ engendrée par $\Omega_X^*(\log Y)$ et u . D'après Deligne ([2]), la cohomologie $\mathbf{H}^*(Y, \psi^*(\mathbf{C})_1)$ est isomorphe à $\mathbf{H}^*(Y, \mathbf{R}\psi^*(\mathbf{C}))$, car la monodromie est unipotente, et donc à $H^*(\widetilde{X}^*, \mathbf{C})$.

La monodromie induite sur $\psi^*(\mathbf{C})_1$,

$$T : \psi^*(\mathbf{C})_1 \longrightarrow \psi^*(\mathbf{C})_1\,,$$

est telle que

$$T(u^p \otimes \omega) = (u + 2\pi\sqrt{-1})^p \otimes \omega\ .$$

On définit $N = \dfrac{\log T}{2\pi\sqrt{-1}}$, qui ne dépend pas du choix de $\sqrt{-1}$ et vérifie

$$N\left(\frac{u^p}{p!} \otimes \omega\right) = \frac{u^{p-1}}{(p-1)!} \otimes \omega\,, \quad p \geq 0\,.$$

(2.3) Le complexe $\psi^*(\mathbf{C})_1$, dont on vient de rappeler la définition, est le complexe simple du complexe double $\psi(\mathbf{C})_1^{**}$ défini par

$$\psi(\mathbf{C})_1^{-p,q} = \mathbf{C}u^p \otimes_{\mathbf{C}} \Omega_X^{q-p}(\log Y)\ , \quad p \geq 0\,,$$

avec les différentielles

$$d' : \psi(\mathbf{C})_1^{-p,q} \longrightarrow \psi(\mathbf{C})_1^{-p+1,q}\ ,$$
$$d'' : \psi(\mathbf{C})_1^{-p,q} \longrightarrow \psi(\mathbf{C})_1^{-p,q+1}\ ,$$

données par

$$d'(u^p \otimes \omega) = pu^{p-1} \otimes \frac{d\,f}{f} \wedge \omega\,,$$
$$d''(u^p \otimes \omega) = u^p \otimes d\,\omega\;.$$

Le morphisme N est un morphisme de bidegré $(1,-1)$ et on a $[N,d'] = 0$ et $[N,d''] = 0$.

Pour simplifier les notations, nous écrirons $u^{[p]} = \dfrac{u^p}{p!}$ et $u_{[p]} = (-1)^{p-1}(p-1)!u^{-p}$ pour $p \geq 0$. Avec ces notations on a donc, pour tout $p \geq 0$,

$$N(u^{[p]} \otimes \omega) = u^{[p-1]} \otimes \omega\;,$$
$$d'(u^{[p]} \otimes \omega) = u^{[p-1]} \otimes \frac{d\,f}{f} \wedge \omega\;,$$
$$d''(u^{[p]} \otimes \omega) = u^{[p]} \otimes d\,\omega\;.$$

(2.4) Dans [13], Steenbrink a introduit un complexe double filtré de faisceaux sur Y (A^{**}, W) tel que

$$A^{pq} = \mathbf{C}u_{[p+1]} \otimes_{\mathbf{C}} \Omega_X^{p+q+1}(\log Y)/_{W_p\Omega_X^{p+q+1}(\log Y)}\;, \quad p \geq 0\,,$$

avec les différentielles

$$d' : A^{pq} \longrightarrow A^{p+1,q}\;,$$
$$d'' : A^{pq} \longrightarrow A^{p,q+1}\;,$$

définies par

$$d'(u_{[p+1]} \otimes \omega) = u_{[p+2]} \otimes \frac{d\,f}{f} \wedge \omega\;,$$
$$d''(u_{[p+1]} \otimes \omega) = u_{[p+1]} \otimes d\,\omega\;,$$

et la filtration W définie par

$$W_r A^{pq} = \mathbf{C}u_{[p+1]} \otimes_{\mathbf{C}} W_{r+2p+1}\Omega_X^{p+q+1}(\log Y)/_{W_p\Omega_X^{p+q+1}(\log Y)}\,.$$

Puisque $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$, A^{**} est un complexe double et la différentielle totale sur le complexe simple associé $A^* = s^*(A^{*,*})$ est définie par $d = d' + d''$.

Les différentielles d' et d'' vérifient $d'W_r \subset W_{r-1}$ et $d''W_r \subset W_r$, d'où il résulte une décomposition du gradué associé en somme directe de complexes:

$$Gr_r^W A^* \cong \bigoplus_{k\geq 0,-r} \mathbf{C}u_{[k+1]} \otimes_{\mathbf{C}} Gr^W_{r+2k+1}\Omega_X^{*+1}(\log Y)\ .$$

Le morphisme résidu induit donc un isomorphisme de complexes

$$\text{Rés} : Gr_r^W A^* \longrightarrow \bigoplus_{k\geq 0,-r} \Omega^{*+1}_{\widetilde{Y}^{(r+2k+1)}}\,[-r-2k-1]$$

défini par $\text{Rés}\,(u_{[k+1]}\otimes\omega) = \text{Rés}_{r+2k+1}(\omega)$.

