Estructures Multigraduades i la Profunditat d'Àlgebres de Blow-up

Gemma Colomé i Nin

Un primer objectiu d'aquesta tesi és contribuir al coneixement de propietats cohomològiques de mòduls multigraduats no-estàndard. En particular estudiem la funció de Hilbert d'un mòdul multigraduat no-estàndard, la profunditat asimptòtica de les components homogènies d'un mòdul multigraduat i la profunditat asimptòtica dels mòduls de Veronese. Per a això, generalitzem alguns invariants cohomològics en el cas multigraduat no-estàndard i estudiem propietats d'anul·lació de mòduls de cohomologia local. En particular estudiem la profunditat generalitzada d'un mòdul multigraduat.

En els capítols 2, 3 i 4, considerem anells multigraduats S finitament generats sobre l'anell local $S_{\underline{0}}$ per elements de graus $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ amb $\gamma_i = (\gamma_1^i, \ldots, \gamma_i^i, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^r$ i $\gamma_i^i \neq 0$ per a $i = 1, \ldots, r$. Al Capítol 2, demostrem que la funció de Hilbert d'un S-mòdul multigraduat és quasi-polinòmica en un con de $\mathbb{N}^r$. A més es satisfà la fórmula de Grothendieck-Serre en la nostra situació.

Al Capítol 3, utilitzant el comportament quasi-polinòmic de la funció de Hilbert dels mòduls d'homologia de Koszul d'un S-mòdul M multigraduat respecte d'un sistema de generadors de l'ideal maximal de $S_{\underline{0}}$, podem demostrar que la profunditat de les components homogènies de M és constant per a graus en una subxarxa d'un con de $\mathbb{N}^r$ definit per $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. En alguns casos es pot assegurar profunditat constant en tot un con. Considerant els anells de blow-up multigraduats associats a ideals $I_1, \ldots, I_r$ en un anell local Noetherià $(R, \mathfrak{m})$, podem demostrar que la profunditat de $R/I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r}$ és constant per a $n_1, \ldots, n_r$ prou grans.

Al Capítol 4, estudiem la profunditat dels mòduls de Veronese $M^{(\underline{a},\underline{b})}$ per a $\underline{a}, \underline{b}$ prou grans. En particular demostrem que en el cas quasi-estàndard (i.e. amb $\gamma_i = (0, \ldots, 0, \gamma_i^i, 0, \ldots, 0)$, $\gamma_i^i > 0$, per a $i = 1, \ldots, r$) amb $S_{\underline{0}}$ quocient d'un anell local regular, aquesta profunditat és constant per a $\underline{a}, \underline{b}$ en certes regions de $\mathbb{N}^r$. Per arribar a aquest resultat ens cal un estudi previ dels mòduls de Veronese i de l'anul·lació de mòduls de cohomologia local. En particular demostrem que, en el cas més general, si $S_{\underline{0}}$ és quocient d'un anell local regular, la profunditat generalitzada és invariant per transformacions Veronese. A més en el cas quasi-estàndard la profunditat generalitzada coincideix amb l'índex de graduació finita dels mòduls de cohomologia local respecte de l'ideal homogeni maximal.

Un segon objectiu de la tesi és l'estudi de la profunditat de les àlgebres de blow-up associades a un ideal. Al Capítol 5 s'obtenen versions refinades de conjectures sobre la profunditat de l'anell graduat associat a un ideal. Utilitzant algunes estructures bigraduades no-estàndard, es poden interpretar els enters que apareixen a la Conjectura de Guerrieri i a la Conjectura de Wang com a multiplicitats de mòduls bigraduats. En particular hem pogut donar resposta a una pregunta formulada per A. Guerrieri i C. Huneke al 1993. Hem demostrat que donat un ideal I $\mathfrak{m}$-primari en un anell local $(R, \mathfrak{m})$ Cohen-Macaulay de dimensió $d > 0$ amb reducció minimal J, suposant que les longituds de les components homogènies del mòdul de Valabrega-Valla de I i J siguin menors o iguals que 1, aleshores la profunditat de l'anell graduat associat a I és major o igual que $d - 2$.

Finalment, al Capítol 6, l'estudi de la funció de Hilbert de certs submòduls dels mòduls bigraduats estudiats anteriorment, permet provar alguns casos en què la funció de Hilbert d'un ideal $\mathfrak{m}$-primari en un anell local Cohen-Macaulay de dimensió 1, és no decreixent.