Grupos finitos con cohomología periódica y espacios que admiten recubrimientos esféricos

Manuel Castellet Solanas

GRUPOS FINITOS CON COHOMOLOGIA PERIODICA Y

ESPACIOS QUE ADMITEN RECUBRIMIENTOS ESFERICOS

Memoria presentada por
D. Manuel Castellet Solanas
para aspirar al grado de
Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

Revisada

Dr D. José Teixidor Batlle

I N T R O D U C C I O N

En un trabajo no publicado y con vistas a la teoría de cuerpos de clases, J. Tate modificó los grupos "o" de homología y cohomología de un grupo finito G con coeficientes en un G-módulo A, de tal manera que los nuevos grupos obtenidos, los grupos de cohomología de Tate, se pueden combinar en una sola sucesión $\hat{H}^q(G,A)$ $(-\infty < q < +\infty)$, la sucesión derivada completa de G.

Bajo un aspecto puramente algebraico, la cohomología de Tate presenta dos ventajas: a) es "calculable" a partir de una resolución completa W_q $(-\infty < q < +\infty)$ de G (complejo de Tate); b) existen grupos finitos G – entre ellos todos los cíclicos y cuaterniónicos generalizados – para los cuales $\hat{H}(G,A)$ es periódica para todo G-módulo A, es decir, existe un n natural tal que, para todo i $\hat{H}^i(G,A) \cong \hat{H}^{i+n}(G,A)$. Estos grupos, a los que llamaremos periódicos, fueron caracterizados por E. Artin y J. Tate ([1], XII. 1). Resulta de esta caracterización que la categoría de los grupos periódicos no es muy vasta, ya que todo p - subgrupo de un grupo periódico G ha de ser forzosamente cíclico o cuaterniónico generalizado, para todo p primo divisor del orden de G.

Por el contrario, la categoría de los grupos que llamaremos p - periódicos, es decir, tales que la componente p - primaria de $\hat{H}(G,A)$ sea periódica, es mucho más amplia; en virtud de un teorema de caracterización de H. Cartan - S. Eilenberg ([1], XII ej. 11), un grupo finito G es p - periódico si y sólo si todo p - subgrupo de G es cíclico o cuaterniónico generalizado (p fijo!).

Desde un punto de vista topológico, el interés de los grupos periódicos radica en que son los únicos que pueden operar sin puntos fijos sobre una esfera (el recíproco no es cierto!), mientras que todo grupo finito G que opere sin puntos fijos sobre una esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$ ha de ser necesariamente p - periódico, según demostramos en el teorema 3.3.8.

En este trabajo, de naturaleza fundamentalmente topológica, presentamos algunos resultados que conciernen a espacios sobre los que opera un grupo finito, el grupo fundamental del espacio orbital; para ello realizamos previamente un estudio puramente algebraico de los p - períodos de un grupo p - periódico.

En [9] R. Swan demuestra que si el 2-subgrupo de Sylow S_2G de un grupo finito G es cíclico, entonces el 2-período m_2 de G es 2, y si S_2G es cuaterniónico (generalizado), $m_2 = 4$. Además, si el p-subgrupo de Sylow S_pG es cíclico, entonces el p-período de G vale $m_p = 2m'_p$, donde m'_p es el orden del grupo de automorfismos de S_pG inducidos por automorfismos internos de G. A partir de este resultado demostramos que si p es el menor número primo en la descomposición de $|G|$, y si S_pG es cíclico, entonces $m_p = 2$. Este resultado, aplicado a los grupos perfectos, nos permite demostrar (2.1.7) que todo grupo perfecto y periódico es de orden par y período múltiplo de 4. En las proposiciones 2.1.8 y 2.1.9 demostramos cómo los p-períodos de un grupo periódico G determinan completamente su cohomología, supuesto conocida la componente 2-primaria de G_{ab}.

Entre los resultados topológicos hemos incluido una demostración del conocido teorema: "Todo grupo que opera sin puntos fijos sobre una n-esfera, n impar, es periódico de período un divisor de n+1". Hasta el presente este resultado sólo es conocido en la literatura utilizando la sucesión espectral de Cartan-Leray [1] (o en todo caso la de Swan [10]). Nosotros damos una demostración en la que no se precisa de sucesión espectral alguna, que sin embargo no hemos podido evitar en el caso de una esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$, (teorema 3.3.8). Nuestro razonamiento es puramente geométrico y utiliza un corolario ya clásico del teorema de Hurewicz. De este corolario damos también una versión mod $\mathbb{Z}_p$.

Los resultados referentes a esferas homológicas que admiten una esfera homológica como recubrimiento universal (tanto en el caso absoluto como mod $\mathbb{Z}_p$) nos imponen fuertes restricciones sobre las dimensiones de tales espacios. Así, el teorema 3.2.6, nos permite afirmar que una variedad X con $H_1(X,\mathbb{Z}) = H_3(X,\mathbb{Z}) = 0$ no puede admitir un recubrimiento homológicamente esférico.

Finalmente, para una esfera homológica encontramos condiciones suficientes para que un grupo finito que opere sobre ella sin puntos fijos sea cíclico. Utilizamos para ello un resultado de J. Milnor [6], que restringe la clase de los grupos finitos que pueden operar sin puntos fijos sobre una esfera.

Esta memoria está distribuida en tres capítulos. El capítulo 1 agrupa todas las definiciones y resultados sobre cohomología de Tate, que necesitamos, así como los teoremas de caracterización de la periodicidad. El capítulo 2 es también de naturaleza puramente algebraica y contiene algunos resultados de Swan y los teoremas que obtenemos referentes a los p-períodos de un grupo p-periódico. El capítulo 3 es estrictamente topológico y, además de la sucesión espectral de Swan, contiene, entre otros, los teoremas topológicos que se deducen como aplicación de los resultados del capítulo 2.

Tengo que expresar mi agradecimiento al Profesor Dr José Teixidor que ha dirigido y presenta esta memoria, así como al Profesor Dr Beno Eckmann de la E.T.H. de Zürich, por los múltiples estímulos, sugerencias e indicaciones que de él he recibido. También a la Eidgenössische Technische Hochschule de Zürich y al Consejo Superior de Investigaciones Científicas, que mediante una beca de intercambio me han prestado su apoyo económico durante la redacción de esta memoria.

Manuel Castellet

Barcelona y Zürich, diciembre de 1972

C A P I T U L O 1

COHOMOLOGIA DE TATE

G será siempre un grupo finito. En este capítulo definiremos los grupos de cohomología de Tate $\hat{H}^i(G,A)$ de G con coeficientes en un G-módulo A; veremos que $\hat{H}(G,A)$ se puede "calcular" a partir de un complejo de Tate $(TX)_q$, $-\infty < q < +\infty$, obteniendo en particular la cohomología de los grupos cíclicos finitos y de los grupos cuaterniónicos generalizados. El estudio de la restricción y correstricción asociadas a un subgrupo U de G nos permitirá relacionar la componente p-primaria de $H(G,A)$ con la cohomología del p-subgrupo de Sylow S_pG. Finalmente, en el último apartado, establecemos la caracterización de los grupos p-periódicos en términos de S_pG.

Gran parte de las definiciones y resultados de este capítulo, en el que no pretendemos tratar exhaustivamente la cohomología de Tate, se encuentran en [1] cap. XII. Los hemos agrupado aquí en un intento de dar mayor claridad a los dos siguientes capítulos.

1.- Algunas definiciones y notaciones.

Sea G un grupo finito de orden r, $\mathbb{Z}G$ el anillo del grupo G sobre $\mathbb{Z}$, e $I = IG$ el ideal aumentación de G (IG está generado sobre G por los elementos de la forma $x-1$, $x \in G$, [4] .VI.1.2). Si A es un G-módulo (equivalentemente un $\mathbb{Z}G$-módulo), pondremos $A^G = \{ a \in A \mid xa = a \quad \forall x \in G \}$ y $A_G = A/IA$. Si A y B son G-módulos, $A \otimes B$ y $\mathrm{Hom}(A,B)$ son G-módulos por acción diagonal. Todo grupo abeliano es un G-módulo por acción trivial.

Un G-módulo A se llama relativamente proyectivo (resp. inyectivo) si es sumando directo de un G-módulo inducido $B = \mathbb{Z}G \otimes C$ (resp. coinducido $B = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, C)$), C grupo abeliano. Por ser G finito, los conceptos de inducido y coinducido coinciden.

Designaremos por

$$H_n(G,A) = \mathrm{Tor}_n^G(\mathbb{Z},A)$$
$$H^n(G,A) = \mathrm{Ext}_G^n(\mathbb{Z},A)$$

los grupos de homología y cohomología de G con coeficientes en el G-módulo A.

2.- Grupos de cohomología de Tate.

Para todo G-módulo A, el homomorfismo norma $N : A \longrightarrow A$ definido por

$$Na = \sum_{i=1}^{r} x_i a \qquad x_i \in G ,$$

induce un homomorfismo

$$N^* : H_0(G,A) = A_G \longrightarrow A^G = H^0(G,A) .$$

2.1. Proposición Si A es relativamente proyectivo $N^* : A_G \longrightarrow A^G$ es un isomorfismo.

Demostración: A es relativamente proyectivo si y sólo si existe un endomorfismo de grupos $f : A \longrightarrow A$ tal que $Nf = I_A$ ($(Nf)(a) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(x_i^{-1} a)$). Resulta de esto ${}_N A = \mathrm{Ker}\, N = IA$, $\mathrm{Im}\, N = A^G$.

