Càlcul de variacions estocàstic en els espais de Wiener i de Poisson: Aplicació a la regularitat del suprem i del temps local

Josep Vives i Santa Eulalia

Memòria presentada per aspirar
al grau de Doctor en Matemàtiques.

Departament d'Estadística.
Universitat de Barcelona.

Barcelona, Desembre de 1993.

CERTIFICO que la present memòria
ha estat realitzada per
Josep Vives i Santa Eulalia,
en el Departament d'Estadística de la
Universitat de Barcelona,
sota la meva direcció.

David Nualart

Dr. David Nualart i Rodón.
Departament d'Estadística de la
Universitat de Barcelona.
Barcelona, Desembre de 1993.

Agraeixo al Dr. David Nualart tot el temps i esforç que m'ha dedicat per tal que aquest treball pogués ser realitzat.

Agraeixo a tots els meus companys del Seminari de Probabilitats la seva ajuda i estímul.

Finalment, agraeixo a la Montse el seu recolzament i al Josep Ignasi l'alegria que em dona.

Als meus pares, que em van transmetre l'esperit de la ciència i la recerca, i m'han animat a fer el doctorat.

INDEX

Presentació.

El treball de recerca que hem realitzat, i que recull aquesta memòria, s'inscriu en el marc de dues teories desenvolupades recentment, que formen part, més en general, de la teoria de processos estocàstics. Es tracta del Càlcul de variacions estocàstic i del Càlcul estocàstic anticipatiu.

El Calcul de variacions estocàstic va ser desenvolupat a partir de 1978 per P. Malliavin ([**Ma**]). Mitjançant aquesta teoria Malliavin va provar per mètodes probabilístics el Teorema de Hörmander, que dona un criteri d'hipoel.lipticitat pels operadors diferencials de segon ordre que es poden escriure com a suma de quadrats d'operadors de primer ordre. Posteriorment es va veure que les tècniques desenvolupades per Malliavin es podien estendre i aplicar a altres problemes inaccessibles des de la teoria d'equacions en derivades parcials.

Aquest Càlcul permet estudiar l'existència i regularitat de densitats per a les distribucions de funcionals sobre l'espai de Wiener (l'espai canònic del procés de Wiener). Ha estat desenvolupat entre d'altres per Stroock, Kusuoka, Ikeda, Watanabe i Shigekawa.

Les solucions d'equacions diferencials estocàstiques són funcionals sobre l'espai de Wiener i per tant són la font bàsica d'exemples d'aplicació d'aquest Càlcul.

Hi ha hagut diverses aproximacions al Càlcul de variacions estocàstic. Presentarem les dues que estan relacionades amb el treball que hem fet:

La primera seguida per Malliavin, Stroock i d'altres, és basa en uns teoremes de l'Anàlisi Matemàtica sobre existència i regularitat de densitats. Per tal de poder aplicar aquests teoremes a la llei d'un vector aleatori F s'introdueix l'operador gradient sobre l'espai de Wiener, que és un espai de dimensió infinita, i s'obté una fórmula d'integració per parts. En definitiva, es tracta del desenvolupament d'un càlcul diferencial sobre un espai de dimensió infinita. Farem servir aquesta teoria en el capítol 3 de la memòria.

La segona, establerta per Watanabe [**W1**], introdueix el concepte de funcional generalitzat, anàleg al de distribució de Schwartz. De totes maneres comparteix amb l'aproximació anterior la mateixa base analítica, és a dir el concepte d'operador gradient en un espai de dimensió infinita i la fórmula d'integració per parts. Aquesta aproximació és la base del capítol 4.

Una bona introducció al Càlcul de variacions estocàstic es troba a [**Oc**].

D'altra banda, Skorohod [**Sk**] el 1975 inicia el que en podem anomenar Càlcul integral estocàstic i anticipatiu. En efecte, defineix una integral respecte el procés de Wiener on se substitueix la condición d'adaptabilitat de l'integrand, necessària en la definició d'integral estocàstica d'Ito, per certes condicions de regularitat. Sobre el conjunt d'integrands adaptats que compleixen aquestes condicions de regularitat, aquesta integral coincideix amb la integral d'Ito. En aquest sentit podem parlar de la integral de Skorohod com una extensió de la integral d'Itô. La base de la definició d'aquesta integral es un resultat de Wiener que presentarem en el primer capítol, que permet obtenir desenvolupaments ortogonals de qualsevol funcional de quadrat integrable sobre l'espai de Wiener.

El punt clau que unifica les dues teories esmentades és el treball de Gaveau i Trauber [**GT**], que demostra que la integral anticipativa definida per Skorohod coincideix amb el dual de l'operador gradient a l'espai de Wiener, introduit per Malliavin.

Tots aquests resultats han permès els darrers anys desenvolupar un càlcul estocàstic anticipatiu a l'espai de Wiener. Hem d'esmentar en aquesta línia els treballs de Nualart, Pardoux i Zakai,[**NP**], [**NZ**].

Anàlogament s'ha intentat desenvolupar un càlcul estocàstic a l'espai de Poisson. En cert sentit es tracta d'un cas més senzill ja que és possible definir una integral respecte el procés de Poisson trajectòria a trajectòria en el sentit de Stieltjes. D'altra banda, però, no es possible definir un operador de tipus "gradient" amb la mateixa riquesa que en el cas gaussià. El capítol 2 recull els treballs que hem fet en aquesta línia.

La memòria està dividida en quatre capítols. En el primer capítol, de preliminars, introduim primer de tot el concepte d'espai gaussià, i la propietat essencial de descomposició ortogonal dels funcionals de quadrat integrable sobre l'espai gaussià [**I1**]. Com a generalització d'aquest fet introduim l'estructura d'espai de Fock, que és l'estructura algèbrica subjacent a tot espai descomposable en suma de subspais ortogonals. D'altra banda, en aquest marc general introduim uns operadors d'anihilació i creació que generalitzen els operadors gradient i integral de Skorohod a l'espai de Wiener.

L'objectiu del segón capítol és establir un càlcul estocàstic a l'espai de Poisson. Els darrers anys hi ha hagut diverses aproximacions al problema, que comentem en la introducció del capítol. La nostra aproximació al problema es basa en l'estructura d'espai de Fock subjacent també a l'espai de funcionals de quadrat integrable sobre l'espai de Poisson (veure [**Og**],[**Wu**]). Concretament, considerem els operadors d'anihilació i creació i donem una interpretació intrínseca d'aquests en el marc de l'espai canònic de Poisson, així com una fórmula d'integració per parts.

En el tercer capítol apliquem el Càlcul estocàstic de variacions, seguint el punt de vista de Malliavin, a la regularitat de la llei del màxim d'un procés amb trajectòries contínues. Els resultats obtinguts milloren els coneguts anteriorment per mètodes clàssics.

Finalment en el quart capítol, seguint el punt de vista de Watanabe del Càlcul estocàstic de variacions, estudiem la regularitat del temps local brownià com a funcional sobre l'espai de Wiener. En concret estudiem a quins espais de Sobolev $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ pertany exactament el temps local brownià. Per això estudiem previament la regularitat de funcionals generalitzats com $\delta_x(W(h))$. Els resultats de regularitat obtinguts milloren els coneguts fins el moment.

Preliminars: L'estructura algèbrica d'espai de Fock.

Capítol 1

0. Presentació.

L'objectiu del capítol és presentar l'estructura algèbrica d'espai de Fock. Un espai de Fock és un espai descomposable en suma ortogonal de potències tensorials simètriques d'un espai de Hilbert H. En particular es tracta també d'un espai de Hilbert. Aquesta estructura va ser introduida per Fock en el marc de la mecànica quàntica. La importància d'aquest espai, des del punt de vista del càlcul estocàstic, radica en que donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que contingui un procés gaussià, l'espai $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ té estructura d'espai de Fock. Algunes referències sobre l'estructura d'espai de Fock i la seva relació amb el càlcul estocàstic són **[Ru]** i **[Me2]**.

Per motivar la introducció d'aquest espai, recordem primer el concepte d'espai gaussià. Donat un espai de probabilitat qualsevol $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un espai gaussià és un subspai tancat de $L^2(\Omega)$ generat per una família de variables aleatòries gaussianes i centrades. Si $\mathcal{F}$ coincideix amb la $\sigma-$ àlgebra generada per les variables de l'espai gaussià i els conjunts de probabilitat zero, aleshores $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es pot descompondre en suma directa ortogonal de potències tensorials simètriques de l'espai gaussià. Aquesta descomposició s'anomena descomposició en caos homogenis o caos de Wiener (veure **[I1]**).

Aquest resultat ha contribuït de manera essencial al desenvolupament d'un càlcul estocàstic anticipatiu a l'espai de Wiener (que és un cas particular d'espai de probabilitat amb un espai gaussià associat). Per exemple, la integral de Skorohod, que generalitza la integral de Itô a processos anticipatius, es defineix a partir d'aquesta descomposició. L'operador gradient introduit per Malliavin a **[Ma]**, resulta ser el dual d'aquesta integral (veure **[GT]**), i admet també, per tant, una expressió com operador que actua sobre aquesta descomposició.

Aquests operadors gradient i integral de Skorohod associats a l'espai de Wiener tenen una generalització a l'espai de Fock, i moltes de les seves propietats depenen només d'aquesta estructura. Per tant es pot construir un cert "càlcul" sobre qualsevol espai $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ amb estructura subjacent d'espai de Fock, com per exemple l'espai dels funcionals del proces de Poisson de quadrat integrable. Aquesta construcció constitueix el capítol 2.

1. L'espai gaussià.

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}. P)$ un espai de probabilitat. Considerem una família gaussiana de variables aleatòries $\{X_\alpha\}_\alpha$ sobre aquest espai, tals que $E(X_\alpha) = 0$. En particular es tracta de variables aleatòries de $L^2(\Omega)$. Suposarem que $\mathcal{F}$ és la $\sigma-$ àlgebra generada per la família gaussiana.

Sigui $H(X)$ l'espai de Hilbert generat per aquesta família de variables mitjançant combinacions lineals i pas al límit. Es conegut que $H(X)$ és també una família gaussiana. Aquesta família forma doncs un subspai de Hilbert de $L^2(\Omega)$, que anomenarem espai gaussià.

Interessa introduir un espai de Hilbert H i una isometria

$$h \in H \longrightarrow X(h) \in H(X),$$

amb $E(X(h)X(g)) = \langle h, g\rangle_H$.

L'estructura concreta de l'espai de Hilbert H ens dona diferents exemples concrets d'espais gaussians.

L'espai $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admet una descomposició en suma directa ortogonal que presentem en el teorema següent:

1.1 Teorema [I1].

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

on $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$, *i* $\mathcal{H}_n$ *és l'espai de Hilbert generat per les variables aleatòries* $H_n(X(h))$ *amb* $|h| = 1$, *on* H_n *és el polinomi d'Hermite d'ordre* n.

Recordem que els polinomis d'Hermite es poden expressar de la manera següent:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

i formen una família ortonormal de polinomis a $\mathbb{R}$ amb la mesura gaussiana estandard.

En particular es té el fet següent, que prova l'ortogonalitat dels diferents subspais $\mathcal{H}_n$.

$$E[H_n(X(h))H_m(X(g))] = \langle h, g\rangle_H^n 1_{\{n=m\}}.$$

Aquest resultat de descomposició ortogonal i el seu paper en el desenvolupament del càlcul estocàstic a l'espai de Wiener motiva la introducció de l'estructura d'espai de Fock.

2. L'estructura algèbrica d'espai de Fock.

En tota la secció, H denotarà un espai de Hilbert real i separable. Denotarem per $H^{\otimes n}$, el producte tensorial n-èssim. Per $n = 0$ es té $H^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Els espais $H^{\otimes n}$ són espais de Hilbert amb producte escalar:

$$\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \cdots \langle x_n, y_n\rangle.$$

amb $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in H$.

Sigui ara $\mathcal{S}_n$ el conjunt de les permutacions del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cada permutació $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ens defineix un automorfisme a $H^{\otimes n}$, donat per

$$U_\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

Denotarem per $H^{\odot n}$ el subspai de Hilbert de $H^{\otimes n}$ format pels elements invariants per a qualsevol U_σ. En aquest nou espai hi considerarem el producte escalar modificat:

$$\langle f, g\rangle_{H^{\odot n}} = n!\langle f, g\rangle_{\otimes n}.$$

1.2 Definició.

L'espai de Fock associat a l'espai de Hilbert H es defineix com l'espai de Hilbert

$$\Phi(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\odot n},$$

equipat amb el producte escalar

$$\langle h, g \rangle_{\Phi(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle h_n, g_n \rangle_{H^{\odot n}},$$

on $h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$ *i* $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$.

El cas més interessant és el cas que $H = L^2(T)$, on $(T, \mathcal{B}, \lambda)$ és un espai de mesura separable, amb mesura σ-finita i contínua. En aquest cas $H^{\otimes n}$ és isomètric a $L^2(T^n)$. De fet $H^{\odot n}$ és l'espai de les funcions simètriques i de quadrat integrable $L^2_S(T^n)$ amb el producte escalar modificat.

Des d'ara fins al final de la secció suposarem que $H = L^2(T)$ amb les condicions esmentades. En aquesta situació podem introduir uns operadors que permeten construir un cert "càlcul" en aquesta estructura. En les seccions següents introduim aquests operadors.

3. L'operador d'anihilació.

Sigui $H = L^2(T, \mathcal{B}, \lambda)$. Considerem l'espai de Fock associat $\Phi(H)$. Els seus elements es poden escriure com $F = \sum_{n \geq 0} f_n$ on $f_n \in L^2_S(T^n)$.

Per a cada $F \in \Phi(H)$ podem definir l'operador següent:

$$D : F \in \Phi(H) \to DF \in \Phi(H) \otimes H \simeq L^2(T; \Phi(H)),$$

on

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(\cdot, t), \quad \text{q.p.t. } t \in T,$$

sempre que $DF \in L^2(T; \Phi(H))$.

Es a dir, sempre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, n! \parallel f_n \parallel^2_{L^2(T^n)} < +\infty,$$

ja que

$$\| DF \|^2_{L^2(T;\Phi(H))} = \int_T \| D_t F \|^2_{\Phi(H)} \; \lambda(dt)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (n-1)! \int_T \| f_n(\cdot, t) \|^2_{L^2(T^{n-1})} \; \lambda(dt)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, n! \; \| f_n \|^2_{L^2(T^n)} < +\infty.$$

Aquest operador D està definit en un conjunt dens de $\Phi(H)$. En particular està definit en tot element amb desenvolupament en caos finit. El domini d'aquest operador el notarem per Dom D.

Observem que val el lema següent:

1.3 Lema.

L'operador D és un operador tancat.

Prova:

Hem de veure que si $\{F_n\}_n$, és una successió d'elements de Dom D, que convergeix a un element F en la norma de $\Phi(H)$, i tal que d'altra banda $\{DF_n\}_n$ convergeix cap a un element u en la norma de $L^2(T; \Phi(H))$, aleshores $F \in \mathrm{Dom}D$, i $DF = u$.

Sigui $F_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}$ i $F = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, on les f_k i les $f_k^{(n)}$ pertanyen a $L^2_S(T^k)$. Aleshores, $D_t F_n = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k^{(n)}(\cdot, t)$, λ- q.p.t. Sigui també $u_t = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\cdot; t)$ λ−q.p.t. amb $g_k(\cdot; t) \in L^2_S(T^k)$.

D'una banda les $f_k^{(n)}$ convergeixen cap a les f_k a $L^2_S(T^k)$. D'altra banda la successió $\{k f_k^{(n)}(\cdot, t), n \geq 1\}$ convergeix a g_{k-1} en la norma de $L^2(T^k)$ quan $n \to \infty$. Per tant $k f_k = g_{k-1}$. Això implica que $F \in \mathrm{Dom}D$ i $DF = u$.

q.e.d.

Per iteració podem definir l'operador D^k de $\Phi(H)$ en $L^2(T^k) \otimes \Phi(H) \equiv L^2(T^k; \Phi(H))$. (veure [**NP**]). El domini d'aquest operador serà

$$\text{Dom}D^k = \{F \in \Phi(H) : \sum_{n=1}^{\infty} n^k n! ||f_n||^2_{L^2(T^n)} < \infty\}.$$

Més en general, donat un element $h \in H$, podem definir un operador D_h de $\Phi(H)$ en $\Phi(H)$ tal que

$$D_h F = \langle DF, h \rangle_H.$$

El domini d'aquest operador estarà format pels funcionals de $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \Phi(H)$ tals que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!n|| \int_T f_n(\cdot, t) h(t) \lambda(dt)||^2_{L^2(T^{n-1})} < \infty.$$

Es clar per la desigualtat de Schwarz que el domini de D_h inclou Dom D.

4. L'operador de creació.

Considerem l'espai de Hilbert $L^2(T; \Phi(H)) \cong L^2(T) \otimes \Phi(H)$. Aquest espai de Hilbert es pot descompondre de la manera següent: $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} \hat{L}^2(T^{n+1})$, on $\hat{L}^2(T^{n+1})$ és el subspai de $L^2(T^{n+1})$ format per totes les funcions de quadrat integrable sobre T^{n+1} que són simètriques en les n primeres variables.

Considerem $u \in L^2(T; \Phi(H))$. Per tant podem escriure

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n, \quad u_n \in \hat{L}^2(T^{n+1}).$$

Denotarem per $\tilde{u}_n$ la simetrització de u_n respecte les $n+1$ variables.

Podem definir l'operador següent:

$$\delta : u \in L^2(T; \Phi(H)) \to \delta(u) = \sum_{n\geq 0} \tilde{u}_n \in \Phi(H)$$

sempre que

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)! \parallel \tilde{u}_n \parallel^2_{L^2(T^{n+1})} < +\infty.$$

Denotarem per Dom δ el subconjunt dels $u \in L^2(T; \Phi(H))$ que verifiquen aquesta condició.

