

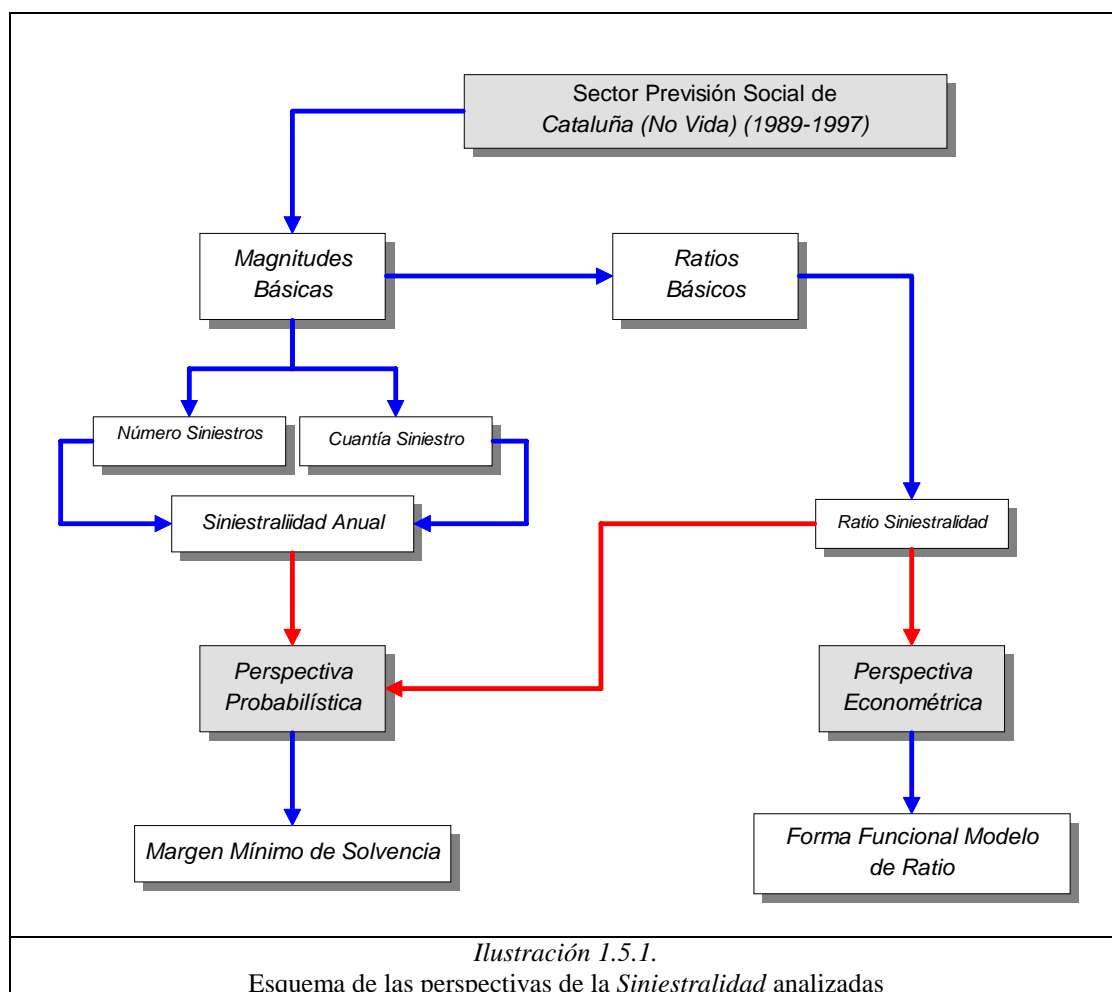
CAPÍTULO 5 SECTOR DE PREVISIÓN SOCIAL EN CATALUÑA (No Vida)

5.1. Introducción.

En el presente apartado se aborda el estudio del sector de previsión social de Cataluña (No Vida) para el período 1989 a 1997, desarrollando los siguientes aspectos. En primer lugar, se realiza un estudio descriptivo de las magnitudes básicas que incorpora el modelo estadístico suministrado por la Administración y de obligado cumplimiento por las entidades. En segundo lugar y a partir de las magnitudes anteriores, se han generado un conjunto de ratios de gestión habituales en el estudio de la siniestralidad que se analizan en términos descriptivos. Destacamos como ratio más importante el ratio de siniestralidad (pagos por prestaciones respecto a los ingresos recibidos por primas). En tercer lugar, se analiza el comportamiento de la siniestralidad anual o daño total a partir del número de siniestros y la cuantía de los mismos. Dicho estudio se realiza desde dos ópticas, la primera de ellas es a partir de la definición de un modelo a priori de su comportamiento y la segunda, consiste en la utilización de la simulación de Monte-Carlo para su obtención. En cuarto lugar, se obtiene de forma natural el margen mínimo de solvencia para las prestaciones analizadas comparando los resultados obtenidos por simulación de Monte-Carlo y por la probabilización del ratio de siniestralidad¹, es decir, la *perspectiva probabilística*. En último lugar, se analiza el ratio de siniestralidad desde la *óptica econométrica* del modelo de ratio, realizando un mayor esfuerzo en las características de su forma funcional². Este último aspecto nos llevará posteriormente hacia la aplicación de modelos econométricos neuronales en el capítulo 6, (véase ilustración 1.5.1.).

¹ Se comprobará su fiabilidad mediante las distribuciones *complementarias Log-Log* y la estimación del exponente característico (α -estable, $S_\alpha(\beta, \mu, c)$).

² Se especifican modelos con formas funcionales *flexibles* mediante la transformación de Box-Cox.



5.2. Descripción del sector de previsión social de Cataluña (No Vida).

5.2.1. Magnitudes básicas del estudio.

En el presente apartado analizamos las *variables* objeto del estudio, es decir, las magnitudes básicas, ya sea desglosado por ejercicio económico o por tipo de prestación. Las conclusiones obtenidas de dicho análisis se utilizarán posteriormente en la elaboración de los *ratios*, indicadores del estado de la *siniestralidad* de consumo anual (No vida) del sector.

Para poder presentar dicha información ha sido necesario un proceso de filtrado y de homogeneización de las bases de datos³ entregadas, a fin de conseguir conclusiones robustas y estables. El proceso utilizado ha sido el siguiente: para cada ejercicio económico se han mantenido las mismas entidades de previsión social, dotando al estudio empírico de la regularidad requerida durante todo el período estudiado⁴ (1989-1997). El número de entidades varía en función del tipo de prestación, (véase tabla 1.5.2.1.). Así, por ejemplo, de las 36 entidades de previsión social que se mantienen en todos los ejercicios económicos, para la prestación de enfermedad, sólo 16 de ellas otorgan dicha prestación, suponiendo un 25% del total. Este aspecto indica la presencia de una actividad *multiprestación* por parte de las entidades, que les permite otorgar más de un tipo de cobertura a sus mutualistas. La interpretación por lo tanto es, existen 2 entidades que ofrecen cobertura en 7 de los 9 posibles ramos o prestaciones estudiadas y así sucesivamente⁵, (véase tabla 2.5.2.1.).

Tabla 1.5.2.1.			Tabla 2.5.2.1.	
Tipología Prestación	n	Peso(%)	Número de Entidades n	Tipos de Prestaciones ofertadas
Enfermedad	16	25.0%	2	7
Larga Enfermedad	6	9.4%	2	6
Invalidez	7	10.9%	1	5
Intervención Quirúrgica	14	21.9%	4	4
Hospitalización Quirúrgica	12	18.7%	4	3
Accidentes	9	14.1%	7	2
Sepelio	8	12.5%	16	1
Servicio Automovilistas	7	10.9%	36	
Asistencia Sanitaria a Socios	10	15.6%		

Nota: n, número de entidades

³ Dicha información fue entregada “ad-hoc” por los responsables del Departamento de Trabajo de la Generalitat de Catalunya en el marco de la colaboración tácita con la investigación llevada a término en esta tesis doctoral.

⁴ No ha sido posible ampliarse el período estudiado, en primer lugar, por razones técnicas e informáticas y en segundo lugar, por razones de índole legal ya que a partir de 1998 se ha producido una modificación del plan contable que obliga a cambios que afectan a las entidades de previsión social y también a las compañías de seguros en general.

⁵ La tipología de prestaciones no vida estudiada es: *enfermedad*, *larga enfermedad*, *invalidez*, *intervención quirúrgica*, *hospitalización quirúrgica*, *accidentes*, *sepelio*, *servicio a automovilistas* y *asistencia sanitaria a socios*.

Las variables que forman parte del estudio⁶ y que están presentes en los documentos oficiales de obligado cumplimiento por partes de las entidades de previsión social⁷, son las definidas en el apartado 4.1.4., es decir,

X_{1i} :	Número de <i>siniestros</i> acaecidos por tipo de prestación i-ésima,
X_{2i} :	Número de <i>pólizas</i> emitidas por tipo de prestación i-ésima, (se ha utilizado como variable <i>proxy</i> el número de beneficiarios),
X_{3i} :	Importe <i>pagado</i> por tipo de prestación i-ésima,
X_{4i} :	Importe <i>ingresado</i> por tipo de prestación i-ésima.

Adicionalmente se posee información sobre la comarca donde se sitúa el domicilio fiscal de la entidad, el radio de acción territorial y la tipología fundacional. Éstas tres últimas variables sólo se analizarán para el ratio de siniestralidad, objetivo de este trabajo.

X_5 :	Comarca donde está situado el domicilio fiscal de la entidad,
X_6 :	Tipología fundacional ⁸ ,
X_7 :	Ratio de cobertura territorial ⁹ .

La evolución temporal para las variables básicas del sector¹⁰, está sintetizada en la tabla 3.5.2.1., pero para comprobar la inercia de las mismas se ha realizado el cálculo del factor acumulativo anual de la tasa de crecimiento. Las conclusiones obtenidas, para los nueve ejercicios económicos, y sin distinguir entre prestaciones, son: el número de siniestros ha descendido un 0.5% anual, los pagos por prestaciones han aumentado un 14.2% anual, el número de pólizas ha crecido un 0.4% anual y en último lugar, los ingresos por primas han incrementado un 12.2% anual, siempre con carácter acumulado. Observamos por lo tanto que la velocidad de crecimiento anual es superior en los pagos en un 2% respecto a los ingresos.

⁶ Dichas variables básicas son en esencia las mismas del apartado 4.1.4. La única diferencia entre ambos análisis es el número de entidades, así en el presente apartado 5.1.1. sólo se contemplan aquellas entidades que han estado presentes durante todo el período estudiado.

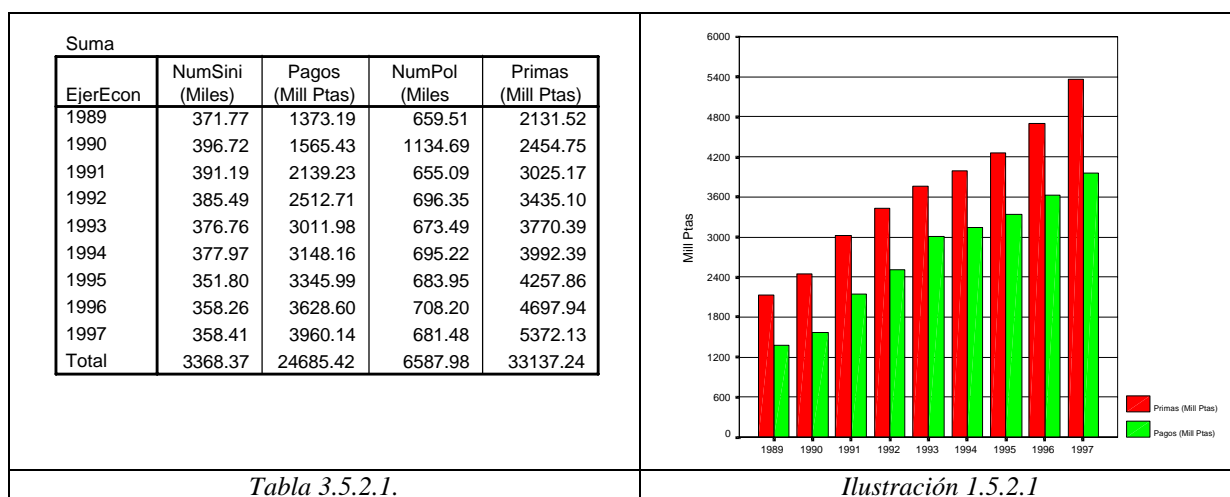
⁷ Modelo oficial de datos estadísticos, número siete, (véase apartado 2 del capítulo 7).

⁸ La tipología de las entidades de previsión social en función de carácter fundacional es, *abierto, profesional, religioso, empresa, conductores, gremial, escolar, discapacitados, onomástica y coral*.

⁹ La tipología de las entidades de previsión social en función del radio de cobertura territorial es, *local, comarcal, provincial, interprovincial* y todo el territorio de la comunidad autónoma de Cataluña.

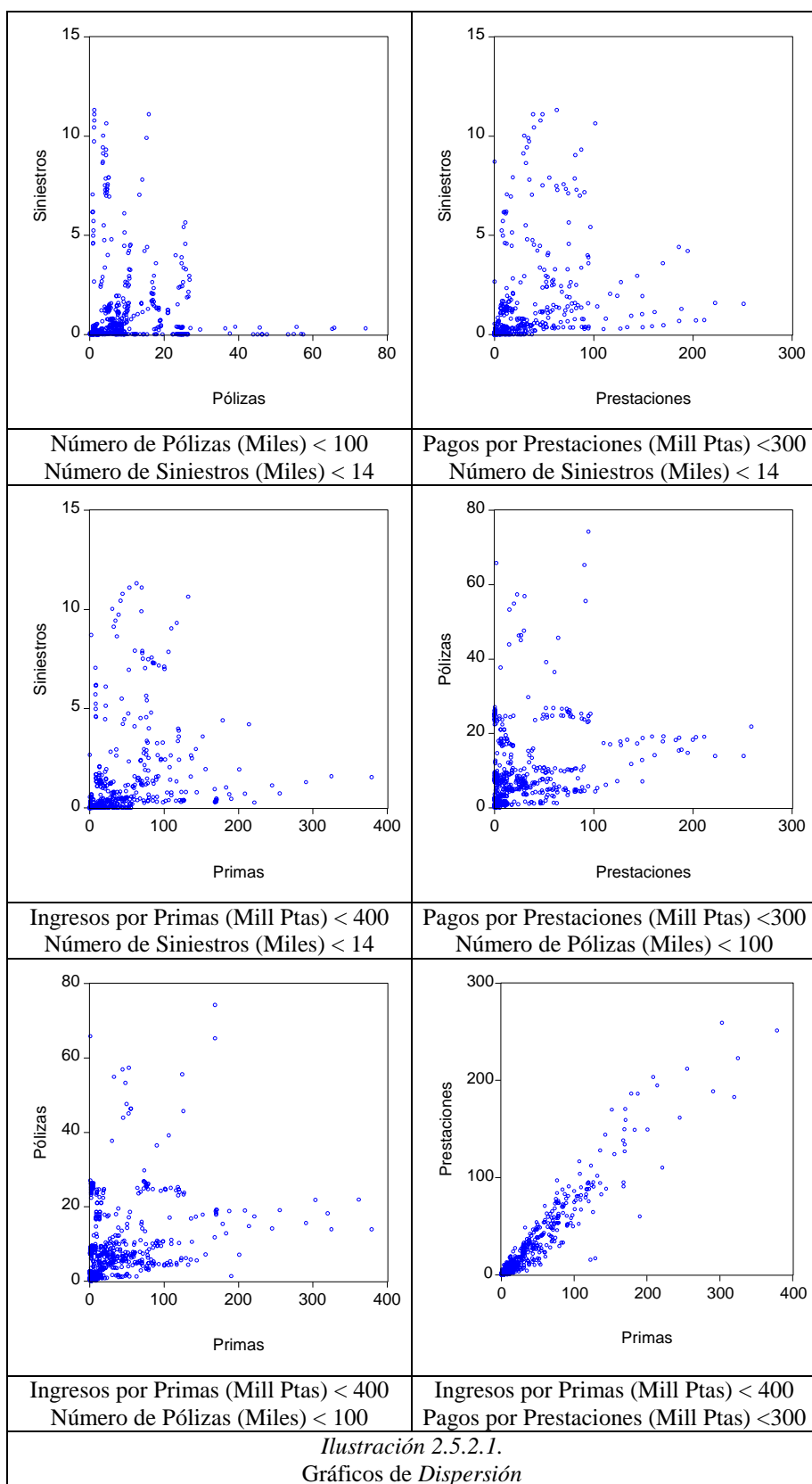
¹⁰ Los anexos 1 y 2 de este apartado recogen la información en formato de "ficha descriptiva". El anexo 1 contiene los estadísticos descriptivos más importantes desglosado por ejercicio económico y por prestación. Y el anexo 2 contiene, los valores básicos, su evolución sobre la base del año 1989, matriz de dispersión, evolución comparada entre ingresos y pagos (variables clave para el estudio de ratio de siniestralidad).

La ilustración 1.5.2.1. muestra la evolución anual del diferencial entre pagos e ingresos, como aproximación del margen de maniobra que posee el sector en términos de cobertura.



Otro aspecto importante a analizar es el tipo de relaciones que existen entre las cuatro variables básicas dos a dos, véase ilustración 2.5.2.1. El vínculo existente entre los pagos por prestaciones, X_{3i} , y los ingresos por primas, X_{4i} , posee una importancia mayor, ya que dicha relación es propiamente el ratio de siniestralidad, propósito de esta tesis doctoral.

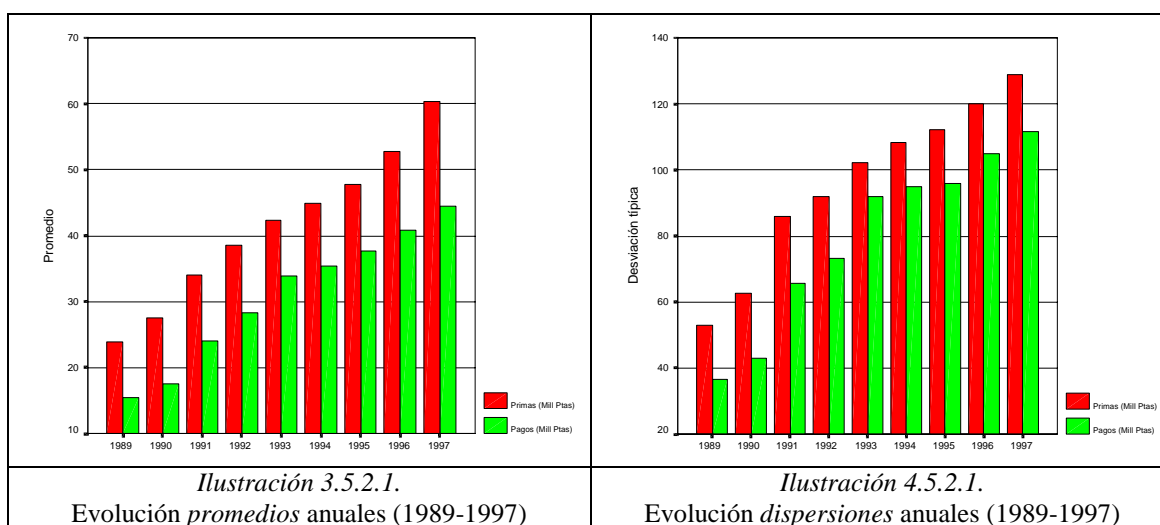
Las conclusiones que nos sugieren los gráficos de dispersión son las siguientes: en primer lugar, la mayoría de las entidades están por debajo de carteras de 20000 pólizas y el número de siniestros en el rango $[0;10000]$. En segundo lugar, la relación entre siniestros y pagos por prestaciones nos permite inferir un crecimiento paralelo creciente si bien parece existir dos poblaciones diferentes con pendiente diferente. En tercer lugar, el volumen de primas ingresadas se acumula la mayor parte hasta carteras anuales del orden de 200 Mill Ptas. En cuarto lugar, la relación entre primas y número de pólizas se infiere el mismo comportamiento que siniestros y prestaciones. En último lugar, la relación entre prestaciones e ingresos, si bien parecen poseer naturaleza lineal, existen dispersiones crecientes (dicha relación se analizará en apartados posteriores).



Nota: los filtros realizados permiten observar mejor la naturaleza conjunta de las variables.

Los estadísticos descriptivos¹¹ calculados para dichas variables están resumidos en la tabla 4.5.2.1. por tipo de prestación, sin distinguir, por ejercicio económico. Destacamos el carácter *asimétrico positivo*¹² de las distribuciones empíricas y las elevadas *leptocurtosis*¹³, aspectos que en lógica influenciarán en la modelización probabilística del ratio de siniestralidad que se realizará posteriormente.

Adicionalmente consideramos de interés presentar la evolución anual del promedio y la variabilidad tanto de los pagos como de los ingresos por primas, (véase ilustraciones 3.5.2.1. y 4.5.2.1.). Dos consideraciones al respecto, la presencia de un *gap* en cada una de las dos variables y el carácter sistemático de una mayor dispersión de los ingresos frente a los pagos. Este aspecto posee una influencia clara en el planteamiento del *ratio* de siniestralidad provocando distorsiones en los resultados.



¹¹ Se han calculado los siguientes estadísticos: *media aritmética, mediana, desviación típica, asimetría y curtosis*. Véase el desglose por años en el anexo 1 de este apartado.

¹² La expresión utilizada es el *coeficiente de asimetría de Fisher*, $\gamma_1 = m_3/S^3$, siendo “ m_3 ” el tercer momento respecto al origen y “S” la desviación típica. Un valor positivo de dicho estadístico nos diagnostica asimetría a la derecha, es decir, teniendo la media como referencia la cola larga, estaría para los valores superiores, existiendo mayor frecuencia para valores inferiores.

¹³ La expresión utilizada para el cálculo del estadístico de *Curtosis*, $\gamma_2 = (m_4/S^4) - 3$, donde valores positivos indican un mayor apuntamiento que la distribución Normal.

Tipología Prestación		NumSini	Pólizas	Pagos (Mill Ptas)	Primas (Mill Ptas)
Enfermedad	Media	491.40	4530.35	34.0155	45.4733
	Mediana	140.50	1460.50	4.3705	5.1099
	Desv. típ.	729.95	5347.63	55.9605	75.6541
	Asimetría	2.196	1.326	1.956	2.024
	Curtosis	4.450	.843	3.138	3.915
Larga Enfermedad	Media	376.11	11495.09	4.1735	5.5235
	Mediana	17.50	2134.00	.3160	.9293
	Desv. típ.	1507.04	50808.34	8.7957	10.1846
	Asimetría	4.797	6.982	2.381	1.908
	Curtosis	23.129	50.050	4.332	1.967
Invalidez	Media	41.85	3566.32	.9772	3.2540
	Mediana	15.00	587.00	.7263	1.4240
	Desv. típ.	74.74	3807.69	.9446	4.6829
	Asimetría	2.241	.500	1.673	1.972
	Curtosis	3.643	-1.634	2.543	3.042
Intervención Quirúrgica	Media	603.60	5050.36	25.3549	28.4078
	Mediana	201.50	2161.00	7.1354	10.2834
	Desv. típ.	825.04	5551.43	37.5070	38.5433
	Asimetría	2.313	1.338	2.501	2.249
	Curtosis	6.577	.832	7.058	6.067
Hospitalización Quirúrgica	Media	257.04	6321.98	7.8032	16.2369
	Mediana	95.50	3724.00	4.4622	8.3746
	Desv. típ.	390.05	7221.58	9.2366	20.6912
	Asimetría	2.370	1.478	1.508	2.370
	Curtosis	5.077	.988	1.241	7.171
Accidentes	Media	40.30	21999.39	13.6953	28.8010
	Mediana	8.00	17702.00	5.3614	18.2637
	Desv. típ.	93.82	16309.08	20.5964	34.6769
	Asimetría	2.759	1.230	2.530	2.353
	Curtosis	6.230	.867	6.673	6.194
Sepelio	Media	81.42	5066.97	15.3012	23.0353
	Mediana	19.00	1872.00	2.9629	6.8010
	Desv. típ.	122.66	7566.88	24.7670	32.9763
	Asimetría	1.628	2.088	1.980	1.974
	Curtosis	1.166	2.807	2.927	3.071
Servicios a Automovilistas	Media	1633.67	11790.41	25.8341	34.2101
	Mediana	1312.00	8352.00	11.9957	16.1280
	Desv. típ.	1589.70	8892.90	31.4360	36.7670
	Asimetría	1.141	.778	1.144	1.178
	Curtosis	.628	-1.107	-.275	-.036
Asistencia Sanitaria a Socios	Media	33986.71	9794.59	129.1584	162.2909
	Mediana	7049.00	5187.50	44.5508	69.0992
	Desv. típ.	60321.24	7992.59	205.8395	235.8831
	Asimetría	1.789	.720	1.989	1.730
	Curtosis	1.729	-.763	2.679	1.459
Total	Media	4205.21	8224.70	30.8183	41.3698
	Mediana	93.00	4799.00	5.0000	8.5796
	Desv. típ.	22758.38	16196.18	83.7894	99.2158
	Asimetría	6.956	14.669	5.900	5.222
	Curtosis	49.512	316.978	40.331	31.063

*Tabla 4.5.2.1.
Estadísticos Básicos*

A modo de síntesis, exponemos las siguientes conclusiones. Primeramente, en cada uno de los gráficos que representan matrices de dispersión de las variables básicas, observamos comportamientos muy dispares. En especial, la relación entre pagos e ingresos, objeto de estudio, parece tener relaciones presumiblemente no lineales. En segundo lugar, el nivel de dispersión de las dos variables básicas reseñadas es diferente. Los ingresos poseen una mayor variabilidad que los pagos por prestaciones, y es que los datos por ingresos recogen coberturas muy distintas. Se observa que en promedio la variabilidad de los ingresos es un 80% mayor que la de los pagos, destacamos las siguientes prestaciones con una mayor variabilidad, *Invalidez*, *Hospitalización Quirúrgica* y *Accidentes*, (véase tabla 5.5.2.1.).

En último lugar, la tabla 6.5.2.1., muestra cual ha sido la evolución de las tres variables básicas, por prestación y entre los ejercicios extremos (1989 y 1997), mediante el cálculo del factor acumulativo anual de la tasa de crecimiento. Para las 36 entidades de previsión social que están presentes en todos los ejercicios económicos, observamos como, en términos de número de siniestros, el mayor incremento es para la prestación de Intervención Quirúrgica (10% anual), respecto al pago de prestaciones, Accidentes (22% anual), respecto al número de pólizas, Accidentes (3%) y en último lugar, respecto a los ingresos por primas, Invalidez (19%).

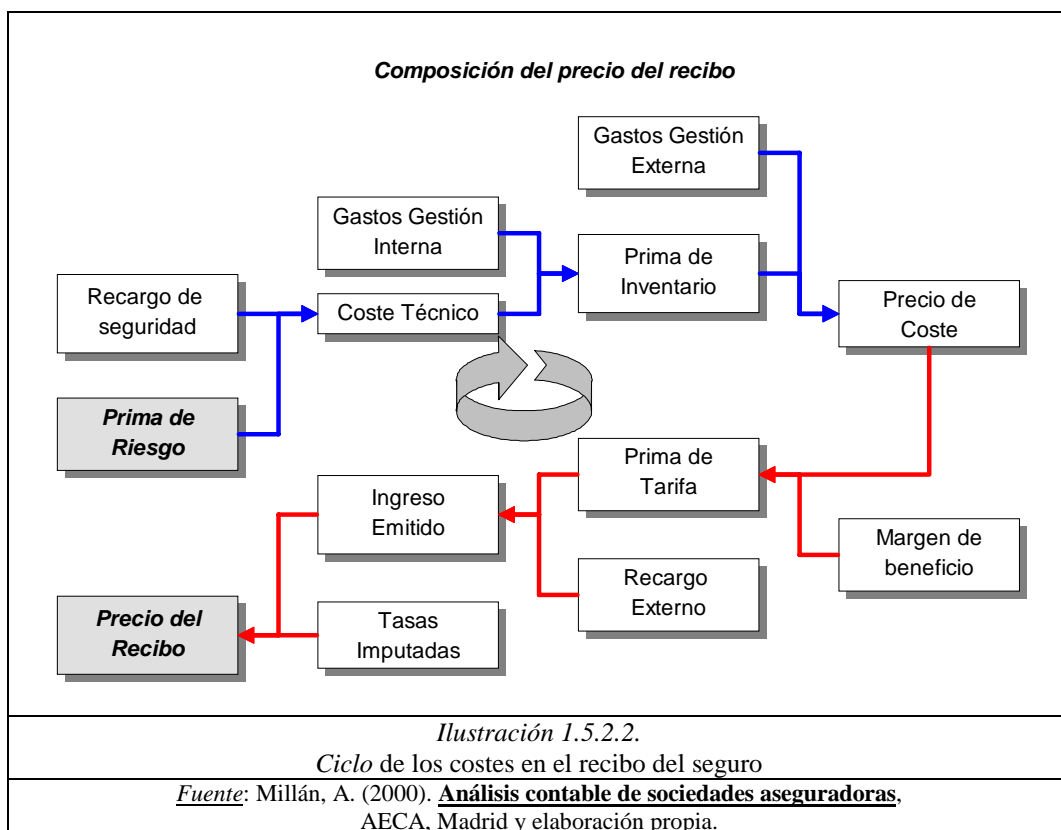
Tabla 5.5.2.1.		Tabla 6.5.2.1.			
Tipología Prestación	$(\sigma_{ing} / \sigma_{pag})$	X_{1t}	X_{3t}	X_{2t}	X_{4t}
Enfermedad	1.35	5%	17%	2%	15%
Larga Enfermedad	1.16	2%	20%	0%	7%
Invalidez	4.96	-4%	7%	-4%	19%
Intervención Quirúrgica	1.03	10%	11%	1%	12%
Hospitalización Quirúrgica	2.24	4%	7%	1%	15%
Accidentes	1.68	6%	22%	3%	17%
Sepelio	1.33	1%	9%	1%	10%
Servicio Automovilistas	1.17	6%	7%	-1%	3%
Asistencia Sanitaria a Socios	1.15	-1%	15%	-4%	12%

Nota: σ_{ing} representa la variabilidad de los ingresos y σ_{pag} , la variabilidad de los pagos.

Factor acumulativo anual de la tasa de crecimiento
 X_{1t} : número de siniestros
 X_{3t} : pagos prestaciones (Mill Ptas)
 X_{2t} : número de pólizas
 X_{4t} : Ingresos primas (Mill Ptas)

5.2.2. Ratios básicos utilizados en el estudio de la siniestralidad.

La actividad aseguradora posee elementos básicos que la diferencian de las otras actividades empresariales. Conceptos como por ejemplo, las *primas* adquiridas, las *provisiones técnicas* (objeto de controles exhaustivos por parte de la legislación vigente) y las formas de dispersión del riesgo, es decir, el *coaseguro* y el *reaseguro*¹⁴ son de utilización habitual entre los profesionales del sector. Respecto el primer concepto, la prima, puede descomponerse en otros factores que se especifica en la ilustración 1.5.2.2.¹⁵, donde resaltamos la prima de riesgo y el precio del recibo como punto inicial y final del proceso cíclico descrito.



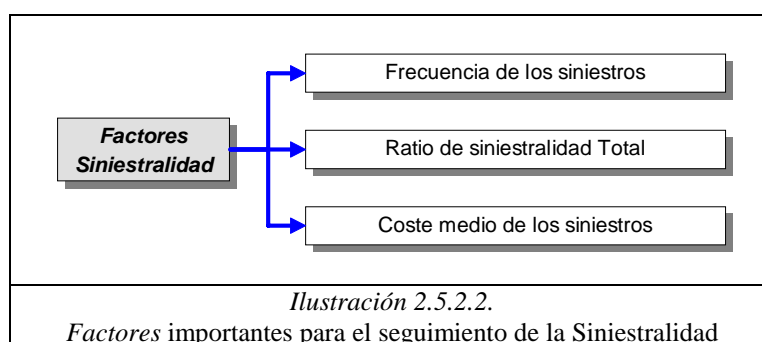
A su vez la propia actividad en el sector seguros posee, dos ciclos de operaciones, el primero de ellos es el de *ingresos-primas* y el segundo *gastos-siniestros*.

¹⁴ Estas dos últimas figuras permiten a las compañías distribuir sus responsabilidades a otras compañías especializadas en este tipo de actividades.

¹⁵ Véase Millán, A. (2000). Análisis contable de sociedades aseguradoras, AECA, Madrid.

La información que disponemos para este trabajo de investigación nos obliga a centrarnos más en las primas y en los pagos por las indemnizaciones por cada siniestro acaecido. La prima de riesgo¹⁶ como tal, posee dos factores básicos, el primero de ellos, el *coste medio* del siniestro o *índice de intensidad*, el cual puede definirse como el valor esperado de la liquidación de un siniestro para el tipo de cobertura estudiada. El segundo es el *índice de frecuencia*, es decir, el número de siniestros que se producen a lo largo de la vida de una póliza. La prima de riesgo es por lo tanto el producto de los dos factores anteriores.

Las variables básicas¹⁷ descritas en el apartado 5.2.1. sirven como base para el cálculo de un conjunto de ratios de gestión que permiten un control de la siniestralidad objeto de este estudio, (véase ilustración 2.5.2.2.). Dichos ratios permiten en lógica, realizar una comparación que corrige la dimensión de la entidad de previsión social, (véase apartados 1.1. a 1.4 y 5.4.1.).



Los ratios utilizados son los siguientes, en primer lugar, la *frecuencia* de siniestralidad medida por el *ratio* (R_1),

$$R_1 = \frac{\text{Número de Siniestros}}{\text{Número de beneficiarios (Pólizas)}} \cdot 1000 = \frac{X_{1i}}{X_{2i}} \cdot 1000$$

en segundo lugar, el *ratio* de cobertura efectiva o *gestión de la siniestralidad total*¹⁸, medida por el *ratio* (R_2),

¹⁶ Significa el coste real del riesgo asumido por la entidad, excluyendo otros conceptos como por ejemplos los gastos de gestión internos y/o externos.

¹⁷ Son las variables que aparecen en los documentos oficiales que deben remitir las entidades a las autoridades de control, en nuestro caso hablamos del *modelo* estadístico número siete y de la *Generalitat* de Cataluña.

¹⁸ El ratio de siniestralidad total (R_2) será ampliado más extensamente por ser objetivo final del presente trabajo.

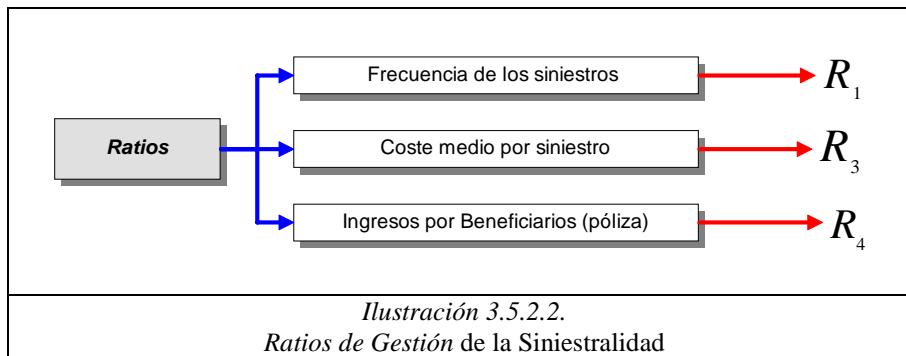
$$R_2 = \frac{\text{Gastos Técnicos}}{\text{Ingresos Adquiridos}} = \frac{(\text{Núm de Siniestros}) \cdot (\text{Coste Medio Siniestro})}{(\text{Núm Beneficiarios (Pólizas)}) \cdot (\text{Ingresos por Beneficiarios})} = \frac{X_{1i} \cdot m}{X_{2i} \cdot r}$$

siendo, “ m ”, el *coste medio por siniestro*,

$$R_3 = \frac{\text{Importe satisfecho por Prestaciones}}{\text{Número de Siniestros}} = \frac{X_{3i}}{X_{1i}} = m$$

y “ r ”, los *ingresos por beneficiario* (póliza),

$$R_4 = \frac{\text{Importe ingresado por Primas tarifa}}{\text{Número de beneficiarios (pólizas)}} = \frac{X_{4i}}{X_{2i}} = r$$



A continuación se presentan los resultados descriptivos de los *ratios* definidos (R_1, R_3, R_4) por ejercicio económico pero sin distinguir entre el tipo de prestaciones, (véase ilustración 3.5.2.2.).

Las conclusiones que se extraen de la tabla 1.5.2.2. para el año 1997 son las siguientes. En primer lugar, por cada 1000 pólizas, el sector *no vida* estudiado, posee 550 siniestros en promedio y una mediana de 61 siniestros. Se detecta que el promedio para el Ratio R1 se encuentra diez veces por encima de la mediana, lo cual es un síntoma de la presencia de *outliers* o valores atípicos. Este aspecto puede explicarse por no diferenciar entre las diferentes prestaciones. Éstas poseen en algunos casos comportamientos muy dispares en términos de frecuencia de siniestralidad, sobre todo la prestación de asistencia sanitaria.

R1					
EjerEcon	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
1989	361,5481	46,1000	1445,2006	6,259	43,968
1990	363,1693	43,5000	1453,2650	6,350	45,221
1991	401,7765	48,8000	1544,2163	6,188	43,205
1992	373,8331	55,2000	1447,3257	5,533	32,479
1993	476,5053	59,9000	1708,7097	4,679	21,778
1994	513,1540	59,9000	1836,0678	4,453	19,034
1995	505,9216	59,1000	1786,8352	4,482	19,549
1996	519,8861	55,5000	1817,9166	4,433	18,960
1997	549,8438	60,8000	1898,7186	4,357	18,107
Total	451,7375	51,2000	1662,2930	4,976	24,961

Ratio R1 por ejercicio económico

R3					
EjerEcon	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
1989	104637,04	32207,00	255544,40	4,282	18,954
1990	87255,04	33529,00	193761,47	5,863	42,550
1991	119336,09	37451,00	261410,74	4,108	19,749
1992	152711,38	42352,00	432075,20	5,332	31,618
1993	175126,69	41464,00	439410,20	4,076	17,246
1994	216486,26	48800,00	794960,57	7,173	57,546
1995	240399,12	47310,00	632951,33	4,077	17,930
1996	231598,60	49364,00	720774,71	5,765	38,146
1997	226485,73	49027,00	730387,17	5,763	36,636
Total	172670,66	42231,00	541422,24	7,003	62,322

Ratio R3 por ejercicio económico

R4					
EjerEcon	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
1989	3878,52	2737,00	4072,44	1,689	2,804
1990	4357,48	2994,00	4696,89	1,898	3,853
1991	5542,89	3516,00	6643,22	2,244	5,471
1992	5737,53	3895,00	6748,63	2,231	5,806
1993	6711,87	4355,00	8390,05	2,266	5,340
1994	7124,63	4516,00	9031,36	2,274	5,329
1995	7613,38	4596,00	9696,25	2,297	5,386
1996	9948,16	4668,00	19456,18	5,715	41,464
1997	11945,64	5028,00	22602,52	4,405	22,388
Total	6984,45	3858,00	12042,57	6,819	70,485

Ratio R4 por ejercicio económico

Tabla 1.5.2.2.

En segundo lugar y en términos de coste medio (m): el promedio global es de 226486 Ptas por siniestro, con una mediana de 49027 Ptas. La representatividad de las medidas anteriores no es tan preocupante como en el caso del Ratio R1, pero se observa altas dispersiones. En último lugar y desde la óptica del ingreso, destacamos que el promedio global es de 11946 Ptas por beneficiario y el ingreso mediano de 5028 Ptas. En todo los casos el grado de asimetría y de curtosis anual es alto y heterogéneo. Tales características pueden generar distribuciones “*Long Tail*”, que en muchos casos pueden complicar la modelización probabilística propuesta en el capítulo 5.3.3.2.

Si introducimos ahora la variable *tipología de prestación*¹⁹, la tabla 2.5.2.2. nos muestra un comportamiento diferencial. Así, en términos de índice de frecuencia por cada 1000 pólizas emitidas, tenemos que la prestación que con diferencia posee la mayor siniestralidad es la *Asistencia Sanitaria a Socios*²⁰, y le sigue *Servicios a Automovilistas*, que por cada 1000 pólizas cubiertas genera 146 siniestros y de forma sucesiva hasta la prestación que posee el menor índice de siniestralidad, *Accidentes*, con dos accidentes por cada 1000 pólizas. En términos de coste medio, observamos que por el contrario la prestación *Asistencia Sanitaria* posee el coste medio por siniestro más bajo, 8461 Ptas; la prestación de *Servicios a Automovilistas*, 15115 Ptas, y de la misma forma con carácter decreciente observamos que la prestación anterior de *Accidentes* (con menor índice de siniestralidad) aquí posee un coste medio muy alto, 1083059 Ptas. En último lugar y desde la óptica de los ingresos, el ingreso medio por póliza anual más elevado es para la prestación de *Asistencia Sanitaria*, 20741 Ptas, la prestación de *Servicios a Automovilistas* posee un ingreso medio de 2404 Ptas y de forma sucesiva, la prestación con un menor ingreso por póliza corresponde a *Accidentes*, con 1781 Ptas.

¹⁹ Véase en el anexo 1 el detalle por prestación de la evolución temporal para cada uno de los ratios definidos.

²⁰ El resultado posee cierta lógica ya que en Cataluña, el porcentaje de personas que de forma simultánea posee cobertura sanitaria pública y privada es muy elevado, además los socios de las mutualidades poseen una media de edad alrededor de 50 años. (Resultados obtenidos en la *Encuesta Coyuntural* elaborada por Miguel Ángel Sierra y Salvador Torra para la *Generalitat* de Cataluña, en colaboración con la Federación Catalana de Mutualidades, 1998). Véase Torra Porrás, S. (1998). **Una aproximació a la realitat mutualista catalana (Enquesta del Sector)**, *Mutual*. Revista de la Federació de Mutualitats de Catalunya, 6, pp. 36-39.

R1					
Tipología Prestación	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
Enfermedad	140,6285	102,0500	131,8325	2,358	11,602
Larga Enfermedad	25,4306	12,3000	30,6407	1,817	3,683
Invalidez	18,9778	13,5000	19,3255	1,488	3,049
Intervención Quirúrgica	100,4905	88,3000	52,8976	1,652	3,518
Hospitalización Quirúrgica	45,6426	49,5500	24,5750	-,126	-,519
Accidentes	1,6210	,4000	3,0245	2,947	9,136
Sepelio	16,7639	12,5000	16,2294	4,093	21,006
Servicios a Automovilistas	145,5575	106,1300	134,7895	1,669	3,260
Asistencia Sanitaria a Socios	3454,6978	1560,2500	3807,1654	,880	-,718
Total	451,7375	51,2000	1662,2930	4,976	24,961

Ratio R1 por tipo de prestación

R3					
Tipología Prestación	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
Enfermedad	64204,35	36867,00	87482,78	2,678	7,465
Larga Enfermedad	158430,57	14973,50	308564,30	2,483	5,724
Invalidez	119177,30	45771,00	220807,49	4,520	25,718
Intervención Quirúrgica	52692,22	46974,00	41486,83	2,624	8,345
Hospitalización Quirúrgica	41230,19	40673,50	21623,34	,070	-,909
Accidentes	1083059	500000,00	1360217	2,124	5,308
Sepelio	173149,33	160471,50	71967,25	1,611	5,041
Servicios a Automovilistas	15115,38	12663,00	9908,58	,667	-,448
Asistencia Sanitaria a Socios	8461,17	6640,50	6384,60	1,033	,631
Total	172670,66	42231,00	541422,24	7,003	62,322

Ratio R3 por tipo de prestación

R4					
Tipología Prestación	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
Enfermedad	11137,03	8244,50	14698,75	5,306	44,269
Larga Enfermedad	2147,41	1414,50	2141,71	,629	-,748
Invalidez	3130,16	341,00	5200,51	2,655	7,708
Intervención Quirúrgica	5978,98	5543,50	3815,10	,768	,494
Hospitalización Quirúrgica	4063,28	3537,50	3203,98	1,821	7,497
Accidentes	1781,31	1038,00	3486,85	7,680	65,143
Sepelio	4486,74	4127,00	1674,92	,525	-,125
Servicios a Automovilistas	2404,30	2383,00	1207,10	,382	-,635
Asistencia Sanitaria a Socios	20740,76	15304,50	24240,61	3,524	17,009
Total	6984,45	3858,00	12042,57	6,819	70,485

Ratio R4 por tipo de prestación

Tabla 2.5.2.2.

A continuación y de la misma forma que se ha realizado para las variables básicas, presentamos las tasas de crecimiento de los tres ratios por prestación, mediante el cálculo del factor acumulativo anual de la tasa de crecimiento. La comparación de dichas tasas permite observar inercias en el comportamiento medio de los ratios a lo largo de los ejercicios económicos, (véase tabla 3.5.2.2.).

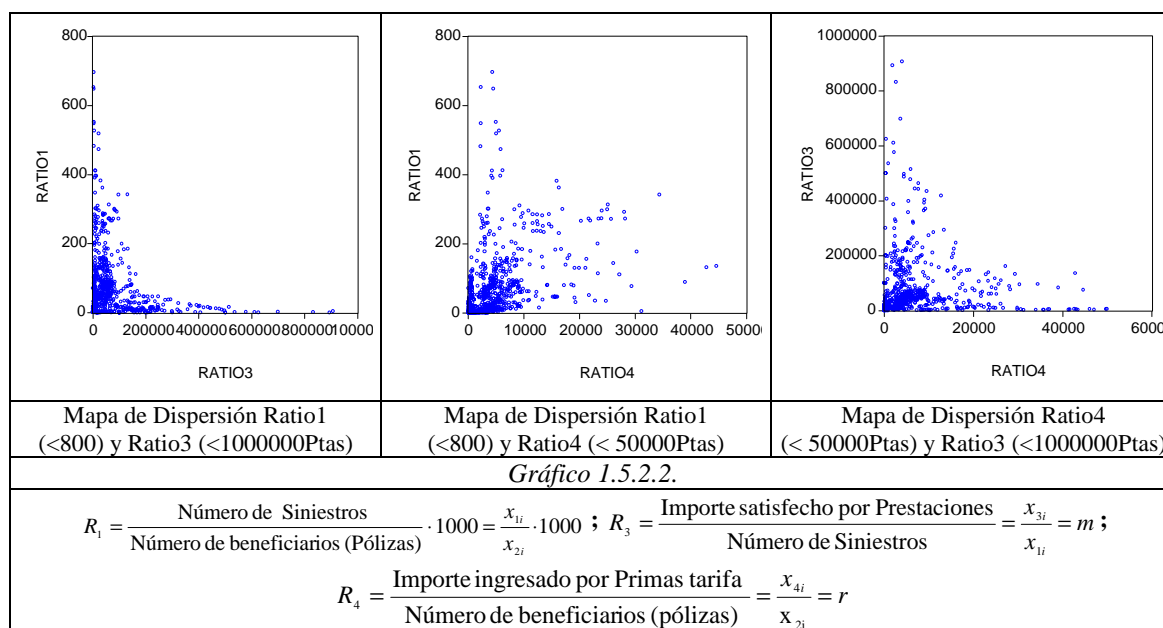
Las conclusiones son las siguientes: el mayor aumento en el índice de siniestralidad es en Enfermedad, 9% anual, en términos de coste medio por siniestro, la prestación de Accidentes posee el incremento anual acumulativo más elevado, 16% anual, y por último respecto al ingreso medio por beneficiario (póliza), la prestación de Asistencia Sanitaria posee el incremento mayor, un 22%.

Tabla 3.5.2.2.

Prestación _i	(R ₁)	(R ₃)	(R ₄)
Enfermedad	9%	5%	16%
Larga Enfermedad	4%	-3%	7%
Invalidez	3%	-10%	17%
Inter.Quirúrgica	8%	4%	9%
Hospit.Quirúrgica	4%	3%	11%
Accidentes	-8%	16%	11%
Sepelio	6%	6%	7%
Serv. Automovilistas	5%	0%	4%
Asist. Sanitaria	5%	11%	22%
$R_1 = \frac{\text{Número de Siniestros}}{\text{Número de beneficiarios (Pólizas)}} \cdot 1000 = \frac{x_{1i}}{x_{2i}} \cdot 1000$ $R_3 = \frac{\text{Importe satisfecho por Prestaciones}}{\text{Número de Siniestros}} = \frac{x_{3i}}{x_{1i}} = m$ $R_4 = \frac{\text{Importe ingresado por Primas tarifa}}{\text{Número de beneficiarios (pólizas)}} = \frac{x_{4i}}{x_{2i}} = r$			

Desde una óptica bidimensional, y con la finalidad de observar el tipo de relaciones existentes entre los ratios definidos, se han realizado mapas de dispersión entre ellos, véase gráfico 1.5.2.2. A la vista de los mismos consideramos que pueden existir relaciones de carácter no lineal a partir de las interacciones dos a dos²¹. La exploración de los momentos de orden superior, coeficiente de asimetría, (γ_1), y el coeficiente de curtosis, (γ_2), puede ayudarnos a una mayor comprensión de su comportamiento.