Podemos aplicar ahora 2.1 a los razonamientos de [1].V.10, para concluir que las sucesiones derivadas completas de los funtores $H^0(G, \ )$, $H_0(G, \ )$ y N son una misma sucesión, que escribiremos

$$\ldots, \hat{H}^{-n}(G, \ ), \ldots, \hat{H}^{-1}(G, \ ), \hat{H}^0(G, \ ), \hat{H}^1(G, \ ), \ldots, \hat{H}^n(G, \ ), \ldots$$

y se llama la sucesión derivada completa (o de Tate) de G. Los grupos $\hat{H}^i(G,A)$ se llaman los grupos de cohomología de Tate de G con coeficientes en el G-módulo A.

Se verifican las siguientes proposiciones :

2.2. <u>Proposición</u> $\hat{H}^n(G,A) = H^n(G,A) \qquad n > o ,$

$$\hat{H}^{-n}(G,A) = H_{n-1}(G,A) \qquad n > 1 ,$$

$$\hat{H}^o(G,A) = A^G/NA = \mathrm{Coker}(H_o(G,A) \longrightarrow H^o(G,A))$$

$$\hat{H}^{-1}(G,A) = {}_NA/IA = \mathrm{Ker}(H_o(G,A) \longrightarrow H^o(G,A)).$$

2.3. <u>Proposición</u> Si A es relativamente proyectivo (= rel. inyectivo), $\hat{H}(G,A) = 0$.

Es consecuencia de 2.1 y del resultado análogo para la homología y cohomología ordinarias de un grupo.

2.4. <u>Proposición</u> Si $|G| = r$, entonces $r\hat{H}(G,A) = 0$; es decir, todo elemento de $\hat{H}(G,A)$ es de orden un divisor de r .

Demostración : La aplicación

$$f : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto ra$$

verifica $f = NI_A$, y por tanto factoriza así

$$A \xrightarrow{g} \mathbb{Z}G \otimes A \xrightarrow{h} A$$

de donde $\hat{f} = \hat{h}\hat{g} : \hat{H}(G,A) \longrightarrow \hat{H}(G,A)$. Ahora bien, por 2.1 , $\hat{H}(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$, lo que implica $\hat{f} = 0$. Puesto que $\hat{f}$ es la multiplicación por r , se obtiene $r\hat{H}(G,A) = 0$.

2.5. <u>Corolario</u> Si $|G| = r$ y $sA = 0$ con $(r,s) = 1$, entonces $\hat{H}(G,A) = 0$.

2.6. <u>Proposición</u> (i) $\hat{H}^o(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r$,

(ii) $\hat{H}^{-1}(G, \mathbb{Z}) = 0$,

(iii) $\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) = G_{ab}$, $(G_{ab} = G/[G,G])$,

(iv) $\hat{H}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$

Demostración:

(i) $\hat{H}^o(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^G/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_r$ ya que N es la multiplicación por r y $\mathbb{Z}$ es G- trivial.

(ii) $\hat{H}^{-1}(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}\, N/I\mathbb{Z} = 0$, ya que $\mathrm{Ker}\, N = 0$.

(iii) $\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) = H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Tor}_1^G(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \otimes_G IG$ ya que $\mathbb{Z}$ es G- trivial. Pero $\mathbb{Z} \otimes_G IG \cong \mathbb{Z} \otimes IG/(IG)^2 \cong$

$\cong \mathbb{Z} \otimes G/[G,G] = \mathbb{Z} \otimes G_{ab} \cong G_{ab}$. ([4].VI.4).

(iv) $\hat{H}^1(G, \mathbb{Z}) = H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}_G^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_G(IG, \mathbb{Z})$ ya que $\mathbb{Z}$ es G- trivial. Pero $\mathrm{Hom}_G(IG, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(IG/(IG)^2, \mathbb{Z})$ $\cong \mathrm{Hom}(G_{ab}, \mathbb{Z}) = 0$ ya que G es finito. ([4].VI.4).

3.- <u>Complejos de Tate</u>.

3.1. <u>Definición</u> Un complejo de Tate para G es una sucesión exacta

$$TX: \quad \ldots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_o \longrightarrow X_{-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{-n} \longrightarrow \ldots$$

de G-módulos libres finitamente generados, tales que d_o factoriza de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} X_o \arrow[rr, "d_o"] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"'] & & X_1 \\ & \mathbb{Z} \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Esta última condición equivale a que $\operatorname{Im} d_o \cong \mathbb{Z}$ esté generado por un elemento $e \in X_{-1}^G$.

Si X es un G-módulo, pondremos $X' = \operatorname{Hom}(X, \mathbb{Z})$, que es un G-módulo con la estructura diagonal.

La siguiente proposición es consecuencia de las relaciones entre la estructura de X y X'.

3.2. <u>Proposición</u> Si TX es un complejo de Tate para G,

$$\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_o \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \quad y$$

$$\cdots \longrightarrow X'_{-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_{-1} \xrightarrow{\mu'} \mathbb{Z} \quad son$$

resoluciones G-proyectivas de $\mathbb{Z}$ por G-módulos libres finitamente generados.

Recíprocamente, si X_* e Y_* son dos resoluciones G-proyectivas de $\mathbb{Z}$ por G-módulos libres finitamente generados,

$$\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots X_1 \longrightarrow X_o \longrightarrow Y'_o \longrightarrow Y'_1 \longrightarrow \cdots Y'_n \cdots$$

es un complejo de Tate para G, donde $d_o = \mu' \varepsilon$, $\varepsilon : X_o \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $\mu : Y_o \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$.

La proposición anterior es importante en el desarrollo de la cohomología de Tate, pues nos afirma que la cohomología de Tate (grupos, morfismos, morfismos de conexión) se puede "calcular" tomando G-homomorfismos en un complejo de Tate y pasando a cohomología. No creemos necesario una formulación formal.

3.3. Aplicaciones

a) Cohomología de Tate de los grupos cíclicos finitos.

Si G es cíclico de orden r generado por x,

$$\cdots \longrightarrow \underset{X_2}{\mathbb{Z}G} \xrightarrow{N} \underset{X_1}{\mathbb{Z}G} \xrightarrow{T} \underset{X_0}{\mathbb{Z}G} \xrightarrow{N} \underset{X_{-1}}{\mathbb{Z}G} \xrightarrow{T} \underset{X_{-2}}{\mathbb{Z}G} \longrightarrow \cdots$$

es un complejo de Tate para G, donde N es la norma y $T(a) = (x-1)a$.

Puesto que $TA = IA$ y $\operatorname{Ker} T = A^G$, se obtiene

$$\hat{H}^{2n}(G,A) \cong A^G/NA \qquad \hat{H}^{2n+1}(G,A) \cong {}_NA / IA ,$$

y en particular

$$\hat{H}^{2n}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_r \quad , \quad \hat{H}^{2n+1}(G,\mathbb{Z}) = 0 .$$

b) Cohomología de Tate de los grupos cuaterniónicos generalizados.

Sea G un grupo cuaterniónico (generalizado) de orden $r = 4t$, $t > 2$. Todo elemento de G es de la forma $x^m y^\delta$ con $0 \leq m < 2t$, $\delta = 0,1$.

Un complejo de Tate para G viene dado por:

$X_{4n} = \mathbb{Z}G\, a_n$, $X_{4n+1} = \mathbb{Z}G\, b_n \oplus \mathbb{Z}G\, b_n'$,

$X_{4n+2} = \mathbb{Z}G\, c_n \oplus \mathbb{Z}G\, c_n'$, $X_{4n+3} = \mathbb{Z}G\, e_n$,

$da_n = Ne_{n-1}$, $db_n = (x-1)a_n$, $db_n' = (y-1)a_n$,

$dc_n = (1+x+\ldots+x^{t-1})\, b_n - (y+1)b_n'$,

$dc_n' = (xy+1)\, b_n + (x-1)\, b_n'$, $de_n = (x-1)c_n - (xy-1)c_n'$,

y como elemento $e \in X_{-1}^G$, $e = Ne_{-1}$.

Se obtiene entonces

$$\hat{H}^{4n}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{4t}, \quad \hat{H}^{4n+1}(G, \mathbb{Z}) = 0,$$

$$\hat{H}^{4n+2}(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & t \text{ par} \\ \mathbb{Z}_4 & t \text{ impar} \end{cases}, \quad \hat{H}^{4n+3}(G, \mathbb{Z}) = 0.$$

4.- Relación de la cohomología de Tate de un grupo con la de sus p-subgrupos de Sylow.

Sea U un subgrupo de índice s del grupo finito G. Todo G-módulo es un U-módulo, y, puesto que $\mathbb{Z}G$ es libre finitamente generado como U-módulo, todo complejo de Tate para G lo es también para U.

Sean

$$\text{res} : \hat{H}(G,A) \longrightarrow \hat{H}(U,A)$$

$$\text{cor} : \hat{H}(U,A) \longrightarrow \hat{H}(G,A)$$

$$c_x : \hat{H}(U,A) \longrightarrow \hat{H}(xUx^{-1}, A), \quad x \in G,$$

la restricción, correstricción y conjugación, respectivamente.