5. Càlcul a l'espai de Fock.

En aquesta secció establim la relació de dualitat entre els operadors D i δ. Aquesta relació vve donada pel teorema següent:

1.4 Teorema.

Si $u \in Dom\,\delta$, i $F \in DomD$, es té

$$\langle u, DF \rangle_{L^2(T;\Phi(H))} = \langle F, \delta(u) \rangle_{\Phi(H)}.$$

Abans de provar aquest resultat, observem que es té el fet següent:

Observació:

Si $f \in L^2(T^n)$, es té

$$\int_{T^n} f\lambda(dt_1)\cdots\lambda(dt_n) = \int_{T^n} \tilde{f}\lambda(dt_1)\cdots\lambda(dt_n).$$

En particular, si $f, g \in L^2(T^n)$ es té

$$\int_{T^n} \tilde{f}g\lambda(dt_1)\cdots\lambda(dt_n) = \int_{T^n} \tilde{f}\tilde{g}\lambda(dt_1)\cdots\lambda(dt_n).$$

Prova:

Siguin $u = \sum_{n\geq 0} u_n$ i $F = \sum_{n\geq 0} f_n$. Aleshores

$$\langle u, DF\rangle_{L^2(T;\Phi(H))} = \int_T \langle u(\cdot,t), D_t F\rangle_{\Phi(H)}\, \lambda(dt)$$

$$= \sum_{n\geq 0} n! \int_T \langle u_n(\cdot,t), (n+1)\, f_{n+1}(\cdot,t)\rangle_{L^2(T^n)}\, \lambda(dt)$$

$$= \sum_{n\geq 0} (n+1)! \langle u_n, f_{n+1}\rangle_{L^2(T^{n+1})}.$$

Fent servir que f_{n+1} és simètrica, i aplicant l'observació anterior, s'obté

$$\langle u, DF\rangle_{L^2(T;\Phi(H))} = \sum_{n\geq 0} (n+1)! \langle \tilde{u}_n, f_{n+1}\rangle_{L^2(T^{n+1})}$$

$$= \langle F, \delta(u)\rangle_{\Phi(H)}.$$

q.e.d.

Per tant δ i D són operadors duals entre si. En particular, δ és un operador densament definit i tancat (veure qualsevol referència per a la teoria d'operadors no-fitats en dominis densos; per exemple [**B**]).

Per aprofundir la relació entre els operadors D i δ introduim ara un subspai de $\mathrm{Dom}\,\delta$. Aquest subspai que denotarem per $\mathsf{L}^{1,2}$ serà la classe dels elements $u \in L^2(T;\Phi(H))$ tals que

i) $u_t \in \mathrm{Dom} D$, q.p.t. $t \in T$.

ii) $D_s u_t \in L^2(T^2;\Phi(H))$.

En termes del desenvolupament de u aquestes condicions són equivalents a

$$\sum_{n\geq 1} n n! \parallel u_n \parallel^2_{L^2(T^{n+1})} < +\infty.$$

Això implica que $\mathsf{L}^{1,2} \subseteq \mathrm{Dom}\,\delta$.

Notem que, més en general, podem definir $\mathbb{L}^{n,2}$ com el subspai de $L^2(T;\Phi(H))$ format pels elements n vegades derivables amb $D^k u \in L^2(T^{k+1};\Phi(H))$, $\forall k \leq n$. Finalment podem considerar $\mathbb{L}^{\infty,2} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}^{n,2}$.

La importància d'aquest espai $\mathbb{L}^{1,2}$ queda clara en el teorema següent.

1.5 Teorema.

Sigui u,v elements de $\mathbb{L}^{1,2}$. Aleshores tenim

$$\langle \delta(u), \delta(v) \rangle_{\Phi(H)} = \langle u, v \rangle_{L^2(T;\Phi(H))} + \int_{T^2} \langle D_s u_t, D_t v_s \rangle_{\Phi(H)} \, \lambda(dt) \, \lambda(ds).$$

Prova:

D'una banda

$$\langle \delta(u), \delta(v) \rangle_{\Phi(H)} = \sum_{n \geq 0} (n+1)! \langle \tilde{u}_n, \tilde{v}_n \rangle_{L^2(T^{n+1})}.$$

D'altra banda

$$\langle u, v \rangle_{L^2(T;\Phi(H))} = \int_T \langle u_t, v_t \rangle_{\Phi(H)} \, \lambda(dt) = \sum_{n \geq 0} n! \langle u_n, v_n \rangle_{L^2(T^{n+1})}.$$

Per tant la diferència entre aquests dos termes és

$$\sum_{n \geq 0} \int_T [(n+1)! \langle \tilde{u}_n(\cdot,t) \, \tilde{v}_n(\cdot,t) \rangle_{L^2(T^n)} - n! \langle u_n(\cdot,t) \, v_n(\cdot,t) \rangle_{L^2(T^n)}] \lambda(dt)$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+1)! \int_T [\langle \tilde{u}_n(\cdot,t) \, \tilde{v}_n(\cdot,t) \rangle_{L^2(T^n)} - \frac{\langle u_n(\cdot,t) \, v_n(\cdot,t) \rangle_{L^2(T^n)}}{n+1}] \lambda(dt)$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+1)! \langle u_n, [\tilde{v}_n - \frac{v_n}{n+1}] \rangle_{L^2(T^{n+1})}$$

$$= \sum_{n\geq 0} n! \sum_{i=0}^{n} \int_{T^{n+1}} v_n(t_1, \cdots, t, \cdots t_n, t_i)\, u_n(t_1, \cdots, t_n, \cdot, t)\, \lambda(dt_1) \cdots \lambda(dt_n)\, \lambda(dt).$$

Finalment, usant la simetria de v_n respecte les n primeres variables i posant $s = t_n$ podem esciure l'expressió anterior com

$$\sum_{n\geq 1} n\, n! \int_{T^2} \langle v_n(\cdot, t, s)\, u_n(\cdot, s, t)\rangle_{L^2(T^{n-1})} \lambda(ds)\lambda(dt)$$

$$= \int_{T^2} \langle D_s u_t, D_t v_s\rangle_{\Phi(H)}\, \lambda(ds)\, \lambda(dt).$$

q.e.d.

1.6 Teorema.

Sigui $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ i suposem que $D_t u \in \mathrm{Dom}\,\delta$, $\forall t$, $\lambda -$ q.p.t. Aleshores $\delta(u) \in \mathrm{Dom} D$ i

$$D_t \delta(u) = u_t + \delta(D_t u),\ \lambda - \ \text{q.p.t.}$$

Prova:

Sigui $u = \sum_{n\geq 0} u_n$. Aleshores $\delta(u) = \sum_{n\geq 0} \tilde{u}_n$.

Formalment, podem escriure

$$D_t \delta(u) = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, \tilde{u}_n(\cdot, t).$$

Ara bé, observem que

$$n u_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, t, s_n) + u_n(s_1, \ldots, s_n, t) = (n+1)\tilde{u}_n(s_1, \ldots, s_n, t).$$

Aleshores,

$$D_t\delta(u) = \sum_{n\geq 0} u_n(\cdot, t) + \sum_{n\geq 1} n\, u_n(\cdot, t, s) = u_t + \delta(D_t u).$$

q.e.d.

6. Generalització d'alguns conceptes probabilístics.

En aquest secció introduim una serie de conceptes abstractes, què en el cas en que $\Phi(H)$ s'interpreta com un espai de variables aleatòries de quadrat integrable coincideixen amb els conceptes probabilístics del mateix nom. Això quedarà clar quan vegem exemples d'espais de Fock.

Considerem les definicions següents:

1.7 Definició.

Sigui $F \in \Phi(H)$ i $A \in \mathcal{B}$. Direm que F és A-mesurable si i només si

$$\forall n \geq 1, f_n(t_1, \dots, t_n) 1_{(A\times\cdots\times A)^c}(t_1, \dots, t_n) = 0, \lambda^n - q.p.t.$$

1.8 Definició.

Si $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \Phi(H)$, definim la seva esperança com $f_0 \in \mathbb{R}$.

1.9 Definició.

Si $F \in \Phi(H)$ i $A \in \mathcal{B}$, definim l'esperança condicionada respecte A de la manera següent:

$$E[F|A] = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t_1, \dots t_n) 1_A(t_1) \cdots 1_A(t_n).$$

1.10 Definició.

Si $u \in L^2(T;\Phi(H)) \equiv L^2(T) \otimes \Phi(H)$, direm que és un procés simple si i només si

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} F_j 1_{B_j}(t)$$

amb F_j $\mathcal{B}_j^c$-mesurable i $\lambda(B_j) < \infty$ per $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Els quatre lemes següents relacionen els operadors d'anihilació i creació amb aquests conceptes. Els dos primers són immediats.

1.11 Lema.

Si $F \in DomD$ i és A-mesurable, $D_t F = 0, \quad \forall t \in A^c, \lambda$-q.p.t.

1.12 Lema.

Si $F \in DomD$ i $A \in \mathcal{B}$, aleshores $E[F|A] \in DomD$ i

$$D_t E[F|A] = E[D_t F|A] 1_A(t), \lambda - q.p.t.$$

1.13 Lema.

Si u és un procés simple de la forma $u(t) = F1_B(t)$, aleshores $u \in Dom\,\delta$ i $\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \tilde{\otimes} 1_B$ on $\tilde{\otimes}$ és el producte tensorial simetritzat.

Prova:

Es suficient veure que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \parallel f_n \tilde{\otimes} 1_B \parallel^2_{L^2(T^{n+1})} < \infty.$$

Observem que

$$f_n(t_1,\ldots,t_n)\tilde{\otimes} 1_B(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} f_n(t_1,\ldots,t,\ldots t_n) \otimes 1_B(t_j) + \frac{1}{n+1} f_n(t_1,\ldots,t_n) \otimes 1_B(t).$$

Els $n+1$ termes d'aquesta suma són ortogonals en $L^2(T^{n+1})$ per ser F B^c-mesurable. Aleshores,

$$(n+1) \parallel f_n \tilde{\otimes} 1_B \parallel^2_{L^2(T^{n+1})} = \parallel f_n \otimes 1_B \parallel^2_{L^2(T^{n+1})}$$

i per tant,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \parallel f_n \tilde{\otimes} 1_B \parallel^2_{L^2(T^{n+1})} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \parallel f_n \otimes 1_B \parallel^2_{L(T^{n+1})}$$

$$= \lambda(B) \parallel F \parallel^2_{\Phi(H)} < \infty.$$

q.e.d.

Observació:

Aquestes definicions ens permeten definir un producte intrínsec entre elements d'un espai de Fock de la manera següent:

$$F \cdot \delta(1_B) = \delta(F 1_B)$$

sempre que F sigui B^c−mesurable i $\lambda(B) < \infty$.

7. Fórmula de Clark a l'espai de Fock.

Una aplicació dels conceptes i resultats anteriors és la fórmula següent, que permet representar els elements de l'espai de Fock com imatge per l'operador δ d'un procés adaptat.

1.14 Teorema (Fórmula de Clark).

Considerem $T = [0,1], \mathcal{B} = \mathcal{B}[0,1]$ i λ la mesura de Lebesgue. Sigui $F \in DomD$. Siguin $s, t \in [0,1]$, amb $s < t$. Aleshores,

$$F = E[F|(s,t]^c] + \delta(E[D_r F|(r,t]^c] 1_{(s,t]}(r)).$$

Prova:

Considerem la descomposició en caos de F :

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad f_n \in L_s^2(T^n).$$

Aleshores,

$$E[F|(s,t]^c] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t_1, \ldots, t_n) 1_{(s,t]^c}(t_1) \cdots 1_{(s,t]^c}(t_n).$$

D'altra banda,

$$\delta(E[D_r F|(r,t]^c] 1_{(s,t]}) = \delta[\sum_{n=1}^{\infty} n f_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, r) 1_{(r,t]^c}(t_1) \cdots 1_{(r,t]^c}(t_{n-1}) 1_{(s,t]}(r)].$$

Si denotem $h_{n,r}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = 1_{(r,t]^c}(t_1) \cdots 1_{(r,t]^c}(t_{n-1}) 1_{(s,t]}(r))$, el problema es reduei a simetritzar aquesta funció.

Observem que $\tilde{h}_{n,r} = \frac{1}{n} 1_{A_n}$ on

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n : t_i \in (s,t]\}.$$

Per tant

$$\delta(E[D_r F|(r,t]^c] 1_{(s,t]}(r)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t_1, \ldots, t_n) 1_{A_n}.$$

Finalment observant que $A_n^c = (s,t]^c \times \cdots \times (s,t]^c$ queda demostrat el teorema.

q.e.d.

Veurem ara diversos exemples d'espais amb estructura d'espai de Fock.

8. Exemple 1: Els processos gaussians i l'espai de Hilbert dels nuclis autoreproductors.

Sigui $X = \{X(t), t \in T\}$ un procés gaussià i centrat, definit sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i indexat per un espai mètric separable i complet T. Suposem que $\mathcal{F}$ és la $\sigma-$àlgebra generada pel procés. L'espai de Hilbert $H(X)$ generat per aquest procés és un exemple d'espai gaussià.

Sigui $R(\cdot, \cdot)$ la funció de covariància d'aquest procés, que suposarem contínua. Considerem la família de funcions $\{R_s, s \in T\}$ on $R_s(t) = R(s,t)$. Sigui $H(R)$ l'espai de Hilbert generat per aquesta família de funcions amb el producte escalar $\langle R_s, R_t \rangle = R(s,t)$. Aquest espai s'anomena espai de Hilbert dels nuclis autoreproductors i esta format per funcions sobre T tals que

$$\langle f, R_s \rangle = f(s).$$

Observem que podem establir la isometria

$$R_s \in H(R) \longrightarrow X_s \in H(X)$$

amb

$$E(X_s X_t) = \langle R_s, R_t \rangle_{H(R)} = R(s,t).$$

Per tant podem considerar que l'espai gaussià $H(X)$ està indexat per l'espai de Hilbert dels nuclis autoreproductors $H(R)$.

En conseqüència $\mathcal{H}_n$ serà isomorf a $H(R)^{\odot n}$ i per tant $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ és isomorf a $\Phi(H(R))$. Per un desenvolupament complet de la teoria en aquest cas, una bona referència és **[Kall2]**. Veure també **[Kall1]**.

Tenint en compte l'isomorfisme entre $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $\Phi(H(R))$, l'operador D es pot definir sobre $H(X)$ de la manera següent: $D_s X(t) = D_s R_t$, on

$$D_s R_t = R_t(s) = R(s,t) = \langle R_s, R_t \rangle_{H(R)}.$$

Més en general, podem definir $D_g X(h) = \langle g, h \rangle_{H(R)}$.

9. Exemple 2: Mesures aleatòries, integrals estocàstiques múltiples i desenvolupament en caos.

Sigui $(T, \mathcal{B}, \lambda)$ un espai de mesura amb λ mesura positiva i $\sigma-$ finita. Considerem $\mathcal{B}^* = \{B \in \mathcal{B} : \lambda(B) < \infty\}$.

Una mesura aleatòria sobre $(T, \mathcal{B}, \lambda)$ és una aplicació

$$X : \mathcal{B}^* \longrightarrow L^2(\Omega).$$

tal que

$$E[X(A_1)X(A_2)] = \lambda(A_1 \cap A_2), \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{B}^*.$$

Es diu que una mesura aleatòria és centrada si $E[X(B)] = 0$, $\forall B \in \mathcal{B}^*$; és diu que és independent si $\forall A_1, \ldots, A_n$ subconjunts disjunts de $\mathcal{B}^*$, aleshores $X(A_1), \ldots X(A_n)$ són variables aleatòries independents.

Donada una mesura aleatòria independent i centrada X, podem introduir el concepte d'integral estocàstica múltiple respecte aquesta mesura (veure **[I1]**).

En efecte, suposem que λ és una mesura contínua, és a dir tal que $\forall \epsilon > 0$, i $B \in \mathcal{B}^*$, existeixen $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}^*$ tals que $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ i $\lambda(B_i) \leq \epsilon$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Considerem funcions simples del tipus $f(t_1, \ldots, t_p) = 1_{B_1}(t_1) \cdots 1_{B_p}(t_p)$, on $B_1, \ldots, B_p$ són de $\mathcal{B}^*$ i disjunts dos a dos. L'espai vectorial generat per aquestes funcions, que denotarem per S_p, és dens a $L^2(T^p)$.

Donada una funció simple $f_p(t_1, \ldots, t_p)$, és defineix la integral estocàstica múltiple de f_p respecte X com

$$I_p(f_p) = \int_T \cdots \int_T f_p(t_1, \ldots, t_p) dX(t_1) \cdots dX(t_p) = X(B_1) \cdots X(B_p).$$

Per conveni es pren $I_0(c) = c, \quad \forall c \in \mathbf{R}$.

Es evident que aquesta definició es pot estendre per linealitat a tot S_p. Observem doncs que hem definit una aplicació lineal

$$I_p : f \in S_p \longrightarrow I_p(f) \in L^2(\Omega)$$

que compleix les propietats següents:

i) $I_p(f) = I_p(\tilde{f})$, on $\tilde{f}$ és la simetrització de f.

ii) $\langle I_p(f), I_p(g)\rangle = E[I_p(f)I_p(g)] = p!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle$.

iii) $\langle I_p(f), I_q(g)\rangle = 0$ si $p \neq q$.

En particular, $||I_p(f)||_2 = \sqrt{p!}||\tilde{f}||_2 \leq \sqrt{p!}||f||_2$. Per tant I_p és un operador lineal i fitat amb norma més petita que $\sqrt{p!}$, que podem estendre a un operador lineal i fitat de $L^2(T^p)$ a $L^2(\Omega)$.

D'altra banda I_p és una isometria entre $L^2_S(T^p)$ que és l'espai de les funcions simètriques de $L^2(T^p)$ amb la norma modificada per $\sqrt{p!}||f||_2$, i el subspai $\mathcal{C}_p$, format per les $I_p(f)$, que anomenarem caos d'ordre p.

Per a dos exemples concrets de mesures aleatòries independents i centrades tenim resultats de descomposició de $L^2(\Omega)$ en suma ortogonal.

En efecte, suposem que la mesura aleatòria independent i centrada és a més a més gaussiana, és a dir que les variables aleatòries $\{X(A), A \in \mathcal{B}^*\}$ formen una família gaussiana. En particular observem que una mesura aleatòria centrada i independent és gaussiana si i només si $\forall A \in \mathcal{B}^*$, $X(A)$ té llei normal.

Aleshores, $H = L^2(T)$ és isomorf a $H(X)$, amb $X(1_B) = X(B)$, l'espai $\mathcal{C}_p = \mathcal{H}_p$ on $\mathcal{H}_p$ és l'espai que s'introdueix en el teorema 1.1. i si $\mathcal{F} = \sigma\{X(A), A \in \mathcal{B}\}$, es té

$$L^2(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

Suposem ara que la mesura aleatòria independent i centrada és poissoniana, és a dir que $\forall A \in \mathcal{B}^*, X(A) = N(A) - \lambda(A)$ on $N(A)$ és una variable aleatòria de Poisson. Aleshores, si $\mathcal{F} = \sigma\{N(A), A \in \mathcal{B}\}$, es té també

$$L^2(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

Aquest cas el desenvolupem més detalladament en el capítol 2.

10. Exemple 3: El procés de Wiener.

Un cas particular, tant de la situació en què tenim un procés gaussià i l'espai de Hilbert dels nuclis autoreproductors associat com de la situació en què l'espai de Hilbert té una interpretació com $L^2(T, \mathcal{B}, \lambda)$, és el de l'espai de Wiener.

En efecte, sigui $T = [0,1]$, $\mathcal{B}$ la $\sigma-$ àlgebra de Borel, i λ la mesura de Lebesgue. Sigui $W = \{W(t), t \in [0,1]\}$ un procés gaussià i centrat amb funció de covariància $R(s,t) = s \wedge t$. Es a dir W és el procés de moviment brownià o procés de Wiener.