Sur le complexe double A^{**}, on a un morphisme de bidegré $(1,-1)$

$$N : A^{pq} \longrightarrow A^{p+1,q-1}$$

défini par

$$N(u_{[p+1]}\otimes\omega) = u_{[p+2]}\otimes\omega\,,$$

qui vérifie $[N,d'] = [N,d''] = 0$ donc, en particulier, N est un endomorphisme du complexe simple A^* et vérifie aussi $NW_r \subset W_{r-2}$.

(2.5) Lemme. *L'application* $\mu : \psi^*(\mathbf{C})_1 \longrightarrow A^*$ *définie par*

$$\mu(u^{[p]}\otimes\omega_p) = \begin{cases} 0 & si \quad p\neq 0 \\ (-1)^{|\omega_0|}u_{[1]}\otimes \dfrac{d\,f}{f}\wedge\omega_0 & si \quad p=0 \end{cases}$$

est un quasi-isomorphisme de complexes. Les morphismes $N\circ\mu$ *et* $\mu\circ N$ *sont homotopes par l'homotopie* $h : \psi(\mathbf{C})_1^{**} \longrightarrow A^{**}$ *de bidegré* $(0,-1)$ *définie par*

$$h(u^{[p]}\otimes\omega_p) = \begin{cases} 0 & si \quad p\neq 0 \\ (-1)^{|\omega_0|}u_{[1]}\otimes\omega_0 & si \quad p=0\ . \end{cases}$$

Preuve. Il est aisé de voir qu'on a $[\mu,d''] = [\mu,d'] = 0$, donc μ est un morphisme de complexes, et d'après [13] (cf. [10]), μ est un quasi-isomorphisme. Il résulte aisément qu'on a $h\circ d'' + d''\circ h = 0$ et $N\circ\mu - \mu\circ N = h\circ d' + d'\circ h$, donc h définit une homotopie de $N\circ\mu$ à $\mu\circ N$.

(2.6) La filtration W du complexe A^* induit en hypercohomologie la suite spectrale

$$E_1^{-r,q+r} = \mathbf{H}^q(Y, Gr_r^W A^*) \Longrightarrow H^q(Y,A^*)\ ,$$

dont la différentielle d_1 se décompose en $d_1' + d_1''$, où d_1' et d_1'' sont induites par les morphismes d' et d'' de A^{**} . D'après (2.4), on a un isomorphisme

$$\text{Rés} : E_1^{-r,q+r} \longrightarrow \bigoplus_{k\geq 0,-r} H^{q-r-2k}(\widetilde{Y}^{(r+2k+1)}, \mathbf{C})\,.$$

Posons

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{C}}^{i,j,k} &= H^{i+j-2k+n}(\widetilde{Y}^{(2k-i+1)}, \mathbf{C}) \quad && \text{si} \quad k \geq 0, i \\ &= 0 && \text{sinon,} \\ K_{\mathbf{C}}^{i,j} &= \bigoplus_k K_{\mathbf{C}}^{i,j,k}\,, \end{aligned}$$

et

$$K_{\mathbf{C}}^{**} = \bigoplus_{i,j} K_{\mathbf{C}}^{i,j}\,.$$

Le morphisme Rés induit donc un isomorphisme

$$E_1^{-r,q+r} \longrightarrow K_{\mathbf{C}}^{r,q-n}$$

pour tout r, q, et, par transport de structure, on a des morphismes

$$\begin{aligned} d' : K_{\mathbf{C}}^{i,j,k} &\longrightarrow K_{\mathbf{C}}^{i+1,j+1,k+1}\,, \\ d'' : K_{\mathbf{C}}^{i,j,k} &\longrightarrow K_{\mathbf{C}}^{i+1,j+1,k}\,, \\ N : K_{\mathbf{C}}^{i,j,k} &\longrightarrow K_{\mathbf{C}}^{i+2,j,k+1}\,. \end{aligned}$$

(2.7) Lemme. *Pour tout $\alpha \in K^{i,j,k}$ on a*

$$d'(\alpha) = \rho(\alpha)\ ,\ d''(\alpha) = -\gamma(\alpha) \ \textit{et}\ N(\alpha) = \alpha\ .$$

Preuve. Soit I un ensemble d'index avec $\mid I \mid = 2k-i+1$. Soit $\alpha \in H^{i+j-2k+n}(Y_I, \mathbf{C}) \subset K^{i,j,k}$, et soit $\omega \in E_1^{-r,q+r}$ tel que $\text{Rés}_I(\omega) = \alpha$.

Puisqu'on a

$$d_1'(u_{[k+1]} \otimes \omega) = u_{[k+2]} \otimes \frac{d\,f}{f} \wedge \omega\ ,$$

si $J = I \cup \{j_k\}$, il résulte

$$\text{Rés}_J \left(\frac{d\,f}{f} \wedge \omega \right) = (-1)^{k-1} \rho_J^I(\alpha)\,,$$

d'où on obtient, d'après (1.3), $d'(\alpha) = \rho(\alpha)$.