Si TX es un complejo de Tate para G, están inducidas por

$$\mathrm{res} : \mathrm{Hom}_G(TX,A) \rightarrowtail \mathrm{Hom}_U(TX,A)$$

$$\mathrm{cor} : \mathrm{Hom}_U(TX,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(TX,A)$$

$$f \longmapsto \mathrm{cor}\, f : \quad \mathrm{cor}\, f\,(c) = \sum_{j=1}^{s} y_j f(y_j^{-1} c)$$

donde $y_1, \ldots, y_s$ representan G/U.

$$c_x : \mathrm{Hom}_U(TX,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{xUx^{-1}}(TX,A)$$

$$f \longmapsto c_x f : \quad c_x f(c) = x f(x^{-1} c) .$$

4.1. <u>Definición</u> Un elemento $a \in \hat{H}(U,A)$ se dice estable, si, para todo $x \in G$,

$$\mathrm{res}(U \cap xUx^{-1}, U)\, a = \mathrm{res}(U \cap xUx^{-1}, xUx^{-1})\, c_x\, a .$$

El conjunto de los elementos estables, $\mathrm{St}\, \hat{H}(U,A)$, es pues el subgrupo de $\hat{H}(U,A)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}(U,A) \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \arrow[rr, "c_x"] & & \hat{H}(xUx^{-1}, A) \arrow[dll, "\mathrm{res}"] \\
\hat{H}(U \cap xUx^{-1}, A) & &
\end{tikzcd}$$

4.2. <u>Proposición</u> (i) $\mathrm{cor}\ \mathrm{res}$ = multiplicación por s,

(ii) $\mathrm{Im}\ \mathrm{res} \subset \mathrm{St}\, \hat{H}(U,A)$,

(iii) Si $a \in \mathrm{St}\, \hat{H}(U,A)$, entonces $\mathrm{res}\ \mathrm{cor}\,(a) = s\,a$.

Basta para ello calcular, teniendo en cuenta las "reglas de permutabilidad" entre res, cor, c_x.

Sea p un número primo divisor de $r = |G|$. En adelante designaremos por S_pG el p-subgrupo de Sylow de G. Si M es un grupo abeliano finitamente generado, designaremos por $p-M$ la componente p-primaria de M. Puesto que $r\,\hat{H}^i(G,A) = 0$ (2.4), $p-\hat{H}^i(G,A) = 0$ si $r \not= \dot{p}$.

4.3. Teorema (i) $\mathrm{res}: p-\hat{H}(G,A) \rightarrowtail \hat{H}(G,A) \longrightarrow \hat{H}(S_pG,A)$ es un monomorfismo de imagen $\mathrm{St}\,\hat{H}(S_pG,A)$.

(ii) $\mathrm{cor}: \hat{H}(S_pG,A) \longrightarrow \hat{H}(G,A) \twoheadrightarrow p-\hat{H}(G,A)$ es un epimorfismo.

(iii) $\hat{H}(S_pG,A) \cong \mathrm{St}\,\hat{H}(S_pG,A) \oplus \mathrm{Ker\,cor}$.

Demostración: Pongamos $|G| = r = p^\alpha s$ con $(p,s) = 1$; entonces $|S_pG| = p^\alpha$ y existe un q tal que $sq \equiv 1 \mod p$. Si $a \in \mathrm{St}\,\hat{H}(S_pG,A)$, $a = \mathrm{res}(\mathrm{cor}\, q a)$ que demuestra (i). Si $b \in p-\hat{H}(G,A)$, $b = \mathrm{cor}(\mathrm{res}\, q b)$ que demuestra (ii). Finalmente, si $a \in \hat{H}(S_pG,A)$, $a = \mathrm{res}(\mathrm{cor}\, qa) + (a - \mathrm{res\,cor}\, qa)$, que demuestra (iii).

5.- Periodicidad.

5.1. Definición Diremos que $q \in \mathbb{Z}$ es un período para el grupo finito G, si, para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo G-módulo A, se tiene

$$\hat{H}^i(G,A) \cong \hat{H}^{i+q}(G,A).$$

Diremos que q es un p-período para G, p primo, si $p-\hat{H}^i(G,A) \cong p-\hat{H}^{i+q}(G,A)$.

5.2. <u>Proposición</u> Son equivalentes

(i) $p-\hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, donde $r = p^\alpha s$,

(ii) $p-\hat{H}^i(G,A) \cong p-\hat{H}^{i+q}(G,A)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo G-módulo A.

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sea $g \in p-\hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ un generador. La aplicación

$$\begin{array}{ccccc} p\text{-}\hat{H}^i(G,A) & \longrightarrow & p\text{-}\hat{H}^i(G,A) \otimes p\text{-}\hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & p\text{-}\hat{H}^{i\ q}(G,A) \\ a & \longmapsto & a \otimes g & \longmapsto & a\,g \end{array}$$

(véase [1] . XII.5), es un isomorfismo, en virtud del teorema de dualidad ([1] . XII.6.6).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): puesto que $p\text{-}\hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \cong p\text{-}\hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \cong p\text{-}\mathbb{Z}_r = \mathbb{Z}_{p^\alpha}$.

5.3. <u>Proposición</u> Si q es un p-período para G también lo es para todo subgrupo U de G.

Demostración: Sea g un generador de $p\text{-}\hat{H}^q(G, \mathbb{Z})$; entonces res g es un generador de $p\text{-}\hat{H}^q(U, \mathbb{Z})$ de orden p^β, donde $p^\beta = |S_pU|$.

5.4. <u>Corolario</u> Los p-períodos de un grupo G forman un subgrupo de $2\mathbb{Z}$.

Demostración: Por 5.2, los p-períodos de G forman un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Si $q \neq \dot{2}$, entonces, para todo generador g de $p\text{-}\hat{H}^q(G, \mathbb{Z})$ se tiene $2g = 0$, de donde $p^\alpha = 2$ y por tanto $S_2G = \mathbb{Z}_2$. Pero $\mathbb{Z}_2$ sólo tiene períodos pares (3.3.a)), en contradicción con 5.3.

5.5. <u>Lema</u> Sea q un p-período de S_pG, g un generador de $p\text{-}\hat{H}^q(S_pG, \mathbb{Z}) = \hat{H}^q(S_pG, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $k^n \equiv 1 \mod p$, para todo k primo con p. Entonces $g^n \in \mathrm{St}\, \hat{H}^{qn}(S_pG, \mathbb{Z})$, y cor $g^n \in p\text{-}\hat{H}^{qn}(G, \mathbb{Z})$ tiene orden p^α.

Demostración: Puesto que, para todo $x \in G$, c_x es un isomorfismo, $c_x g$ es un generador de $\hat{H}^q(xS_pGx^{-1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$ y por tanto, en virtud de 5.3, $g_1 = \mathrm{res}\, g$ y $g_2 = \mathrm{res}\, c_x g$ son generadores de orden maximal de $\hat{H}^q(S_pG \cap xS_pGx^{-1}, \mathbb{Z})$. Existe pues un k primo con p tal que

$$g_1 = k\, g_2$$

de donde

$$g_1^n = k^n g_2^n = g_2^n$$

lo que implica que g^n es estable. Se sigue inmediatamente entonces que g^n tiene orden p^α.

5.6. <u>Teorema</u> Para todo p primo, fijo, son equivalentes:

(i) G tiene un p-período ($\neq 0$),

(ii) Todo p-subgrupo abeliano de G es cíclico,

(iii) Todo p-subgrupo de G es cíclico o cuaterniónico (si $p = 2$),

(iv) Todo p-subgrupo de Sylow de G es cíclico o cuaterniónico $(p=2)$.

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Todo p-grupo abeliano no cíclico contiene un subgrupo $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. Ahora bien $\hat{H}(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \oplus H(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \not\cong \mathbb{Z}_{p^2}$, en contra de (i) y 5.3. (véase [4].VI.14 para la cohomología de un coproducto).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 1. El centro de todo p-grupo U es no trivial (Burnside); 2. Si un p-grupo U sólo contiene un subgrupo de orden p, entonces U es cíclico o cuaterniónico. Para la demostración de estos dos resultados nos remitimos a [11].IV.3 th. 9 y 15.

Sea pues U un p-subgrupo de G; por 1., U contiene un subgrupo central cíclico U' de orden p. Si U'' fuera otro subgrupo de U de orden p, puesto que $U' \cap U'' = \{1\}$ y $U' \subset$ Centro de U, $U' \oplus U'' \subset U$ sería un subgrupo abeliano no cíclico. Así pues, U sólo contiene un subgrupo de orden p y podemos aplicar 2..

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Trivial.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Sea q un período de S_pG ($q=2$ si S_pG es cíclico, $q=4$ si S_pG es cuaterniónico, en virtud de 3.3). Sea $g \in \hat{H}^q(S_pG, \mathbb{Z})$ un generador. El lema 5.5 nos asegura la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{cor } g^n \in p - \hat{H}^{qn}(G, \mathbb{Z})$$

tiene orden $p^\alpha = |S_p G|$ y genera $p - \hat{H}^{qn}(G, \mathbb{Z})$.

Así pues, $p - \hat{H}^{qn}(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$ y qn es un p-período de G.

Es inmediato pasar todo lo dicho para p-períodos al caso "absoluto" de un grupo periódico. Basta para ello tener en cuenta que un grupo G es periódico si y sólo si es p-periódico para todo p primo divisor de $|G|$.

En particular, el teorema 5.6 se traduce así:

5.7. Teorema Son equivalentes

(i) G tiene un período ($\neq 0$),

(ii) Todo subgrupo abeliano de G es cíclico,

(iii) Todo p-subgrupo de G es cíclico o cuaterniónico (si $p = 2$),

(iv) Todo p-subgrupo de Sylow de G es cíclico o cuaterniónico (si $p = 2$).