Es conegut que W té trajectòries continues quasi-segurament, nul.les a l'origen (veure per exemple [**KS**]). Podem doncs considerar com espai de probabilitat on esta definit aquest procés, l'espai canònic, és a dir $\Omega = C_0([0,1])$, $\mathcal{F} = \sigma\{W(s), 0 \le s \le 1\}$ i P la mesura de Wiener.

Aleshores

$$\langle R_s, R_t \rangle_{H(R)} = R(s,t) = s \wedge t = \int_0^1 1_{[0,s]}(u) 1_{[0,t]}(u) du = \langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2([0,1])}. \quad (1)$$

En particular tenim

$$R_s(\cdot) = \int_0^{\cdot} 1_{[0,s]}(u) du.$$

Considerem l'espai H^1 de les funcions de Ω, absolutament contínues amb derivada feble de $L^2[0,1]$. Aquest espai és l'anomenat espai de Cameron-Martin. La igualtat (1) identifica l'espai de Cameron-Martin amb l'espai $H(R)$ i per tant podem considerar $H(W)$ com un espai gaussià indexat per H^1.

D'altra banda, les igualtats (1) proven, en particular, la isometria d'$H(R)$ amb $L^2([0,1])$. Podem interpretar per tant W com una mesura aleatòria independent, gaussiana i centrada sobre $[0,1]$. Això permet introduir el concepte d'integral estocàstica múltiple respecte el procés de Wiener.

Tenint en compte les igualtats (1) podem injectar de manera contínua $L^2([0,1])$ en Ω. La imatge d'aquesta injecció serà $H(R)$.

En efecte,

$$1_{[0,t]} \in L^2([0,1]) \longrightarrow R_t(\cdot) = \int_0^{\cdot} 1_{[0,t]}(u)du \in \Omega,$$

i més en general

$$h \in L^2([0,1]) \longrightarrow \int_0^{\cdot} h(u)du \in \Omega.$$

La continuïtat d'aquesta injecció ve donada per les desigualtats següents:

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\int_0^t h(s)ds| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^t |h(s)|ds = \int_0^1 |h(s)|ds \leq ||h||_2.$$

Aquesta continuïtat juga un paper essencial en la interpretació dels operadors D i δ en aquest marc. La interpretació d'aquests operadors com a derivada i integral permet el desenvolupament d'un càlcul a l'espai de Wiener, que en particular és un espai de dimensió infinita.

Per a cada $g = \int_0^{\cdot} h(u)du$, funció de l'espai de Cameron-Martin, introduim la transformació següent:

$$T_g : \omega \in \Omega \longrightarrow \omega + g \in \Omega.$$

Aquesta transformació té la propietat que la mesura imatge PT_g^{-1} és absolutament contínua respecte P.

Això ens permet donar una interpretació de l'operador D_h, definit a la secció 3, com una derivada direccional en la direcció donada per g.

1.15 Teorema [NZ].

Sigui $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Sigui $g = \int_0^{\cdot} h(u)du$. Suposem que existeix el límit en L^2 següent:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[F(\omega + \epsilon g) - F(\omega)].$$

Aleshores $F \in DomD_h$ i $D_hF = \langle DF, h\rangle_H$ coincideix amb aquest límit.

L'operador dual δ es pot interpretar com una extensió de la integral d'Itô per a processos anticipatius. En efecte,

1.16 Teorema.

Sigui $u = \{u_t, 0 \leq t \leq 1\}$ *un procés adaptat, mesurable i de* $L^2(\Omega \times [0,1])$. *Aleshores,*

$$\delta(u) = \int_0^1 u_t dW_t.$$

Prova:

Suposem que $u_t = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f_k(\cdot, t))$. Aleshores,

$$\delta(u) = W(E(u_t)) + \sum_{m=1}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m), \quad (2)$$

on ara $\tilde{f}_m$ és una funció de $m+1$ variables, simètrica.

Per ser u adaptat les $f_m(t_1, \dots t_m, t)$ es poden escollir de manera que s'anul.lin per $\max\{t_1, \dots, t_m\} > t$. Aleshores,

$$I_{m+1}(\tilde{f}_m) = \int_0^1 I_m(f_m(t_1, \dots, t_m, t))dW_t,$$

i substituint aquesta expressió a (2) s'obté la igualtat desitjada.

q.e.d.

Observem també que els conceptes introduits en la secció 6 són generalitzacions de conceptes probabilístics clàssics.

Per exemple, com que les integrals estocàstiques múltiples són centrades, donat un funcional F de l'espai de Wiener, $E[F] = I_0(f_0) = f_0 \in \mathbb{R}$, tal com es defineix a 1.8.

D'altra banda, en el marc de l'espai de Wiener, si $I_n(f_n)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable podem suposar que les f_n es concentren en $[0,t]^n$, i això equival a dir que f_n és A-mesurable en el sentit generalitzat de la definició 1.7.

Càlcul estocàstic a l'espai de Poisson

Capítol 2

0. Presentació.

L'objectiu d'aquest capítol és desenvolupar un "càlcul estocàstic" a l'espai de Poisson, anàleg al càlcul estocàstic a l'espai de Wiener. En aquests darrers anys s'han fet diverses aproximacions a aquesta qüestió.

L'aproximació desenvolupada per Bismut [**Bi**], Bichteler, Gavereaux i Jacod [**BGJ**] i Bass i Cranston [**BC**] es basa en la perturbació de l'alçada dels salts. Carlen i Pardoux introdueixen a [**CP**] una interpretació de l'operador D basada en una perturbació dels instants de salt. Ambdues aproximacions permeten obtenir una formula d'integració per parts i establir criteris generals per a la regularitat de lleis de probabilitat.

Hem vist que en el cas del moviment brownià, l'estructura d'espai de Fock de l'espai de funcionals de quadrat-integrable permet donar una definició d'aquests operadors com operadors que actuen sobre cada caos. L'espai dels funcionals de quadrat integrable mesurables respecte el procés de Poisson té també estructura d'espai de Fock, com ja hem vist en la secció 9 del capítol 1.

Dermoune, Krée i Wu a [**DKW**] adapten aquest punt de vista usant la descomposició dels funcionals obtinguda a travers de la representació de Lévy-Khinchine. D'altra banda Privault a [**P**] estudia els operadors que apareixen si es considera l'estructura d'espai de Fock associada a la successió infinita de temps exponencials independents. L'operador d'anihilació que obté està relacionat amb l'operador gradient introduït per Carlen i Pardoux.

Nosaltres, a [**NV1**] i [**NV6**], estudiem els operadors d'anihilació D i creació δ corresponents a l'estructura d'espai de Fock associada a l'espai dels funcionals de Poisson de quadrat-integrable. Aquest estudi és el que presentem en aquest capítol.

A diferència del cas de l'espai de Wiener, l'operador d'anihilació no pot ser interpretat com una derivada, però si com un operador de diferència. En [**NV6**] desenvolupem aquesta interpretació, aixi com la interpretació de l'operador adjunt, en el marc de l'espai canònic del procés de Poisson introduit per Neveu a [**Ne**]. En particular obtenim una fórmula d'integració per parts.

1. El procés de Poisson.

Suposem que $(T, \mathcal{B}, \lambda)$ és un espai de mesura on T és un espai localment compacte amb base numerable, $\mathcal{B}$ és la $\sigma-$ àlgebra de Borel associada, i λ és una mesura positiva, contínua i de Radon. Recordem que una mesura es diu de Radon si és finita sobre els compactes.

Denotarem per $M_p(T)$ l'espai de les mesures puntuals sobre T, localment finites (o de Radon). És a dir, $m \in M_p(T)$ si i només si $m(\cdot) = \sum_i \delta_{t_i}(\cdot)$, i tot compacte de T conté només un nombre finit de punts t_i. δ_{t_i} és la delta de Dirac en el punt t_i.

Introduim en aquest espai la $\sigma-$ àlgebra $\mathcal{M}_p$ generada per les aplicacions $\phi_F(m) = m(F) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, per a tot $F \in \mathcal{B}$.

El procés de Poisson es defineix com una aplicació mesurable N d'un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a l'espai $(M_p(T), \mathcal{M}_p)$, que indueix una llei de probabilitat sobre $M_p(T)$ tal que

i) $\forall F \in \mathcal{B}$ tal que $\lambda(F) < \infty$, $N(F)$ és una v.a. amb llei de Poisson de paràmetre $\lambda(F)$. Si $\lambda(F) = \infty$ aleshores $N(F) = \infty$, q.s.

ii) Si $F_1, \ldots, F_k$ són borelians de $\mathcal{B}$, dos a dos disjunts, aleshores $N(F_1), \ldots, N(F_k)$ són variables aleatòries independents.

Observem que el procés de Poisson ens permet definir una mesura aleatòria independent i centrada $X(F) = N(F) - \lambda(F), \forall F \in \mathcal{B}$ amb $\lambda(F) < \infty$. Per tant podem definir una integral estocàstica múltiple respecte aquesta mesura, anomenada mesura de Poisson compensada.

En aquest marc es té també una descomposició ortogonal de l'espai dels funcionals de quadrat integrable mesurables respecte el procés de Poisson (veure [**Og**]). En particular doncs, aquest espai de funcionals té estructura d'espai de Fock. Per tant podem considerar els operadors D i δ com operadors sobre aquest espai.

2. L'espai canònic del procés de Poisson.

Introduim ara l'espai canònic del procés de Poisson. Per tal de simplificar l'exposició suposarem que λ és una mesura finita. Si λ és una mesura de Radon no necessariament finita, també es pot construir l'espai canònic de Poisson (veure [**Ne**]), i tots els resultats següents es poden estendre adequadament.

Considerem la reunió disjunta $\Omega = \cup_{n=0}^{\infty} T^n$, on $T^0 = \{a\}$, i a és un punt distigit. Podem introduir sobre Ω una $\sigma-$ àlgebra $\mathcal{F}$ definida de la manera següent: $G \subset \Omega$ pertany a $\mathcal{F}$ si i només si $G \cap T^n \in \mathcal{B}^{\otimes n}$ per a tot $n \geq 1$. Si λ^n és la mesura producte a T^n, per a tot $n \geq 1$, i λ^0 és δ_a, podem definir sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ la probabilitat P donada per

$$P(G) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(T)} \frac{1}{n!} \lambda^n(G \cap T^n).$$

Amb aquests ingredients introduirem un procés de Poisson sobre aquest espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Considerem l'aplicació N de Ω a $M_p(T)$ tal que per a tot $n \geq 1$ es té $N(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$, i $N(a) = 0$. Evidentment es tracta d'una aplicació mesurable ja que $\forall F \in \mathcal{B}$,

$$\{N(\cdot, F) = k\} \cap T^n = \{(s_1, \ldots, s_n) : \sum_{i=1}^{n} 1_F(s_i) = k\} \in \mathcal{B}^{\otimes n}.$$

Aquesta aplicació té les propietats següents:

i) $P\{N(T) = k\} = e^{-\lambda(T)} \frac{1}{k!} \lambda(T)^k$.

ii) $P\{G | N(T) = m\} = \frac{\lambda^m(G \cap T^m)}{\lambda(T)^m}$.
En particular, P restringida a T^n és una mesura equivalent a λ^n, per a tot $n \geq 1$.

D'aquestes propietats es dedueix que N és un procés de Poisson (veure [**Ne**]).

En efecte, sigui $F_1, \ldots, F_k$ una partició de T. Considerem $n_1, \ldots, n_k$ tals que $n_1 + \cdots + n_k = n$. Aleshores,

$$P\{N(F_1) = n_1, \ldots, N(F_k) = n_k\}$$

$$= e^{-\lambda(T)} \frac{1}{n!} \lambda(T)^n P\{N(F_1) = n_1, \ldots, N(F_k) = n_k | N(T) = n\}$$

$$= e^{-\lambda(T)} \frac{1}{n!} \lambda(T)^n n! \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_i)^{n_i}}{(n_i)! \lambda(T)^{n_i}} = e^{-\lambda(T)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_i)^{n_i}}{(n_i)!}.$$

Això prova de manera immediata les dues condicions que caracteritzen un procés de Poisson d'intensitat λ.

Una propietat essencial que es demostra a [**Ne**] és la següent:

2.1 Lema.

Sigui $\mathcal{B}_S^{\otimes n}$ *la sub–*σ*–àlgebra dels borelians simètrics de* T^n*. Sigui* $\mathcal{F}_S$ *la* σ*–àlgebra generada pels conjunts* $G \in \mathcal{F}$ *tals que* $G \cap T^n \in \mathcal{B}_S^{\otimes n}$*. Aleshores tenim* $N^{-1}(\mathcal{M}_p(T)) = \mathcal{F}_S$*.*

Aquest lema ens diu en particular que els funcionals mesurables respecte el procés de Poisson seran funcionals amb les projeccions sobre cada T^n simètriques.

Recordem dues propietats adicionals d'aquesta mesura de probabilitat P.

1. $P\{N(\{t\}) > 1, \text{ per algun } t \in T\} = 0$.

2. Per a qualsevol $t \in T$ fixat, $P\{N(\{t\}) \geq 1\} = 0$.

Aquestes propietats són immediates usant el fet que sobre cada T^n la mesura P és equivalent a λ^n.

3. L'operador de translació i el seu adjunt.

Recordem que la σ–àlgebra $\mathcal{F}_S$ introduïda en el lema 2.1. coincideix amb la σ–àlgebra generada pel procés de Poisson N. Considerem una variable aleatòria F que sigui $\mathcal{F}_S$–mesurable i fixem $t \in T$.

Es defineix la variable aleatòria $\Psi_t F$ de la manera següent:

$$\Psi_t F(s_1, \ldots s_n) = F(s_1, \ldots s_n, t) - F(s_1, \ldots, s_n), \quad n \geq 1,$$

$$\Psi_t F(a) = F(t) - F(a).$$

D'altra banda, si $u = \{u_s, s \in T\}$ és un procés estocàstic mesurable tal que

$$\int_T |u_s| \lambda(ds) < \infty,$$

es defineix una variable aleatòria Φu de la manera següent:

$$(\Phi u)(s_1, \dots s_n) = \sum_{j=1}^{n} u_{s_j}(s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots s_n) - \int_T u_s(s_1, \dots s_n)\lambda(ds), \quad n \geq 2,$$

$$(\Phi u)(s_1) u_{s_1}(a) - \int_T u_s(s_1)\lambda(ds),$$

i

$$(\Phi u)(a) = - \int_T u_s(a)\lambda(ds).$$

L'operador Ψ està ben definit de $L^0(\Omega)$ a $L^0(\Omega \times T)$, i, analogament, l'operador Φ és una aplicació de $L^0(\Omega, L^1(T))$ a $L^0(\Omega)$. Això és cert com a conseqüència del fet que P restringida a T^n és una mesura equivalent a λ^n, per a tot $n \geq 1$.

4. Una fórmula d'integració per parts.

La relació de dualitat entre aquests dos operadors ve donada per la fórmula d'integració per parts següent:

2.2 Teorema.

Considerem $F \in L^0(\Omega)$ *i* $u \in L^0(\Omega \times T)$, *tals que* $\int_T |u_s|\lambda(ds) < \infty$. *Suposem que* $E(\int_T |Fu_t|\lambda(dt)) < \infty$.

Aleshores $F\Phi u \in L^1(\Omega)$ *si i només si* $E(\int_T |\Psi_t F u_t|\lambda(dt)) < \infty$, *i en aquest cas*

$$E[F\Phi u] = E\left(\int_T \Psi_t F u_t \lambda(dt)\right).$$

Prova:

Tenim,

$$E[F\Phi u]=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{T^n}[F(s_1,\dots,s_n)(\sum_{j=1}^{n}u_{s_j}(s_1,\dots,\hat{s}_j,\dots,s_n)-\int_T u_s(s_1,\dots s_n)\lambda(ds))]dP$$

$$+\int_T F(s_1)(u_{s_1}(a)-\int_T u_s(s_1)\lambda(ds))dP+F(a)\int_T u_s(a)\lambda(ds).$$

D'altra banda,

$$E(\int_T \Psi_t F u_t\lambda(dt))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^n}\int_T[F(s_1,\dots,s_n,t)-F(s_1,\dots,s_n)]u_t(s_1,\dots,s_n)\lambda(dt)dP$$

$$+\int_T[F(t)-F(a)]u_t(a)\lambda(dt).$$

Aleshores és suficient veure per a cada $n\geq 2$ que

$$\int_{T^n}F(s_1,\dots,s_n)\sum_{j=1}^{n}u_{s_j}(s_1,\dots,\hat{s}_j,\dots,s_n)dP$$

$$=\int_{T^{n-1}}\int_T F(s_1,\dots,s_{n-1},t)u_t(s_1,\dots,s_{n-1})\lambda(dt)dP.$$

La restricció a T^n de dP ve donada per

$$dP=e^{-\lambda(T)}\frac{1}{n!}\lambda(ds_1)\cdots\lambda(ds_n).$$

Per tant hem de comprovar que

$$\int_{T^n} F(s_1,\dots,s_n)\sum_{j=1}^{n} u_{s_j}(s_1,\dots,\hat{s}_j,\dots,s_n)e^{-\lambda(T)}\frac{1}{n!}\lambda(ds_1)\cdots\lambda(ds_n)$$

$$= \int_{T^{n-1}}\int_T F(s_1,\dots,s_{n-1},t)u_t(s_1,\dots,s_{n-1})\lambda(dt)\frac{e^{-\lambda(T)}}{(n-1)!}\lambda(ds_1)\cdots\lambda(ds_{n-1}),$$

i això és clar perque F és un funcional simètric.

q.e.d.

5. Propietats dels operadors Φ i Ψ.

Ara establirem la relació entre els operadors Ψ i Φ introduits abans i els operadors D i δ associats a l'estructura d'espai de Fock subjacent a $L^2(\Omega)$.

2.3 Lema. *Per a tota funció $g_m \in L^2_S(T^m)$, es té per a tot $\omega = (s_1,\dots,s_n) \in T^n$ q.p.t. i $n \geq 1$,*

$$I_m(g_m)(t_1,\dots,t_m)(s_1,\dots,s_n) = \int_{T^m_*} g_m(t_1,\dots,t_m)(\sum_{i=1}^{n}\delta_{s_i}-\lambda)(dt_1)\cdots(\sum_{i=1}^{n}\delta_{s_i}-\lambda)(dt_m)$$

on $T^m_* = \{(s_1,\dots,s_m) \in T^m : s_i \neq s_j, if \quad i \neq j\}$.

A més a més, $I_m(g_m)(t_1,\dots,t_m)(a) = (-1)^m \int_{T^m_*} g_m(t_1,\dots,t_m)\lambda(dt_1)\cdots\lambda(dt_m)$.

Prova:

Ambdues expressions coincideixen quan g_m és una funció simple, i defineixen operadors lineals i fitats sobre $L^2_S(T^m)$.

q.e.d.