Le morphisme d_1'' étant induit par la diférentielle d_1 de la suite spectrale du complexe $(\Omega_X^*(\log Y), W)$:

$$d_1''(u_{[k+1]} \otimes \omega) = u_{[k+1]} \otimes d_1\omega \ ,$$

d'après (1.9), on a $d_1\omega = -\text{Rés}^{-1}\gamma(\alpha)$, d'où il résulte $d''(\alpha) = -\gamma(\alpha)$.

Finalement, $N(\alpha) = \alpha$ résulte de (2.4).

(2.8) Si la variété $\widetilde{Y}^{(1)}$ est kählerienne, d'après Steenbrink ([13]), on sait que le complexe A^* est la partie complexe d'un complexe de Hodge mixte cohomologique, qui munit $H^*(\widetilde{X}^*, \mathbf{Q})$ d'une structure de Hodge mixte et dont la partie rationnelle ([15], cf. [10]) munit $K_{\mathbf{C}}^{**}$ d'une structure rationnelle qui, d'après ce qui précède, est donnée par

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{Q}}^{i,j,k} &= H^{i+j-2k+n}(\widetilde{Y}^{(2k-i+1)}, \mathbf{Q})\,(i-k) \qquad \text{si} \quad k \geq 0, i \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sinon}\,, \\ K_{\mathbf{Q}}^{i,j} &= \bigoplus_k K_{\mathbf{Q}}^{i,j,k}\ , \end{aligned}$$

et

$$K_{\mathbf{Q}}^{*,*} = \bigoplus_{i,j} K_{\mathbf{Q}}^{i,j} \ ,$$

avec les morphismes

$$\begin{aligned} d' : K_{\mathbf{Q}}^{i,j,k} &\longrightarrow K_{\mathbf{Q}}^{i+1,j+1,k+1} \ , \\ d'' : K_{\mathbf{Q}}^{i,j,k} &\longrightarrow K_{\mathbf{Q}}^{i+1,j+1,k} \ , \\ N : K_{\mathbf{Q}}^{i,j,k} &\longrightarrow K_{\mathbf{Q}}^{i+2,j,k+1}(-1) \end{aligned}$$

définis par

$$d'(\alpha) = \rho(\alpha) \ , \quad d''(\alpha) = -\gamma(\alpha) \text{ et } N(\alpha) = \alpha$$

pour tout $\alpha \in K_{\mathbf{Q}}^{i,j,k}$.

Nous dénoterons par K le diagramme $(K_{\mathbf{Q}}, K_{\mathbf{C}})$. Nous rassemblons dans la proposition suivante les propriétés de K que nous utiliserons.

(2.9) Proposition. *Avec les notations antérieures, si la variété* $\widetilde{Y}^{(1)}$ *est kählerienne, alors*

i) $K^{i,j}$ *a une structure de Hodge rationnelle de poids* $j-i+n$.

ii) *Les morphismes*

$$\begin{aligned} d' : K^{i,j} &\longrightarrow K^{i+1,j+1} \\ d'' : K^{i,j} &\longrightarrow K^{i+1,j+1} \\ N : K^{i,j} &\longrightarrow K^{i+2,j}(-1) \end{aligned}$$

sont des morphismes de structures de Hodge.

iii) *On a* $d' \circ d' = d'' \circ d'' = d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$ *et* $[d', N] = [d'', N] = 0$.

iv) *Pour tout* $i \geq 0$, N *induit un isomorphisme*

$$N^i : K^{-i,j} \longrightarrow K^{i,j}(-i) \ .$$

v) *La partie* N*-primitive de* $K^{-i,j}$ *est* $K^{-i,j,0}$ *, i.e.*

$$\text{Ker } N^{i+1} \cap K^{-i,j} = K^{-i,j,0} \ .$$

3. Le cas kählerien.

(3.1) Dans ce paragraphe, nous continuons avec les notations et hypothèses du § 2, et nous supposons non seulement que $\widetilde{Y}^{(1)}$ est kählerienne mais aussi que Y est cohomologiquement kählerienne, i.e. qu'il existe une classe de cohomologie dans $H^2(Y, \mathbf{R})(1)$ dont la restriction à $\widetilde{Y}^{(1)}$ est une classe de Kähler. (Rappelons à ce propos que Clemens a donné dans [1] un contre-exemple au théorème local des cycles invariants sans ces hypothèses.) Alors pour tout $r \geq 1$, l'image inverse par le morphisme

$$\widetilde{Y}^{(r)} \longrightarrow \widetilde{Y}^{(1)}$$

de la classe de Kähler de $\widetilde{Y}^{(1)}$ définit une classe de Kähler sur $\widetilde{Y}^{(r)}$. On dénote par

$$\ell : H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{R}) \longrightarrow H^*(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{R})(1)$$

la multiplication par cette classe de Kähler. C'est un morphisme de structures de Hodge, tel que

$$\ell^{n-q} : H^{q-r}(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{R}) \longrightarrow H^{2n-r-q}(\widetilde{Y}^{(r)}, \mathbf{R})\,(n-q)$$

est un isomorphisme, si $n - q \geq 0$. On a donc un morphisme

$$\ell : K_{\mathbf{R}}^{i,j,k} \longrightarrow K_{\mathbf{R}}^{i,j+2,k}\,(1)$$

pour tout $k \geq 0, i$; d'où un morphisme

$$\ell : K_{\mathbf{R}}^{i,j} \longrightarrow K_{\mathbf{R}}^{i,j+2}\,(1)\ .$$

(3.2) Proposition.