C A P I T U L O   2

EL p - PERIODO DE UN GRUPO FINITO

En todo este capítulo G indicará siempre un grupo finito y m_p el menor p-período positivo de G, al que llamaremos simplemente el p-período de G (véase 1.5.1). Si designamos por m el período de G, evidentemente se tiene $m = \mathrm{mcm}(m_p)$. S_pG designará siempre el p-subgrupo de Sylow de G.

1.1. Teorema (R. Swan).

(i) Si S_2G es cíclico, entonces $m_2 = 2$; si S_2G es cuaterniónico generalizado, $m_2 = 4$.

(ii) Si $p \neq 2$ y S_pG es cíclico, entonces $m_p = 2m'_p$, donde m'_p es el orden del grupo A_p de automorfismos de S_pG inducidos por automorfismos internos de G.

Demostración: (véase [9]). Damos aquí solamente una indicación de la linea de demostración, omitiendo los cálculos.

a) Puesto que $p-\hat{H}^i(G, \mathbb{Z}) \cong St\ \hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z})$ (1.4.3), para determinar el p-período de G basta conocer los elementos estables de $\hat{H}(S_pG, \mathbb{Z})$.

b) Si S_pG es abeliano, $a \in St\ \hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z})$ si y sólo si $ha = a$ para todo $h \in A_p$.

Es consecuencia de la definición de elemento estable, del segundo teorema de Sylow y del hecho que $A_p =$ $= \dfrac{N_G(S_pG)}{C_G(S_pG)}$, donde N_G y C_G indican, respectivamente, el normalizador y el centralizador en G.

c) Si S_pG es cíclico, q es un p-período si y sólo si q es par y todo elemento de $\hat{H}^q(S_pG, \mathbb{Z})$ es fijo por A_p. La necesidad de la condición resulta de b) y la suficiencia de b) y 1.4.3.

d) Si S_2G es cíclico, $|A_2| = 1$, de donde $m_2 = 2$ por c), que demuestra la primera parte de (i) del teorema.

e) Si S_pG es cíclico, $p \neq 2$, entonces A_p es también cíclico, y, puesto que todo automorfismo de un grupo cíclico de orden n es la multiplicación por un cierto s primo con n, se sigue (ii).

f) Para demostrar la segunda parte de (i) basta ver que todo elemento de $\hat{H}^4(S_2G, \mathbb{Z})$ es estable. Esto es consecuencia de algunos cálculos usando un complejo de Tate explícito, y del hecho que si B es cíclico de orden ≤ 4 y C es un grupo de cuaterniones generalizado, cualesquiera monomorfismos $f, g : B \longrightarrow C$ inducen la misma aplicación $\hat{H}^4(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow \hat{H}^4(B, \mathbb{Z})$.

1.2. <u>Teorema</u> Sea $|G| = r = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ con $p_1 < \dots < p_n$ primos. Entonces, si $S_{p_1}G$ es cíclico, se tiene $m_{p_1} = 2$.

Demostración: Si $p_1 = 2$ el teorema de Swan nos afirma ya que $m_2 = 2$. Si $p_1 \neq 2$, entonces $m_{p_1} = 2\, m'_{p_1}$, donde

$$m'_{p_1} = \left| \frac{N_G(S_{p_1}G)}{C_G(S_{p_1}G)} \right| .$$

Puesto que $S_{p_1}G$ es cíclico de orden $p_1^{\alpha_1}$, $|\mathrm{Aut}\ S_{p_1}G| = p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1} = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)$. Por tanto

$$m'_{p_1} \mid p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) . \qquad (1)$$

Ahora bien, si ponemos $r = p_1^{\alpha_1} q$ con $(p_1, q) = 1$, entonces, puesto que $S_{p_1}G \subset N_G(S_{p_1}G)$, $n_{p_1} = |N_G(S_{p_1}G)| = p_1^{\alpha_1} q'$ con q' divisor de q.

Pero, puesto que $S_{p_1}G$ es abeliano, $S_{p_1}G \subset C_G(S_{p_1}G)$, de donde $n'_{p_1} = |C_G(S_{p_1}G)| = p_1^{\alpha_1} q''$ con $q'' \mid q' \mid q$.

Resulta pues, $m'_{p_1} = n_{p_1} / n'_{p_1} = q'/q''$, de donde

$$(m'_{p_1}, p_1) = 1. \qquad (2)$$

(1) y (2) implican entonces que m'_{p_1} divide a p_1-1, pero, puesto que p_1 es el menor primo en la descomposición de r, $m'_{p_1} = 1$, de donde $m_{p_1} = 2$ por el teorema de Swan.

1.3. <u>Observación</u> El teorema anterior se puede generalizar en la siguiente forma: Si $S_{p_i}G$ es cíclico y $p_i-1 = p_1^{\beta_i}\dots p_{i-1}^{\beta_{i-1}}q$ con $(p_j, q) = 1$, $j=1,\dots,n$, entonces se tiene $m_{p_i} \mid 2\, p_1^{\beta_1}\dots p_{i-1}^{\beta_{i-1}}$.

En particular, si p_i-1 es primo con $p_1,\dots,p_{i-1}$, entonces $m_{p_i} = 2$.

1.4. <u>Corolario</u> Si G es un grupo periódico con $|G| = r = p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$, $2 < p_1 < \dots < p_n$ primos, y $p_i-1 \not\equiv 0 \mod p_1,\dots,p_{i-1}$, $i=2,\dots,n$, entonces G es cíclico.

Demostración: En virtud de la observación anterior, para todo i se tiene $m_{p_i} = 2$, de donde $m = 2$. Entonces, por 1.2.6 y 1.5.1

$$G_{ab} \cong H_1(G,\mathbb{Z}) \cong \hat{H}^{-2}(G,\mathbb{Z}) \cong \hat{H}^0(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_r,$$

de donde $|G_{ab}| = r = |G|$, que implica $G = G_{ab} \cong \mathbb{Z}_r$.

1.5. <u>Ejemplo</u> Todo grupo periódico de orden $3^\alpha 5^\beta 17^\gamma$ es cíclico.

1.6. <u>Definición</u> Un grupo G se llama perfecto si $G_{ab} = 0$.

1.7. <u>Teorema</u> Si G es un grupo perfecto y periódico, entonces $|G| = \dot{8}$, $S_2 G$ es cuaterniónico (generalizado), $m_2 = 4$ y $m_p \geqslant 4$ para todo $p \neq 2$. En particular se tiene $m = \dot{4}$ y $H_3(G, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Demostración: Sea p el menor número primo en la descomposición de $r = |G|$; entonces, por 1.2, si $S_p G$ es cíclico, $m_p = 2$, de donde, por 1.2.6,

$$p\text{-}G_{ab} \cong p\text{-}\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha} \neq 0,$$

en contra de que G sea perfecto. Así pues $S_p G$ ha de ser cuaterniónico, lo que implica $p = 2$, $r = \dot{8}$. El teorema resulta entonces de 1.2 y de

$$2\text{-}H_3(G, \mathbb{Z}) \cong 2\text{-}\hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{2^\alpha} \neq 0.$$

Para un algebrista este resultado puede parecerle redundante, ya que el teorema de Feit-Thompson ([3]) nos afirma que todo grupo finito de orden impar es resoluble, y por tanto todo grupo finito perfecto es de orden par. Ahora bien, la demostración del teorema de Feit-Thompson, que ocupa no menos de 100 páginas, requiere un gran aparato algebraico; el teorema 1.7, más débil pues presupone que G sea periódico, resulta interesante para objetivos topológicos.

1.8. <u>Proposición</u> Si S_pG es cíclico, entonces

$$p\text{-}\hat{H}^1(G, \mathbb{Z}) = \dots = p\text{-}\hat{H}^{m_p-1}(G, \mathbb{Z}) = 0$$

Demostración: Sabemos, por 1.4.3, que

$$p-\hat{H}^i(G, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{St}\, \hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}).$$

a) Si i es impar, $\hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}) = 0$ por ser S_pG cíclico (1.3.3.a)), de donde $p-\hat{H}^i(G, \mathbb{Z}) = 0$.

b) Si i es par, $0 < i < m_p$, $\hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, donde $|G| = p^\alpha q$, $(p,q)=1$. Ahora bien, por 1.4.3.(iii)

$$\hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{St}\, \hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ker}\, \mathrm{cor}(G, S_pG);$$

pero, puesto que p es primo, $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ no puede descomponer en suma de dos grupos cíclicos, de donde

(i) $\mathrm{St}\, \hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}) = \hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, en cuyo caso $p-\hat{H}^i(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, y m_p no sería el período de G; o bien

(ii) $\mathrm{St}\, \hat{H}^i(S_pG, \mathbb{Z}) = 0$ que demuestra la proposición.

1.9. <u>Proposición</u> Si S_2G es cuaterniónico generalizado,

$$2-\hat{H}^1(G, \mathbb{Z}) = 2-\hat{H}^3(G, \mathbb{Z}) = 0, \text{ y}$$

$$2-\hat{H}^2(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 \\ \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \end{cases}$$

Demostración: Se sigue un razonamiento análogo al de 1.8, teniendo en cuenta que, en virtud de 1.3.3.b), si S_pG es cuaterniónico $\hat{H}^2(S_pG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Puesto que si S_2G es cuaterniónico

$$2-\hat{H}^2(G, \mathbb{Z}) \cong 2-\hat{H}^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong 2-G_{ab},$$

las proposiciones 1.8 y 1.9 nos dan el siguiente

1.10. <u>Corolario</u> La cohomología de Tate de un grupo periódico está completamente determinada por los p-períodos y por $2-G_{ab}$.

