Cobertura de una cartera de bonos con forwards en tiempo continuo

Bàrbara Llacay
Gilbert Peffer

Documento de Trabajo IAFI No. 7/04

Marzo 2003

Índice general

Introducción

Objetivos

El objetivo de este documento es calcular la cobertura necesaria para una cartera de bonos, mediante una cartera de cobertura compuesta por forwards sobre bonos.

El enfoque del documento es teórico, considerando el tiempo y las tasas de interés como variables continuas, y tomando bonos de cupón continuo para poder llegar a una formulación analítica de los ratios de cobertura, obtenidas estudiando la variación del precio del bono y del forward cuando la curva forward sufre variaciones infinitesimales. Sin embargo, como se verá a lo largo de los distintos capítulos en que se divide el documento, esta formulación teórica es aplicable al caso real de bonos de cupón discreto. En concreto, veremos cómo extender el análisis hecho para obtener fórmulas sencillas para calcular a la práctica el número de forwards necesarios para cubrir una cartera de bonos.

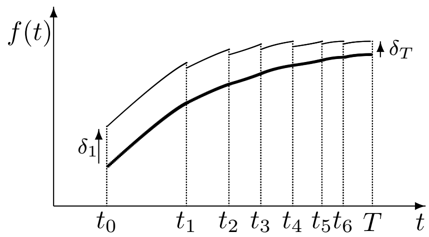


Figura 1: Ilustración de una partición de la curva forward

Para ello consideraremos particiones de la curva de tipos forward, y estudiaremos la variación del precio del bono y el del forward ante variaciones paralelas de distintos tramos. Aunque el alcance de este procedimiento pueda parecer limitado, de hecho cualquier variación sufrida por la curva forward podría aproximarse tanto como se quisiera por variaciones paralelas de distintos tramos de la curva, siempre y cuando se considerara un número suficiente de tramos (ver Figura 1). Este análisis de cobertura nos permitirá calcular la cobertura para la cartera de bonos. Aunque en este documento tomamos los forwards como instrumentos de cobertura, no es ésta la única posibilidad. Se podría seguir el desarrollo que expondremos con cualquier otro instrumento de cobertura (por ejemplo, otra cartera de bonos o futuros sobre bonos) obteniendo resultados análogos.

Estructura del documento

El documento se estructura en cuatro capítulos:

- *Capítulo 1 - Estructuras temporales de tipos de interés en tiempo continuo*: se hace una breve descripción de las estructuras temporales de tipos de interés en tiempo continuo, con las que se trabajará a lo largo del documento. A continuación se introduce la fórmula del valor actual de un bono con cupón continuo, y se deriva la fórmula del precio de un forward sobre ese bono.

- *Capítulo 2 - Cobertura para un desplazamiento paralelo de la curva forward*: estudiamos cómo varía el precio de un bono y de un forward cuando toda la curva forward sufre un desplazamiento paralelo infinitesimal. De las fórmulas obtenidas se deriva un ratio analítico, para la cobertura de un bono con forwards sobre el mismo bono.

- *Capítulo 3 - Cobertura para desplazamientos paralelos en tramos independientes de la curva forward*: en este capítulo se toma una partición de la curva forward, de manera que distintos tramos puedan variar independientemente. De este modo, se puede ajustar mucho mejor la variación que a la práctica puede sufrir la curva forward, obteniendo en consecuencia una mejor cobertura. Se estudia la variación del bono y del forward debida al desplazamiento infinitesimal de un tramo de la curva, y cómo se relaciona esta variación con la variación sufrida a causa del movimiento de toda la curva forward.

- *Capítulo 4 - Aplicación a la cobertura de bonos de cupón discreto*: finalmente, comprobamos que la formulación obtenida en los apartados anteriores es aplicable también al caso de bonos de cupón discreto, lo que permite obtener fórmulas simples para el número de forwards necesarios para cubrir una cartera de bonos frente a cambios desfavorables de los tipos de interés.

- *Apéndices*: las demostraciones de algunas de las proposiciones enunciadas a lo largo del documento se incluyen al final en forma de apéndices debido a su considerable extensión.

Capítulo 1

Valoración de bonos y forwards en tiempo continuo

1.1. Estructuras temporales de tipos de interés en tiempo continuo

A lo largo de este documento consideraremos el tiempo como una variable continua, porque esto nos permitirá obtener fórmulas analíticas y simplificar los cálculos (sin embargo, en el capítulo 4 trataremos el caso de bonos que pagan cupones discretos). Por ello primero introduciremos las distintas estructuras de tipos de interés y sus respectivas relaciones en ambiente continuo.

Denotaremos cualquier estructura temporal de tipos de interés spot por

$$s(t_0, T_i),\ i \in \mathbb{N},$$

donde t_0 indica el momento presente y T_i, el plazo que consideramos.

Sea $f(t)$ el tipo forward implícito. Es decir, $f(t)$ denota el tipo de interés continuo establecido a tiempo $t_0 = 0$ para un depósito hecho a tiempo t con vencimiento infinitesimal.

Lema 1.1. *Si el mercado es libre de arbitraje, entonces debe cumplirse la siguiente relación entre los tipos spot $s(0,T)$ y las tasas forward implícitas $f(t)$:*

$$e^{\int_0^T f(t)\,dt} = e^{s(0,T)\cdot T}.$$

Es decir, 1€ invertido hoy al tipo spot $s(0,T)$ debe proporcionar el mismo rendimiento que 1€ continuamente invertido a todos los tipos forward $f(t)$, con $0 \leq t \leq T$. La demostración de este lema puede encontrarse en el apéndice A.

De esta relación, gracias a la inyectividad de la función exponencial, se sigue inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 1.1. *El tipo spot $s(0,t)$ y el tipo forward implícito $f(t)$ cumplen la siguiente relación:*

$$\int_0^t f(z)\,dz = s(0,t)\cdot t.$$

Supongamos que la curva de tipos spot sufre un desplazamiento paralelo tal como muestra la figura 1.1:

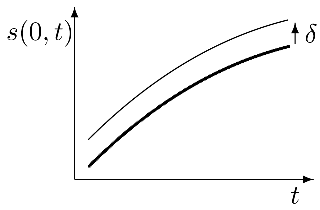


Figura 1.1: Desplazamiento paralelo de la curva spot

La proposición 1.1 nos dice cuál es el desplazamiento sufrido a su vez por la curva forward.

Proposición 1.1. *Si la estructura de tipos spot sufre un desplazamiento paralelo δ, idéntico en todos los plazos, entonces la estructura de tipos forwards sufre equivalentemente el mismo desplazamiento δ.*

Demostración. Por el Corolario 1.1 sabemos que

$$s(0,t)\cdot t = \int_0^t f(z)\,dz.$$

La igualdad no cambia si sumamos $\delta \cdot t$ a ambos miembros:

$$s(0,t)\cdot t + \delta\cdot t = \int_0^t f(z)\,dz + \delta\cdot t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (s(0,t)+\delta)\cdot t = \int_0^t f(z)\,dz + \int_0^t \delta\,dz \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (s(0,t)+\delta)\cdot t = \int_0^t (f(z)+\delta)\,dz.$$

Vemos, por tanto, que incrementar cada tipo $s(0,t)$ en δ es equivalente a desplazar paralelamente la estructura de tipos forward implícitos. $\square$

Para finalizar esta sección introductoria sobre las estructuras de tipos de interés, definimos los tipos de descuento:

Definición 1.1. *Dado* 1€ a tiempo t, su valor a tiempo 0 recibe el nombre de **factor de descuento**, y viene dado por

$$\mathcal{D}(t) = e^{-\int_0^t f(z)\,dz}$$

o, equivalentemente (ver Corolario 1.1),

$$\mathcal{D}(t) = e^{-s(0,t)\cdot t}.$$

1.2. Valor de un bono con cupón y tiempo continuo

Consideremos un bono B con vencimiento T que paga un cupón continuo $c(t)$. Es decir, en cada intervalo infinitesimal de tiempo dt, el propietario del bono recibe $c(t) \cdot dt$. El pago correspondiente al primer año, por ejemplo, es

$$\int_0^1 c(t)\, dt = \int_0^1 c\, dt = c.$$

El pago correspondiente al último año de vida del bono vale

$$\int_{T-1}^T c(t)\, dt = \int_{T-1}^T (c + B_T)\, dt = c + B_T.$$

Para calcular el valor actual del bono B – que denotaremos por B_0 –, basta actualizar todos los pagos mediante el factor de descuento:

$$B_0 = \int_0^T c(t) \cdot \mathcal{D}(t)\, dt = \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz}\, dt. \tag{1.1}$$

1.3. Valor de un forward sobre un bono en tiempo continuo

El precio de un bono comprado a plazo guarda relación con el precio del bono comprado al contado. La expresión de esta relación tiene que ver con la ganancia o coste que supone tener el bono durante el periodo comprendido entre las fechas spot y forward. Si un inversor compra un bono a plazo, y el bono paga cupones, el inversor debe pedir una compensación por los pagos que no recibe, pero debe pagar a su vez una prima porque se ahorra el coste de financiar el bono hasta la fecha forward. La siguiente proposición proporciona el precio forward de un bono.

Proposición 1.2. *Sea $F(t_F)$ el precio del bono adquirido a plazo, en la fecha forward t_F. Entonces, $F(t_F)$ viene dado por*

$$F(t_F) = \left[\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz}\, dt\right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz} - \int_0^{t_F} c(t)\, dt.$$

Demostración. Dado un bono con cupón continuo, el cupón corrido CC que deja de percibir un inversor que compra el bono a plazo en el momento t_F es

$$CC(0, t_F) = \int_0^{t_F} c(t)\, dt.$$

Por otro lado, el coste CF de financiar el bono hasta el momento t_F viene dado por

$$CF(0, t_F) = B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz} - B_0.$$

Por tanto, el precio de un bono comprado a plazo en t es

$$\begin{aligned}
F(t_F) &= B_0 + CF(0,t_F) - CC(0,t_F) = \\
&= B_0 + B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - B_0 - \int_0^{t_F} c(\tau)\,d\tau = \\
&= B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - \int_0^{t_F} c(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación 2.1 para B_0, obtenemos:

$$F(t_F) = \left[\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - \int_0^{t_F} c(t)\,dt.$$

$\square$

Capítulo 2

Cobertura para un desplazamiento paralelo de la curva forward

2.1. Variación del precio del bono debido a un desplazamiento paralelo de la curva forward

Como en el caso discreto, la variación que sufre el precio del bono debido a un cambio del tipo de interés está estrechamente relacionado con la duración.

Definición 2.1. *La **duración de Macaulay** de un bono B con cupón continuo $c(t)$ se define como*

$$D = \frac{1}{B_0} \int_0^T c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt.$$

Proposición 2.1. *La relación entre la variación del precio del bono y una variación paralela infinitesimal de toda la curva forward viene dada por*

$$\boxed{\frac{\partial B_0}{\partial f} = -B_0 \cdot D.}$$

Demostración.[1] Sabemos que el valor actual del bono viene dado por

$$B_0 = \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt.$$

La variación del precio del bono a causa de una variación paralela infinitesimal de la curva forward $f(t)$ se corresponde con

$$\frac{\partial B_0}{\partial f} = \lim_{h \to 0} \frac{B_0(f+h) - B_0(f)}{h}$$

Sustituyendo por la expresión de B_0, y arreglando la expresión resultante, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_0}{\partial f} &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \left(e^{-h\cdot t} - 1\right) dt}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \left(e^{-h\cdot t} - 1\right) dt
\end{aligned}$$

[1] Esta demostración sólo muestra los pasos principales del razonamiento. La demostración completa se adjunta en el apéndice B

Usando el desarrollo en serie de la función exponencial,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots,$$

en la expresión del límite:

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \cdot (e^{-h\cdot t} - 1) = \\
= \;& \lim_{h\to 0} \int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \left(1 + (-h\cdot t) + \mathcal{O}(h^2) - 1\right)\, dt = \\
= \;& \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot (-t)\, dt = \\
= \;& -B_0 \cdot D.
\end{aligned}$$

□

2.2. Variación del precio del forward debido a un desplazamiento paralelo de la curva forward

En el apartado anterior hemos calculado la expresión de la variación sufrida por un bono ante un desplazamiento infinitesimal de la curva forward. Dado que nuestro objetivo es calcular la cobertura de una cartera de bonos mediante una cartera de forwards, debemos calcular también la variación sufrida por el precio $F(t_F)$ de un forward sobre un bono cuando la curva forward sufre un desplazamiento infinitesimal. Esto nos permitirá, a través de sucesivos pasos, llegar a la composición de una cartera de cobertura tal que replique las variaciones sufridas por la cartera de bonos ante cambios de la curva de tipos de interés.