²¹ Para la información de las otras tipologías de prestaciones véase anexo 2 de este apartado.

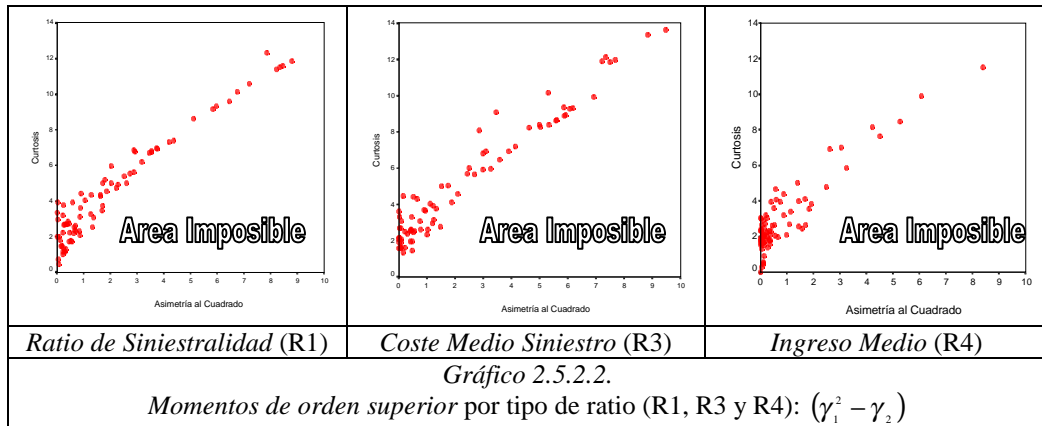


Una vez presentados los resultados descriptivos de los *ratios* definidos, prestación por prestación y siguiendo los pasos de Lau, H-S. ; Lau, A.H-L. y Gribbin, D.W (1995) en el ámbito de la modelización de corte transversal de los ratios²², los autores proponen gráficos de dispersión entre los *coeficientes de asimetría* (al cuadrado) y de *curtosis* para los ratios que deben ser estudiados como instrumento de análisis. Los diagramas²³ propuestos presentan una área imposible en todos los casos, aspecto que se considerará en el apartado de modelización probabilística de ratios por su influencia para generar momentos.

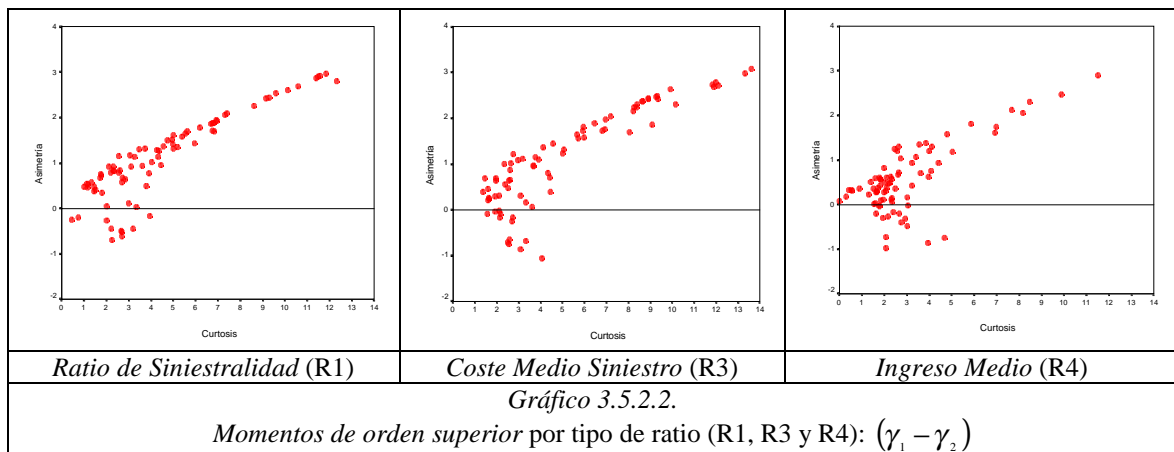
El gráfico 2.5.2.2., tal y como se ha comentado, muestra la relación entre, coeficientes de asimetría (γ_1) al cuadrado y de curtosis (γ_2) distinguiendo por tipo de ratio, R1, R3 y R4. El ratio que mide el ingreso medio por beneficiario (R4), está posicionado de forma muy diferente que el ratio coste medio (R3).

²² Véase Lau, H-S. ; Lau, A.H-L. y Gribbin, D.W. (1995). **On Modeling Cross Sectorial Distributions of Financial Ratios**, *Journal of Business Finance & Accounting*, 22 (4), pp. 521-549 y el apartado 1.4.

²³ En el anexo 3 de esta apartado se pueden encontrar dichos gráficos distinguiendo por tipo de ratio y prestación.



Pero existen otras formas de plasmar el comportamiento de los ratios en el entorno de los momentos de orden superior. Siguiendo a McLeavy, S. (1997)²⁴ es posible presentar los resultados en el espacio de coeficientes de asimetría (γ_1) y de curtosis (γ_2) como alternativa a la forma anterior²⁵. Observamos su carácter parabólico. El objetivo final de los diagramas presentados ($\gamma_1^2 - \gamma_2$) ó ($\gamma_1 - \gamma_2$) poseen dos utilidades. La primera de ellas, permite la detección de la existencia o no de los momentos de orden superior, (véase capítulo 5.3.3.3.). En segundo lugar, nos permitirán comprobar hasta que punto los modelos de probabilidad pueden capturan la verdadera naturaleza de los datos²⁶, (véase gráfico 3.5.2.2.).



²⁴ McLeavy, S. (1997). **Boundary conditions for ratios with positively distributed components: the S_B and S_L as theoretical models**, *Journal of Business Finance & Accounting*, 24(1), pp. 67-83.

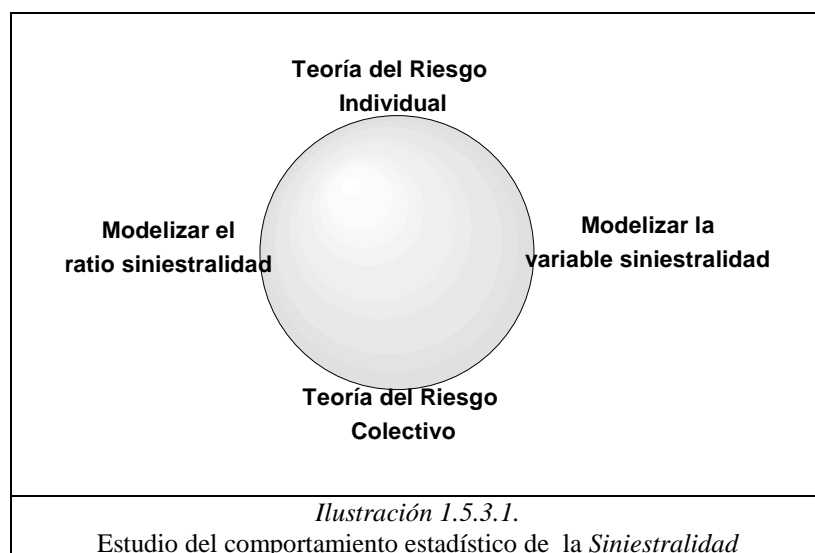
²⁵ Del mismo modo en el anexo 3, en este apartado se utiliza dicho gráfico para cada uno de los *ratios*, por ejercicio económico y por prestación.

²⁶ Este aspecto sólo se profundizará para el ratio R2.

5.3. Estudio de la siniestralidad *no vida* en el subsector de previsión social en Cataluña (1989-1997): *Perspectiva probabilística.*

5.3.1. Comportamiento estadístico de la Siniestralidad: *Distribuciones Básicas.*

El comportamiento estadístico de la *siniestralidad* de los seguros generales²⁷ posee una perspectiva muy diferente de la de los seguros de vida. Una de las principales diferencias es que para los primeros, la probabilidad de ocurrencia de los sucesos no depende de una sola característica y sus desviaciones respecto al valor medio debido a sucesos extremos son de mayor importancia. Así el estudio del comportamiento estadístico de la siniestralidad puede realizarse desde cuatro diferentes ópticas, (véase ilustración 1.5.3.1.).

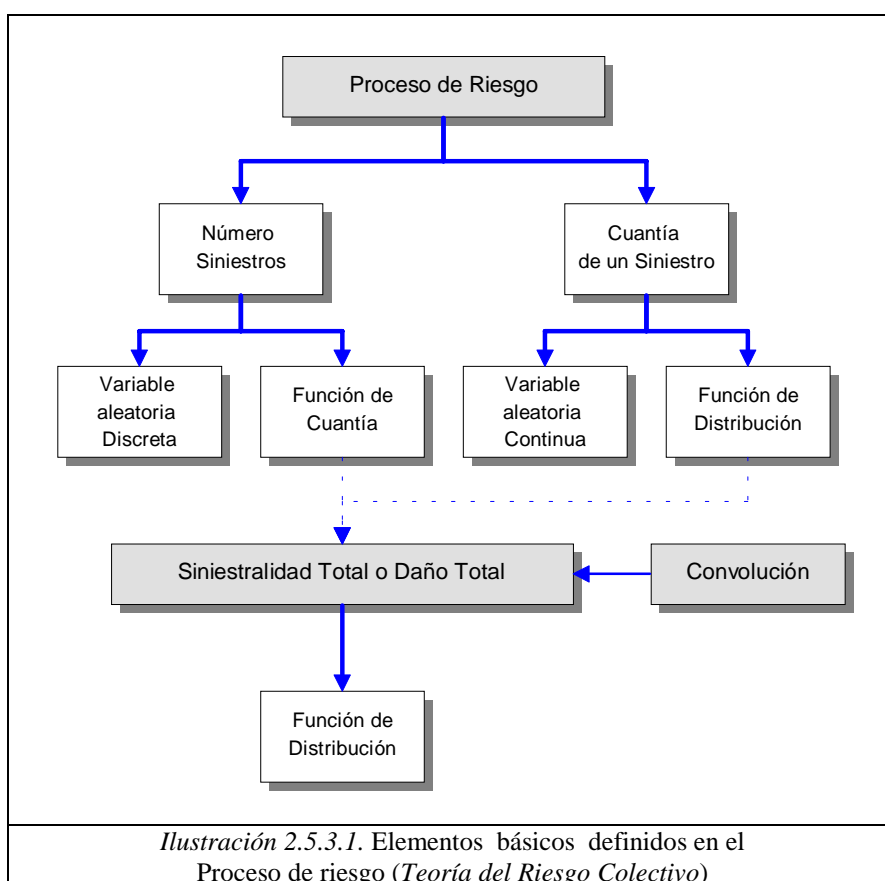


La primera de ellas descansa en la *Teoría del riesgo individual* y considera cada póliza individual con una probabilidad de siniestro. En segundo lugar, consiste en estudiar el comportamiento *probabilístico* de la siniestralidad para un período de tiempo definido. En tercer lugar, explorar el comportamiento del *ratio de siniestralidad* (cociente entre los dos items más importantes, pagos por siniestralidad e ingresos por primas²⁸).

²⁷ Una característica que poseen es que son de consumo anual, pudiendo establecer la hipótesis de independencia entre ejercicios económicos.

²⁸ Véase su desarrollo en el apartado 5.3.3.

En último lugar y desde la *Teoría del riesgo colectivo*²⁹, consiste en estudiar el comportamiento de las dos variables aleatorias que intervienen en la generación de la siniestralidad, es decir, el número de siniestros y la cuantía de cada uno de ellos³⁰, (véase ilustración 2.5.3.1.). Así cualquier cartera de pólizas no es más que un colectivo de riesgos que normalmente genera un flujo de pagos por prestaciones.



La metodología que se utilizará en los apartados siguientes, necesita de un conjunto de herramientas para poder realizar el proceso explicitado en la ilustración 2.5.2.1. Por ejemplo, plantear posibles distribuciones de probabilidad tanto para el número de siniestros como para la cuantía de cada uno de ellos, obtener un modelo teórico para el daño total proveniente de la interacción de las variables anteriores, es decir, del resultado de la convolución entre las dos variables aleatorias definidas³¹.

²⁹ Véase Grandell, J. (1991). **Aspects of Risk Theory**, Springer.

³⁰ Significa en términos actuariales, que se elaborará un modelo para el coste estadístico del riesgo asumido por la entidad en términos de probabilidad y podrá diferir del coste real finalmente realizado.

³¹ Véase capítulos 15 a 17 de Nieto de Alba, U.; Vegas Asensio, J. (1993). **Matemática Actuarial**, Editorial Mapfre, Madrid.

5.3.2. Modelización probabilística de los componentes de la Siniestralidad no vida desglosado por tipos de prestación.

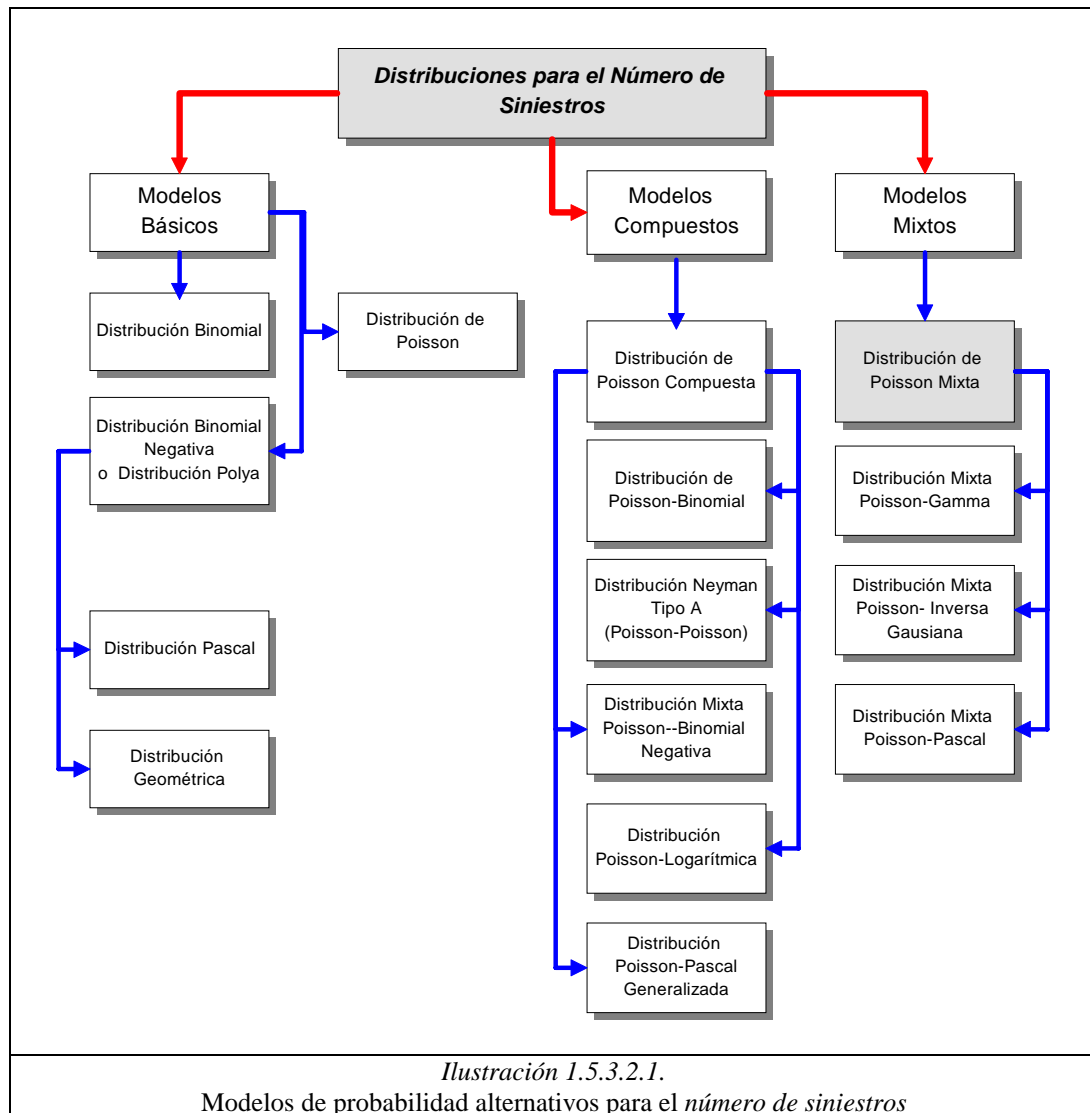
5.3.2.1. Distribución del número de siniestros por tipo de prestación (v).

Según se ha explicado en el apartado anterior, cualquier empresa aseguradora con una cartera de pólizas lleva asociada una colectividad de riesgos, a partir de la cual se genera un flujo de prestaciones cuyo importe depende de las dos variables ya definidas, número de siniestros (v) y la cuantía de cada siniestro (η). Para la primera existen dos distribuciones discretas teóricas que son utilizadas de forma habitual para modelizar a priori su comportamiento aleatorio, la distribución de *Poisson* y la distribución de Pascal o *Binomial Negativa*³², aunque existen otras posibilidades. En cambio para modelizar la cuantía de cada siniestro, se utilizan distribuciones de carácter continuo como son los modelos *Logarítmico-Normal*, *Paretiana*, *Weibull* y *Beta*, pero de igual forma, existen otras alternativas que serán detalladas en el apartado 5.3.2.2.

Para explicar el comportamiento aleatorio del número de siniestros de una póliza o cartera³³ pueden utilizarse un conjunto de modelos teóricos que se agrupan en tres grandes bloques, véase ilustración 1.5.3.2.1. El primero de ellos está formado por los modelos *básicos*, donde encontramos en primer lugar, el modelo de *Poisson*, con una amplia aplicación en el ámbito de los seguros, en segundo lugar, el modelo *Binomial*, que en ciertas condiciones se puede aproximar al modelo de Poisson, en tercer lugar, dos casos particulares del *Binomial negativo*, el modelo *geométrico* y modelo *Pascal*. El bloque segundo y tercero, amplía las posibilidades del primero a través de las técnicas de composición o de mixtura. Las primeras generan, los modelos *compuestos* y las segundas, los modelos *mixtos* o mixtura de modelos.

³² Prieto, Pérez E. (1968). Aplicaciones al seguro de la distribución binomial negativa, *Estadística Española*, 40, pp. 55-56.

³³ Véase capítulos 4 a 8 de Harry H. Panjer ; Gordon E. Willmot. (1992). Insurance Risk Models, Society of Actuaries.



Los modelos *compuestos* se construyen sobre la base de la distribución de una suma de variables aleatorias. Es decir, si definimos a modo de ejemplo, “ n ” como la variable aleatoria número de siniestros para un período de tiempo dado, podemos representar a dicha variable compuesta como, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, siendo el binomio (n, r) dos variables aleatorias discretas, “ r ” el número de accidentes producidos durante un período y “ n ” el número de siniestros producidos en cada accidente. Por lo tanto coexistirán dos distribuciones, una distribución de la variable aleatoria primaria para “ r ” y otra de carácter secundario para “ n ”, de forma que, si la posible distribución primara es un modelo *Poisson* y la distribución secundaria se deja libre, estamos frente a la familia de distribuciones compuestas de *Poisson*, que son entre otras, Distribución *Poisson-Binomial*, Distribución *Poisson-Poisson* (Neyman Tipo A), Distribución

Poisson-Binomial Negativa, Distribución *Poisson-Logarítmica*, Distribución *Poisson-Pascal*.

Pero la lógica nos hace pensar que podemos generar distribuciones compuestas de muchos otros tipos, como por ejemplo, compuesta *Geométrica-Exponencial*, etc.

El segundo grupo de técnicas para generar distribuciones son las *mixturas* de distribuciones, es decir, representar una distribución como superposiciones de otras, normalmente con un número finito de ellas, véase Everitt, B.S. (1981)³⁴. Así si definimos, $g(x|\theta)$ como una función de densidad de probabilidad de dimensión “ d ”, que depende de un vector paramétrico, θ , de dimensión “ m ” y además, tenemos que $H(\theta)$ es una función de distribución del vector paramétrico, entonces la expresión de la *densidad de mixtura* será,

$$f(x) = \int_{\theta} g(x|\theta) dH(\theta),$$

donde “ H ” es la distribución de la mixtura. Como caso particular adecuado a nuestros fines, tenemos que, cuando “ H ” es la función de distribución de una variable aleatoria discreta que aporta probabilidades puntuales, $P(\theta_i)$, entonces podemos generar la siguiente mixtura finita de distribuciones,

$$f(x) = \sum_{i=1}^c P(\theta_i) g(x; \theta_i)$$

donde observamos la presencia de tres parámetros. El primero de ellos, “ c ”, que es el número de componentes de la mixtura finita, en segundo lugar, $P(\theta_i)$, las proporciones de la mixtura y en último lugar, θ_i , el vector paramétrico del que dependen las densidades componentes.

Para el estudio del sector de previsión social objetivo de esta tesis doctoral, y según el procedimiento descrito por Latorre (1992), se ha escogido un modelo mixto de Poisson con una Gamma como modelo explicativo de la mixtura³⁵. Este aspecto justifica la utilización posteriormente de la distribución Binomial negativa, ya que, “*si la media del número de acaecimientos de cierto suceso, generado por una población, no es constante en todos los*

³⁴ Referenciado en Ana Isabel Cid. (1999). **Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora**, Cuadernos de la Fundación Mapfre, Madrid.

³⁵ El número medio de siniestro por póliza o cartera no es constante, sino que es una variable aleatoria. Para el caso del modelo *Poisson*, la varianza del modelo mixto coincide con la varianza del modelo compuesto más un segundo término que depende de la varianza de las fluctuaciones de la siniestralidad media y que representa aportación a la variabilidad de la siniestralidad total de dichas fluctuaciones.

elementos de la misma, sino que es a su vez una variable aleatoria distribuida según un modelo Gamma, entonces el número de sucesos originados por un elemento de la población elegido al azar, se distribuye según la ley binomial negativa”.

Para poder aplicar las expresiones anteriores a la naturaleza de los datos que se poseen debemos realizar ciertos filtros. El primero de ellos, es calcular el número de siniestros aislando el efecto del crecimiento de la cartera (en nuestro caso representado por el número de *beneficiarios*), y el segundo filtro consiste en descontar el efecto inflacionista sobre el valor de las prestaciones. A continuación se detalla el proceso de estimación de los parámetros del modelo teórico discreto escogido, *Binomial Negativo*, con la hipótesis de independencia entre los diferentes ejercicios económicos³⁶, como consecuencia de la frecuencia anual de los contratos referidos.

Tabla 1.5.3.2.1.

Prestación: *Enfermedad*

Año	Datos Agregados			Expresado en Base 1989			Índice	
	Número Siniestros Actualizados	Pagos por Prestaciones Actualizadas (Mill. Ptas)	Ingresos por Primas Actualizadas (Mill Ptas)	Número Siniestros Actualizados	Pagos por Prestaciones Actualizadas (Mill. Ptas)	Ingresos por Primas Actualizadas (Mill Ptas)	Índice Precios Consumo	Índice Base 1989
1989	6995	349.12	620.44	100	100	100	86.30	100
1990	6833	412.34	588.71	98	118	95	91.96	107
1991	7796	462.84	670.70	111	133	108	97.04	112
1992	8298	592.61	752.11	119	170	121	102.23	118
1993	8849	675.99	798.24	127	194	129	107.26	124
1994	8220	662.25	853.66	118	190	138	111.91	130
1995	9078	747.47	955.08	130	214	154	116.75	135
1996	9718	834.51	1045.23	139	239	168	120.50	140
1997	9320	885.82	1347.16	133	254	217	122.93	142

Nota: Factor acumulativo anual de la Tasa de crecimiento de la cartera 1.63%
Factor acumulativo anual de la Tasa de crecimiento del IPC: 4.48%.

La tabla 1.5.3.2.1. muestra las variables siguientes, el número de siniestros actualizado, es decir, sin el efecto real del crecimiento de la cartera (representada en nuestro caso por el número de beneficiarios) y los pagos e ingresos filtrados por el efecto inflacionario para la prestación de *Enfermedad* a modo de ejemplo³⁷.

³⁶ Se han utilizado los datos del apartado 5.2.1.

³⁷ Factor acumulativo anual de la *tasa de crecimiento* de la cartera es 1.63% y el factor acumulativo anual de la *tasa de crecimiento* del IPC es 4.48%. Su cálculo, por ejemplo, para el número de siniestros (1.63%) surge de la expresión, $6144(1+i)^8 \rightarrow 9320$, cuyo valor posteriormente se utiliza para actualizar la serie original. El tamaño muestral utilizado es de 144 observaciones.

Las conclusiones³⁸ obtenidas con los filtros reseñados serán mucho más homogéneas que los obtenidos en el apartado 5.2.1., así la tabla 2.5.3.2.1. recoge los demás factores acumulativo anual obtenidos para las restantes prestaciones.

Tabla 2.5.3.2.1.

Tipología Prestación	Cartera	IPC
Enfermedad	1.63%	4.48%
Larga Enfermedad	-0.41%	4.48%
Invalidez	-4.06%	4.48%
Intervención Quirúrgica	0.51%	4.48%
Hospitalización Quirúrgica	0.63%	4.48%
Accidentes	3.33%	4.48%
Sepelio	1.01%	4.48%
Servicio Automovilistas	-0.96%	4.48%
Asistencia Sanitaria a Socios	-3.79%	4.48%

La estimación de los parámetros debe considerar que el proceso que representa la siniestralidad a lo largo del tiempo no es estacionario. Este aspecto puede explicarse por dos razones³⁹. La primera de ellas es, la probabilidad de producir siniestros es heterogénea en el tiempo⁴⁰ y la segunda está justificada por las alteraciones de la siniestralidad asociada a un tipo de póliza determinada debido a factores meteorológicos, económicos, etc. Los cambios en la distribución de probabilidad de la variable número de siniestros, “*n*”, se representan mediante la distribución mixta de *Poisson*, donde el parámetro que caracteriza a dicha distribución no es constante, lo cual justifica la utilización de la *Binomial Negativa* con una variable estructura que sigue una distribución Gamma de parámetro, “*h*”.

Con los datos disponibles de la tabla anterior podemos obtener los momentos más esenciales para generar el modelo teórico de la variable número de siniestros. En primer lugar, el coste medio de cada siniestro, *m*, se calculará a partir de los datos actualizados cuya

expresión es la siguiente, $m = \left(\frac{\sum_{i=1}^t x_{3i}}{\sum_{i=1}^t x_{1i}} \right)$ y su valor de 0.07487 (Mill de Ptas). En segundo

³⁸ Véase anexo 1 de este apartado con el formato de ficha descriptiva.

³⁹ Véase Moreno Sáez, A. (2000). **La toma de decisiones en la empresa aseguradora: un sistema dinámico aplicado a los seguros no vida**, Universidad Rey Juan Carlos, Editorial Dykinson, Madrid.

⁴⁰ Debido a que el tamaño de la cartera va evolucionando.

lugar, el número medio anual de siniestros⁴¹, “ n ”, es de 8345 y su desviación típica, “ σ ”, es de 1003 siniestros⁴². El modelo teórico utilizado es el *Binomial Negativo*, donde sus momentos están definidos como, (véase para mayor detalle, Latorre (1992)),

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= n \\ \alpha_2 &= n + n^2 \left(1 + \frac{1}{h}\right) \\ \alpha_3 &= n + 3n^2 \left(1 + \frac{1}{h}\right) + n^3 \left(1 + \frac{3}{h} + \frac{2}{h^2}\right)\end{aligned}$$

siendo, por lo tanto, varianza y asimetría,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= n + \frac{n^2}{h} \\ \gamma &= \frac{1}{\sigma^3} \left[n + \frac{3n^2}{h} + \frac{2n^3}{h^2} \right]\end{aligned}$$

El inverso del factor de heterogeneidad se define como,

$$\frac{1}{h} = \frac{(\sigma^2 - n)}{n^2}$$

donde su valor es para el caso que nos ocupa, 0.01434 y el valor del propio parámetro, “ h ”, es igual a 70.

La asimetría en este caso posee la siguiente expresión,

$$\gamma = \left(n + \frac{3n^2}{h} + \frac{2n^3}{h^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma^3} \right)$$

cuyo valor para la prestación de enfermedad es, 0.239. Por lo tanto la función de cuantía de un modelo teórico Binomial Negativo es,

$$P(v = k) = \binom{k+h-1}{k} \cdot \left(\frac{h}{n+h} \right)^h \left(\frac{n}{n+h} \right)^k = \binom{k+h-1}{k} \cdot p^h q^k$$

⁴¹ Dos apreciaciones más, la primera es que la distribución *Binomial Negativa* tiende a la distribución de *Poisson* al aumentar, $h \rightarrow \infty$ y la segunda es que seguimos un planteamiento global (al no poseer información de las carteras de las entidades), es decir, consideramos el número total de siniestros que anualmente ocasiona el conjunto de pólizas. El parámetro de heterogeneidad, h , representa las fluctuaciones aleatorias que se producen en el valor medio del número anual de siniestros.

⁴² De forma que, si tenemos que el valor medio de cada siniestro es, 0.07487 Mill de Ptas, con una desviación típica del número de siniestros de 1003, entonces para una cartera de 100 Mill de Ptas, la media del número de siniestros sería, $n = 100/0.07487 = 1336$, con una desviación típica de 164.

de forma que sólo depende de dos parámetros, “ h ” y “ n ” y su expresión formal es,

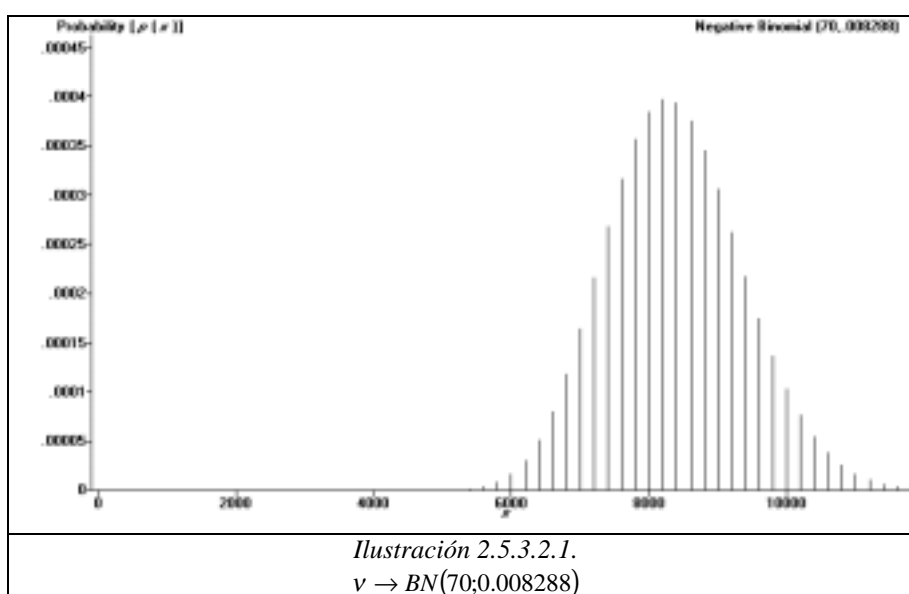
$$v \rightarrow BN(h; p),$$

siendo “ p ” y “ q ”,

$$\frac{h}{n+h} = p$$

$$\frac{n}{n+h} = 1-p = q$$

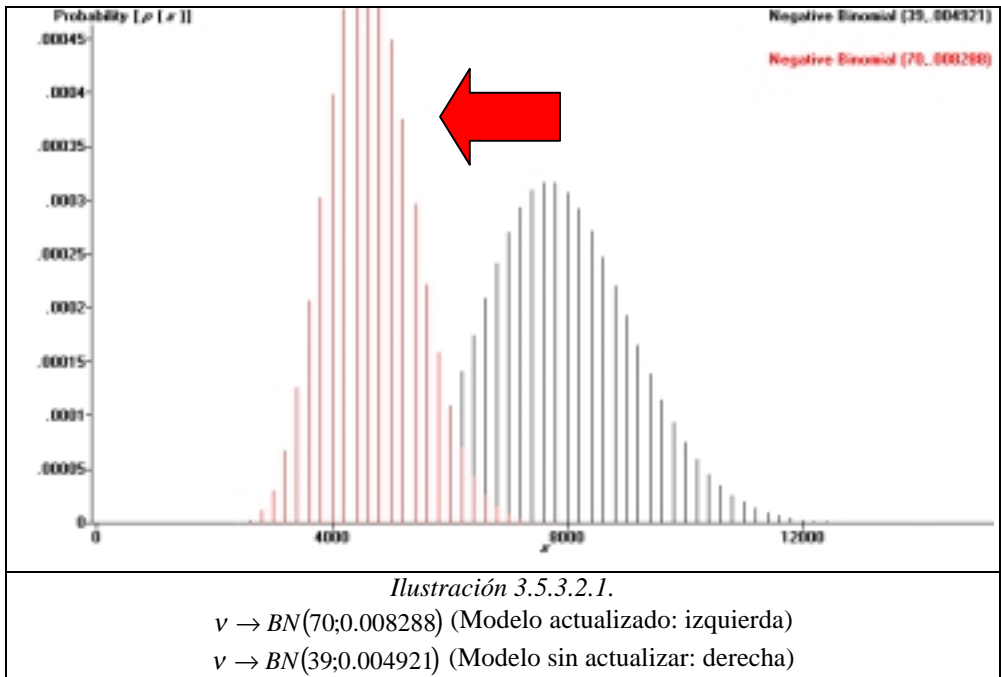
por lo tanto para la prestación de Enfermedad el modelo estimado es, $v \rightarrow BN(70;0.008288)$, (véase ilustración 2.5.3.2.1.).



El proceso descrito anteriormente permite definir la función de cuantía no observable del número de siniestros anuales de la cartera de pólizas a partir de sus valores medios.

La ilustración 3.5.3.2.1. nos muestra la forma de la distribución teórica del número de siniestros sin tener en cuenta el efecto del crecimiento de la cartera de pólizas de enfermedad comparada con el modelo sin actualizar⁴³.

⁴³ El mismo proceso se ha realizado para las otras tipologías de prestaciones, véase anexo 1 de este apartado.



La tabla 3.5.3.2.1 nos muestra cuales son los resultados de los parámetros estimados para cada una de las diferentes prestaciones.

Tabla 3.5.3.2.1.

	Tipo Prestación	Parámetros					
		m	n	σ	γ	h	p
1	Enfermedad	0.07487	8345	1003	0.239	70	0.00823
2	Larga enfermedad	0.22420	128	14	0.149	233	0.64530
3	Invalidez	0.03261	246	246	0.064	--	--
4	Intervención Quirúrgica	0.04807	8594	2363	0.550	13	0.00154
5	Hospitalización Quirúrgica	0.03484	3158	328	0.205	96	0.02938
6	Accidentes	0.34316	410	79	0.373	29	0.06655
7	Sepelio	0.21090	677	32	0.064	1307	0.65850
8	Servicios a Automovilistas	0.01925	11043	2177	0.394	26	0.00233
9	Asistencia Sanitaria a Socios	0.00508	291830	20248	-1.120	208	0.00007

Nota: m : valor medio de cada siniestro (Mill Ptas), n : número medio anual de siniestros, σ : desviación típica del número de siniestros, h : factor de heterogeneidad, γ : coeficiente de asimetría y p : parámetro del modelo *Binomial Negativo*, $p = h/n + h$. Para la prestación de *Invalidez* el modelo más adecuado es el de *Poisson*.

La expresión formal de los modelos estimados discretos se sintetizan en la tabla 4.5.3.2.1.

Tabla 4.5.3.2.1.

Tipo Prestación		Modelo de Probabilidad actualizado	Modelo de Probabilidad sin actualizar
1	Enfermedad	$v \rightarrow BN(70;0.008288)$	$v \rightarrow BN(39;0.004921)$
2	Larga enfermedad	$v \rightarrow BN(233;0.6453)$	$v \rightarrow BN(313;0.7065)$
3	Invalidez	$v \rightarrow P(246)$	$v \rightarrow BN(67;0.1872)$
4	Intervención Quirúrgica	$v \rightarrow BN(13;0.001539)$	$v \rightarrow BN(12;0.001424)$
5	Hospitalización Quirúrgica	$v \rightarrow BN(96;0.02938)$	$v \rightarrow BN(70;0.02234)$
6	Accidentes	$v \rightarrow BN(29;0.06550)$	$v \rightarrow BN(21;0.05539)$
7	Sepelio	$v \rightarrow BN(1307;0.6585)$	$v \rightarrow BN(386;0.3719)$
8	Servicios a Automovilistas	$v \rightarrow BN(26;0.002329)$	$v \rightarrow BN(32;0.002794)$
9	Asistencia Sanitaria a Socios	$v \rightarrow BN(208;0.000712)$	$v \rightarrow BN(396;0.001164)$

Nota: En todos los casos se ha considerado que los modelos más adecuados son *Poisson* o *Binomial Negativa*, por ser prestaciones homogéneas.

A partir de los datos actualizados, los resultados son los siguientes: el coste medio estimado más elevado por siniestro es de la prestación de Accidentes, 343164 Ptas y el menor es para la prestación de Asistencia Sanitaria con 5079 Ptas. En términos de frecuencia de siniestros, lógicamente la prestación de Asistencia Sanitaria es la que se sitúa en primer lugar, con 291830 siniestros en promedio anual y con un menor volumen, la prestación de Larga Enfermedad con 128 siniestros / anual, (véase tabla 5.5.3.2.1.).

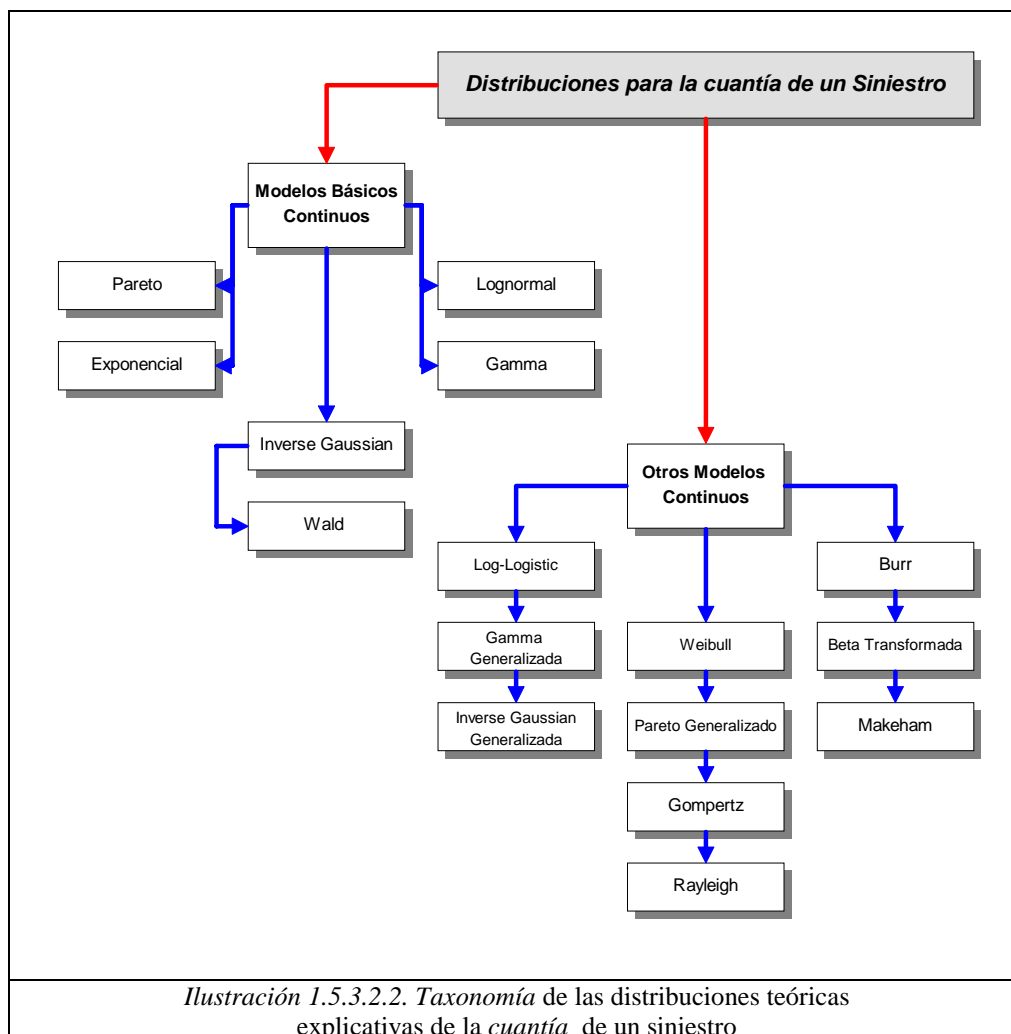
Tabla 5.5.3.2.1

Tipo Prestación		Modelo de Probabilidad actualizado		Modelo de Probabilidad sin actualizar	
		<i>m</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
1	Enfermedad	74866	8345	69221	7862
2	Larga enfermedad	224203	128	192789	130
3	Invalidez	32610	246	23349	293
4	Intervención Quirúrgica	48070	8594	42006	8450
5	Hospitalización Quirúrgica	34838	3158	30358	3084
6	Accidentes	343164	410	339845	363
7	Sepelio	210938	677	187396	651
8	Servicios a Automovilistas	19246	11043	15791	11436
9	Asistencia Sanitaria a Socios	5079	291830	3762	340307

Nota: *m*: valor medio de cada siniestro (Ptas), *n*: número medio de siniestros

5.3.2.2. Distribución del *coste* o *cuantía* de cada siniestro (η).

La variable aleatoria *cuantía* de un siniestro (η) consideramos que es de naturaleza continua. Latorre (1992) comenta que en ocasiones no siempre es necesario recurrir a una ley analítica para representar dicha variable, sino que son suficientes las estimaciones muestrales de los dos o tres primeros momentos. Sin embargo, si se considera relevante el conocimiento de la distribución para valores grandes o simplemente se posee una cantidad de datos insuficiente, entonces es justificable la utilización de leyes analíticas para explicar la totalidad del comportamiento de la variable, " η ". En nuestro caso, los datos que se posee del sector estudiado, permite un conocimiento limitado de la variable en cuestión.



La distribución básica utilizada mayoritariamente para explicar el comportamiento de la cuantía o tamaño de un siniestro es la distribución *Logarítmico-normal*⁴⁴ (véase los trabajos de Marín Cobo (1985)), si bien existen otras distribuciones continuas bien conocidas⁴⁵, como por ejemplo, *Gamma*, *Beta*, *Normal*, *Pareto*, etc, (véase para mayor detalle la ilustración 1.5.3.2.2.).

Así si, “y”, es una variable normal de parámetros $(\mu ; \sigma)$ y “ η ”, una variable que se distribuye como un modelo Logarítmico-normal, entonces se cumple que, $\eta = e^y$, cuya función de densidad posee la forma siguiente,

$$f(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\eta\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln \eta - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \eta > 0 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

$$y = \ln \eta$$

$$\ln \eta \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

y sus momentos quedan definidos como,

$$a_1 = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$a_2 = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

$$a_3 = e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2}$$

Finalmente, los parámetros del modelo *Lognormal* en función de los tres primeros momentos (promedio, varianza y asimetría) son,

$$\mu = a_1 = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$\sigma_\eta^2 = a_2 - a_1^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\gamma_\eta = \frac{a_3 - 3a_2 a_1 + 2a_1^3}{\sigma_\eta^3} = \frac{e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} - 3e^{3\mu + 2\sigma^2} + 2e^{3\mu}}{(e^{\sigma^2} - 1)^{3/2}}$$

Mientras que el valor esperado se utiliza como la mejor predicción de la siniestralidad de una póliza, la varianza no es la más adecuada de las medidas de la variabilidad de la siniestralidad, ya que su valor depende de las unidades en que se haya definido la variable.

⁴⁴ Se utilizará dicho modelo en nuestro proceso de simulación de *Monte-Carlo* en capítulos posteriores.

⁴⁵ Para un mayor detalle analítico de los modelos, véase capítulo 4 de Panjer, Harry H. ; Willmot, Gordon E. (1992). **Insurance Risk Models**, Society of Actuaries.

Una solución es generar una medida adimensional, “ r ”, que es directamente proporcional al valor de la varianza, ya que cumple, $r = 1 + \sigma_\eta / a_1^2$. El índice de riesgo, “ r ”, en nuestro caso es constante e igual a 3 y se ha extraído de los trabajos de Pentikäinen y Rantala (1982) reseñado por Latorre (1992) para riesgos de masa y no comerciales. El índice de riesgo puede expresarse en función del coste medio, “ m ” y del segundo momento centrado, $r = a_2 / m^2$. Así a partir de dicha expresión (bajo la hipótesis plausible realizada sobre el valor de “ r ”) podemos calcular el segundo momento mediante, $a_2 = r \cdot m^2$ y la desviación típica de la variable “ η ”, a partir de, $\sigma_\eta = m \sqrt{r-1}$, (véase Moreno Sáez, A., (2000)).

El cálculo del coeficiente de asimetría es,

$$\gamma_\eta = (a_3 - 3ma_2 + 2m^3) \cdot \frac{1}{\sigma_\eta^3}$$

y sustituyendo los momentos por sus expresiones, obtenemos el coeficiente de asimetría en función del índice de riesgo,

$$\gamma_\eta = (r + 2) \cdot \sqrt{r-1}$$

Finalmente los dos parámetros del modelo de probabilidad logarítmico-normal que se utilizará, poseen la siguiente expresión formal,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \ln r \\ \mu &= \ln(\sigma_\eta) - \frac{1}{2} \ln(r-1) - \frac{1}{2} \sigma^2 \end{aligned}$$

La varianza de la cuantía del siniestro es función de r , el índice de riesgo. Tal aspecto obliga a que todos los modelos estimados de forma indirecta poseen el mismo grado de dispersión, 1.0481.

A continuación, una vez definido los principales momentos de la distribución de la cuantía de los siniestros en función del índice de riesgo, detallamos sus valores estimados para cada una de las prestaciones, (véase tabla 1.5.3.2.2. (valores transformados)).

Tabla 1.5.3.2.2.

Tipología Prestación		m	r	a_2	σ_η	γ_η	a_3	$\sigma_{\ln(\eta)}$	$\mu_{\ln(\eta)}$
1	Enfermedad	0.07487	3	0.0168	0.1059	7	0.0113	1.0481	-3.1414
2	Larga Enfermedad	0.22420	3	0.1508	0.3171	7	0.3043	1.0481	-2.0445
3	Invalidez	0.03261	3	0.0032	0.0461	7	0.0009	1.0481	-3.9724
4	Intervención Quirúrgica	0.04807	3	0.0069	0.0680	7	0.0030	1.0481	-3.5844
5	Hospitalización Quirúrgica	0.03484	3	0.0036	0.0493	7	0.0011	1.0481	-3.9063
6	Accidentes	0.34316	3	0.3533	0.4853	7	1.0911	1.0481	-1.6189
7	Sepelio	0.21094	3	0.1335	0.2983	7	0.2534	1.0481	-2.1055
8	Servicio Automovilistas	0.01925	3	0.0010	0.0272	7	0.0002	1.0481	-4.4998
9	Asistencia Sanitaria a Socios	0.00508	3	0.0001	0.0072	7	0.0000	1.0481	-5.8318

Nota: m , valor medio de la cuantía de cada siniestro expresado en Mill Ptas ; r , índice de riesgo ($r = a_2/m^2$); a_2 , momento de segundo orden respecto a cero; σ_η , desviación típica del tamaño del siniestro; γ_η , coeficiente de asimetría; a_3 , momento de segundo orden respecto a cero; $\sigma_{\ln(\eta)}$ y $\mu_{\ln(\eta)}$ son los parámetros del modelo Lognormal para la cuantía del siniestro.

La tabla 2.5.3.2.2., con la finalidad de comparación, presenta los mismo resultados sin neutralizar el efecto crecimiento de la cartera, simbolizada por el número de pólizas.

Tabla 2.5.3.2.2.

Tipología Prestación		m	r	a_2	σ_η	γ_η	a_3	$\sigma_{\ln(\eta)}$	$\mu_{\ln(\eta)}$
1	Enfermedad	0.06922	3	0.0144	0.0979	7	0.0090	1.0481	-3.2198
2	Larga Enfermedad	0.19279	3	0.1115	0.2726	7	0.1935	1.0481	-2.1955
3	Invalidez	0.02335	3	0.0016	0.0330	7	0.0003	1.0481	-4.3065
4	Intervención Quirúrgica	0.04201	3	0.0053	0.0594	7	0.0020	1.0481	-3.7192
5	Hospitalización Quirúrgica	0.03036	3	0.0028	0.0429	7	0.0008	1.0481	-4.0440
6	Accidentes	0.33985	3	0.3465	0.4806	7	1.0598	1.0481	-1.6286
7	Sepelio	0.18794	3	0.1060	0.2658	7	0.1792	1.0481	-2.2210
8	Servicio Automovilistas	0.01579	3	0.0007	0.0223	7	0.0001	1.0481	-4.6977
9	Asistencia Sanitaria a Socios	0.00376	3	0.0000	0.0053	7	0.0000	1.0481	-6.1320

Nota: m , valor medio de la cuantía de cada siniestro expresado en Mill Ptas ; r , índice de riesgo ($r = a_2/m^2$); a_2 , momento de segundo orden respecto a cero; σ_η , desviación típica del tamaño del siniestro; γ_η , coeficiente de asimetría; a_3 , momento de segundo orden respecto a cero; $\sigma_{\ln(\eta)}$ y $\mu_{\ln(\eta)}$ son los parámetros del modelo Lognormal para la cuantía del siniestro.