1.11. <u>Aplicaciones</u>

a) Designemos por A_5 el grupo alternado sobre cinco elementos. A_5 es simple no abeliano y por tanto es un grupo perfecto.

Puesto que $|A_5| = 60 = 2^2.3.5$, se tiene $S_3A_5 = \mathbb{Z}_3$, $S_5A_5 = \mathbb{Z}_5$, $S_2A_5 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (obsérvese que en virtud de 1.7 no puede verificarse $S_2A_5 = \mathbb{Z}_4$).

Resulta de esto que A_5 es un grupo 3-periódico y 5-periódico pero no periódico (teoremas 1.5.6 y 1.5.7).

Puesto que A_5 es perfecto, se verifica $m_3 = 4$, $m_5 = 4$ y, en virtud de la proposición 1.8, tenemos

$$3-\hat{H}^{4n}(A_5, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3, \quad 3-\hat{H}^p(A_5, \mathbb{Z}) = 0 \quad p \neq 4n$$

$$5-\hat{H}^{4n}(A_5, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_5, \quad 5-\hat{H}^p(A_5, \mathbb{Z}) = 0 \quad p \neq 4n.$$

Además, aplicando 1.4.3 y VI.14 de [4]

$$2-\hat{H}^i(A_5, \mathbb{Z}) \cong St\ \hat{H}^i(S_2A_5, \mathbb{Z}) \cong St\ \hat{H}^i(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong$$

$$\cong St\ (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) .$$

b) Sea G el grupo binario icosaédrico. G es el grupo lineal especial de orden 2 sobre $\mathbb{Z}_5$, $SL(2, \mathbb{Z}_5)$, o equivalentemente la extensión central no trivial de $\mathbb{Z}_2$ por A_5

$$\mathbb{Z}_2 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow A_5$$

(ya que $H^2(A_5, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ y $G \neq \mathbb{Z}_2 \times A_5$).

Se tiene $|G| = 120 = 2^3.3.5$, centro de $G = \mathbb{Z}_2$, y además G es perfecto (no simple).

Así pues, $S_3G = \mathbb{Z}_3$, $S_5G = \mathbb{Z}_5$, $S_2G = H$ el grupo de cuaterniones ordinario. Por tanto, en virtud de 1.5.7, G es periódico, y aplicando 1.7 y 1.4 resulta que los p-períodos de G son 4 (para m_2 y m_3 está claro; para m_5 hay que calcular $|N_G(S_5G) / C_G(S_5G)|$ según 1.1).

Podemos entonces aplicar las proposiciones 1.8 y 1.9 para concluir que

$$\hat{H}^{4n}(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{120}, \quad \hat{H}^p(G, \mathbb{Z}) = 0 \quad p \neq 4n .$$

La extensión central $\mathbb{Z}_2 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow A_5$

resulta ser un ejemplo interesante en la teoría de recubrimientos de un grupo perfecto (análogo algebraico de la teoría de espacios recubridores de un espacio arco-conexo). Véase B. Eckmann - P.J. Hilton [2] .

C A P I T U L O 3

ESPACIOS QUE ADMITEN UN RECUBRIMIENTO ESFERICO

1.- La sucesión espectral de Swan.

Usando cohomología de Tate en lugar de la cohomología usual de grupos, R. Swan, [10] , modificó la sucesión espectral de Cartan-Leray [1] asociada a la acción de un grupo G sobre un espacio X, de manera que en el término E_∞ no aparece ya la cohomología del espacio orbital X/G, eliminando así considerables complicaciones.

En este apartado introducimos esta sucesión espectral de Swan y demostramos que $E_\infty = 0$ si G opera sin puntos fijos sobre X.[1)]

Sea G un grupo finito, W un complejo de Tate para G y C un complejo de cocadenas sobre $\mathbb{Z}G$, tal que $C^n = 0$ para todo $n < -1$. La primera filtración del com-

---

1) G opera sin puntos fijos sobre X si $gx = x$ para algún $x \in X$ implica $g = 1$.

plejo doble $\mathrm{Hom}_G(W,C)$ es regular, y da, por tanto, una sucesión espectral E_1^{pq} tal que

$$E_2^{pq} = \hat{H}^p(G, H^q(C))$$

y que converge (no necesariamente finitamente) al grupo graduado $H(\mathrm{Hom}_G(W,C))$ convenientemente filtrado.

Supongamos ahora que G opera simplicialmente sobre un complejo simplicial K; entonces el grupo de cocadenas alternadas $C^q(K,\mathbb{Z})$ es un G-módulo; aplicando lo establecido en el párrafo anterior, obtenemos una sucesión espectral $E_1^{pq}(K)$ tal que

$$E_2^{pq}(K) = \hat{H}^p(G, H^q(K,\mathbb{Z}))$$

y que converge a $H(\mathrm{Hom}_G(W, C(K,\mathbb{Z}))$ convenientemente filtrado.

1.1. <u>Lema</u> Si K es un complejo simplicial de dimensión finita y G opera sin puntos fijos sobre K, entonces $E_\infty(K) = 0$.

Demostración: Si el complejo de cocadenas C verifica $C^n = 0$ para $n < -1$ y para n suficientemente grande, y además $\hat{H}^i(G,C^j) = 0$ para todo par de índices i, j, entonces $H(\mathrm{Hom}_G(W,C)) = 0$.

Nuestro complejo $C(K,\mathbb{Z})$ verifica las condiciones anteriores: la primera por ser K de dimensión finita, y la segunda, ya que, al operar G sin puntos fijos, $C(K, \mathbb{Z})$ es libre y por lo tanto relativamente proyectivo como G-módulo. Obsérvese que en este punto es esencial el uso de la cohomología de Tate (para poder aplicar la proposición 1.2.3).

Supongamos ahora que G opera sobre un espacio de Hausdorff X paracompacto y finitístico (es decir, tal que todo recubrimiento de X admita un refinamiento de dimensión finita). Todos los recubrimientos serán abiertos.

1.2. <u>Definición</u> Un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X se llama primitivo si

a) es G-invariante; es decir, existe una acción de G sobre I tal que para $i \in I$ y $g \in G$, $U_{ig} = U_i g$,

b) si $i \neq ig$, entonces $U_i \cap U_{ig} \neq \emptyset$.

Las siguientes propiedades son inmediatas:

a) Todo recubrimiento de X admite un refinamiento primitivo.

b) Si $\mathcal{V}$ es un refinamiento G-invariante de un recubrimiento primitivo $\mathcal{U}$, existe una proyección G-equivariante de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{U}$.

c) Si $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$, ambos primitivos, cualesquiera dos proyecciones G-equivariantes de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{U}$ son cadena-homotópicas.

Podemos definir entonces una sucesión espectral asociada a la acción de G sobre X (la sucesión espectral de Swan), de la siguiente manera: Asociamos una sucesión espectral $E_i^{pq}(\mathcal{U})$ al nervio de cada recubrimiento primitivo de X (que es un complejo simplicial). Las propiedades b) y c) anteriores nos permiten pasar al límite directo $\varinjlim E_i^{pq}(\mathcal{U})$.

Por definición

$$E_i^{pq}(X) = \varinjlim E_i^{pq}(\mathcal{U}) .$$

Puesto que los límites directos conservan la exactitud, $E_i^{pq}(X)$ es una sucesión espectral, y, puesto que conmutan con la cohomología de Tate, en virtud de la propiedad a), se tiene

$$E_2^{pq}(X) = \hat{H}^p(G, H^q(X, \mathbb{Z})) .$$

1.3. <u>Teorema</u> Si G opera sin puntos fijos sobre X (paracompacto de Hausdorff y finitístico), entonces $E_\infty(X) = 0$.

Demostración: Es consecuencia del lema 1.1 y de que si todo recubrimiento de X admite un refinamiento de dimensión finita, entonces admite también un refinamiento primitivo de dimensión finita.

En [9] Swan demuestra un resultado más general que el que hemos expuesto en el teorema 1.3. De hecho, prueba que $E_\infty(X)$ depende unicamente (sin ninguna hipótesis sobre la acción de G) del conjunto X^G de puntos fijos de X por G; más precisamente

$$\varinjlim H(\mathrm{Hom}_G(W, C(K, \mathbb{Z}))) \cong \varinjlim H(\mathrm{Hom}_G(W, C(K^G, \mathbb{Z}))).$$

De aquí se puede deducir inmediatamente el teorema de la esfera homológica de P.A. Smith.

2.- Esferas homológicas.

2.1. Definición Una n-esfera homológica es una variedad compacta X tal que $H_i(X, \mathbb{Z}) \cong H_i(S^n, \mathbb{Z})$ para todo $i \geq 0$.

En virtud del teorema de los coeficientes universales, una variedad compacta X es una n-esfera homológica si y sólo si $H^i(X, \mathbb{Z}) \cong H^i(S^n, \mathbb{Z})$ para todo $i \geq 0$.