Proposición 2.2. *La relación entre la variación del precio de un forward sobre un bono y una variación paralela infinitesimal de toda la curva forward viene dada por*

$$\boxed{\frac{\partial F(t_F)}{\partial f} = B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \cdot (t_F - D).}$$

Demostración. [2] Sabemos que la expresión del precio del forward viene dada por

$$F(t_F) = B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - \int_0^{t_F} c(t)\, dt.$$

La variación del precio del forward provocada por una variación infinitesimal en toda la curva fordward se puede calcular mediante el límite

$$\frac{\partial F(t_F)}{\partial f} = \lim_{h\to 0} \frac{F(t_F, f+h) - F(t_F, f)}{h}.$$

Desarrollando el numerador y utilizando la serie de potencias de la función exponencial, obtenemos

[2]Esta demostración sólo muestra los pasos principales del razonamiento. La demostración completa se adjunta en el apéndice C

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t_F)}{\partial f} &= \lim_{h\to 0}\left[e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\left[\left(t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\ -\right.\right.\right.\\
&- \left.\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right)+\frac{h}{2}\cdot\left(\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t^2\,dt\ -\right.\\
&- \left.\left.\left.2t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt+t_F^2\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right)+\mathcal{O}(h^2)\right]\right]=\\
&= e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\left(t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt-\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right)=\\
&= B_0\cdot e^{\int_0^t f(z)\,dz}\cdot(t_F-D).
\end{aligned}$$

□

2.3. Cálculo del ratio de cobertura

Para poder calcular una estrategia de cobertura, nos interesa conocer cómo varía el precio del forward con respecto al del bono, su subyacente. A partir de las fórmulas halladas en las proposiciones 2.1 y 2.2 para la variación del forward y del bono frente a un cambio infinitesimal de la curva de interés, podemos obtener la siguiente relación para el cambio del forward por un cambio inifinitesimal del bono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t_F)}{\partial B_0} &= \frac{\partial F(t_F)}{\partial f}\cdot\left(\frac{\partial B_0}{\partial f}\right)^{-1}=\\
&= B_0\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\cdot dz}\cdot(t_F-D)\cdot\frac{-1}{B_0\cdot D}=\\
&= -e^{\int_0^{t_F} f(z)dz}\cdot\frac{t_F-D}{D}.
\end{aligned}$$

Esta expresión nos permite obtener el número N_F de forwards necesarios para cubrir un bono frente a variaciones pequeñas de su valor:

$$\begin{aligned}
N_F &= \left(\frac{\partial F(t_F)}{\partial B_0}\right)^{-1}=\left(-e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\frac{t_F-D}{D}\right)^{-1}=\\
&= -e^{-\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\frac{D}{t_F-D}\\
&= e^{-\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\frac{D}{D-t_F}
\end{aligned}$$

Por tanto, el poseedor de un bono debe vender $e^{-\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\frac{D}{D-t_F}$ forwards $F(t_F)$ sobre el mismo bono si desea cubrirse ante un cambio adverso de los tipos de interés.

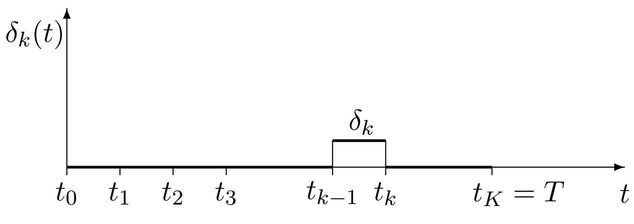
Capítulo 3

Cobertura para desplazamientos paralelos en tramos independientes de la curva forward

3.1. Variación del precio del bono debido a un desplazamiento en un tramo de la curva forward

Para poder obtener una cobertura ajustada ante una variación cualquiera de la curva de tipos de interés, consideraremos una partición de ésta en distintos tramos. De este modo, podremos estudiar cómo cambia el precio del bono y del forward cuando no es la curva entera lo que varía sino sólo un fragmento de ella, o bien cuando distintos trozos de la curva sufren distintos desplazamientos.

Consideramos una partición de la curva forward en K tramos, no necesariamente de la misma longitud, y comprendidos entre el momento actual t_0 y $T > T_B$, donde T_B es el vencimiento del bono. Sea δ_k el desplazamiento vertical sufrido por el tramo de la curva forward comprendido entre los momentos t_{k-1} y t_k:

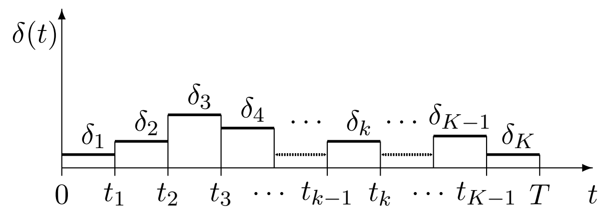


Podemos definir δ_k como una función en todo el intervalo $[0, T]$ de la forma siguiente:

$$\delta_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_{k-1} \\ \delta_k & \text{si} \quad t_{k-1} < t \leq t_k \\ 0 & \text{si} \quad t_k < t \leq T \end{cases}$$

De esta forma, la variación total sufrida por la curva forward – que llamaremos

$\delta(t)$ – puede expresarse como la suma de las distintas variaciones parciales:



$$\delta(t) = \sum_{k=1}^{K} \delta_k(t) = \begin{cases} \delta_1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \delta_2 & \text{si} \quad t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \\ \delta_K & \text{si} \quad t_{K-1} < t \leq t_K \end{cases}$$

La siguiente proposición nos da la variación del precio del bono debida a una variación en un tramo de la curva forward.

Proposición 3.1. *Si la curva forward sufre un desplazamiento $\delta_k(t)$ en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$, entonces la variación de orden lineal en δ_k sufrida por el precio del bono viene dada por*

$$\Delta B_0^{\delta_k} = \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right],$$

donde

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt.$$

Demostración.[1] Supongamos que la curva forward sufre un desplazamiento paralelo $\delta_k \in \mathbb{R}$ en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$:

$$\delta_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_{k-1} \\ \delta_k & \text{si} \quad t_{k-1} < t \leq t_k \\ 0 & \text{si} \quad t_k < t \leq T \end{cases}$$

Sea $B_0^{\delta_k}$ el valor del bono después de la variación δ_k de los tipos de interés. Para calcular $B_0^{\delta_k}$ basta actualizar el cupón continuo con los nuevos tipos de interés:

$$B_0^{\delta_k} = \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt$$

Utilizando la expresión de $\delta_k(t)$ y la aproximación lineal de la función exponencial, llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} B_0^{\delta_k} &= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \delta_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot t\,dt - \\ &- \delta_k \cdot t_k \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \delta_k \cdot t_{k-1} \int_{t_{k-1}}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \end{aligned}$$

[1]Esta demostración sólo muestra los pasos principales del razonamiento. La demostración completa se adjunta en el apéndice D

Teniendo en cuenta la expresión del precio inicial de un bono

$$B_0 = \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

y definiendo

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt,$$

obtenemos:

$$B_0^{\delta_k} = B_0 + \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k}\right]$$

Por tanto, si notamos por $\Delta B_0^{\delta_k}$ la variación del bono debida al cambio $\delta_k(t)$ en la curva forward, llegamos al resultado deseado:

$$\Delta B_0^{\delta_k} = B_0^{\delta_k} - B_0 = \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k}\right].$$

□

Por otro lado, podemos calcular la variación del precio del bono causada por la suma de todas las variaciones parciales δ_k, es decir, la variación causada por la curva

$$\delta(t) = \sum_{k=1}^{K} \delta_k(t) = \begin{cases} \delta_1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \delta_2 & \text{si} \quad t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \\ \delta_K & \text{si} \quad t_{K-1} < t \leq t_K \end{cases} \tag{3.1}$$

Proposición 3.2. *Si la curva forward sufre un desplazamiento $\delta(t)$ de la forma dada en la ecuación 3.1, entonces la variación de orden lineal en δ_k sufrida por el precio del bono viene dada por*

$$\Delta B_0^{\delta} = B_0^{\delta} - B_0 = \sum_{k=1}^{K-1} t_k \cdot B_{t_k} \cdot (\delta_{k+1} - \delta_k) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k},$$

donde B_0^{δ} es el valor actual del bono cuando la curva forward ha sufrido una variación $\delta(t)$.

Demostración.[2] Sea B_0^{δ} el valor actual del bono cuando la curva forward ha sufrido una variación $\delta(t)$:

$$B_0^{\delta} = \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta(z)\,dz}\,dt,$$

donde $\delta(t) = \sum_{k=1}^{K} \delta_k(t)$ tal como en la ecuación 3.1.

[2]Esta demostración sólo muestra los pasos principales del razonamiento. La demostración completa se adjunta en el apéndice E

Descomponiendo la expresión de $\delta(t)$ en un sumatorio para los distintos tramos de la curva forward, y utilizando la aproximación lineal de la función exponencial, llegamos a

$$B_0^\delta = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \left(1 - \left[\sum_{i=1}^{k} (\delta_i \cdot (t_i - t_{i-1})) + \delta_{k+1} \cdot (t - t_k) \right] \right) \right\}$$

Agrupando términos y empleando las notaciones anteriormente introducidas,

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt,$$

llegamos a

$$B_0^\delta = B_0 + \sum_{k=1}^{K-1} t_k \cdot B_{t_k} \cdot (\delta_{k+1} - \delta_k) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}$$

Por tanto, la variación del valor actual del bono debida al cambio $\delta(t)$ en la curva forward viene dado por:

$$\Delta B_0^\delta = B_0^\delta - B_0 = \sum_{k=1}^{K-1} t_k \cdot B_{t_k} \cdot (\delta_{k+1} - \delta_k) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}.$$

□

A partir de los resultados anteriores, podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *La variación de orden lineal en el precio de un bono causada por una variación de toda la curva forward puede calcularse como la suma de la variación lineal del precio del bono causada por el desplazamiento de cada tramo de la curva forward. Es decir,*

$$\sum_{k=1}^{K} \Delta B_0^{\delta_k} = \Delta B_0^\delta,$$

donde $\Delta B_0^{\delta_k}$ *y* ΔB_0^δ *indican la variación lineal del precio del bono causada por un desplazamiento paralelo del tramo* $[t_{k-1}, t_k]$ *de la curva forward, o de toda la curva forward, respectivamente.*

Demostración. Por la proposición 3.1, sabemos que la variación de orden lineal en el precio del bono causada por una variación δ_k constante en un tramo $[t_{k-1}, t_k]$ viene dada por

$$\Delta B_0^{\delta_k} = \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right],$$

donde

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt.$$

Por tanto, la suma de las variaciones causadas por el desplazamiento de cada tramo es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K}\Delta B_0^{\delta_k} &= \sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot\left(t_{k-1}\cdot B_{t_{k-1}}-t_k\cdot B_{t_k}-D_{t_{k-1}}^{t_k}\right)=\\ &= \sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot t_{k-1}\cdot B_{t_{k-1}}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}\end{aligned}$$

Como $t_0=0$, y $B_{t_K}=0$ (t_K es el tiempo de vencimiento),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K}\Delta B_0^{\delta_k} &= \sum_{k=2}^{K}\delta_k\cdot t_{k-1}\cdot B_{t_{k-1}}-\sum_{k=1}^{K-1}\delta_k\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}=\\ &= \sum_{k=1}^{K-1}\delta_{k+1}\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K-1}\delta_k\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}=\\ &= \sum_{k=1}^{K-1}t_k\cdot B_{t_k}\cdot(\delta_{k+1}-\delta_k)-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}\end{aligned}$$

Utilizando la proposición 3.2, llegamos al resultado deseado:

$$\sum_{k=1}^{K}\Delta B_0^{\delta_k}=\Delta B_0^{\delta}.$$

□

3.2. Variación del precio del forward debido a un desplazamiento en un tramo de la curva forward

Como en el caso del bono, veremos que también la variación total sufrida por el precio del forward debida a una variación de toda la curva forward se puede descomponer como la suma del cambio debido a la variación de cada tramo de la curva, si dichas variaciones son pequeñas.