5.3.2.3. Comportamiento de la siniestralidad anual o daño total (ξ): Función Compuesta de Poisson.

Una vez que se han estimado los parámetros de las funciones de distribución del número de siniestros (ν) y de la cuantía de cada uno de ellos (η), es necesario sopesar la posibilidad de establecer la Ley de distribución de la siniestralidad total anual, ξ . Su conocimiento nos permitirá obtener sus momentos: el promedio (μ_ξ), la desviación típica (σ_ξ) y el coeficiente de asimetría (γ_ξ), estadísticos que permitan describir su comportamiento.

El daño total de “ n ” siniestros se define como,

$$\xi = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots + \zeta_n$$

siendo, “ ζ_i ” variables aleatorias, cada una de las cuales tiene por función de distribución $V_i(x)$. Así, se define $V(x/n)$ como la función de distribución del daño total producido por los n -siniestros especificados. Con dos posibilidades, la primera de ellas es, que la cuantía de cada siniestro sea independiente del número de siniestros acaecidos y además que las variables aleatorias ζ_i sean estocásticamente independientes e igualmente distribuidas,

$$V(x/n) = V_1(x) * V_2(x) * \dots * V_n(x) = V^{n*}(x)$$

donde, $V^{n*}(x)$ es la convolución de n -distribuciones $V_i(x)$. Y una segunda posibilidad, consiste en considerar la cuantía de cada daño dependiente del número de siniestros acaecidos, produciéndose un posible efecto *contagio*. En nuestro caso y como en otros muchos estudios seguimos la primera de las situaciones descritas.

La distribución del daño total dependerá de sí consideramos que la distribución generadora del número de siniestros es una *Poisson* o una *Binomial Negativa*. En el caso que nos ocupa consideramos que, el número de siniestros es explicado por una distribución de *Poisson mixta*⁴⁶, (véase apartado 5.3.2.1.).

⁴⁶ El carácter *mixto* proviene de la idea siguiente: el parámetro que gobierna los cambios en la distribución de probabilidad de la variable número de siniestros, “ n ”, no se considera constante sino que se permite su variación estocástica a lo largo del tiempo.

Recordamos los siguientes aspectos. Si suponemos que la variabilidad de la siniestralidad media se distribuye según una distribución *Gamma*, entonces la expresión de la función de la Poisson mixta es la propia función de cuantía de la Binomial. Y la cuantía de cada siniestro se suele representar por el modelo continuo teórico *Logarítmico-normal*⁴⁷ que consiste en una transformación logarítmica sobre el modelo Gaussiano, (véase Moreno Sáez, Alfredo (2000)).

Para el análisis de la siniestralidad buscamos la siguiente función,

$$F(X) = P(\xi \leq X) = \sum_{k=0}^{\infty} P[v = k] \cdot S^{k*}(X)$$

donde,

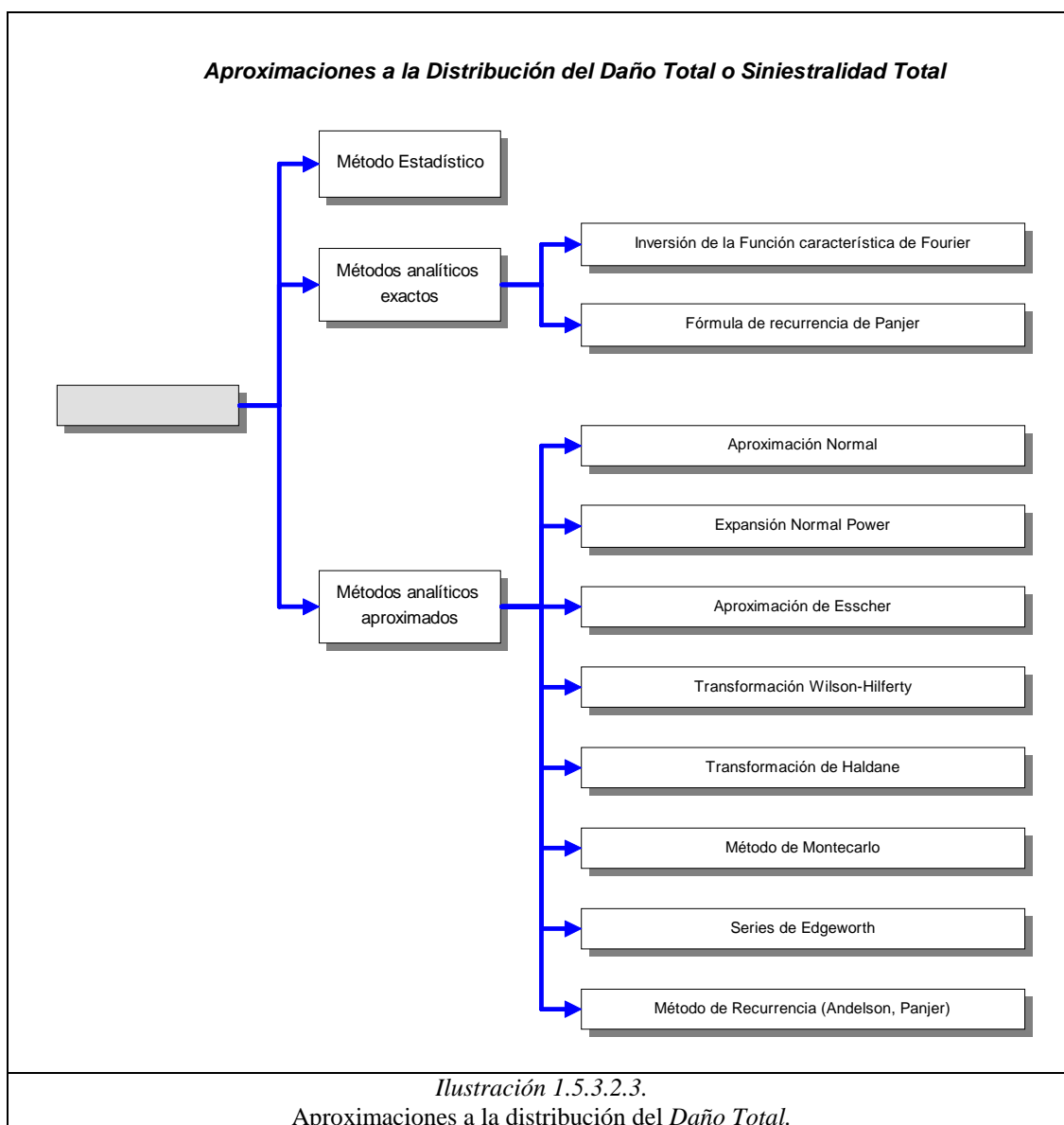
$$S^{k*}(X) = P(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k \leq X)$$

y además la cuantía de cada uno de los “k” siniestros es estocásticamente independiente del resto. Es decir, $S^{k*}(X)$ es la convolución k -ésima de la variable aleatoria cuantía o tamaño de cada siniestro. Dicha expresión se acostumbra a representar por la función de distribución compuesta de Poisson. Su forma analítica es compleja y mediante aproximaciones se suele obtener buenos resultados, (véase la ilustración 1.5.3.2.3.).

Uno de las aproximaciones más utilizada es la *Normal Power*, pero existen muchas otras⁴⁸, como por ejemplo, la aproximación *gamma*, la transformación de *Wilson-Hilferty*, transformación de *Haldane*, etc.. Adicionalmente tenemos el método de *Monte-Carlo* que es una alternativa en alza ya que permite aproximarse al conocimiento de la función de distribución del total de la siniestralidad desde la esencia de la naturaleza aleatoria de las variables que la forman. Por esta razón se ha decidido su utilización en dicha tesis doctoral.

⁴⁷ Véase Marín Cobo, A. (1985). **La distribución logarítmico-normal. Aplicación a la distribución del coste de los siniestros**, *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 25. Tal y como se ha comentado, sus principales momentos están definidos, pero la varianza no es la más adecuada de las medidas de la variabilidad de la siniestralidad. Por esta razón se utiliza una nueva medida de riesgo mediante el *ratio*, $r = a_2/m^2$ que posee las siguientes características: en primer lugar, es una buena medida de la variabilidad de la cuantía de un siniestro, en segundo lugar, es proporcional al valor de la varianza porque cumple que, $r = 1 + \sigma_n^2/m^2$, en tercer lugar, permite definir la asimetría como, $\gamma_n = (r+2)\sqrt{r-1}$ y en último lugar, es adimensional.

⁴⁸ Véase Beard, R.E. ; Pentikäinen, P.T. ; Pesonen, E. (1977). **Risk Theory. The Stochastic Basis of Insurance**, 2ª Edición, Chapman and Hall.



Las expresiones formales de los estadísticos de la distribución de la siniestralidad total a través de la distribución Poisson compuesta⁴⁹ están recogidos en la tabla 1.5.2.2.3. Los estadísticos que se facilitan son: el promedio (μ_{ξ}), la variabilidad (σ_{ξ}) y la asimetría (γ_{ξ}) considerando dos hipótesis de comportamiento para el número anual de siniestros, el modelo Binomial negativo y el modelo de Poisson⁵⁰.

⁴⁹ Para su deducción, véase, Latorre LL. (1992). **Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora**, Editorial Mapfre, pp. 89-92, Madrid.

⁵⁰ Sólo para el caso de la prestación de *invalidez*.

Tabla 1.5.3.2.3

Modelo Discreto: Número de siniestros	
Binomial Negativa	Poisson
$\mu_{\xi} = E(\xi) = P = n \cdot m$	$\mu_{\xi} = E(\xi) = P = n \cdot m$
$\sigma_{\xi} = P \cdot \sqrt{\frac{r}{n} + \frac{1}{h}}$	$\sigma_{\xi} = P \cdot \sqrt{\frac{r}{n}}$
$\gamma_{\xi} = \left[na_3 + \frac{3a_2 n P}{h} + 2 \frac{P^3}{h^2} \right] / \sigma_{\xi}^3$	$\gamma_{\xi} = \frac{na_3}{\sigma_{\xi}^3}$

Nota: P , volumen de las primas de riesgo anuales, n , número medio de siniestros, m , valor medio de la cuantía de cada siniestro, r , índice de riesgo ($r = a_2/m^2$), siendo, a_2 , el momento de segundo orden respecto de cero, y h , es el parámetro de heterogeneidad, es decir, las fluctuaciones aleatorias que se producen en el valor medio del número anual de siniestros.

La tabla 2.5.3.2.3. muestra los momentos que describen la siniestralidad total anual, a partir de la hipótesis de que las primas de riesgo coinciden con las primas puras, es decir, su valor medio de la siniestralidad es igual a $P = n \cdot m$. A efectos comparativos se presentan los resultados para los dos casos, corregidos y no corregidos, por el efecto crecimiento de la cartera y el efecto inflación, (véase tabla 3.5.3.2.3.).

Tabla 2.5.3.2.3.

Modelo Compuesta de Poisson			
Tipología Prestación	μ'_{ξ}	σ'_{ξ}	γ'_{ξ}
Enfermedad	624.77	75.74	0.240
Larga Enfermedad	28.66	4.78	0.430
Invalidez	8.04	0.89	0.331
Intervención Quirúrgica	413.12	113.78	0.550
Hospitalización Quirúrgica	110.01	11.75	0.206
Accidentes	140.82	28.89	0.387
Sepelio	142.90	10.30	0.187
Servicio Automovilistas	212.54	42.00	0.394
Asistencia Sanitaria a Socios	1482.35	102.92	0.139

Nota: Datos corregidos

Tabla 3.5.3.2.3.

Modelo Compuesta de Poisson			
Tipología Prestación	μ''_{ξ}	σ''_{ξ}	γ''_{ξ}
Enfermedad	624.79	100.85	0.321
Larga Enfermedad	28.73	4.39	0.401
Invalidez	8.01	0.75	0.281
Intervención Quirúrgica	413.09	119.21	0.576
Hospitalización Quirúrgica	109.99	13.48	0.239
Accidentes	140.70	32.78	0.443
Sepelio	142.83	11.55	0.172
Servicio Automovilistas	212.49	37.67	0.353
Asistencia Sanitaria a Socios	1482.40	74.57	0.100

Nota: Datos sin corregir

Para comprobar el grado de dispersión relativa, se ha calculado para ambos casos el coeficiente de variación, prestación por prestación a partir de los momentos estimados. La prestación de Intervención Quirúrgica es la que posee mayor dispersión relativa, además el grado de representatividad del promedio aumenta 2% aproximadamente si utilizamos los datos actualizados (coinciden con crecimientos positivo de cartera), en cambio para crecimientos negativos, la representatividad del promedio desciende en un 1.7%, (véase tabla 4.5.3.2.3).

Tabla 4.5.3.2.3.

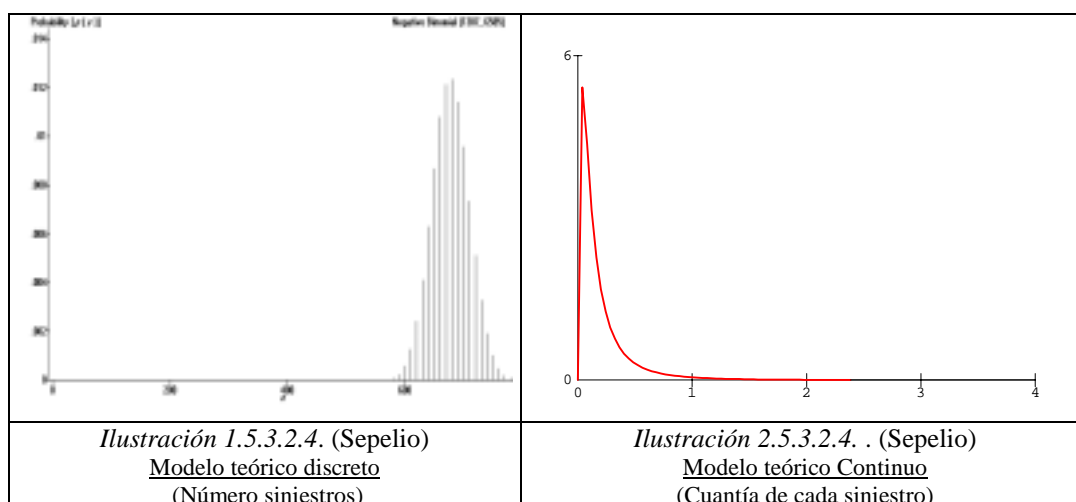
Tipología Prestación	σ'_ξ / μ'_ξ	σ''_ξ / μ''_ξ	$\sigma''_\xi / \mu''_\xi - \sigma'_\xi / \mu'_\xi$
<i>Enfermedad</i>	12.12%	16.14%	4.02%
<i>Larga Enfermedad</i>	16.68%	15.28%	-1.40%
<i>Invalidez</i>	11.07%	9.36%	-1.71%
<i>Intervención Quirúrgica</i>	27.54%	28.86%	1.32%
<i>Hospitalización Quirúrgica</i>	10.68%	12.26%	1.58%
<i>Accidentes</i>	20.52%	23.30%	2.78%
<i>Sepelio</i>	7.21%	8.09%	0.88%
<i>Servicio Automovilistas</i>	19.76%	17.73%	-2.03%
<i>Asistencia Sanitaria a Socios</i>	6.94%	5.03%	-1.91%

Nota: Los estadísticos $[\mu'_\xi; \sigma'_\xi; \gamma'_\xi]$ pertenecen a los datos corregidos por los factores acumulativos, en cambio los estadísticos $[\mu''_\xi; \sigma''_\xi; \gamma''_\xi]$ no tienen en cuenta dichos efectos.

Todos estos resultados serán comparados con los obtenidos por el Método de *Monte-Carlo* del apartado 5.3.2.4.

**5.3.2.4. Comportamiento de la siniestralidad anual o daño total (ξ):
Método de Monte-Carlo.**

Una de las posibles formas para obtener la distribución de la siniestralidad anual es aplicar técnicas de Simulación Estadística (véase apartado 1.5.). El modelo estocástico de simulación se construye a partir de los dos modelos de probabilidad teóricos obtenidos (véase apartados 5.3.2.1 y 5.3.2.2.), es decir, el modelo discreto para el número de siniestros y el modelo continuo para la cuantía de los mismos⁵¹.



Los modelos estimados son respectivamente:

$$v \rightarrow BN(1307;0.6585)$$

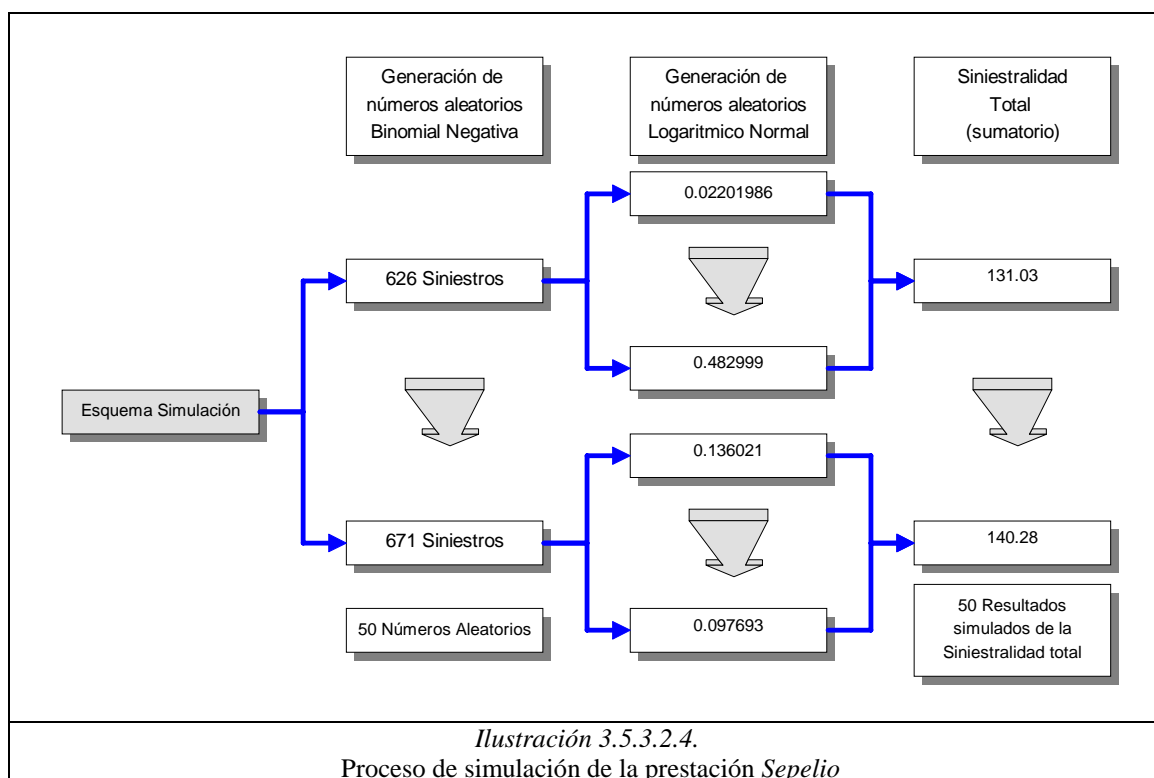
$$\ln(\eta) \rightarrow LN(-2.1055 ; 1.0481).$$

El primero de ellos, es la distribución del modelo teórico discreto *Binomial Negativo* para el número de siniestros anuales de la prestación de *Sepelio*⁵² (cartera igual a las primas de riesgo) y el segundo es la distribución del modelo continuo utilizado para explicar el comportamiento de la cuantía de los siniestros, *Logaritmico-Normal*, (véase ilustraciones 1.5.3.2.4. y 2.5.3.2.4.).

⁵¹ Para dar consistencia a los resultados se han utilizado, en la simulación, los modelos de probabilidad con los datos actualizados por los efectos del crecimiento de la cartera y de la inflación.

⁵² Se ha escogido dicha prestación como ejemplo, por sus buenos resultados descriptivos.

A continuación presentamos, el proceso iniciado para replicar, mediante simulación estadística, un número predefinido de veces un ejercicio económico de la siniestralidad anual para la prestación de *Sepelio*, (véase ilustración 3.5.3.2.4.).



El proceso de simulación⁵³ posee las siguientes fases. La primera de ellas, consiste en generar de forma aleatoria un número de veces, el volumen anual de siniestros para esta prestación⁵⁴. La segunda fase consiste en, de forma secuencial, generar para cada uno de los volúmenes de siniestros anuales simulados anteriormente, la cuantía de los siniestros a partir del modelo continuo. En último lugar, adición de los mismos significa, para este caso, obtener 50 posibles valores de siniestralidad total anual de un ejercicio económico, (véase dicho proceso en la ilustración 4.5.3.2.4.).

⁵³ Se ha utilizado el software @Risk para realizar el proceso de simulación.

⁵⁴ En nuestro caso se ha replicado 50 veces el número de siniestros de un ejercicio económico hipotético.

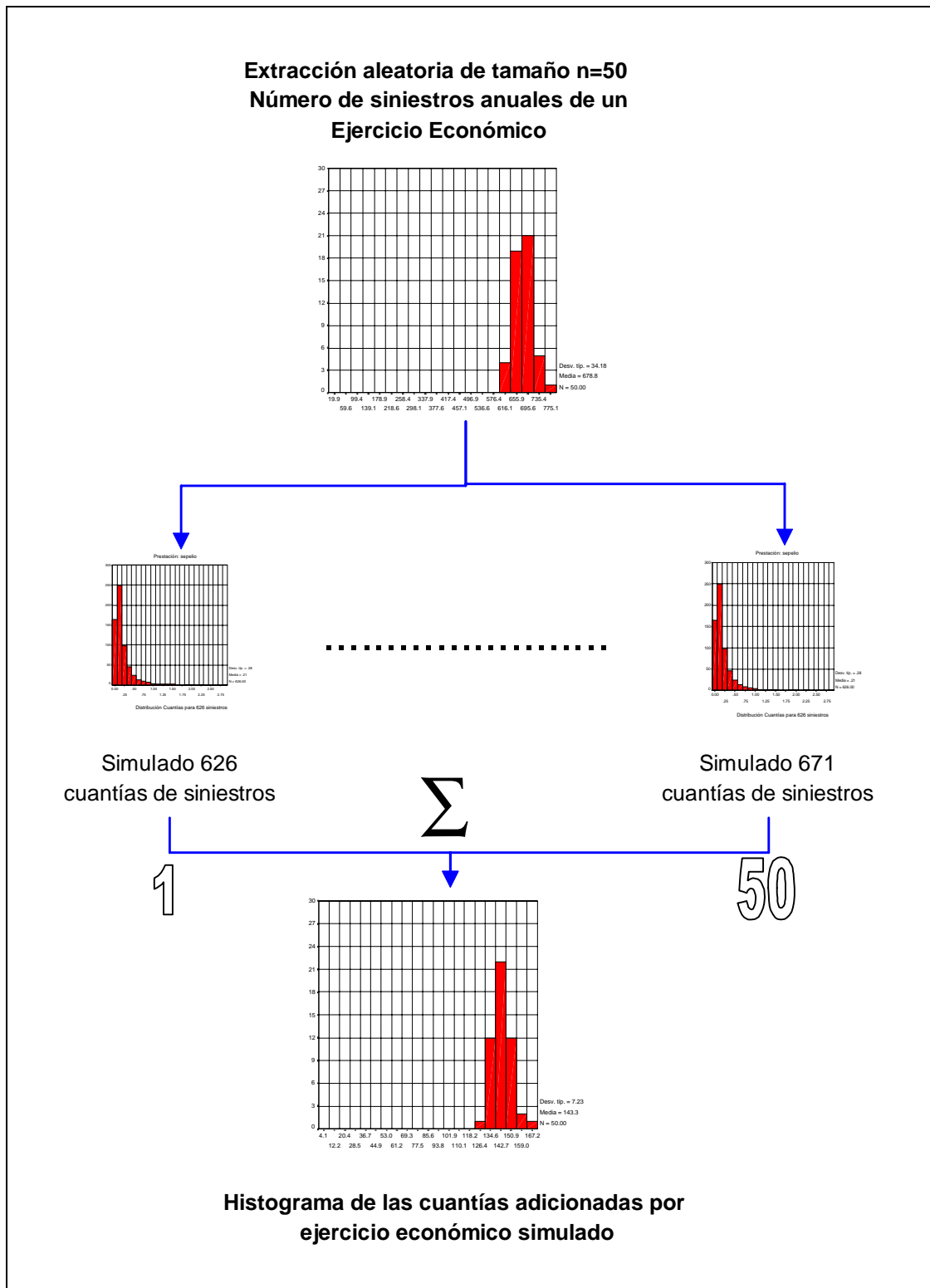


Ilustración 4.5.3.2.4.

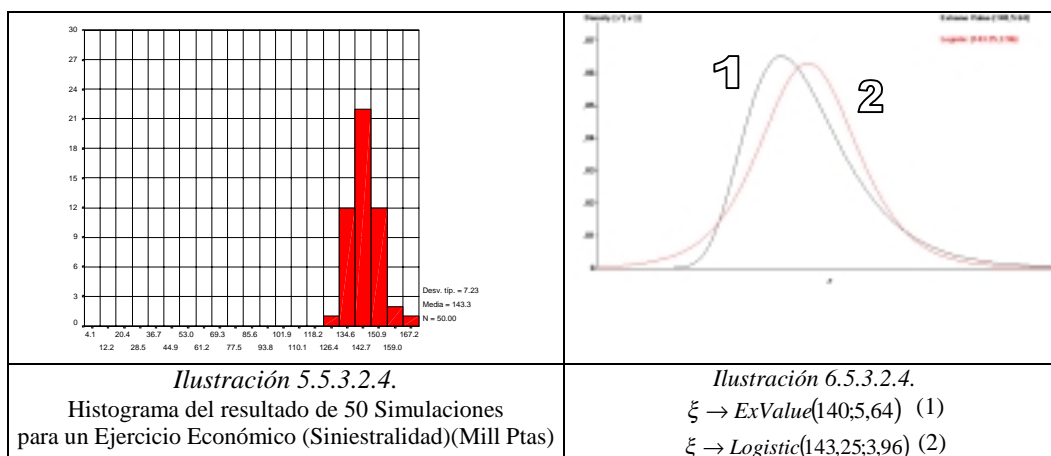
Proceso de simulación de la distribución de la siniestralidad anual para la prestación de *Sepelio*

Los resultados de la siniestralidad total simulada para un ejercicio económico, mediante el proceso anterior, se sintetizan en la tabla 1.5.3.2.4. La dispersión relativa evaluada mediante el coeficiente de variación es en este caso un 5.05%, un 2% más pequeña que si se calcula a partir del modelo compuesto de *Poisson* con datos actualizados⁵⁵.

Tabla 1.5.3.2.4.

SIMUL50					
N	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
50	143.2512	142.2850	7.2331	.961	2.634

Resultado de 50 Simulaciones para un Ejercicio Económico (Siniestralidad)(Mill Ptas)



Con posterioridad y a partir de los datos simulados, se ha detectado si existe algún modelo de probabilidad continuo⁵⁶ que pueda razonablemente explicar los datos simulados de siniestralidad total anual, mediante contrastes no paramétricos⁵⁷ (véase apartado 1.5.2.). Dicha búsqueda se ha dividido en dos casos, el primero de ellos es para valores positivos de la variable, es decir, el dominio de la variable es $[0;+\infty]$. El modelo escogido es el modelo *ExtremeValue* de parámetros, $\xi \rightarrow ExValue(140;5,64)$. En segundo lugar, permitiendo una mayor libertad al dominio de la variable, $[-\infty;+\infty]$, el modelo escogido es el *Logístico*, $\xi \rightarrow Logistic(143,25;3,96)$, (véase ilustraciones 5.5.3.2.4. y 6.5.3.2.4.).

⁵⁵ Véase el apartado 5.3.2.3.

⁵⁶ Dichos modelos podrán ser utilizados para la obtención del margen mínimo de solvencia (MMS).

⁵⁷ Se ha utilizado el software *BestFit®*.

Para comprobar el grado de estabilidad de los resultados anteriores, se realizó el mismo proceso pero para diferentes niveles de simulación⁵⁸ para un ejercicio económico.

Los estadísticos básicos⁵⁹ obtenidos al simular para un ejercicio económico, 50, 100, 150 y 200 veces el valor de la siniestralidad anual para la prestación de *Sepelio* están sintetizadas en las tablas 2.5.3.2.4. y 3.5.3.2.4., donde podemos comparar los resultados empíricos junto a aquellos que surgen del mejor modelo de probabilidad ajustado, ya sea permitiendo o no la amplitud del dominio de la variable. Las mayores discrepancias se encuentran entre los momentos de orden superior, asimetría y curtosis.

Tabla 2.5.3.2.4. Simulación Siniestralidad Total (ξ) Anual (Mill Ptas)

Tipología Estadísticos Prestación		SIMULACIÓN 1		SIMULACIÓN 2	
		Datos Empíricos 50 Simulaciones	Modelo Estimado 50 Simulaciones	Datos Empíricos 100 Simulaciones	Modelo Estimado 100 Simulaciones
Sepelio	n	50	50	100	100
	μ	143.251	143.255	143.271	143.269
	m_o	140.025	139.996	145.426	142.763
	m_e	141.860	142.063	142.590	143.100
	$\sigma_{(\xi)}$	7.233148	7.233602	7.057575	6.964473
	γ_1	1.298404	1.139547	0.715089	0.145948
	γ_2	5.052228	5.4	3.850468	3.037892
	C_1	138.51	138.15	138.62	138.49
	C_2	141.86	142.06	142.59	143.10
	C_3	146.96	147.02	147.64	147.87
Sepelio		$\xi \rightarrow ExValue(140;5,64)$		$\xi \rightarrow LogN(143,27;6,96)$	
$\xi \rightarrow$		$\xi \rightarrow Logistic(143,25;3,96)$		$\xi \rightarrow Normal(143,27;7,06)$	
$[D_n; A_n^2]$		$D = 0.065476$	$A^2 = 0.36438$	$D = 0.058398$	$A^2 = 0.193151$
		$P(D_n \geq K/H_n) = 0.10$	$P(A_n^2 \geq K/H_n) = 0.15$	$P(D_n \geq K/H_n) = 0.15$	$P(A_n^2 \geq K/H_n) = 0.15$

Nota: $[D_n; A_n^2]$ son respectivamente los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling, junto con la probabilidad de aceptación de la hipótesis nula; “ n ” tamaño de la muestra; “ μ ” promedio; “ m_o ” moda; “ $\sigma_{(\xi)}$ ” desviación típica; “ γ_1 ” asimetría; “ γ_2 ” curtosis; C_1 primer cuartil (25%); C_2 segundo cuartil (50%); y C_3 tercer cuartil (75%). Los modelos estimados son, en primer lugar para el dominio de la variable $[0; +\infty]$ y en segundo lugar, para el dominio, $[-\infty; +\infty]$.

⁵⁸ Por razones computacionales se ha escogido, como número máximo, 200 simulaciones de un ejercicio económico.

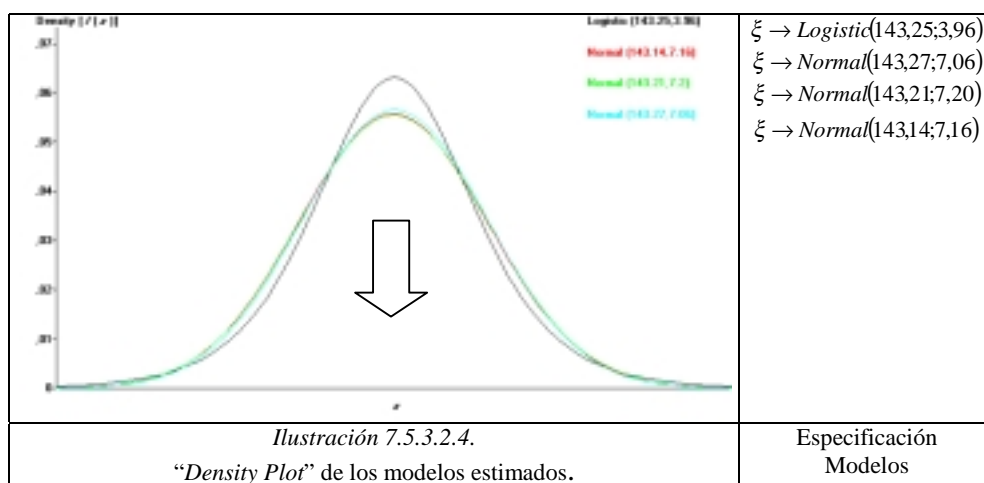
⁵⁹ Existen discrepancias en algunos estadísticos, como por ejemplo, γ_1 asimetría, γ_2 curtosis, entre los resultados facilitados por el software SPSS® (utilizado para los estadísticos descriptivos) y el utilizado para la simulación, @Risk. Las diferencias radican en la propia especificación de los estadísticos, véase SPSS® (1997). **Statistical Algorithms**, pp. 125-127 y Vose, D. (1996). **Quantitative Risk Analysis: A guide to Monte Carlo Simulation Modelling**, Wiley, pp. 293-295. De todos modos en este caso se ha mantenido la forma de cálculo de @Risk para enfatizar la fiabilidad del método no paramétrico utilizado, orientado a la detección de los modelos teóricos que mejor se ajustan a los datos.

Tabla 3.5.3.2.4. Simulación Siniestralidad Total (ξ) Anual (Mill Ptas)

Tipología	Estadísticos	SIMULACIÓN 3		SIMULACIÓN 4	
		Datos Empíricos 150 Simulaciones	Modelo Estimado 150 Simulaciones	Datos Empíricos 200 Simulaciones	Modelo Estimado 200 Simulaciones
Sepelio	n	150	150	200	200
	μ	143.210	143.210	143.140	143.140
	m_o	145.310	142.673	142.054	142.607
	m_e	142.710	143.030	142.600	142.962
	$\sigma_{(\xi)}$	7.197896	7.1695	7.160003	7.145248
	γ_1	0.288737	0.150314	0.218322	0.149878
	γ_2	3.707396	3.040195	3.531671	3.039962
	C_1	138.18	138.28	138.34	138.23
	C_2	142.71	143.03	142.60	142.96
	C_3	147.63	147.94	147.63	147.85
Sepelio		$\xi \rightarrow \text{LogN}(143,21;7,17)$		$\xi \rightarrow \text{LogN}(143,14;7,15)$	
$\xi \rightarrow$		$\xi \rightarrow \text{Normal}(143,21;7,20)$		$\xi \rightarrow \text{Normal}(143,14;7,16)$	
$[D_n; A_n^z]$		$D = 0.035365$	$A_n^z = 0.194774$	$D = 0.026641$	$A_n^z = 0.194645$
		$P(D_n \geq K/H_n) = 0.15$	$P(A_n^z \geq K/H_n) = 0.15$	$P(D_n \geq K/H_n) = 0.15$	$P(A_n^z \geq K/H_n) = 0.15$

Nota: $[D_n; A_n^z]$ son respectivamente los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling, junto con la probabilidad de aceptación de la hipótesis nula; “ n ” tamaño de la muestra; “ μ ” promedio; “ m_o ” moda; “ $\sigma_{(\xi)}$ ” desviación típica; “ γ_1 ” asimetría; “ γ_2 ” curtosis; C_1 primer cuartil (25%); C_2 segundo cuartil (50%); y C_3 tercer cuartil (75%). Los modelos estimados son, en primer lugar para el dominio de la variable $[0; +\infty]$ y en segundo lugar, para el dominio, $[-\infty; +\infty]$.

La dinámica de los modelos ajustados a los datos simulados, conforme incrementamos el número de simulaciones supone⁶⁰ una reducción paulatina de los estadísticos, (véase ilustración 7.5.3.2.4.).



⁶⁰ Sólo para permitir una mejor visualización en este caso se ha utilizado los modelos con un dominio de la variable de $[-\infty; +\infty]$.

Una vez realizadas todas las simulaciones, podemos comparar los resultados a priori obtenidos por el modelo compuesto de Poisson, con los resultados a posteriori (método de Monte-Carlo) en términos de variabilidad de la siniestralidad y de asimetría. Así para este tipo de prestación y para una cartera de riesgo del sector⁶¹, las conclusiones son las siguientes. En primer lugar, se produce un proceso evidente de estabilización de las medidas de variabilidad a medida que se incrementa el número de simulaciones. En segundo lugar, el valor del coeficiente de variación, $(\sigma_{\xi}/P) \cdot 100$, tiende al 5% y la desviación típica de la siniestralidad anual simulada, tiende al 7%. En tercer lugar, el proceso realizado genera un 2% menos de variabilidad que el método de obtención de momentos del modelo compuesto de Poisson con datos actualizados, (véase tabla 4.5.3.2.4.).

Tabla 4.5.3.2.4.

Estadísticos	μ_{ξ}	σ_{ξ}	γ_{ξ}	$(\sigma_{\xi}/\mu_{\xi}) \cdot 100$
Modelo a priori	142.90	10.30	0.187	7.21%
Simulación(50)	143.25	7.23	1.298	5.05%
Simulación (100)	143.27	7.05	0.715	4.92%
Simulación (150)	143.21	7.20	0.289	5.03%
Simulación (200)	143.14	7.16	0.218	5.00%

Nota: Los estadísticos: μ_{ξ} , σ_{ξ} y γ_{ξ} son respectivamente promedio, desviación típica y coeficiente de asimetría de la siniestralidad anual; $(\sigma_{\xi}/\mu_{\xi}) \cdot 100$ es el coeficiente de variación en porcentaje. Entre paréntesis está el número de simulaciones realizadas.

Los resultados obtenidos para las restantes prestaciones están recogidas en la tabla 5.5.3.2.4., donde resaltamos que para carteras de riesgo del sector (representado por las 36 entidades observadas), la prestación con mayor variabilidad relativa es, Intervención Quirúrgica, 29%, debido entre otras razones a la heterogeneidad de coberturas existentes en dicha prestación. La prestación que posee menor variabilidad es Sepelio, 5%.

⁶¹ Es decir, $P = n \cdot m$, siendo “m” el coste medio por siniestro y “n” el número medio de siniestros. Véase los resultados de simulaciones para carteras teóricas más pequeñas en el apartado 5.3.2.5.

Tabla 5.5.3.2.4.

Prestaciones _i	Estadísticos	Sector			
		μ_{ξ}	σ_{ξ}	γ_{ξ}	$(\sigma_{\xi}/\mu_{\xi}) \cdot 100$
Enfermedad	Modelo a priori	624.77	75.74	0.24	12.12%
	Simulación (200)	626.56	74.49	0.21	11.89%
Larga Enfermedad	Modelo a priori	28.66	4.78	0.43	16.68%
	Simulación (200)	28.73	3.39	0.21	11.80%
Invalidez	Modelo a priori	8.04	0.89	0.33	11.07%
	Simulación (200)	8.06	0.53	0.40	6.58%
Inter. Quirúrgica	Modelo a priori	413.12	113.78	0.55	27.54%
	Simulación (200)	406.32	116.88	0.98	28.77%
Hospit. Quirúrgica	Modelo a priori	110.01	11.75	0.21	10.68%
	Simulación (200)	110.46	11.33	0.28	10.26%
Accidentes	Modelo a priori	140.82	28.89	0.39	20.52%
	Simulación(200)	139.21	25.17	0.75	18.08%
Sepelio	Modelo a priori	142.90	10.30	0.19	7.21%
	Simulación (200)	143.14	7.16	0.22	5.00%
Serv. Automovilistas	Modelo a priori	212.54	42.00	0.39	19.76%
	Simulación (200)	214.01	41.20	0.35	19.25%
Asistencia Sanitaria	Modelo a priori	1482.35	102.92	0.14	6.94%
	Simulación (200)	-----	----	----	-----

Nota: Los estadísticos: μ_{ξ} , σ_{ξ} y γ_{ξ} son respectivamente promedio, desviación típica y coeficiente de asimetría de la siniestralidad anual; $(\sigma_{\xi}/\mu_{\xi}) \cdot 100$ es el coeficiente de variación en porcentaje. Entre paréntesis el número de simulaciones realizadas.
(----) Simulaciones no realizadas por el alto coste computacional

En último lugar consideramos de interés presentar para el sector agregado cuales son los modelos de probabilidad detectados como más frecuentes, tanto desde el punto de vista truncados $[0;+\infty]$ como no truncados $[-\infty;+\infty]$. Los modelos *Gamma* y *Erlang* son los más frecuentes para el primer grupo y para el segundo, resalta con diferencia el modelo *Normal*, (véase tabla 6.5.3.2.4.).

Tabla 6.5.3.2.4.

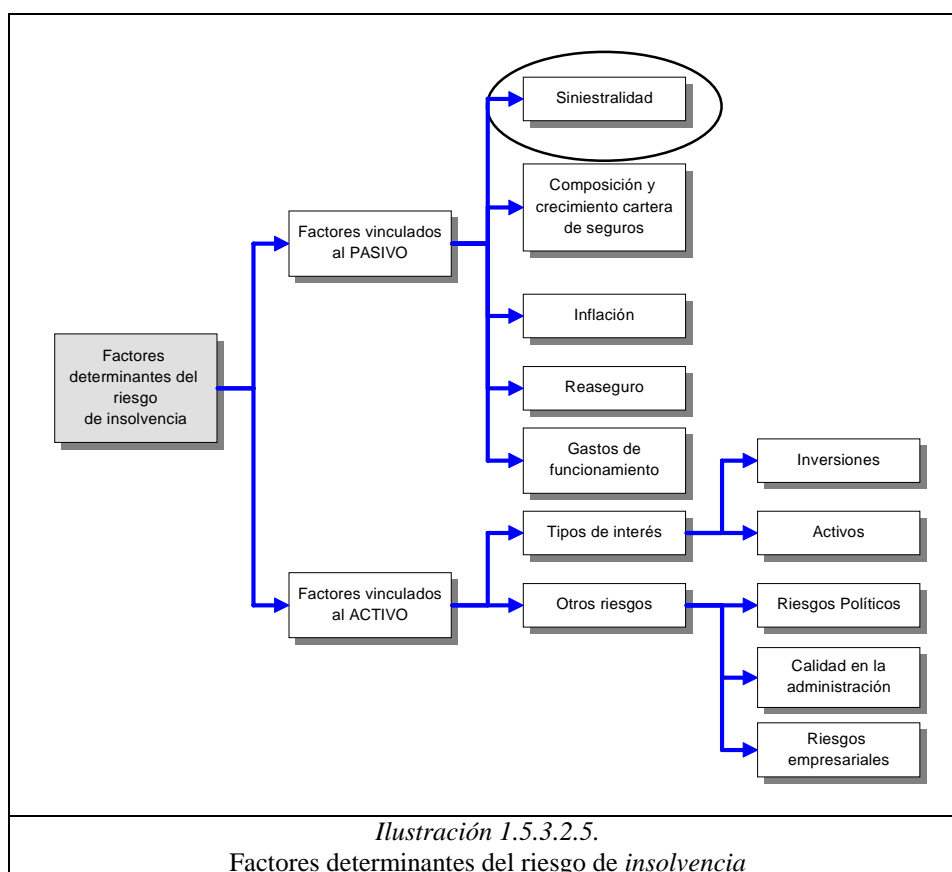
Siniestralidad	Modelos Truncados				Prestación _i
	Erlang	Gamma	Lognormal	Weibull	
Modelos no Truncados					
Normal	••	•••	•	•	1; 2; 3; 4; 5; 7; 8
Logístico	•				6

Nota: 1: Enfermedad; 2: Larga Enfermedad; 3: Invalidez; 4: Intervención Quirúrgica; 5: Hospitalización Quirúrgica; 6: Accidentes; 7: Sepelio; 8: Servicio a Automovilistas; 9: Asistencia Sanitaria a Socios (no ha sido posible su cálculo)

Consideramos dicho aspecto puede repercutir en los resultados econométricos para las diferentes especificaciones del modelo de ratio del apartado 5.4.

5.3.2.5. Margen mínimo de solvencia por tipo de prestación a partir del método de Monte-Carlo.

El concepto de *solvencia*⁶², desde una óptica global, está vinculada a toda la actividad de cualquier empresa, pero en particular para el sector objeto de este trabajo posee una relevancia mayor. En términos generales, su control supone la vigilancia de un conjunto de factores que pueden ser situados tanto en la vertiente del *pasivo* como del *activo*. De especial interés es la siniestralidad como factor que puede influenciar en el control del margen de solvencia y, en consecuencia, objetivo de esta tesis doctoral⁶³, (véase ilustración 1.5.3.2.5.).



⁶² Interesante el sistema híbrido N.E.W.S. sobre evaluación de compañías no vida propuesto Kramer, B. (1997). **N.E.W.S.: A model for the evaluation of non-life insurance companies**, *European Journal of Operational Research*, 98, pp. 419-430. La síntesis elaborada por Cummins, J.D. ; Grace M.;F.; Phillips, R. D. (1999). **Regulatory Solvency Prediction in Property-Liability Insurance: Risk-Based Capital, Audit Ratios, and Cash Flow Simulation**, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 66, No. 3, pp. 417-458 y el capítulo 2, de Cummins, J.D. ; Derrig, R. A. (1988). **Classical insurance Solvency Theory**, Kluwer Academic Publishers.

⁶³ Véase Martín Peña, M. ; Leguey Galán, S. ; Sánchez López, J. M. (1999). **Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante**, Cuadernos de la Fundación Mapfre, Madrid.

Muchos son los esfuerzos realizados en el diseño de métodos para poder predecir la insolvencia en la industria del seguro⁶⁴. Una de las líneas que consideramos con mayor futuro es la aplicación, de forma híbrida, de modelos neuronales⁶⁵ con modelos tradicionales. Las administraciones públicas, sensibles al control de la solvencia, han desarrollado reglamentos específicos para su regulación.

En España dicha regulación descansa en las siguientes reglamentaciones. La Ley de Ordenación del Seguro Privado (L.O.S.P.) de 1984, la Ley de Ordenación y Supervisión del Seguro Privado (L.O.S.S.P.) de 1995⁶⁶, y el real decreto 2486/1998 de 20/11, que se publicó con posterioridad, donde se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados⁶⁷. Este último reglamento modifica la forma de cálculo del margen de solvencia de las entidades, que para éstas hasta ese momento era un 10% sobre el volumen de ingresos netos de reaseguro. El reglamento de entidades de previsión social, que todavía no está en vigor, modifica de forma considerable dicho cálculo remitiendo el mismo al reglamento RD 2486/1998. Así la principal novedad para el sector de carácter normativo⁶⁸ es la obligatoriedad del cálculo de dos márgenes de solvencia mínimo, uno para el ramo *vida* y otro para el ramo objeto de esta tesis, ramo *no vida*.

⁶⁴ Véase BarNiv, R. ; McDonald, J. B. (1992). **Identifying Financial Distress in the Insurance Industry: A Síntesis of Methodological and Empirical Issues**, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. LIX, No. 4, pp. 543-574; Baranoff, E. G. ; Sager, T. W. ; Shively, T. S. (2000). **A Semiparametric Stochastic Spline Model as a Managerial Tool for Potencial Insolvency**, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 67, No. 3, pp. 369-396.

⁶⁵ Existen aplicaciones de inteligencia artificial para modelizar el riesgo de insolvencia desde la vertiente de los algoritmos genéticos, véase, Barreto F. (1998). **Genetic algorithms applications in the analysis of insolvency risk**, *Journal of Banking & Finance*, 22, pp. 1421-1439 y mediante modelos neuronales, Brockett, P. L. ; Cooper, W. W. ; Golden, L. L. y Pitaktong, U. (1994). **A Neural Network Method for Obtaining an Early Warning of Insurer Insolvency**, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 61, No. 3, pp. 402-424.

⁶⁶ Para más información consultar, <http://www.dgseguros.mineco.es/>.

⁶⁷ El sector de mutualidades de previsión social posee un trato diferencial en materia de solvencia.

⁶⁸ Agradezco sinceramente los comentarios realizados por el Sr *Ferrán Guinot*, de la *Federación de Mutualidades de Cataluña*, véase Guinot, F. (2002). **El nou marge de solvencia**, *Mutual*. Revista de la Federació de Mutualitats de Catalunya, 12, pp. 16-20, Barcelona. Además es interesante la base de datos documental sobre solvencia en <http://intranet.icea.es/Proyecto1/solvencia/Solvencia.asp>.

Para el primero de ellos, ramo vida, la cantidad mínima será la suma de los siguientes cálculos:

1. El 4% de las provisiones por seguros de vida se multiplicará por la relación existente entre las provisiones netas de reaseguro y las provisiones totales, de forma que este cociente no podrá ser inferior a 85%.
2. Para los contratos con capitales de riesgo positivos, en caso de muerte, se multiplicará dicho capital por el 0,3% si la vida residual es superior a 5 años, el 0,15% entre 3 y 5 años y 0,1% menos de 3 años. El importe obtenido se multiplica por la relación entre capitales de riesgo netos de reaseguro y capitales de riesgo total, de forma que este resultado sea inferior al 50%.