2.4 Lema.

Si $F = I_m(g_m)$ on $g_m \in L^2_S(T^m)$, es té $\Psi_t F(\omega) = D_t F(\omega)$ quasi per tot $(\omega, t) \in \Omega \times T$.

Prova:

Fixem $n \geq 1$. Per a tot $\omega = (s_1, \ldots, s_n)$, definim la mesura $\tilde{N}(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{t_j} - \lambda$. Aleshores, pel lema 2.3. tenim quasi per tot $(\omega, t) \in T^n \times T$,

$$(\Psi_t F)(\omega) = I_m(g_m)(\omega, t) - I_m(g_m)(\omega)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \int_{T_*^m} g_m(t_1, \ldots, t_m) \delta_t(dt_1) \cdots \delta_t(dt_k) \tilde{N}(\omega)(dt_{k+1}) \cdots \tilde{N}(\omega)(dt_m)$$

$$= m \int_{T_*^{m-1}} g_m(t_1, \ldots, t_{m-1}, t) \tilde{N}(\omega)(dt_1) \cdots \tilde{N}(\omega)(dt_{m-1})$$

$$= m I_m(g_m(\cdot, t)) = (D_t F)(\omega).$$

La darrera igualtat se segueix de la definició de l'operador D sobre les integrals estocàstiques múltiples.

En el cas $\omega = a$, per la definició de l'operador Ψ tenim $(\Psi_t F)(a) = I_m(g_m)(t) - I_m(g_m)(a)$. A més a més, $\tilde{N}(a) = -\lambda$, i pel mateix argument s'obté $\Psi_t F(a) = D_t F(a)$.

q.e.d.

2.5 Lema.

Sigui g_m una funció de $L^2(T^{m+1})$ tal que per a tot $t \in T$, $g_m(\cdot, t) \in L^2_S(T^m)$. Sigui $u_t = I_m(g_m(\cdot, t))$, aleshores $\Phi u = \delta u$ q.s.

Prova:

Recordem que $\delta(u) = I_{m+1}(\tilde{g}_m(\cdot, t))(\omega)$, on $\tilde{g}_m$ denota la simetrització de la funció g_m en totes les seves variables. Pel lema 2.3. s'obté quasi per tot $\omega = (s_1, \ldots, s_n)$, $n \geq 1$,

$$(3) \quad I_{m+1}(\tilde{g}_m(\cdot, t))(\omega)$$

$$= \int_{T_*^{m+1}} \tilde{g}_m(t_1, \ldots, t_m, t) \tilde{N}(\omega)(dt_1) \cdots \tilde{N}(\omega)(dt_m) N(\omega)(dt) - \int_T u_t(\omega) \lambda(dt)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{T_*^m} \tilde{g}_m(t_1, \ldots, t_m, s_j) 1_{\{t_i \neq s_j, i=1,\ldots,m\}} \tilde{N}(\omega)(dt_1) \cdots \tilde{N}(\omega)(dt_m) - \int_T u_t(\omega) \lambda(dt).$$

Definim per a tot $j = 1, \ldots, n$, $\tilde{N}^j(\omega) = \sum_{l=1, l \neq j}^{n} \delta_{s_l} - \lambda$. Aleshores, podem descomposar $\tilde{N}$ com $\tilde{N}(\omega) = \delta_{s_j} + \tilde{N}^j(\omega)$.

Usant aquestes notacions l'expressió (3) es pot escriure de la manera següent:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \int_{T_*^m} \tilde{g}_m(t_1, \ldots, t_m, s_j) 1_{\{t_i \neq s_j, i=1,\ldots,m\}}$$

$$\times \delta_{s_j}(dt_1) \cdots \delta_{s_j}(dt_k) \tilde{N}^j(\omega)(dt_{k+1}) \cdots \tilde{N}^j(\omega)(dt_m) - \int_T u_t(\omega) \lambda(dt).$$

Els termes corresponents a $k = 1, \ldots, m$ en la suma anterior s'anul.len. Per tant, tenint en compte la definició de l'operador Φ, obtenim

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{T_*^m} \tilde{g}_m(t_1, \ldots, t_m, s_j) 1_{\{t_i \neq s_j, i=1,\ldots,m\}} \tilde{N}^j(\omega)(dt_1) \cdots \tilde{N}^j(\omega)(dt_m)$$

$$- \int_T u_t(\omega) \lambda(dt) = (\Phi u)(\omega).$$

q.e.d.

La proposició següent caracteritza el domini de l'operador D en termes de la integrabilitat en L^2 de la variable aleatòria F i el procés $\Psi_t F$. Un resultat similar val per l'operador δ.

2.6 Proposició.

Sigui F una variable aleatòria de $L^2(\Omega)$. Aleshores $\Psi F \in L^2(\Omega \times T)$ si i només si $F \in DomD$ i en aquest cas $DF = \Psi F$.

Prova:

Suposem primer que $\Psi F \in L^2(\Omega \times T)$. És suficient veure que existeix un procés $\eta \in L^2(\Omega\times T)$ tal que per a qualsevol integral estocàstica múltiple de la forma $u_t = I_m(g_m(\cdot, t))$, on $g_m \in L^2(T^{m+1})$ i és simètrica en les primeres m variables, es té

$$E[F\Phi(u)] = E[\langle \eta, u\rangle_{L^2(T)}].$$

Per la fórmula de dualitat es té

$$E[F\Phi(u)] = E[\langle \Psi F, u\rangle_{L^2(T)}].$$

Per tant, $\eta = \Psi F \in L^2(\Omega \times T)$ satisfa la condició desitjada.

D'altra banda, si $F \in DomD$, per a tot $u_t = I_m(g_m(\cdot, t))$ com abans, i, mitjançant la dualitat entre els operadors D i δ, el lema 2.5. i el teorema 2.2. s'obté

$$E[\langle DF, u\rangle] = E[F\delta(u)] = E[F\Phi u] = E[\langle \Psi F, u\rangle].$$

Per tant $\Psi F = DF$, i això completa la prova de la proposició.

q.e.d.

Un resultat similar per a l'operador δ és el següent:

2.7 Proposició.

Sigui $u = \{u_t, t \in T\}$ un procés estocàstic a $L^2(\Omega \times T)$. Aleshores $\Phi u \in L^2(\Omega)$ si i només si $u \in Dom\delta$ i en aquest cas $\delta u = \Phi u$.

Prova:

Suposem primer que $\Phi u \in L^2(\Omega)$. Per a tot $F = I_m(g_m)$ usant el lema 2.4. i el teorema 2.2. s'obté

$$E[\langle u, DF\rangle_{L^2(T)}] = E[\langle u, \Psi F\rangle_{L^2(T)}] = E[F\Phi u].$$

Com a conseqüència, $\delta(u) = \Phi(u)$.

A la inversa, si $u \in Dom\delta$, per a tot $F = I_m(g_m)$, usant la dualitat entre els operadors D i δ, el lema 2.4. i el teorema 2.2. s'obté

$$E[F\delta(u)] = E[\langle DF, u\rangle] = E[\langle \Psi F, u\rangle] = E[F\Phi u].$$

Per tant $\delta(u) = \Phi(u)$, i això completa la prova de la proposició.

q.e.d.

6. Aplicació als instants de salt del procés de Poisson.

Una aplicació d'aquests resultats és el càlcul de la translació dels instants de salt del procés de Poisson. En efecte, sigui $T = [0,1]$, i siguin $S_1, S_2, \ldots, S_n$, els instants de salt del procés de Poisson standard sobre T. Calcularem la transformació $\Psi_t S_i = S_i(\omega + \delta_t) - S_i(\omega)$.

Tenim,

$$\Psi_t S_i = 0 \quad \text{si} \quad t > S_i,$$

$$\Psi_t S_i = t - S_i, \quad \text{si} \quad S_{i-1} < t < S_i,$$

i

$$\Psi(S_i) = S_{i-1} - S_i \quad \text{si} \quad t < S_{i-1}.$$

Per tant,

$$\Psi_t S_i(\omega) = S_{i-1} 1_{\{t < S_i\}} + t 1_{\{S_{i-1} < t < S_i\}} - S_i 1_{\{t < S_i\}},$$

i per exemple per $i = 1$,

$$\Psi_t S_1 = (t - S_1) 1_{[0, S_1]}(t).$$

Observem que es compleixen les hipòtesis de la proposició 2.6. ja que els instants de salt tenen moments de tots els ordres. Aleshores $\Psi_t S_i = D_t S_i$ q.s.- q.p.t.

Notem també que aquest operador Ψ és no-local tal com es dedueix de l'exemple següent. En efecte, suposem que F i G son funcionals que coincideixen i són iguals a zero en el subconjunt $\{N(1/2) = N(1)\}$ i prenen els valors 1 i 2 respectivament en el complementari. Per a tot $t > 1/2$ tenim $\Psi_t F = 1$ i $\Psi_t G = 2$.

7. L'operador Φ com integral estocàstica.

El teorema següent permet interpretar l'operador Φ com una generalització de la integral estocàstica respecte el procés de Poisson, en el sentit que coincideix amb aquesta integral sobre els processos previsibles.

2.8 Teorema.

Suposem que $T = [0, 1]$, *i sigui* $u = \{u_t, t \in [0.1]\}$ *un procés previsible tal que* $\int_0^1 |u_t| dt < \infty$.

Aleshores tenim

$$\Phi u = \int_0^1 u(t) d\tilde{N}(t).$$

Prova:

Per a tot $t \in [0, 1]$ denotarem per $\mathcal{F}_t$ la σ–àlgebra generada per les variables aleatòries $\{N_s, 0 \leq s \leq t\}$.

Suposem primer que u és un procés simple tal que $u(t) = F(\omega) 1_{(a,b]}(t)$ i F és $\mathcal{F}_a$-mesurable, aleshores per a tot $\omega = (s_1, \ldots, s_n)$, $n \geq 1$, és té

$$\Phi(u)(\omega) = \sum_{j=1}^{n} F(s_1, \ldots, \hat{s}_j, \ldots, s_n) 1_{(a,b]}(s_j) - \int_0^1 u_t(\omega) dt.$$

El fet que F és $\mathcal{F}_a$-mesurable implica que per a tot $n \geq 1$ i per a tot $k = 0, \ldots, n$, $F(s_1, \ldots, s_n)$ depen només de les coordenades $\{s_1, \ldots, s_k\}$ en el conjunt $\{s_k < a < s_{k+1}\}$. Per tant s'obté

$$\Phi(u)(\omega) = F(\omega)(N_b - N_a) - F(\omega)(b - a) = \int_0^1 u_t(\omega) d\tilde{N}_t.$$

Finalment aquesta igualtat es pot estendre a tots els processos previsibles que verifiquen $\int_0^1 |u_t|dt < \infty$ mitjançant un argument de pas al límit.

En efecte, es pot trobar una successió de processos previsibles elementals, és a dir de combinacions lineals de processos de la forma $= F(\omega)1_{(a,b]}(t)$, on F és $\mathcal{F}_a$-mesurable, que denotarem per u^n tals que $\int_0^1 |u_t - u_t^n|dt$ convergeix en probabilitat cap a zero quan n tendeix cap a infinit. Aleshores tenim

$$\Phi u^n = \int_0^1 u^n(t)d\tilde{N}(t),$$

i passant al límit quan n tendeix a infinit, i usant la definició de l'operador Φ s'obté el resultat desitjat.

q.e.d.

Per a processos no-previsibles no podem interpretar δ com l'operador Φ. Ens plantegem ara donar una interpretació de δ per aquest tipus de processos. Veurem que podem interpretar δ com una integral de Poisson-Wiener menys un terme correctiu. Aquest terme correctiu es pot expressar en termes de totes les derivades de u en els instants de salt del procés de Poisson.

Previament necessitem introduir dos lemes. El lema següent ens dóna una fórmula del producte per l'operador de translació Ψ_t, que ens serà útil.

2.9 Lema. *Siguin F i G funcionals de $L^0(\Omega)$. Aleshores,*

$$\Psi_t(F \cdot G) = F \cdot \Psi_t(G) + G \cdot \Psi_t(F) + \Psi_t(F) \cdot \Psi_t(G), \quad q.s. - q.p.t.$$

Prova:

$$\Psi_t(F \cdot G) = F(\omega + \delta_t)\, G(\omega + \delta_t) - F(\omega)\, G(\omega)$$

$$= F(\omega + \delta_t)\, G(\omega + \delta_t) - F(\omega + \delta_t)\, G(\omega) + F(\omega + \delta_t)\, G(\omega) - F(\omega)\, G(\omega)$$

$$= F(\omega + \delta_t)\, \Psi_t(G) + \Psi_t(F)\, G(\omega)$$

$$= (F(\omega + \delta_t) - F(\omega))\, \Psi_t(G) + \Psi_t(F)\, G + F\, \Psi_t(G)$$

$$= F\,\Psi_t(G) + G\,\Psi_t(F) + \Psi_t(F)\,\Psi_t(G).$$

q.e.d.

Sigui ara u un procés de $L^2(T; L^2(\Omega))$. El resultat següent ens permetra calcular δ d'un procés elemental:

2.10 Lema.

Sigui $u \in Dom\,\delta$ i $F \in DomD$. Suposem també que $DF \cdot u \in Dom\delta$, $\langle u, DF\rangle \in L^2(\Omega)$, $F\delta(u) \in L^2(\Omega)$, i $F \cdot u \in L^2(\Omega \times T)$. Aleshores,

$$Fu_t \in Dom\,\delta,$$

i

$$\delta(Fu_t) = F\delta(u) - \int_T u_t\, D_t F \lambda(dt) - \delta(DFu).$$

Prova:

Sigui $G \in$ Dom$D$. Notem que $DomD$ és dens a $L^2(\Omega)$. Com que $F \cdot u_t \in L^2(\Omega \times T)$, i usant el lema, es té

$$E\int_T Fu_t D_t G\lambda(dt) = E\int_T Fu_t \Psi_t G\lambda(dt).$$

Usant la fórmula del producte introduida abans, i la dualitat intrinseca entre els operadors Ψ i Φ es té

$$E[\langle F \cdot u_t, \Psi_t G\rangle_{L^2(T)}] = E[\langle u, \Psi(FG)\rangle_{L^2(T)}] -$$

$$E[G\langle u, \Psi F\rangle_{L^2(T)}] - E[\langle u \cdot \Psi F, \Psi G\rangle_{L^2(T)}] =$$

$$E[\Phi(u)FG] - E[G\langle\Psi(F), u\rangle_{L^2(T)}] - E[G\Phi(u \cdot \Psi(F)].$$

Aquests tres termes són finits com a conseqüència de les proposicions 2.6. i 2.7. i de les hipòtesis del lema.

Finalment,

$$E[\langle F\cdot u_t, D_tG\rangle_{L^2(T)}]$$

$$= E[G\{F\delta(u) - \int_T u_tD_tF\lambda(dt) - \delta(uDF)\}]$$

$$= E[G\delta(Fu)].$$

q.e.d.

Observació:

Aquest lema ens permet provar d'una altra manera el fet que la integral de Skorohod és una generalització de la integral respecte el proces de Poisson definida trajectòria a trajectòria. En efecte, si $T = [0,1]$, i $u \in Dom\delta$ és previsible,

$$\delta(u) = \int_0^1 u(t)d\tilde{N}(t).$$

ja que tot procés previsible de $L^2([0,1]; L^2(\Omega))$ pot ser aproximat per combinacions lineals de processos previsibles elementals del tipus $F1_{(s,t]}$ amb F funcional $\mathcal{F}_{[0,s]}-$ mesurable, com ja hem vist a la prova del teorema 2.8.

Usant el lema anterior es té

$$\delta(F1_{(s,t]}) = F\delta(1_{(s,t]}) = \int_s^t Fd\tilde{N}(u).$$

Finalment la isometria de la integral de Poisson-Wiener prova l'equivalència entre les integrals.

El teorema següent dona la interpretació de δ per a processos no previsibles

2.11 Teorema. *Si* $u \in \mathsf{L}^{1,2}$, *existeix un procés* $A = \{A_s, 0 \le s \le 1\}$ *tal que*

$$\delta(u) = \int_0^1 u_s d\tilde{N}_s - \int_0^1 A_s dN_s.$$

Prova:

a) Sigui $\{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$ una base ortonormal de $L^2([0,1])$, amb les f_j fitades. Sigui ϕ una funció fitada. Considerem la classe $\mathcal{S}_0$ de processos del tipus

$$u(t) = I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k})\phi(t), \quad t \in [0,1].$$

Provarem per inducció sobre k que aquests processos verifiquen el teorema amb

$$A(s) = D_s u_s - D_s D_s u_s + \cdots + (-1)^{k-1} D_s \overset{k)}{\cdots} D_s u_s.$$

En efecte, si $k=1$ es té $u(t) = I_1(f)\phi(t)$, $t \in [0,1]$. Aleshores,

$$\delta(u) = I_1(f)\delta(\phi) - \int_0^1 \phi(t) D_t I_1(f) dt - \delta(D I_1(f)\phi).$$

Ara bé $D_t I_1(f) = f(t)$ i aleshores,

$$\delta(u) = I_1(f)\delta(\phi) - \int_0^1 \phi(t) f(t) dt - \delta(f\phi)$$

$$= \int_0^1 u(s) d\tilde{N}(s) - \int_0^1 \phi(s) f(s) dN(s)$$

$$= \int_0^1 u(s) d\tilde{N}(s) - \int_0^1 D_s u(s) dN(s).$$

Si el resultat és vàlid per k veurem que també és vàlid per $k+1$.
Considerem doncs $u(t) = I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\phi(t)$ amb $t \in [0,1]$.
Aleshores, usant el lema 2.10. tenim

$$\delta(u) = I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\delta(\phi)$$

$$-\int_0^1 D_t I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\phi(t)dt - \delta(DI_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\phi).$$

Ara bé,

$$D_t I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}}) = \sum_{j=1}^{k+1} f_{i_j}(t) I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{i_j} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}}).$$

Aleshores,

$$\delta(u) = I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\delta(\phi) - \sum_{j=1}^{k+1} I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{i_j} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}}) \int_0^1 f_{i_j}(t)\phi(t)dt$$

$$-\sum_{j=1}^{k+1} \delta(f_{i_j}\phi I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{i_j} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})).$$

Per la hipòtesi d'inducció es té

$$\delta(f_{i_j}\phi I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{i_j} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}}))$$

$$= I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{i_j} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}}) \int_0^1 f_{i_j}(s)\phi(s)d\tilde{N}_s - \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1} \int_0^1 f_{i_j}(s) D_s \cdots D_s u_s dN_s.$$

Finalment

$$\delta(u) = I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\delta(\phi) - \sum_{j=1}^{k+1} I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{i_j} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}}) \int_0^1 f_{i_j}(t)\phi(t)dt$$

$$- \sum_{j=1}^{k+1} I_k(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{i_j} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}}) \int_0^1 f_{i_j}(t)\phi(t)d\tilde{N}_t + \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1} \int_0^1 D_s^{l+1} u_s dN_s$$

$$= I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\delta(\phi) - \int_0^1 D_t u_t dN_t + \sum_{l=2}^{k+1}(-1)^l \int_0^1 D_s^l u_s dN_s$$

$$= I_{k+1}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_{k+1}})\delta(\phi) - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1} \int_0^1 D_s^j u_s dN_s.$$

b) Recordem que $\mathbb{L}^{1,2}$ és un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{L}^{1,2}} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega\times[0,1])} + \langle Du, Dv\rangle_{L^2(\Omega\times[0,1]^2)}.$$

D'altra banda, tenim la isometria

$$||\delta(u)||^2_{L^2(\Omega)} = ||u||^2_{L^2(\Omega\times[0,1])} + E\int_0^1 \int_0^1 D_s u_t D_t u_s ds dt.$$

Donada $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ podem construir una successió $\{u^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_0$ tal que
i) $u^{(n)} \longrightarrow u$ en $L^2(\Omega \times [0,1])$.
ii) $Du^{(n)} \longrightarrow Du$ en $L^2(\Omega \times [0,1]^2)$.