Calculamos primero la variación del precio del forward debida a un cambio δ_k en el k-ésimo tramo de la curva forward.

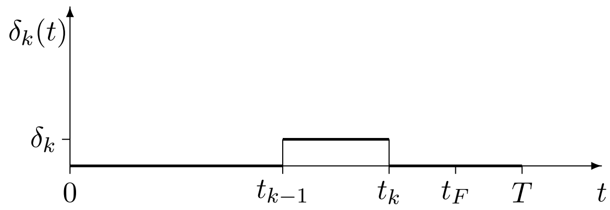
Proposición 3.4. *La variación de orden lineal del precio del forward $F(t_F)$ a causa de un desplazamiento δ_k en el tramo $[t_{k-1},t_k]$ de la curva forward, $\Delta F^{\delta_k}(t_F)$, viene dada por*

$$\Delta F^{\delta_k}(t_F)=F^{\delta_k}(t_F)-F(t_F)=$$

$$=\begin{cases}\delta_k\cdot\left(t_k\cdot(B_0-B_{t_k})-t_{k-1}\cdot(B_0-B_{t_{k-1}})-D_{t_{k-1}}^{t_k}\right)\cdot e^{\int_0^{t_F}f(z)\,dz}, & \text{si}\quad t_{k-1}<t_k\le t_F\\ \delta_k\cdot\left(t_F\cdot B_0-t_{k-1}\cdot(B_0-B_{t_{k-1}})-D_{t_{k-1}}^{t_k}-t_k\cdot B_{t_k}\right)\cdot e^{\int_0^{t_F}f(z)\,dz}, & \text{si}\quad t_{k-1}\le t_F\le t_k\\ \delta_k\cdot\left(t_{k-1}\cdot B_{t_{k-1}}-t_k\cdot B_{t_k}-D_{t_{k-1}}^{t_k}\right)\cdot e^{\int_0^{t_F}f(z)\,dz}, & \text{si}\quad t_F\le t_{k-1}<t_k\end{cases}$$

Demostración.[3] Supongamos que la curva forward sufre una variación δ_k en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$. Sea $F^{\delta_k}(t_F)$ el precio del forward calculado con la nueva curva forward. Para conocer su valor, es necesario distinguir tres casos, según si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es anterior, incluye o es posterior a la fecha forward t_F.

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es anterior a t_F (es decir, $t_k \leq t_F$),



entonces

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= B_0^{\delta_k} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - CC(0, t_F) = \\
&= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt \right) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - CC(0, t_F)
\end{aligned}
$$

Empleando la definición de $\delta_k(t)$, y la aproximación lineal de la función exponencial, obtenemos

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \left(\int_0^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \delta_k \cdot t_k \cdot \int_0^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \right. \\
&- \delta_k \cdot t_{k-1} \cdot \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \\
&- \left. \delta_k \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \right) \cdot \\
&\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F)
\end{aligned}
$$

Recordando la definición de B_0 y retomando las notaciones

$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

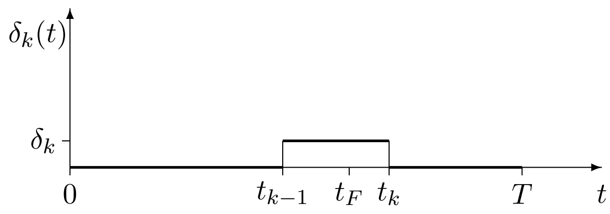
$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

obtenemos

$$F^{\delta_k}(t_F) = F(t_F) + \delta_k \cdot \left(t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}$$

[3] Esta demostración sólo muestra los pasos principales del razonamiento. La demostración completa se adjunta en el apéndice F

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ incluye t_F (es decir, $t_{k-1} \leq t_F \leq t_k$),



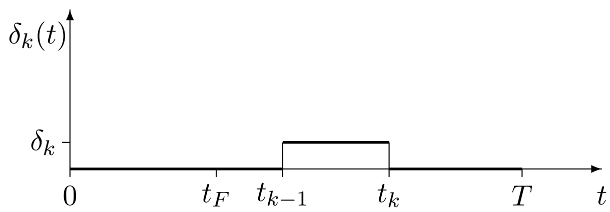
Como en el caso anterior, si utilizamos la definición de δ_k, y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} F^{\delta_k}(t_F) &= \Bigg(\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt + \delta_k \cdot t_F \cdot \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt - \\ &- \delta_k \cdot t_{k-1} \cdot \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt - \\ &- \delta_k \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt - \\ &- \delta_k \cdot t_k \cdot \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \Bigg) \cdot \quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F) \end{aligned}$$

Retomando las notaciones B_{t_k} y $D_{t_{k-1}}^{t_k}$, llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} F^{\delta_k}(t_F) &= F(t_F) + \delta_k \cdot \big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - \\ &- D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k} \big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \end{aligned}$$

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es posterior a t_F (es decir, $t_F \leq t_{k-1}$),



entonces de forma análoga a los casos anteriores se demuestra que el valor del forward viene dado por

$$F^{\delta_k}(t_F) = F(t_F) + \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}$$

Por tanto, hemos visto que el valor del forward cuando varía el tramo k-ésimo de la curva forward viene dado por

$$F^{\delta_k}(t_F) = \begin{cases} F(t_F) + \delta_k \cdot \Big(t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k}\Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq t_F \\ F(t_F) + \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k}\Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_{k-1} \leq t_F \leq t_k \\ F(t_F) + \delta_k \cdot \Big[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k}\Big] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_F \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

y por consiguiente, la variación de su valor es

$$\Delta F^{\delta_k}(t_F) = F^{\delta_k}(t_F) - F(t_F) =$$

$$= \begin{cases} \delta_k \cdot \Big(t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k}\Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq t_F \\ \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k}\Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_{k-1} \leq t_F \leq t_k \\ \delta_k \cdot \Big(t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k}\Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_F \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

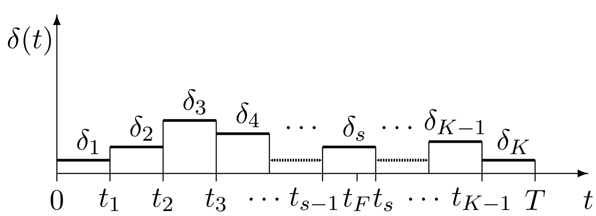
□

Por otro lado, igual como hemos hecho para el bono, podemos calcular la variación del precio del forward causada por la suma de todas las variaciones parciales δ_k, es decir, la variación causada por toda la curva $\delta(t) = \sum_{k=1}^{K} \delta_k(t)$ (ver la ecuación 3.1).

Proposición 3.5. *La variación de orden lineal del precio del forward $F(t_F)$ a causa de un desplazamiento δ en la curva forward, $\Delta F^{\delta}(t_F)$, viene dada por*

$$\begin{aligned} \Delta F^{\delta}(t_F) \quad = \quad & \Bigg[\sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \\ & + \quad B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) + B_0 \cdot \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1})\Bigg] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}. \end{aligned}$$

Demostración.[4] Supongamos que la fecha forward está contenida en el tramo $[t_{s-1}, t_s]$:



Sea $F^{\delta}(t_F)$ el valor actual del bono cuando la curva forward ha sufrido una variación $\delta(t)$:

[4] Esta demostración sólo muestra los pasos principales del razonamiento. La demostración completa se adjunta en el apéndice G

$$F^{\delta}(t_F) = B_0^{\delta} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta(z)\, dz} - CC(0, t_F)$$

Empleando el desarrollo que hemos encontrado para B_0^{δ} en la proposición 3.2, y la aproximación lineal de la exponencial, obtenemos

$$\begin{aligned} F^{\delta}(t_F) &= F(t_F) + \left[\sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \right. \\ &+ \left. B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) + B_0 \cdot \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz} \end{aligned}$$

Entonces la variación del valor del forward sobre un bono debida al cambio $\delta(t)$ en la curva forward viene dado por:

$$\begin{aligned} \Delta F^{\delta}(t_F) &= F^{\delta}(t_F) - F(t_F) = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \right. \\ &+ \left. B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) + B_0 \cdot \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz}. \end{aligned}$$

□

A partir de los resultados anteriores, podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 3.6. *La variación de orden lineal en el precio de un forward causada por una variación de toda la curva forward puede calcularse como la suma de la variación lineal del precio del forward causada por el desplazamiento de cada tramo de la curva forward. Es decir,*

$$\sum_{k=1}^{K} \Delta F^{\delta_k}(t_F) = \Delta F^{\delta}(t_F),$$

donde $\Delta F^{\delta_k}(t_F)$ y $\Delta F^{\delta}(t_F)$ indican la variación lineal del precio del forward causada por un desplazamiento paralelo del tramo $[t_{k-1}, t_k]$ de la curva forward, o de toda la curva forward, respectivamente.

Demostración. Por la proposición 3.4, sabemos que la variación de orden lineal en el precio del forward causada por una variación δ_k constante en un tramo $[t_{k-1}, t_k]$ viene dada por

$$\Delta F^{\delta_k}(t_F) = F^{\delta_k}(t_F) - F(t_F) =$$

$$= \begin{cases} \delta_k \cdot \left(t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq t_F & \\ \delta_k \cdot \left(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k} \right) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_{k-1} \leq t_F \leq t_k & \\ \delta_k \cdot \left(t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_F \leq t_{k-1} < t_k & \end{cases}$$

Puesto que $t_F \in [t_{s-1}, t_s]$, para calcular las variaciones causadas por el desplazamiento de cada tramo, debemos distinguir los casos $k \leq s-1$ ó $k > s$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} \Delta F^{\delta_k}(t_F) &= \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot \left[t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} + \\
&+ \delta_s \cdot \left[t_F \cdot B_0 - t_{s-1} \cdot (B_0 - B_{t_{s-1}}) - D_{t_{s-1}}^{t_s} - t_s \cdot B_{t_s} \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} + \\
&+ \sum_{s+1}^{K} \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}
\end{aligned}$$

Agrupando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} \Delta F^{\delta_k}(t_F) &= \left[\sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot B_0 \cdot (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} + \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - \right. \\
&- \left. \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \delta_s \cdot B_0 \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} = \\
&= \left[B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} + \sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \right. \\
&- \left. \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \delta_s \cdot B_0 \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}
\end{aligned}$$

Como $B_{t_K} = 0$ porque t_K es el tiempo de vencimiento, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} \Delta F^{\delta_k}(t_F) &= \left[B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} + \sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \right. \\
&- \left. \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \delta_s \cdot B_0 \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}
\end{aligned}$$

Utilizando la proposición 3.5, llegamos al resultado deseado:

$$\sum_{k=1}^{K} \Delta F^{\delta_k}(t_F) = \Delta F^{\delta}(t_F).$$

□

Hemos visto, por tanto, que para calcular la variación del precio del forward a causa de un desplazamiento de toda la curva forward, como en el caso del bono basta calcular la variación causada por el desplazamiento de cada tramo de la partición considerada.

Capítulo 4

Aplicación a la cobertura de carteras de bonos de cupón discreto

4.1. Aplicación al valor de un bono de cupón discreto

Hemos visto que la variación sufrida por el precio de un bono cuando la curva forward cambia en varios tramos es igual – si las variaciones son pequeñas – a la suma de la variación provocada por el cambio de cada tramo de la curva forward. Por lo tanto, a partir de ahora podremos limitarnos a estudiar el efecto producido por la variación de un solo tramo cualesquiera.

Hasta el momento, hemos considerado bonos teóricos con cupón continuo, para facilitar los cálculos. Veremos a continuación que los resultados obtenidos son aplicables también a los bonos reales, que pagan cupones discretos. Para ello usaremos la función delta de Dirac.