Para el ramo no vida, se realizarán dos cálculos y se elegirá el más elevado de los dos. El primero de ellos se calcula en función del volumen anual de ingresos por cuotas y el segundo en función de la siniestralidad de los tres últimos años. Así los mismos se definen,

1. En función del volumen de las cuotas ingresadas netas de anulaciones y extornos, hasta 10 Millones de euros se aplicará el 18% y el exceso si existe, el 10%. El resultado se multiplicará por el cociente entre la siniestralidad neta de reaseguro y siniestralidad total, de forma que puede ser inferior al 50%.
2. En función de los siniestros, se tomará la siniestralidad total de los tres últimos ejercicios más las provisiones por siniestros pendientes del ejercicio en curso. Un tercio del importe anterior se aplicará el 26% hasta 7 millones de euros y el exceso, si existe, el 23%. El resultado se multiplicará por el cociente entre la siniestralidad neta de reaseguro y siniestralidad total, de forma que puede ser inferior al 50%.

Para el caso de las mutualidades de previsión social se han reducido dichos valores, así para aquellas que según sus estatutos prevean realizar derramas o reducir prestaciones y además posea durante los tres últimos ejercicios un volumen de cuotas inferior a 5 millones de euros, los porcentajes se reducen a la mitad y si superan dicho volumen, en tres cuartas partes.

A partir de las disposiciones anteriores, las entidades aseguradoras tienen la obligación de disponer de un margen de solvencia para cada ejercicio como porcentaje del patrimonio libre de todo compromiso, deducido los elementos inmateriales. Estos valores mínimos que debe poseer el patrimonio de una entidad se calculan mediante tramos en función del volumen de ingresos de la entidad, reflejando la solvencia dinámica, es decir, la garantía adicional en el caso extremo de que los fondos constituidos por las provisiones técnicas no sean suficientes para hacer frente a los compromisos de los asegurados, en el caso que nos ocupa, a los mutualistas.

El margen de solvencia⁶⁹ para cada ejercicio se ha definido anteriormente como porcentaje del patrimonio libre de todo compromiso, pero existe la posibilidad de una aproximación a partir de la función de distribución de la siniestralidad anual estimada en los apartados anteriores. Así, para la prestación de *Sepelio* y a partir de los modelos teóricos obtenidos, puede calcularse la cuantía mínima del margen de solvencia⁷⁰ resolviendo la expresión siguiente, $P(\xi > P+U) = \psi$, para cada una de carteras de riesgo, (véase tabla 1.5.3.2.5.).

Tabla 1.5.3.2.5.

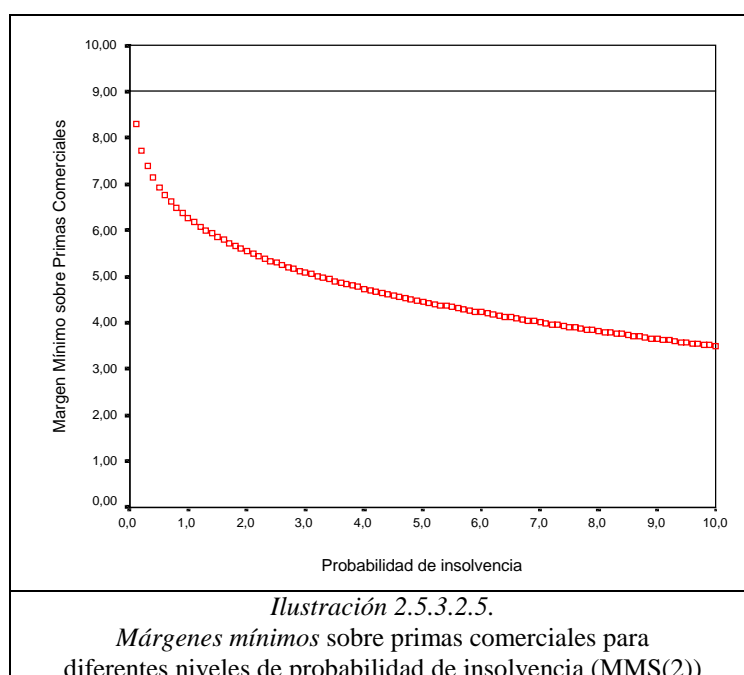
Tipología Prestación	Modelo Estimado	μ_{ξ}	Número Simulaciones	MMS(1)	\bar{R}^2	MMS(2)
Sepelio	$\xi \rightarrow ExValue(140;5,64)$	143.25	50	16%	53%	8.5%
	$\xi \rightarrow Logistic(143,25;3,96)$		50	12%		6.6%
Sepelio	$\xi \rightarrow LogN(143,27;6,96)$	143.27	100	11.7%	53%	6.2%
	$\xi \rightarrow Normal(143,27;7,06)$		100	11.0%		5.8%
Sepelio	$\xi \rightarrow LogN(143,21;7,17)$	143.21	150	12.4%	53%	6.6%
	$\xi \rightarrow Normal(143,21;7,20)$		150	11.7%		6.2%
Sepelio	$\xi \rightarrow LogN(143,14;7,15)$	143.14	200	12.5%	53%	6.6%
	$\xi \rightarrow Normal(143,14;7,16)$		200	11.8%		6.2%

Nota: μ_{ξ} : promedio de siniestralidad simulada; MMS(1): margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad; MMS(2): margen mínimo sobre primas comerciales; \bar{R}^2 : ratio promedio de la siniestralidad. El primer modelo estimado se ha obtenido considerando el dominio de la variable, $[0;+\infty]$ y para el segundo, $[-\infty;+\infty]$.

⁶⁹ Véase Wit, G. W. ; Kastelijm, W. M. (1980). **The solvency margin in non-life insurance companies**, *Astin Bulletin*, Vol. 11, pp. 136-144 y www.casact.org.

⁷⁰ Realizado para un $\psi=0.01$ (1%) de probabilidad de insolvencia.

Podemos observar que para una siniestralidad media del 53%, el margen mínimo de solvencia tiende al intervalo entre 6.6% y 6.2% sobre primas comerciales, para una cartera de riesgo⁷¹ de 142.90 Mill Ptas. A partir de los resultados anteriores y para esta prestación, el 9% de margen mínimo sobre primas comerciales⁷² previsto es más que suficiente para cubrir la posibilidad de no poder hacer frente a una siniestralidad anual extrema. Si consideramos diferentes niveles de probabilidad de insolvencia [0%;10%] el margen oficial del 9% sobre primas es suficiente en todos los casos⁷³, (véase ilustración 2.5.3.2.5.).



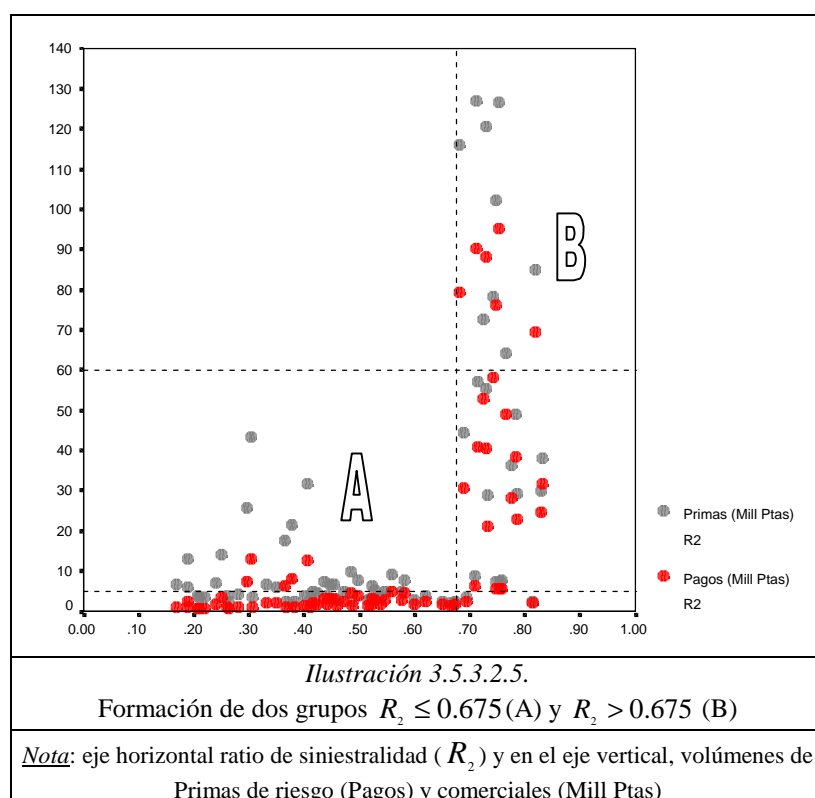
De todos modos, hay que puntualizar que los anteriores resultados son la cartera anual agregada del sector mutualista en Cataluña, este aspecto puede ser cuestionado si consideramos que las carteras reales de las entidades analizadas son de menor tamaño. Así con la finalidad de poder definir carteras representativas de menor tamaño y para esta prestación en concreto, se han definido unas carteras representativas de menor tamaño en función del volumen de riesgo asumido (*primas de riesgo*) y de las *primas comerciales*.

⁷¹ La simulación se ha realizado para la prima de riesgo (P) que coincide con " $n \cdot m$ ", siendo " n ", el número de siniestros y " m ", el coste por siniestro para dicha prestación (utilizando los datos corregidos).

⁷² También es habitual expresar el margen en función de la siniestralidad, en este caso y para las mismas premisas de cartera, tenemos que tiende al 12%, siendo el valor previsto oficial 13%.

⁷³ Véase un mayor detalle en el anexo 1 de este apartado, sólo para carteras de 142.90 Mill Ptas y 5 Mill Ptas.

La ilustración 3.5.3.2.5. muestra de forma clara la formación de grupos, donde se observa, la existencia de dos grupos de comportamiento. Un grupo estaría formado por aquellas entidades que poseen un ratio de siniestralidad menor a 0.675 y otro superior al mismo⁷⁴. La distinción anterior permite definir dos grupos de volúmenes de carteras representativas⁷⁵, el primero de ellos, entidades con volúmenes aproximadamente de 5 Mill Ptas y el segundo grupo, entidades con volúmenes aproximadamente de 60 Mill Ptas. El promedio del ratio de siniestralidad para aquellas entidades que no superan el 0.675 es de 42%, en cambio para el segundo grupo, superiores a 0.675, su promedio es 75%.



⁷⁴ Existen muchos otros criterios, como por ejemplo, mediante el cálculo de *cuartiles*, pero debido a la transparente formación en este caso de dos grupos se ha optado por dos carteras, 5Mill, 60Mill y la cartera agregada del sector.

⁷⁵ La razón reside en el hecho que aún perteneciendo al mismo tipo de prestación recogen productos con garantías diferentes, aspecto éste que se puede observar a través de la dispersión del *ratio*, prima media por póliza. De la misma forma también es relevante que exista dentro de cada prestación un *ratio* de siniestralidad tan heterogéneo, dicho aspecto pueda ser justificado por el hecho que representen pólizas colectivas con un número de asegurados muy dispar. Además también se observa un coste medio por siniestro muy heterogéneo por prestación que puede ser explicado por la diferencia considerable entre las garantías contenidas en las pólizas o por la diferente consideración entre siniestros. Todos estos aspectos podrían minimizarse con la definición de un modelo estadístico oficial más adecuado a los condicionantes del mercado.

Los resultados estadísticos de los dos grupos formados son los siguientes. Para el primer grupo, éste representa el 67% de las entidades, cuyos valores promedios son, 16 siniestros anuales, carteras de riesgo de 3 Mill Ptas, y volúmenes de primas comerciales del orden de 7.5 Mill de Ptas, por entidad. En cambio para el segundo grupo definido, sus valores promedios resultan aproximadamente, 200 siniestros anuales, 40 Mill Ptas de primas de riesgo y 55 Mill Ptas de ingresos por primas, (véase tabla 2.5.3.2.5.).

GRUPSEP		NumSini	Pagos (Mill Ptas)	Primas (Mill Ptas)
R2 <= 0.675	N	48	48	48
	Media	16.44	2.8496	7.5082
	Mediana	14.00	1.8728	4.8583
	Desv. típ.	9.93	2.7060	8.0322
R2 > 0.675	N	24	24	24
	Media	211.38	40.2043	54.0897
	Mediana	200.00	35.0280	46.6989
	Desv. típ.	140.74	30.1312	41.4195
Total	N	72	72	72
	Media	81.42	15.3012	23.0353
	Mediana	19.00	2.9629	6.8010
	Desv. típ.	122.66	24.7670	32.9763

Tabla 2.5.3.2.5.
Resultados estadísticos de los grupos formados
(Número de siniestros, volúmenes de primas de riesgo y comerciales)

La tabla 3.5.3.2.5. nos permite comprobar que aún siendo conscientes que los datos facilitados por las respectivas administraciones contienen una gran heterogeneidad entre las entidades y gran homogeneidad en los ejercicios económicos, la segmentación planteada nos demuestra que existen diferencias significativas en los tres ratios restantes de gestión analizados.

ANOVA						
		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
R1	Inter-grupos	620.840	1	620.840	2.404	.126
	Intra-grupos	18080.146	70	258.288		
	Total	18700.986	71			
R3	Inter-grupos	4.038E+10	1	4.04E+10	8.634	.004
	Intra-grupos	3.274E+11	70	4.68E+09		
	Total	3.677E+11	71			
R4	Inter-grupos	26885089	1	26885089	10.923	.001
	Intra-grupos	172295715	70	2461367.4		
	Total	199180804	71			

Tabla 3.5.3.2.5.
Resultados de los ratios definidos en el apartado 5.3.2.
($R_1; R_3; R_4$) en función de los volúmenes de riesgo definidos.

Una de las posibles utilidades de este apartado es conseguir encontrar una relación entre el margen mínimo obtenido por simulación y los diferentes volúmenes de riesgo definidos⁷⁶, es decir, 5, 60 y 142.90 Mill. Ptas. anuales. Para cada una de estas carteras se ha estimado el modelo discreto *Binomial Negativo* explicativo del número de siniestros (v) con una hipótesis de funcionamiento, constancia para los parámetros “ h ” (grado de heterogeneidad de la cartera) y “ m ” (coste medio por siniestro), (véase tabla 4.5.3.2.5.).

Tabla 4.5.3.2.5.

Grupo formado	Tipología Prestación	Modelo Discreto (n)	Prima Riesgo(P) (Mill Ptas)	Número Siniestros Teóricos	Número Simulaciones realizadas	\bar{R}^2
1	Sepelio	$v \rightarrow BN(1307;0.9822)$	5	24	200	42%
2	Sepelio	$v \rightarrow BN(1307;0.8212)$	60	284	200	75%
Agregado	Sepelio	$v \rightarrow BN(1307;0.6585)$	142.90	677	200	53%

Nota: Realizado para un $\psi=0.01$ (1%) de probabilidad de insolvencia. El modelo continuo para la cuantía de los siniestros es para todos los casos, $\ln(\eta) \rightarrow LN(-2.1055; 1.0481)$. El número de siniestros está calculado a partir del modelo discreto obtenido para la prestación de *sepelio* con los datos corregidos. \bar{R}^2 : ratio promedio de la siniestralidad.

Utilizaremos, en primer lugar para nuestros propósitos, una cartera de 5 Mill Ptas como ejemplo, para desarrollar las diferencias en el proceso de simulación con respecto al realizado en el marco agregado. Las tablas 5.5.3.2.5 y 6.5.3.2.5. muestran dichos resultados. Observamos como en la primera de ellas, existe un proceso de convergencia para los estadísticos definidos. En especial el coeficiente de variación, $(\sigma_{\xi}/\mu_{\xi}) \cdot 100$, se estabiliza alrededor del valor 23%.

Tabla 5.5.3.2.5.

Estadísticos	μ_{ξ}	σ_{ξ}	γ_{ξ}	$(\sigma_{\xi}/\mu_{\xi}) \cdot 100$
Modelo a priori	5	1.78	1.064	36%
Simulación (50)	4.88	1.14	0.542	23%
Simulación (100)	5.00	1.11	0.346	22%
Simulación (150)	5.01	1.16	0.498	23%
Simulación (200)	5.01	1.15	0.535	23%

Nota: μ_{ξ} , promedio, σ_{ξ} , desviación típica, γ_{ξ} , asimetría de la siniestralidad de una cartera de 5 Mill Ptas en sus diversas simulaciones (valor entre paréntesis).

La tabla 6.5.3.2.5. muestra dos aspectos, el proceso de estabilización de los márgenes sobre siniestralidad y sobre primas comerciales, y los modelos continuos detectados de forma

⁷⁶ A partir de ratio de siniestralidad.

no paramétrica que mejor se ajustan a los datos simulados. A partir de ellos se obtienen los márgenes mínimos de solvencia, ya sea desde la óptica de la siniestralidad, como desde las primas comerciales. En ambos casos se produce un proceso de convergencia cuyos resultados son los siguientes. En primer lugar, el margen mínimo sobre siniestralidad se sitúa en el intervalo $[54\%;59\%]$, donde el límite inferior está calculado para el dominio de la variable, $[0;+\infty]$ y el límite superior para el dominio, $[-\infty;+\infty]$. En segundo lugar, el margen mínimo sobre primas comerciales se sitúa en el intervalo, $[23\%;25\%]$, con la misma interpretación. Y en último lugar, el modelo continuo que mejor representa a carteras de 5 Mill Ptas es el modelo Gamma (valores no negativos).

Comparativamente comprobamos que con un volumen de riesgo casi 29 veces superior, el margen mínimo sobre primas comerciales es aproximadamente 4 veces superior⁷⁷, para el mismo nivel de insolvencia predefinido (1%).

Tabla 6.5.3.2.5.

Tipología Prestación	Modelo Estimado	μ_{ξ}	Número Simulaciones	MMS(1)	\bar{R}^2	MMS(2)
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{PearsonVI}(379.9;19.7,0.25)$	5.11	50	78%	42%	33%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(5.09;1.14)$	5.09	50	55%		23%
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{Gamma}(20.17;0.5)$	5.00	100	59%	42%	25%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(5.09;1.14)$	5.00	100	51%		21%
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{Gamma}(18.53;0.27)$	5.01	150	62%	42%	26%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(5.01;1.16)$	5.01	150	54%		23%
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{Gamma}(18.97;0.26)$	5.01	200	59%	42%	25%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(5.01;1.15)$	5.01	200	54%		23%

Nota: μ_{ξ} : promedio de siniestralidad simulada; MMS(1): margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad; MMS(2): margen mínimo sobre primas comerciales; \bar{R}^2 : ratio promedio de la siniestralidad. El primer modelo estimado se ha obtenido considerando el dominio de la variable, $[0;+\infty]$ y para el segundo, $[-\infty;+\infty]$.

A continuación se ha realizado el mismo proceso pero para un volumen de riesgo de 60 Mill Ptas, (véase tabla 7.5.3.2.5.). Podemos observar como a medida que crece el tamaño de cartera de riesgo, aumenta la estabilización de los estadísticos utilizados. Así en términos de coeficiente de variación $((\sigma_{\xi}/P) \cdot 100)$ y para 200 simulaciones de un ejercicio económico, se estabiliza en un 7%.

⁷⁷ Más específicamente y para este volumen de riesgo, 5 Mill Ptas, sólo se podría cubrir el 9% oficial con niveles de siniestralidad del 25% (recordemos que empíricamente es un 42%), o aceptación de niveles de insolvencia del orden del 6%.

Tabla 7.5.3.2.5.

Estadísticos	μ_{ξ}	σ_{ξ}	γ_{ξ}	$(\sigma_{\xi}/\mu_{\xi}) \cdot 100$
Modelo a priori	60	6.38	0.298	11%
Simulación(50)	60	4.18	-0.119	7%
Simulación (100)	60.15	4.20	-0.145	7%
Simulación (150)	60.17	4.33	0.221	7%
Simulación (200)	60.17	4.43	0.308	7%

Nota: μ_{ξ} , promedio, σ_{ξ} , desviación típica, γ_{ξ} , asimetría de la siniestralidad de una cartera de 5 Mill Ptas en sus diversas simulaciones (valor entre paréntesis).

En síntesis tenemos que, para una cartera de 5Mill Ptas, un 23%, para una cartera de 60Mill Ptas, un 7% y para el riesgo asumido por el sector, 142.90Mill Ptas, un 5% (véase apartado 5.3.2.4.), existiendo claramente una estabilización de los resultados.

De la misma forma que realizamos para la cartera agregada, la tabla 8.5.3.2.5. recoge aquellos modelos continuos que mejor se ajustan a los datos simulados, donde resaltamos los siguientes aspectos. En primer lugar, el modelo Gamma sigue siendo el modelo más recurrente. En segundo lugar, el margen mínimo sobre siniestralidad se sitúa en el intervalo [17%,18%], donde el límite inferior está calculado para el dominio de la variable, $[0;+\infty]$ y el límite superior para el dominio, $[-\infty;+\infty]$ de la variable. Y en último lugar, el margen mínimo sobre primas comerciales se sitúa en ambos casos en el entorno del 13%, con la misma interpretación.

Tabla 8.5.3.2.5.

Tipología Prestación	Modelo Estimado	μ_{ξ}	Número Simulaciones	MMS(1)	\bar{R}^2	MMS(2)
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{Gamma}(207.53;0.29)$	60.00	50	17%	75%	13%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(60.01;4.18)$	60.01	50	16%		12%
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{Gamma}(204.77;0.29)$	60.15	100	16%	75%	12%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(60.14;4.20)$	60.14	100	17%		13%
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{Erlang}(195;0.31)$	60.17	150	18%	75%	13%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(60.17;4.33)$	60.17	150	17%		13%
Sepelio	$\xi \rightarrow \text{Gamma}(186.68;0.32)$	60.17	200	17%	75%	13%
	$\xi \rightarrow \text{Normal}(60.18;4.43)$	60.17	200	18%		13%

Nota: μ_{ξ} : promedio de siniestralidad simulada; MMS(1): margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad; MMS(2): margen mínimo sobre primas comerciales; \bar{R}^2 : ratio promedio de la siniestralidad. El primer modelo estimado se ha obtenido considerando el dominio de la variable, $[0;+\infty]$ y para el segundo, $[-\infty;+\infty]$.

Las conclusiones finales obtenidas, para los márgenes de solvencia⁷⁸ y las carteras definidas (5 Mill Ptas; 60 Mill Ptas y cartera agregada), son las siguientes. En primer lugar, para una siniestralidad del 42%, el margen de solvencia es del 23% sobre primas comerciales y para un volumen de cartera de 5 Mill Ptas, 54% sobre la siniestralidad. En segundo lugar, para una cartera doce veces mayor y un ratio de siniestralidad promedio del 74%, el margen de solvencia sobre primas se reduce diez puntos porcentuales y sobre la siniestralidad se reduce casi en cuarenta puntos porcentuales. Finalmente para la cartera agregada, el margen sobre primas es del 6% (siniestralidad del 53%) y sobre la siniestralidad el doble, (véase tabla 9.5.3.2.5.).

Tabla 9.5.3.2.5.

Tipología Prestación	Modelo Discreto (n)	Prima Riesgo(P) (Mill Ptas)	MMS(1)	\bar{R}^2	MMS(2)
Sepelio	$v \rightarrow BN(1307;0.9822)$	5	54%	42%	23%
Sepelio	$v \rightarrow BN(1307;0.8212)$	60	18%	74%	13%
Sepelio	$v \rightarrow BN(1307;0.6585)$	142.90	12%	53%	6%

Nota: Realizado para un $\psi=0.01$ (1%) de probabilidad de insolvencia, el modelo discreto para la cuantía de los siniestros es para todos los casos, $\ln(\eta) \rightarrow LN(-2.1055; 1.0481)$. Los márgenes se han obtenido a partir de los modelos no truncados, siendo MMS(1) el margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad y MMS(2) el margen mínimo sobre primas comerciales. \bar{R}^2 : ratio promedio de la siniestralidad

La búsqueda de una relación entre los márgenes mínimos obtenidos y el volumen de primas de riesgos nos incita a proponer un modelo simple de regresión que permita estudiar la sensibilidad del margen frente al volumen de cartera de riesgo. La sensibilidad es explicada por el parámetro estimado de la pendiente del propio modelo, que posee un ajuste lineal del 76%. Así por cada millón adicional de riesgo supone una reducción del 0.3% en el margen mínimo requerido sobre siniestralidad, (véase tabla 10.5.3.2.5.).

⁷⁸ Véase anexo 2 de este apartado para observar el grado de cobertura de los datos simulados frente a los propiamente observados.

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	,874 ^a	,764	,528	15,6104

a. Variables predictoras: (Constante), CARTERA

Coeficientes ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coefficient es estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	47,819	14,236		3,359	,184
	CARTERA	-,286	,159	-,874	-1,799	,323

a. Variable dependiente: MIVIST

Tabla 10.5.3.2.5.
Modelo de regresión simple entre el volumen de cartera de riesgo (x) y el margen de solvencia obtenido (y)

Una vez detallado el procedimiento para la prestación de *Sepelio*, se ha realizado el mismo proceso para las demás prestaciones definidas, considerando tanto las carteras agregadas, como dos o tres carteras representativas de menor tamaño. Dichas carteras de menor dimensión se han determinado a partir del cálculo de los *percentiles* sobre el volumen de riesgo, comprobando si realmente existen diferencias significativas en los ratios de gestión para los grupos formados⁷⁹, (véase tabla 11.5.3.2.5.).

Las carteras de riesgo representativas escogidas mediante el procedimiento ya especificado, se detallan en la tabla 11.5.3.2.5., donde el número de siniestros “ n ” para cada una de ellas se ha generado desde el modelo estimado respectivo⁸⁰, manteniendo constante el coste medio por siniestro “ m ”.

⁷⁹ Véase anexo 3 de este apartado para el resto de las prestaciones.

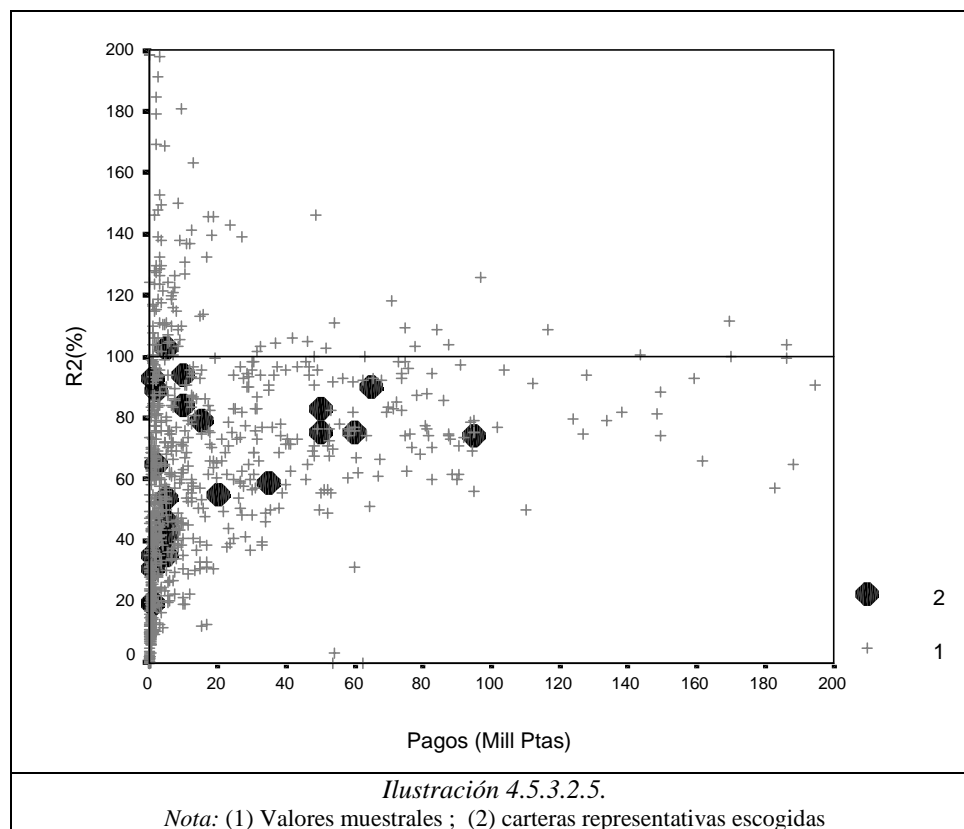
⁸⁰ Véase anexo 4 de este apartado, a partir de los datos actualizados.

Tabla 11.5.3.2.5.

Prestación _i		<i>m</i>	<i>n</i>	Cartera de Riesgo Anual	\bar{R}_2
Enfermedad (143)	*	74866	8345	624.8	71%
Enfermedad (47)		74866	13	1	31%
Enfermedad (48)		74866	67	5	103%
Enfermedad (48)		74866	1269	95	74%
Larga Enferm (54)	*	224203	128	28.7	57%
Larga Enferm (27)		224203	4	1	20%
Larga Enferm (27)		224203	45	10	94%
Invalidez (63)	*	32610	246	8.0	79%
Invalidez (31)		32610	31	1	93%
Invalidez (32)		32610	61	2	65%
I. Quirúrgica (126)	*	48070	8594	413.1	87%
I. Quirúrgica (42)		48070	42	2	89%
I. Quirúrgica (42)		48070	208	10	84%
I. Quirúrgica (42)		48070	1352	65	90%
H. Quirúrgica (108)	*	34838	3158	110.0	48%
H. Quirúrgica (36)		34838	29	1	35%
H. Quirúrgica (36)		34838	144	5	54%
H. Quirúrgica (36)		34838	574	20	55%
Accidentes (81)	*	343164	410	140.7	38%
Accidentes (27)		343164	3	1	19%
Accidentes (27)		343164	15	5	35%
Accidentes (27)		343164	102	35	59%
Sepelio (72)	*	210938	677	142.9	53%
Sepelio (48)		210938	24	5	42%
Sepelio (24)		210938	284	60	75%
Serv. Automov. (63)	*	19246	11043	212.5	65%
Serv. Automov. (31)		19246	260	5	46%
Serv. Automov. (32)		19246	2598	50	83%
Asist. Sanitaria (78)	*	5079	291830	1482.4	79%
Asist. Sanitaria (26)		5079	2953	15	79%
Asist. Sanitaria (26)		5079	9843	50	75%
Asist. Sanitaria (26)		5079	73826	375	83%

Nota: La cartera de riesgo (Mill Ptas) simbolizada con * es la cartera promedio anual agregada del sector; “*m*” es el valor medio de cada siniestro (Ptas) y “*n*” el número medio de siniestros. Todos los cálculos se han realizado con los datos actualizados, y se han utilizado los modelos estimados con los datos corregidos. \bar{R}_2 : ratio promedio de siniestralidad.

Para poder comprobar la bondad de las carteras especificadas respecto a los datos observados del sector, la ilustración 4.5.3.2.5. recoge la relación existente entre el propio tamaño de las carteras y el ratio de siniestralidad. Donde se ha superpuesto aquellas carteras que se consideran representativas.



Para cada uno de los tamaños definidos, y mediante los modelos de probabilidad estimados del número de siniestros y la cuantía de los mismos⁸¹, se han realizado 200 simulaciones para un ejercicio económico, prestación por prestación. Los resultados obtenidos han permitido, mediante contrastes no paramétricos, encontrar aquellos modelos continuos que mejor se ajustan a los datos y obtener en última instancia los márgenes de solvencia sobre siniestralidad⁸² y sobre primas comerciales, a partir de ellos.

Los márgenes de solvencia se han obtenido tanto a partir de modelos truncados (dominio de la variable $[0; +\infty]$), como de los modelos no truncados (dominio de la variable $[-\infty; +\infty]$). Los resultados para cada prestación⁸³ están sistematizados en la tabla 12.5.3.2.5.

⁸¹ Véase en el anexo 4 de este apartado el detalle de los modelos estimados para cada cartera representativa, desde la óptica del número de siniestros como desde la cuantía de los mismos.

⁸² Resolviendo la expresión $P(\xi > P + U) = \psi$ para un nivel de insolvencia del 1%.

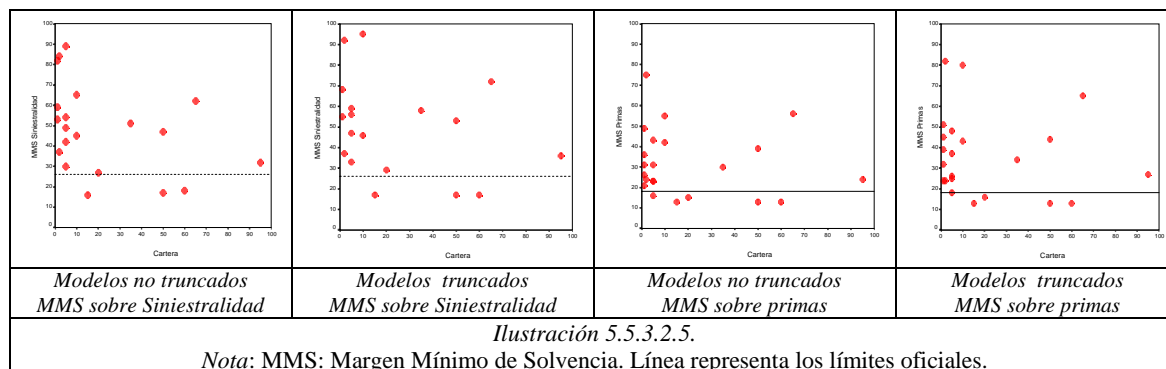
⁸³ Véase para un mayor detalle el anexo 5 de este apartado.

Tabla 12.5.3.2.5.

Prestación _i		Cartera	MMS(1)% No truncados	MMS(2)% No truncados	\bar{R}_2	MMS(1)% truncados	MMS(2)% truncados
Enfermedad (143)	*	624.8	28	20	71%	30	21
Enfermedad (47)		1	82	26	31%	103	32
Enfermedad (48)		5	42	43	103%	47	48
Enfermedad (48)		95	32	24	74%	36	27
Larga Enfermedad (54)	*	28.7	28	16	57%	30	17
Larga Enfermedad (27)		1	156	31	20%	195	39
Larga Enfermedad (27)		10	45	42	94%	46	43
Invalidez (63)	*	8.0	16	13	79%	13	10
Invalidez (31)		1	53	49	93%	55	51
Invalidez (32)		2	37	24	65%	37	24
Inter. Quirúrgica (126)	*	413.1	64	56	87%	73	64
Inter. Quirúrgica (42)		2	84	75	89%	92	82
Inter. Quirúrgica (42)		10	65	55	84%	95	80
Inter. Quirúrgica (42)		65	62	56	90%	72	65
Hospit. Quirúrgica (108)	*	110.0	24	11	48%	26	12
Hospit. Quirúrgica (36)		1	59	21	35%	68	24
Hospit. Quirúrgica (36)		5	30	16	54%	33	18
Hospit. Quirúrgica (36)		20	27	15	55%	29	16
Accidentes (81)	*	140.7	44	17	38%	44	17
Accidentes (27)		1	189	36	19%	237	45
Accidentes (27)		5	89	31	35%	107	37
Accidentes (27)		35	51	30	59%	58	34
Sepelio (72)	*	142.9	11.8	6.2	53%	12.5	6.6
Sepelio (48)		5	54	23	42%	59	25
Sepelio (24)		60	18	13	75%	17	13
Serv. Automovilistas (63)	*	212.5	46	30	65%	51	33
Serv. Automovilistas(31)		5	49	23	46%	56	26
Serv. Automovilistas(32)		50	47	39	83%	53	44
Asist. Sanitaria (78)	*	1482.4	----	----	79%	----	-----
Asist. Sanitaria (26)		15	16	13	79%	17	13
Asist. Sanitaria (26)		50	17	13	75%	17	13
Asist. Sanitaria (26)		375	----	----	83%	----	-----

Nota: La cartera de riesgo simbolizada con *, es la cartera promedio anual agregada del sector; el margen mínimo MMS(1) es sobre siniestralidad y el margen mínimo MMS(2) es sobre primas comerciales; el valor entre paréntesis que acompaña el nombre de la prestación indica el tamaño muestral de las carteras de riesgo y (----) significa simulaciones no realizadas por el alto coste computacional.

La ilustración 5.5.3.2.5. muestra las posibles relaciones entre los márgenes de solvencia obtenidos (sobre siniestralidad y sobre primas comerciales) y los tamaños de cartera de riesgo denominadas “representativas” (modelos truncados y no truncados).



Adicionalmente se ha considerado interesante comprobar si, para los modelos truncados, existen modelos teóricos de probabilidad que son más frecuentes que otros, ya sea por tipo de tamaño de carteras de riesgo asumido como por tipo de prestación. Podemos comprobar que existe un pleno dominio del modelo *Gamma* frente a los demás modelos, (véase tabla 13.5.3.2.5.). Para los modelos truncados el predominio es el modelo *Normal* con diferencia.

Tabla 13.5.3.2.5.

Frecuencia Modelos truncados

<i>Modelos Teóricos</i>	<i>Especificación</i>	<i>Tamaño cartera (p, m, g)</i>			<i>Frecuencia</i>	<i>Prestación_i</i>
<i>Erlang</i>	<i>Erlang(m, β)</i>	••	••	••	••••••	<i>Larga Enfermedad Inter. Quirúrgica; Hospit. Quirúrgica Invalidez</i>
<i>Gamma</i>	<i>Gamma(α, β)</i>	••	••••••	••••••	•••••• ••••••	<i>Enfermedad Hospit. Quirúrgica; Accidentes Sepelio; Automovilistas Asistencia Sanitaria</i>
<i>Lognormal</i>	<i>LogNorm(μ, σ)</i>	•			•	<i>Hospit. Quirúrgica</i>
<i>PearsonV</i>	<i>PearsonV(α, β)</i>		•		•	<i>Inter. Quirúrgica</i>
<i>PearsonVI</i>	<i>PearsonVI(α₁, α₂, β)</i>			•	•	<i>Enfermedad</i>
<i>ExtremeValue</i>	<i>ExtValue(a, b)</i>	••			••	<i>Larga Enfermedad; Accidentes</i>

Nota: Tamaño cartera: "p", pequeña, "m", mediana, "g", grande y *frecuencia* consiste en el número de veces que el modelo teórico es elegido con el posible generador de los datos observados

La evolución del margen mínimo de solvencia (MMS) sobre siniestralidad⁸⁴ obtenido por el método de Monte-Carlo, prestación por prestación y relacionado con la cartera de riesgo, se puede observar de forma comparada con los niveles de referencia oficiales ya comentados para las mutualidades (26% y 13%), (véase la ilustración 6.5.3.2.5.).

⁸⁴ Para las conclusiones se han utilizado los modelos no truncados ya que de media, generan un 10% menos de *margen mínimo de solvencia* (MMS) requerido que los modelos truncados, que están restringidos a valores positivos de la variable, siendo el diagnóstico para cada prestación parecido, véase en el anexo 6 las ilustraciones 1. 2. y 3. para los modelos truncados.

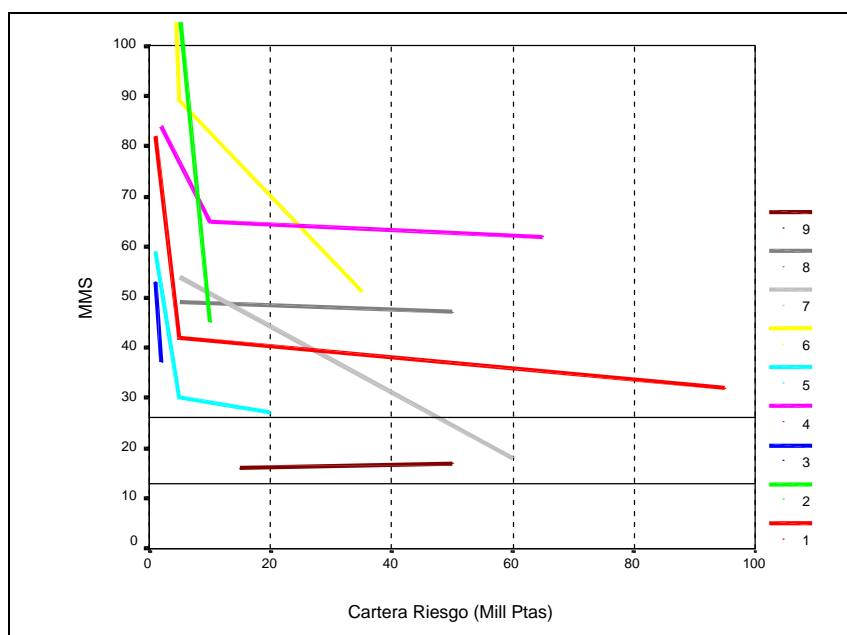


Ilustración 6.5.3.2.5.

Nota: Valor limitado del MMS sobre Siniestralidad al 100% y Modelos no truncados. Líneas horizontales representa los límites oficiales.

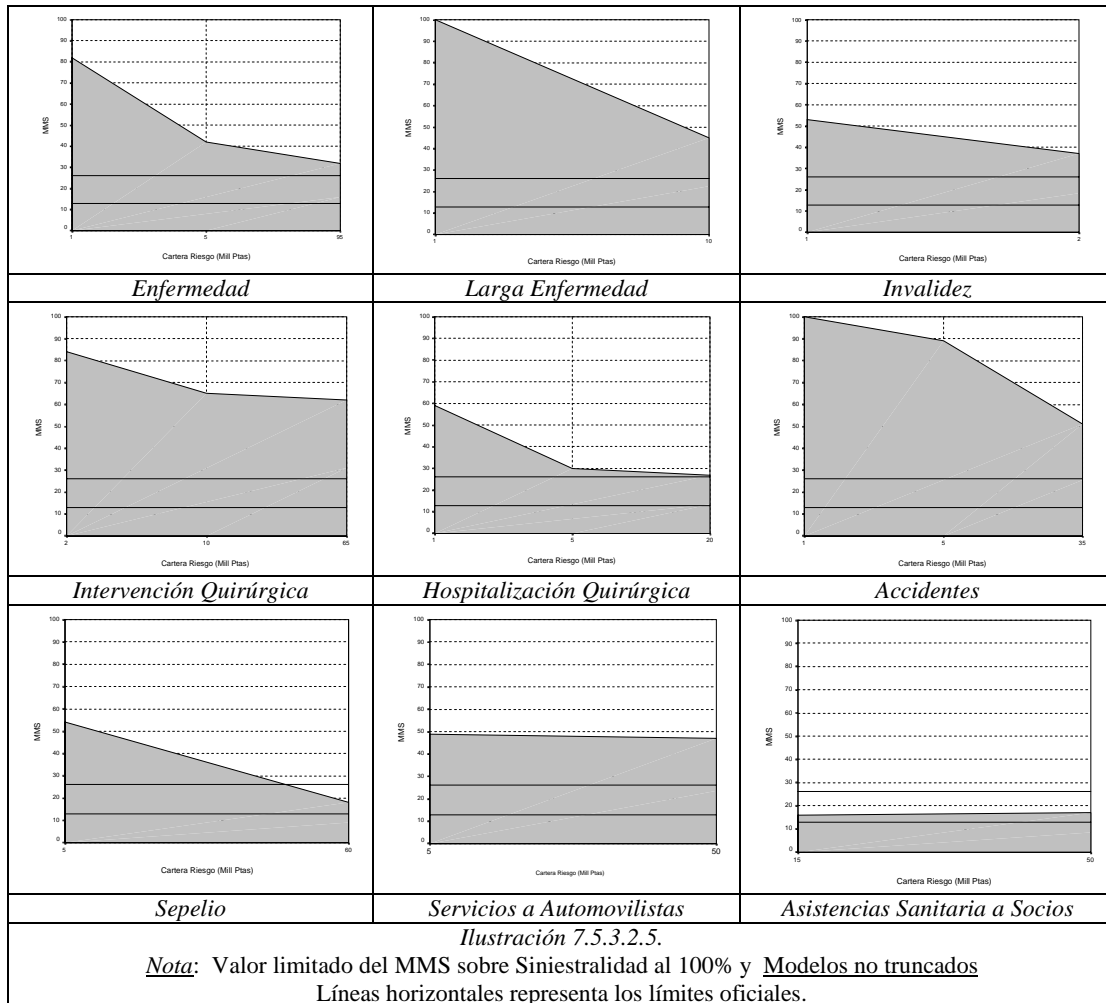
1: Enfermedad ; 2: Larga Enfermedad; 3: Invalidez; 4: Intervención Quirúrgica
5: Hospitalización Quirúrgica; 6: Accidentes; 7: Sepelio; 8: Servicio a Automovilistas;
9: Asistencia Sanitaria a Socios

Las conclusiones que se observan a raíz de los resultados obtenidos, (véase ilustración 7.5.3.2.5.), son:

1. Las prestaciones que están mejor posicionadas en términos de exigencia de margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad son: Asistencia Sanitaria a Socios, Sepelio con carteras de riesgo superiores a 50 Mill Ptas, Enfermedad con carteras de riesgo superiores a 100 Mill Ptas y Hospitalización Quirúrgica con carteras de riesgo superiores a 20 Mill Ptas.
2. Las prestaciones de Invalidez y Larga Enfermedad necesitan de un mayor volumen de cartera. Consideramos que volúmenes [10;20] Mill Ptas serían suficientes para alcanzar los niveles oficiales definidos. En el caso de Accidentes, el volumen necesario mínimo aproximado sería de 60 Mill Ptas.
3. La prestación de Intervención Quirúrgica en comparación con Hospitalización Quirúrgica, posee un coste medio por siniestro superior en un 38% y un 100% en número de siniestros. Recomendamos políticas de eficiencia para reducir el coste medio de dicha prestación.
4. La estructura de la prestación de Servicio a Automovilistas consiste en: un coste medio de 19246Ptas por siniestro y 2598 siniestros para una cartera de 50 Mill Ptas de riesgo. La recomendación en este caso es incrementar el volumen de cartera hacia niveles de

[150;200] Mill Ptas, ya que las variables estocásticas generadoras de la siniestralidad son de difícil control.

- Finalmente tres aspectos más, en primer lugar, el método de Monte-Carlo reduce en la mayoría de los casos la variabilidad relativa⁸⁵ (medida por el coeficiente de variación) aproximadamente en un 3% respecto a los resultados del modelo de Poisson. En segundo lugar, es interesante comprobar la existencia de una relación entre los márgenes mínimos y el volumen de primas de riesgos. El grado de ajuste lineal es en este caso de un 20% y la sensibilidad nos indica que por cada millón adicional de riesgo supone una reducción del 0.6% en el margen mínimo requerido sobre siniestralidad⁸⁶. En último lugar, el sector necesita incrementar la dimensión de sus carteras para alcanzar los niveles de solvencia requeridos y para ello es necesario un proceso claro de concentración empresarial.



⁸⁵ Véase anexo 7 de este apartado.

⁸⁶ Una de las razones es la posible relación no lineal entre el Margen Mínimo de Solvencia sobre siniestralidad y el volumen de riesgo asumido.

5.3.3. Análisis empírico del *ratio* de siniestralidad total (ξ/p) por tipo de prestación.

5.3.3.1. Descripción magnitudes básicas del *ratio* de siniestralidad.

Una vez obtenido el margen mínimo de solvencia a partir de la siniestralidad anual analizada, mediante la definición a priori de distribuciones básicas del comportamiento aleatorio de sus componentes (número de siniestros y cuantía de cada siniestro, véase apartado 5.3.2.5.), proponemos una forma alternativa para su cálculo a través del análisis del *ratio* de siniestralidad total⁸⁷, (ξ/p). Siendo “ ξ ”, la siniestralidad total y “ p ” las primas recaudadas.

El contenido de este apartado es el siguiente. En primer lugar, presentamos los resultados descriptivos más importantes del análisis realizado sobre el propio *ratio* de siniestralidad (apartado 5.3.3.1.). En segundo lugar, propuesta de modelos de probabilidad explicativos de su comportamiento en función del tipo de prestación (apartado 5.3.3.2.). En tercer lugar, comprobación de la importancia de las “*colas*” de las distribuciones mediante la utilización de distribuciones complementarias Log-Log y en último lugar, la obtención del margen mínimo de solvencia a través de los propios modelos de probabilidad estimados del *ratio* de siniestralidad, comparándolos con los obtenidos por el Método de Monte-Carlo.

La especificación del *ratio* de siniestralidad⁸⁸, R_2 , es,

$$R_2 = \frac{\text{Gastos Técnicos}}{\text{Ingresos Adquiridos}} = \frac{(\text{Núm de Siniestros}) \cdot (\text{Coste Medio Siniestro})}{(\text{Núm Beneficiarios (Pólizas)}) \cdot (\text{Ingresos por Beneficiarios})} = \frac{X_{ii} \cdot m}{X_{2i} \cdot r}$$

siendo, “ m ”, el coste medio por siniestro y “ r ”, el ingreso por beneficiario.

⁸⁷ Véase Wit, G.W. ; Kastelijn, W.M. (1980). **The solvency margin in non-life insurance companies**, *Astin Bulletin*, Vol, 11, pp. 136-144.