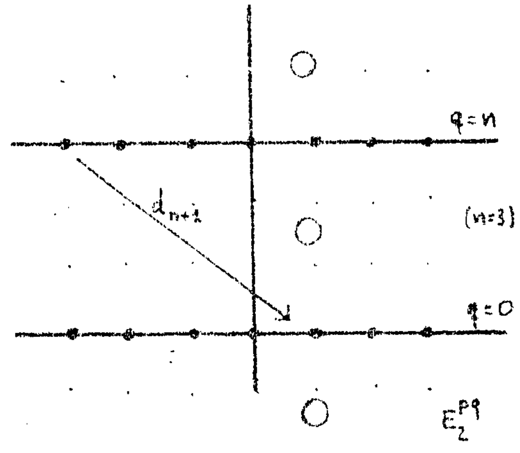
2.2. Teorema Si un grupo finito G opera sin puntos fijos sobre una n-esfera homológica X, entonces

(i) si n es par, $G = \{1\}$ ó $G = \mathbb{Z}_2$,

(ii) si n es impar, G es periódico de período un divisor de $n+1$.

Demostración:

Consideremos la sucesión espectral de Swan asociada a la acción de G sobre X.



Puesto que, para todo $i \neq o,n$, $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$, se tiene

$$E_2^{pq} = \hat{H}^p(G, H^q(X, \mathbb{Z})) = 0 \quad \text{para todo} \quad q \neq o,n.$$

Ahora bien, puesto que la diferencial $d_i : E_i \longrightarrow E_i$ tiene bigrado $(i, 1-i)$ y

$$E_{i+1}^{pq} = \operatorname{Ker} d_i^{pq} / \operatorname{Im} d_i^{p-i,\, q+i-1}$$

se tiene

$$E_2^{pq} = E_3^{pq} = \ldots = E_{n+1}^{pq} \quad \text{para todo} \quad p, q,$$

$$E_{n+2}^{p,o} = E_2^{p,o} / \operatorname{Im} d_2^{p-n-1,n}$$

$$E_{n+2}^{p,n} = \operatorname{Ker} d_2^{p,n}$$

$$E_{n+2}^{pq} = E_{n+i}^{pq} \quad \text{para todo} \quad p, q \quad \text{y todo} \quad i \geq 2.$$

Pero, en virtud del teorema 1.3, si G opera sin puntos fijos, $E_\infty = 0$, y por tanto debe verificarse

$$E_{n+2}^{p,o} = E_2^{p,o} \,/\, \mathrm{Im}\, d_2^{p-n-1,n} = 0 \quad \text{para todo } p \,,$$

$$E_{n+2}^{p,n} = \mathrm{Ker}\, d_2^{p,n} = 0 \quad \text{para todo } p \,,$$

lo que implica

$$\mathrm{Ker}\, d_2^{pq} = 0 \,, \quad \mathrm{Im}\, d_2^{pq} = E_2^{pq} \quad \text{para todo } p\,,q \,;$$

Se tiene pues, para todo $p \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{H}^p(G, H^n(X, \mathbb{Z})) \cong \hat{H}^{p+n+1}(G, H^o(X, \mathbb{Z}))$$

y como $H^o(X, \mathbb{Z})$ es el G-módulo trivial $\mathbb{Z}$,

(1) $$\hat{H}^p(G, H^n(X, \mathbb{Z})) \cong \hat{H}^{p+n+1}(G, \mathbb{Z}) \quad \text{para todo } p \in \mathbb{Z} \,.$$

Obsérvese que lo obtenido para G vale también para todo subgrupo U de G.

Sea ξ un generador de $H^n(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (G-módulo no necesariamente trivial !). Distinguimos ahora dos casos:

(i) n es par. Entonces, para todo $g \in G$, $g \neq 1$, se tiene $g\xi = -\xi$.
En efecto, por 1.3.3, $\hat{H}^{n+1}((g), \mathbb{Z}) = 0$, y si $g\xi = \xi$ tendríamos $\hat{H}^o((g), H^n(X, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_{|(g)|}$, en contra del isomorfismo (1) aplicado a $(g) \subset G$. Así pues, $g\xi = -\xi$ para todo $g \neq 1$, que implica $G = \{1\}$ ó $G = \mathbb{Z}_2$.

(ii) n es impar. Entonces, para todo $g \in G$ se tiene $g\xi = \xi$.

En efecto, $\hat{H}^{n+1}((g), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|(g)|}$ por 1.3.3, y si $g\xi = -\xi$, tendríamos $\hat{H}^{0}((g), H^{n}(X, \mathbb{Z}) = 0$ (ya que $H^{n}(X, \mathbb{Z})^{(g)} = 0$), en contra de (1). Así pues, $H^{n}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ como G-módulo trivial, y el isomorfismo $\hat{H}^{p}(G, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^{p+n+1}(G, \mathbb{Z})$ nos da la periodicidad de G, en virtud de 1.5.1.

Si X es una n-esfera, el razonamiento anterior sobre la sucesión espectral de Swan puede substituirse por un razonamiento geométrico sobre la proyección $X \longrightarrow X/G$ utilizando la sucesión espectral de Cartan-Leray (p.e. [1]. XVI. 9).

Puesto que todas las demostraciones que conocemos del teorema 2.2 utilizan sucesiones espectrales, vamos a dar ahora, para el caso de una n-esfera X, una demostración en la que no se precisa sucesión espectral alguna, y que creemos interesante por basarse en un razonamiento geométrico elemental. Es consecuencia de los dos siguientes lemas (el primero de ellos lo necesitaremos también en la demostración de 2.5).

2.3. Lema Si G opera sobre una n-esfera homológica simplemente conexa X, y $f : X \longrightarrow Y = X/G$ indica la proyección inducida por la acción de G, se tiene

$$H_n(G, \mathbb{Z}) \cong \frac{H_n(Y, \mathbb{Z})}{f_* H_n(X, \mathbb{Z})}$$

Demostración:

Observemos en primer lugar que, puesto que X es simplemente conexo y $H_1(X, \mathbb{Z}) = \ldots = H_{n-1}(X, \mathbb{Z}) = 0$, por el teorema de Hurewicz obtenemos $\pi_1 X = \ldots = \pi_{n-1} X = 0$, $\pi_n X \cong H_n(X, \mathbb{Z})$.

Por otra parte, puesto que $f : X \longrightarrow Y$ es un recubrimiento universal de Y, $\pi_m X \cong \pi_m Y$ para todo $m > 1$, y en particular $\pi_2 Y = \ldots = \pi_{n-1} Y = 0$.

Sea ahora

$$i : Y \hookrightarrow W$$

una inmersión tal que $i_* : \pi_1 Y \cong \pi_1 W$ y $\pi_m W = 0$ para todo $m > 1$ (véase [5]. V.8.2 para la existencia). Entonces, la sucesión exacta de homotopía

$$\ldots \longrightarrow \pi_{n+1} W \longrightarrow \pi_{n+1}(W, Y) \longrightarrow \pi_n Y \longrightarrow \pi_n W \longrightarrow \ldots$$

implica

$$\pi_m(W, Y) = 0 \quad \text{para todo } m \leq n,$$

$$\pi_m(W, Y) \cong \pi_{m-1} Y \quad \text{para todo } m > n.$$

Podemos aplicar pues el teorema de Hurewicz relativo, obteniendo

$$H_m(W,Y;\mathbb{Z}) = 0 \qquad \text{para todo} \quad m \leq n$$

y $\qquad \mu : \pi_{n+1}(W,Y) \longrightarrow H_{n+1}(W,Y;\mathbb{Z})$ es epimorfismo,

de donde, por la sucesión exacta de homología

(1) $\qquad i_* : H_m(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(W,\mathbb{Z})$ es isomorfismo si $m < n$

es epimorfismo si $m = n$.

Ahora bien, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(W,Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mu"'] & \pi_n Y \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\nu"] & \pi_n W \arrow[d, "\rho"] \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(W,Y;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & H_n(Y,\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] & H_n(W,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

resulta

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(i_*: H_n(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(W,\mathbb{Z})) &= \operatorname{Im} \partial = \operatorname{Im}(\nu : \pi_n Y \longrightarrow H_n(Y,\mathbb{Z})) \\ &= H_n^{sph}(Y,\mathbb{Z})\end{aligned}$$

la homología esférica de Y.

Así pues,

$$H_n(W,\mathbb{Z}) \cong \frac{H_n(Y,\mathbb{Z})}{H_n^{sph}(Y,\mathbb{Z})}$$

y, puesto que W es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(G,1)$, resulta $H_m(W,\mathbb{Z}) \cong H_m(G,\mathbb{Z})$ para todo m ([5]. IX), de donde

$$H_n(G,\mathbb{Z}) \qquad \frac{H_n(Y,\mathbb{Z})}{H_n^{sph}(Y,\mathbb{Z})}$$

y el lema es consecuencia de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_n X & \xrightarrow[\cong]{f_*} & \pi_n Y \\ \sigma \Big\downarrow \cong & & \Big\downarrow \nu \\ H_n(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y,\mathbb{Z}) \end{array}$$

ya que σ es isomorfismo por el teorema de Hurewicz.

2.4. Lema Si G opera sin puntos fijos sobre una n-esfera X, n impar, y $f: X \longrightarrow Y = X/G$ es la proyección, entonces grado de $f = |G|$.

Demostración: Sea ξ un generador de $H_n(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, y η un generadpr de $H_n(Y, \mathbb{Z})$; debemos demostrar que $f_*: H_n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y, \mathbb{Z})$ viene dada por $f_*\xi = |G|\eta$.

Puesto que n es impar, todo elemento $g \in G$ conserva la orientación de X (como aplicación $g: X \longrightarrow X$); por tanto, la aplicación inducida $g_*: H_n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z})$ es la identidad.