Definición 4.1. *La función $\delta_D(t-t_0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que cumple*

$$\delta_D(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq t_0 \\ \infty & \text{si} \quad t = t_0 \end{cases}$$

$$\int \delta_D(t-t_0) = 1$$

recibe el nombre de función ***delta de Dirac****.*

Observación. *La función delta de Dirac cumple la siguiente propiedad:*

$$\int_0^\infty \delta_D(t-t_0) \cdot f(t)\, dt = f(t_0), \tag{4.1}$$

para cualquier función $f(t)$.

La función delta de Dirac se usa para describir acciones puntuales sobre sistemas. Dado que un cupón discreto puede considerarse como un cupón continuo pagado de golpe en un momento puntual, la delta de Dirac nos será extremadamente útil en nuestro desarrollo, tal como muestra el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sea B un bono que paga un solo cupón discreto c en $t = T$. La expresión del cupón continuo en términos de la función delta de Dirac es*

$$c(t) = c \cdot \delta_D(t - T).$$

Demostración. Veamos que $c(t)$ cumple la definición que hemos dado para los cupones continuos (es decir, $c(t)$ debe cumplir $\int_0^T c(t)\,dt = c$):

$$\int_0^T c(t)\,dt = \int_0^T c \cdot \delta_D(t-T)\,dt = c \cdot \int_0^T \delta_D(t-T)\,dt$$

Por definición de la función delta de Dirac, tenemos

$$c \cdot \int_0^T \delta_D(t-T)\,dt = c \cdot \int_0^\infty \delta_D(t-T)\,dt = c \cdot 1 = c.$$

□

Si un bono B paga n cupones, veremos entonces que el cupón $c(t)$ se puede definir como una suma de n deltas de Dirac, que reflejan los n pagos puntuales que tienen lugar a lo largo del tiempo.

Lema 4.2. *Sea B un bono que paga un cupón c_r en el momento T_r, con $1 \leq r \leq n$. El valor de los cupones es constante e igual a c, excepto para el último cupón:*

$$c_r = \begin{cases} c & \text{si} \quad r \leq n-1 \\ c + B_T & \text{si} \quad r = n \end{cases}$$

Entonces el cupón continuo puede expresarse como

$$\begin{aligned} c(t) &= c_1 \cdot \delta_D(t - T_1) \, + \, c_2 \cdot \delta_D(t-T_2) \, + \, \cdots \, + \\ &+ \, c_{n-1} \cdot \delta_D(t - T_{n-1}) \, + \, (c + B_T) \cdot \delta_D(t - T). \end{aligned}$$

Demostración. Este lema se sigue inmediatamente del lema 4.1. Sin embargo, veamos a modo de ejemplo que el valor actual del bono utilizando esta definición de cupón continuo coincide con la definición de valor actual de un bono con cupón discreto:

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt = \int_0^T \left(\sum_{r=1}^n c_r \cdot \delta_D(t - T_r) \right) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt = \\ &= \sum_{r=1}^n c_r \cdot \int_0^T \delta_D(t-T_r) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \end{aligned}$$

Por la propiedad 4.1 de la función delta de Dirac, sabemos que

$$\int_0^T \delta_D(t - T_r) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt = e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} B_0 &= \sum_{r=1}^n c_r \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz} = \\ &= \sum_{r=1}^n c_r \cdot \mathcal{D}(T_r), \end{aligned}$$

donde recordamos que $\mathcal{D}(T_r)$ denota el factor de descuento a tiempo T_r. Por tanto, vemos que B_0 es la suma de los cupones descontados al momento 0, tal como cabía esperar. $\square$

Del mismo modo, al definir $c(t)$ mediante la función delta de Dirac podemos extender todos los resultados obtenidos previamente al caso de cupones discretos.

Como hemos visto que el valor actual de un bono es la suma de los valores actualizados de sus cupones discretos, basta estudiar la variación de cada flujo de caja por separado para obtener la variación total de B_0 frente a un cambio de la curva forward. Sabemos también por los resultados de los capítulos anteriores que el cambio debido a una variación en toda la curva es la suma del cambio provocado por la variación de cada tramo de la curva (ver las proposiciones 3.3 y 3.6). Así pues, para estudiar cómo varía el valor del bono cuando se desplaza la curva forward, basta estudiar la variación de un flujo de caja debida al desplazamiento de un solo tramo de la curva.

Proposición 4.1. *Sea B un bono que paga cupones c_r en T_r. Sea δ una variación en toda la curva forward y δ_k, una variación en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$*

i. La variación de orden lineal de un cupón c_r debida a un cambio $\delta_k(t)$ de $f(t)$ en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$ viene dada por:

$$\Delta c_{r,0}^{\delta_k} = c_{r,0}^{\delta_k} - c_{r,0} = \begin{cases} c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq T_r \\ c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (T_r - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} \leq T_r \leq t_k \\ 0 & \text{si} \quad T_r \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

ii. La variación de orden lineal de un cupón c_r debida a un cambio en todos los tramos de la curva es la suma de las variaciones de orden lineal de c_r por el cambio en cada tramo:

$$\Delta c_{r,0}^{\delta} = \sum_{k=1}^{K} \Delta c_{r,0}^{\delta_k}.$$

iii. La variación total de orden lineal de un bono B debida a una variación en la curva forward viene dada por la suma de las variaciones totales de orden lineal de cada cupón:

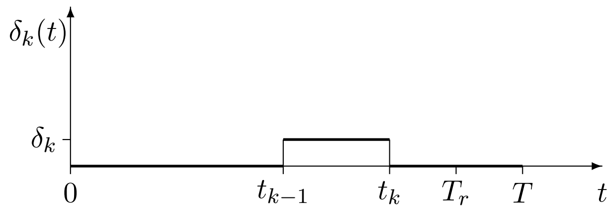
$$\Delta B_0^{\delta} = \sum_{r=1}^{n} \Delta c_{r,0}^{\delta}.$$

Demostración. [1]

i. Sea $c_{r,0}^{\delta_k}$ el valor actualizado del cupón r-ésimo después de un desplazamiento $\delta_k(t)$ en la curva forward. Para calcular el valor de $c_{r,0}^{\delta_k}$, debemos distinguir tres casos, según el tramo donde varía la curva forward $[t_{k-1}, t_k]$ sea anterior, incluya o sea posterior al momento T_r de pago del cupón c_r.

[1]Esta demostración sólo muestra los pasos principales del razonamiento. La demostración completa se adjunta en el apéndice H

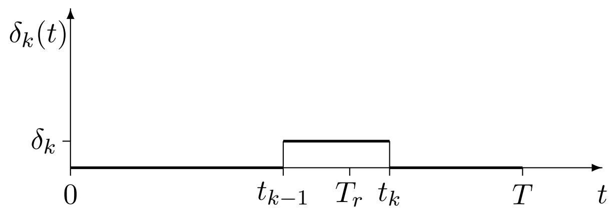
- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es anterior a T_r (es decir, $t_k \leq T_r$),



  entonces, utilizando la propiedad 4.1 de la delta de Dirac, y la aproximación lineal de la función exponencial, tenemos

$$c_{r,0}^{\delta_k} = c_{r,0} \cdot (1 - \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}))$$

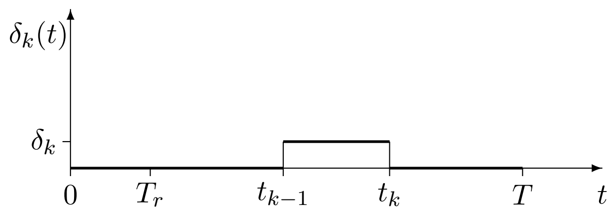
- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ incluye T_r (es decir, $t_{k-1} \leq T_r \leq t_k$),



  entonces

$$c_{r,0}^{\delta_k} = c_{r,0} \cdot (1 - \delta_k \cdot (T_r - t_{k-1}))$$

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es posterior a T_r (es decir, $t_{k-1} \geq T_r$),



  entonces

$$c_{r,0}^{\delta_k} = c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz} = c_{r,0}$$

Por tanto, la expresión de la variación de un cupón c_r debida a un cambio $\delta_k(t)$ de $f(t)$ viene dada por:

$$\Delta c_{r,0}^{\delta_k} = c_{r,0}^{\delta_k} - c_{r,0} = \begin{cases} c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq T_r \\ c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (T_r - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} \leq T_r \leq t_k \\ 0 & \text{si} \quad T_r \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

ii. Por las proposiciones 3.3 y 3.6 sabemos que la variación de orden lineal en toda la curva es la suma del cambio producido por la variación de cada tramo de la curva:

$$\Delta c_{r,0}^{\delta} = \sum_{k=1}^{K} \Delta c_{r,0}^{\delta_k}.$$

iii. Puesto que estamos considerando las variaciones de orden lineal, aplicando los lemas 4.1 y 4.2 se deduce trivialmente que la variación total del bono es la suma de las variaciones sufridas por cada cupón:

$$\Delta B_0^{\delta} = \sum_{r=1}^{n} \Delta c_{r,0}^{\delta}.$$

$\square$

4.2. Aplicación al valor de un forward sobre un bono de cupón discreto

Veremos ahora que para calcular la variación total del precio del forward sobre un bono que paga cupones discretos, basta sumar la variación sufrida por cada cupón, igual que en el caso del bono estudiado en el apartado anterior.

Sabemos que la expresión del valor de un forward sobre un bono B con fecha forward t es:

$$F(t_F) = B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz} - CC(0, t_F),$$

donde $CC(0, t_F)$ es el cupón acumulado desde 0 hasta t_F. Ya hemos visto que el valor del bono viene dado por

$$B_0 = \sum_{r=1}^{n} c_{r,0}$$

Sustituyendo en la expresión del forward,

$$F(t_F) = \sum_{r=1}^{n} c_{r,0} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz} - CC(0, t_F).$$

Por tanto, $F(t_F)$ es suma es los cupones actualizados y financiados a tiempo t_F, previa resta del cupón acumulado $CC(0, t_F)$. Con esto llegamos a la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *La variación sufrida por el precio de un forward $F(t_F)$ debida a un desplazamiento δ_k en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$ de la curva forward viene dada por*

$$\Delta F(t_F) = \sum_{r=1}^{n} \left(c_{r,0}^{\delta_k} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\, dz} - c_{r,0} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz} \right)$$

Demostración. La variación del precio del forward viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta F(t_F) &= F^{\delta_k}(t_F) - F(t_F) = \\ &= \sum_{r=1}^{n} c_{r,0}^{\delta_k} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\, dz} - CC(0, t_F) - \sum_{r=1}^{n} c_{r,0} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz} + CC(0, t_F) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} c_{r,0}^{\delta_k} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - \sum_{r=1}^{n} c_{r,0} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(c_{r,0}^{\delta_k} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - c_{r,0} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \right)$$

□

4.3. Cálculo de los ratios de cobertura

Consideremos una partición de la curva forward en 2 tramos. Sea δ_1 la variación asociada al primer tramo, y δ_2, la del segundo.

Consideremos una cartera formada por dos bonos, B_1 y B_2. Supongamos que queremos cubrir esta cartera con otra cartera formada por dos tipos de forward: forwards $F_1(t_{F_1})$ sobre el bono B_1 y forwards $F_2(t_{F_2})$ sobre el bono B_2, donde t_{F_1} y t_{F_2} indican los momentos futuros en que se adquieren los bonos B_1 y B_2 mediante los forwards F_1 y F_2, respectivamente. La siguiente proposición indica cómo calcular el número N_{F_1} de forwards F_1 y el número N_{F_2} de forwards F_2 necesarios para cubrir la cartera de bonos contra cambios de los tipos de interés.