i) *Le morphisme* $\ell : K_{\mathbf{R}}^{i,j} \longrightarrow K_{\mathbf{R}}^{i,j+2}(1)$ *est un morphisme de structures de Hodge réels.*

ii) *On a* $[\ell, N] = [\ell, d'] = [\ell, d''] = 0$.

iii) *Pour tout* $j \geq 0$, ℓ *induit un isomorphisme*

$$\ell^j : K_{\mathbf{R}}^{i,-j} \longrightarrow K_{\mathbf{R}}^{i,j}\,(j)\ .$$

iv) *La partie primitive* $K_{\mathbf{R}\,0}^{-i,-j}$ *de* $K_{\mathbf{R}}^{-i,-j}$ *coïncide avec la partie* ℓ*-primitive de* $H^{n-i-j}(\widetilde{Y}^{(i+1)}, \mathbf{R})(-i)$, *i. e.*

$$K_{\mathbf{R}}^{-i,-j} \cap \mathrm{Ker}\ \ell^{j+1} \cap \mathrm{Ker}\ N^{i+1} = H_0^{n-i-j}(\widetilde{Y}^{(i+1)}, \mathbf{R})\,(-i)\ .$$

Preuve. Il est évident que $[\ell, N] = 0$. La relation $[\ell, d_1'] = 0$ résulte de la définition de ℓ et de (2.6), et $[\ell, d_1''] = 0$ résulte de (2.6) et (1.3). L'assertion iv) résulte immédiatement de (2.9, v). Les autres assertions se démontrent aisément.

(3.3) Soit a un entier, pour simplifier les notations qui suivent, posons

$$\varepsilon(a) = (-1)^{a(a-1)/2} ,$$

et notons que cette fonction vérifie

i) $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(-1) = \varepsilon(2) = -1$,
ii) $\varepsilon(a+1) = \varepsilon(-a) = (-1)^{a(a+1)/2}$,
iii) $\varepsilon(a+b) = (-1)^{ab}\varepsilon(a)\varepsilon(b)$,
iv) $\varepsilon(a+1) = (-1)^a\varepsilon(a)$,
v) $\varepsilon(a+2) = -\varepsilon(a)$,
vi) $\varepsilon(2a) = (-1)^a$,
vii) $\varepsilon(a+4) = \varepsilon(a)$.

(3.4) On définit une application linéaire

$$\psi : K_{\mathbf{R}}^{**} \otimes K_{\mathbf{R}}^{**} \longrightarrow \mathbf{R}\,(-n)$$

par

$$\psi(x, y) = \varepsilon(i + j - n) \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-2k-i} \int_{\widetilde{Y}^{(2k+i+1)}} x \wedge y \,,$$

si $x \otimes y \in K_{\mathbf{R}}^{-i,-j,k} \otimes K_{\mathbf{R}}^{i,j,k+i}$, et

$$\psi(x, y) = 0$$

sinon .

(3.5) Proposition. *ψ est un morphisme bigradué de structures de Hodge réels, et on a*

i) $\psi(y, x) = (-1)^n\psi(x, y)$,
ii) $\psi(Nx, y) + \psi(x, Ny) = 0$,
iii) $\psi(\ell x, y) + \psi(x, \ell y) = 0$,
iv) $\psi(d_1'x, y) = \psi(x, d_1''y)$,
v) $\psi(d_1''x, y) = \psi(x, d_1'y)$.

Preuve. La première assertion résulte immédiatement de la définition de ψ .

Nous poserons, pour simplifier les notations,

$$< x, y >= \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^d \int_Z x \wedge y \ \in \mathbf{R}(r+s)$$

si $x \in H^p(Z, \mathbf{R})(r)$, $y \in H^q(Z, \mathbf{R})(s)$, $p+q = 2d$ et $d = \dim Z$.

Soit $x \otimes y \in K^{-i,-j,k} \otimes K^{i,j,k+i}$, il résulte des définitions que

$$\psi(x, y) = \varepsilon(i + j - n) < x, y > \ .$$

Puisqu'on a $< x, y >= (-1)^{i+j+n} < y, x >$ et

$$\psi(y, x) = \varepsilon(-i - j - n) < y, x >,$$

de (3.3,v), on obtient i).

De (2.8), il résulte que

$$\begin{aligned} \psi(Nx, y) &= \varepsilon(i + j - n) < x, y >, \\ \psi(x, Ny) &= \varepsilon(i + 2 + j - n) < x, y >, \end{aligned}$$

pour $x \in K^{-i-2,-j,k-1}$, $y \in K^{i,j,k+i}$, et on déduit ii) de la relation (3.3,v) .

Pour $x \in K^{-i,-j-2,k}$, $y \in K^{i,j,k+i}$, on a

$$\begin{aligned} \psi(\ell x, y) &= \varepsilon(i + j - n) < \ell\xi, \eta > \\ \psi(x, \ell y) &= \varepsilon(i + j + 2 - n) < \xi, \ell\eta > \end{aligned}$$

et, d'après (3.3,v), on en déduit iii) .