Aleshores per la isometria, es té

$$||\delta(u)-\delta(u^{(n)}||^2_{L^2(\Omega)} = ||u-u^{(n)}||^2_{L^2(\Omega\times[0,1])} + E\int_0^1\int_0^1 D_s(u_t-u_t^{(n)})D_t(u_s-u_s^{(n)})dsdt.$$

Però,

$$|E\int_0^1\int_0^1 D_s(u_t-u_t^{(n)})D_t(u_s-u_s^{(n)})dsdt|$$

$$\leq E\{(\int_0^1\int_0^1 |D_s(u_t-u_t^{(n)})|^2 dsdt)^{1/2}(\int_0^1\int_0^1 |D_t(u_s-u_s^{(n)})|^2 dsdt)^{1/2}\}$$

$$= ||D(u-u^{(n)})||^2_{L^2(\Omega\times[0,1]^2)},$$

i per tant

$$\delta(u^{(n)}) \longrightarrow_{n\to\infty} \delta(u), \text{ en } L^2(\Omega).$$

En particular, $\delta_t(u^{(n)}) = \delta(u^{(n)}1_{[0,t]})$ i $\int_0^t u_s^{(n)}ds$ convergeixen en $L^2([0,1\times\Omega)$ a $\delta_t(u)$ i $\int_0^t u_s ds$ respectivament.

Ara be, podem escriure

$$\delta(u^{(n)}) = \int_0^t (u_s^{(n)} - A_s^{(n)})dN_s - \int_0^t u^{(n)}ds.$$

Aleshores,

$$\int_0^t (u_s^{(n)} - A_s^{(n)})dN_s \longrightarrow \delta_t(u) + \int_0^t u_s ds.$$

a $L^2(\Omega \times [0,1])$, i existeix una parcial que convergeix q.s.-q.p.t. en $\Omega \times [0,1]$.

Per tant $\delta_t(u) + \int_0^t u_s ds$ és constant sobre els intervals $[S_i(\omega), S_{i+1}(\omega))$ com a funció de t, on S_i són els instants de salt del procés N.

Finalment doncs podem definir R tal que

$$\delta_t(u) + \int_0^t u_s ds = \int_0^1 R(s)dN(s),$$

i per tant existirà A tal que

$$\delta_t(u) = \int_0^t u_s d\tilde{N}_s - \int_0^t A(s)dN(s)$$

puntualment en t.

q.e.d.

Observació:

Recentment A.N. Al-Husseini i L.Tang han donat una interpretació específica de la fórmula de Clark en l'espai de Poisson per a funcionals de Dom D del tipus $G(S_1, \dots S_n, \dots)$ on els S_i són els salts del procés de Poisson, i la G és fitada i amb derivades parcials uniformement fitades [**AH-T**].

Continuïtat absoluta de la llei del màxim d'un procés continu

Capítol 3

0. Presentació.

Sigui T és un espai mètric compacte i $X = \{X(t), t \in T\}$ un procés estocàstic mesurable i amb trajectòries contínues quasi-segurament. El problema que ens plantegem en aquest capítol és determinar condicions necessàries per tal que el suprem de X, que denotarem per

$$M = \sup_{t \in T} X(t),$$

sigui una variable aleatòria amb llei absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

Primer de tot analitzarem el cas paradigmàtic del procés de Wiener standard. Veurem després el resultat clàssic per a processos gaussians obtingut per D.Ylvisaeker a [**Yl**]. En relació amb aquest resultat hi ha també la referència de [**Ws**]. Finalment estudiarem el problema des del punt de vista del càlcul de variacions estocàstic. En efecte, si X és un procés definit en l'espai de Wiener, M serà un funcional sobre aquest espai, i per tant podem usar el càlcul de variacions estocàstic com a eina per estudiar la seva continuïtat absoluta.

1. El màxim del procés de Wiener.

Suposem que $\{X(t), t \in [0,1]\}$ és el procés de Wiener o moviment brownià standard, nul a l'origen. Sigui $y > 0$. Aplicant el principi de reflexió tenim que

$$P\{M > y\} = P\{M > y, X(1) > y\} + P\{M > y, X(1) < y\}$$

$$= 2P\{M > y, X(1) > y\} = 2P\{X(1) > y\}.$$

Si denotem per Φ la funció de distribució de la distribució normal standard tenim que

$$P\{M \leq y\} = 2\Phi(y) - 1 = 2\int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Per tant la variable M tindrà una densitat de probabilitat donada per

$$f_M(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2}, \quad y \in [0, \infty).$$

2. El màxim d'un procés gaussià (mètode clàssic).

Sigui T un espai mètric compacte i $\{X(t), t \in T\}$ un procés gaussià amb funció de mitjana $\mu(t)$, funció de covariància $K(s,t)$, i amb trajectòries contínues quasi-segurament.

3.1 Lema.

La funció de mitjana i la funció de covariància són contínues.

Prova:

Considerem una successió de punts $\{t_n\}_n$ de T que convergeixi cap a $t \in T$. En el cas d'una família gaussiana la continuïtat quasi-segura implica la continuitat en L^2 (veure [**H**]). Aleshores el lema es dedueix immediatament.

q.e.d.

3.2 Teorema.

Suposem ara que $K(t,t) > 0$, $\forall t \in T$. Aleshores M és una variable aleatòria amb llei absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

Observació:

Es clar que aquest cas no cobreix l'anterior ja que el procés de Wiener a $[0,1]$ té variància nul.la per a $t = 0$.

Prova:

a) M és una v.a. En efecte, per ser T compacte, podem escollir un subconjunt $T_0 \subseteq T$ numerable i dens. Si $T_0 = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, podem definir les variables aleatòries

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{X(t_i)\}.$$

Per la continuïtat q.s. de les trajectòries, M_n convergeix q.s. cap a $M = \sup_{t \in T} X_t$.

b) Veurem primer que $\forall k > 0$ existeix una constant $C(k)$ tal que

$$P\{y - \epsilon < M \leq y + \epsilon\} \leq C(k)\epsilon, \quad \forall y \leq k, \forall \epsilon \in (0,1).$$

La constant $C(k)$ dependrà de la funció de mitjana i de la funció de covariància del procés.

Per això començarem per provar que

$$(4) \qquad P\{y - \epsilon < M_n \leq y + \epsilon\} \leq C(k)\epsilon.$$

i després aplicarem el fet que la convergència q.s. de les M_n cap a M implica la seva convergència en llei.

Per provar (4) ho farem en tres etapes.

1) Suposem que $K(t,t) \equiv 1$ i que $\inf_{t \in T} \mu(t) \geq 0$. En aquest cas podem calcular directament la densitat de M_n.

En efecte, fixada $y \in \mathbf{R}$, tenim que

$$P\{M_n \leq y\} = \sum_{i=1}^{n} P\{M_n \leq y, X(t_i) = M_n\}$$

ja que per ser $X(t_i) - X(t_j)$ gaussiana, $P\{X(t_i) = X(t_j)\} = 0$, excepte en el cas que la seva llei conjunta sigui degenerada i es concentri en $\{X(t_i) = X(t_j)\}$, i en aquest cas podem treure una de les dues variables sense que M_n en quedi afectat.

Podem escriure l'expressió anterior com,

$$\sum_{i=1}^{n} P\{X(t_i) \in (-\infty, y], X(t_i) = M_n\}$$

i pel teorema d'existència d'una versió regular de la probabilitat condicionada (veure per exemple [D]), tenim que l'expressió anterior val

$$\int_{-\infty}^{y} \sum_{i=1}^{n} P\{X(t_i) = M_n | X(t_i) = x\} f_{X(t_i)}(x) dx,$$

on les $X(t_i)$ són variables aleatòries normals amb mitjana $\mu(t_i)$ i desviació típica 1.

Aleshores podem escriure,

$$\int_{-\infty}^{y} \sum_{i=1}^{n} P\{X(t_i) = M_n | X(t_i) = x\} \phi(x) e^{x\mu(t_i) - \frac{1}{2}\mu(t_i)^2} dx,$$

on ϕ és la funció de densitat de la distribució normal standard.

Derivant en el punt y obtenim la densitat de M_n,

$$f_{M_n}(y) = \phi(y) \sum_{i=1}^{n} P\{X(t_i) = M_n | X(t_i) = y\} e^{y\mu(t_i) - \frac{1}{2}\mu(t_i)^2} = \phi(y) G_n(y).$$

Observem ara que la funció

$$G_n(y) = \sum_{i=1}^{n} P\{X(t_i) = M_n | X(t_i) = y\} e^{y\mu(t_i) - \frac{1}{2}\mu(t_i)^2}$$

és creixent en y.

En efecte,

$$P\{X(t_i) = M_n | X(t_i) = y\} e^{y\mu(t_i) - \frac{1}{2}\mu(t_i)^2}$$

$$= P\{X(t_j) < y, \forall j \neq i | X(t_i) = y\} e^{y\mu(t_i) - \frac{1}{2}\mu(t_i)^2}.$$

Restant $\mu(t_j)$ a banda i banda de la desigualtat $X(t_j) < y$, sumant-li i restant-li a la banda esquerra $\rho_{ij}(X(t_i) - \mu(t_i))$ on ρ_{ij} és la correlació entre les variables $X(t_i)$ i $X(t_j)$, i denotant $Y(t_i) = X(t_i) - \mu(t_i)$ tenim que l'expressió anterior es pot escriure

$$(5) \quad P\{Y(t_j) - \rho_{ij} Y(t_i) + \rho_{ij} Y(t_i) < y - \mu(t_j), \forall j \neq i | Y(t_i) = y - \mu(t_i)\} e^{y\mu(t_i) - \frac{1}{2}\mu(t_i)^2}.$$

Observem que,

$$\text{cov}(Y(t_i), Y(t_j) - \rho_{ij} Y(t_i)) = \text{cov}(Y(t_i), Y(t_j)) - \rho_{ij} \text{var} Y(t_i)$$

$$= \rho_{ij} \sqrt{\text{var} Y(t_i) \text{var} Y(t_j)} - \rho_{ij} \text{var} Y(t_i)$$

i això és nul ja que per ser $K(t,t)$ constant, es té $\text{var}Y(t_i) = \text{var}Y(t_j), \quad \forall i, j = 1, \ldots n.$

Per tant l'expressió (5) s'escriu

$$P\{Y(t_j) - \rho_{ij} Y(t_i) < y(1 - \rho_{ij}) - (\mu(t_j) - \rho_{ij}\mu(t_i)), \forall j \neq i\} e^{y\mu(t_i) - \frac{1}{2}\mu(t_i)^2}.$$

Sota les hipòtesis que suposem, és clar que aquesta expressió és creixent, ja que $1 - \rho_{ij} \geq 0$ i $\mu(t_i) \geq 0$.

Aleshores,

$$P\{y - \epsilon < M_n \leq y + \epsilon\} = \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \phi(x) G_n(x) dx$$

$$\leq G_n(y + \epsilon) \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{G_n(y+\epsilon)}{\sqrt{2\pi}} 2\epsilon.$$

Ara observem que

$$G_n(y+\epsilon)\int_{y+\epsilon}^{\infty}\phi(y)dy \leq P\{M_n > y+\epsilon\} \leq 1.$$

Per tant,

$$G_n(y+\epsilon) \leq \frac{1}{\int_{y+\epsilon}^{\infty}\phi(x)dx} \leq \frac{1}{\int_{y+1}^{\infty}\phi(x)dx}.$$

Aleshores,

$$P\{y-\epsilon < M_n \leq y+\epsilon\} \leq \frac{2\epsilon}{\sqrt{2\pi}\int_{k+1}^{\infty}\phi(x)dx} = C(k)\epsilon.$$

2) Suposem ara que $\inf_{t\in T}\mu(t) = -l$, on $l > 0$. Aleshores si $\tilde{X}(t) = X(t) + l\ \forall t \in T$ i $\tilde{M}_n = \max\{\tilde{X}(t_1), \dots, \tilde{X}(t_n)\}$, es té, $\tilde{M}_n = M_n + l$, i per tant,

$$P\{y-\epsilon < M_n \leq y+\epsilon\} = P\{y+l-\epsilon < \tilde{M}_n \leq y+l+\epsilon\} \leq C(k+l)2\epsilon.$$

3) Finalment suposem que $K(t,t) > 0 \quad \forall t \in T$. Definim $\underline{\sigma} = \inf_{t\in T}\sigma(t)$. Tenim,

$$P\{y-\epsilon \leq M_n \leq y+\epsilon\} = P\{-\epsilon \leq \max_{1\leq i\leq n}(X(t_i)-y) \leq \epsilon\}$$

$$= P\{-\frac{\epsilon}{\underline{\sigma}} \leq \max_{1\leq i\leq n}\frac{X(t_i)-y}{\underline{\sigma}} \leq \frac{\epsilon}{\underline{\sigma}}\} \leq P\{-\frac{\epsilon}{\underline{\sigma}} \leq \max_{1\leq i\leq n}\frac{X(t_i)-y}{\sigma(t_i)} \leq \frac{\epsilon}{\underline{\sigma}}\}.$$

Ara, $U_t = \frac{X_t - y}{\sigma(t)}$ és un procés amb funció de covariància constant a la unitat i per tant, per l'apartat anterior, es té

$$P\{y - \epsilon \leq M_n \leq y + \epsilon\} \leq \frac{2\epsilon}{\sqrt{2\pi}\underline{\sigma} \int_{k+1}^{\infty} \phi(x)dx} = \bar{C}(k)\epsilon$$

on $\bar{C}(k)$ depèn de $\underline{\sigma}$ i de k.

Hem provat doncs que, sota les condicions del teorema,

$$P\{y - \epsilon \leq M_n \leq y + \epsilon\} \leq C(k)\epsilon.$$

on la constant $C(y)$ depen només d'y, de la funció de mitjana i de la funció de covariància del procés X.

c) Si ara $G \subseteq (-\infty, k]$ és un obert amb mesura de Lebesgue finita, podem esciure $G = \bigcup_{i=1}^{\infty}(y_i - \epsilon_i, y_i + \epsilon_i]$ on aquesta reunió és disjunta, i $\epsilon_i < 1, \forall i \geq 1$.

Aleshores,

$$P\{M \in G\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{y_i - \epsilon_i < M \leq y_i + \epsilon_i\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} C(k)\epsilon_i \leq \sup C(k)\lambda(G).$$

d) Volem veure finalment que $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ tal que $\lambda(B) = 0$, on λ és la mesura de Lebesgue, tenim $P\{M \in B\} = 0$. En efecte, sigui B un borelià amb mesura de Lebesgue 0. Considerem $K_N = [-N, N]$. Veiem primer que $P(M \in B \cap K_N) = 0, \forall N \geq 1$. Observem que $\forall \delta > 0$, podem trobar G obert tal que $B \cap K_N \subseteq G \subseteq K_{N+1}$, i $\lambda(G) \leq \lambda(B \cap K_N) + \delta$. Aleshores,

$$P(M \in B \cap K_N) \leq P(M \in G) \leq C(N+1)\lambda(G) \leq C(N+1)\delta.$$

Si fem tendir δ a 0 es té $P\{M \in B \cap K_N\} = 0 \quad \forall N \geq 1$, i per tant $P\{M \in B\} = 0$.

Observació:

Podem repetir el raonament per $-X$. Això ens permet provar un resultat anàleg per a $|X|$. En efecte és clar que $-X$ compleix les condicions del teorema, i per tant val el mateix resultat.

Sigui ara $\hat{M} = \sup_{t \in T} |X(t)|$. Tenim,

$$P\{\hat{M} \in B\} \leq P\{M \in B\} + P\{-m \in B\}$$

on m és el mínim del procés. Observem que $-m = \max_{t \in T}(-X(t))$.

Aleshores, aplicant el teorema anterior, si $\lambda(B) = 0$, es té $P\{\hat{M} \in B\} = 0$.

3. El màxim d'un procés continu (aplicació del càlcul de variacions estocàstic).

Suposem ara que el procés $X = \{X(t), t \in T\}$ està definit sobre un espai gaussià (Ω, H, P) (veure la secció 1 del capítol 1).

Abans d'enunciar els dos teoremes principals, necessitem els dos lemes següents, bàsics en el càlcul de variacions estocàstic.

3.3 Lema.

Sigui $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de variables aleatòries definides sobre un espai gaussià, a valors en un espai de Hilbert separable Y. Sigui $p \geq 2$. Suposem les hipòtesis següents:

1. $F_n \in \mathbb{D}^{1,p}(Y)$.
2. $F_n \longrightarrow_{n \to +\infty} F$ *en* $L^p(\Omega, Y)$.
3. $\{DF_n, n \geq 1\}$ *és una successió fitada a* $L^p(\Omega, H \otimes Y)$.

Aleshores,

$F \in \mathbb{D}^{1,p}(Y)$ *i* DF *és límit feble en la topologia de* $\omega^*(L^p(\Omega, H \otimes Y), L^q(\Omega, H \otimes Y))$ *d'una parcial de* $\{DF_n, n \geq 1\}$.

Prova:

Considerem $\{DF_n, n \geq 1\}$, successió fitada a $L^p(\Omega, H \otimes Y)$. Com a conseqüència del teorema de Banach-Alouglu, existeix una parcial $\{DF_{n(k)}, k \geq 1\}$ que convergeix feblement en la topologia $w^*(L^p, L^q)$ cap un element $u \in L^p(\Omega, H \otimes Y)$. En particular, hi ha convergència feble en L^2 ja que la successió $\{DF_n\}_{n=1}^{\infty}$ també és fitada en L^2.