Proposición 4.3. *Sean N_{F_1} y N_{F_2} el número de forwards $F(t_{F_1})$ y $F(t_{F_2})$ necesarios para cubrir una cartera formada por dos bonos B_1 y B_2. Entonces N_{F_1} y N_{F_2} pueden calcularse resolviendo el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \Delta B_1^{\delta_1} + \Delta B_2^{\delta_1} = N_{F_1} \cdot \Delta F_1^{\delta_1}(t_{F_1}) + N_{F_2} \cdot \Delta F_2^{\delta_1}(t_{F_2}) \\ \Delta B_1^{\delta_2} + \Delta B_2^{\delta_2} = N_{F_1} \cdot \Delta F_1^{\delta_2}(t_{F_1}) + N_{F_2} \cdot \Delta F_2^{\delta_2}(t_{F_2}) \end{cases}$$

Demostración. Para calcular el número de forwards necesarios para cubrir una cartera de bonos debemos calcular el número de forwards que hacen que la cartera a futuro sufra la misma variación que la cartera al contado frente a cambios de los tipos. Para ello calcularemos la variación de ambas carteras debida a un cambio de la curva forward.

Hemos visto en la proposición 4.1 que la variación de orden lineal del precio del bono debido a un desplazamiento δ de la curva f viene dado por:

$$\Delta B^{\delta} = \sum_{r=1}^{n} \Delta c_{r,0}^{\delta}.$$

Si la curva forward sufre una variación δ_1 en el primer tramo, la variación sufrida por los bonos B_1 y B_2 es por tanto

$$\Delta B_1^{\delta_1} = \sum_{r=1}^{n_1} \Delta c_{r_1,0}^{\delta_1}$$

$$\Delta B_2^{\delta_1} = \sum_{r=1}^{n_2} \Delta c_{r_2,0}^{\delta_1},$$

donde c_{r_i} es el cupón pagado por el bono B_i en el momento t_{r_i}, $1 \leq r_i \leq n_i$, $i = 1, 2$.

La variación lineal del precio de la cartera de bonos es

$$\Delta B_1^{\delta_1} + \Delta B_2^{\delta_1}.$$

Y la cartera formada por N_{F_1} forwards F_1 y N_{F_2} forwards F_2 sufre la siguiente variación:

$$N_{F_1} \cdot \Delta F_1^{\delta_1}(t_{F_1}) + N_{F_2} \cdot \Delta F_2^{\delta_1}(t_{F_2})$$

Del mismo modo, podemos calcular las variaciones de las carteras frente a un cambio δ_2 en el segundo tramo de la curva forward:

$$\Delta B_1^{\delta_2} + \Delta B_2^{\delta_2}$$

$$N_{F_1} \cdot \Delta F_1^{\delta_2}(t_{F_1}) + N_{F_2} \cdot \Delta F_2^{\delta_2}(t_{F_2})$$

Puesto que la variación de la cartera a plazo debe compensar la variación de la cartera al contado, para determinar N_{F_1} y N_{F_2} basta resolver el sistema

$$\begin{cases} \Delta B_1^{\delta_1} + \Delta B_2^{\delta_1} = N_{F_1} \cdot \Delta F_1^{\delta_1}(t_{F_1}) + N_{F_2} \cdot \Delta F_2^{\delta_1}(t_{F_2}) \\ \Delta B_1^{\delta_2} + \Delta B_2^{\delta_2} = N_{F_1} \cdot \Delta F_1^{\delta_2}(t_{F_1}) + N_{F_2} \cdot \Delta F_2^{\delta_2}(t_{F_2}) \end{cases}$$

□

Corolario 4.1. *Para calcular la estrategia de cobertura de una cartera formada por M bonos B_1, $B_2, \ldots, B_M$ mediante una cartera formada por M forwards $F_1(t_{F_1})$, $F_2(t_{F_2})$, $\ldots$, $F_M(t_{F_M})$, basta resolver el sistema*

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} \Delta B_i^{\delta_1} \\ \sum_{i=1}^{M} \Delta B_i^{\delta_2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M} B_i^{\delta_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_1^{\delta_1}(t_{F_1}) & \Delta F_2^{\delta_1}(t_{F_2}) & \cdots & \Delta F_M^{\delta_1}(t_{F_M}) \\ \Delta F_1^{\delta_2}(t_{F_1}) & \Delta F_2^{\delta_2}(t_{F_2}) & \cdots & \Delta F_M^{\delta_2}(t_{F_M}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta F_1^{\delta_M}(t_{F_1}) & \Delta F_2^{\delta_M}(t_{F_2}) & \cdots & \Delta F_M^{\delta_M}(t_{F_M}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_{F_1} \\ N_{F_2} \\ \vdots \\ N_{F_M} \end{pmatrix},$$

donde

$$\Delta B_i^{\delta_j} = \sum_{r=1}^{n_i} \Delta c_{r,0}^{\delta_j} = \begin{cases} \sum_{r=1}^{n_i} c_{r,0} \cdot \delta_j \cdot (t_j - t_{j-1}) & \text{si} \quad t_{j-1} < t_j \leq T_r \\ \sum_{r=1}^{n_i} c_{r,0} \cdot \delta_j \cdot (T_r - t_{j-1}) & \text{si} \quad t_{j-1} \leq T_r \leq t_j \\ 0 & \text{si} \quad t_{j-1} < t_j \leq T_r \end{cases}$$

$$\Delta F_i^{\delta_j}(t_{F_i}) = \sum_{r=1}^{n_i} \left(c_{r,0}^{\delta_j} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_j(z)\,dz} - c_{r,0} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \right)$$

Demostración. Basta generalizar la proposición 4.3 al caso de una cartera compuesta por M bonos distintos B_1, $B_2, \ldots, B_M$, cubierta con una cartera formada por N_{F_1} forwards de tipo F_1, N_{F_2} forwards de tipo F_2 y así sucesivamente, hasta N_{F_M} forwards de tipo F_M.

Supongamos que la curva forward está dividida en M tramos distintos, cada uno de los cuales sufre una variación δ_k independiente. Para conseguir una cobertura ajustada, es preciso que la variación de la cartera a plazo sea igual a la variación sufrida por la cartera al contado, para cada variación δ_k independiente. Por tanto, debemos resolver el sistema dado por

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta B_1^{\delta_1}+\cdots+\Delta B_M^{\delta_1}=N_{F_1}\cdot\Delta F_1^{\delta_1}(t_{F_1})+\cdots+N_{F_M}\cdot\Delta F_M^{\delta_1}(t_{F_M}) \\ \Delta B_1^{\delta_2}+\cdots+\Delta B_M^{\delta_2}=N_{F_1}\cdot\Delta F_1^{\delta_2}(t_{F_1})+\cdots+N_{F_M}\cdot\Delta F_M^{\delta_2}(t_{F_M}) \\ \vdots \\ \Delta B_1^{\delta_M}+\cdots+\Delta B_M^{\delta_M}=N_{F_1}\cdot\Delta F_1^{\delta_M}(t_{F_1})+\cdots+N_{F_M}\cdot\Delta F_M^{\delta_M}(t_{F_M}) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \sum_{i=1}^M \Delta B_i^{\delta_1}=N_{F_1}\cdot\Delta F_1^{\delta_1}(t_{F_1})+\cdots+N_{F_M}\cdot\Delta F_M^{\delta_1}(t_{F_M}) \\ \sum_{i=1}^M \Delta B_i^{\delta_2}=N_{F_1}\cdot\Delta F_1^{\delta_2}(t_{F_1})+\cdots+N_{F_M}\cdot\Delta F_M^{\delta_2}(t_{F_M}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M \Delta B_i^{\delta_M}=N_{F_1}\cdot\Delta F_1^{\delta_M}(t_{F_1})+\cdots+N_{F_M}\cdot\Delta F_M^{\delta_M}(t_{F_M}) \end{array}\right.$$

Así pues, vemos finalmente que el cálculo de la estrategia de cobertura se reduce a resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \Delta B_i^{\delta_1} \\ \sum_{i=1}^M \Delta B_i^{\delta_2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M B_i^{\delta_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_1^{\delta_1}(t_{F_1}) & \Delta F_2^{\delta_1}(t_{F_2}) & \cdots & \Delta F_M^{\delta_1}(t_{F_M}) \\ \Delta F_1^{\delta_2}(t_{F_1}) & \Delta F_2^{\delta_2}(t_{F_2}) & \cdots & \Delta F_M^{\delta_2}(t_{F_M}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta F_1^{\delta_M}(t_{F_1}) & \Delta F_2^{\delta_M}(t_{F_2}) & \cdots & \Delta F_M^{\delta_M}(t_{F_M}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_{F_1} \\ N_{F_2} \\ \vdots \\ N_{F_M} \end{pmatrix},$$

donde por la proposición 4.1 sabemos que

$$\Delta B_i^{\delta_j}=\sum_{r=1}^{n_i}\Delta c_{r,0}^{\delta_j}=\left\{\begin{array}{cl} \sum_{r=1}^{n_i} c_{r,0}\cdot\delta_j\cdot(t_j-t_{j-1}) & \text{si} \quad t_{j-1}<t_j\le T_r \\ \sum_{r=1}^{n_i} c_{r,0}\cdot\delta_j\cdot(T_r-t_{j-1}) & \text{si} \quad t_{j-1}\le T_r\le t_j \\ 0 & \text{si} \quad t_{j-1}<t_j\le T_r \end{array}\right.$$

$$\Delta F_i^{\delta_j}(t_{F_i})=\sum_{r=1}^{n_i}\left(c_{r,0}^{\delta_j}\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_j(z)\,dz}-c_{r,0}\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\right)$$

□

Como remarca final, cabe decir que sólo hemos mostrado cómo calcular la cobertura en el caso de que se considere una partición de la curva forward en tantos tramos como instrumentos configuran la cartera de cobertura. Pero también se podría calcular la cobertura tomando una partición de la curva forward formada por un número de tramos mayor que el número de instrumentos de cobertura. En ese caso, la composición de la cartera de cobertura se determinaría minimizando la diferencia entre la variación de la cartera de bonos y la cartera de forwards ante la variación de los distintos tramos de la curva forward (por ejemplo, mediante el procedimiento de mínimos cuadrados).

Apéndices

Apéndice A

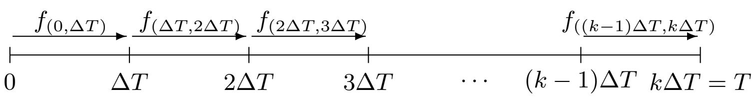
Lema 1.1

Si el mercado es libre de arbitraje, entonces debe cumplirse la siguiente relación entre los tipos spot $s(0,T)$ y las tasas forward implícitas $f(t)$:

$$e^{\int_0^T f(t)\,dt} = e^{s(0,T)\cdot T}.$$

Demostración. Sea 1€ a tiempo $t_0 = 0$. Sabemos, por definición del tipo spot, que su valor a tiempo T es $e^{s(0,T)\cdot T}$.