Soient $x \in K^{-i-1,-j-1,k-1}$, $y \in K^{i,j,k+i}$, en utilisant (2.8), (1.4) et (3.2.v), on obtient

$$\begin{aligned} \psi(d_1' x, y) &= \varepsilon(i + j - n) < d' x, y > \\ &= \varepsilon(i + j - n) < x, d'' y > \\ &= \varepsilon((i + 1) + (j + 1) - n) < x, d'' y > \\ &= \psi(x, d_1'' y) \end{aligned}$$

d'où il résulte iv).

La relation v) est une conséquence de i) et iv).

(3.6) Proposition. *La forme bilinéaire* $\psi(-,\ell^j N^i -)$ *induit sur* $K_{\mathbf{R}\,0}^{-i,-j}$ *une polarisation, i.e. la forme bilinéaire réelle*

$$Q : K_{\mathbf{R}\,0}^{-i,-j} \otimes K_{\mathbf{R}\,0}^{-i,-j} \longrightarrow \mathbf{R}$$

définie par

$$Q(x,y) = (2\pi\sqrt{-1})^{n+i-j}\psi(x, \ell^j N^i C y) \ ,$$

où C *dénote l'opérateur de Weil, est symétrique et définie positive.*

Preuve. Soient $x, y \in K_{\mathbf{R}\,0}^{-i,-j} = H_0^{-i-j+n}(\widetilde{Y}^{(i+1)}, \mathbf{R})(-i)$, alors on a

$$\begin{aligned} Q(x,y) =& (2\pi\sqrt{-1})^{n+i-j}\varepsilon(i+j-n)\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{n-i}\int_{\widetilde{Y}^{(i+1)}} x \wedge \ell^j N^i C y \\ =& \varepsilon(i+j-n)\int_{\widetilde{Y}^{(i+1)}} (2\pi\sqrt{-1})^i x \wedge \left(\frac{\ell}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^j C(2\pi\sqrt{-1})^i y \ . \end{aligned}$$

Puisque $(2\pi\sqrt{-1})^i x \ , \ (2\pi\sqrt{-1})^i y \in H_0^{-i-j+n}(\widetilde{Y}^{(i+1)}, \mathbf{R})$, la proposition résulte de la théorie de Hodge classique.

4. Modules de Hodge-Lefschetz polarisés.

Dans ce paragraphe, nous exposons la partie de la théorie des modules de Hodge-Lefschetz polarisés de Saito ([11]) que nous utiliserons au § 5, en suivant la formulation et les preuves de Deligne ([5]) . Notre exposition ne diffère de celle de Deligne que par quelques changements de signe qui ne sont pas essentiels.

(4.1) Soit $L = \bigoplus_{i,j\in Z} L^{i,j}$ un R-espace vectoriel de dimension finie bigradué, et soient l_1 , l_2 des endomorphismes de L tels que

$$l_1 \colon\ L^{i,j} \to L^{i+2,j} \ , \quad l_2 \colon\ L^{i,j} \to L^{i,j+2} \ ,$$

et

$$[l_1,\ l_2] = 0 \ .$$

Nous dirons que (L, l_1, l_2) est un *module bigradué de Lefschetz* si les morphismes

$$l_1^i \colon\ L^{-i,j} \to L^{i,j} \ , \qquad i > 0 \ ,$$

et

$$l_2^j\colon\ L^{i,-j} \to L^{i,j}\ , \qquad j > 0\ ,$$

sont des isomorphismes.

De la classification des représentations de dimension finie du groupe $SL(2,\mathbf{R})$, il résulte que les modules bigradués de Lefschetz correspondent bijectivement aux représentations de dimension finie du groupe $SL(2,\mathbf{R}) \times SL(2,\mathbf{R})$, de façon qu'au module bigradué de Lefschetz (L, l_1, l_2) correspond la représentation σ de $SL(2,\mathbf{R}) \times SL(2,\mathbf{R})$ sur L définie par

$$\sigma\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}\right]\ (x) = a^i b^j x\ , \qquad x \in L^{i,j}\ ,$$

et

$$d\sigma\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\ 0\right]\ = l_1\ ,$$
$$d\sigma\left[0\ ,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\ = l_2\ .$$

Si (L, l_1, l_2) est un module bigradué de Lefschetz et on pose, pour $i, j \geq 0$,

$$L_0^{-i,-j} = L^{-i,-j} \cap\ \mathrm{Ker}\ l_1^{i+1} \cap\ \mathrm{Ker}\ l_2^{j+1}\ ,$$

il résulte immédiatemente des définitions, ou de la remarque précédente, qu'on a une décomposition de Lefschetz

$$L^{i,j} = \bigoplus_{r,s\geq 0} l_1^r l_2^s\ L_0^{i-2r,j-2s}\ .$$

Si w est l'élément de Weyl de $SL(2,\mathbf{R})$:

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\ ,$$

nous noterons w_2 l'élément de $SL(2,\mathbf{R}) \times SL(2,\mathbf{R})$

$$w_2 = (w,\ w)\ .$$

(4.2) Soit (L, l_1, l_2) un module bigradué de Lefschetz, nous dirons que (L, l_1, l_2) est un *module bigradué de Hodge-Lefschetz* si, pour tout i, j , $L^{i,j}$ a une structure de Hodge réelle, et les morphismes l_1 et l_2 sont des morphismes de structures de Hodge de certains types ([7], (1.2), de fait nous n'utiliserons que la compatibilité de ces morphismes avec l'opérateur C de Weil).