El problema està en identificar aquest límit u amb la derivada de la variable aleatòria F. Per això prenem $v \in Dom\delta \subseteq L^2(\Omega, H \otimes Y)$. Aleshores,

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega, H \otimes Y)} = \lim_{k \to \infty} \langle DF_{n(k)}, v \rangle_{L^2(\Omega, H \otimes Y)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle F_{n(k)}, \delta(v)\rangle_{L^2(\Omega,Y)} = \langle F, \delta(v)\rangle_{L^2(\Omega,Y)}.$$

Per tant, $u = DF$ a $L^2(\Omega, Y \otimes H)$, ja que $Dom\delta$ és dens a $L^2(\Omega, H \otimes Y)$.

q.e.d.

3.4 Lema. *[MNS]*

Sigui $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, una funció lipschitziana, i F una vector aleatori a valors a $\mathbb{R}^d$, és a dir, $F = (F^1, \ldots, F^d)$ i suposem que $F^i \in \mathbb{D}^{1,p}, \forall i = 1, \ldots, d$. Prenem $p \geq 2$ fixat.

Aleshores, $g(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ i

$$Dg(F) = \sum_{i=1}^{d} G_i DF^i,$$

on les G_i són variables aleatòries fitades per la constant de Lipschitz L de g.

En particular, si $g \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, on $C_b^1(\mathbb{R}^d)$ és l'espai de les funcions derivables amb derivada contínua i fitada, $G_i = (\partial_i g)(F)$.

Prova:

La idea bàsica de la prova consisteix en aproximar g per una successió de funcions $g_n \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, i usar per a aquestes, la regla de la cadena següent:

$$Dg_n(F) = \sum_{i=1}^{d} (\partial_i g_n)(F) DF_i.$$

Començarem per construir una successió de funcions de $C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, convergent a g de manera uniforme.

Considerem la funció regularitzadora $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, que compleix les hipòtesis següents:

1. $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^d)$ i té suport compacte que denotarem per K.
2. $\alpha \geq 0, \forall x \in K$.
3. $\int_K \alpha(x)dx = 1$.

Definim ara l'aproximació de la identitat

$$\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx), \forall n \geq 1.$$

Mitjançant la convolució, podem definir la successió regularitzada $g_n = g * \alpha_n, \forall n \geq 1$. Es a dir,

$$g_n(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y-t)\alpha_n(t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(y-t)g(t)dt, \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Aquestes funcions g_n són de $C^1(\mathbb{R}^d)$, i, gràcies al teorema de derivació de la integral paramètrica, es té

$$(\partial_i g_n)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y-t)(\partial_i \alpha_n)(t)dt.$$

Observem ara que les g_n convergeixen de manera uniforme a g. En efecte, si L és la constant de Lipschitz de g tenim

$$|g(y) - g_n(y)| = |\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\alpha(t)dt - \int_{\mathbb{R}^d} g(y-t)\alpha_n(t)dt|$$

$$= |\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\alpha(t)dt - \int_{\mathbb{R}^d} g(y-\frac{t}{n})\alpha(t)dt|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(y) - g(y-\frac{t}{n})|\alpha(t)dt$$

$$\leq \frac{L}{n}\int_{\mathbb{R}^d} |t|_d \alpha(t)dt \leq \frac{L}{n}\sup_{t\in K}||t||_d.$$

i d'aqui es dedueix que $\sup_{y\in\mathbb{R}^d} |g(y) - g_n(y)|$ tendeix a 0 quan n tendeix ∞.

Per tant les $g_n(F)$ tendeixen quasi-segurament i en L^p cap a $g(F)$. D'altra banda, les g_n són de $C^1(\mathbb{R}^d)$, amb derivades fitades per L.

Aleshores, aplicant la regla de la cadena per a l'operador D, tenim que

$$Dg_n(F) = \sum_{i=1}^{d} (\partial_i g_n)(F) DF_i.$$

Tenim doncs una successió $\{g_n(F)\}_n$ de variables aleatòries de $\mathbb{D}^{1,p}$ que convergeix en L^p cap a $g(F)$, i la successió de $\{Dg_n(F)\}_n$ és una successió fitada a $L^p(\Omega, H)$. En efecte,

$$\sup_{n\geq 1} || \sum_{i=1}^{d} (\partial_i g_n)(F) DF_i ||_{L^p(\Omega,H)}$$

$$\leq \sup_{n\geq 1} \sum_{i=1}^{d} ||(\partial_i g_n(F)) DF_i||_{L^p(\Omega;H)}$$

$$\leq L \sum_{i=1}^{d} ||DF_i||_{L^p(\Omega;H)} < \infty.$$

Estem doncs en condicions d'aplicar el lema 3.3. Aleshores, $g(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ i $Dg(F)$ és el límit feble d'una parcial de $\{Dg_n(F)\}_n$ que denotarem per $\{Dg_{n(k)}(F)\}_k$.

D'altra banda la successió $\partial_i g_{n(k)}(F)$ està fitada per L de manera uniforme. Per tant, existeix una parcial d'aquesta que convergeix cap a una variable aleatòria G_i fitada per L en la topologia $\omega^*(L^\infty, L^1)$.

Aleshores, $Dg(F) = \sum_{i=1}^{d} G_i DF_i$.

Establirem ara el teorema principal del capítol

3.5 Teorema [NV2].

Sigui $X = \{X(t), t \in T\}$ un procés continu, i T un espai mètric compacte. Suposem les hipòtesis següents:

h1) $E\{\max_{t\in T} |X(t)|^2\} < \infty$.

h2) $X(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$; $\forall t \in T$, *el proces* $\{DX(t), t \in T\}$ *a valors a* H, *admet una versió contínua, i,* $E\{\max_{t\in T} ||DX(t)||_H^2\} < \infty$.

Aleshores, $M \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Prova:

Sigui $T_0 = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$, un subconjunt dens i numerable de T, que existeix per ser T compacte. Considerem les variables aleatòries $M_n = \max\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$.

És clar pel lema 3.4. que $M_n \in \mathbb{D}^{1,2}$, $\forall n \geq 1$. A més a més $M_n \longrightarrow_{n\to\infty} M$ quasi-segurament per la continuitat del procés. Finalment per la hipòtesi h1) i el teorema de convergència dominada aquesta convergència també és certa en L^2.

Volem aplicar el lema 3.3. Per tant només ens resta comprovar que $\{DM_n\}_{n=1}^{\infty}$ és una successió fitada a $L^2(\Omega, H)$. Serà suficient veure

$$||DM_n||_H \leq \sup_{t\in T} ||DX(t)||_H \quad q.s.$$

i aplicar la hipòtesi h2).

Fixat n podem construir la partició d'Ω següent:

$$A_1 = \{M_n = X(t_1)\},$$

$$A_2 = \{M_n = X(t_2), X(t_2) \neq X(t_1)\}$$

etc...

Aleshores per la localitat de l'operador D es té $||DM_n||_H = ||DX(t_j)||_H$ q.s. en A_j. En particular

$$||DM_n||_H \leq \sup_{t\in T} ||DX(t)||_H \quad q.s.$$

q.e.d.

Hem demostrat que, sota certes condicions, M és una variable aleatòria de $\mathbb{D}^{1,2}$. El teorema següent ens dóna una condició suficient per a que un funcional de $\mathbb{D}^{1,2}$ tingui una llei absolutament continua respecte la mesura de Lebesgue. El teorema en el cas unidimensional (veure [**BH2**]) és el següent:

3.6 Teorema (Bouleau-Hirsch) [BH1].

Sigui F és una v.a. de $\mathbb{D}^{1,1}_{loc}$, i suposem que $||DF||_H > 0$ q.s. Aleshores, F és una variable aleatòria absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

Prova:

a) Suposem primer que $|F| \leq 1$.

Sigui B un borelià de $\mathbb{R}$ de mesura de Lebesgue λ, nul.la. Volem veure que $P\{F \in B\} = 0$, o equivalentment $1_B(F) = 0$ q.s.

Considerem la mesura $\mu = P \cdot F^{-1} + \lambda$. Observem que $\mu(B) = P\{F \in B\} \leq 1$. Aleshores, $\forall n \geq 1$, $\exists F_n$ tancat i U_n obert tal que $F_n \subseteq B \subseteq U_n$ i $\mu(U_n - F_n) \leq \frac{1}{n}$.

Pel lema de Urisohn podem construir una successió $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que g_n pren valors a $[0,1]$, és contínua, val 0 a U_n^c i 1 a F_n. Aleshores aquestes funcions coincideixen amb 1_B fora del conjunt $U_n - F_n$. D'altra banda $\mu(U_n - F_n) \leq \frac{1}{n}$, i per tant tendeix a 0 quan n tendeix a infinit. Per tant, la successió de les funcions g_n convergeix μ-q.p.t. cap a 1_B.

Definim ara,

$$\phi(y) = \int_{-1}^{y} 1_B(x)dx$$

$$\phi_n(y) = \int_{-1}^{y} g_n(x)dx.$$

Observem que $\phi \equiv 0$. Per la convergència puntual de les g_n a $1_B(x)$ i el fet que $|g_n| \leq 1 \quad \forall n \geq 1$, aplicant el teorema de convergència dominada, tenim la convergència en tot punt de les $\phi_n(y)$ cap a 0, i per tant la convergència de les $\phi_n(F)$ cap a 0 $\forall \omega \in \Omega$.

Observem però que les $\phi_n(F)$ estan fitades per 2 i de nou pel teorema de convergència dominada es té la convergència en $L^2(\Omega)$ de les $\phi_n(F)$ cap a 0.

D'altra banda es té $\phi_n \in C_b^1$, és a dir són funcions de classe C^1 amb la derivada fitada. Aleshores per la regla de la cadena, $\phi_n(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ i $D\phi_n(F) = g_n(F)DF$.

Ara bé, les funcions g_n convergeixen puntualment q.p.t. respecte la mesura $P \cdot F^{-1}$, i aleshores, les $g_n(F)$ convergeixen quasi-segurament cap a $1_B(F)$. Per tant, $D\phi_n(F)$ convergeix cap a $1_B(F)DF$ $\omega - q.s.$ i $t - q.p.t.$ Pel teorema de convergència dominada aquesta convergència també és certa en $L^2(\Omega; L^2(T))$.

Finalment per ser D un operador tancat es té

$$1_B(F)DF = 0, \text{ a } L^2(\Omega; L^2(T)).$$

Aleshores,

$$\int_{\Omega} |1_B(F)|^2 ||DF||_H^2 dP = 0$$

i per tant la funció $|1_B(F)|^2||DF||_H^2$ és nul.la quasi-segurament, i si per hipòtesi es té $||DF||_H^2 > 0$ quasi-segurament, es dedueix, $1_B(F) = 0$ quasi-segurament.

b) Si $|F| \le n$ i $||DF||_H \le n$, podem definir $G = \frac{F}{n}$. Aleshores, $DG = \frac{1}{n}DF$, i per a) G té llei absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue. Per tant $F = nG$ té una llei absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

c) Si $F \in \mathbb{D}^{1,1}$, podem definir $G_n = \phi_n(F)$, on $\phi_n(x) = x1_{\{|x| \le n\}}$ i $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sigui $\Omega_n = \{|F| \le n\}$. Aleshores F coincideix amb G_n sobre Ω_n i, per la localitat de l'operador D, $DF = DG_n$ sobre $\Omega_n \times T$. A més $||DG_n||_H > 0$ quasi-segurament sobre Ω_n.

Per l'apartat b) la llei de G_n, restringida a Ω_n és absolutament contínua, és a dir $P\{G_n \in B \cap \Omega_n\} = 0$ si $\lambda(B) = 0$.

Finalment,

$$P\{F \in B\} \le P\{\{F \in B\} \cap \Omega_n\} + P\{\Omega_n^c\}$$

$$= P\{\{G_n \in B\} \cap \Omega_n\} + P\{\Omega_n^c\}$$

$$= P\{\Omega_n^c\} \le P\{|F| > n\} \le \frac{1}{n} E|F|,$$

i això tendeix a 0 quan n tendeix a infinit.

d) Si $F \in \mathbb{D}_{loc}^{1,1}$, existeix una successió de funcions F_n tal que $F_n \in \mathbb{D}^{1,1} \forall n \ge 1$, i els conjunts $\{F_n = F\}$ són conjunts mesurables que creixen cap a Ω q.s. Aleshores, per definició, $DF_n = DF$ sobre $\{F_n = F\}$. Per tant,

$$P\{F \in B\} \le P\{F_n \in B, F = F_n\} + P\{F \ne F_n\} = P\{F \ne F_n\}$$

i aquesta probabilitat tendeix a 0 quan n tendeix a ∞. q.e.d.

Aquest teorema ens permetrà provar el segon teorema bàsic d'aquest capítol que ens dona una condició suficient, sota les condicions del teorema 3.5., per a que M tingui una llei absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

3.7 Teorema.

Sigui $X = \{X(t), t \in T\}$ un procés continu i T un espai metric compacte. Suposem que es satisfan les hipòtesis (h1) i (h2) del teorema 3.5. Suposem també que val la hipòtesi següent:

h3) $\exists\, u \in L^2(\Omega, H)$ *tal que,* $\inf_{t:X_t=M}\langle DX(t), u\rangle_H > 0, \quad \omega -$ *q.s.*

Aleshores, la distribució de M és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue.

Prova:

Observem que M és una variable aleatòria de $\mathbb{D}^{1,2} \subseteq \mathbb{D}^{1,1}$. Per tant, pel teorema 3.6., serà suficient veure que $||DM||_H > 0 \quad q.s.$ Si $G = \{\omega : ||DM||_H = 0\}$, serà suficient provar que $P\{G\} = 0$.

Observem que $\forall \omega \in G$, $DM(\omega) = 0$ com element de l'espai de Hilbert H. Per tant si u és el proces donat per la hipòtesi (h3), $\langle DM, u\rangle_H \cdot 1_G = 0$, i

$$\int_G \langle DM, u\rangle_H dP = 0$$

D'altra banda per ser $\{DM_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió fitada a $L^2(\Omega)$, existeix una parcial $\{DM_{n_j}\}$ que convergeix feblement en $L^2(\Omega, H)$ cap a DM. Aleshores.

$$\lim_{j\to\infty} \int_G \langle DM_{n_j}, u\rangle_H dP = \int_G \langle DM, u\rangle_H dP = 0$$

Aplicant ara el lema de Fatou a l'expressió de l'esquerra, es té que

$$\liminf_{j\to\infty} \int_G \langle DM_{n_j}, u\rangle_H dP \geq \int_G \liminf_{j\to\infty} \langle DM_{n_j}, u\rangle_H dP.$$

Ara be,

$$\langle DM_n, u\rangle_H \geq \inf_{t:X_t=M_n} \langle DX(t), u\rangle_H.$$

En efecte, si A_j són els esdeveniments introduits en la prova del teorema 3.5., es té

$$DM_n = \sum_l DX(t_l) 1_{A_l}$$

on els A_l són disjunts, depenen de n, i els punts t_l compleixen $X(t_l) = M_n$.

Finalment, fent tendir n a infinit, es té que

$$\liminf_{j \to \infty} \langle DM_{n_j}, u \rangle_H \geq \inf_{t: X_t = M} \langle DX(t), u \rangle_H.$$

Per tant,

$$\int_G \inf_{t: X_t = M} \langle DX(t), u \rangle_H dP \leq 0.$$

Finalment (h3) implica $P\{G\} = 0$ necessàriament.

q.e.d.

3.8 Corol.lari.

Si existeix un únic $\hat{t}$ tal que $X(\hat{t}) = M$, i.e. si el màxim s'assoleix quasi-segurament en un únic punt, aleshores, una condició suficient per a que es compleixi la hipòtesi (h3) del teorema 2.7. és que

$$||DX(t)||_H|_{t=\hat{t}} > 0, \ \ q.s.$$

Prova:

En efecte, és suficient prendre com u él proces $DX(t)|_{t=\hat{t}}$.

q.e.d.

Els teoremes 3.5. i 3.7. estableixen una tècnica per a demostrar la continuïtat absoluta del màxim d'un procés estocàstic continu. Veurem ara que aquesta tècnica té diverses aplicacions, sobretot als processos gaussians. Estudiarem en particular la relació amb els processos tractats per Ylvisaker[**Yl**] i Wschebor [**Ws**].

4. Aplicació als processos gaussians.

Suposem ara que el procés $X = \{X(t), t \in T\}$ és gaussià i amb trajectòries contínues. Hem vist en el capítol 1 com és possible associar al procés X un espai de Hilbert $H(R)$, anomenat espai de Hilbert autoreproductor [**Kall1**].

En efecte l'espai de Hilbert autoreproductor $H(R)$ és l'espai generat per les funcions $R(\cdot, t), t \in T$, on $R(\cdot, \cdot)$ és la funció de covariància. El producte escalar ve donat per

$$R(s,t) = \langle R(\cdot, s), R(\cdot, t)\rangle_{H(R)}.$$

Aleshores podem establir la isometria

$$\Psi : R(\cdot, t) \in H \longrightarrow X(t) - \mu(t) \in L^2(\Omega)$$

que compleix

$$\langle X(s) - \mu(s), X(t) - \mu(t)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle R(\cdot, s), R(\cdot, t)\rangle_{H(R)}.$$

En aquest marc podem definir $W(t) = \Psi(R(\cdot, t)) = X(t) - \mu(t)$, i més en general $W(h) = \Psi(h), h \in H(R)$. Aleshores W és un proces gaussià, centrat i parametritzat per $H(R)$. Ja hem vist en la secció 1.8. del primer capítol que l'operador de derivació D actua de la forma següent: $D_s X(t) = R(s,t)$, o en general $D_g X(h) = \langle g, h\rangle_{H(R)}$.

A partir d'ara escriurem H per denotar $H(R)$.

Notem que aquest procés gaussià X compleix les condicions del teorema 3.5. En efecte,

i) $E\{\max_{t\in T} |X(t)|^2\} < \infty$

Per a veure això és suficient veure que per $\lambda > 0$ prou petit,

$$E\{\exp\,(\lambda \max_{t\in T} |X(t)|^2)\} < \infty.$$

Això és cert pel teorema de Fernique per a tot $\lambda < (2\max_{t\in T} K(t,t))^{-1}$ (veure [Fe]).

ii) És clar que $X(t) \in \mathbb{D}^{1,2}, \forall t \in T$, i $\{DX(t), t \in T\} = \{R(\cdot, t), t \in T\}$. Per tant $\{R(\cdot, t), t \in T\}$ com a procés a valors en H admet una versió continua en t. Finalment $E\{\sup_{t\in T} ||DX(t)||_H^2\} = \sup_{t \in T} ||R(\cdot, t)||_H^2 = \max_{t\in T} R(t,t) < \infty$.