⁸⁸ En el apartado 5.1.2. se analizaron los otros tres ratios de gestión [$R_1; R_3; R_4$] desde la misma perspectiva.

Los resultados descriptivos del ratio de siniestralidad son los siguientes⁸⁹, en primer lugar, el promedio global es del 64%, es decir, existe un margen del 36% para soportar los coste directos e indirectos, en segundo lugar, la prestación Intervención Quirúrgica es la que posee el margen de maniobra más pequeño ya que su ratio promedio es un 87%, en tercer lugar, la prestación de Accidentes posee el ratio más bajo, 38%, en último lugar, los coeficientes de asimetría y curtosis indican comportamientos muy diferentes⁹⁰, (véase tabla 1.5.3.3.1.).

R2						
Tipología Prestación	N	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
Enfermedad	143	.706331	.694600	.431364	.562	1.013
Larga Enfermedad	54	.568526	.417000	.532181	.934	.061
Invalidez	63	.785192	.632800	.684705	1.186	.460
Intervención Quirúrgica	126	.874950	.864600	.330961	.865	2.663
Hospitalización Quirúrgica	108	.478455	.469150	.229758	.172	-.236
Accidentes	81	.376030	.330000	.248700	1.267	2.487
Sepelio	72	.526446	.521400	.197270	-.145	-1.237
Servicios a Automovilistas	63	.650116	.721000	.325873	-.380	-.660
Asistencia Sanitaria a Socios	90	.686661	.752150	.359413	-.328	-.091
Total	800	.642761	.629300	.410147	1.037	2.345

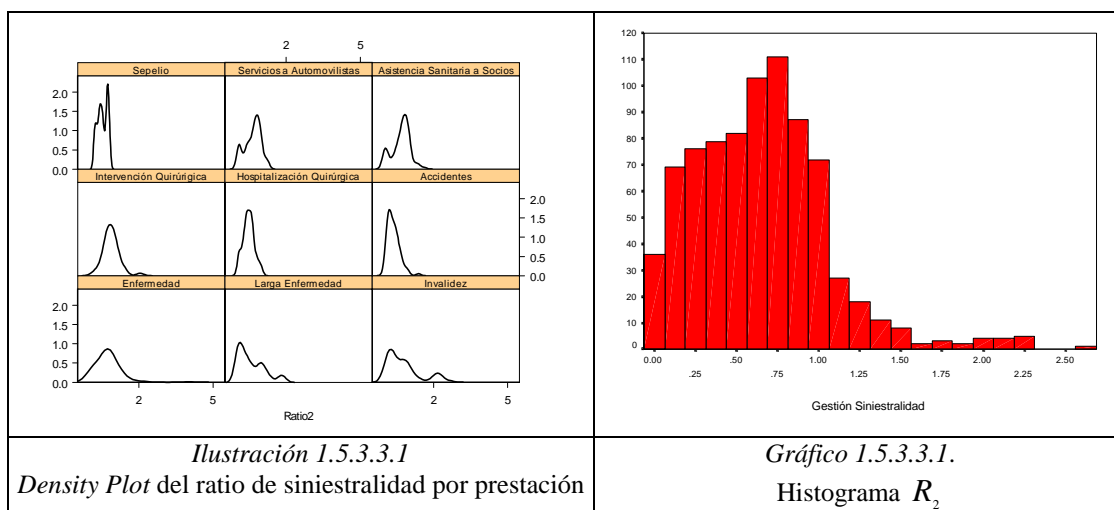
Tabla 1.5.3.3.1.
Estadísticos descriptivos del *ratio de siniestralidad* R_2

La forma del ratio de siniestralidad sin distinguir por tipo de prestación, es claramente no *Gaussiano*, (véase gráfico 1.5.3.3.), pero si además añadimos la variable “tipología de prestación”, observamos grandes diferencias de su comportamiento a través de un gráfico “*Density plot*” conjunto⁹¹, tanto en términos de las colas de las distribuciones como de los momentos de orden superior de asimetría y curtosis, (véase la ilustración 1.5.3.3.1.).

⁸⁹ En el ejercicio 1997 existe una observación anómala (4.07) para la prestación de Enfermedad que en este apartado no se ha incorporado en el análisis realizado.

⁹⁰ Las prestaciones de asimetría negativa son *Sepelio*, *Servicio a Automovilistas* y *Asistencia Sanitaria*, las restantes poseen asimetría positiva, resaltando *Accidentes*. En términos de curtosis aquellas prestaciones que poseen un comportamiento más alejado del Modelo Normal (valores diferentes a cero) son, *Accidentes* e *Intervención Quirúrgica*.

⁹¹ Permite su comparación en escala homogénea, véase el software [S-PLUS](#).

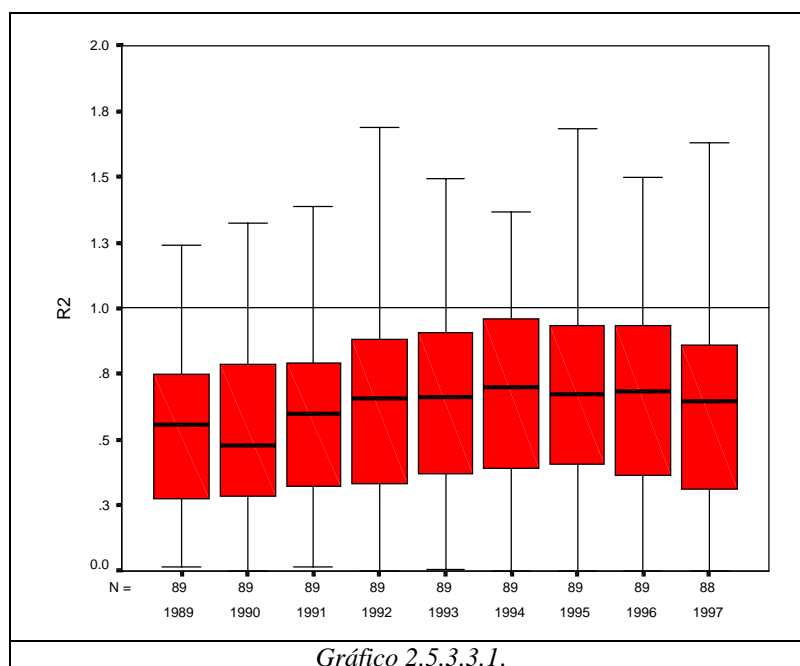


Un aspecto importante es comprobar la tendencia del ratio a lo largo de los ejercicios económicos, sin tener en cuenta la tipología de prestaciones. Así las conclusiones son las siguientes. En primer lugar, una estabilización en los últimos cuatro años alrededor del rango [70;71]% pero con una tendencia a la baja en el último. En segundo lugar, se ha producido un incremento de 11% en nueve ejercicios económicos. En tercer lugar, la asimetría es positiva todos los casos⁹² y en último lugar, la curtosis se ha mantenido constante en promedio alrededor del valor 2, (véase tabla 2.5.3.3.1.) y el diagrama de cajas, (gráfico 2.5.3.3.1.).

R2						
EjerEcon	N	Media	Mediana	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis
1989	89	.551519	.555000	.349520	.897	2.205
1990	89	.553372	.478100	.374457	1.049	2.121
1991	89	.602058	.598200	.375167	1.169	3.045
1992	89	.628596	.654700	.396385	.756	1.881
1993	89	.664284	.663400	.386169	.870	2.229
1994	89	.701371	.698400	.407145	.676	1.560
1995	89	.716002	.674600	.451952	1.237	3.395
1996	89	.704231	.684400	.482457	1.255	2.266
1997	88	.663652	.644750	.430453	.841	1.294
Total	800	.642761	.629300	.410147	1.037	2.345

Tabla 2.5.3.3.1.

⁹² Una de las posibles justificaciones es el incremento en la heterogeneidad de las prestaciones entre entidades, este aspecto influenciará tanto en la modelización probabilística como econométrica del ratio.



Existen otras características⁹³ colaterales que aunque no se utilizarán directamente en los apartados siguientes sí que añaden información sobre el perfil de la entidades estudiadas. Estas son, *objeto fundacional*⁹⁴, *radio de acción comercial*⁹⁵ y *visión territorial* a través de la situación comarcal⁹⁶ de las sedes de las propias entidades.

Las conclusiones que se han obtenido son las siguientes. Primeramente las entidades cuyo objeto fundacional es Empresa, su valor promedio es el más alto, con un 96%. En segundo lugar, desde el punto de vista del alcance de la acción comercial de la entidad, las compañías cuyo radio comercial es el comarcal tienen el ratio más elevado, un 83%. En último lugar, y según la distribución del ratio de siniestralidad en función del domicilio fiscal para cada una de las entidades, resaltamos los comportamientos aislados de las comarcas del Tarragonès [0,85;0,90] y del Alt Urgell [0,65;0,75], y la concentración del número de entidades alrededor del cinturón de la comarca del Barcelonès.

⁹³ Véase el anexo 1 de este apartado en formato ficha descriptiva para la globalidad del sector y el anexo 2 su detalle prestación por prestación.

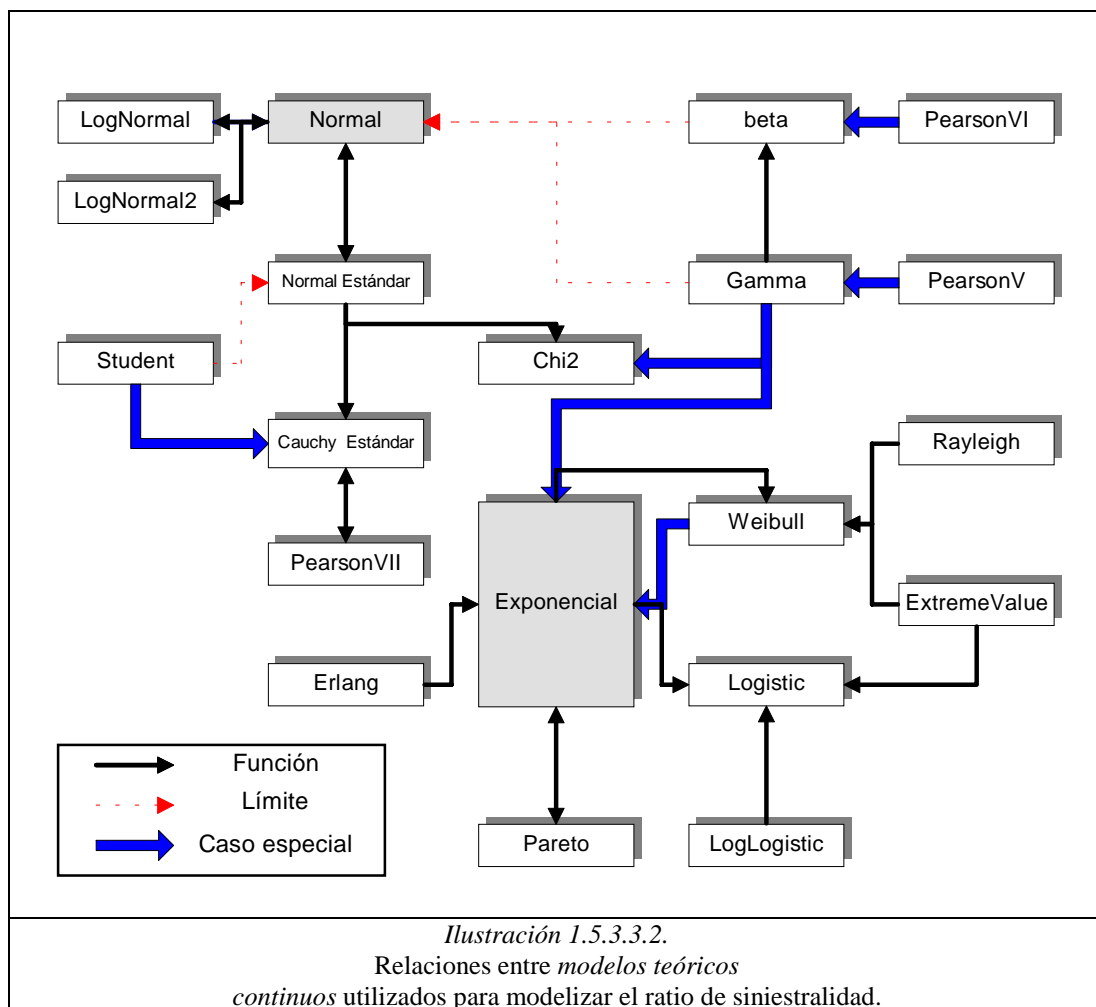
⁹⁴ La tipología fundacional posee las siguientes clases: *Abierto*, *Profesional*, *Empresa*, *Conductores* y *Gremial*.

⁹⁵ El radio comercial se divide en: *Local*, *Comarcal*, *Provincial* y *Global* (Cataluña).

⁹⁶ De la misma forma que se realizó en el apartado 4.1.3.1.1. para el número de socios y negocio neto.

5.3.3.2. Modelización probabilística del ratio de siniestralidad total⁹⁷ (ξ/P).

En este apartado nos planteamos la modelización probabilística del ratio de siniestralidad (R_2). Su detección precisa de dos aspectos, de la definición formal de modelos de probabilidad, en este caso continuos, candidatos a explicar su comportamiento y de la especificación de técnicas no paramétricas que permitan su detección⁹⁸, prestación por prestación.



⁹⁷ Se ha utilizado el software [@Risk](#), el cual incorpora en sus rutinas tres *contrastes no paramétricos*, χ^2 , Kolgomorov-Smirnov (K-S) y Test Anderson-Darling (A-D) donde los parámetros son estimados por máxima verosimilitud (MV). En nuestro caso se han utilizado conjuntamente los dos últimos por su mayor estabilidad.

⁹⁸ Véase apartado 1.5.2 y Winston, W. L. (1996). **Simulation Modeling Using @Risk**, ITP.

Los modelos teóricos propuestos como posibles generadores de los datos están descritos, en primer lugar, en la ilustración 1.5.3.3.2. según la relación que mantienen entre ellos y en segundo lugar, a través de las expresiones formales más representativas para cada modelo, es decir, su *función de densidad*, el *dominio variable*, el *dominio parámetros* y el número de *parámetros* que debe estimarse, (véase tabla 1.5.3.3.2.).

Tabla 1.5.3.3.2.

Modelos Teóricos	Función Densidad	Dominio Variable	Dominio Parámetros	Expresión
<i>Normal</i>	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$-\infty < x < \infty$	$\sigma > 0$	<i>Normal</i> (μ, σ)
<i>Chi2</i>	$f(x) = \frac{x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$	$x \geq 0$	$v > 0$ y Entero	<i>Chisq</i> (v)
<i>Student</i>	$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left[1 + \left(\frac{x^2}{v}\right)\right]^{\frac{(v+1)}{2}}}$	$x > 0$	$v > 0$ y Entero	<i>Student</i> (v)
<i>Exponencial</i>	$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}$	$x \geq 0$	$\beta > 0$	<i>Expon</i> (β)
<i>Erlang</i>	$f(x) = \frac{\beta^{-m} x^{m-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(m)}$	$x \geq 0$	$m > 0$ y Entero $\beta > 0$	<i>Erlang</i> (m, β)
<i>Gamma</i>	$f(x) = \frac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)}$	$x \geq 0$	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	<i>Gamma</i> (α, β)
<i>Logistic</i>	$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}}{\beta \left(1 + e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\right)^2}$	$-\infty < x < \infty$	$\beta > 0$	<i>Logistic</i> (α, β)
<i>LogLogistic</i>	$f(x) = \frac{\alpha \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left[1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right]^2}$	$x > \gamma$	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	<i>LogLogistic</i> (γ, β, α)
<i>Lognormal</i>	$f(x) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\mu_1 = \ln\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2 + \mu^2}\right)$ $\sigma_1 = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2}\right)}$	$x > 0$	$\sigma > 0$ $\mu > 0$	<i>LogNorm</i> (μ, σ)
<i>Lognormal2</i>	$f(x) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x > 0$	$\sigma > 0$	<i>LogNorm2</i> (μ, σ)
<i>Pareto</i>	$f(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}$	$a \leq x$	$\theta > 0$ $a > 0$	<i>Pareto</i> (θ, a)

<i>PearsonV</i> ó <i>Gamma Invertida</i>	$f(x) = \frac{x^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}$	$x > 0$	$\alpha > 0 \beta > 0$	<i>PearsonV</i> (α, β)
<i>PearsonVI</i>	$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha_1-1}}{\beta B(\alpha_1, \alpha_2) \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}$ $B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1}$	$x \geq 0$	$\alpha_1 > 0$ $\alpha_2 > 0$ $\beta > 0$	<i>PearsonVI</i> ($\alpha_1, \alpha_2, \beta$)
<i>Beta</i>	$f(x) = \frac{x^{\alpha_1-1} (1+x)^{-\alpha_2-1}}{B(\alpha_1, \alpha_2)}$ $B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1}$	$0 \leq x \leq 1$	$\alpha_1 > 0$ $\alpha_2 > 0$	<i>Beta</i> (α_1, α_2)
<i>Weibull</i>	$f(x) = \alpha \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$	$x > 0$	$\alpha > 0 \beta > 0$	<i>Weibull</i> (α, β)
<i>Extreme Value o Gumbel distribution</i>	$f(x) = \left(\frac{1}{b}\right) e^{\left[\frac{-x-a}{b}\right]} - e^{\left[\frac{-x-a}{b}\right]}$	$-\infty < x < \infty$	$0 < b < \infty$ $-\infty < a < \infty$	<i>ExtValue</i> (a, b)
<i>Rayleigh</i>	$f(x) = \frac{x}{b^2} e^{\left[\frac{-x^2}{2b^2}\right]}$	$x > 0$	$b > 0$	<i>Rayleigh</i> (b)

A modo de ejemplo, el proceso de detección del modelo más acertado se ha realizado, en primer lugar, para la prestación de *Enfermedad*⁹⁹, escogiendo de entre los modelos teóricos anteriores el mejor de ellos. En este caso es la *Distribución de Rayleigh*, que posee varias características, la primera de ellas es que solo posee un parámetro¹⁰⁰, siendo su valor, *Rayleigh*(0.63) y la segunda es que puede derivarse de un modelo *Weibull*.

La decisión de su elección descansa en el planteamiento de los contrastes no paramétricos. Así el modelo *Rayleigh* es el modelo, de entre los que aceptan la hipótesis nula, que posee mayor significación en los contrastes utilizados, Kolmogorov-Smirnov (K-S) y Anderson-Darling (A-D). El valor del estadístico Kolmogorov-Smirnov es $D_n = 0.131021$, donde la probabilidad de rechazo de la hipótesis nula (véase tabla 2.5.3.3.2.), si ésta es cierta es de 1%,

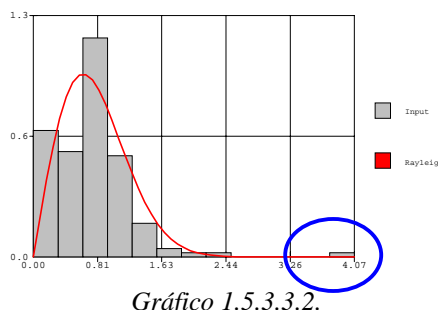
$$P(D_n \geq K/H_o) = 0.01.$$

⁹⁹ Se ha escogido esta prestación por tener un valor claramente atípico, véase el gráfico 1.5.3.3.2. Para más información de las otras prestaciones véase anexo 1 de este apartado.

¹⁰⁰ Éste parámetro se ha estimado por máxima verosimilitud, utilizando toda la muestra disponible ($n=144$).

Tabla 2.5.3.3.2.

Modelo Estimado		Estadísticos Teóricos	Estadísticos Empíricos
Rayleigh(b)	n	144	144
↓	μ	0.789695	0.729697
Rayleigh(0.63)	m_o	0.630085	0.782865
	m_e	0.741869	0.694600
	$\sigma_{(\xi/p)}$	0.412792	0.513213
$D_n = 0.131021$	γ_1	0.631111	3.049947
$P(D_n \geq K/H_n) = 0.01$	γ_2	3.245089	14.348918
	C_1	0.477937	0.4188
	C_2	0.741869	0.6946
	C_3	1.049161	0.9398



Nota: n : tamaño muestra; μ : promedio; m_o : moda; m_e : mediana; $\sigma_{(\xi/p)}$: desviación típica; γ_1 : asimetría; γ_2 : curtosis; C_1 : primer cuartil (25%); C_2 : segundo cuartil (50%); C_3 : tercer cuartil (75%); $[D_n; A_n^2]$ son respectivamente los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling, junto con la probabilidad de aceptación de la Hipótesis nula.

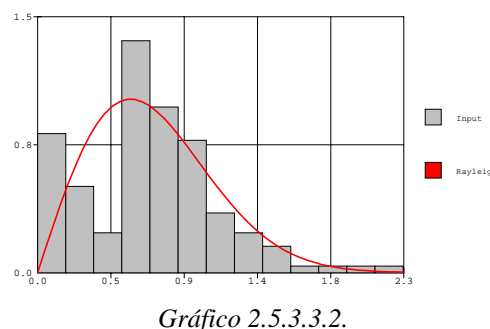
La comparación entre los estadísticos descriptivos empíricos y los teóricos facilitados por el modelo estimado (véase tabla 2.5.3.3.2.), permite detallar unas conclusiones iniciales. En primer lugar, la probabilidad de que una entidad supere el valor unitario¹⁰¹ del ratio de siniestralidad, cuyo valor es en este caso, $P((\xi/p) \leq 1) = 76,84\%$, nos indica que existe aproximadamente un 23% de entidades de previsión que superan dicho valor umbral. En segundo lugar, podemos comprobar la poca representatividad del modelo para los momentos estadísticos de orden superior, es decir, para el coeficiente de asimetría y curtosis¹⁰². En último lugar, la presencia de una observación atípica nos obliga a comprobar la sensibilidad del modelo obtenido frente a ella. Repetido el proceso de selección obtenemos el mismo modelo de probabilidad pero con parámetro más reducido, 0.58, (véase tabla 3.5.3.3.2. y gráfico 1.5.3.3.2.).

¹⁰¹ Dicho valor nos define el caso donde la siniestralidad absorbe la totalidad de los ingresos percibidos por conceptos de primas comerciales.

¹⁰² Este aspecto se comprobará al final de este apartado mediante los diagramas $(\gamma_2 - \gamma_1)$, utilizados en el apartado 5.2.2. para los restantes ratios de gestión e introducidos por Lau, H-S.; Lau, A. H-L. y Gribbin, D.W. (1995). **On Modeling Cross Sectorial Distributions of Financial Ratios**, *Journal of Business Finance & Accounting*, 22 (4), pp. 521-549.

Tabla 3.5.3.3.2.

Modelo Estimado		Estadísticos Teóricos	Estadísticos Empíricos
Rayleigh(b)	n	143	143
↓	μ	0.732775	0.706331
Rayleigh(0.58)	m_o	0.58467	0.617885
	m_e	0.688396	0.6946
	$\sigma_{(\xi/p)}$	0.383039	0.431364
	γ_1	0.631111	0.782021
	γ_2	3.245089	3.8814
$D_n = 0.121546$	C_1	0.443488	0.411975
$P(D_n \geq K/H_n) = 0.025$	C_2	0.688396	0.69355
	C_3	0.973539	0.9392



Nota: n : tamaño muestra; μ : promedio; m_o : moda; m_e : mediana; $\sigma_{(\xi/p)}$: desviación típica; γ_1 : asimetría; γ_2 : curtosis; C_1 : primer cuartil (25%); C_2 : segundo cuartil (50%); C_3 : tercer cuartil (75%); $[D_n; A_n^2]$ son respectivamente los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling, junto con la probabilidad de aceptación de la Hipótesis nula.

Una de las posibles aplicaciones de los modelos detectados es el cálculo del margen mínimo de solvencia (MMS) a partir del modelo de ratio de siniestralidad¹⁰³, donde su cálculo se obtiene a partir de la expresión siguiente, $P(\xi \leq X)$, siendo “ ξ ” la siniestralidad total anual. Adicionalmente la expresión anterior es equivalente a, $P(\xi/P > X/P) = \psi$, donde “ P ” son las primas comerciales. Si consideramos que para el caso de Enfermedad el 71% (promedio empírico sin la observación anómala) de las primas comerciales se utilizan para atender la siniestralidad, entonces el margen mínimo de solvencia(u) debe cumplir la siguiente expresión,

$$u = X - 0.71P$$

$$\Downarrow$$

$$u/P = X/P - 0.71$$

y su cálculo se obtiene a partir de resolver¹⁰⁴, $P(\xi/P > 1.77) = 0.01$. En este caso el margen obtenido es de 106% sobre primas comerciales, lógicamente la posible variabilidad del propio ratio puede influenciar sobre su valor. Una posible solución al problema anterior es realizar un proceso de normalización de los datos y ajustarlos posteriormente a un modelo beta, (véase Latorre (1992)).

¹⁰³ El objetivo es comprobar la diferencia de resultados con los obtenidos en el apartado 5.3.2.5 por el Método de Monte-Carlo.

¹⁰⁴ Probabilidad de insolvencia admitida, ψ (1%).

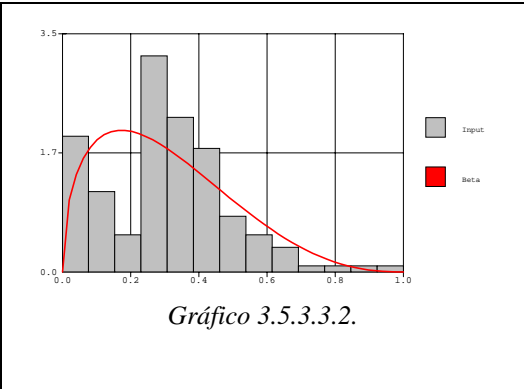
Este proceso de reducción de la variabilidad del ratio puede realizarse de varias formas, una de ellas es dividir toda la muestra por un valor “ k ” que puede ser dos o tres veces el promedio, pero consideramos los resultados inestables. Otra forma de realizarlo es normalizar los datos mediante el mismo proceso que se utiliza para los *inputs* de un modelo neuronal¹⁰⁵, es decir, adecuando el rango [0;1] a través de la expresión,

$$x_{j(Nor)} = \frac{(x_j - x_{j(Min)})}{(x_{j(Max)} - x_{j(Min)})}$$

Los resultados obtenidos del modelo *beta*¹⁰⁶ estimado, permite de forma alternativa, el cálculo del *margen mínimo*¹⁰⁷ sobre primas comerciales (P). En este caso su valor es 111%, un 5% menos que el modelo *Rayleigh* con datos sin transformar, (véase tabla 4.5.3.3.2.).

Tabla 4.5.3.3.2

Modelo Estimado		Estadísticos Teóricos
$Beta(\alpha_1, \alpha_2)$	n	143
\downarrow	μ	0.305629
$Beta(1.51; 3.43)$	m_o	0.173323
	m_e	0.277843
	$\sigma_{(\xi/P)}$	0.189045
	γ_1	0.59276
	γ_2	3.555572
	C_1	0.153897
	C_2	0.277843
	C_3	0.431612



Nota: n : tamaño muestra; μ : promedio; m_o : moda; m_e : mediana; $\sigma_{(\xi/P)}$: desviación típica; γ_1 : asimetría; γ_2 : curtosis; C_1 : primer cuartil (25%); C_2 : segundo cuartil (50%); C_3 : tercer cuartil (75%).

Para las restantes prestaciones se ha realizado el mismo proceso. En primer lugar, se ha comprobado qué modelo de probabilidad se ajusta mejor a los datos sin transformar y en segundo lugar, se ha estimado los modelos betas más adecuados con los datos normalizados¹⁰⁸, (véase tabla 5.5.3.3.2.).

¹⁰⁵ Véase Wang, S. (1996). **Theory and Methodology. Nonparametric econometric modelling. A neural network approach**, *European Journal of Operational Research*, 89, pp. 581-592.

¹⁰⁶ Los tests paramétricos rechazan, en este caso, la hipótesis nula, tanto para el test de *Kolmogorov-Smirnov* como para *Anderson-Darling*.

¹⁰⁷ Para su cálculo se ha obtenido el valor original, “ x_j ”, a partir de la relación de normalización utilizada.

¹⁰⁸ El cálculo del margen mínimo de solvencia para las restantes prestaciones se presentará en el apartado 5.3.3.4., donde se compararan las dos metodologías, el método de Monte-Carlo junto con el método del ratio de siniestralidad.

Tabla 5.5.3.3.2.

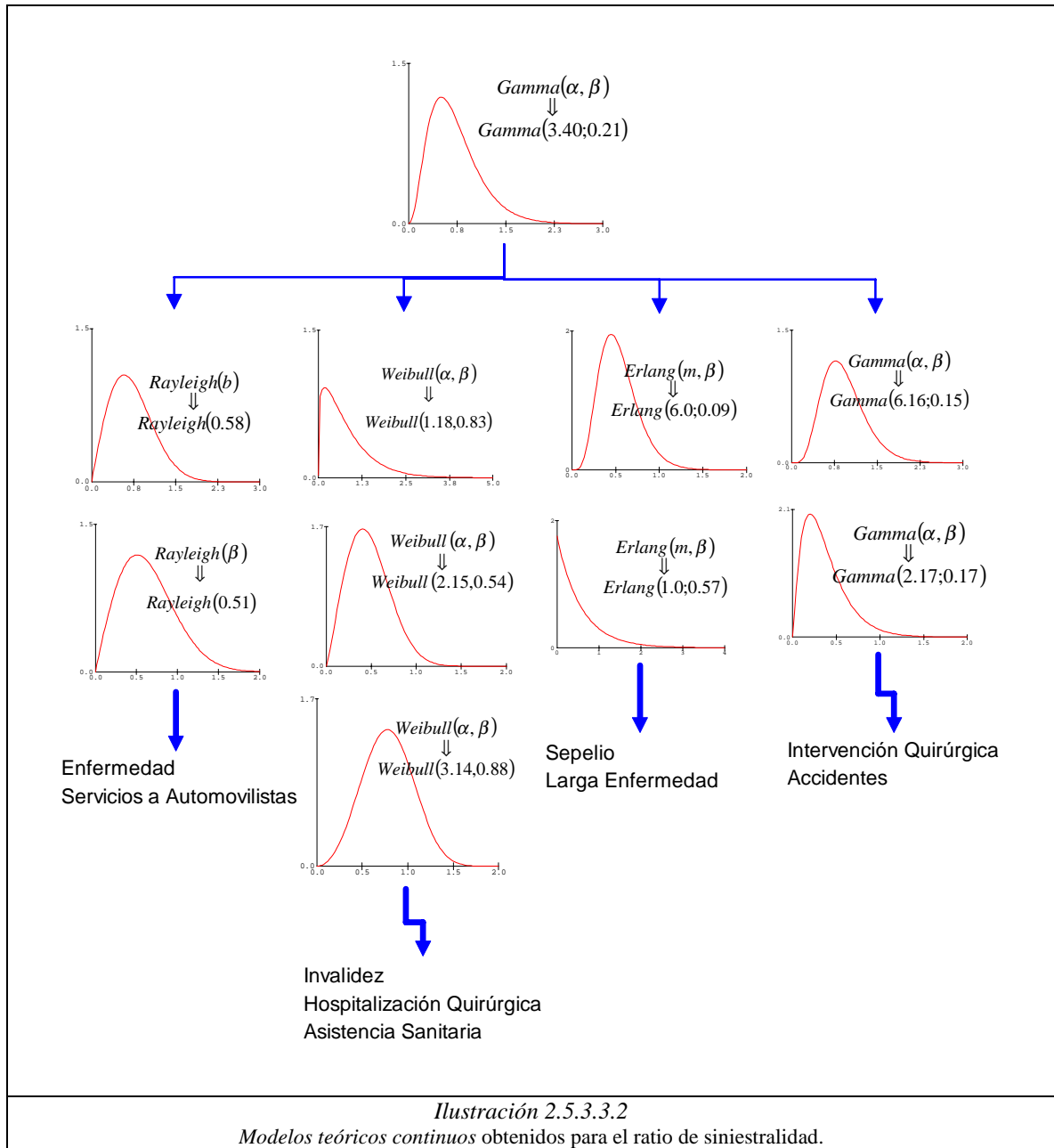
Prestación _i	<i>n</i>	Valores no Normalizados $x > 0$	\bar{R}_2	Modelo Beta ajustado [0;1]
<i>Enfermedad</i>	143	<i>Rayleigh</i> (0.58)	$\bar{R}_2 = 71\%$	<i>Beta</i> (1.51;3.43)
<i>Larga Enfermedad</i>	54	<i>Erlang</i> (1.0;0.57)	$\bar{R}_2 = 57\%$	<i>Beta</i> (0.50;1.19)
<i>Invalidez</i>	63	<i>Weibull</i> (1.18;0.83)	$\bar{R}_2 = 79\%$	<i>Beta</i> (0.47;1.27)
<i>Inter. Quirúrgica</i>	126	<i>Gamma</i> (6.16;0.15)	$\bar{R}_2 = 87\%$	<i>Beta</i> (3.17;5.09)
<i>Hospit. Quirúrgica</i>	108	<i>Weibull</i> (2.15;0.54)	$\bar{R}_2 = 48\%$	<i>Beta</i> (1.80;2.26)
<i>Accidentes</i>	81	<i>Gamma</i> (2.17;0.17)	$\bar{R}_2 = 38\%$	<i>Beta</i> (1.32;3.66)
<i>Sepelio</i>	72	<i>Erlang</i> (6.0;0.09)	$\bar{R}_2 = 53\%$	<i>Beta</i> (0.97;0.83)
<i>Serv. Automovilistas</i>	63	<i>Rayleigh</i> (0.51)	$\bar{R}_2 = 65\%$	<i>Beta</i> (1.42;1.34)
<i>Asist. Sanitaria</i>	78	<i>Weibull</i> (3.14;0.88)	$\bar{R}_2 = 79\%$	<i>Beta</i> (2.87;3.69)
Total	788	<i>Gamma</i> (3.40;0.21)	$\bar{R}_2 = 65\%$	<i>Beta</i> (1.69;5.18)

Nota: \bar{R}_2 es el promedio del ratio de siniestralidad, *n* : número de observaciones.

Los modelos de probabilidad estimados más frecuentes para las restantes prestaciones son, en primer lugar, modelos vinculados a la familia de la exponencial, *Rayleigh*, *Weibull*, *Erlang* y en un segundo lugar, un modelo muy utilizado en el campo actuarial, el modelo *Gamma*. Como podemos observar, en su mayoría son modelos de dos parámetros. En la detección de los modelos anteriores, se han realizado los siguientes filtros para facilitar su coherencia, primeramente, de la prestación de *Enfermedad* se ha excluido la observación atípica ya comentada y además, se ha desestimado aquellos ratios menores de 0.12 para la prestación de *Asistencia Sanitaria*¹⁰⁹. El modelo más representativo del sector¹¹⁰ es un modelo Gamma para datos sin transformar, junto con el modelo beta, sin discernir entre prestaciones. Una posible aplicación de los resultados obtenidos es la generación de un “árbol” probabilístico por tipo de prestación, es decir, las prestaciones de *Enfermedad* y *Servicios a Automovilistas* están asociadas al modelo Rayleigh, las prestaciones *Invalidez*, *Hospitalización Quirúrgica* y *Asistencia Sanitaria* al modelo Weibull, *Sepelio* y *Larga Enfermedad* asociados a un modelo Erlang y las prestaciones de *Intervención Quirúrgica* y *Accidentes* un modelo Gamma, (véase ilustración 2.5.3.3.2.).

¹⁰⁹ Consideramos que valores tan pequeños son poco verosímiles, 12 observaciones en total. La reducción de la muestra nos ha facilitado la detección del modelo de probabilidad más idóneo en términos de ajuste.

¹¹⁰ Para la totalidad del sector, 788 observaciones, no se ha encontrado ningún modelo teórico, a través de los contrastes no paramétricos ya definidos, aceptable estadísticamente. El modelo Gamma es el que se aproxima más a la aceptación de la hipótesis nula. Una posible línea de investigación sería el planteamiento de modelos “truncados”, es decir, especificación de un modelo hasta un valor y a partir de ahí otro modelo.



Existen dos aspectos que debemos tener presentes para la utilización con garantías de los modelos de probabilidad estimados. En primer lugar, el grado de representatividad de los modelos respecto a los momentos de orden superior, es decir, asimetría y curtosis. En segundo lugar, la posible influencia de la presencia de “colas” en las distribuciones que impidan en algunos casos el valor finito de los momentos. El primero de los aspectos se detalla a continuación y el segundo se desarrolla en el apartado 5.3.3.3. mediante una de las posibles formas: las Distribuciones Complementarias Log-Log.

Para comprobar el comportamiento de los modelos estimados frente a los momentos de orden superior, se han utilizado las mismas herramientas gráficas que para los otros ratios de gestión $[R_1; R_3; R_4]$. Así las ilustraciones 3.5.3.3.2. y 4.5.3.3.2. muestran la relación ente el coeficiente de *asimetría* (γ_1) y de *curtosis* (γ_2) con los datos de la muestra observada.

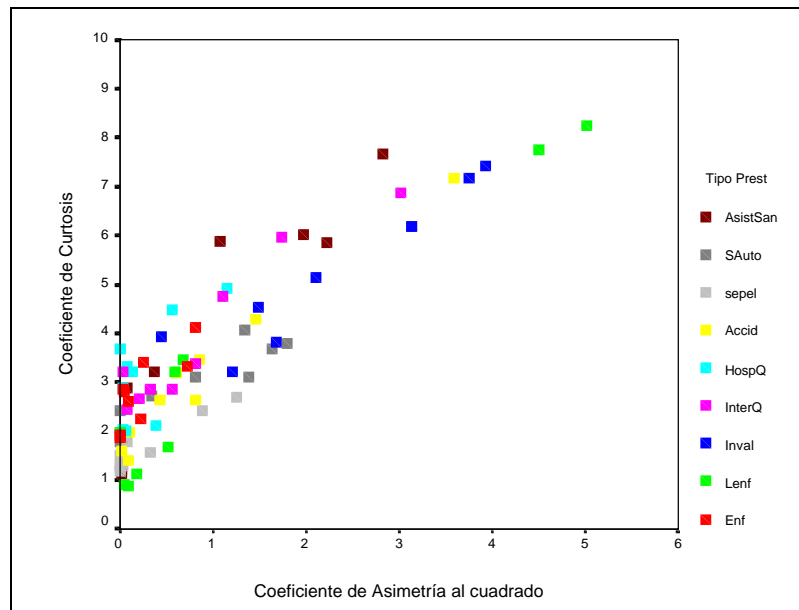


Ilustración 3.5.3.3.2.
Diagrama $(\gamma_1^2 - \gamma_2)$ del sector

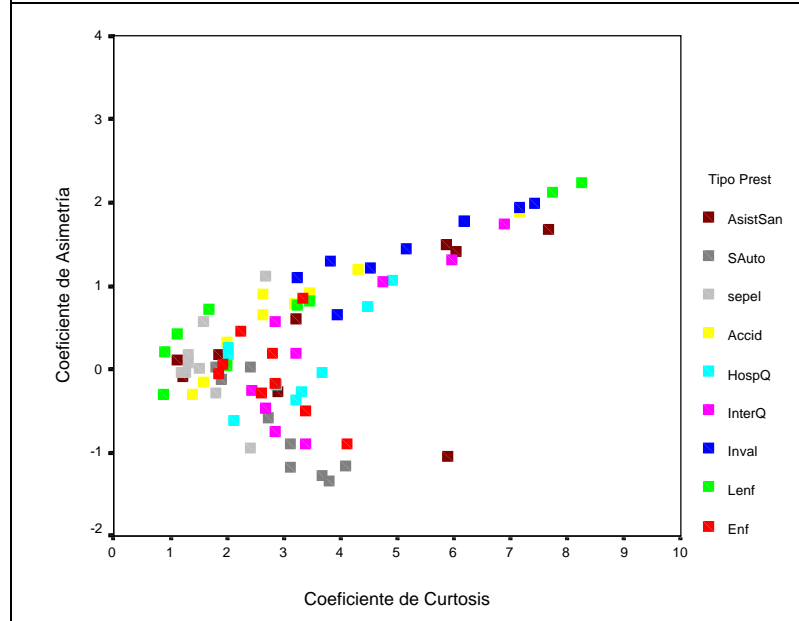
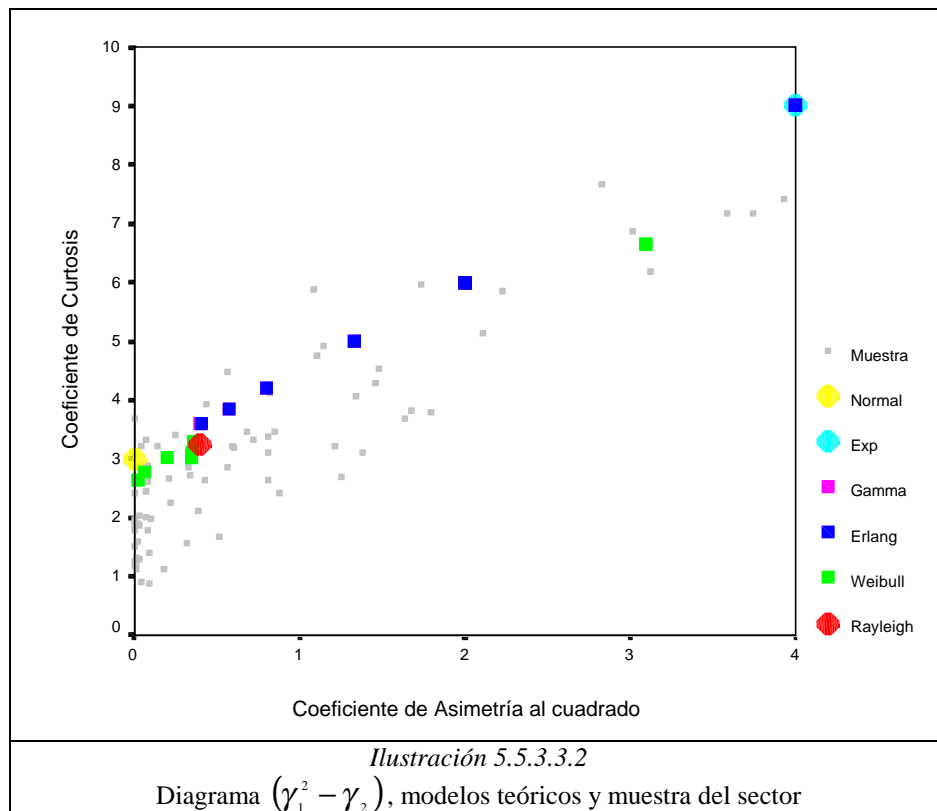


Ilustración 4.5.3.3.2.
Diagrama $(\gamma_1 - \gamma_2)$ del sector

De todos modos nuestro objetivo es comprobar la presumible “versatilidad” de los modelos de probabilidad obtenidos¹¹¹ para capturar la verdadera dimensión de los datos representada por sus momentos principales. Una forma de contrastar dicho aspecto es solapar en la propia herramienta gráfica, diagramas $(\gamma_1^2 - \gamma_2)$ y $(\gamma_1 - \gamma_2)$, los momentos generados por los modelos y los realmente observados, (véase ilustraciones 5.5.3.3.2. y 6.5.3.3.2.).

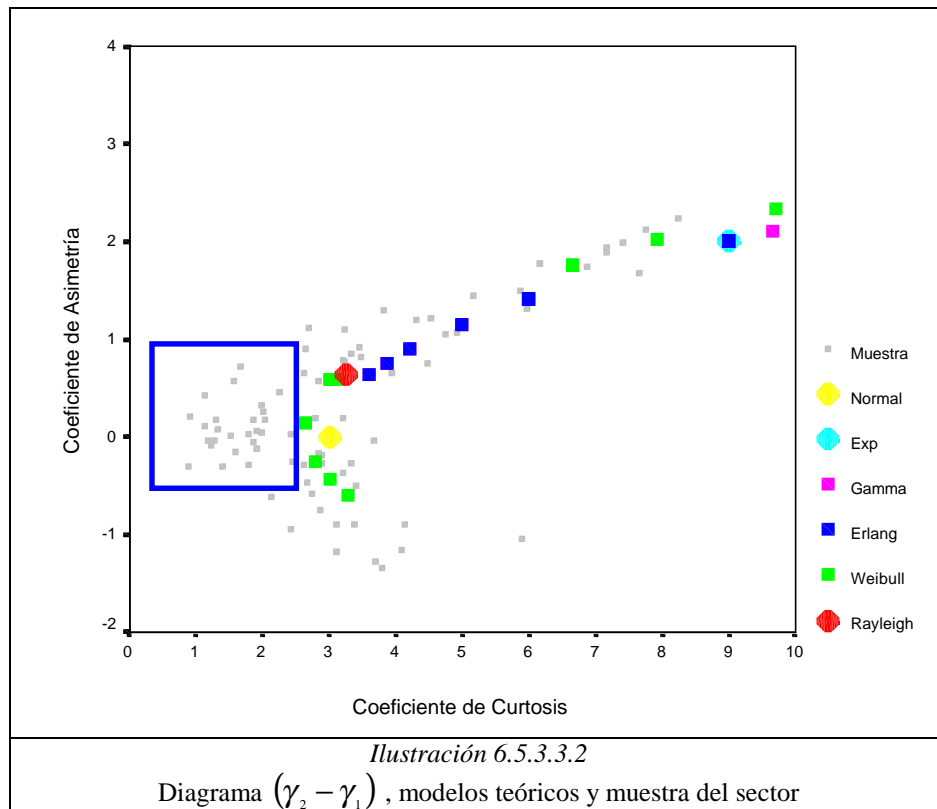


Observamos como se generan, para distintos valores de los modelos, “fronteras” que dividen el espacio del diagrama $(\gamma_1^2 - \gamma_2)$. En este caso son, las líneas *Gamma*, *Weibull* y *Erlang*, así como los puntos, *Rayleigh*, *Normal* y *Exponencial*¹¹². A la vista de los resultados gráficos podemos plantearnos la duda de si para algunas prestaciones los modelos de probabilidad teóricos obtenidos son representativos de los datos observados, dicho aspecto se resolverá en el apartado 5.3.3.3.

¹¹¹ Una de las posibles líneas de investigación es detectar qué modelos neuronales pueden llegar a representar los modelos de probabilidad teóricos estimados, véase Hurrion, R. D. (1993). **Representing and Learning Distributions with the Aid of a Neural Network**, *J.Opl.Res.Soc.*, Vol. 44, No. 10, pp. 1013-1023.

¹¹² En el anexo 2 de este apartado se ha realizado el mismo proceso pero distinguiendo por tipo de prestación.

Adicionalmente el diagrama $(\gamma_1 - \gamma_2)$ muestra como existen áreas, dentro de la parábola que se configura, donde los modelos teóricos estimados no tienen acceso, es especial en la zona del rango de curtosis [1;2].



Dos son las posibles causas de esta falta de representatividad, la utilización de modelos de probabilidad poco adaptables, es decir, con un número pequeño de parámetros (en nuestro caso se ha utilizado modelos de hasta tres parámetros¹¹³), y la presencia de “colas” largas o de mucho “tamaño” en las distribuciones, que impiden la presencia de momentos finitos, (véase apartado 5.3.3.3.).

¹¹³ Recordamos que existen modelos que poseen cuatro parámetros, como por ejemplo, el modelo Pareto-Estable (SP).

5.3.3.3. Distribuciones complementarias Log-Log: estimación del exponente característico (α -estable $S_\alpha(\beta, \mu, c)$).

Tal y como se ha comentado, una de las posibles causas de la poca representatividad de los modelos de probabilidad estimados en el apartado 5.3.3.2. es la presencia de “colas” importantes en las distribuciones empíricas¹¹⁴. En algunos casos su presencia puede impedir la generación de momentos finitos, como por ejemplo, media y varianza (y sus derivados, asimetría y curtosis), que permiten contrastar el grado de fiabilidad que debemos otorgar a los modelos de probabilidad estimados. Por lo tanto, el proceso descansa en la estimación del peso o tamaño de las colas de las distribuciones, en donde dicha estimación es clave para determinar el grado de representación de los momentos obtenidos. En este apartado proponemos la metodología basada en las *distribuciones complementarias log-log*¹¹⁵ (LLCD), cuya expresión es,

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P[X > x]$$

donde el peso o importancia de las colas de las distribuciones cumple la siguiente propiedad,

$$\frac{d \log \bar{F}(x)}{d \log x} = -\alpha \quad x > \theta$$

En la práctica se estima el parámetro, “ α ”, por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para el siguiente modelo de regresión¹¹⁶,

$$\log \bar{F}(x) = \gamma + \alpha \log x$$

La definición del parámetro “ α ” nos permite introducir un modelo de probabilidad alternativo a los considerados, el modelo *Pareto Estable*¹¹⁷, $S_\alpha(\beta, \mu, c)$ con cuatro parámetros, permitiendo una mayor flexibilidad, (comentado en el apartado 5.3.3.2.).