(4.3) Soit (L, l_1, l_2) un module bigradué de Hodge-Lefschetz, une *polarisation* de L est une forme bilinéaire sur L

$$\psi\colon\ L \otimes L \to \mathbf{R}\ ,$$

qui est un morphisme de structures de Hodge d'un certain type, bigradué, tel que

$$\psi(l_i x, y) + \psi(x, l_i y) = 0\ , \text{ pour } \quad i = 1, 2\ ,$$

et tel que, sur $L_0^{-i,-j}$, la forme $\psi(-, C l_1^i l_2^j -)$ est symétrique et définie positive.

Nous dirons alors que (L, l_1, l_2, ψ) est un *module bigradué de Hodge-Lefschetz polarisé.*

Proposition. *Si ψ est une polarisation de L, la forme bilinéaire ϕ sur L définie par*

$$\phi(x, y) := \psi(x, C w_2 y)$$

est symétrique et définie positive.

Preuve. Soit ρ_m la représentation irréductible de dimension $m+1$ de $sl(2, \mathbf{R})$. Soient $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et soit e_0 un vecteur dominant, i.e. tel que $\rho_m(X) e_0 = 0$. Rappelons que si on pose

$$e_k = \frac{1}{k!} \rho_m(Y)^k e_0\ , \qquad k = 1, \ldots, m\ ,$$

alors on a

$$w \rho_m(X)^k e_m = (-1)^k \frac{k!}{(m-k)!} \rho_m(X)^{m-k} e_m\ .$$

Soient $x \in L^{i,j}$, $y \in L^{r,s}$. Si $(i,j) \neq (r,s)$ on a $\phi(L^{i,j}, L^{r,s}) = 0$, car w_2 est un isomorphisme entre $L^{i,j}$ et $L^{-i,-j}$ et ψ est bihomogène de bidegré $(0,0)$.

Si $x, y \in L^{i,j}$, et $x = \Sigma\, l_1^p l_2^q x_{i-2p,j-2q}$, $y = \Sigma\, l_1^r l_2^s y_{i-2r,j-2s}$, sont les décompositions de Lefschetz de x et y respectivement, on a

$$\begin{aligned}
\psi(x, C w_2 y) &= \psi(\Sigma\, l_1^p l_2^q x_{i-2p,j-2q}, \Sigma\, C w_2 l_1^r l_2^s y_{i-2r,j-2s}) \\
&= \Sigma\, (-1)^{p+q} \psi(x_{i-2p,j-2q}, C l_1^p l_2^q w_2 l_1^r l_2^s y_{i-2r,j-2s}) \\
&= \Sigma\, (-1)^{p+q+r+s} \frac{r!s!}{(r-i)!(s-j)!}\ \psi(x_{i-2p,j-2q}, C l_1^{p+r-i} l_2^{q+s-j} y_{i-2r,j-2s}) \\
&= \Sigma\, \frac{p!q!}{(p-i)!(q-j)!}\ \psi(x_{i-2p,j-2q}, C l_1^{2p-i} l_2^{2q-j} y_{i-2p,j-2q})\ .
\end{aligned}$$

La proposition résulte alors immédiatement de cette expression de $\psi(x, Cw_2y)$ car $\psi(x, Cl_1^il_2^jy)$ est symétrique et définie positive sur $L_0^{-i,-j}$.

(4.4) Soit (L, l_1, l_2, ψ) un module bigradué de Hodge-Lefschetz polarisé, une *différentielle* sur L est un morphisme de structures de Hodge d'un certain type

$$d\colon\ L \longrightarrow L\ ,$$

qui vérifie

$$\begin{aligned}&d : L^{i,j} \longrightarrow L^{i+1,j+1}\ , \qquad i, j \in \mathbf{Z}\ ,\\ &d^2 = 0\ ,\\ &[d,\ l_i] = 0\ ,\ i = 1, 2\ ,\end{aligned}$$

et

$$\psi(dx, y) = \psi(x, dy)\ , \qquad x, y \in L\ .$$

Nous dirons alors que (L, l_1, l_2, ψ, d) est un *module bigradué de Hodge-Lefschetz polarisé différentiel.*

(4.5) Théorème. *Soit (L, l_1, l_2, ψ, d) un module bigradué de Hodge-Lefschetz polarisé différentiel, alors $(H^*(L, d), l_1, l_2, \psi)$ est un module bigradué de Hodge-Lefschetz polarisé.*

Preuve. Soit

$$\phi(x, y) = \psi(x, Cw_2y)$$

la forme bilinéaire sur L introduite dans (4.3), puisqu'on a

$$\begin{aligned}\phi(dx, y) &= \psi(dx, Cw_2y)\\ &= \psi(x, dCw_2y)\\ &= \phi\left(x, (Cw_2)^{-1}dCw_2y\right)\\ &= \phi(x, w_2^{-1}dw_2y)\,,\end{aligned}$$

la transposée de d , relative à ϕ , est

$${}^td = w_2^{-1}dw_2\ .$$

Donc, si on considère sur $Hom(L^{*,*}, L^{*,*})$ l'action de $SL(2, \mathbf{R}) \times SL(2, \mathbf{R})$ déduite de celle qu'on a sur L , on a

$${}^td = w_2^{-1}(d)\ ,$$

et ainsi ${}^t d$ est dans la sous-représentation W de $Hom(L^{*,*}, L^{*,*})$ engendrée par d .