Per poder aplicar el teorema 3.7. hem de veure que

$$\exists u \in L^2(\Omega, H) : \inf_{\{t: X(t)=M\}} \langle DX(t), u \rangle_H > 0 \quad q.s.$$

Serà suficient veure l'existència d'una probabilitat de transició $\tau(\omega, ds)$ tal que,

$$\inf_{t: X_t = M} \int_T R(\alpha, t) \tau(\omega, d\alpha) > 0, q.s.$$

En efecte, si això es cert, podem definir el procés següent:

$$u(\omega, \cdot) = \int_T R(s, \cdot) \tau(\omega, ds).$$

Es tracta d'un procés mesurable i de $L^2(\Omega; H)$. En efecte,

$$E(||u||_H^2) = E\{\int_T \int_T R(s,t) \tau(\omega, ds) \tau(\omega, dt)\} \leq \sup_{s,t\in T} |R(s,t)| < \infty.$$

Aleshores

$$\langle DX(t), u \rangle_H = \langle R(\cdot, t), u \rangle_H = \langle R(\cdot, t), \int_T R(\alpha, \cdot) \tau(\omega, d\alpha) \rangle_H$$

$$= \int_T \langle R(\alpha, \cdot), R(t, \cdot) \rangle_H \tau(\omega, d\alpha) = \int_T R(\alpha, t) \tau(\omega, d\alpha).$$

Per tant,

$$\inf_{t:X(t)=M} \langle DX(t), u \rangle_H = \inf_{t:X(t)=M} \int_T R(\alpha, t)\tau(\omega, d\alpha) > 0, q.s.$$

Per provar l'existència d'aquesta probabilitat de transició, considerem el conjunt

$$B = \{ \sup_{\nu \in M_1(T)} \inf_{t:X(t)=M} \int_T R(s,t)\nu(ds) > 0\} \subseteq \Omega,$$

on $M_1(T)$ denota la família de totes les probabilitats sobre T.

Observem primer que es tracta d'un conjunt mesurable.

3.9 Lema [Par].

$M_1(T)$ és un espai mètric compacte amb la distància

$$d(\nu, \mu) = \sup_{g \in C(T), ||g||_\infty \leq 1} |\int_T g(s)(\nu - \mu)(ds)|.$$

3.10 Lema.

El conjunt B és mesurable.

Prova:

Podem escriure

$$\inf_{t:X(t)=M} \int_T R(s,t)\nu(ds) = \inf_{t \in T}\{1_{\{X_t=M\}} \int_T R(s,t)\nu(ds) + 1_{\{X_t \neq M\}} K\}$$

on $K = \sup_{t\in T} \int_T R(s,t)\nu(ds)$ és una constant positiva i finita.

Això és conseqüència del fet que, fixat ω sempre existeix algun t tal que $X_t = M$. Per tant aquest ínfim és un ínfim de funcions mesurables en ω i contínues en ν. El seu suprem en ν serà també mesurable en ω.

q.e.d.

La importància d'aquest conjunt B ve donada pel teorema següent:

3.11 Teorema.

Són equivalents,

i) $P\{B\} = 1$.

ii) $\exists\tau(\omega, ds)$, *probabilitat de transició, tal que,*

$$\inf_{t:X(t)=M} \int_T R(s,t)\tau(\omega, ds) > 0 \quad q.s.$$

Prova:

$ii) \Rightarrow i)$

És una conseqüència immediata de la definició de B.

$i) \Rightarrow ii)$

Hem de veure que per a cada ω de B podem escollir una mesura de probabilitat $\tau(\omega, \cdot)$ de $M_1(T)$ de manera mesurable tal que

$$\inf_{t:X(t)=M} \int_T R(s,t)\tau(\omega, ds) > 0 \quad q.s.$$

És suficient veure que podem escollir de manera mesurable una $\tau(\omega, \cdot)$ tal que

$$\int_T R(s,t)\tau(\omega, ds) > 0 \quad \forall t \in T.$$

Finalment, això és possible ja que $\int_T R(s,t)\nu(ds)$ és contínua en ν uniformement en t, i $M_1(T)$ admet un subconjunt dens i numerable.

q.e.d.

3.12 Teorema.

Suposem ara que $X = \{X(t), t \in T\}$ *és centrat. Aleshores el conjunt* B *coincideix quasi-segurament amb* $\{M \neq 0\}$.

Prova:

a) Provarem primer $B^c \subseteq \{M = 0\}\, q.s.$ Fixada $\omega \in B^c$, designarem per $\mathcal{P}_\omega$ el conjunt de probabilitats sobre T concentrades a $C(\omega) = \{t : X_t(\omega) = M(\omega)\}$.

Aleshores,

$$\sup_{\nu \in \mathcal{P}_\omega} \inf_{t: X(t) = M} \int_T R(s,t)\nu(ds) \leq \inf_{\nu \in \mathcal{P}_\omega} \int_T \int_T R(s,t)\nu(ds)\nu(dt)$$

$$= \inf_{\nu \in \mathcal{P}_\omega} E(\int_T X(s)\nu(ds))^2 \leq \inf_{\nu \in \mathcal{P}_\omega} \sup_{t: X_t = M} \int_T R(s,t)\nu(ds).$$

Pel teorema del minimax (veure per exemple [**O**]), les desigualtats precedents són igualtats i per tant deduïm l'existència d'una probabilitat ν_ω sobre T tal que

$$\int_T \int_T K(s,t)\nu_\omega(ds)\nu_\omega(dt) = 0.$$

Per tant $\int_T X(s,\omega')\nu_\omega(ds) = 0\, \omega' - q.s.$ Sense pèrdua de la generalitat podem suposar que X està definit sobre l'espai canònic $C(T)$ i que Q és la seva llei. Aleshores, el conjunt,

$$R(\omega) = \{\omega' : \int_T X(s,\omega')\nu_\omega(ds) = 0\}$$

és tancat i conté el suport de Q. Podem doncs suposar que ω pertany al suport de Q i per tant $\omega \in R(\omega)$. Conseqüentment,

$$M(\omega) = \int_T X(s,\omega)\nu_\omega(ds) = 0.$$

b) Reciprocament per ser la llei d'M absolutament continua sobre B, tenim, $P(B \cap \{M = 0\}) = 0$ i per tant, $\{M = 0\} \subseteq B^c$ $q.s.$

Exemples:

a) Tant pel moviment brownià standard com pel drap brownià es té $P\{M > 0\} = 1$ i per tant podem deduir, com aplicació del teorema anterior, que M té densitat en ambdos casos. Recentment, C.Florit i D.Nualart han provat a [**FN**] que pel cas del drap brownià aquesta densitat, de la qual no es coneix l'expressió explícita, també és infinitament diferenciable a $(0, \infty)$. La tècnica usada, però, és específica del drap brownià, i no és aplicable a situacions més generals com la dels processos gaussians o la de les solucions d'equacions diferencials estocàstiques.

b) Si el procés X compleix la hipòtesi $K(t,t) > 0, \forall t \in T$, mitjançant un raonament anàleg al clàssic, podem provar $P\{M = 0\} = 0$, que és una condició més feble que la continuïtat absoluta. Per tant en el cas de processos gaussians centrats el nostre resultat generalitza el resultat clàssic.

5. Aplicació a la solució d'una equació diferencial estocàstica.

Considerem l'equació diferencial estocàstica següent:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t b(X_s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

on σ i b son funcions de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ globalment lipschitzianes amb constant conjunta de Lipschitz L, i x_0 és una constant.

Són coneguts els resultats següents sobre equacions diferencials estocàstiques que ens permetran aplicar la tècnica desenvolupada en aquest capítol al màxim de la solució d'aquesta equació (veure [**N**]).

3.13 Teorema. *[N]*

L'equació diferencial estocàstica anterior té una solució única $X = \{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$ tal que

$$E\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |X(t)|^p\} < \infty, \quad \forall p \geq 1.$$

Per a provar el proper teorema necessitem el lema següent que assegura la continuitat de la integral estocàstica a valors en un espai de Hilbert com integral indefinida.

3.14 Lema.

Sigui $u \in L^2_a(\Omega \times [0,1]; L^2([0,1]))$, i.e. u és un procés mesurable, adaptat, a valors en un espai de Hilbert. Aleshores

$$I(\omega, t, \theta) = \int_0^t u(\omega, s, \theta) dW(\omega, s)$$

és una martingala a valors en l'espai de Hilbert $L^2([0,1])$, de quadrat-integrable i contínua en t.

Prova:

La prova és anàloga al cas de la integral estocàstica a valors reals.

q.e.d.

3.15 Teorema.

Les variables $X(t)$ pertanyen a $\mathbb{D}^{1,2}, \forall t \geq 0$, i $\sup_{0 \leq \theta \leq 1} E\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |D_\theta X(t)|^p\} < \infty$.

A més $D_\theta X(t)$ és la solució de l'equació diferencial estocàstica lineal següent:

$$D_\theta X(t) = \sigma(X(\theta)) 1_{[0,t]}(\theta) + \int_0^t D_\theta X(s) \alpha_s dW_s + \int_0^t D_\theta X_s \beta_s ds$$

on α_s i β_s són variables aleatòries adaptades i fitades per la constant de Lipschitz comuna a σ i b. En particular aquesta solució és continua en t.

Prova:

La continuïtat de la solució és conseqüència del lema anterior. La resta del teorema esta provada a **[N]**.

q.e.d.

3.16 Lema (de factorització).

Es té

$$D_\theta X(t) = \sigma(X(\theta))\Phi(\theta,t), \quad \theta \leq t,$$

on $\Phi(\theta,t)$ *és la solució de l'equació diferencial estocàstica lineal*

$$\Phi(\theta,t) = 1 + \int_\theta^t \Phi(\theta,s)\alpha(s)dW_s + \int_\theta^t \Phi(\theta,s)\beta(s)ds.$$

Aquesta solució es pot expressar de manera explícita com

$$\Phi(\theta,t) = exp\{\int_\theta^t (\beta_s - \frac{\alpha_s^2}{2})ds + \int_\theta^t \alpha_s dW_s\}.$$

En particular, per tractar-se d'una exponencial, podem escriure

$$\Phi(\theta,t) = \Phi(t)\Phi(\theta)^{-1}$$

on $\Phi(t) = \Phi(0,t)$.

L'objectiu que ens plantegem és provar que la variable $M = \sup_{0\leq t\leq 1} X(t)$ té una llei absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue. Això queda establert en els teoremes següents:

3.17 Teorema.

$M = \sup_{0\leq t\leq 1} X(t)$ *és una variable de* $\mathbb{D}^{1,2}$.

Prova:

És suficient comprovar les hipòtesis del teorema 3.5. La hipòtesi (h1) es conseqüència del teorema 3.13. i la hipòtesi (h2), del teorema 3.15.

Per a veure la continuïtat absoluta neccessitem la proposició següent que juga el paper corresponent al teorema 3.7. i un lema que ens assegura que el màxim del procés no és 0.

3.18 Proposició.

Si $\inf_{s,t:X_s=X_t=M}\langle DX(t),DX(s)\rangle_H>0$ *q.s. aleshores* $||DM||>0$ *q.s.*

Prova:

Sigui $B=\{||DM||=0\}$. És obvi que

$$\int_B ||DM||dP=0.$$

D'altra banda, com que DM és el límit feble d'una parcial de la successió $\{DM_n\}$ (veure la prova del teorema 3.7.) aleshores

$$\liminf_{k\to\infty}\liminf_{j\to\infty}\int_B\langle DM_{n(k)},DM_{n(j)}\rangle_H dP=0.$$

D'altra banda, aplicant dues vegades el lema de Fatou, de manera anàloga a la prova del teorema 3.7., es té

$$\int_B\liminf_{k\to\infty}\liminf_{j\to\infty}\langle DM_{n(k)},DM_{n(j)}\rangle_H dP\le 0.$$

Per tant

$$\int_B\inf_{s,t:X_t=X_s=M}\langle DX(t),DX(s))\rangle_H dP\le 0.$$

Així doncs, necessàriament $P\{B\}=0$.

q.e.d.

3.19 Lema.

Suposem $\sigma(x_0)\neq 0$. *Aleshores la variable* T, *que assigna a cada* ω *el primer instant en que* $X(\omega,t)$ *assoleix el màxim, és positiva q.s.*

Prova:

Per a provar aquest lema usarem el teorema de Girsanov ([**KS**]).

Sigui $A = \{X(t,\omega) \leq x_0, \quad \forall t \in [0,\epsilon]\}$. on ϵ és un cert instant d'aturada. És clar que és suficient veure que $P(A) = 0$.

Definim

$$Z_t = \exp\{-\int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)} dW_s + \int_0^t |\frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}|^2 ds\}.$$

Si $\int_0^1 |\frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}|^2 ds < \infty$ el procés Z és una martingala local contínua. En particular podem escollir un instant d'aturada ϵ tal que $Z_{t\wedge\epsilon}$ és una martingala contínua.

Aleshores, pel teorema de Girsanov,

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{b(X(s))}{\sigma(X(s))} ds$$

és un procés de Wiener a $[0,\epsilon]$ respecte una nova mesura de probabilitat $\tilde{P}$, tal que

$$P(B) = \tilde{E}[1_B Z_\epsilon^{-1}], \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

Aleshores podem escriure el conjunt A com

$$\{\int_0^t \sigma(X(s)) d\tilde{W}_s \leq 0 \quad \forall t \in [0,\epsilon]\}$$

i

$$P(A) = \tilde{E}[1_A \exp\{\int_0^\epsilon \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)} dW_s - \int_0^\epsilon |\frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}|^2 ds\}].$$

Com que l'exponencial és positiva, és suficient veure que $\tilde{P}(A) = 0$. Això és equivalent a veure que

$$P\{\int_0^t \sigma(X_s)dW_s \leq 0 \quad \forall t \in [0, \epsilon]\} = 0.$$

Equivalentment, aquesta condició es pot escriure com

$$P\{B(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, \tau]\} = 0,$$

on $\tau = \int_0^\epsilon |\sigma(X_s)|^2 ds$ i B és un moviment brownià respecte una certa filtració.

Finalment, això és clar com a conseqüència de que $\tau > 0 \quad q.s.$ i de les propietats del moviment brownià.

q.e.d.

Finalment tenim

3.20 Teorema.

Suposem que $\sigma(x_0) \neq 0$. Aleshores M és una variable aleatòria absolutament continua.

Prova:

Observem que,

$$\int_0^{\mathbf{T}} D_\theta X(s) D_\theta X(t) d\theta = \Phi(s)\Phi(t) \int_0^{\mathbf{T}} \frac{\sigma(X(\theta))^2}{\Phi(\theta)^2} d\theta > 0 \quad q.s.$$

on $\mathbf{T}$ és el primer instant en que X assoleix el màxim.

Aplicant les proposicions 3.17., 3.18. i el lema 3.19. es dedueix immediatament el teorema. q.e.d.

Regularitat del temps local com a funcional a l'espai de Wiener

Capítol 4

0. Presentació

En aquest capítol, seguint amb l'estudi de la regularitat de funcionals a l'espai de Wiener, estudiarem la regularitat del temps local brownià.

El temps local d'un proces estocàstic continu a valors reals $X = \{X_t, t \geq 0\}$ es pot definir formalment com

$$L(x,t) = \int_0^t \delta_x(X_s)\mu(ds). \tag{6}$$

En aquesta expressió μ és una mesura fixada a $[0,\infty)$ que usualment és la mesura de Lebesgue i $\delta_x(X_s)$ és la composició de la delta de Dirac δ_x amb la variable aleatòria X_s. Quan X és el procés de Wiener aquesta composició està ben definida com a funcional de Wiener generalitzat en el sentit de Watanabe, sempre que $s \neq 0$ (veure [**W1**]).

Encara que per a qualsevol s fixat $\delta_x(X_s)$ no és una variable aleatòria sinó una distribució a l'espai de Wiener, la integral definida en (6) té un efecte regularitzador, i $L(x,t)$ per a x i t fixats sí resulta ser una variable aleatòria, i per tant en el cas en que X és el procés de Wiener canònic, $L(x,t)$ és un funcional a l'espai de Wiener.

D'altra banda Watanabe introdueix a [**W1**] (veure també [**Su**]), els espais de Sobolev $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ i $p \geq 1$. Aquests espais són la completació de les variables aleatòries polinomials a l'espai de Wiener respecte les normes $||F||_{\alpha,p} = ||(Id - L)^{\alpha/2}F||_p$ on L és l'operador d'Ornstein-Uhlenbeck.

En particular els espais $\mathbb{D}^{\alpha,2}$ es poden caracteritzar en termes del desenvolupament en caos de Wiener dels seus elements de la manera següent:

$$F \in \mathbb{D}^{\alpha,2} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} n!(1+n)^{\alpha}||f_n||_2^2 < \infty. \tag{7}$$

Per les desigualtats de Meyer (veure [**Me1**] o [**W1**]) els espais $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ per α natural coincideixen amb els dominis de les derivades iterades D^α. D'altra banda els espais $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ i $\mathbb{D}^{-\alpha,q}$ amb p i q conjugats, són duals entre si. Aleshores, per $\alpha < 0$ els elements de $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ són funcionals generalitzats o distribucions a l'espai de Wiener.

L'objectiu que ens plantegem en aquest capítol és demostrar que $L(x,t)$, en el cas del procés de Wiener, pertany a l'espai de Sobolev $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ si $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ i $p \geq 2$.

Per fer això usarem dues tècniques diferents. La primera es basa en les propietats regularitzadores del semigrup d'Ornstein-Uhlenbeck, mentres que la segona es basa en càlculs directes a partir dels desenvolupaments en caos. En aquest segon cas restringim l'anàlisi al cas $x = 0$ però en canvi considerem com a procés X el procés de Wiener multiparamètric (veure [**NV3**] per a la primera tècnica i [**NV4**] per a la segona; també, per un resum global posterior, [**NV5**]).

Finalment com aplicació donem una nova prova del fet que el temps local renormalitzat de les autointersections del moviment brownià pla convergeix a L^2 (veure [**NV4**]). Es tracta d'una nova prova d'un resultat de *Rosen*, [**R**]. Recentment, P.Imkeller, V. Perez-Abreu i jo mateix, a [**IPV**], seguint aquesta línia, hem generalitzat aquests resultats al moviment brownià a $\mathbb{R}^d$. Amb aquest resultat obtenim un esquema general de renormalització en el que s'inscriuen de manera natural els casos $d = 2$, provat inicialment per Rosen, i $d = 3$ provat per Yor a [**Y**].

1. Els espais de Sobolev sobre l'espai de Wiener.

Les referències bàsiques d'aquesta secció són [**W1**] i [**W2**].

4.1 Definició.

Un funcional sobre l'espai de Wiener $F : \Omega \to \mathbb{R}$ es diu que és un polinomi si admet l'expressió

$$F = p(W(h_1), \cdots, W(h_n)),$$

on les h_i es poden prendre sempre ortonormals, i p és un polinomi.

Denotarem per $\mathcal{P}$ la classe del polinomis sobre l'espai de Wiener, i per $\mathcal{P}_n$ la classe dels polinomis de grau inferior o igual a n. Observem que $\mathcal{P}$ és densa a $L^p(\Omega)$ per a qualsevol $p \in [1, \infty)$. Observem també que els polinomis a l'espai de Wiener tenen un desenvolupament en caos finit.