¹¹⁴ En la actualidad existe una importante corriente científica en el diseño de mecanismos para predecir el tamaño de los eventos extraños, fruto de este esfuerzo esta la Teoría del Valor Extremo (TVE), muy relacionada a las distribuciones complementarias log-log utilizadas en este apartado. Véase Embrechts, P. (2000). **Extremes and Integrated Risk Management**, Risk Books, UBS Warburg.

¹¹⁵ Véase Crovella, M.E. y Bestavros, A. (1995). **Explaining World Wide Web Traffic Self-Similarity**. *Technical Report TR-95-015*. (LLCD significa *Log-Log Complementary Distributions*)

¹¹⁶ El tamaño muestral de estimación se decide a partir del gráfico log-log plot. Es decir, los datos seleccionados para el modelo son escogidos a partir donde empieza a curvarse el propio gráfico log-log. Esa área nos indica el punto donde empieza a existir muy poca probabilidad de ocurrencia de “ x ”. De todas formas existen otros métodos para estimar dicho parámetro, véase Höpfner, R.; Rüschendorf, L. (1999). **Comparison of Estimators in Stable Models**, *Mathematical and Computer Modelling*, 29, pp. 145-160.

¹¹⁷ Los trabajos pioneros de Mandelbrot (1963) y de Fama (1965) utilizan dicho modelo para modelizar rentabilidades. Referenciado en Mittnik, S.; Paoella, M. S. (1999). **A Simple Estimator for the Characteristic Exponent of the Stable Paretian Distribution**, *Mathematical and Computer Modelling*, 29, pp. 161-176.

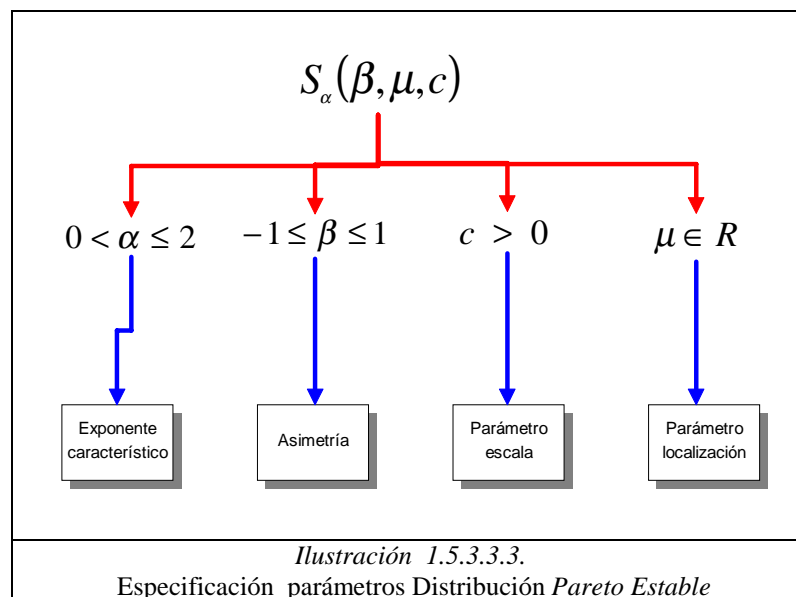
El modelo Pareto-Estable posee en el campo de las finanzas muchas aportaciones de importancia¹¹⁸. Su función característica es,

$$\varphi(x, \alpha, \beta, c, \mu) = \exp \left\{ i\mu x - |cx|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{x}{|x|} \omega(|x|, \alpha) \right] \right\}$$

siendo, “ α ”, el exponente característico (que captura el peso de la cola de la distribución), “ β ”, el parámetro que mide la asimetría, “ c ”, el parámetro escala, “ μ ”, el parámetro de localización, $i = \sqrt{-1}$ y finalmente $\omega(|x|, \alpha)$ es,

$$\omega(|x|, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi \alpha}{2} & \forall \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log|x| & \forall \alpha = 1 \end{cases}$$

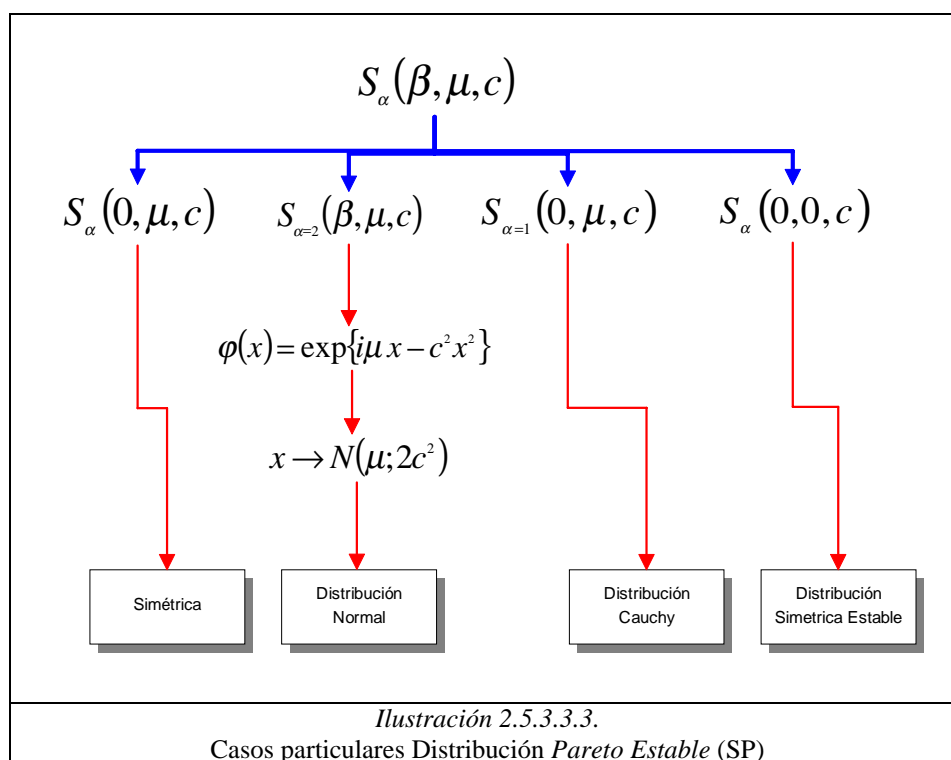
(véase la ilustración 1.5.3.3.3.),



¹¹⁸ Véase Lau, A.H-L; Lau, H-S; Wingender, J. R. (1990). **The Distribution of Stock Returns: New Evidence Against the Stable Model**, *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 8. No. 2, pp. 217-223; Fofack, H.; Nolas, J.P. (2000). **Distribution of parallel exchange rates in African countries**, *Journal of International Money and Finance*, 20, pp. 987-1001; Dostoglou, S.A.; Rachev, S.T. (1999). **Stable Distributions and the Term Structure of Interest rates**, *Mathematical and Computer Modelling*, 29, pp. 57-60; Lau, H-S.; Gribbin, D.W.; Harris, R. (1992). **How Prevalent are Stable-Paretian Distributed Financial Variables**, *Decision Sciences*, Vol. 23.(5), pp. 1240-1250 y Borrell, M.; Murillo, F.; Pérez Rodríguez, J., Torra Porras, S. (1997). **Estadística Financiera. Aplicación a la formación y gestión de carteras de renta variable**, pp. 134-135, Ceura, Madrid.

Así el valor estimado¹¹⁹ de “ α ”, es indicativo de varios casos particulares, si $1 < \alpha$ la media es finita, en cambio si $\alpha \leq 1$, será infinita y por lo tanto no existirá. Respecto a los momentos de segundo orden y superiores, la varianza será siempre infinita si se cumple que, $\alpha < 2$.

Una de las ventajas de la especificación del modelo Pareto-Estable o “ α -estable” es su carácter general ya que engloba casos particulares importantes en función de los valores que puedan tomar sus cuatro parámetros. La ilustración 2.5.3.3. muestra varios de ellos, como por ejemplo, el modelo Normal o Gaussiano y el modelo Cauchy.



¹¹⁹ Existen otros métodos de estimación para obtener el parámetro α , como por ejemplo, el estimador de Hill (1975) referenciado en Paoella, M.S.; Mittnik, S. (1999). **A Simple Estimator for the Characteristic Exponent of the Stable Paretian Distribution**, *Mathematical and Computer Modelling*, 29, pp. 161-176. Además para ciertas condiciones del parámetro de *escala*, “ $c = 1$ ”, están disponibles otros métodos, máxima verosimilitud, estimador asintótico de Hill, estimador de mínima distancia, si bien todos alcanzan las mismas conclusiones, véase Rüschendorf, L; Höpfner, R. (1999). **Comparison of Estimadors in Stable Models**, *Mathematical and Computer Modelling*, 29, pp. 145-160.

A continuación presentamos los siguientes resultados a modo de ejemplo. En primer lugar la estimación del exponente característico “ α ” y en segundo lugar, los gráficos log-log plot para la prestación de *Enfermedad*¹²⁰.

El valor del parámetro estimado para esta prestación es 3.104 ($n=143$), pero si tenemos en cuenta la presencia del valor atípico comentado en apartados anteriores, su valor descende hasta 2.957 ($n=144$). Al ser superior a 2, implica que los momentos son finitos, garantizando una mayor fiabilidad sobre la utilización del modelo estimado en el apartado anterior¹²¹, (véase tabla 1.5.3.3.3.).

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.979 ^a	.958	.958	8.19309E-02

a. Variables predictoras: (Constante), LOG10X1

Coeficientes ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	.774	.009		-83.545	.000
	LOG10X1	-3.104	.066	-.979	-47.097	.000

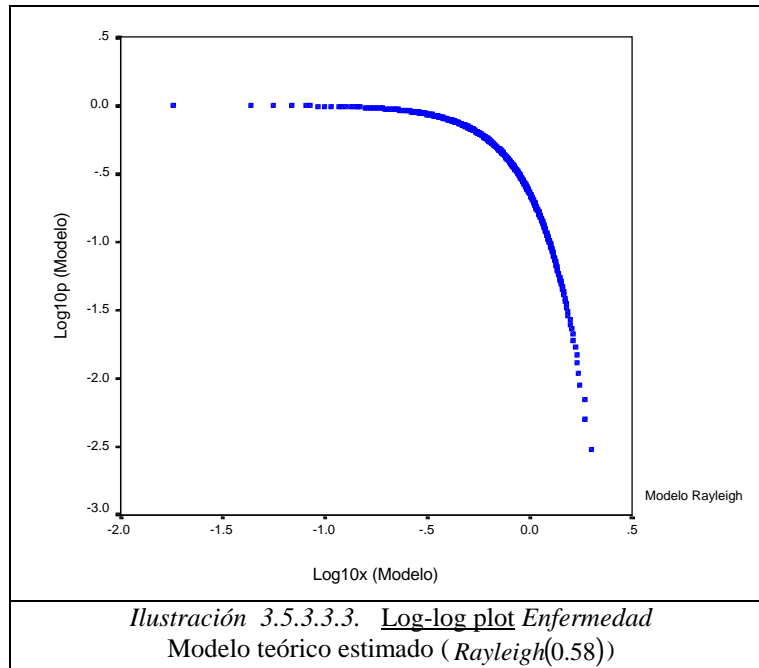
a. Variable dependiente: LOG10P1

Tabla 1.5.3.3.3.
Estimación de “ α ” para la prestación de *Enfermedad* ($n=143$)

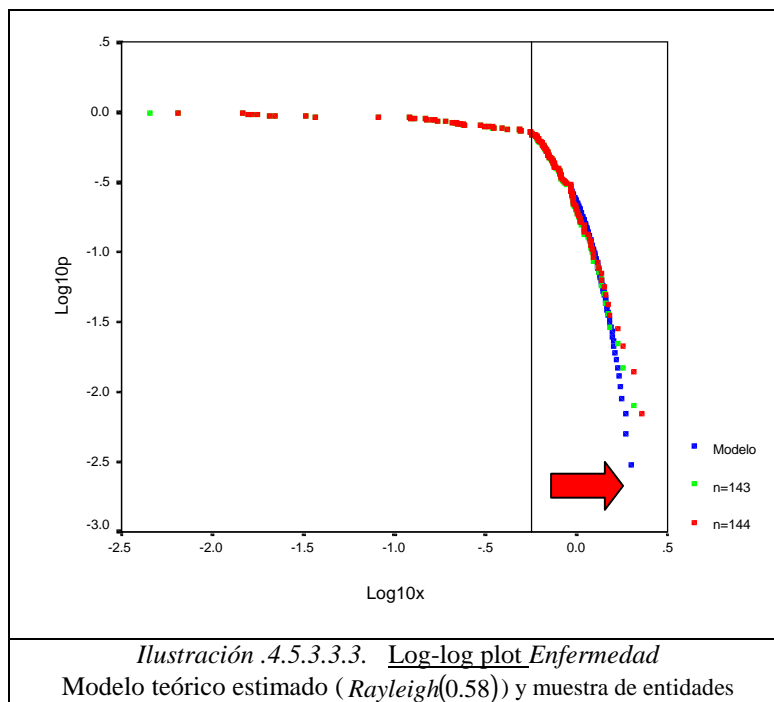
Para poder comprobar cual es la forma y el grado de respuesta de estas distribuciones complementarias, se ha generado 400 valores aleatorios del modelo estimado para la prestación de enfermedad, *Rayleigh*(0.58) y se han presentado en formato *log-log plot*, (véase ilustración 4.5.3.3.3.).

¹²⁰ Sólo se presentan los resultados gráficos para esta prestación y no para las restantes, ya que no aportan nada nuevo respecto a los resultados empíricos.

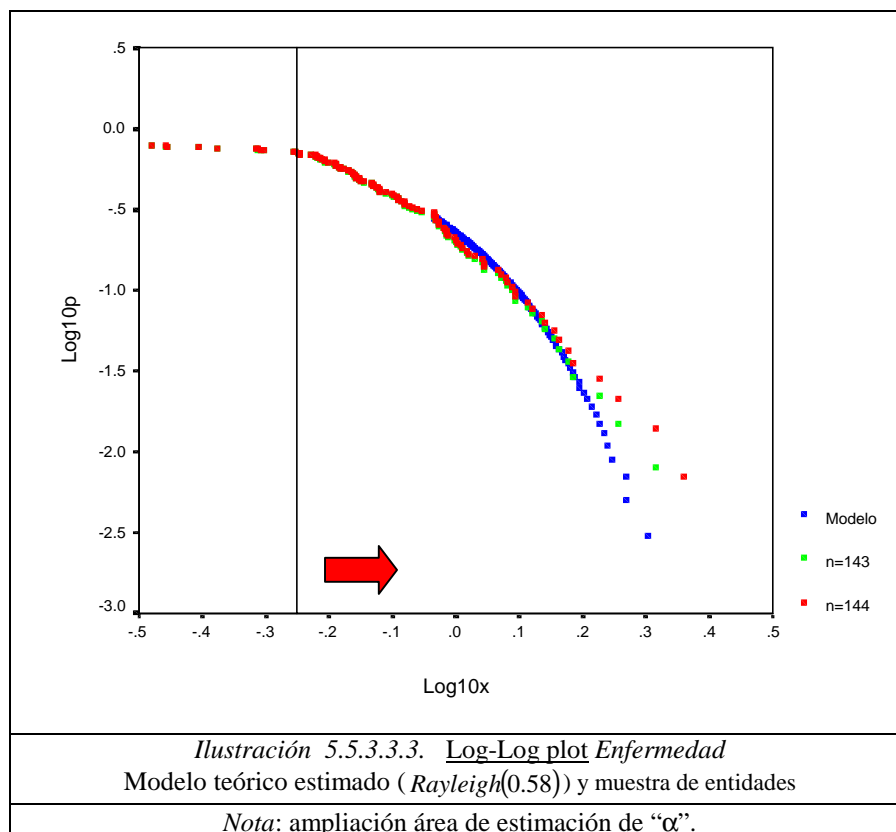
¹²¹ Se ha utilizado finalmente la base de datos disminuida, ($n=143$).



Posteriormente se ha solapado sobre el mismo los datos de la muestra (tamaño $n=143$ y 144), señalando el punto a partir del cual decidimos qué datos utilizar en el modelo de regresión para obtener el parámetro característico " α ", (véase la línea vertical en la ilustración 4.5.3.3.3.).



La ilustración 5.5.3.3.3. amplía el área de estimación de la distribución complementaria para la prestación de *Enfermedad*, permitiendo observar el descenso de la probabilidad en las colas.



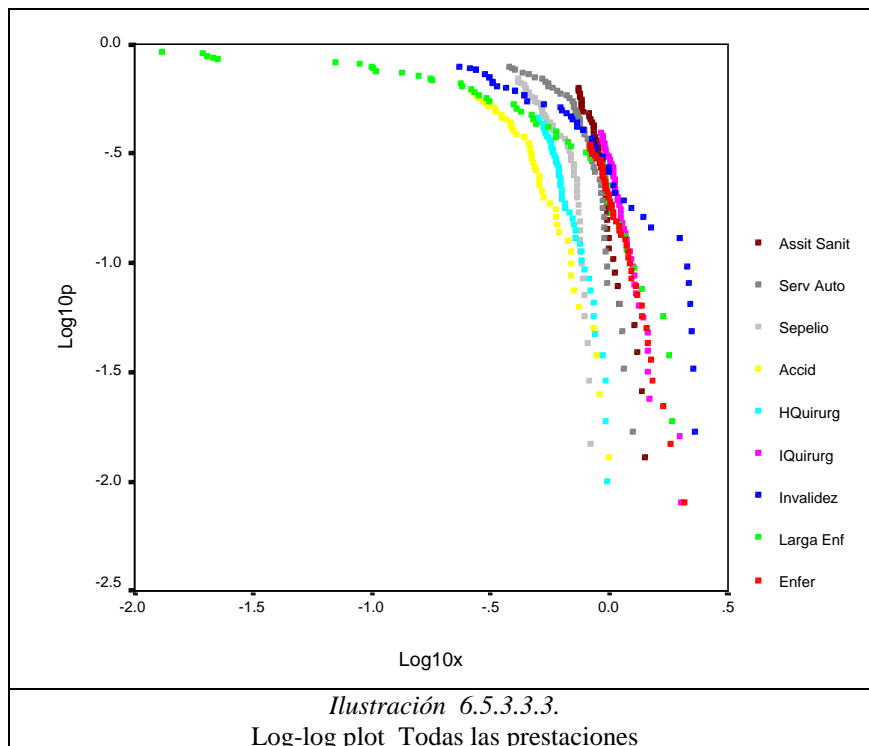
Los resultados para todas las prestaciones se resumen en la tabla 2.5.3.3.3, en donde se ha diseñado un indicador de idoneidad de la utilización de los momentos, a partir de la siguiente expresión, $(\alpha_i/2)$. Su interpretación es la siguiente, cuanto mayor sea su valor de 1, mayor fiabilidad posee la utilización de los momentos y por lo tanto el modelo de probabilidad estimado. Si comparamos los resultados obtenidos para todas las prestaciones, todas poseen momentos finitos, lo cual permite utilizar con ciertas garantías los modelos de probabilidad estimados desde esta perspectiva.

Tabla 2.5.3.3.3.

<i>Prestación_i</i>	<i>Modelo estimado</i>	<i>Exponente Característico (α_i)</i>	<i>Índice de idoneidad momentos ($\alpha_i/2$)</i>
<i>Enfermedad</i> (143(144))	<i>Rayleigh</i> (0.58)	(2.958) 3.104	1.552
<i>Larga Enfermedad</i> (54)	<i>Erlang</i> (1.0;0.57)	3.139	1.570
<i>Invalidez</i> (63)	<i>Weibull</i> (1.18;0.83)	1.936	$\alpha \leq 2$
<i>Inter. Quirúrgica</i> (126)	<i>Gamma</i> (6.16;0.15)	4.963	2.482
<i>Hospit. Quirúrgica</i> (108)	<i>Weibull</i> (2.15;0.54)	4.850	2.425
<i>Accidentes</i> (81)	<i>Gamma</i> (2.17;0.17)	3.444	1.722
<i>Sepelio</i> (72)	<i>Erlang</i> (6.0;0.09)	6.826	3.413
<i>Serv. Automovilistas</i> (63)	<i>Rayleigh</i> (0.51)	5.246	2.622
<i>Asist. Sanitaria</i> (78(90))	<i>Weibull</i> (3.14;0.88)	(5.639)6.319	3.159
<i>Total</i> (708(801))	<i>Gamma</i> (3.40;0.21)	(3.567)3.629	1.814

Nota: Entre paréntesis en la columna de prestación se encuentra el tamaño muestral utilizado.

Finalmente la ilustración 6.5.3.3.3. muestra para todas las prestaciones el gráfico Log-log plot, donde observamos para una de las prestaciones, la existencia de un comportamiento diferencial en la parte de menor probabilidad de ocurrencia, es decir, en la cola de la distribución. Claramente la prestación de *Invalidez* posee características distintas a las demás prestaciones.



5.3.3.4. Margen mínimo de solvencia por tipo de prestación a partir del del ratio (ξ/p) . Comparativa de resultados.

Una vez detectado en el apartado 5.3.3.2. los modelos que mejor se ajustaban a los datos empíricos del ratio de siniestralidad (ξ/p) por tipo de prestación, y comprobada la validez de los momentos obtenidos (véase apartado 5.3.3.3.), a través del tamaño de las “colas” de las distribuciones, estamos en disposición de utilizar toda esta información con ciertas garantías para calcular el Margen Mínimo de Solvencia (MMS)¹²² a través del método del ratio de siniestralidad¹²³ y compararlo con los resultados del método de Monte-Carlo, (véase apartado 5.3.2.5.). Los modelos de probabilidad (sin transformaciones en los datos) que mejor se ajustan a los ratios de siniestralidad¹²⁴ por prestaciones están sintetizados en la tabla 1.5.3.3.4., donde además se incorpora el promedio del ratio de siniestralidad \bar{R}_2 y la cuantía mínima del margen de solvencia sobre primas comerciales¹²⁵, obtenida al resolver la expresión, $P(\xi/P > X/P) = \psi$.

Tabla 1.5.3.3.4.

Grupo	Prestación _i	Modelos de Probabilidad estimados	\bar{R}_2	MMS(2)%
A	Enfermedad (143)	Rayleigh(0.58)	$\bar{R}_2 = 71\%$	106%
C	Larga Enfermedad (54)	Erlang(1.0;0.57)	$\bar{R}_2 = 57\%$	205%
B	Invalidez (63)	Weibull(1.18;0.83)	$\bar{R}_2 = 79\%$	224%
D	Inter. Quirúrgica (126)	Gamma(6.16;0.15)	$\bar{R}_2 = 87\%$	103%
B	Hospit. Quirúrgica (108)	Weibull(2.15;0.54)	$\bar{R}_2 = 48\%$	61%
D	Accidentes (81)	Gamma(2.17;0.17)	$\bar{R}_2 = 38\%$	83%
C	Sepelio (72)	Erlang(6.0;0.09)	$\bar{R}_2 = 53\%$	62%
A	Serv. Automovilistas(63)	Rayleigh(0.51)	$\bar{R}_2 = 65\%$	91%
B	Asist. Sanitaria (78)	Weibull(3.14;0.88)	$\bar{R}_2 = 79\%$	64%
Sector	Total (788)	Gamma(3.40;0.21)	$\bar{R}_2 = 65\%$	122%

Nota: Los grupos formados son los que han surgido por la afinidad de los modelos de probabilidad obtenidos apartado 5.3.3.2. MMS(2) es el margen mínimo de solvencia sobre primas comerciales. La cantidad entre paréntesis asociada a cada prestación es el tamaño de la muestra utilizada en cada caso.

¹²² Realizado para un $\psi=0.01$ (1%) de probabilidad de insolvencia.

¹²³ Tal y como se realizó para la prestación de *enfermedad* en el apartado 5.3.3.2.

¹²⁴ En la detección de los modelos anteriores, se han realizado los siguientes cambios para facilitar la coherencia en su obtención. En primer lugar, para la prestación de *enfermedad* se ha excluido una observación atípica cuyo valor es 4.0709. En segundo lugar, para la prestación de *asistencia sanitaria* se ha desestimado aquellos ratios menores de 0.12, (en total 12 observaciones) y en último lugar, para el total del sector no se ha tenido en cuenta las 13 observaciones anteriores. Los modelos se han obtenido mediante valores no normalizados, $x > 0$.

¹²⁵ El valor del margen sobre prima de riesgo, siniestralidad o cartera de riesgo se obtendría simplemente dividiendo el margen de solvencia obtenido sobre primas comerciales o de tarifa entre el ratio de siniestralidad.

Una vez estimados los modelos de probabilidad más idóneos podemos comprobar si existen modelos teóricos más frecuentes que otros, ya sea desde el punto de vista del tamaño de la cartera de riesgo asumido o desde la óptica de la tipología de prestaciones¹²⁶. Los modelos más frecuentes son: para carteras de riesgo pequeño el modelo Weibull, para carteras medianas existe mucha dispersión de resultados y para carteras grandes, el modelo *Weibull* surge otra vez con fuerza junto con otros dos modelos menos relevantes, *ExtremeValue* y *PearsonV*¹²⁷, (véase tabla 2.5.3.3.4.).

Tabla 2.5.3.3.4.

Modelos Teóricos	Especificación	Tamaño cartera (p, m, g)			Frecuencia	Prestación _i
<i>Normal</i>	$Normal(\mu, \sigma)$		•		•	Larga Enfermedad
<i>Exponencial</i>	$Expon(\beta)$	•			•	Larga Enfermedad
<i>Erlang</i>	$Erlang(m, \beta)$			•	•	Inter. Quirúrgica
<i>Gamma</i>	$Gamma(\alpha, \beta)$		•	••	•••	Invalidez Hospit. Quirúrgica Serv. Automovilistas
<i>Lognormal</i>	$LogNorm(\mu, \sigma)$			•	•	Enfermedad
<i>PearsonV</i>	$PearsonV(\alpha, \beta)$	•	••	•	••••	Invalidez Inter. Quirúrgica Accidentes
<i>PearsonVI</i>	$PearsonVI(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$		•		•	Hospit. Quirúrgica
<i>Weibull</i>	$Weibull(\alpha, \beta)$	••••	•	•	••••••	Inter. Quirúrgica Hospit. Quirúrgica Sepelio Serv. Automovilistas Asist. Sanitaria
<i>ExtremeValue</i>	$ExtValue(a, b)$	••	••		••••	Enfermedad Accidentes Sepelio
<i>Rayleigh</i>	$Rayleigh(b)$	••			••	Enfermedad Asist. Sanitaria

Nota: Tamaño cartera, *p*, pequeña, *m*, mediana y *g*, grande. *Frecuencia:* número de veces que el modelo teórico es elegido como el posible generador de los datos muestrales.

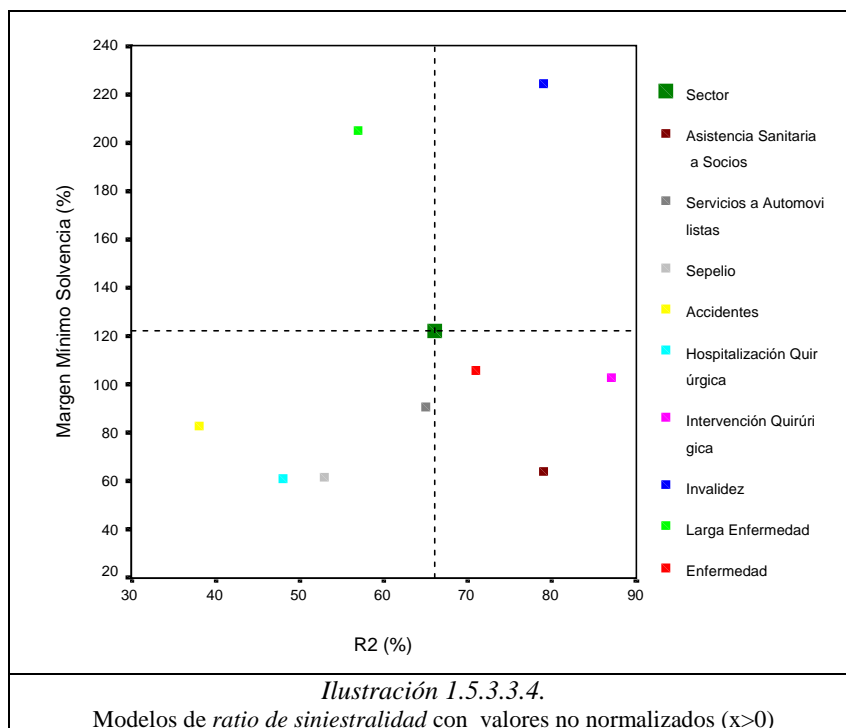
Otro aspecto interesante es el posicionamiento de los márgenes de solvencia¹²⁸ obtenidos en función del ratio de siniestralidad, \bar{R}_2 , véase ilustración 1.5.3.3.4. Las conclusiones obtenidas son las siguientes: una gran dispersión en los resultados, dos prestaciones (Invalidez y Larga Enfermedad) están situadas claramente por encima del sector agregado, las prestaciones mejor posicionadas (valor del ratio siniestralidad y margen de solvencia por debajo del promedio del sector) son, Accidentes, Hospitalización Quirúrgica,

¹²⁶ De la misma forma que se realizó en el apartado 5.3.2.5. Véase el detalle en el anexo 1 de este apartado.

¹²⁷ Véase especificación en el apartado 5.3.3.2.

¹²⁸ Los resultados obtenidos son para las carteras agregadas y sobre primas comerciales.

Sepelio y Servicios a Automovilistas y en último lugar, se observa una relación creciente entre ambas variables, es decir, a mayor ratio de siniestralidad mayor margen mínimo requerido de solvencia sobre primas comerciales.



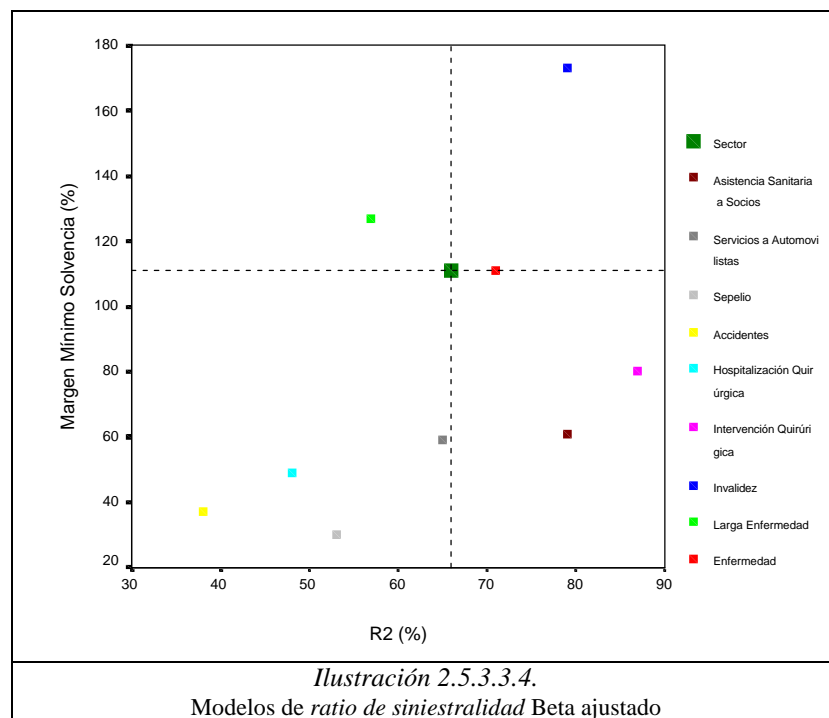
De la misma forma que se indicó en el apartado 5.3.3.2., se han estimado los modelos *beta* sobre los datos previamente normalizados, permitiendo obtener el margen mínimo de solvencia a partir de los mismos, (véase los resultados en la tabla 3.5.3.3.4.).

Tabla 3.5.3.3.4.

Grupo	Prestación _i	Modelo Beta ajustado	\bar{R}_2	MMS(2)%
A	Enfermedad (143)	Beta(1.51;3.43)	$\bar{R}_2 = 71\%$	111%
C	Larga Enfermedad (54)	Beta(0.50;1.19)	$\bar{R}_2 = 57\%$	127%
B	Invalidez (63)	Beta(0.47;1.27)	$\bar{R}_2 = 79\%$	173%
D	Inter. Quirúrgica (126)	Beta(3.17;5.09)	$\bar{R}_2 = 87\%$	80%
B	Hospit. Quirúrgica (108)	Beta(1.80;2.26)	$\bar{R}_2 = 48\%$	49%
D	Accidentes (81)	Beta(1.32;3.66)	$\bar{R}_2 = 38\%$	37%
C	Sepelio (72)	Beta(0.97;0.83)	$\bar{R}_2 = 53\%$	30%
A	Serv. Automovilistas(63)	Beta(1.42;1.34)	$\bar{R}_2 = 65\%$	59%
B	Asist. Sanitaria (78)	Beta(2.87;3.69)	$\bar{R}_2 = 79\%$	61%
Sector	Total (788)	Beta(1.69;5.18)	$\bar{R}_2 = 66\%$	111%

Nota: Los grupos formados son los que han surgido por la afinidad de los modelos de probabilidad obtenidos apartado 5.3.3.2. MMS(2) es el margen mínimo de solvencia sobre primas comerciales. La cantidad entre paréntesis asociada a cada prestación es el tamaño de la muestra utilizada en cada caso.

Respecto al posicionamiento mediante modelos *betas*, las conclusiones obtenidas son las siguientes, en primer lugar, las prestaciones mejor posicionadas son las mismas, pero en promedio los resultados son un 35% menor que con los datos sin transformar. Observamos con más claridad la relación creciente, entre el margen de solvencia sobre primas comerciales y el ratio de siniestralidad, (véase ilustración 2.5.3.3.4.).



Los resultados anteriores nos permiten inferir que la variabilidad intrínseca del propio ratio es la causa de la inestabilidad en la estimación de los márgenes mínimos de solvencia. Tal y como señala Latorre (1992), existen dos posibles causas de ineficiencia por esta línea de actuación. Una primera causa es que la variabilidad del ratio de siniestralidad puede ser afectada por factores ajenos al comportamiento de la propia siniestralidad y una segunda, es a mayor tamaño de la cartera de riesgo, el ratio de siniestralidad debería estabilizarse. Así, si suponemos que el número de siniestros se distribuye según una *Binomial Negativa*, la variabilidad del propio ratio de siniestralidad¹²⁹ " $\sigma_{(\xi/P)}$ " puede ser calculada mediante la siguiente expresión,

¹²⁹ Véase capítulo IV de Latorre LL. (1992). **Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora**, Editorial Mapfre, Madrid.

$$\sigma_{(\xi/P)} = \sqrt{\left(\frac{a_2}{n \cdot m^2}\right) + \frac{1}{h}}$$

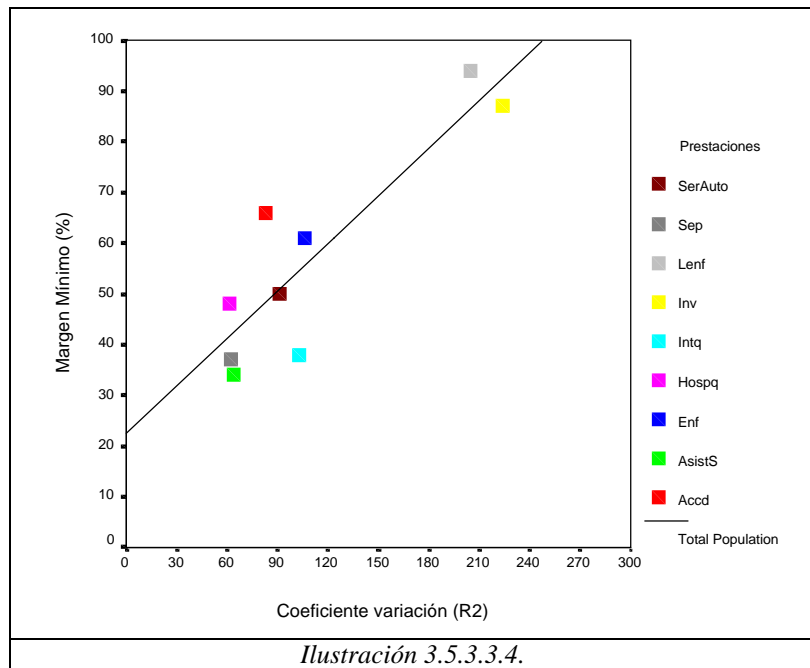
siendo, “ a_2 ” es el momento de segundo orden respecto a cero de la distribución de la cuantía de cada siniestro, “ n ”, el número medio de siniestros por año, “ m ”, el coste medio de cada siniestro y “ h ”, el parámetro de heterogeneidad de la distribución *Binomial Negativa*. Las diferencias detectadas entre la variabilidad observada “ $\sigma_{(\xi/P)}$ ” y la estimada “ $\sigma_{(\xi/P)}$ ” son las siguientes. En primer lugar, los resultados teóricos están claramente sesgados a la baja respecto a los observados empíricamente. En segundo lugar, a través del cálculo del coeficiente de variación, el grado de representación del promedio del ratio de siniestralidad obtenido no coincide en ambos métodos. Y en último lugar, existe una fuerte correlación positiva, entre el margen mínimo obtenido y su coeficiente de variación (datos empíricos) generando aún, mayores dudas sobre la estabilidad de los resultados por esta vía de estudio, (véase el ilustración 3.5.3.3.4. y la tabla 4.5.3.3.4.).

Tabla 4.5.3.3.4.

Prestación _i	$\sigma_{(\xi/P)}$	CV (1)	$\sigma_{(\xi/P)}$	CV (2)
Enfermedad	0.5132	61%	0.1212	17%
Larga Enfermedad	0.5322	94%	0.1666	29%
Invalidez	0.6847	87%	0.1103	14%
Interv. Quirúrgica	0.3310	38%	0.2754	32%
Hospit. Quirúrgica	0.2298	48%	0.1068	22%
Accidentes	0.2487	66%	0.2051	54%
Sepelio	0.1973	37%	0.0721	14%
Serv. Automov.	0.3259	50%	0.1976	30%
Asist. Sanitaria	0.3594	34%	0.0694	9%

Nota: $CV(1) = \sigma_{(\xi/P)} / \bar{R}_2$: coeficiente de variación datos muestrales y
 $CV(2) = \sigma_{(\xi/P)} / \bar{R}_2$: coeficiente de variación, modelo Binomial Negativo.

Para comprobar el aspecto anterior, centraremos nuestro análisis en la prestación de *Sepelio*, tal y como se realizó en el apartado 5.3.2.5. La posible causa de la discrepancia entre las dos vías de análisis es el efecto que posee el volumen de riesgo asumido sobre el propio ratio de siniestralidad. Se han considerado los mismos tamaños de cartera de riesgo que en el apartado 5.3.2.5. ya mencionado, es decir, cartera de 5 Mill Ptas y cartera de 60 Mill Ptas. Para estos tamaños el margen mínimo de solvencia sobre primas es un 30% para carteras pequeñas y un 49% para carteras medianas.



También podemos expresar el margen sobre siniestralidad y no sobre primas comerciales. En este caso, *Sepelio*, el resultado del margen de solvencia es, para una cartera de 5 Mill Ptas, de un 73% (siniestralidad del 41%), y para una cartera casi once veces superior, de un 65% (siniestralidad del 75%), justificando por lo tanto la lógica de que a mayor cartera de riesgo menor margen requerido, (véase tabla 6.5.3.3.4.). Este procedimiento se ha realizado para las otras prestaciones¹³⁰, considerando las carteras representativas generadas en el apartado 5.3.2.5. y la propia del sector agregado con datos no transformados.

Tabla 6.5.3.3.4.

Grupo-Filtro	Cartera de Riesgo	Prestación _i	Modelos ajustados	\bar{R}_2	MMS(2)%	MMS(1)%
$R_2 \leq 0.675$	5	<i>Sepelio</i> (48)	<i>Weibull</i> (3.39;0.46)	$\bar{R}_2 = 41\%$	30%	73%
$R_2 > 0.675$	60	<i>Sepelio</i> (24)	<i>ExtValue</i> (0.18;0.23)	$\bar{R}_2 = 75\%$	49%	65%
Modelo sin Transformar	142.90	<i>Sepelio</i> (72)	<i>Erlang</i> (6.0;0.09)	$\bar{R}_2 = 53\%$	62%	117%
Modelo Beta	142.90	<i>Sepelio</i> (72)	<i>Beta</i> (2.85;2.56)	$\bar{R}_2 = 53\%$	30%	57%

Nota: MMS(2) es el margen sobre primas comerciales y MMS(1) sobre primas de riesgo. La cantidad entre paréntesis asociado a la prestación es el tamaño de la muestra utilizada. Cartera de riesgo en Mill. Ptas.

¹³⁰ Véase anexo 2 de este apartado para el margen mínimo sobre primas comerciales y la tabla 9.5.3.3.4. sobre siniestralidad.

Un aspecto interesante es comprobar la relación entre la siniestralidad media, su variabilidad empírica y estimada¹³¹ y el propio volumen de riesgo asumido. Detectamos dos aspectos, en primer lugar, la respuesta del modelo compuesto de Poisson en términos de la variabilidad de (ξ/p) es muy distinta a la generada por su versión empírica, (véase ilustración 4.5.3.3.4. (a y b)).

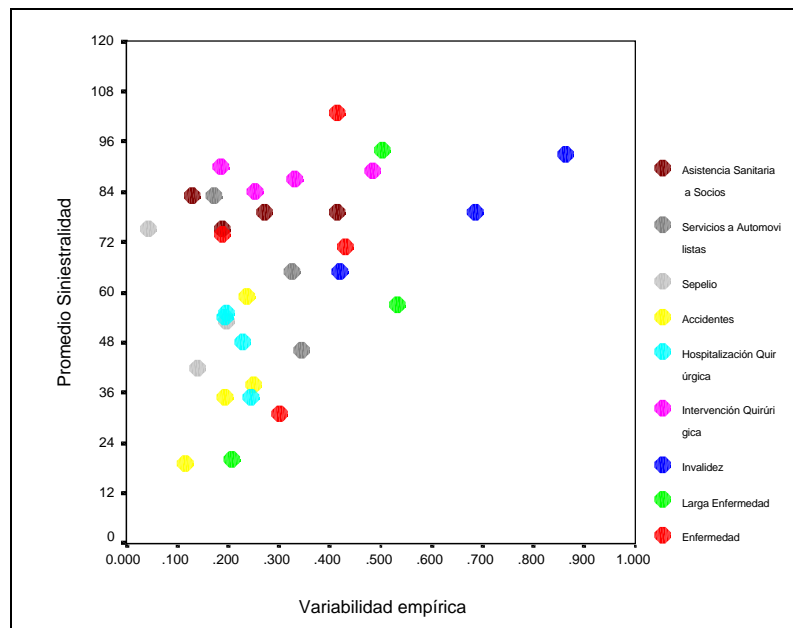


Ilustración 4.5.3.3.4. (a)
Modelo empírico

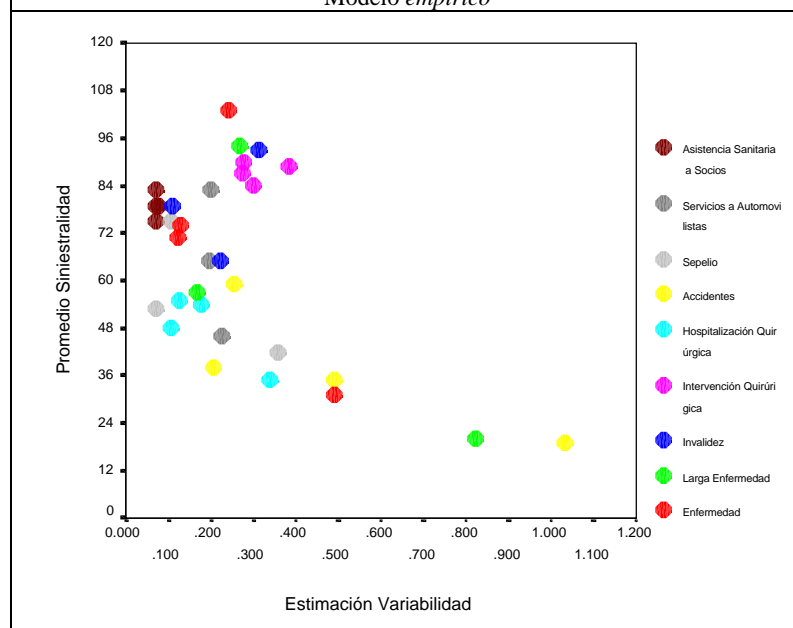
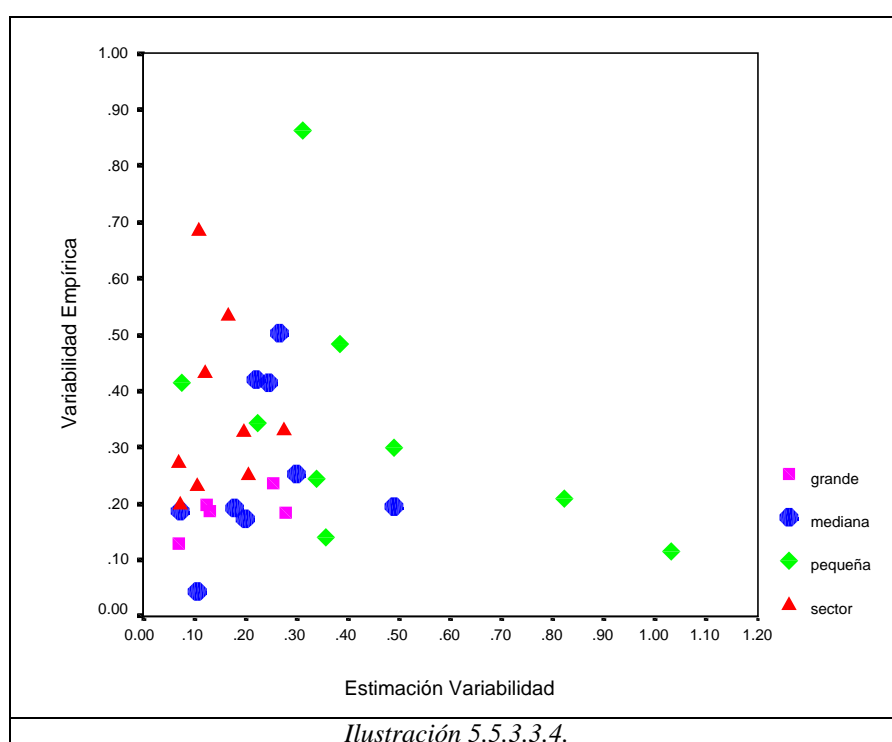


Ilustración 4.5.3.3.4. (b)
Modelo compuesto de Poisson

¹³¹ Estimada mediante el modelo compuesto de Poisson.

En segundo lugar, la variabilidad del ratio de siniestralidad está condicionada al nivel de la cartera de riesgo asumido, discerniendo entre cartera agregada (sector), carteras pequeñas, medianas y grandes. Las carteras pequeñas son las que generan un comportamiento más aleatorio entre las medidas de variabilidad, (véase ilustración 5.5.3.3.4.). En último lugar, el margen mínimo de solvencia sobre primas comerciales para los datos normalizados¹³² supone en promedio una reducción del 20% respecto al calculado sobre datos sin transformar. Dicho aspecto es fruto de la compresión ocasionada por la transformación definida.



La búsqueda de una simple relación entre los márgenes mínimos de solvencia obtenidos¹³³ (a través de la modelización del ratio de siniestralidad) y el volumen de riesgo asumido para el sector no vida, supone proponer una relación lineal entre ellos, (véase tablas 6.5.3.3.4. y 7.5.3.3.4.).

¹³² Véase anexo 2 de este apartado.

¹³³ A partir de ahora los resultados se presentaran sobre siniestralidad ya que aísla la influencia del crecimiento comercial propio de las carteras, véase la síntesis en la tabla 9.5.3.3.4.

Coeficientes ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	137.688	13.027		10.570	.000
	CARTERA	-1.395	.394	-.621	-3.539	.002

a. Variable dependiente: MIMMimo

Tabla 6.5.3.3.4.

(Nota: a partir de los márgenes obtenidos con los datos normalizados)

Coeficientes ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	192.260	20.646		9.312	.000
	CARTERA	-1.939	.625	-.570	-3.104	.006

a. Variable dependiente: MMS

Tabla 7.5.3.3.4.

(Nota: a partir de los márgenes obtenidos con los datos sin transformar)

Las conclusiones obtenidas son: en primer lugar, el grado de ajuste lineal es de un 39%, en segundo lugar, la sensibilidad capturada por la pendiente del modelo indica que por cada millón adicional de riesgo supone una reducción del 1.4% en el margen mínimo requerido sobre siniestralidad, (véase tabla 6.5.3.3.4.). En tercer lugar, los resultados obtenidos, a partir de los datos sin transformar, suponen un decremento mayor, 1.9%, (véase tabla 7.5.3.3.4.). En tercer lugar, la sensibilidad obtenida en el apartado 5.3.2.5. por el método de Monte-Carlo, es un 0.6% menor, justificada por la inestabilidad del método del ratio de siniestralidad. En último lugar, el margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad no desciende del rango [30%;40%] aproximadamente, para volúmenes de cartera de riesgo de entre [0;100] Mill Ptas. En última instancia compararemos los resultados obtenidos para el margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad para los cuatro métodos definidos (véase apartado 5.3.2.5. y 5.3.3.4.), es decir: Método de Monte-Carlo (ajuste modelos no truncados)(MMS1), Método de Monte-Carlo (ajuste modelos truncados)(MMS2), Método ratio de siniestralidad (ajuste modelo Beta)(MMS3) y Método ratio de siniestralidad (ajuste modelos datos no transformados) (MMS4).