Puisqu'on a $[l_1, d] = 0$, $[l_2, d] = 0$ et d est de bidegré (1,1), d est un vecteur dominant et la représentation W est $\rho_1 \boxtimes \rho_1$. Notons que ${}^t d$ est un vecteur antidominant de W , puisque ${}^t d = w_2^{-1}(d)$.

Considérons le morphisme de composition

$$\begin{aligned} comp\colon\ W \otimes W &\longrightarrow Hom(L^{*,*}, L^{*,*}) \\ f \otimes g &\longmapsto\ f \circ g \end{aligned}$$

qui est équivariant par rapport aux actions de $SL(2, \mathbf{R}) \times SL(2, \mathbf{R})$. D'après la formule de Clebsch-Gordan, on a

$$\begin{aligned} W \otimes W &\cong (\rho_1 \boxtimes \rho_1) \otimes (\rho_1 \boxtimes \rho_1) \\ &\cong (\rho_1 \otimes \rho_1) \boxtimes (\rho_1 \otimes \rho_1) \\ &\cong (\rho_2 \oplus \rho_0) \boxtimes (\rho_2 \oplus \rho_0) \\ &\cong (\rho_2 \boxtimes \rho_2) \oplus (\rho_2 \boxtimes \rho_0) \oplus (\rho_0 \boxtimes \rho_2) \oplus (\rho_0 \boxtimes \rho_0) \end{aligned}$$

et le vecteur $d \otimes d$ est un vecteur dominant du facteur $\rho_2 \boxtimes \rho_2$, d'où il résulte que le morphisme *comp* est nul sur le facteur $\rho_2 \boxtimes \rho_2$, car $d^2 = 0$. Du lemme qui suit, on déduit alors que l'opérateur laplacien

$$\Box = d\,{}^t d + {}^t d\, d$$

est invariant.

Lemme. *Soient W la représentation $\rho_1 \boxtimes \rho_1$ de $SL(2, \mathbf{R}) \times SL(2, \mathbf{R})$, e un vecteur dominant , f un vecteur antidominant de W. Alors l'image du vecteur $e \otimes f + f \otimes e$ dans $W \otimes W / \rho_2 \boxtimes \rho_2$ est invariante par $SL(2, \mathbf{R}) \times SL(2, \mathbf{R})$.*

En effet, si u, v est la base de la représentation ρ_1 de $SL(2, \mathbf{R})$, avec u dominant et v antidominant, alors W a pour base les vecteurs

$$u \boxtimes u = u \otimes u\ ,\ u \boxtimes v = u \otimes v\ ,\ v \boxtimes u = v \otimes u\ ,\ v \boxtimes v = v \otimes v\ ,$$

et on peut supposer que $e = u \boxtimes u$ et $f = v \boxtimes v$. Puisque, dans $W \otimes W$, les vecteurs

$$e_{2,2} = (u \boxtimes u) \otimes (v \boxtimes v) + (u \boxtimes v) \otimes (v \boxtimes u) + (v \boxtimes u) \otimes (u \boxtimes v) + (v \boxtimes v) \otimes (u \boxtimes u)$$

et

$$e_{0,0} = (u \boxtimes u) \otimes (v \boxtimes v) - (u \boxtimes v) \otimes (v \boxtimes u) - (v \boxtimes u) \otimes (u \boxtimes v) + (v \boxtimes v) \otimes (u \boxtimes u)\ ,$$

sont des vecteurs des facteurs $\rho_2 \boxtimes \rho_2$ et $\rho_0 \boxtimes \rho_0$, respectivement, et on a

$$e_{2,2} + e_{0,0} = 2(e \otimes f + f \otimes e) \ ,$$

l'image de $e \otimes f + f \otimes e$ dans $W \otimes W/\rho_2 \boxtimes \rho_2$ est la classe de $e_{0,0}/2$, qui est invariante.

Revenons à la preuve du théorème.

Puisque

$$H^* = \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d = \operatorname{Ker}\ d \cap \operatorname{Ker}{}^t d = \operatorname{Ker} \square$$

et $\square$ est invariant, on a un isomorphisme équivariant de complexes

$$L \cong \ \operatorname{Ker}\ \square \oplus \ \operatorname{Im}\ \square ,$$

où $\operatorname{Ker}\square$ est muni de la différentielle nulle et $\operatorname{Im}\ \square$ est acyclique. On a une action de $SL(2,\mathbf{R}) \times SL(2,\mathbf{R})$ induite sur $\operatorname{Ker}\ \square$, d'où il résulte que H^* est un module de Hodge-Lefschetz bigradué. Finalement, ψ induit une polarisation sur H^* car d est auto-adjoint.