Por otro lado, podemos considerar una subdivisión del intervalo $[0,T]$ en k trozos iguales de longitud ΔT. En cada subintervalo tenemos un tipo forward al principio del subintervalo para un depósito hecho al fin del subintervalo:



Por ausencia de arbitraje, debe cumplirse la siguiente relación entre el tipo spot y los tipos forward:

$$\begin{aligned}
e^{s(0,T)\cdot T} &= e^{\left[f_{(0,\Delta T)}\cdot\Delta T\right]} \cdot e^{\left[f_{(\Delta T,2\Delta T)}\cdot\Delta T\right]} \cdot\ldots\cdot e^{\left[f_{((k-1)\Delta T,T)}\cdot\Delta T\right]}\\
e^{s(0,T)\cdot T} &= \prod_{i=0}^{k-1} e^{\left[f_{(i\Delta T,(i+1)\Delta T)}\cdot\Delta T\right]}\\
e^{s(0,T)\cdot T} &= e^{\left[\sum_{i=0}^{k-1} f_{(i\Delta T,(i+1)\Delta T)}\cdot\Delta T\right]}
\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$ (equivalentemente, $\Delta T \to 0$), obtenemos:

$$e^{s(0,T)\cdot T} = e^{\int_0^T f(t)\,dt},$$

donde $f(t)$ es el tipo forward implícito. $\square$

Apéndice B

Proposición 2.1

La relación entre la variación del precio del bono y una variación paralela infinitesimal de toda la curva forward viene dada por

$$\boxed{\frac{\partial B_0}{\partial f} = -B_0 \cdot D.}$$

Demostración. La variación en el precio del bono a causa de una variación infinitesimal paralela de la curva forward $f(t)$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_0}{\partial f} &= \lim_{h \to 0} \frac{B_0(f+h) - B_0(f)}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t (f(z)+h)\, dz}\, dt - \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz}\, dt}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t (f(z)+h)\, dz}\, dt - \int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz}\, dt \right] = \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{\left(-\int_0^t f(z)\, dz - h \cdot t\right)}\, dt - \int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz}\, dt \right] = \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz} \cdot e^{-h \cdot t}\, dt - \int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz}\, dt \right] = \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz} \cdot (e^{-h \cdot t} - 1)\, dt \right]
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la función exponencial puede desarrollarse en serie mediante la expresión

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots,$$

podemos sustituir $e^{-h \cdot t}$ en la expresión del límite por su serie de potencias:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \left[\int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz} \cdot (e^{-h \cdot t} - 1)\, dt \right] = \\
= &\lim_{h \to 0} \left[\int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\, dz} \cdot \left(1 + (-h \cdot t) + \frac{(-h \cdot t)^2}{2} + \cdots - 1 \right) dt \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \left[\int_0^T h^{-1} \cdot c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \left(-h \cdot t + \frac{(h \cdot t)^2}{2} + \cdots \right) dt \right] = \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \left(-t + \frac{h \cdot t^2}{2} + \cdots \right) dt \right] = \\
&= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot (-t)\,dt = \\
&= -B_0 \cdot \left(\frac{1}{B_0} \cdot \int_0^T c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \right) = \\
&= -B_0 \cdot D.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{\partial B_0}{\partial f} = -B_0 \cdot D.}$$

□

Apéndice C

Proposición 2.2

La relación entre la variación del precio de un forward sobre un bono y una variación paralela infinitesimal de toda la curva forward viene dada por

$$\boxed{\frac{\partial F(t_F)}{\partial f} = B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \cdot (t_F - D).}$$

Demostración. La expresión del precio del forward viene dada por

$$F(t_F) = B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - \int_0^{t_F} c(t)\,dt.$$

La variación del precio del forward provocada por una variación infinitesimal en toda la curva forward se puede calcular mediante el límite

$$\frac{\partial F(t_F)}{\partial f} = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_F, f+h) - F(t_F, f)}{h}.$$

Antes de determinar el valor del límite, desarrollamos el numerador:

$$\begin{aligned}
F(t_F, f+h) - F(t_F, f) &= B_0(f+h) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+h\,dz} - \int_0^{t_F} c(t)\,dt - \\
&- B_0(f) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} + \int_0^{t_F} c(t)\,dt = \\
&= \left(\int_0^T c(t) \cdot e^{(-\int_0^t f(z)\,dz - ht)}\,dt\right) \cdot e^{\left(\int_0^{t_F} f(z)\,dz + h \cdot t_F\right)} - \\
&- \left(\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} = \\
&= \left(\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-h \cdot t}\,dt\right) \cdot e^{\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{h \cdot t_F} - \\
&- \left(\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}
\end{aligned}$$

Utilizando el desarrollo de la función exponencial en serie de potencias

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots,$$

obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& F(t_F, f+h) - F(t_F, f) = \left[\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot\left(1-h\cdot t+\frac{h^2\cdot t^2}{2}+\mathcal{O}(h^3)\right)\,dt\right]\cdot \\
& \cdot \quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\left(1+h\cdot t_F+\frac{h^2\cdot {t_F}^2}{2}+\mathcal{O}(h^3)\right)- \\
& - \quad \left(\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} = \\
= \; & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\left[\left(\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - h\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right.\right. + \\
& + \quad \left.\frac{h^2}{2}\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t^2\,dt\right)\cdot\left(1+h\cdot t_F+\frac{h^2}{2}\cdot {t_F}^2\right)- \\
& - \quad \left.\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\mathcal{O}(h^3)\right] = \\
= \; & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\left[\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - h\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right. + \\
& + \quad \frac{h^2}{2}\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t^2\,dt + h\cdot t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \\
& - \quad h^2\cdot t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt+\frac{h^2}{2}\cdot t_F^2\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \\
& - \quad \left.\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\mathcal{O}(h^3)\right] = \\
= \; & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\left[h\cdot\left(t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right)\right. + \\
& + \quad \frac{h^2}{2}\cdot\left(\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t^2\,dt - 2t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right. + \\
& + \quad \left.\left.t_F^2\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right)+\mathcal{O}(h^3)\right]
\end{aligned}
$$

Sustituimos ahora en la expresión del límite:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F(t_F)}{\partial f} \quad & = \quad \lim_{h\to 0}\frac{F(t_F, f+h)-F(t_F,h)}{h} = \\
& = \quad \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}.\right. \\
& \quad\quad \cdot \quad \left[h\cdot\left(t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right)\right. + \\
& \quad\quad + \quad \frac{h^2}{2}\cdot\left(\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t^2\,dt - 2t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right. + \\
& \quad\quad + \quad \left.\left.\left.t_F^2\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right)+\mathcal{O}(h^3)\right]\right\} = \\
& = \quad \lim_{h\to 0}\left\{e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}.\right. \\
& \quad\quad \cdot \quad \left[\left(t_F\cdot\int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot t\,dt\right)\right. +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{h}{2} \cdot \left(\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot t^2\,dt - 2t_F \cdot \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot t\,dt \right. + \\
&+ \quad \left. t_F^2 \cdot \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \right) + \mathcal{O}(h^2) \Big] \Big\} = \\
= \quad & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \cdot \left(t_F \cdot \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot t\,dt \right) = \\
= \quad & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \cdot (t_F \cdot B_0 - B_0 \cdot D) = \\
= \quad & B_0 \cdot e^{\int_0^t f(z)\,dz} \cdot (t_F - D).
\end{aligned}
$$

□

Apéndice D

Proposición 3.1

Si la curva forward sufre un desplazamiento $\delta_k(t)$ en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$, entonces la variación de orden lineal en δ_k sufrida por el precio del bono viene dada por

$$\Delta B_0^{\delta_k} = \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right],$$

donde

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt.$$

Demostración. Notamos el valor del bono después de la variación δ_k de los tipos de interés por $B_0^{\delta_k}$. Para calcular $B_0^{\delta_k}$ basta actualizar el cupón continuo con los nuevos tipos de interés:

$$\begin{aligned} B_0^{\delta_k} &= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt = \\ &= \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt + \\ &+ \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt \end{aligned}$$

Como $\delta_k(t)$ es constante en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$, y vale 0 fuera de este tramo, obtenemos:

$$\begin{aligned} B_0^{\delta_k} &= \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{\left(-\int_0^t f(z)\,dz - \delta_k \cdot (t - t_{k-1})\right)}\,dt + \\ &+ \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{\left(-\int_0^t f(z)\,dz - \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})\right)}\,dt = \\ &= \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)}\,dz \cdot e^{-\delta_k \cdot (t - t_{k-1})}\,dt + \\ &+ \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-\delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})}\,dt \end{aligned}$$

Usando la aproximación lineal de la función exponencial

$$e^x = 1 + x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^{-\delta_k \cdot (t - t_{k-1})} = 1 + (-\delta_k \cdot (t - t_{k-1})) \\ e^{-\delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})} = 1 + (-\delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})) \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} B_0^{\delta_k} &= \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)}\,dz \cdot [1 - \delta_k \cdot (t - t_{k-1})]\,dt + \\ &+ \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot [1 - \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})]\,dt = \\ &= \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \\ &- \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \delta_k \cdot (t - t_{k-1})\,dt + \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \\ &- \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})\,dt \end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\begin{aligned} B_0^{\delta_k} &= \int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \\ &- \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \delta_k \cdot t\,dt - \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \delta_k \cdot t_k\,dt + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \delta_k \cdot t_{k-1}\,dt + \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \delta_k \cdot t_{k-1}\,dt = \\ &= \int_0^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \delta_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot t\,dt - \\ &- \delta_k \cdot t_k \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \delta_k \cdot t_{k-1} \int_{t_{k-1}}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión del precio de un bono

$$B_0 = \int_0^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

y definiendo

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} B_0^{\delta_k} &= B_0 - \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \delta_k \cdot t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} = \\ &= B_0 + \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right] \end{aligned}$$

Si notamos la variación del valor actual del bono debida a un cambio $\delta_k(t)$ en la curva forward como $\Delta B_0^{\delta_k}$, tenemos:

$$\Delta B_0^{\delta_k} = B_0^{\delta_k} - B_0 = \delta_k \cdot \left[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \right].$$

□

Apéndice E

Proposición 3.2

Si la curva forward sufre un desplazamiento $\delta(t)$ de la forma dada en la ecuación 3.1, entonces la variación de orden lineal en δ_k sufrida por el precio del bono viene dada por

$$\Delta B_0^\delta = B_0^\delta - B_0 = \sum_{k=1}^{K-1} t_k \cdot B_{t_k} \cdot (\delta_{k+1} - \delta_k) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k},$$

donde B_0^δ es el valor actual del bono cuando la curva forward ha sufrido una variación $\delta(t)$.

Demostración. Sea B_0^δ el valor actual del bono cuando la curva forward ha sufrido una variación $\delta(t)$:

$$\begin{aligned}
B_0^\delta &= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta(z)\,dz}\,dt = \\
&= \int_0^{t_1} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta(z)\,dz}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta(z)\,dz}\,dt + \cdots + \\
&\quad + \int_{t_{K-1}}^{t_K} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta(z)\,dz}\,dt = \\
&= \int_0^{t_1} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz - \delta_1 \cdot t}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz - (\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t - t_1)}\,dt + \cdots + \\
&\quad + \int_{t_{K-1}}^{t_K} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz - (\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + \delta_{K-1} \cdot (t_{K-1} - t_{K-2}) + \delta_K \cdot (t - t_{K-1}))}\,dt = \\
&= \int_0^{t_1} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-\delta_1 \cdot t}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-[\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t - t_1)]}\,dt + \cdots + \\
&\quad + \int_{t_{K-1}}^{t_K} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-[\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + \delta_{K-1} \cdot (t_{K-1} - t_{K-2}) + \delta_K \cdot (t - t_{K-1})]}\,dt
\end{aligned}$$

Utilizando como antes la aproximación lineal de la exponencial, obtenemos:

$$B_0^\delta = \int_0^{t_1} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-\delta_1 \cdot t}\,dt +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{t_1}^{t_2} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-[\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t - t_1)]}\, dt + \cdots + \\
&+ \int_{t_{K-1}}^{t_K} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot e^{-[\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + \delta_{K-1} \cdot (t_{K-1} - t_{K-2}) + \delta_K \cdot (t - t_{K-1})]}\, dt = \\
= &\int_0^{t_1} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot (1 - \delta_1 \cdot t)\, dt + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot [1 - (\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t - t_1))]\, dt + \cdots + \\
&+ \int_{t_{K-1}}^{t_K} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot [1 - (\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + \\
&+ \delta_{K-1} \cdot (t_{K-1} - t_{K-2}) + \delta_K \cdot (t - t_{K-1}))]\, dt
\end{aligned}
$$

De forma más compacta,

$$
B_0^\delta = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz} \cdot \left(1 - \left[\sum_{i=1}^{k} (\delta_i \cdot (t_i - t_{i-1})) + \delta_{k+1} \cdot (t - t_k) \right] \right) \right\}
$$

Agrupando términos, obtenemos

$$
\begin{aligned}
B_0^\delta = &\int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; - \; \delta_1 \cdot t_1 \cdot \int_{t_1}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; + \\
&+ \delta_2 \cdot t_1 \cdot \int_{t_1}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; + \; \delta_3 \cdot t_2 \cdot \int_{t_2}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt + \cdots + \\
&+ \delta_K \cdot t_{K-1} \cdot \int_{t_{K-1}}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; - \; \delta_2 \cdot t_2 \cdot \int_{t_2}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; - \\
&- \delta_3 \cdot t_3 \cdot \int_{t_3}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; - \cdots - \; \delta_{K-1} \cdot t_{K-1} \cdot \int_{t_{K-1}}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; - \\
&- \delta_1 \cdot \int_0^{t_1} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; - \; \delta_2 \cdot \int_{t_1}^{t_2} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \; - \cdots - \\
&- \delta_K \cdot \int_{t_{K-1}}^{t_K} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt
\end{aligned}
$$