Sea $e_1,\ldots,e_s$, $s = |G|t$ una triangulación de X compatible con la acción de G; entonces, ordenando convenientemente, podemos poner $f\, e_i = f\, e_{i+t}$. El ciclo $\xi = \sum_{i=1}^{s} e_i$ genera $H_n(X, \mathbb{Z})$, y el ciclo $\eta = \sum_{j=1}^{t} f\, e_j$ genera $H_n(Y, \mathbb{Z})$, de donde

$$f_*\xi = f_*\left(\sum_{i=1}^{s} e_i\right) = \sum_{i=1}^{s} f\, e_i = |G| \left(\sum_{j=1}^{t} f\, e_j\right) = |G|\eta .$$

De estos dos lemas se sigue inmediatamente el teorema 2.2 para una n- esfera X, ya que, si n es impar

$$H_n(G,\mathbb{Z}) \cong \frac{H_n(Y,\mathbb{Z})}{f_* H_n(X,\mathbb{Z})} \cong \mathbb{Z}/_{|G|\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{|G|}$$

que, por 1.2.2 y 1.5.2, implica la periodicidad de G; y si n es par, todo elemento $g \neq 1$ de G invierte la orientación de X, por lo que $G = \{1\}$ ó $G = \mathbb{Z}_2$.

Los siguientes teoremas nos imponen fuertes restricciones sobre la homología de una variedad que admita un recubrimiento homologicamente esférico; en particular nos imponen restricciones sobre la dimensión de dicha variedad. El teorema 2.6, bajo hipótesis más débiles que las de 2.5, admite interesantes aplicaciones.

2.5. Teorema Sea Y una n- esfera homológica que admita una esfera homológica X como recubrimiento universal; entonces $Y = X$ ó $n = 3$.

Demostración: Pongamos $G = \pi_1 Y$; entonces G opera sin puntos fijos sobre X y $X/G = Y$.

a) Si $G = \{1\}$ ó si $n = 1$, claramente $Y = X$.

b) Si n es par y $G \neq \{1\}$, por 2.2 tenemos $G = \mathbb{Z}_2$, de donde $Y = X/\mathbb{Z}_2$ no puede ser una esfera homológica.

c) Supongamos pues n impar, $n > 3$, $G \neq \{1\}$.

Entonces, por 2.2, G es periódico, y por (1) de 2.3

$$H_m(Y, \mathbb{Z}) \cong H_m(G, \mathbb{Z}) \qquad \text{para todo} \quad m < n.$$

Pero, puesto que Y es una n-esfera homológica

$$H_m(Y, \mathbb{Z}) = 0 \qquad \text{para todo} \quad m \neq o, n$$

de donde $(n > 1)$

$$G_{ab} \cong H_1(G, \mathbb{Z}) \cong H_1(Y, \mathbb{Z}) = 0,$$

es decir, G es perfecto.

Podemos aplicar por tanto 2.1.7 (G es perfecto y periódico); resulta

$$H_3(G, \mathbb{Z}) \neq 0$$

de donde

$$H_3(Y, \mathbb{Z}) \neq 0$$

que implica $n = 3$.

2.6. Teorema Sea Y una variedad tal que $H_1(Y, \mathbb{Z}) = 0$ y que admita una n-esfera homológica X como recubrimiento universal. Entonces $Y = X$ o bien $n \equiv 3$ mód 4. Si, además, n es impar y $\geqslant 3$, entonces $H_3(Y, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Demostración: Pongamos $G = \pi_1 Y$. Puesto que

$$G_{ab} \cong H_1(G, \mathbb{Z}) \cong H_1(Y, \mathbb{Z}) = 0$$

G es perfecto, y, puesto que G opera sin puntos fijos sobre una n - esfera homológica X, G es periódico de período un divisor de $n+1$.

Entonces, por 2.1.7, $n+1 = \mathring{4}$ y $2-H_3(Y, Z) \neq 0$.

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para que un grupo G que opere sin puntos fijos sobre una esfera homológica X sea abeliano.

2.7. __Teorema__ Si G, finito de orden r, opera sin puntos fijos sobre una n - esfera homológica X, n impar, y $(r, n+1) = 1$ ó 2, entonces G es cíclico.

Demostración:

(i) Si $(r, n+1) = 1$, r es impar, y por tanto todos los subgrupos de Sylow de G son cíclicos. Así pues, se desprende de 2.1.2 que $m'_p \mid r$ para todo p, y, puesto que $m'_p \mid n+1$, resulta $m'_p = 1$ de donde $m = 2$ y G es cíclico.

(ii) Si $(r, n+1) = 2$ y S_2G fuera cuaterniónico, tendríamos $r = 2^{\alpha} q$ con $(2,q) = 1$ y $\alpha > 1$, y por el teorema de Swan (2.1.1), $m_2 = 4$. Resultaría entonces que 4 dividiría a r y $n+1$ en contra de la hipótesis. Así pues S_2G es cíclico. Pueden presentarse entonces dos casos:

a) $n+1 = 2.t$, $(2,t)=1$, y se razona igual que en (i),

b) $r = 2.q$, $(2,q) = 1$.

En este punto necesitamos el siguiente resultado de J. Milnor 6 : "Si G es un grupo finito que opera sin puntos fijos sobre una n-esfera homológica, entonces todo elemento de orden 2 pertenece al centro de G".

Así pues, $S_2G \subset$ centro de G. Por tanto, para todo $p \neq 2$ primo, $C_G(S_pG) \supset S_2G$, de donde $|C_G(S_pG)| = \dot{2}$, que implica $m'_p \neq \dot{2}$. Puesto que $m'_p \mid r$, resulta $m_p = 2m'_p \mid r$, de donde $m_p \mid (r,n+1) = 2$, es decir $m_p = 2$ para todo p, y G es cíclico.

El resultado de Milnor que hemos utilizado es consecuencia del siguiente teorema: "Si X es una n-esfera homológica y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación de período 2 sin puntos fijos, entonces, para toda aplicación de orden impar $f : X \longrightarrow X$, existe un punto $x \in X$ para el cual $Tf(x) = fT(x)$". ([6]).

M. Nakaoka ([7]) ha generalizado recientemente este resultado en la siguiente forma: " Sean N y M dos

n- variedades con una involución T sin puntos fijos. Si N es una esfera homológica mod $\mathbb{Z}_2$, para toda aplicación $f : N \longrightarrow M$ tal que $f_* : H_n(N, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(M, \mathbb{Z}_2)$ no sea trivial, existe un punto $y \in N$ para el cual se tiene $T f(y) = f T(y)$ ".

3.- Esferas homológicas mod $\mathbb{Z}_p$.

En este apartado vamos a demostrar algunos resultados análogos a los del apartado anterior para esferas homológicas módulo $\mathbb{Z}_p$. Veremos que todo grupo que opere sin puntos fijos sobre una esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$ ha de ser necesariamente p-periódico. En particular, los análogos de los teoremas 2.5 y 2.6 sólo son válidos (como era de esperar) para esferas homológicas mod $\mathbb{Z}_2$.

Designemos por $\mathscr{C}_p$ la clase de Serre de los grupos abelianos de torsión que no tienen p- torsión. $\mathscr{C}_p$ es una clase perfecta y completa, en el sentido de que si $A \in \mathscr{C}_p$, entonces $H^m(A, \mathbb{Z}) \in \mathscr{C}_p$ y $A \otimes B \in \mathscr{C}_p$ y $\mathrm{Tor}(A,B) \in \mathscr{C}_p$, para todo grupo abeliano B . Son aplicables, pues, los teoremas de Hurewicz mod $\mathscr{C}_p$.

3.1. Teorema (de Hurewicz absoluto)

Si $\pi_1 X = 0$ y $\pi_i X \in \mathcal{C}_p$ $1 < i < n$, entonces

$$\pi_i X \longrightarrow H_i(X, \mathbb{Z})$$

es $\mathcal{C}_p$-isomorfismo para todo $i \leq n$ y $\mathcal{C}_p$- epimorfismo para $i = n+1$.

3.2. Teorema (de Hurewicz relativo)

Si $\pi_1(X,A) = \pi_2(X,A) = 0$ y $\pi_i(X,A) \in \mathcal{C}_p$ $2 < i < n$, entonces

$$\pi_i(X,A) \longrightarrow H_i(X,A; \mathbb{Z})$$

es un $\mathcal{C}_p$- isomorfismo para $i < n$ y un $\mathcal{C}_p$- epimorfismo para $i = n$.

($\mathcal{C}_p$- monomorfismo significa con núcleo en $\mathcal{C}_p$ y $\mathcal{C}_p$- epimorfismo con conúcleo en $\mathcal{C}_p$).

Para la demostración de estos teoremas, así como para un desarrollo completo de la teoría de clases de grupos abelianos, nos remitimos a [5] o bien al trabajo original de J.P. Serre [8] .

3.3. Definición Una n- esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$, p primo, es una variedad compacta X tal que $H_i(X, \mathbb{Z}_p) \cong H_i(S^n, \mathbb{Z}_p)$ para todo $i \geq 0$.

Aplicando repetidas veces el teorema de los coeficientes universales para homología y cohomología, obtenemos :

3.4. <u>Proposición</u> Para una variedad compacta X son equivalentes

(i) $H_i(X, \mathbb{Z}_p) \cong H_i(S^n, \mathbb{Z}_p) \qquad i \geqslant 0$,

(ii) $H^i(X, \mathbb{Z}_p) \cong H^i(S^n, \mathbb{Z}_p) \qquad i \geqslant 0$,

(iii) $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus A_0$, $H_n(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus A_n$,

$H_i(X, \mathbb{Z}) = A_i$, $i \neq 0, n$, $A_j \in \mathscr{C}_p$,

(iv) $H^0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H^n(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus B_n$,

$H^i(X, \mathbb{Z}) = B_i$, $i \neq 0, n$, $B_j \in \mathscr{C}_p$.