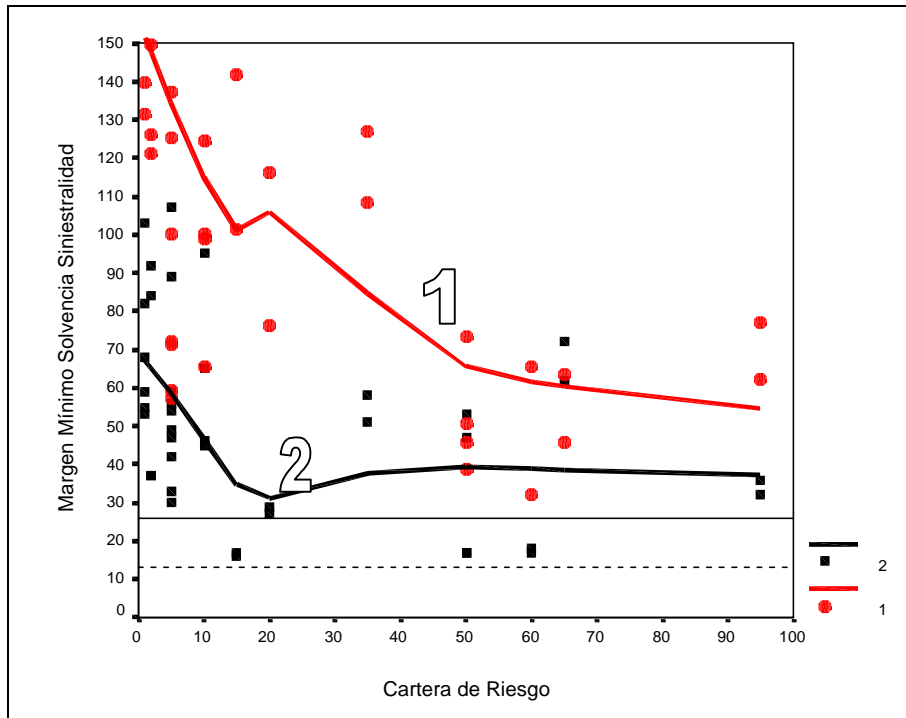


Ilustración 7.5.3.3.4.

(1) Método del ratio de siniestralidad y (2) Método de Monte-Carlo (MMS ≤ 150)

Nota: se han desestimado en ambos casos los valores agregados del sector. Las líneas horizontales representan los valores oficiales.

	MMS3	MMS4	MMS2	MMS1
N	22	22	22	22
Mínimo	32	51	17	16
Máximo	252	360	237	189
Media	109.54	153.13	69.50	59.27
Mediana	100.63	126.18	55.50	50.00

Tabla 8.5.3.3.4.

MMS1: método de Monte-Carlo (ajuste modelos no truncados)
 MMS2: método de Monte-Carlo (ajuste modelos truncados)
 MMS3: método ratio de siniestralidad (ajuste modelo Beta)
 MMS4: método ratio de siniestralidad (ajuste modelos datos no transformados)

Las diferencias de los resultados obtenidos por los cuatro procedimientos son: en primer lugar, el método que requiere menor margen es el Método de Monte-Carlo con modelos no truncados (dominio de la variable $[-\infty; +\infty]$), un 60% en promedio. En cambio, el método del ratio de siniestralidad con datos no normalizados requiere el mayor importe de margen en promedio, un 153%. En segundo lugar, la diferencia en términos de margen si trabajamos o no con modelos truncados supone un 10% más a favor de los segundos (método de Monte-Carlo). Por último, los métodos que utilizan el ratio de siniestralidad generan en valores medianos el doble de margen mínimo que los métodos de Monte-Carlo, (véase tabla

8.5.3.3.4. ; ilustración 7.5.3.3.4.). En último lugar, la respuesta del margen mínimo de solvencia sobre siniestralidad respecto a: el método utilizado, el tipo de prestación y el tipo de cartera, (pequeña [0;5], mediana [5;10] y grande [10;100]), está sintetizado en la tabla 9.5.3.3.4.

Las conclusiones son las siguientes¹³⁴. En primer lugar, la prestación de Asistencia Sanitaria para carteras grandes posee el nivel más bajo de margen requerido, 31% en promedio. En segundo lugar, para carteras medias, repite la misma prestación con el doble aproximadamente de margen requerido y en último lugar, para carteras pequeñas es la prestación de Sepelio con un 60% en promedio.

Tabla 9.5.3.3.4.

		Tipología de Prestación / Margen mínimo de Solvencia sobre siniestralidad								
Método	Carteras	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MMS1	A	32%			62%	27%	51%	18%	47%	17%
	B	42%	45%	37%	65%	30%	89%			16%
	C	82%	156%	53%	84%	59%	189%	54%	49%	
MMS2	A	36%			72%	29%	58%	17%	53%	17%
	B	47%	46%	37%	95%	33%	107%			17%
	C	103%	195%	55%	92%	68%	237%	59%	56%	
MMS1: método de Monte-Carlo (ajuste modelos no truncados)										
MMS2: método de Monte-Carlo (ajuste modelos truncados)										
MMS3	A	62%			46%	76%	108%	32%	46%	39%
	B	100%	100%	126%	65%	72%	137%			101%
	C	252%	230%	184%	121%	160%	132%	57%	163%	
MMS4	A	77%			63%	116%	127%	65%	73%	51%
	B	125%	124%	265%	99%	59%	263%			142%
	C	306%	360%	140%	149%	217%	189%	71%	285%	
MMS3: método ratio de siniestralidad (ajuste modelo Beta)										
MMS4: método ratio de siniestralidad (ajuste modelos datos no transformados)										
A: carteras grandes, [10;100], B: carteras medianas, [5;10] y C: carteras pequeñas [0;5] Mill Ptas										
1: Enfermedad, 2: Larga Enfermedad, 3: Invalidez, 4: Intervención Quirúrgica, 5: Hospitalización Quirúrgica, 6: Accidentes, 7: Sepelio, 8: Servicios a Automovilistas, 9: Asistencia Sanitaria a Socios										

A la vista de los resultados expuestos consideramos que el método de Monte-Carlo es más idóneo que el método del ratio de siniestralidad para capturar el margen mínimo de solvencia. Los resultados por lo tanto expuestos en el apartado 5.3.3.2. consideramos que son una buena aproximación a la realidad del sector desde esta óptica en función de la naturaleza de los datos disponibles. Una vez finalizado el tratamiento probabilístico del ratio de siniestralidad, el apartado siguiente, 5.4. realizamos su análisis desde una visión diferente, la econométrica.

¹³⁴ Debido a la diferencias existentes entre los cuatro métodos, se ha realizado un promedio de ellos.

5.4. Estudio de la siniestralidad no vida en el subsector de previsión social en Cataluña (1989-1997): Perspectiva econométrica del modelo de ratio de siniestralidad.

5.4.1. Introducción.

El análisis realizado sobre el ratio de siniestralidad total (y/x) en el apartado 5.3.3.2. nos ha permitido obtener dos resultados: el cálculo del margen mínimo de solvencia (MMS) por tipo de prestación y el diseño de una propuesta de modelos teóricos explicativos del comportamiento del ratio (y/x), desde una perspectiva probabilística. Pero existe otro punto de vista y es considerar la posible relación existente entre los componentes que lo generan, en nuestro caso, pagos por prestaciones (y) e ingresos por primas (x) y proponer su modelización, es decir, una *perspectiva econométrica* del modelo de ratio, (véase García-Ayuso Covarsí¹³⁵ (1994)). Recordemos que la hipótesis básica de partida en el análisis mediante ratios es la estricta proporcionalidad entre los dos componentes¹³⁶, cuyo cumplimiento permite la utilización de los mismos para el control del efecto tamaño de las compañías estudiadas, (véase los trabajos ya comentados de, Lev¹³⁷ (1978), Lev y Sander¹³⁸ (1979) y Barnes¹³⁹ (1982, 1982 y 1987)).

Así en este apartado contrastaremos la validez de diferentes especificaciones para el modelo de ratio. En primer lugar, planteamos una especificación clásica de los mismos a partir de Modelos de Regresión con Errores Aditivos (MREA), (véase McDonald y Morris (1984, 1985); García-Ayuso Covarsí (1994) y apartado 5.4.2.). En segundo lugar, Modelos de Regresión con Errores Multiplicativos (MREM), (véase García-Ayuso Covarsí (1994)) ; Trigueiros, D. (1997) y apartado 5.4.3.). En tercer lugar, especificaciones del Modelo Característico de Ratio con Errores Aditivos (MCREA) (véase apartado 5.4.4.) y con Errores

¹³⁵ Véase García-Ayuso Covarsí, M. (1994). Fundamentos Metodológicos del Análisis financiero mediante ratios, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, Sevilla.

¹³⁶ Véase apartado 1.3.

¹³⁷ Véase Lev, B. (1978). Análisis de Estados Financieros: Un Nuevo Enfoque, Ediciones ESIC, Madrid.

¹³⁸ Véase Lev, B. ; S. Sunder. (1979). Methodological Issues in the Use of Financial Ratios, *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 1 pp. 187-210.

¹³⁹ Véase Barnes, P. (1982). Methodological implications of Non-normally Distributed Financial Ratios. *Journal of Business, Finance & Accounting*. Vol. 9, No. 1, pp. 51-62; Barnes, P. (1983). Methodological implications of Non-normally Distributed Financial Ratios: A Reply, *Journal of Business, Finance & Accounting*. Vol. 10, No. 4. pp. 691-693 y Barnes, P. (1987). The Analysis and Use of Financial Ratios: A Review Article, *Journal of Business, Finance & Accounting*, Vol. 14, No. 4, pp. 691-693.

Multiplificativos (MCREM) (véase apartado 5.4.5.), donde se plantea una propuesta de un modelo de *ratio umbral* (Trigueiros, D. (1997)). En cuarto lugar, Formas Generalizadas sobre la base de la transformación de Box-Cox (Box y Cox (1964))(FFG(1) y FFG(2)) desarrolladas por Sundarsanam y Taffler¹⁴⁰(1995), (véase apartado 5.4.6.). En último lugar, en el capítulo 6, propuestas de formas funcionales “flexibles” mediante Modelos Econométricos Neuronales.

De todos modos somos conscientes de que existen dudas más que razonables sobre la forma en que puede afectar a las especificaciones del modelo de ratio, el hecho de que, una de sus componentes, la siniestralidad (numerador), posea claramente un comportamiento asimétrico del tipo *Gamma*¹⁴¹, (véase 5.3.2.5.). Para comprobar la existencia de algún tipo de paralelismo entre los modelos detectados como más frecuentes para el numerador del ratio y aquellos obtenidos para el propio ratio, (y/x) , se ha realizado una tabla de doble entrada, (véase 1.5.4.1.).

Tabla 1.5.4.1.

	Modelos <u>truncados</u> Siniestralidad (y) Numerador						
Modelos <u>truncados</u> ratio siniestralidad	Erlang	Gamma	Lognormal	PearsonV	PearsonVI	ExtremeValue	Prestación _i
Normal	•						2
Exponencial						•	2
Erlang	•						4
Gamma	••	•					3,5,8
Lognormal					•		1
PearsonV	•	••		•			3,4,6,6
PearsonVI		•					5,
Weibull	•	•••	•				4,5,7,8,9
ExtremeValue		•••				•	1,1,6,7
Rayleigh		•					9

Nota: 1: Enfermedad; 2: Larga Enfermedad; 3: Invalidez; 4: Intervención Quirúrgica; 5: Hospitalización Quirúrgica; 6: Accidentes; 7: Sepelio; 8: Servicio a Automovilistas; 9: Asistencia Sanitaria a Socios.

Se observa como el modelo Gamma para el numerador (prestaciones) está asociado a los modelos: Weibull y ExtremeValue que son los más frecuentes desde la óptica del propio ratio de siniestralidad, (y/x) .

¹⁴⁰ Véase Sudarsanam, P.S., Taffler, R.J. (1995). **Financial ratio proportionality and inter-temporal stability: An empirical analysis**, *Journal of Banking & Finance*, 19, pp. 45-60.

¹⁴¹ Para la variable ingresos, “x”, la heterogeneidad en las tarifas puede incidir todavía más en dicha problemática. Recordemos que el residuo del modelo recoge las características de la distribución de la variable “y”.

El aspecto anterior puede condicionar la detección de normalidad en los residuos de las diferentes especificaciones de modelos de regresión. Como consecuencia, consideramos que existe una doble línea de investigación. La primera de ellas consistiría en profundizar sobre la problemática definida para ratios no específicamente financieros o económicos¹⁴² y en segundo lugar, plantear la utilización de métodos de estimación de máxima verosimilitud incorporando el comportamiento no *Gaussiana* detectado en el numerador y denominador¹⁴³. De hecho estamos recogiendo la discusión iniciada entre Horrigan (1983) y los autores Barnes (1982) y Lee (1985) sobre si es más importante el ratio o sus componentes.

El análisis se centrará sobre las componentes del ratio de siniestralidad, cuya expresión es la siguiente¹⁴⁴,

$$R_2 = \frac{\text{Gastos Técnicos}}{\text{Ingresos Adquiridos}} = \frac{X_{1i} \cdot \left(X_{3i} \frac{1}{X_{1i}} \right)}{X_{2i} \cdot \left(X_{4i} \frac{1}{X_{2i}} \right)} = \frac{X_{3i}}{X_{4i}}$$

siendo,

X_{1i} : número de *siniestros* acaecidos por tipo de prestación i-ésima,

X_{2i} : número de *pólizas* emitidas por tipo de prestación i-ésima. (número de *beneficiarios*),

X_{3i} : importe *pagado* por tipo de prestación i-ésima y

X_{4i} : importe *ingresado* por tipo de prestación i-ésima.

Alternativamente, podemos definirlo a través de los restantes ratios de gestión definidos¹⁴⁵,

$$R_2 = \frac{\text{Gastos Técnicos}}{\text{Ingresos Adquiridos}} = R_1 \cdot \left(R_3 \frac{1}{R_4} \right)$$

donde, la *frecuencia* de siniestralidad es,

$$R_1 = \frac{X_{1i}}{X_{2i}} \cdot 1000$$

¹⁴² Para ratios económico-financieros el comportamiento logarítmico está más comprobado, véase Trigueiros (1997) y apartado 5.4.3.

¹⁴³ Véase ejemplo de métodos de mínimos cuadrados con datos no normales, Peña, D. (1989). **Estadística. Modelos y Métodos 2. Modelos lineales y series temporales**, pp. 465-467, Alianza Universidad, Madrid.

¹⁴⁴ Véase apartado 5.2.1.

¹⁴⁵ Véase apartado 5.2.2.

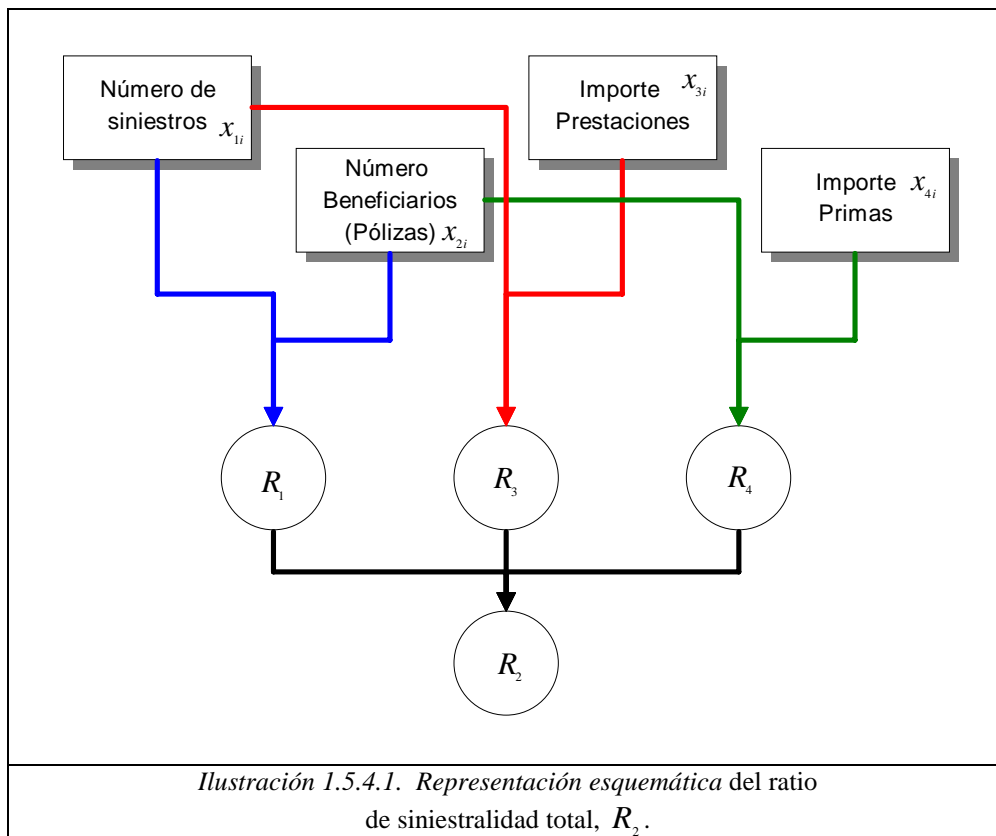
el coste medio por siniestro,

$$R_3 = \frac{X_{3i}}{X_{1i}}$$

y los ingresos por beneficiario (póliza),

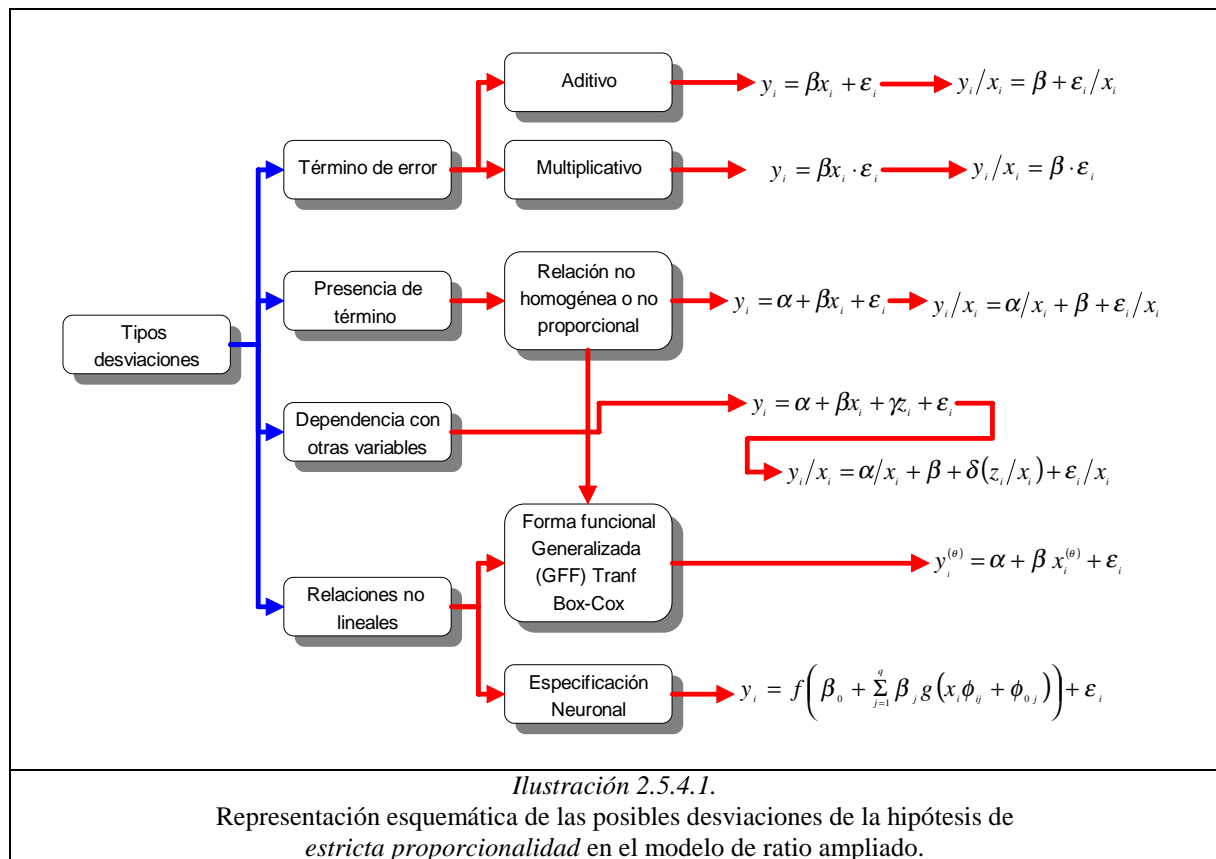
$$R_4 = \frac{X_{4i}}{X_{2i}}$$

A partir de las relaciones anteriores podemos definir una estructura gráfica en forma de “árbol” (véase la ilustración 1.5.4.1.), que posee similitudes claras con la especificación neuronal desarrollada en el capítulo 3.4.3., siendo la capa oculta el lugar donde se formarían los ratios de gestión intermedios ($R_1; R_3; R_4$), a partir del proceso de aprendizaje, (véase Trigueiros, D.¹⁴⁶(1991) para una aplicación similar y el apartado 6.).



¹⁴⁶ Trigueiros, D. (1991). **Neural Networks Based Methods in the Extraction of Knowledge From Accounting and Financial Data**. Thesis submitted to the School of Information System of the University of East Anglia.

Tal y como especificó en el apartado 1.3., el modelo de ratio es un instrumento válido para el control de la dimensión empresarial, siempre que se cumpla la hipótesis de estricta proporcionalidad entre los dos componentes del mismo. Existen cuatro posibles desviaciones de dicha hipótesis, que en este apartado se amplían, la primera de ellas vinculada a la existencia de error¹⁴⁷ en el modelo, en segundo lugar, la presencia de un término independiente, en tercer lugar, la existencia de variables adicionales dependientes y en último lugar, la presencia de una forma funcional entre las componentes del ratio de naturaleza no lineal¹⁴⁸, (véase la ilustración 2.5.4.1.).



¹⁴⁷ El término de error puede poseer carácter aditivo o multiplicativo. Respecto al primer caso, la presencia de *errores aditivos* genera un control poco eficiente del tamaño. Si además, los residuos del modelo son heterocedásticos (varianza proporcional a una variable exógena), existirá un sesgo por exceso para las pequeñas empresas y por defecto para las de mayor dimensión. En cambio la presencia de *errores multiplicativos* no genera ninguna problemática ya que las desviaciones no dependen del tamaño de la variable “ x_i ”.

¹⁴⁸ Este aspecto se desarrollará mucho más en el apartado 5.4.2.

Para todas las especificaciones generales anteriores se realizará las siguientes comprobaciones¹⁴⁹. En primer lugar, significación del término independiente (si está definido). En segundo lugar, el grado de ajuste a través del coeficiente de determinación, R^2 y el cálculo de los estadísticos¹⁵⁰ MAE, RMSE. En tercer lugar, la detección de homocedasticidad en los residuos mediante el contraste de White combinado posteriormente con el test de Glesjer, el cual permite plantear diferentes esquemas de comportamiento¹⁵¹. En cuarto lugar, el contraste de Jarque-Bera para comprobar la normalidad de las perturbaciones. En quinto lugar, el contraste de Durbin-Watson para detectar la presencia de autocorrelación espacial y finalmente, el contraste Reset propuesto por Ramsey (1969) para detectar un error en la especificación de la forma funcional¹⁵².

¹⁴⁹ En todos los casos se ha utilizado el software econométrico, ©Eviews. Véase Carrascal, U.; González, Y; Rodríguez, B. (2001). **Análisis Económico con Eviews**, Ra-Ma, Madrid.

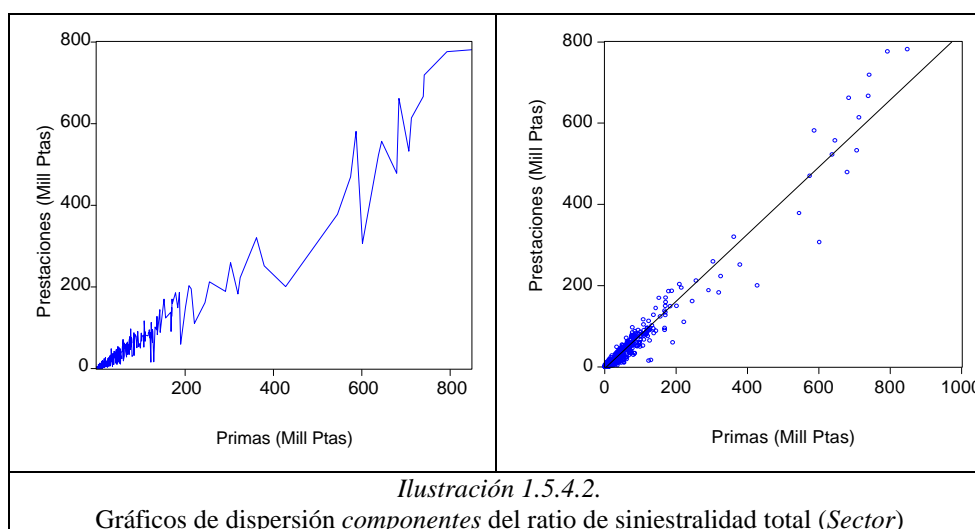
¹⁵⁰ RMSE es la raíz del error cuadrático medio y MAE, error absoluto medio.

¹⁵¹ Debemos tener en cuenta dos aspectos en el entorno de este contraste. En primer lugar, la elección de la potencia (h) de la variable que genera la heterocedasticidad es delicado, ya que los errores de la regresión auxiliar poseen esperanza no nula. En segundo lugar, en ocasiones se aconseja excluir el término independiente, (véase Novales, A. (1989). **Econometría**, pp. 176-177, McGraw Hill, Madrid).

¹⁵² Sólo se ha utilizado la primera potencia de la variable endógena (*prestaciones*).

5.4.2. Análisis de Regresión del modelo de ratio: Especificación clásica con errores aditivos.

En el apartado anterior se ha comentado que una de las hipótesis básicas de partida para el análisis mediante ratios es la presencia de una *estricta proporcionalidad* entre sus dos componentes “x” e “y”, permitiendo neutralizar el efecto del tamaño de las empresas¹⁵³. Así una primera especificación del modelo de ratio es, $y_i = \beta x_i$, donde se observa la presencia de un valor constante para el ratio (y/x), de valor “ β ”. Podemos ampliar la generalidad del mismo incorporando un término de error, $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, siendo “y” la variable objeto de estudio (prestaciones pagadas), “x” la variable asociada a la dimensión de la compañía (ingresos por primas) y el término de error, “ ε_i ”, representa las desviaciones entre los valores observados del ratio y el valor teórico del mismo¹⁵⁴, (véase ilustración 1.5.4.2.). Una segunda especificación supone la incorporación de un término independiente, “ α ”, que nos indica la siniestralidad esperada de forma independiente a la existencia de ingresos por primas.



La tabla 1.5.4.2. contiene las especificaciones de los dos modelos de regresión para el ratio con errores aditivos siguiendo a McDonald y Morris (1984, 1985).

¹⁵³ Existen trabajos vinculados a la llamada *ley de Gibrat* (R.Gibrat (1931)) donde se especifica que el crecimiento de las compañías es independiente de su tamaño, efecto que teóricamente neutraliza el modelo de ratio, véase Lotti, F; Santarelli, E; Vivarell, M. (1999). **Does Gibrat's Law Hold in the Case of Young, Small Firms?**, Paper presented at th 40th Annual SIE Conference, Ancona.

¹⁵⁴ Véase los gráficos de dispersión desglosado por prestaciones en el anexo 1 de este apartado.

Tabla 1.5.4.2. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Análisis mediante modelos de regresión sin transformaciones en los datos		
MREA(1)	Modelo básico de regresión	$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$
MREA(2)	Modelo básico de regresión con término independiente	$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$
<p><i>Fuente:</i> García-Ayuso Covarsí, M. M. (1994). Fundamentos metodológicos del análisis Financiero mediante ratios, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, Sevilla, pp. 372-373; Berry, R.H. y Nix, S. (1991). Regression Analysis v. Ratios in the Cross-section Analysis of Financial Statements, <i>Accounting and Business Research</i>, Vol. 21 No. 82, pp. 107-117.</p>		
MREA(1): Modelo de regresión errores aditivos sin término independiente.		
MREA(2): Modelo de regresión errores aditivos con término independiente.		

El diagnóstico econométrico realizado para toda la muestra sin desglosar por tipo de prestación es el siguiente: problemas de heterocedasticidad, no normalidad en los residuos, no existencia de autocorrelación espacial y rechazo en la especificación en la forma funcional, (véase tabla 2.5.4.2.).

Tabla 2.5.4.2. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Sector	Especificaciones	Término Independ	β	R ²	MAE	RMSE	Reset	White	JB	DW	n
MREA(1)	$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$		0.8146(○)	*	7.3	17.4	○	○	○	●	801
MREA(2)	$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$	○	0.8267(○)	*	7.8	17.1	○	○	○	●	801
<p><i>Nota:</i> ○ rechazo de la hipótesis nula (5%); ● aceptación hipótesis nula; -- test no concluyente; * valor que cumple la restricción $R^2 \geq 0.80$; Hipótesis parámetros del modelo $H_0 : \alpha = 0$ y $H_0 : \beta = 0$ (5%); R² coeficiente de determinación; MAE error absoluto medio; RMSE, raíz del error cuadrático medio; <i>Reset</i>: test de Ramsey (5%); <i>White</i>: test de White (5%); <i>JB</i>: test de Normalidad de Jarque-Bera (5%); <i>DW</i>: test de Durbin-Watson; n: tamaño muestra.</p>											
MREA(1): Modelo de regresión errores aditivos sin término independiente.											
MREA(2): Modelo de regresión errores aditivos con término independiente.											

Respecto a los posibles esquemas de comportamiento de la heterocedasticidad sólo uno garantiza que el modelo característico de ratio pueda ser superior al modelo de regresión, $u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i^2)$, (véase McDonald y Morris (1984), apartado 5.4.4. y tabla 3.5.4.2.).

Tabla 3.5.4.2.

Especificaciones		Esquema heterocedástico
$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$		$\varepsilon_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i^2)$
$y_i/x_i = \beta + \varepsilon_i/x_i$	↓	$\varepsilon_i/x_i \rightarrow N(0; \sigma^2)$
$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$		$\varepsilon_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i^2)$
$y_i/x_i = \alpha/x_i + \beta + \varepsilon_i/x_i$	↓	$\varepsilon_i/x_i \rightarrow N(0; \sigma^2)$

La detección de *heterocedasticidad*¹⁵⁵ en los errores de los modelos planteados es una tarea importante. Puede realizarse por métodos gráficos o mediante la utilización de test estadísticos. El primero de ellos consiste en representar gráficamente los errores del modelo o residuos (o algunas de sus transformaciones, como pueden ser, valor absoluto o valor al cuadrado) en función de cada una de las variables exógenas del modelo, ya que normalmente se supone a las variables causantes de la *heterocedasticidad* las propias del modelo estudiado. Si estos residuos crecen o decrecen con alguna variable escogida, será un síntoma de que esta variable es la causa de su presencia. En segundo lugar, están los contrastes de *heterocedasticidad*, donde el rechazo de la hipótesis nula, con un cierto nivel de error, supondría aceptar su presencia. Los contrastes más habituales¹⁵⁶ son: *White*, *Breusch-Pagan*, *Goldfeld* y *Quandt*, *Glesjer*. El primero de ellos, el contraste de *White* es el más general ya que no precisa de una especificación concreta de la heterocedasticidad bajo la hipótesis alternativa. En segundo lugar, el contraste de *Breusch-Pagan* también cubre un amplio espectro de situaciones de varianza no constante en el término de error del modelo¹⁵⁷. En tercer lugar, el test de *Goldfeld-Quant* recomendado para muestras de pequeño tamaño, permite introducir una restricción sobre la hipótesis alternativa. Considera que la estructura de la heteroscedasticidad se comporta como una relación monótona, creciente o decreciente, entre la varianza de las perturbaciones y el valor de uno de los regresores o de los valores estimados de la variable endógena.

¹⁵⁵ Los esquemas de dependencia funcional de la varianza de los errores más usuales son, en primer lugar, la varianza del término de perturbación es directamente proporcional a una variable exógena o explicativa “Z” o a alguna variable no presente en el propio modelo, $v[u_i] = \delta Z_i \quad \delta > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$, en segundo lugar, directamente proporcional al cuadrado de una variable “Z”, $v[u_i] = \delta Z_i^2 \quad \delta > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$, en tercer lugar, inversamente proporcional a una variable “Z”, $v[u_i] = \delta(1/Z_i) \delta > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$ o inversamente al cuadrado de una variable “Z”, $v[u_i] = \delta(1/Z_i^2) \delta > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$, en cuarto lugar, una función lineal de la variable “Z”, es decir, *heteroscedasticidad* aditiva, $v[u_i] = \delta_0 + \delta_1 Z_i \quad \delta_0 > 0, \delta_1 > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$ o una función exponencial de una variable “Z”, es decir, *heterocedasticidad* aditiva, $v[u_i] = e^{(\delta_0 + \delta_1 Z_i)} \quad \forall i = 1, \dots, N$, los dos últimos casos pueden generalizarse para más de una variable, (véase Artís, M; Clar, M; Barrio, T.; Guillén, M; Suriñach, J. (2000). **Tòpics d’ Econometria**, Ediuoc, Barcelona y Novalés, A. (1989). **Econometría**, McGraw-Hill, Madrid).

¹⁵⁶ Véase para un mayor desarrollo, Greene, W. H. (1993). **Econometric Analysis**, 2ª Ed., pp. 392-400.

¹⁵⁷ La expresión de la varianza de la perturbación es $\sigma_i^2 = h(z_i' \alpha)$, donde $h(\cdot)$ es una forma funcional cualquiera no especificada, “ α ” es un vector de coeficientes de orden “px1” no relacionados con el parámetro de la variable exógena y “ z_i ” es un vector de variables de orden “px1” que presumiblemente causan la heterocedasticidad. Sólo se debe especificar las variables que entran en la combinación lineal y no la forma funcional de $h(\cdot)$, (véase Johnston, J. (1987). **Métodos de Econometría**, Vicens Universidad, pp. 361-363).

En cuarto lugar está el contraste de *Glesjer*, el cual especifica en la hipótesis alternativa varios esquemas posibles para la heterocedasticidad a partir del valor absoluto de los errores mínimo cuadráticos o de su cuadrado. En nuestro caso se ha utilizado los errores al cuadrado,

$$e_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_i^{2h} + v_i \quad \forall i = 1 \dots n,$$

siendo,

$$h = \{-1, 1, (1/2), (-1/2)\}$$

así para cada uno de los modelos anteriores se contrasta la validez estadística del parámetro δ_1 ¹⁵⁸, (véase tabla 4.5.4.2.).

Tabla 4.5.4.2.

$h = \{-1, 1, (1/2), (-1/2)\}$	Contraste de Glesjer (5%)	Esquema heterocedástico
$h=1$	$e_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_i^2$	$u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i^2)$
$h = -1$	$e_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_i^{-2}$	$u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 (1/x_i^2))$
$h = 1/2$	$e_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_i^1$	$u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$
$h = -1/2$	$e_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_i^{-1}$	$u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 (1/x_i))$

El resultado obtenido para las dos especificaciones propuestas es el esquema,

$$u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$$

lo cual implica que para la muestra del sector estudiado los ratios no neutralizarán de forma correcta el efecto tamaño de las entidades, (véase tabla 5.5.4.2.).

Tabla 5.5.4.2.

Sector	Especificaciones	Contraste de Glesjer (5%)			
		$h=1$	$h = -1$	$h = 1/2$	$h = -1/2$
MREA(1)	$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$			*	
MREA(2)	$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$			*	
<i>Nota:</i> * especificación más significativa de heterocedasticidad.					
MREA(1): Modelo de regresión errores aditivos sin término independiente.					
MREA(2): Modelo de regresión errores aditivos con término independiente.					

¹⁵⁸ Si en ninguno de los modelos anteriores dicho parámetro no es significativo, entonces no existe heterocedasticidad o por lo menos, el regresor escogido no es el causante de este problema, se ha reducido el esquema de *Glesjer* al no considerar término independiente y el establecimiento de la siguiente hipótesis, $\delta_1 = \sigma^2$.

La validez econométrica de las especificaciones anteriores está vinculada a la muestra global utilizada. Es interesante comprobar si para las diferentes prestaciones (submuestras más homogéneas) se mantienen. En esta línea los resultados obtenidos son los siguientes¹⁵⁹. En primer lugar para el modelo (MREA(1)), de las nueve prestaciones, siete de ellas, poseen un grado de ajuste superior del 80%, ocho rechazan la presencia de homocedasticidad en los residuos¹⁶⁰, con un esquema $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i$, la totalidad rechaza la hipótesis de normalidad de los residuos, siete detectan la presencia de autocorrelación espacial de orden 1 y solo para una de las prestaciones se acepta que no existe error de especificación en la forma funcional. Para el modelo MREA(2) con término independiente, las conclusiones son muy parecidas, siete poseen un grado de ajuste superior al 80%, el término independiente es significativo en cinco de los nueve casos, ocho rechazan la presencia de homoscedasticidad en los residuos (con el mismo esquema funcional que el modelo MREA(1)), la totalidad rechaza la hipótesis de normalidad de los residuos, siete detectan la presencia de autocorrelación espacial de orden 1. Respecto al error en la especificación de la forma funcional, cuatro de nueve prestaciones se acepta que no existe error en la especificación de la forma funcional.

De forma sintética, los resultados para las dos especificaciones con errores aditivos nos indican los siguientes aspectos, en primer lugar, mayoritariamente el esquema de heterocedasticidad detectado por el contraste de Glesjer es del tipo, $\varepsilon_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$, lo cual implica que el modelo de ratio no neutralizará del todo eficientemente el efecto tamaño. En segundo lugar, la presencia de términos independientes significativos en cinco de las nueve prestaciones es un indicador de que existen otros factores a neutralizar a parte del tamaño¹⁶¹. Y en último lugar, cinco de las nueve prestaciones poseen un error en la especificación funcional que puede ser la causa de los problemas econométricos detectados.

¹⁵⁹ Véase anexo 2 y 3 de este apartado.

¹⁶⁰ El efecto que sobre la estimación mínimo-cuadrática de los parámetros, genera la presencia de heterocedasticidad, dependerá del grado de acierto sobre la forma funcional supuesta de la varianza de las perturbaciones. Una vez detectada dicha forma funcional, si deseamos conseguir fiabilidad en los contrastes, deberíamos estimar por Mínimo Cuadrados Generalizados (MCG) realizando una transformación sobre los datos.

¹⁶¹ El 50% de estas prestaciones poseen para el ratio de siniestralidad una asimetría muy elevada.

5.4.3. Análisis de Regresión del modelo de ratio: Especificación clásica con errores multiplicativos.

En el apartado anterior consideramos el error cometido con carácter aditivo, ahora planteamos la posibilidad de un comportamiento multiplicativo¹⁶², de forma que, mediante la transformación logarítmica (caso particular de la transformación Box-Cox) conseguimos las especificaciones siguientes, (véase tabla 1.5.4.3.).

Tabla 1.5.4.3.

Especificación original		Especificación final
$y_i = x_i^\beta e^{\varepsilon_i}$	➔	$\ln y_i = \beta \ln x_i + \varepsilon_i$
$y_i = e^\alpha x_i^\beta e^{\varepsilon_i}$	➔	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln x_i + \varepsilon_i$

La transformación realizada sobre los datos supone trabajar en la escala logarítmica¹⁶³, generándose a primera vista un comportamiento lineal, (véase ilustración 1.5.4.3.).

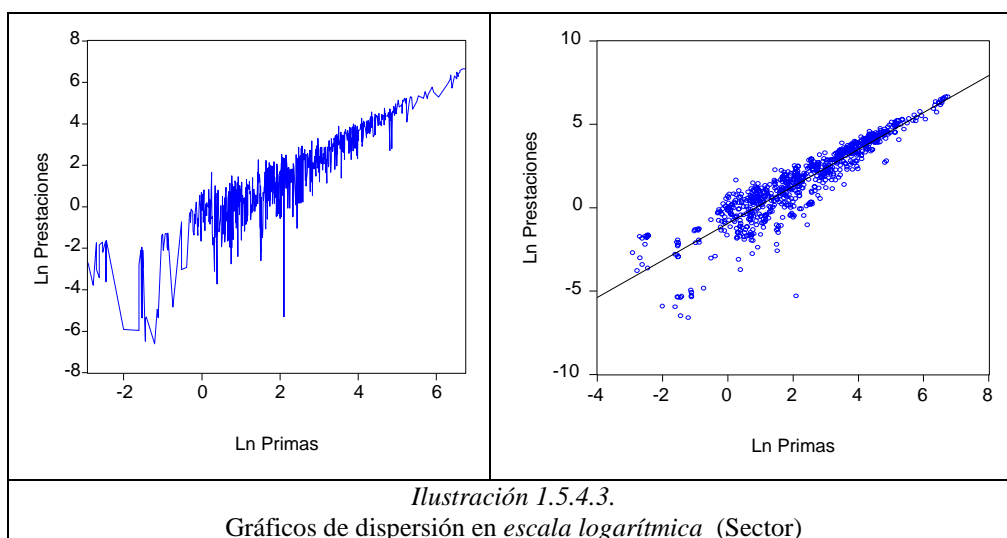


Ilustración 1.5.4.3. Gráficos de dispersión en escala logarítmica (Sector)

Para comprobar la hipótesis de proporcionalidad estricta en este caso, debemos plantear el contraste, $H_0 : \beta = 1$ para el modelo con término independiente. Si se acepta el mismo, entonces la especificación de ratio sería,

¹⁶² En este caso, supone considerar un término perturbación no negativo y con una menor problemática, ya que el ratio no depende del tamaño de “x”, permitiendo la comparativa entre ratios.

¹⁶³ Véase el anexo 1 de este apartado con el desglose por prestaciones en *escala logarítmica*.

$$\frac{y_i}{x_i} = e^\alpha \rightarrow \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \alpha$$

este aspecto supone considerar que sus componentes se distribuyen mediante modelos Lognormales y por lo tanto la media geométrica o mediana de la distribución Lognormal del ratio es equivalente a utilizar la media aritmética o la mediana para comportamientos Gaussianos, como valores “referencia” del sector. Pero recordamos que en nuestro caso, una de las componentes del ratio, la *siniestralidad*, posee un comportamiento diferente, Gamma.

Siguiendo las mismas pautas que en el apartado anterior, la tabla 2.5.4.3. contiene los dos modelos con errores multiplicativos que se tratarán a continuación.

Tabla 2.5.4.3. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Análisis mediante modelos de regresión con transformaciones en los datos originales		
MREM(3)	Modelo logarítmico de regresión	$\ln y_i = \beta \ln x_i + \varepsilon_i$
MREM(4)	Modelo logarítmico de regresión con término independiente	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln x_i + \varepsilon_i$
<p><i>Fuente:</i> García-Ayuso Covarsí, M. M. (1994). Fundamentos metodológicos del análisis Financiero mediante ratios, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, Sevilla, pp. 372-373; Berry, R.H. y Nix, S. (1991). Regression Analysis v. Ratios in the Cross-section Analysis of Financial Statements, <i>Accounting and Business Research</i>, Vol. 21 No. 82, pp. 107-117.</p>		
MREM (3): Modelo de regresión errores multiplicativos sin término independiente.		
MREM (4): Modelo de regresión errores multiplicativos con término independiente.		

Los resultados para el conjunto del sector son los siguientes para ambos modelos. Persisten todos los problemas de error en la forma funcional, heterocedasticidad, no normalidad de los residuos, autocorrelación espacial y se rechaza la hipótesis de proporcionalidad estricta, $H_0 : \beta = 1$. Lógicamente se ha producido una reducción considerable del error en términos de MAE y RMSE producido por el proceso de transformación de los datos que ocasiona trabajar en escala logarítmica, (véase tabla 3.5.4.3.).

Tabla 3.5.4.3. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Sector	Especificaciones	Término Independ	β	$H_0 : \beta = 1$	R^2	MAE	RMSE	Reset	White	JB	DW	n
MREM(3)	$\ln y_i = \beta \ln x_i + \varepsilon_i$		0.8591(○)	○		0.7	1.1	○	○	○	○	795
MREM(4)	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln x_i + \varepsilon_i$	○	1.1083(○)	○	*	0.6	0.9	○	○	○	○	795
<p><i>Nota:</i> ○ rechazo de la hipótesis nula (5%); ● aceptación hipótesis nula; -- test no concluyente; * valor que cumple la restricción $R^2 \geq 0.80$; Hipótesis parámetros del modelo $H_0 : \alpha = 0$ y $H_0 : \beta = 0$ (5%); R^2 coeficiente de determinación; MAE error absoluto medio; RMSE, raíz del error cuadrático medio; <i>Reset</i>: test de Ramsey (5%); <i>White</i>: test de White (5%); <i>JB</i>: test de Normalidad de Jarque-Bera (5%); <i>DW</i>: test de Durbin-Watson; n: tamaño muestra.</p>												
MREM (3): Modelo de regresión errores multiplicativos sin término independiente.												
MREM (4): Modelo de regresión errores multiplicativos con término independiente.												

Desde la óptica de los posibles esquemas de heterocedasticidad, los resultados obtenidos poseen la misma naturaleza de comportamiento que los modelos del apartado 5.4.2., $u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$, (véase tabla 4.5.4.3.).

Tabla 4.5.4.3.

Sector	Especificaciones	Contraste de Glesjer (5%)			
		$h=1$	$h=-1$	$h=1/2$	$h=-1/2$
MREM(3)	$\ln y_i = \beta \ln x_i + \varepsilon_i$			*	
MREM(4)	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln x_i + \varepsilon_i$			*	
<i>Nota:</i> * especificación más significativa de heterocedasticidad.					
MREM (3): Modelo de regresión errores multiplicativos sin término independiente.					
MREM (4): Modelo de regresión errores multiplicativos con término independiente.					

Si consideramos las diferentes prestaciones¹⁶⁴ las conclusiones son las siguientes. En primer lugar, sólo tres de las nueve prestaciones no poseen error en la forma funcional (no existe mejora alguna respecto a los modelos de regresión con errores aditivos). En segundo lugar y respecto a la heterocedasticidad, sigue existiendo una mayoría de prestaciones con este problema (seis de nueve prestaciones) siendo el esquema más frecuente, $u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$. En tercer lugar, persiste el problema de la no normalidad en los residuos, si bien en el caso actual, tres de nueve prestaciones han aceptado el test de Jarque-Bera. En último lugar, la autocorrelación espacial sigue persistiendo y no mejora entre los dos grupos de modelos estudiados. Respecto a la hipótesis de proporcionalidad estricta, ocho de las nueve prestaciones la rechazan, pero este resultado debe tomarse con cautela debido a los diferentes problemas detectados de carácter econométrico ya reseñados.

En síntesis no parece que exista una clara mejoría en la especificación multiplicativa frente la aditiva, debido a la naturaleza especial de los componentes del ratio de siniestralidad.

¹⁶⁴ Véase anexos 2 y 3 del apartado 5.4.2. Las diferentes prestaciones pueden considerarse como “sectores” homogéneos.

5.4.4. Especificación característica del modelo de ratio con errores aditivos.

La especificación característica de ratio se obtiene a partir del modelo de regresión con errores aditivos, $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, simplemente dividiendo ambos miembros por x_i ,

$$\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \beta + \left(\frac{\varepsilon_i}{x_i}\right) = \beta + \varepsilon_i^*$$

donde su validez dependerá de si los residuos (ε_i^*) son homocedásticos¹⁶⁵. Si poseen dicha naturaleza significaría que el efecto “tamaño” se ha neutralizado, pero si detectamos la presencia de *heteroscedasticidad* entonces, los ratios son “deflatores” imperfectos de la dimensión empresarial (Lev y Sunder (1979)). Como se ha realizado en capítulos anteriores, podemos ampliar el modelo incorporando un término independiente. En este caso la especificación es la siguiente, (véase tabla 1.5.4.4.),

$$\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \alpha \left(\frac{1}{x_i}\right) + \beta + \left(\frac{\varepsilon_i}{x_i}\right) = \alpha \left(\frac{1}{x_i}\right) + \beta + \varepsilon_i^*$$

La presencia de un término independiente significativo es una de las causas más frecuentes de la desviación del principio de proporcionalidad y supone asimetría en la distribución del ratio. El valor del coeficiente “ α ” es función de la variable “primas”, de modo que su valor absoluto será mayor cuanto menor sea la dimensión de la entidad analizada. En consecuencia existirá un *sesgo* en la estimación del parámetro “ β ” que será tanto menor cuanto mayor sea el tamaño de la compañía.