Empleando las notaciones anteriormente introducidas,

$$
D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt
$$

$$
B_{t_k} = \int_{t_k}^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt,
$$

llegamos a

$$
\begin{aligned}
B_0^\delta = \; &B_0 - \delta_1 \cdot t_1 \cdot B_{t_1} + \delta_2 \cdot t_1 \cdot B_{t_1} + \delta_3 \cdot t_2 \cdot B_{t_2} + \cdots + \delta_K \cdot t_{K-1} \cdot B_{t_{K-1}} - \\
&- \delta_2 \cdot t_2 \cdot B_{t_2} - \delta_3 \cdot t_3 \cdot B_{t_3} - \cdots - \delta_{K-1} \cdot t_{K-1} \cdot B_{t_{K-1}} - \\
&- \delta_1 \cdot D_0^{t_1} - \delta_2 \cdot D_{t_1}^{t_2} - \cdots - \delta_K \cdot D_{t_{K-1}}^{t_K} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= B_0 + \sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} = \\
&= B_0 + \sum_{k=1}^{K-1} t_k \cdot B_{t_k} \cdot (\delta_{k+1} - \delta_k) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}.
\end{aligned}
$$

Entonces la variación del valor actual del bono debida al cambio $\delta(t)$ en la curva forward viene dado por:

$$
\Delta B_0^\delta = B_0^\delta - B_0 = \sum_{k=1}^{K-1} t_k \cdot B_{t_k} \cdot (\delta_{k+1} - \delta_k) - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}.
$$

$\square$

Apéndice F

Proposición 3.4

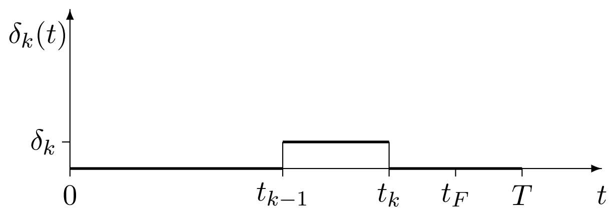
La variación de orden lineal del precio del forward $F(t_F)$ a causa de un desplazamiento δ_k en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$ de la curva forward, $\Delta F^{\delta_k}(t_F)$, viene dada por

$$\Delta F^{\delta_k}(t_F) = F^{\delta_k}(t_F) - F(t_F) =$$

$$= \begin{cases} \delta_k \cdot \Big(t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz}, & \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq t_F \\ \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz}, & \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_{k-1} \leq t_F \leq t_k \\ \delta_k \cdot \Big(t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\, dz}, & \\ \qquad\qquad \text{si} \quad t_F \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que la curva forward sufre una variación δ_k en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$. Sea $F^{\delta_k}(t_F)$ el precio del forward calculado con la nueva curva forward. Para conocer su valor, es necesario distinguir tres casos, según si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es anterior, incluye o es posterior a la fecha forward t_F.

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es anterior a t_F (es decir, $t_k \leq t_F$),



  entonces

$$\begin{aligned} F^{\delta_k}(t_F) &= B_0^{\delta_k} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\, dz} - CC(0, t_F) = \\ &= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\, dz}\, dt \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\, dz} - CC(0, t_F) = \\ &= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\, dz}\, dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\, dz}\, dt + \right. \end{aligned}$$

$$+\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt\Big)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - CC(0,t_F)$$

Empleando la definición de $\delta_k(t)$,

$$\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})}\,dt+\\
&+\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})}\,dt\Bigg)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})} -\\
&- \quad CC(0,t_F) =\\
&= \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot e^{-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})}\,dt+\\
&+\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot e^{-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})}\,dt\Bigg)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot e^{\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})} -\\
&- \quad CC(0,t_F)
\end{aligned}$$

Utilizando la aproximación lineal de la exponencial,

$$\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \quad +\\
&+\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})]\,dt \quad +\\
&+\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\,dt\Bigg)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot\\
&\cdot \quad [1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})] - CC(0,t_F) =\\
&= \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\,dt \quad +\\
&+\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})]\cdot[1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\,dt \quad +\\
&+\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\cdot[1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\,dt\Bigg)\cdot\\
&\cdot \quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F) =\\
&= \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\,dt \quad +\\
&+\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})-\\
&- \quad \delta_k^2\cdot(t-t_{k-1})\cdot(t_k-t_{k-1})\big]\,dt \quad +\\
&+\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot\big[1-\delta_k^2\cdot(t_k-t_{k-1})^2\big]\,dt\Bigg)\cdot\\
&\cdot \quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F)
\end{aligned}$$

Puesto que tomamos variaciones δ_k infinitesimales y consideramos sólo la aproximación lineal, podemos despreciar los términos que contienen δ_k^2:

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\,dt \quad + \right.\\
&\quad + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})]\,dt \quad +\\
&\quad \left. + \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F) =\\
&= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \right.\\
&\quad + \delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt +\\
&\quad + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \delta_k\cdot t_k\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt -\\
&\quad \left. - \delta_k\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot t\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right)\cdot\\
&\quad \cdot \;\; e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F)
\end{aligned}
$$

Agrupando términos,

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \left(\int_0^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \delta_k\cdot t_k\cdot\int_0^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt - \right.\\
&\quad - \quad \delta_k\cdot t_{k-1}\cdot\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt -\\
&\quad \left. - \quad \delta_k\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot t\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\right)\cdot\\
&\quad \cdot \;\; e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F)
\end{aligned}
$$

Recordando la definición de B_0 y retomando las notaciones

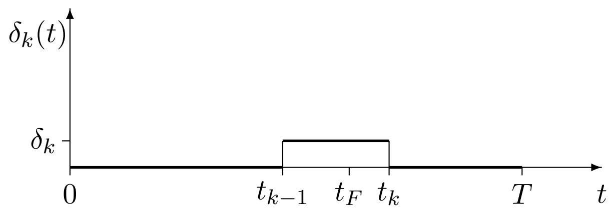
$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot t\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \left(B_0+\delta_k\cdot t_k\cdot(B_0-B_{t_k})-\delta_k\cdot t_{k-1}\cdot(B_0-B_{t_{k-1}})-\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}\right)\cdot\\
&\quad \cdot \;\; e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F) =\\
&= \left[B_0+\delta_k\cdot\left(t_k\cdot(B_0-B_{t_k})-t_{k-1}\cdot(B_0-B_{t_{k-1}})-D_{t_{k-1}}^{t_k}\right)\right]\cdot\\
&\quad \cdot \;\; e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F) =\\
&= B_0\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0,t_F) +\\
&\quad + \delta_k\cdot\left(t_k\cdot(B_0-B_{t_k})-t_{k-1}\cdot(B_0-B_{t_{k-1}})-D_{t_{k-1}}^{t_k}\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} =\\
&= F(t_F)+\delta_k\cdot\left(t_k\cdot(B_0-B_{t_k})-t_{k-1}\cdot(B_0-B_{t_{k-1}})-D_{t_{k-1}}^{t_k}\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}
\end{aligned}
$$

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ incluye t_F (es decir, $t_{k-1} \leq t_F \leq t_k$),



entonces

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= B_0^{\delta_k} \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - CC(0,t_F) = \\
&= \int_0^T c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - CC(0,t_F) = \\
&= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt + \right.\\
&\quad \left. + \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)+\delta_k(z)\,dz} - CC(0,t_F)
\end{aligned}
$$

Empleando la definición de $\delta_k(t)$,

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})}\,dt + \right.\\
&\quad \left. + \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})}\,dt\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})} - \\
&\quad - \ CC(0,t_F) = \\
&= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot e^{-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})}\,dt + \right.\\
&\quad \left. + \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot e^{-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})}\,dt\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\cdot e^{\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})} - \\
&\quad - \ CC(0,t_F)
\end{aligned}
$$

Utilizando la aproximación lineal de la exponencial,

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) &= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt \quad + \right.\\
&+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})]\,dt \quad + \\
&+ \left.\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\,dt\right)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}\,\cdot \\
&\cdot \ [1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})] - CC(0,t_F) = \\
&= \left(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})]\,dt + \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ &\quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})]\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})]\;dt+\\
+ &\quad \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})]\;dt\Bigg)\cdot\\
\cdot &\quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}-CC(0,t_F)=\\
= &\quad \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})]\;dt\quad +\\
+ &\quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})-\\
- &\quad \delta_k^2\cdot(t-t_{k-1})\cdot(t_F-t_{k-1})\big]\;dt+\\
+ &\quad \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})-\\
- &\quad \delta_k^2\cdot(t_k-t_{k-1})\cdot(t_F-t_{k-1})\big]\;dt\Big)\cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}-CC(0,t_F)
\end{aligned}
$$

Puesto que tomamos variaciones δ_k infinitesimales y consideramos sólo la aproximación lineal, podemos despreciar los términos que contienen δ_k^2:

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) \;=&\quad \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})]\;dt+\\
+ &\quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})-\delta_k\cdot(t-t_{k-1})]\;dt+\\
+ &\quad \int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\cdot[1+\delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})-\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})]\;dt\Bigg)\cdot\\
\cdot &\quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}-CC(0,t_F)=\\
= &\quad \Bigg(\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\\
+ &\quad \delta_k\cdot(t_F-t_{k-1})\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\\
+ &\quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\delta_k\cdot t_F\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt-\\
- &\quad \delta_k\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t)\cdot t\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\\
+ &\quad \delta_k\cdot t_F\cdot\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt-\delta_k\cdot t_k\cdot\int_{t_k}^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt\Bigg)\cdot\\
\cdot &\quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}-CC(0,t_F)
\end{aligned}
$$

Agrupando términos,

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) \;=&\quad \Bigg(\int_0^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt+\delta_k\cdot t_F\cdot\int_0^{T} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt-\\
- &\quad \delta_k\cdot t_{k-1}\cdot\int_0^{t_{k-1}} c(t)\cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\,dt-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- \quad & \delta_k \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt - \\
- \quad & \delta_k \cdot t_k \cdot \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt \Big) \cdot \quad e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F)
\end{aligned}
$$

Recordando la definición de B_0 y retomando las notaciones

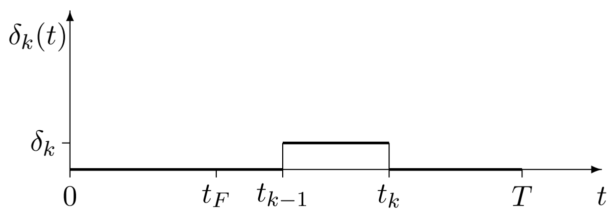
$$B_{t_k} = \int_{t_k}^{T} c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt$$

$$D_{t_{k-1}}^{t_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} c(t) \cdot t \cdot e^{-\int_0^t f(z)\,dz}\, dt$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
F^{\delta_k}(t_F) \quad = \quad & \Big(B_0 + \delta_k \cdot t_F \cdot B_0 - \delta_k \cdot t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} - \\
- \quad & \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k}\big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F) = \\
= \quad & \Big[B_0 + \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k}\Big)\Big] \cdot \\
\cdot \quad & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F) = \\
= \quad & B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F) + \\
+ \quad & \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - \\
- \quad & t_k \cdot B_{t_k}\big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} = \\
= \quad & F(t_F) + \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - \\
- \quad & t_k \cdot B_{t_k}\big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}
\end{aligned}
$$

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es posterior a t_F (es decir, $t_F \leq t_{k-1}$),



entonces de forma análoga a los casos anteriores se demuestra que el valor del forward viene dado por

$$F^{\delta_k}(t_F) = F(t_F) + \delta_k \cdot \Big[t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k}\Big] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}$$