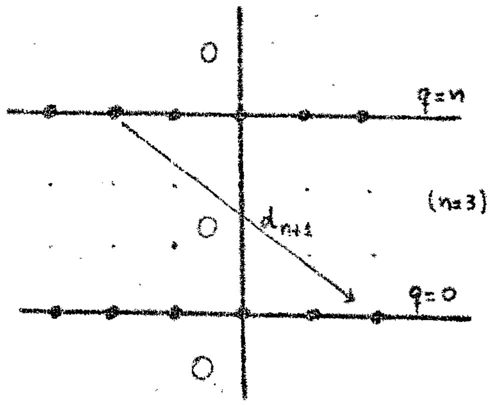
3.5. <u>Teorema</u> Sea G un p-grupo que opere sin puntos fijos sobre una n-esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$, X. Entonces

(i) si n es par, $G = \{1\}$ ó $G = \mathbb{Z}_2$ (si $p=2$),

(ii) si n es impar, G es periódico.

Demostración :

Consideremos la sucesión espectral de Swan $E_1^{pq}(X)$ asociada a la acción de G sobre X.



Puesto que G es un p-grupo

y $H^q(X,\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}_p$, $q \neq o,n$, en virtud de 1.5.2 se tiene

$$\hat{H}^p(G,H^q(X,\mathbb{Z})) = 0 \qquad \text{para todo} \quad q \neq o,n;$$

es decir, $E_2^{pq}(X) = 0$ para $q \neq o,n$, que implica $E_i^{pq}(X) = 0$ para todo $q \neq o,n$.

Nuestra sucesión espectral tiene pues la misma forma que la del teorema 2.2. Puesto que G opera sin puntos fijos, en virtud de 1.3 se tiene $E_\infty = 0$, de donde un isomorfismo

$$\hat{H}^p(G,H^n(X,\mathbb{Z})) \cong \hat{H}^{p+n+1}(G,H^o(X,\mathbb{Z})) \qquad (1)$$

Sabemos que $H^o(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ como G-módulo trivial; designemos por $LH^n(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ la parte libre del grupo abeliano $H^n(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus B_n$. Entonces, de la sucesión exacta corta de coeficientes

$$LH^n(X,\mathbb{Z}) \rightarrowtail H^n(X,\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow B_n$$

resulta

$$\hat{H}^p(G,H^n(X,\mathbb{Z})) \cong \hat{H}^p(G,LH^n(X,\mathbb{Z}) \qquad p \in \mathbb{Z},$$

ya que $\hat{H}^p(G,B_n) = 0$.

Así pues, el isomorfismo (1) puede escribirse

$$\hat{H}^p(G,LH^n(X,\mathbb{Z})) \cong \hat{H}^{p+n+1}(G,\mathbb{Z}).$$

El teorema resulta entonces de un razonamiento análogo al de 2.2.

3.6. Corolario Bajo las hipótesis del teorema 3.5 , G es cíclico o cuaterniónico generalizado (si $p=2$).

Demostración: Por 1.5.7, todo p-subgrupo de un grupo periódico es cíclico o cuaterniónico generalizado.

3.7. Corolario Bajo las hipótesis de 3.5, si $p=2$ y $n+1 \not\equiv 0 \mod 4$, G es cíclico.

3.8. Teorema Sea G un grupo finito que opere sin puntos fijos sobre una n-esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$ X. Entonces

(i) si n es par, $S_pG = \{1\}$ ó $S_pG = \mathbb{Z}_2$.

(ii) si n es impar, G es p-periódico de p-período un divisor de $n+1$.

Demostración: Si G opera sin puntos fijos sobre X, también opera sobre X el p-subgrupo de Sylow S_pG de G. Si n es par, el teorema resulta de 3.5. Si n es impar, el corolario 3.6 nos dice que S_pG es cíclico o cuaterniónico generalizado, y por tanto, en virtud de 1.5.6, G es p-periódico.

3.9. <u>Proposición</u> Si G opera sobre una n-esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$ simplemente conexa X, entonces

$$p\text{-}H_n(G, \mathbb{Z}) \cong p\text{-}\frac{H_n(Y, \mathbb{Z})}{f_* H_n(X, \mathbb{Z})}$$

donde $f : X \longrightarrow Y = X/G$ es la proyección inducida por la acción de G.

Demostración: Todo el razonamiento seguido en 2.3 puede relativizarse módulo $\mathbb{Z}_p$, utilizando los teoremas de Hurewicz 3.1 y 3.2, (obsérvese que es esencial que X sea simplemente conexo), hasta obtener

$$i_* : H_m(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(W, \mathbb{Z})$$

es $\mathscr{C}_p$-isomorfismo para todo $m < n$ y $\mathscr{C}_p$-epimorfismo para $m = n$; es decir

(1) $\qquad p\text{-}H_m(Y, \mathbb{Z}) \cong p\text{-}H_m(W, \mathbb{Z}) \cong p\text{-}H_m(G, \mathbb{Z}) \qquad m < n,$

y, además, para $m = n$, Coker $i_* \in \mathscr{C}_p$, que equivale a que Im i_* sea $\mathscr{C}_p$-isomorfo a $H_n(W, \mathbb{Z})$.

Así pues, existe un $\mathscr{C}_p$-isomorfismo

$$H_n(G, \mathbb{Z}) \cong H_n(W, \mathbb{Z}) \longrightarrow \frac{H_n(Y, \mathbb{Z})}{H_n^{sph}(X, \mathbb{Z})}$$

que implica la proposición.

3.10. <u>Teorema</u> Sea Y una n-esfera homológica mod $\mathbb{Z}_2$. Supongamos que su recubrimiento universal es también una esfera homológica mod $\mathbb{Z}_2$. Entonces $Y = X$ ó $n = 3$.

Demostración: Pongamos $G = \pi_1 Y$; entonces G opera sin puntos fijos sobre X y $X/G = Y$.

El único caso digno de discutir es : n impar, $n > 3$, $G \neq \{1\}$. Por (1) de 3.9

$$2 - H_i(Y, \mathbb{Z}) \cong 2 - H_i(G, \mathbb{Z}) \qquad \text{para todo } i < n ,$$

pero $\qquad 2 - H_i(Y, \mathbb{Z}) = 0 \qquad i \neq o,n$

ya que $\qquad H_i(Y, \mathbb{Z}) \in \mathscr{C}_2 \qquad i \neq o,n$.

Así pues $\qquad 2 - H_i(G, \mathbb{Z}) = 0$

de donde $m_2 \neq 2$.

Entonces 2.1.2 implica $m_2 = 4$ y por tanto

$$2 - H_3(G, \mathbb{Z}) \neq 0 ,$$

de donde $n = 3$.

3.11. <u>Teorema</u> Sea Y una variedad con $2 - H_1(Y, \mathbb{Z}) = 0$. Supongamos que su recubrimiento universal X es una n-esfera homológica mod $\mathbb{Z}_2$. Entonces $Y = X$ ó $n \equiv 3 \bmod 4$. En particular, si $n \geqslant 3$ es impar, $2 - H_3(Y, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Obsérvese que los teoremas 3.10 y 3.11 no son válidos en general para espacios cuyo recubrimiento universal sea una esfera homológica mod $\mathbb{Z}_p$, p primo arbitrario, pues en tal caso no podemos decir nada sobre el p-período de G.

3.12. <u>Teorema</u> Sea G un grupo de orden $|G| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, $2 < p_1 < \ldots < p_s$ primos, que opere sin puntos fijos sobre una n-esfera homológica mod $\mathbb{Z}_{p_1}$. Entonces

$$p_1 - H_1(X/G, \mathbb{Z}) \neq 0 .$$

En particular, X/G no puede ser una esfera homológica mod $\mathbb{Z}_{p_1}$.

Demostración: En virtud de 2.1.2, puesto que $S_{p_1}G$ es cíclico, al ser $p_1 \neq 2$, se tiene $m_{p_1} = 2$, de donde el teorema.

B I B L I O G R A F I A

Esta bibliografía incluye estrictamente los libros y trabajos citados en esta memoria.

1	H. Cartan - S. Eilenberg	Homological Algebra. Princeton 1956
2	B. Eckmann - P.J. Hilton	On central group extensions and homology. Comment. Math. Helv. 46 (1971) 345-355
3	W. Feit - J.G. Thompson	Solvability of groups of odd order. Pacific J. Math. 13 (1963) 755-1029
4	P.J. Hilton - U. Stammbach	A course in homological algebra Springer 1971
5	S.T. Hu	Homotopy theory Acad. Press 1959
6	J. Milnor	Groups which act on S^n without fixed points. Amer. J. Math. 79 (1957) 623-630
7	M. Nakaoka	Note on a theorem due to Milnor. Osaka J. Math. 7 (1970) 443-449

8 J.P. Serre Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens.
Ann of. Math. 58 (1953), 258-294

9 R. Swan The p-period of a finite group.
Ill. J. Math. 4 (1960), 341-346

10 R. Swan A new method in fixed point theory.
Comment. Math. Helv. 34 (1960), 1 - 16

11 H. Zassenhaus The theory of groups.
Chelsea Pub. 1949

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leida esta Memoria el día 13 de Abril de 1973 en la Facultad de Ciencias, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE

VOCALES

Fué calificada de Sobresaliente - cum laude