Tabla 1.5.4.4. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Modelo característico de ratio		
MCREA (5)	Modelo característico de los ratios	$y_i/x_i = \beta + \varepsilon_i/x_i$
MCREA (6)	Modelo característico de los ratios con término independiente	$y_i/x_i = \alpha/x_i + \beta + \varepsilon_i/x_i$
<p><i>Fuente:</i> García-Ayuso Covarsí, M. M. (1994). Fundamentos metodológicos del análisis Financiero mediante ratios, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, Sevilla, pp. 372-373; Berry, R.H. y Nix, S. (1991). Regression Analysis v. Ratios in the Cross-section Analysis of Financial Statements, <i>Accounting and Business Research</i>, Vol. 21 No. 82, pp. 107-117.</p>		
MCREA (5): Modelo característico de ratio sin término independiente con errores aditivos.		
MCREA (6): Modelo característico de ratio con término independiente con errores aditivos.		

¹⁶⁵ Este aspecto presupone que el comportamiento de los residuos en el modelo original sea del tipo, $u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i^2)$.

Los resultados obtenidos mediante la muestra global (*sector*) para el primero de los modelos especificados, el modelo sin término independiente (MCREA(5)), son los siguientes. Los residuos poseen una naturaleza no normal, que está influenciada por la propia naturaleza no Gaussiana del ratio de siniestralidad, (véase apartado 5.2.3.2.) y la constante, "β", es significativa con un valor de 66.02%. Ahora bien si consideramos la presencia de un término independiente en el modelo, MCREA(6), las conclusiones no indican problemas para poder utilizarlo. No normalidad en los residuos, error en la especificación de la forma funcional, heterocedasticidad y significación estadística en el término independiente, "α", (véase tabla 2.5.4.4.).

Tabla 2.5.4.4. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Sector	Especificaciones	Término Independ(α)	β	R ²	MAE	RMSE	Reset	White	JB	DW	n
MCREA(5)	$y_i/x_i = \beta + \varepsilon_i/x_i$		0.6602(o)		0.3	0.4	--	--	o	--	795
MCREA(6)	$y_i/x_i = \alpha/x_i + \beta + \varepsilon_i/x_i$	o	0.6309(o)		0.3	0.4	o	o	o	o	795

Nota: o rechazo de la hipótesis nula (5%); • aceptación hipótesis nula; -- test no concluyente; * valor que cumple la restricción $R^2 \geq 0.80$; Hipótesis parámetros del modelo $H_0 : \alpha = 0$ y $H_0 : \beta = 0$ (5%); R^2 coeficiente de determinación; MAE error absoluto medio; RMSE, raíz del error cuadrático medio; *Reset*: test de Ramsey (5%); *White*: test de White (5%); *JB*: test de Normalidad de Jarque-Bera (5%); *DW*: test de Durbin-Watson; *n*: tamaño muestra.

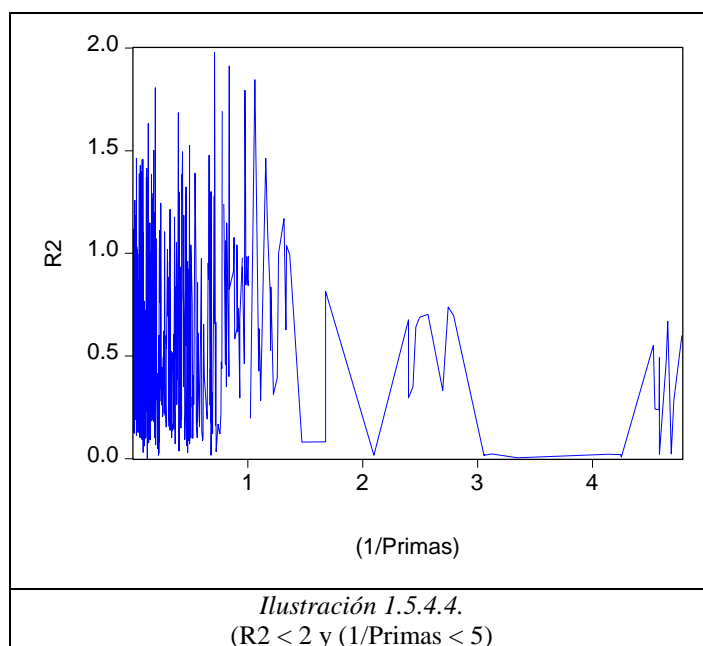
MCREA (5): Modelo característico de ratio sin término independiente con errores aditivos.
MCREA (6): Modelo característico de ratio con término independiente con errores aditivos.

Todas estas conclusiones nos indican la presencia de una forma no homogénea y un error en la especificación de la relación entre los componentes del ratio¹⁶⁶. De hecho el segundo modelo propuesto (MCREA(6)) nos indica la presencia de una relación lineal entre el ratio de siniestralidad y las primas (x_i), de forma que, conforme el tamaño de la compañía aumenta, el ratio de siniestralidad disminuye¹⁶⁷. De todas formas, si realizamos un gráfico de dispersión entre ambas, véase ilustración 1.5.4.4., observamos que para las entidades con mayores "tamaños" (inverso entre $[0;1]$) existe una cierta relación creciente pero con una gran variabilidad¹⁶⁸.

¹⁶⁶ Recordemos que el modelo más próximo a la explicación del ratio siniestralidad para el sector era el Modelo Gamma (sin extraer los valores atípicos), si realizamos el mismo ejercicio de búsqueda de modelos de probabilidad para los residuos, encontramos como modelo más cercano a la aceptación de la hipótesis el Modelo Logístico.

¹⁶⁷ Es lógico pensar que sea así ya que dicha variable se utiliza en la construcción del propio ratio.

¹⁶⁸ Véase anexo 1 de este apartado con el desglose por tipo de prestaciones.



Respecto a los esquemas de heterocedasticidad, el tránsito de una especificación a otra no ha supuesto ningún cambio de comportamiento, $u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$, (véase tabla 3.5.4.4.).

Tabla 3.5.4.4.

Sector	Especificaciones	White	Contraste de Glesjer(5%)			
			$h=1$	$h=-1$	$h=1/2$	$h=-1/2$
MCREA(5)	$y_i/x_i = \beta + \varepsilon_i/x_i$	--				
MCREA(6)	$y_i/x_i = \alpha/x_i + \beta + \varepsilon_i/x_i$	o			*	
<i>Nota:</i> * especificación más significativa de heterocedasticidad.						
MCREA (5): Modelo característico de ratio sin término independiente con errores aditivos						
MCREA (6): Modelo característico de ratio con término independiente con errores aditivos						

Si consideramos las diferentes prestaciones¹⁶⁹ las conclusiones son, que cinco de las nueve prestaciones poseen normalidad en los residuos, los problemas de heterocedasticidad se han reducido en un 30% de los casos, sigue existiendo en cinco de los nueve casos problemas de error en la especificación funcional, el término “ α ” es significativo en ocho de los nueve prestaciones disponibles, generando dudas de la utilidad del modelo de ratio con deflactor de la dimensión empresarial, y sobre la especificación de los modelos planteados, quizás formas más flexibles puedan ayudar en este campo.

¹⁶⁹ Véase anexos 2 y 3 del apartado 5.4.2.

5.4.5. Especificación característica del modelo de ratio con errores multiplicativos. Propuesta de modelo de ratio umbral $[\alpha; \beta; \delta_x]$.

Existen nuevas líneas de investigación que definen nuevas especificaciones del modelo característico de ratio con mayores grados de libertad, así los trabajos realizados por Trigueiros (1997) arrojan nuevos puntos de vista. Considera que en muchos de los casos la no-proporcionalidad de los ratios es debida a la presencia de términos independientes que representan aspectos fijos en la relación. Por esta razón propone un modelo de tres parámetros denominado modelo de ratio *umbral*¹⁷⁰, uno de ellos, “ δ ”, captura el desplazamiento de la distribución causada por los efectos fijos. Dicha transformación puede aplicarse a las dos variables $[y; x]$ o a una sola de ellas. En este caso sólo se plantea el *umbral* para la variable “ x_i ” (*primas*), (véase tabla 1.5.4.5.).

Tabla 1.5.4. 5.

Especificación original		Especificación transformada	Especificación final
$(y_i / (x_i - \delta_x)) = P u_{(y/x)}$	→	$\ln y_i - \ln (x_i - \delta_x) = \ln P + \ln u_{(y/x)}$	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln (x_i - \delta_x) + \varepsilon_i^*$

Nota: “ P ” es la proporción esperada entre $[y; x]$; $u_{(y/x)}$ son los residuos específicos de cada compañía que son independientes de $[y; x]$, siendo, $\ln P = \alpha$ y $\ln u_{(y/x)} = \varepsilon_i^*$.

La especificación del modelo de ratio a través de modelos de regresión supone que los parámetros $[\alpha; \beta]$ están influenciados por la matriz de varianzas-covarianzas de las dos componentes, $[x; y]$, si los ratios los consideramos simples proporciones, entonces para obtener la “norma” o *benchmark* de la industria, sólo se necesitan los valores esperados de sus componentes. El método del ratio umbral permite estimar la proporción esperada independientemente de la correlación existente entre los componentes que lo generan. En este caso la no-proporcionalidad se obtiene mediante la constante, ” δ ”, que supone un desplazamiento en una de las variables, (véase tabla 2.5.4.5.).

¹⁷⁰ La diferencia básica entre el modelo de ratio umbral respecto al modelo de regresión consiste en que el primero no requiere consideraciones sobre el comportamiento de la matriz de varianzas-covarianzas de los componentes del ratio, véase Trigueiros, D. (1997). **Non-proportionality in ratios: An Alternativa Approach**, *British Accounting Review*, No. 9, pp. 213-230.

Tabla 2.5.4.5. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Modelo característico de ratio		
MCREM(7)	Modelo de ratio umbral con término independiente $(\alpha, \beta, \delta_x)$	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln(x_i - \delta_x) + \varepsilon_i^*$
Fuente: Trigueiros, D. (1997). Non-proportionality in ratios: An Alternativa Approach. <i>British Accounting Review</i> , No. 29, pp. 213-230.		
MCREM(7): Modelo característico de ratio con errores multiplicativos (ratio <i>umbral</i>).		

Los resultados obtenidos para la muestra global son los siguientes, el parámetro “ δ_x ” es significativo, pero su presencia no corrige los problemas persistentes en las anteriores especificaciones: heterocedasticidad, error en la forma funcional, no normalidad en los residuos, autocorrelación espacial y término independiente significativo, (véase tabla 3.5.4.5.).

Tabla 3.5.4.5. Diferentes especificaciones del modelo de ratio.

Sector	Especificaciones	α	β	δ_x	R^2	MAE	RMSE	Reset	White	JB	DW	n
MCREM(7)	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln(x_i - \delta_x) + \varepsilon_i^*$	o	1.152o	-0.083o	*	0.6	0.9	o	o	o	o	795
Nota: o rechazo de la hipótesis nula (5%); • aceptación hipótesis nula; -- test no concluyente; * valor que cumple la restricción $R^2 \geq 0.80$; Hipótesis parámetros del modelo $H_0 : \alpha = 0$ y $H_0 : \beta = 0$ (5%); R^2 coeficiente de determinación; MAE error absoluto medio; RMSE, raíz del error cuadrático medio; <i>Reset</i> : test de Ramsey (5%); <i>White</i> : test de White (5%); <i>JB</i> : test de Normalidad de Jarque-Bera (5%); <i>DW</i> : test de Durbin-Watson; n: tamaño muestra; δ_x , expresado en Mill Ptas.												
MCREM(7): Modelo característico de ratio con errores multiplicativos (ratio <i>umbral</i>).												

Respecto al esquema de heterocedasticidad para el sector, persiste el mismo esquema detectado en ocasiones anteriores, es decir, $u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$, (véase tabla 4.5.4.5.).

Tabla 4.5.4.5.

Sector	Especificaciones	White	Contraste de Glesjer (5%)			
			$h=1$	$h=-1$	$h=1/2$	$h=-1/2$
MCREM(7)	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln(x_i - \delta_x) + \varepsilon_i^*$	o			*	
Nota: * especificación más significativa de heterocedasticidad.						
MCREM(7): Modelo característico de ratio con errores multiplicativos (ratio <i>umbral</i>).						

Si profundizamos en los resultados obtenidos para cada una de las prestaciones¹⁷¹, las conclusiones son las siguientes. En primer lugar, en algunas prestaciones no ha sido posible el cálculo de los parámetros desconocidos (dos prestaciones de nueve). En segundo lugar, sólo cuatro prestaciones poseen el parámetro “ δ_x ” significativo, los problemas de heterocedasticidad han disminuido, pero a costa de la normalidad de los residuos. En tercer lugar, siguen existiendo indicios de error de especificación funcional. Y en último lugar, la

¹⁷¹ Véase anexo 2 y 3 del apartado 5.4.2.

detección de esquemas de heterocedasticidad mediante las regresiones auxiliares de *Glesjer*, en muchos casos no ha sido posible.

Una vez analizado desde el punto de vista econométrico todas las especificaciones de carácter rígido planteadas¹⁷² (entre uno y tres parámetros), recogemos en la tabla 5.5.4.5. la frecuencia de todos aquellos problemas detectados. Es decir, término independiente significativo, presencia de error de especificación funcional, heterocedasticidad en los residuos y esquema más frecuente, no normalidad en los residuos y presencia de autocorrelación espacial.

Tabla 5.5.4.5.

Especificaciones	Sector			Esquemas de Heterocedasticidad				JB	DW
	α	Reset	White	$h=1$	$h=-1$	$h=1/2$	$h=-1/2$		
MREA(1)		8	8	2		6		9	7
MREA(2)	5	5	8	1		6	1	9	7
MREM(3)		9	7	1		6		6	9
MREM(4)	9	6	6			5	1	6	8
MCREA(5)								5	8
MCREA(6)	8	5	5	2	1	2		4	8

Nota: número de veces que se ha detectado cada uno de los problemas econométricos reseñados.
Reset: test de Ramsey (5%); *White:* test de White (5%); *JB:* test de Normalidad de Jarque-Bera (5%);
DW: test de Durbin-Watson;

Las conclusiones son, en primer lugar, la especificación característica de ratio es relativamente mejor por las razones siguientes: reduce en un 25% en promedio el error en la forma funcional y los problemas de heterocedasticidad, reduce casi en un 50% los problemas de no normalidad de los residuos. Pero persiste la significación del término independiente (una de las posibles causas de la no proporcionalidad) y la autocorrelación espacial. En segundo lugar, el esquema de heterocedasticidad más frecuente es $u_i \rightarrow N(0; \sigma^2 x_i)$. El reducido tamaño muestral en algunos casos y la posibilidad de relaciones no lineales de carácter desconocido que vinculen las dos componentes del ratio, pueden ser la causa de la presencia de estos problemas econométricos, es especial el error en la especificación funcional. Como consecuencia proponemos utilizar como alternativa, los modelos de regresión de Box-Cox (de dos y tres parámetros), (véase apartado 5.4.6.).

¹⁷² MREA(1): Modelo de regresión errores aditivos sin término independiente, MREA(2): Modelo de regresión errores aditivos con término independiente, MREM (3): Modelo de regresión errores multiplicativos sin término independiente, MREM (4): Modelo de regresión errores multiplicativos con término independiente, MCREA (5): Modelo característico de ratio con errores aditivos sin término independiente, MCREA(6): Modelo característico de ratio con errores aditivos con término independiente. El modelo de ratio *umbral* (MCREM(7)) no se ha considerado, ya que debido a la imposibilidad del cálculo para algunas prestaciones, no es comparable.

5.4.6. Especificación flexible mediante la transformación de *Box-Cox* del modelo de ratio.

Los apartados anteriores contienen especificaciones para el modelo de ratio mediante los modelos de regresión con errores aditivos y multiplicativos. Dichos modelos poseen una estructura funcional rígida, gobernada por uno, dos o tres parámetros como máximo. En este apartado proponemos especificaciones más flexibles a través de la transformación de *Box-Cox*¹⁷³ (Box y Cox (1964)).

La regresión de Box-Cox permite paralelismos con las dos líneas de análisis utilizadas, los Modelos de Regresión y los Modelos Característicos de ratio. Es decir los modelos MREA(1), MREM(3) y MREM(4) pueden considerarse casos particulares de la regresión de Box-Cox de un solo parámetro (FFG(1)) y el modelo MCREA(6), de dos parámetros (FFG(2)), (véase tabla 1.5.4.6.).

Tabla 1.5.4.6.

Especificaciones Modelo de regresión		Especificaciones Modelo de ratio	
MREA(1)	$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$		
MREM(3)	$\ln y_i = \beta \ln x_i + \varepsilon_i$		
MREM(4)	$\ln y_i = \alpha + \beta \ln x_i + \varepsilon_i$	MCREA(6)	$y_i/x_i = \alpha/x_i + \beta + \varepsilon_i/x_i$
	↓		↓
FFG(1)	$y_i^{(\lambda)} = \alpha + \beta x_i^{(\lambda)} + \varepsilon_i$ ($\lambda_1 = \lambda_2$)	FFG(1)	$((y_i/x_i))^\lambda = \beta + \alpha \left(\frac{1}{x_i}\right)^\lambda + \varepsilon_i^*$ $H_0 : \lambda = 1$
FFG(2)	$y_i^{(\lambda_1)} = \alpha + \beta x_i^{(\lambda_2)} + \varepsilon_i$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)	FFG(2)	$((y_i/x_i))^{\lambda_1} = \beta + \alpha \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\lambda_2} + \varepsilon_i^*$ $H_0 : \lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1$
MREA(1): Modelo de regresión errores aditivos sin término independiente. MREM(3): Modelo de regresión errores multiplicativos sin término independiente. MREM(4): Modelo de regresión errores multiplicativos con término independiente. MCREA(6): Modelo característico de ratio con errores aditivos con término independiente. FFG(1): Forma Funcional Generalizada ($\lambda_1 = \lambda_2$). FFG(2): Forma Funcional Generalizada ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).			

¹⁷³ Véase su utilización frente la presencia de relaciones no lineales, Hans Franses, P. ; Bruin, P. (2002). **On data transformations and evidence of nonlinearity**, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 40, No. 3, pp. 621-632.

Así en primer lugar, y en la línea de los trabajos de Sundarsanam y Taffler¹⁷⁴ (1995), especificamos un modelo de tres parámetros¹⁷⁵, $[\alpha; \beta; \lambda]$, que incluye como casos particulares, el modelo Lineal¹⁷⁶ y el modelo Loglineal, permitiendo su contraste econométrico posterior de dichas formas funcionales y la comprobación de la hipótesis de proporcionalidad estricta en ambas especificaciones mediante el planteamiento de las siguientes hipótesis,

$$H_0 : \alpha = 0 \text{ y } H_0 : \beta = 1$$

respectivamente. Además mediante el planteamiento de un modelo recíproco (caso particular del Box-Cox), contrastaremos la validez de la forma funcional del modelo característico de ratio¹⁷⁷ ($H_0 : \lambda = 1$), (véase apartado 5.4.6.1.).

En segundo lugar, presentamos un modelo de regresión de Box-Cox más general con cuatro parámetros, $[\alpha; \beta; \lambda_1; \lambda_2]$, donde “ λ_1 ” y “ λ_2 ”, suponen transformaciones distintas sobre las variables, $[y; x]$. A través de este modelo podemos realizar un paralelismo entre un modelo recíproco y el propio modelo característico de ratio con término independiente, para posteriormente realizar su contraste (caso particular $H_0 : \lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1$), (véase apartado 5.4.6.2.).

5.4.6.1. Contraste de la forma funcional del modelo de ratio: *Forma Funcional Generalizada de Box-Cox* (FFG(1)) ($\lambda_1 = \lambda_2$).

La transformación de Box-Cox, posee la expresión formal,

$$x^{(\lambda)} = (x^\lambda - 1/\lambda)$$

que aplicada solo a la variable explicativa, x_i , nos genera el modelo de regresión siguiente,

$$y_i = \alpha + \beta x_i^{(\lambda)} + \varepsilon_i,$$

donde los parámetros, $[\alpha; \beta; \lambda]$, pueden ser estimados por mínimos cuadrados ordinarios. Existen diferentes posibilidades de transformación, por ejemplo, se utiliza para cada variable independiente la misma “ λ ” o podemos tomar valores diferentes para cada variable

¹⁷⁴ Véase Sudarsanam, P. S. ; Taffler, R. J. (1995). **Financial ratio proportionality and inter-temporal stability: An empirical analysis**, *Journal of Banking & Finance*, 19, pp. 45-60.

¹⁷⁵ La transformación se realiza de la misma forma para las dos variables, $[y; x]$.

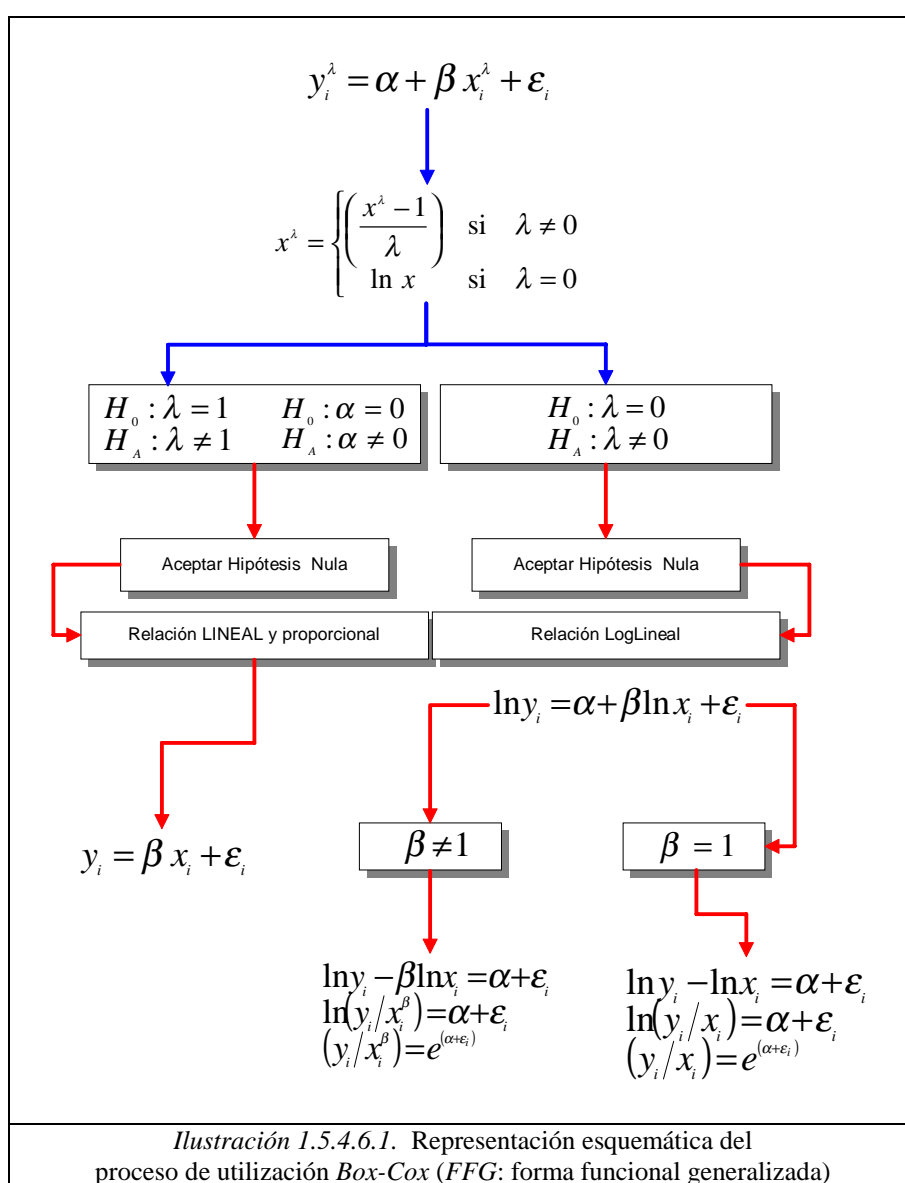
¹⁷⁶ Se comprueba la hipótesis de proporcional sólo para la especificación $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$.

¹⁷⁷ Existen otras formas de contrastar la forma funcional, véase Zheng, J. X. (1996). **A consistent test of functional form via nonparametric estimation techniques**, *Journal of Econometrics*, 75, pp. 263-289.

exógena¹⁷⁸. Las posibilidades pueden ampliarse si consideramos que también la variable dependiente puede ser transformada por el mismo parámetro “ λ ” que la variable independiente. Así en este caso tenemos el siguiente modelo¹⁷⁹,

$$y_i^{(\lambda)} = \alpha + \beta x_i^{(\lambda)} + \varepsilon_i$$

siendo un caso particular interesante¹⁸⁰, cuando $\lambda = 0$. Este aspecto permitirá construir un contraste para validar las siguientes formas funcionales, en primer lugar, Lineal y Proporcional y en segundo lugar, Loglineal, (véase ilustración 1.5.4.6.1.).



¹⁷⁸ En nuestro caso solo poseemos una variable explicativa, ingresos por *primas*.

¹⁷⁹ Un caso particular es la transformación de los datos mediante una raíz cuadrada, $\lambda^{(1/2)}$.

¹⁸⁰ En este caso mediante la transformación por la regla de L'Hôpital es idéntico a aplicar, $\ln x$.

El mecanismo de estimación de la transformación de Box-Cox requiere plantear una función de verosimilitud¹⁸¹ especificada de la siguiente forma,

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln y_i - \frac{1}{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2} \sum_{i=1}^n (y_i^{(\lambda)} - \beta x_i^{(\lambda)})^2 - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$$

donde, en primer lugar, los valores máximos verosímiles $[\lambda; \beta]$ se obtienen maximizando dicha función y en segundo lugar, el valor de los errores estándares del modelo, $\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$, es estimado por mínimos cuadrados ordinarios. Dicho cálculo debe hacerse con antelación al planteamiento de la función de verosimilitud.

Tal y como se ha comentado, el planteamiento anterior permite la posibilidad de realizar un contraste econométrico de significación de la forma funcional con dos posibilidades de contraste. En primer lugar, la hipótesis *Lineal*, ($\lambda = 1$), que de forma adicional permite comprobar la existencia de proporcionalidad ($\alpha = 0$). Y en segundo lugar, la hipótesis *Loglineal*, ($\lambda = 0$). La hipótesis alternativa recoge cualquier otra especificación desconocida.

La estimación del parámetro " λ " puede realizarse por intervalo al 95%, mediante la incorporación de restricciones paramétricas sobre el estadístico *ratio de verosimilitud*. Dicho estadístico posee para la especificación *Lineal*, la siguiente forma,

$$\chi(1) = -2[\ln L(\theta) - \ln L(\hat{\theta}_{MLE})] = -2[\ln L(1) - \ln L(\hat{\lambda}_{MLE})]$$

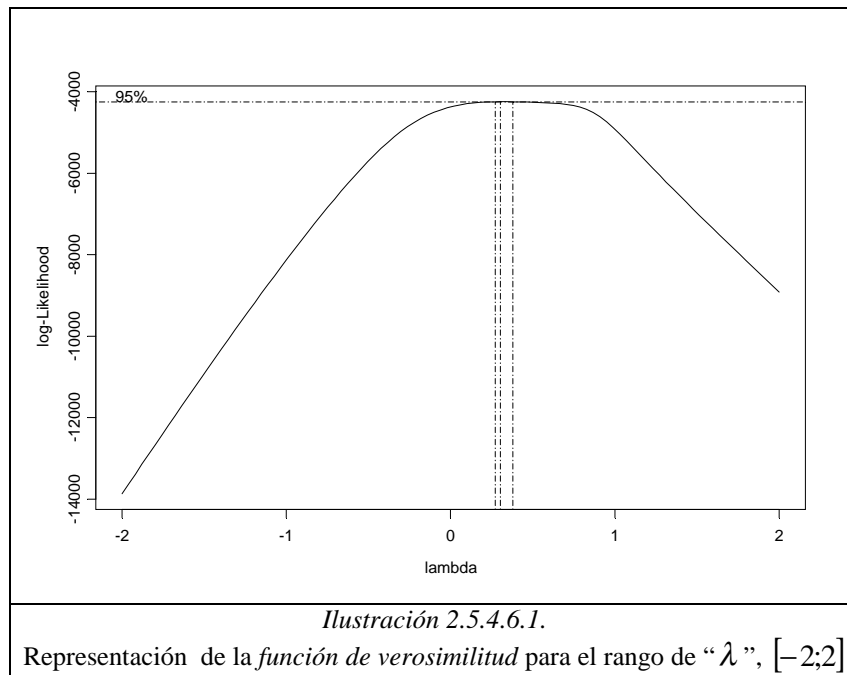
y para la especificación *Loglineal*,

$$\chi(1) = -2[\ln L(\theta) - \ln L(\hat{\theta}_{MLE})] = -2[\ln L(0) - \ln L(\hat{\lambda}_{MLE})]$$

Para poder encontrar el valor de " λ " óptimo se ha recalculado la función de verosimilitud para un rango $[-2;2]$ ¹⁸².

¹⁸¹ Si su valor es desconocido, el modelo de regresión se convierte en un modelo no lineal. El valor óptimo de " λ " se calcula obteniendo el máximo de la función de verosimilitud para un rango $[-2;2]$ con incrementos de 0.1.

¹⁸² Se ha utilizado la función *boxcox* de la librería MASS incorporada en el software **©SPLUS**, véase Venables, W.N. ; Ripley, B.D. (1999). **Modern Applied Statistics with S-PLUS**, Springer. Los resultados, en formato gráfico, están recogidos en la ilustración 2.5.4.6.1. donde para diferentes valores de " λ " y de la función de verosimilitud, existe un intervalo de confianza del parámetro al 95% alrededor de un valor máximo.



El modelo propuesto es el siguiente,

$$y_i^{(\lambda)} = \alpha + \beta x_i^{(\lambda)} + \varepsilon_i,$$

donde, “ y_i ”, son los importes pagados por prestaciones y “ x_i ”, los primas ingresadas. La tabla 2.5.4.6.1. recoge dos aspectos, en primer lugar, los parámetros estimados¹⁸³ y en segundo lugar, el resultado del contraste a través de los estadísticos $\chi_{0.05}^2$ ¹⁸⁴.

Las hipótesis nulas planteadas a tal efecto son¹⁸⁵,

$$H_0 : \lambda = 1 ; \alpha = 0$$

su rechazo supone considerar que la forma funcional Lineal y Proporcional no es la correcta y

$$H_0 : \lambda = 0$$

donde su rechazo nos indica que nos es correcta el planteamiento Loglineal¹⁸⁶.

¹⁸³ Los parámetros estimados simultáneamente por máxima verosimilitud (MV) son $(\lambda, \alpha, \beta, \sigma_{\varepsilon}^2)$.

¹⁸⁴ La estimación se ha realizado mediante el software econométrico ©Eviews.

¹⁸⁵ Se ha utilizado el contraste de Wald para comprobar la veracidad de las hipótesis planteadas. El *estadístico* en cuestión se distribuye como una $\chi_{(q)}^2$, siendo “ q ” es el número de restricciones consideradas en la hipótesis nula.

¹⁸⁶ Para comprobar la hipótesis de proporcionalidad estricta entre el numerador y denominador del ratio, siempre que la especificación fuese Loglineal, deberíamos realizar el contraste siguiente $H_0 : \beta = 1$.

Tabla 2.5.4.6.1.

<i>Prestación_i</i>	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\sigma_{\varepsilon_i}^2$	$H_0 : \lambda = 1$ $H_0 : \alpha = 0$	$H_0 : \lambda = 0$
<i>Sector</i>	0.2790	-0.8515	0.9507	1.1129	o	o
<i>Enfermedad</i>	0.2806	-0.7996	0.9550	1.1872	o	o
<i>Larga Enfermedad</i>	0.2780	-0.8200	0.9421	1.0279	o	o
<i>Invalidez</i>	0.1536	-0.3796	0.8315	0.6912	o	o
<i>Inter. Quirúrgica</i>	0.3916	-0.9513	0.9291	1.5755	o	o
<i>Hosp. Quirúrgica</i>	0.3004	-0.7997	0.9048	1.1258	o	o
<i>Accidentes</i>	0.2053	-1.4141	1.0823	0.8348	o	o
<i>Sepelio</i>	0.2571	-1.0714	0.9578	0.9754	o	o
<i>Serv. Automovilistas</i>	0.3604	-1.1344	0.9410	1.7633	o	o
<i>Asistencia Sanitaria</i>	0.3115	-0.8831	0.9512	1.4948	o	o

Nota: o rechazo de la hipótesis nula (5%) ; • aceptación hipótesis nula (5%).

Los resultados obtenidos nos indican dos aspectos. El primero de ellos es, que se rechazan las hipótesis de forma funcional *Lineal* y la proporcionalidad y *Loglineal*, tanto para el sector como para cada una de las prestaciones, subsectores más homogéneos. En segundo lugar, todas las prestaciones han necesitado una transformación de los datos $\hat{\lambda} < 0.5$.

Una vez estimado el valor de “ λ ”, se aplica dicha transformación a los datos originales para comprobar estadísticamente la bondad de la misma, a través del análisis de los residuos. Las conclusiones son las siguientes¹⁸⁷, en primer lugar, se mantienen las prestaciones con error en la especificación funcional, en segundo lugar, se han reducido a la mitad los problemas de heterocedasticidad, en tercer lugar, se ha solucionado el problema de normalidad en los residuos en un 70% de los casos y en último lugar, siguen existiendo los problemas de autocorrelación espacial, (véase tabla 3.5.4.6.1.).

La transformación especificada no permite obtener unos resultados claramente mejores, siendo dos las posibles razones. La primera de ellas es la utilización de la misma transformación para las dos variables¹⁸⁸ $[y;x]$ y la segunda puede ser debida a que la especificación más correcta es el modelo característico de ratio.

¹⁸⁷ Por esta razón proponemos en el apartado siguiente una transformación diferente para cada variable, véase apartado 5.4.6.2.

¹⁸⁸ Dichas variables poseen dinámicas diferentes, por un lado tenemos las prestaciones, con un carácter marcadamente aleatorio y por otro, las primas, que dependen de las condiciones del mercado.

Tabla 3.5.4.6.1.

$Prestación_i$	$\hat{\lambda}$	Término Independ	β	R^2	MAE	RMSE	Reset	White	JB	DW	n
Sector	0.3488	o	0.9317(o)	*	0.33	0.42	o	o	o	o	795
Enfermedad	0.2806	o	0.9486(o)	*	0.21	0.26	o	•	•	o	142
L. Enfermedad	0.2780	o	0.9875(o)	*	0.21	0.25	•	o	•	o	50
Invalidez	0.1536	o	0.4826(o)		0.08	0.01	o	•	•	o	63
Inter. Quirúr	0.3916	o	0.9740(o)	*	0.26	0.32	o	•	•	o	126
Hosp. Quirúr	0.3004	•	0.8173(o)	*	0.19	0.24	o	o	o	o	108
Accidentes	0.2053	o	1.0045(o)	*	0.14	0.18	•	o	•	o	81
Sepelio	0.2571	o	1.0016(o)	*	0.11	0.15	o	o	o	o	72
Serv. Automov.	0.3604	o	1.0279(o)	*	0.40	0.47	•	•	•	o	63
Asist. Sanitaria	0.3115	o	0.9875(o)	*	0.34	0.43	•	•	o	•	90

Nota: o rechazo de la hipótesis nula (5%); • aceptación hipótesis nula; -- test no concluyente; * valor que cumple la restricción $R^2 \geq 0.80$; Hipótesis parámetros del modelo $H_0 : \alpha = 0$ y $H_0 : \beta = 0$ (5%); R^2 coeficiente de determinación; MAE error absoluto medio; RMSE, raíz del error cuadrático medio; *Reset*: test de Ramsey (5%); *White*: test de White (5%); *JB*: test de Normalidad de Jarque-Bera (5%); *DW*: test de Durbin-Watson; n : tamaño muestra.

Si consideramos que el modelo característico de ratio puede ser superior, podemos utilizar el paralelismo existente entre dicha especificación,

$$y_i/x_i = \alpha/x_i + \beta + \varepsilon_i/x_i,$$

y el modelo recíproco (caso particular de la regresión Box-Cox),

$$\left((y_i/x_i)\right)^\lambda = \beta + \alpha \left(\frac{1}{x_i}\right)^\lambda + \varepsilon_i^*$$

siendo, (y_i/x_i) el ratio de siniestralidad y “ x_i ” las primas ingresadas y plantear el siguiente contraste,

$$H_0 : \lambda = 1$$

Las conclusiones son las siguientes. En primer lugar, sólo para la prestación de Intervención Quirúrgica se acepta el modelo característico de ratio con término independiente. En segundo lugar, existen tres prestaciones donde el parámetro “ λ ” no es significativo¹⁸⁹ y en último lugar, en tres de las nueve prestaciones no ha sido posible su estimación¹⁹⁰, (véase tabla 4.5.4.6.1.).

¹⁸⁹ Por esta razón no se presentan los resultados econométricos de los datos originales aplicando las transformaciones obtenidas.

¹⁹⁰ Véase *Sepelio*, *Servicios a Automovilistas* y *Asistencia Sanitaria*.

Tabla 4.5.4.6.1.

$Prestación_i$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$	$H_0 : \lambda = 1$
Sector	0.5398	•	-0.4371	0.2721	o
Enfermedad	0.5172	-0.2649	-0.5987	0.2984	o
Larga Enfermedad	•	•	-0.6800	0.5623	o
Invalidez	•	0.5160	-0.5895	0.5233	o
Inter. Quirúrgica	0.7808	•	•	0.1110	•
Hosp. Quirúrgica	0.7258	-0.1924	-0.7620	0.0767	o
Accidentes	•	-0.3081	-1.6101	0.2372	o
Sepelio					
Serv. Automovilistas					
Asistencia Sanitaria					

Nota: o rechazo de la hipótesis nula (5%) ; • aceptación hipótesis nula (5%).

5.4.6.2. Contraste de la forma funcional del modelo de ratio: Forma Funcional Generalizada de Box-Cox (FFG(2)) ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Tal y como se ha comentado, existe otra posibilidad y es transformar con "λ" diferentes a las dos variables definidas. Este aspecto genera todo un conjunto de casos particulares de interés: el modelo *Lineal*, modelo *Doblemente Logarítmico*, modelo *Semilogarítmico*, modelo *Logarítmico-Recíproco* y el modelo *Recíproco*, (véase ilustración 1.5.4.6.2.).

La expresión en este caso se define como,

$$y_i^{(\lambda_1)} = \alpha + \beta x_i^{(\lambda_2)} + \varepsilon_i$$

y a través del mismo procedimiento anterior, las conclusiones son las siguientes, (véase tablas 1.5.4.6.2. y 2.5.4.6.2.). En primer lugar, en todos los casos se rechazan las hipótesis de especificación Lineal y Proporcional y Loglineal. En segundo lugar, la doble transformación ha permitido anular los problemas de heterocedasticidad en casi su totalidad, pero persisten los problemas de no normalidad en los residuos y de error en la especificación funcional. Por lo tanto, los resultados obtenidos a través del modelo de cuatro parámetros no mejoran sustancialmente los conseguidos con modelos de tres parámetros.

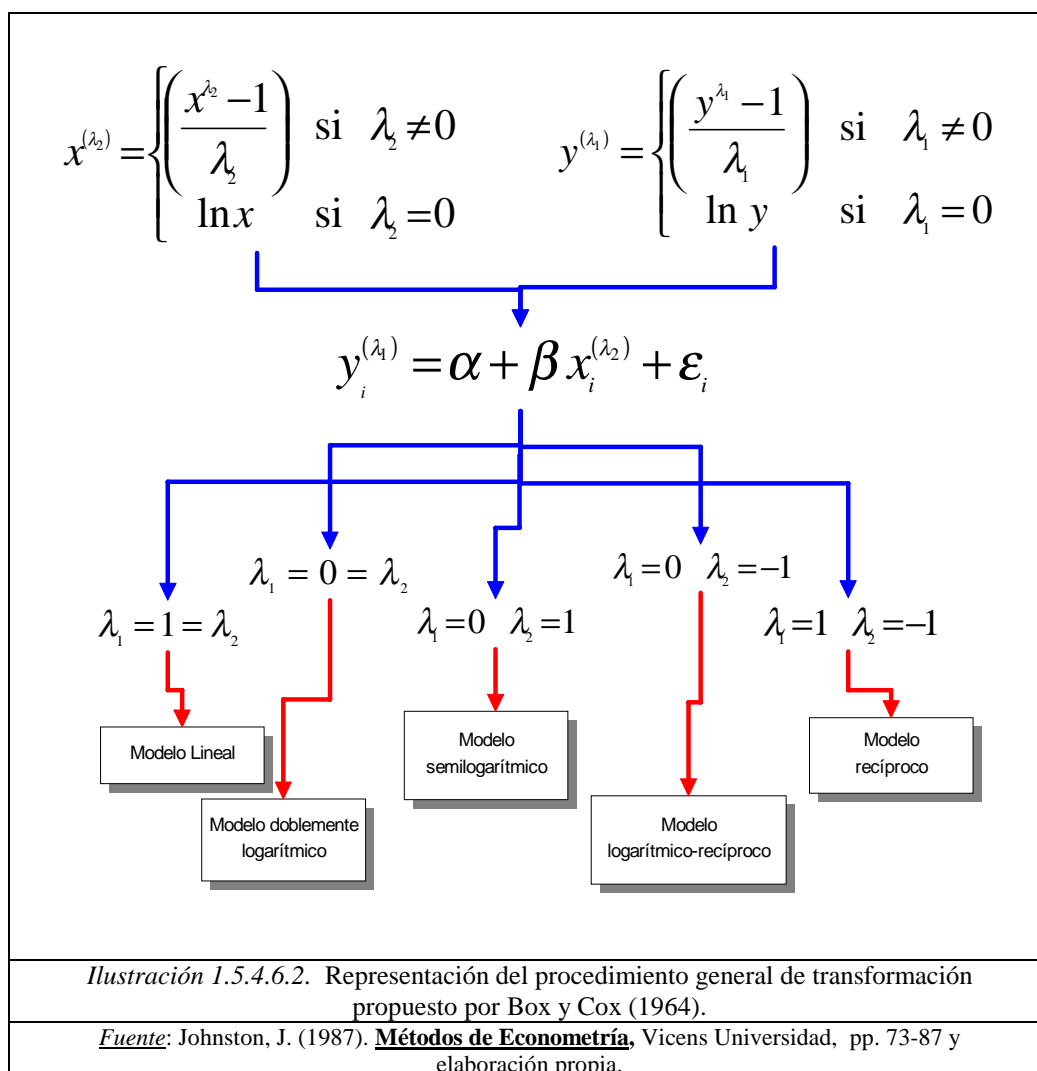


Tabla 1.5.4.6.2.

$Prestación_i$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$	$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $H_0: \alpha = 0$	$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
Sector	0.2593	0.5123	•	0.3883	1.6707	o	o
Enfermedad	0.2278	3.6817	1.8141	0.0001	6.3763	o	o
Larga Enfermedad	0.2472	-10.6650	•	0.0001	5.4716	o	o
Invalidez	0.1486	•	•	0.8126	0.7859	o	o
Inter. Quirúrgica	•	5.8969	0.6594	0.0001	2.4010	o	o
Hosp. Quirúrgica	•	7.2444	0.5823	•	2.2449	o	o
Accidentes	-0.4354	4.2067	•	•	1.6793	o	o
Sepelio	-0.1980	6.0717	0.4794	•	0.7510	o	o
Serv. Automovilistas	-0.6264	6.1062	0.5465	•	0.7116	o	o
Asistencia Sanitaria	-0.5521	4.4069	2.2840	•	3.3067	o	o

Nota: o rechazo de la hipótesis nula (5%) ; • aceptación hipótesis nula (5%).

Tabla 2.5.4.6.2.

<i>Prestación_i</i>	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	<i>Término Independ</i>	β	R^2	<i>MAE</i>	<i>RMSE</i>	<i>Reset</i>	<i>White</i>	<i>JB</i>	<i>DW</i>	<i>n</i>
<i>Sector</i>	0.2593	0.5123	o	0.1855(o)	*	0.27	0.34	o	o	o	o	795
<i>Enfermedad</i>	0.2278	3.6817	o	0.0001(o)		0.67	0.79	o	o	o	o	142
<i>L. Enfermedad</i>	0.2472	-10.6650	o	•		0.47	0.59	o	•	o	o	50
<i>Invalidez</i>	0.1486	•	o	0.4882(o)		0.07	0.01	o	•	•	o	63
<i>Inter. Quirúr</i>	•	5.8969	o	0.0001(o)		0.10	0.12	o	•	o	o	126
<i>Hosp. Quirúr</i>	•	7.2444	o	•		0.09	0.12	o	•	o	o	108
<i>Accidentes</i>	-0.4354	4.2067	o	0.0001(o)		0.40	0.77	•	•	o	o	81
<i>Sepelio</i>	-0.1980	6.0717	o	0.0001(o)		0.15	0.17	o	•	•	o	72
<i>Serv. Automov.</i>	-0.6264	6.1062	o	•		0.97	3.42	•	•	o	o	63
<i>Asist. Sanitaria</i>	-0.5521	4.4069	o	•		0.39	0.70	•	•	o	o	90

Nota: o rechazo de la hipótesis nula (5%); • aceptación hipótesis nula; -- test no concluyente; * valor que cumple la restricción $R^2 \geq 0.80$; Hipótesis parámetros del modelo $H_0 : \alpha = 0$ y $H_0 : \beta = 0$ (5%); R^2 coeficiente de determinación; *MAE* error absoluto medio; *RMSE*, raíz del error cuadrático medio; *Reset*: test de Ramsey (5%); *White*: test de White (5%); *JB*: test de Normalidad de Jarque-Bera (5%); *DW*: test de Durbin-Watson; *n*: tamaño muestra.

En último lugar y de forma similar al modelo de Box-Cox de tres parámetros, contrastamos la forma funcional de un modelo recíproco,

$$\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^{\lambda_1} = \beta + \alpha \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\lambda_2} + \varepsilon_i^*$$

siendo, (y_i/x_i) el ratio de siniestralidad y “ x_i ” las primas ingresadas, por el paralelismo existente con la especificación característica del ratio, $y_i/x_i = \alpha/x_i + \beta + \varepsilon_i/x_i$.

El contraste en este caso planteado es el siguiente,

$$H_0 : \lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1$$

donde la aceptación de la hipótesis nula significaría aceptar la especificación siguiente,

$$\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \beta + \alpha \left(\frac{1}{x_i}\right) + \varepsilon_i^*$$

que coincide con el modelo de ratio característico con término independiente. Podemos comprobar que en todos los casos que ha sido posible la estimación de los parámetros¹⁹¹ se rechaza la hipótesis nula, (véase tabla 3.5.4.6.2.).

¹⁹¹ Para las prestaciones de *Sepelio*, *Serv. Automovilistas*, *Asistencia Sanitaria*, *Larga Enfermedad* y *Hospitalización Quirúrgica*, no se ha podido estimar los parámetros por problemas de singularidad en la matriz.

Tabla 3.5.4.6.2.

$Prestación_i$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\sigma_{\varepsilon_i}^2$	$H_0: \lambda_1 = 1$ $H_0: \lambda_2 = -1$
Sector	0.4987	0.5017	•	-0.5395	0.2811	○
Enfermedad	0.3944	-3.9021	•	-0.3091	0.3159	○
Larga Enfermedad						
Invalidéz	•	0.3077	-0.4200	-0.4339	0.3732	○
Inter. Quirúrgica	0.6526	•	•	-0.1646	0.1197	○
Hosp. Quirúrgica						
Accidentes	•	•	•	-1.3541	0.2063	○
Sepelio						
Serv. Automovilistas						
Asistencia Sanitaria						

Nota: ○ rechazo de la hipótesis nula (5%) ; • aceptación hipótesis nula (5%).

De la misma forma que en el apartado 5.4.5., en la tabla 4.5.4.6.2. se recogen en términos de frecuencia, aquellos problemas econométricos¹⁹² detectados en las dos nuevas especificaciones, FFG(1) y FFG(2). Observamos que comparativamente los modelos de regresión de Box-Cox solo reducen los problemas de heterocedasticidad, pero ninguno de los demás.

Tabla 4.5.4.6.2.

Sector			Esquemas de Heterocedasticidad						
Especificaciones	α	Reset	White	$h=1$	$h=-1$	$h=1/2$	$h=-1/2$	JB	DW
FFG(1)	8	5	4	1				3	8
FFG(2)	9	6	1			1		7	9

A la vista de los anteriores resultados econométricos consideramos que una nueva vía de investigación puede ser la utilización de Modelos econométricos Neuronales, muchos más flexibles en sus premisas, con la finalidad de obtener aquellas formas funcionales más adecuadas, calculadas *ad-hoc*, (véase apartado 6).

¹⁹² Es decir, término independiente significativo, presencia de error de especificación funcional, heterocedasticidad en los residuos y esquema más frecuente, no normalidad en los residuos y presencia de autocorrelación espacial.