Por tanto, hemos visto que el valor del forward cuando varía el tramo k-ésimo de la curva forward viene dado por

$$F^{\delta_k}(t_F) = \begin{cases} F(t_F) + \delta_k \cdot \Big(t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq t_F \\ F(t_F) + \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_{k-1} \leq t_F \leq t_k \\ F(t_F) + \delta_k \cdot \Big(t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_F \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

y por consiguiente, la variación de su valor es

$$\Delta F^{\delta_k}(t_F) = F^{\delta_k}(t_F) - F(t_F) =$$

$$= \begin{cases} \delta_k \cdot \Big(t_k \cdot (B_0 - B_{t_k}) - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq t_F \\ \delta_k \cdot \Big(t_F \cdot B_0 - t_{k-1} \cdot (B_0 - B_{t_{k-1}}) - D_{t_{k-1}}^{t_k} - t_k \cdot B_{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_{k-1} \leq t_F \leq t_k \\ \delta_k \cdot \Big(t_{k-1} \cdot B_{t_{k-1}} - t_k \cdot B_{t_k} - D_{t_{k-1}}^{t_k} \Big) \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}, & \\ \qquad \text{si} \quad t_F \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

$\square$

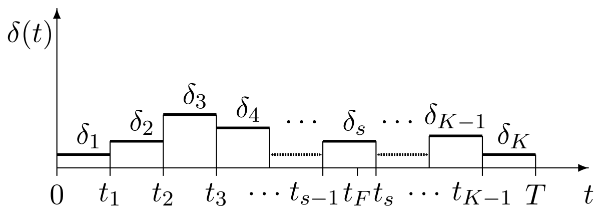
Apéndice G

Proposición 3.5

La variación de orden lineal del precio del forward $F(t_F)$ a causa de un desplazamiento δ en la curva forward, $\Delta F^\delta(t_F)$, viene dada por

$$\begin{aligned}\Delta F^\delta(t_F) &= \Bigg[\sum_{k=1}^{K-1}\delta_{k+1}\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K-1}\delta_k\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}+\\ &+ B_0\cdot\sum_{k=1}^{s-1}\delta_k\cdot(t_k-t_{k-1})+B_0\cdot\delta_s\cdot(t_F-t_{s-1})\Bigg]\cdot e^{\int_0^{t_F}f(z)\,dz}.\end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que la fecha forward está contenida en el tramo $[t_{s-1},t_s]$:



Sea $F^\delta(t_F)$ el valor actual del bono cuando la curva forward ha sufrido una variación $\delta(t)$:

$$F^\delta(t_F)=B_0^\delta\cdot e^{\int_0^{t_F}f(z)+\delta(z)\,dz}-CC(0,t_F)$$

Empleando el desarrollo que hemos encontrado para B_0^δ en la proposición 3.2, tenemos:

$$\begin{aligned}F^\delta(t_F) &= \left[B_0+\sum_{k=1}^{K-1}\delta_{k+1}\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K-1}\delta_k\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}\right]\cdot\\ &\cdot\; e^{\int_0^{t_F}f(z)+\delta(z)\,dz}-CC(0,t_F)=\\ &= \left[B_0+\sum_{k=1}^{K-1}\delta_{k+1}\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K-1}\delta_k\cdot t_k\cdot B_{t_k}-\sum_{k=1}^{K}\delta_k\cdot D_{t_{k-1}}^{t_k}\right]\cdot\\ &\cdot\; e^{\left(\int_0^{t_F}f(z)\,dz+\delta_1\cdot t_1+\delta_2\cdot(t_2-t_1)+\cdots+\delta_s\cdot(t_F-t_{s-1})\right)}-CC(0,t_F)=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left[B_0 + \sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} \right] \cdot \\
\cdot \quad & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \cdot e^{(\delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1}))} - CC(0, t_F)
\end{aligned}
$$

Empleando la aproximación lineal de la exponencial, tenemos:

$$
\begin{aligned}
F^{\delta}(t_F) \quad = \quad & \left[B_0 + \sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} \right] \cdot \\
\cdot \quad & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} \cdot (1 + \delta_1 \cdot t_1 + \delta_2 \cdot (t_2 - t_1) + \cdots + \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1})) - \\
- \quad & CC(0, t_F)
\end{aligned}
$$

Puesto que sólo consideramos la aproximación de orden lineal, podemos despreciar los términos de orden mayor en δ_k:

$$
\begin{aligned}
F^{\delta}(t_F) \quad = \quad & \left[B_0 + \sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \right. \\
+ \quad & \left. B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) + B_0 \cdot \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot \\
\cdot \quad & e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F) = \\
= \quad & B_0 \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} - CC(0, t_F) + \\
+ \quad & \left[\sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \right. \\
+ \quad & \left. B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) + B_0 \cdot \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz} = \\
= \quad & F(t_F) + \left[\sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \right. \\
+ \quad & \left. B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) + B_0 \cdot \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}
\end{aligned}
$$

Entonces la variación del valor del forward sobre un bono debida al cambio $\delta(t)$ en la curva forward viene dado por:

$$
\begin{aligned}
\Delta F^{\delta}(t_F) \quad = \quad & F^{\delta}(t_F) - F(t_F) = \\
= \quad & \left[\sum_{k=1}^{K-1} \delta_{k+1} \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K-1} \delta_k \cdot t_k \cdot B_{t_k} - \sum_{k=1}^{K} \delta_k \cdot D_{t_{k-1}}^{t_k} + \right. \\
+ \quad & \left. B_0 \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) + B_0 \cdot \delta_s \cdot (t_F - t_{s-1}) \right] \cdot e^{\int_0^{t_F} f(z)\,dz}.
\end{aligned}
$$

□

Apéndice H

Proposición 4.1

Sea B un bono que paga cupones c_r en T_r. Sea δ una variación en toda la curva forward y δ_k, una variación en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$

i. La variación de orden lineal de un cupón c_r debida a un cambio $\delta_k(t)$ de $f(t)$ en el tramo $[t_{k-1}, t_k]$ viene dada por:

$$\Delta c_{r,0}^{\delta_k} = c_{r,0}^{\delta_k} - c_{r,0} = \begin{cases} c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq T_r \\ c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (T_r - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} \leq T_r \leq t_k \\ 0 & \text{si} \quad T_r \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}$$

ii. La variación de orden lineal de un cupón c_r debida a un cambio en todos los tramos de la curva es la suma de las variaciones de orden lineal de c_r por el cambio en cada tramo:

$$\Delta c_{r,0}^{\delta} = \sum_{k=1}^{K} \Delta c_{r,0}^{\delta_k}.$$

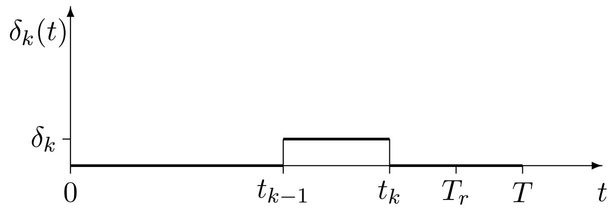
iii. La variación total de orden lineal de un bono B debida a una variación en la curva forward viene dada por la suma de las variaciones totales de orden lineal de cada cupón:

$$\Delta B_0^{\delta} = \sum_{r=1}^{n} \Delta c_{r,0}^{\delta}.$$

Demostración.

i. Sea $c_{r,0}^{\delta_k}$ el valor actualizado del cupón r-ésimo después de un desplazamiento $\delta_k(t)$ en la curva forward. Para calcular el valor de $c_{r,0}^{\delta_k}$, debemos distinguir tres casos, según el tramo donde varía la curva forward $[t_{k-1}, t_k]$ sea anterior, incluya o sea posterior al momento T_r de pago del cupón c_r.

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es anterior a T_r (es decir, $t_k \leq T_r$),



entonces

$$\begin{aligned} c_{r,0}^{\delta_k} &= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt = \\ &= \int_0^T c \cdot \delta_D(t - T_r) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt \end{aligned}$$

Por la propiedad 4.1 de la delta de Dirac, tenemos:

$$\begin{aligned} c_{r,0}^{\delta_k} &= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)+\delta_k(z)\,dz} = \\ &= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz + \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})} = \\ &= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz} \cdot e^{\delta_k \cdot (t_k - t_{k-1})} \end{aligned}$$

Utilizando la aproximación lineal de la exponencial, obtenemos:

$$c_{r,0}^{\delta_k} = c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz} \cdot (1 - \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}))$$

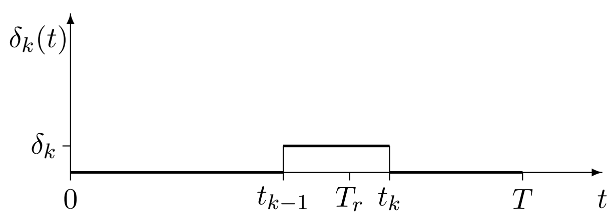
Teniendo en cuenta que el valor actual $c_{r,0}$ del cupón r-ésimo viene dado por

$$c_{r,0} = c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz},$$

la fórmula queda como

$$c_{r,0}^{\delta_k} = c_{r,0} \cdot (1 - \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}))$$

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ incluye T_r (es decir, $t_{k-1} \leq T_r \leq t_k$),

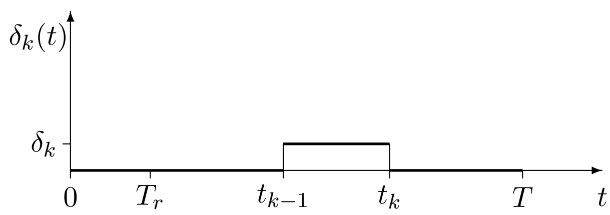


entonces

$$c_{r,0}^{\delta_k} = \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\,dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T c \cdot \delta_D(t - T_r) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\, dt = \\
&= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)+\delta_k(z)\,dz} = \\
&= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz + \delta_k \cdot (T_r - t_{k-1})} = \\
&= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz} \cdot e^{\delta_k \cdot (T_r - t_{k-1})} = \\
&= c_{r,0} \cdot (1 - \delta_k \cdot (T_r - t_{k-1}))
\end{aligned}
$$

- Si el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es posterior a T_r (es decir, $t_{k-1} \geq T_r$),



entonces

$$
\begin{aligned}
c_{r,0}^{\delta_k} &= \int_0^T c(t) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\, dt = \\
&= \int_0^T c \cdot \delta_D(t - T_r) \cdot e^{-\int_0^t f(z)+\delta_k(z)\,dz}\, dt = \\
&= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)+\delta_k(z)\,dz} = \\
&= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz} = \\
&= c \cdot e^{-\int_0^{T_r} f(z)\,dz} = \\
&= c_{r,0}
\end{aligned}
$$

Por tanto, la expresión de la variación de un cupón c_r debida a un cambio $\delta_k(t)$ de $f(t)$ viene dada por:

$$
\Delta c_{r,0}^{\delta_k} = c_{r,0}^{\delta_k} - c_{r,0} = \begin{cases} c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (t_k - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} < t_k \leq T_r \\ c_{r,0} \cdot \delta_k \cdot (T_r - t_{k-1}) & \text{si} \quad t_{k-1} \leq T_r \leq t_k \\ 0 & \text{si} \quad T_r \leq t_{k-1} < t_k \end{cases}
$$

ii. Por las proposiciones 3.3 y 3.6 sabemos que la variación de orden lineal en toda la curva es la suma del cambio producido por la variación de cada tramo de la curva:

$$
\Delta c_{r,0}^{\delta} = \sum_{k=1}^{K} \Delta c_{r,0}^{\delta_k}.
$$

iii. Puesto que estamos considerando las variaciones de orden lineal, aplicando los lemas 4.1 y 4.2 se deduce trivialmente que la variación total del bono es la suma de las variaciones sufridas por cada cupón:

$$
\Delta B_0^{\delta} = \sum_{r=1}^{n} \Delta c_{r,0}^{\delta}.
$$

□

Bibliografía

Grandville, O. *Bond Pricing and Portfolio Analysis. Protecting Investors in the Long Run.* The MIT Press. Cambridge, 2001.

Plona, C. *The European Bond Basis. An In-Depth Analysis for Hedgers, Speculators and Arbitrageurs.* Ed. Irwing. Chicago, 1997.