5. Le théorème local des cycles invariants.

Les résultats du paragraphe précédent appliqués à la situation considerée au § 3 nous permettront de conclure la preuve du théorème local des cycles invariants (5.3) énoncé ci-dessous et qui était l'objet de ce travail.

(5.1) Théorème. *Avec les notations et les hypothèses du § 3 , le* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel bigradué* $K = \oplus K^{ij}$ *avec les endomorphismes* $(2\pi\sqrt{-1})N$ *et* $(2\pi\sqrt{-1})^{-1}\ell$ *, la différentielle* $d = d' + d''$*, et la polarisation* $(2\pi\sqrt{-1})^n\psi$ *, est un module de Hodge-Lefschetz bigradué polarisé différentiel.*

Preuve. On déduit de (2.9) et (3.2) que K est un module de Hodge-Lefschetz bigradué, par (3.6), il est polarisé et, de (3.5), il résulte qu'il est différentiel.

On déduit de ce théorème la coïncidence de la filtration par le poids W avec la filtration définie par la monodromie ([13], (5.9)):

(5.2) Théorème. *Sous les hypothèses de (3.1), pour tout* $q, r \geq 0$*, l'endomorphisme* N *induit un isomorphisme de structures de Hodge*

$$N^r : Gr^W_{q+r} H^q(\widetilde{X}^*, \mathbf{Q}) \longrightarrow Gr^W_{q-r} H^q(\widetilde{X}^*, \mathbf{Q})(-r)$$

Preuve. Le théorème résulte de (4.5) et (5.1) car la suite spectrale (2.6) dégénère en E_2 : $E_2 = E_\infty$.

(5.3) Théorème ([1], [4], [13])**.** *Sous les hypothèses de (3.1), soit* sp^* *le morphisme de spécialisation. Alors pour tout* $q \geq 0$ *la suite*

$$H^q(Y, \mathbf{Q}) \xrightarrow{sp^*} H^q(\widetilde{X}^*, \mathbf{Q}) \xrightarrow{T-1} H^q(\widetilde{X}^*, \mathbf{Q})$$

est exacte.

Preuve. Ceci résulte de (5.2), par un argument de Deligne (voir [13] (5.12)) .

Rappelons que, à partir de (5.2), on obtient aussi une preuve de la suite exacte de Clemens-Schmid ([7] , [1], voir [8], Exp. IV , (7.14)).

Schmid a prouvé que, si S est la forme d'intersection de $H^*(\widetilde{X}^*, \mathbf{Q})$, la forme bilinéaire $S(-, \ell^{n-q} N^r -)$ induit une polarisation sur $Gr^W_{q+r} H^q(\widetilde{X}^*, \mathbf{Q})$ ([12] (6.16)), et une autre preuve a été donnée par Saito ([11]) en utilisant sa théorie des modules de Hodge. Il serait intéressant d'avoir aussi une preuve de ce résultat dans la ligne de cet article.

Bibliographie

1. Clemens, C.H., *Degenerations of Kähler manifolds*, Duke Math. J. **44** (1977), 215–290.
2. Deligne, P., *Comparaison avec la théorie transcendente, Exp. XIV*, SGA. 7 II. Lect. Notes in Math., 340, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 1973.
3. Deligne, P., *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. **40** (1972), 5–57;.
III, Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. **44** (1975), 5–77.
4. Deligne, P., *La conjecture de Weil, II*, Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. **52** (1980), 137–252.
5. Deligne, P., *Positivité: signes, I* (manuscrit, 16-2-84)*, II* (manuscrit, 6-11-85).
6. El Zein, F., *Théorie de Hodge des cycles évanescents*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **19** (1986), 107–184.
7. Griffiths, P. A., Schmid, W., *Recent developments in Hodge theory: A discussion of techniques and results*, Proceedings of the International Colloquium on Discrete Subgroups of Lie Groups, Oxford Univ. Press, Bombay, 1975.
8. Guillén, F., Navarro Aznar, V., Pascual, P., Puerta, F., *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique*, Lect. Notes in Math., 1335, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.
9. Leray, J., *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III)*, Bull. Soc. Math. Fr. **87** (1959), 81–180.
10. Navarro Aznar, V., *Sur la théorie de Hodge-Deligne*, Invent. math. **90** (1987), 11-76.
11. Saito, M., *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS **24** (1988), 849–995.
12. Schmid, W., *Variation of Hodge structure: The singularities of the period mapping*, Invent. math. **22** (1973), 211–320.
13. Steenbrink, J. H., *Limits of Hodge structures*, Invent. math. **31** (1976), 229–257.
14. Steenbrink, J. H., *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Noordhoff-Sijthoff, 1977.
15. Steenbrink, J.H., Zucker, S., *Variation of mixed Hodge structure, I*, Invent. math. **80** (1985), 489–542.

Dept. de Matemàtiques, ETSEIB
Universitat Politècnica de Catalunya
Diagonal 647, 08028 Barcelona, Espagne

Dept. d'Àlgebra i Geometria
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona, Espagne