4.2 Definició.

Sigui F un funcional sobre l'espai de Wiener. Podem definir l'operador següent:

$$LF = \sum_{n=0}^{\infty}(-n)J_nF.$$

on J_n és l'operador de projecció sobre el caos de Wiener d'ordre n.

Aquest operador és l'operador d'Ornstein-Uhlenbeck. Observem que es tracta d'un operador que actua en cada caos d'ordre n multiplicant per $-n$. El domini de l'operador estarà format pels funcionals que compleixen

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 ||J_nF||^2_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

4.3 Definició.

Si $F \in \mathcal{P}, 1 < p < \infty$ i $\alpha \in \mathbf{R}$, podem definir la norma

$$||F||_{\alpha,p} = ||(Id - L)^{\alpha/2}F||_p,$$

on

$$(Id - L)^{\alpha/2}F = \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\alpha/2}J_nF \in \mathcal{P}.$$

La proposició següent estableix algunes propietats d'aquesta col.lecció de normes que acabem de definir, sobre la classe dels polinomis.

4.4 Proposició [W1].

a) Si $p \leq p'$ i $\alpha \leq \alpha'$, aleshores,

$$||F||_{\alpha,p} \leq ||F||_{\alpha',p'}, \quad \forall F \in \mathcal{P}.$$

b) Si $\{F_n\}_n \subseteq \mathcal{P}$, $||F_n||_{\alpha,p} \to 0$, *i* $||F_n - F_m||_{\alpha',p'} \to 0$, *quan* $n, m \to \infty$, *aleshores,*

$$||F_n||_{\alpha',p'} \to 0.$$

4.5 Definició.

Per $1 < p < \infty$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$, *definim* $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ *com la completació de* $\mathcal{P}$ *per la norma* $||\cdot||_{\alpha,p}$.

Algunes propietats d'aquests espais son les següents:

1) $\mathbb{D}^{0,p} = L^p(\Omega)$.

2) $\mathbb{D}^{\alpha',p'} \subseteq \mathbb{D}^{\alpha,p}$ per a qualssevol $p \leq p'$ i $\alpha \leq \alpha'$.

Aquesta propietat és conseqüència de la proposició 4.4.

3) $(\mathbb{D}^{\alpha,p})' = \mathbb{D}^{-\alpha,q}$ amb $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Una prova d'aquesta propietat de dualitat es troba a [W1].

4.6 Definició.

$$\mathbb{D}^{\infty} = \cap_{\alpha,p} \mathbb{D}^{\alpha,p}.$$

$$\mathbb{D}^{-\infty} = \cup_{\alpha,p} \mathbb{D}^{\alpha,p}.$$

Observem que es tracta de dos espais de Fréchet que són duals entre ells.

Les desigualtats de normes següents, anomenades desigualtats de Meyer, permeten relacionar aquests espais amb els espais de funcionals derivables en el sentit de Malliavin.

4.7 Proposició (desigualtats de Meyer) [W1] [Me1].

Si $1 < p < \infty$ *i* $k \geq 0$, *existeixen constants* $C(p,k) > 0, c(p,k) > 0$ *tals que*

$$c(p,k) || \, ||D^k f||_{HS} ||_p \leq ||F||_{k,p} \leq C(p,k)(||F||_p + || \, ||D^k F||_{HS} ||_p,$$

per a tot $F \in \mathcal{P}$.

Observem doncs que, quan α és natural, els espais de Sobolev que acabem d'introduir ›incidexen amb els dominis de l'operador D^{α}.

L'objectiu del capítol és estudiar a quins d'aquests espais $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ pertanyen determinats ıncionals com el temps local.

2. Funcionals generalitzats a l'espai de Wiener.

.8 Definició.

a) Direm que un funcional $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *és regular en el sentit de Malliavin si* $F \in \mathbb{D}^{\infty}$.

b) Direm que un funcional regular F *és no-degenerat en el sentit de Malliavin si es té* $DF||_H > 0$ *q.s. i* $||DF||_H^{-1} \in \cap_{p>1} L^p(\Omega)$.

Sigui $\mathcal{S}$ l'espai de les funcions $C^{\infty}(\mathbb{R})$ amb decreixement ràpid. (veure [**Rud**]).

Considerem les normes següents definides sobre aquest espai de funcions:

$$||\phi||_{2k} = ||(1 + x^2 - \Delta)^k \phi||_{\infty}$$

nb $k \in \mathbb{Z}$, $\phi \in \mathcal{S}$ i $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$.

Aleshores, definim els espais $\mathcal{T}_{2k}$ per $k \in \mathbb{Z}$ com les completacions de $\mathcal{S}$ per les normes $\cdot ||_{2k}$.

Una referència on s'introdueixen aquests espais és [**IW**]

La relació entre aquests espais ve donada per les injeccions contínues següents:

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}_{2k} \hookrightarrow \mathcal{T}_2 \hookrightarrow \mathcal{T}_0 = \hat{C}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{T}_{-2} \hookrightarrow \mathcal{T}_{-2k} \hookrightarrow \mathcal{S}',$$

ı $\hat{C}(\mathbb{R})$ és l'espai de les funcions contínues que s'anul.len quan $|x| \to \infty$ amb la norma ꞉l suprem.

L'espai $\mathcal{S}'$ és l'espai de les distribucions temperades, espai dual de $\mathcal{S}$. A més $\mathcal{S} = \cap_{k>0} \mathcal{T}_{2k}$ $\mathcal{S}' = \cup_{k>0} \mathcal{T}_{-2k}$.

9 Teorema [W1].

Sigui F *un funcional de* $\mathbb{D}^{\infty}$ *i no-degenerat en el sentit de Malliavin. Sigui* $p \in (1, \infty)$ *i* ≥ 0. *Aleshores,* $\exists \quad c(p,k) > 0$ *tal que*

$$||\phi(F)||_{-2k,p} \leq c(k,p)||\phi||_{-2k}, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

4.10 Teorema [W1].
L'aplicació

$$\phi \in \mathcal{S} \to \phi(F) \in \mathbb{D}^{\infty}$$

es pot estendre de manera única a l'aplicació

$$T \in \mathcal{S}' \to T(F) \in \mathbb{D}^{-\infty}$$

de manera que la restricció

$$T \in \mathcal{T}_{-2k} \to T(F) \in \mathbb{D}^{-2k,p}$$

és contínua, $\forall p > 1$ *i* $k \geq 0$.

Observem doncs que, en particular $\delta_x(F)$ és un element de $\mathbb{D}^{-\infty}$. De fet, $\delta_x \in \mathcal{T}_{-2}$, (veure [**IW**]). Per tant, $\forall G \in \cup_{p>1} \mathbb{D}^{2+2k,p}$, l'aplicació

$$x \to \langle \delta_x(F), G \rangle = E[\delta_x(F)G]$$

és C^{2k}.

En particular si $G \in \cap_{k \geq 1} \cup_{p>1} \mathbb{D}^{k,p}$, l'aplicació és C^{∞}.

3. Estudi de la regularitat de $\delta_x(W(h))$ mitjançant propietats del semigrup d'Ornstein-Uhlenbeck.

4.11 Lema.
$\delta_x(W(h))$ *com a funcional generalitzat pertany a l'espai* $\mathbb{D}^{-1,2}$.

Prova:
δ_x és el límit en la topologia de $\mathcal{S}'$ dels nuclis gaussians $\phi_\epsilon(y-x)$. Per tant pel teorema 4.10., donada $G \in \mathbb{D}^{\infty}$ qualsevol, es té

$$E[G\phi_\epsilon(W(h)-x)] \longrightarrow E[G\delta_x(W(h))].$$

D'altra banda, si Φ_ϵ es la funció de distribució de la llei gaussiana centrada i de variancia ϵ, es té

$$D\Phi_\epsilon(W(h)-x) = \phi_\epsilon(W(h)-x)\cdot h$$

i per tant,

$$E[G\phi_\epsilon(W(h)-x)] = |h|^{-2}E[G\langle D\Phi_\epsilon(W(h)-x), h\rangle_H]$$

$$= |h|^{-2}E[\Phi_\epsilon(W(h)-x)\delta(hG)].$$

Ara

$$\Phi_\epsilon(W(h)-x) \longrightarrow_{\epsilon\to 0} 1_{\{W(h)\geq x\}} \quad \text{q.s. i en } L^2(\Omega).$$

i aleshores,

$$E[G\phi_\epsilon(W(h)-x)] \longrightarrow |h|^{-2}E[1_{[x,\infty)}(W(h)-x)\delta(hG)].$$

Per tant,

$$E[G\delta_x(W(h))] = \frac{1}{|h|^2}E[1_{[x,\infty)}(W(h))\delta(hG)]$$

$$= \frac{1}{|h|^2}E[1_{[x,\infty)}(W(h))(GW(h) - \langle h, DG\rangle)].$$

ja que $\delta(hG) = GW(h) - \langle h, DG\rangle_H, \quad q.s.$ (veure per exemple [**NP**]).

Aleshores,

$$|E[G\delta_x(W(h))]| \leq \frac{1}{|h|^2}E(|GW(h) - \langle h, DG\rangle|).$$

Finalment, aplicant la desigualtat de Schwarz i la isometria es té

$$|E[G\delta_x(W(h))]| \leq \frac{1}{|h|}(||G||_2 + ||DG||_2).$$

q.e.d.

En aquesta secció millorarem aquest resultat. De fet determinarem quin és l'espai de Sobolev més petit que conté $\delta_x(W(h))$.

Considerem el semigrup d'operadors $\{T_t, t \geq 0\}$, generat per L sobre $L^2(\Omega)$ o semigrup d'Ornstein-Uhlenbeck. En particular $T_t = e^{tL}$. Veurem ara alguns lemes relacionats amb aquest semigrup d'operadors.

4.12 Lema.

Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és una funció mesurable i fitada, i $h \in H$ es té

$$T_t(f(W(h)) = [f * \phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}](e^{-t}W(h))$$

on $*$ indica la convolució de funcions, i ϕ_{σ^2} és el nucli gaussià centrat de variància σ^2.

Prova:

Sigui W' un procés de Wiener independent de W, i denotem per E' l'esperança respecte la llei d'aquest procés. Per la fórmula de Mehler (veure [N]), es té,

$$T_t(f(W(h)) = E'[f(e^{-t}W(h) + \sqrt{1-e^{-2t}}W'(h))]$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(e^{-t}W(h) + y)\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(y)dy = (f * \phi_{|h|^2(1-e^{-2t})})(e^{-t}W(h)).$$

q.e.d.

4.13 Lema.

$\forall t > 0, T_t(\delta_x(W(h))$ és una variable aleatòria fitada que ve donada per,

$$T_t(\delta_x(W(h)) = \phi_{|h|^2(1-e^{2t})}(e^{-t}W(h) - x).$$

Prova:

Pel lema 4.11. es té

$$\phi_\epsilon(W(h) - x) \longrightarrow_{\epsilon \to 0} \delta_x(W(h))$$

en la topologia de $\mathbb{D}^{-1,2}$.

Per tant per ser T_t un operador multiplicatiu i contractiu es té

$$T_t\phi_\epsilon(W(h) - x) \longrightarrow_{\epsilon \to 0} T_t\delta_x(W(h)) \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Finalment pel lema 4.12.,

$$T_t\phi_\epsilon(W(h) - x) = \phi_\epsilon * \phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h) - x).$$

La convolució de les densitats de les lleis gaussianes és la densitat de la llei de la suma. Aleshores

$$T_t\phi_\epsilon(W(h) - x) = \phi_{\epsilon+|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h) - x).$$

Per tant,

$$T_t\phi_\epsilon(W(h) - x) \longrightarrow_{\epsilon \to 0} \phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h) - x).$$

q.e.d.

4.14 Teorema.

Si $x \in \mathbb{R}$, $h \in H, h \neq 0$. $\alpha > 0$, *i* $p > 1$. *Aleshores,*

i) $\delta_x(W(h)) \in \mathbb{D}^{-\alpha,p}$ *si* $\alpha + \frac{1}{p} > 1$.

ii) $\delta_x(W(h)) \notin \mathbb{D}^{-\frac{1}{2},2}$.

Prova:

i) Hem de veure,

$$||(Id - L)^{-\alpha/2}\delta_x(W(h))||_p < \infty$$

si $\alpha + \frac{1}{p} > 1$.

Si $F \in \mathbb{D}^{-\infty}$ es té,

$$(Id - L)^{-\alpha/2}F = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}T_tF dt. \tag{8}$$

Aixo és conseqüència de que $(Id - L)^{-\alpha/2}$ i T_t són operadors multiplicatius caos a caos per $(1+n)^{-\alpha/2}$ i e^{-nt} respectivament.

Aleshores, pel lema 4.13.,

$$||(Id - L)^{-\alpha/2}\delta_x(W(h))||_p$$

$$= ||\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h) - x)dt||_p$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}||\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h) - x)||_p dt.$$

Ara bé,

$$||\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h)-x)||_p^p$$

$$= p^{-1/2}(2\pi|h|^2(1-e^{-2t}))^{-\frac{p-1}{2}} E\{\phi_{|h|^2p^{-1}(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h)-x)\}.$$

Fent el càlcul explícit de l'esperança i usant les propietats de la convolució de nuclis gaussians s'obté que l'expressió anterior es pot escriure com

$$p^{-1/2}(2\pi|h|^2(1-e^{-2t}))^{-\frac{p-1}{2}} \phi_{|h|^2p^{-1}(1-e^{-2t}+pe^{-2t})}(x).$$

Si fitem ara la densitat gaussiana pel seu valor en el 0, podem fitar l'expressió anterior per

$$p^{-1/2}(2\pi|h|^2(1-e^{-2t}))^{-\frac{p-1}{2}}(2\pi|h|^2(1-e^{-2t}+pe^{-2t})p^{-1})^{-1/2}.$$

Usant que $p > 1$, aquesta expressió es pot fitar per

$$(2\pi|h|^2(1-e^{-2t}))^{-\frac{p-1}{2}}(2\pi|h|^2)^{-1/2}$$

$$= (1-e^{-2t})^{-\frac{p-1}{2}}(2\pi|h|^2)^{-p/2}$$

$$= (e^{2t}-1)^{-\frac{p-1}{2}}(2\pi|h|^2)^{-p/2}e^{(p-1)t}.$$

Aplicant el teorema del valor intermig, aquesta expressió es pot fitar per

$$(2t)^{-\frac{p-1}{2}}(2\pi|h|^2)^{-p/2}e^{(p-1)t}.$$

Per tant,

$$||\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h)-x)||_p \leq (2t)^{1/2p-1/2}(2\pi|h|^2)^{-1/2}e^{(p-1)t/p}.$$

Aleshores,

$$||(Id-L)^{-\alpha/2}\delta_x(W(h))||_p$$

$$\leq \Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}(2\pi)^{-1/2}|h|^{-1}\int_0^\infty e^{-t}e^{\frac{(p-1)t}{p}}2^{-1/2+1/2p}t^{1/2p-3/2+\alpha/2}dt$$

$$= \Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}(2\pi)^{-1/2}|h|^{-1}2^{-1/2+1/2p}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}}t^{1/2p-3/2+\alpha/2}dt.$$

Fent el canvi de variable $t = sp$ s'obté l'expressió següent:

$$\Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}(2\pi)^{-1/2}|h|^{-1}2^{-1/2+1/2p}p^{1/2p-3/2+\alpha/2}\int_0^\infty e^{-s}s^{1/2p-3/2+\alpha/2}dt$$

$$= \Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}(2\pi)^{-1/2}|h|^{-1}2^{-1/2+1/2p}p^{1/2p-3/2+\alpha/2}\Gamma(1/2p-1/2+\alpha/2).$$

i aquesta expressió convergeix si i només si $\alpha + \frac{1}{p} > 1$.

ii) És suficient veure que

$$E\{|(Id-L)^{-\alpha/2}\delta_x(W(h))|^2\} \nearrow \infty$$

quan α decreix cap a $\frac{1}{2}$.

Podem escriure, usant la igualtat (8) el lema 4.13.,

$$E\{\delta_x(W(h))(Id-L)^{-\alpha}\delta_x(W(h))\}$$

$$= E\{\delta_x(W(h))(\Gamma(\alpha))^{-1}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h)-x)dt\}$$

$$= (\Gamma(\alpha))^{-1}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}E\{\delta_x(W(h))\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h)-x)\}dt.$$

Ara bé, aquesta esperança és el límit quan $\epsilon \downarrow 0$ de l'expressió

$$E\{\phi_\epsilon(W(h)-x)\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}(e^{-t}W(h)-x).$$

Reestructurant els exponents tenim,

$$E\{\phi_{\frac{\epsilon|h|^2(1-e^{-2t})}{\epsilon e^{-2t}+|h|^2(1-e^{-2t})}}(W(h)-x\frac{\epsilon e^{-t}+|h|^2(1-e^{-2t})}{\epsilon e^{-2t}+|h|^2(1-e^{-2t})})\}\phi_{\epsilon e^{-2t}+|h|^2(1-e^{-2t})}((1-e^{-t})x)$$

i calculant l'esperança,

$$\phi_{\frac{\epsilon|h|^2+|h|^4(1-e^{-2t})}{\epsilon e^{-2t}+|h|^2(1-e^{-2t})}}(x\frac{\epsilon e^{-t}+|h|^2(1-e^{-2t})}{\epsilon e^{-2t}+|h|^2(1-e^{-2t})})\phi_{\epsilon e^{-2t}+|h|^2(1-e^{-2t})}((1-e^{-t})x).$$

Fent tendir ϵ a zero s'obté

$$\phi_{|h|^2}(x)\phi_{|h|^2(1-e^{-2t})}((1-e^{-t})x).$$

Ajuntant els exponents,

$$\frac{1}{2\pi|h|^2}(1-e^{-2t})^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{|h|^2(1+e^{-t})}}.$$

Així doncs,

$$E\{|(Id-L)^{-\alpha/2}\delta_x(W(h))|^2\} = \Gamma(\alpha)^{-1}\frac{1}{2\pi|h|^2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}(1-e^{-2t})^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{|h|^2(1+e^{-t})}}dt.$$

Mitjançant el teorema del valor intermig, podem fitar inferiorment aquesta expressió per

$$(\Gamma(\alpha))^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi|h|^2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{|h|^2}}dt$$

$$= (\Gamma(\alpha))^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi|h|^2}\Gamma(\alpha-1/2)e^{-\frac{x^2}{|h|^2}}.$$

Evidentment quan $\alpha \downarrow \frac{1}{2}$, aquesta expressió tendeix cap a ∞.

q.e.d.

Observació:

Usant el teorema d'interpolació de Stein, Watanabe a **[W3]** ha obtingut una generalització d'aquest resultat a $\delta_x(F)$ per a F funcional de Wiener regular i no-degenerat.

4. Estudi de la regularitat de $\delta_x(W(h))$ mitjançant desenvolupaments en caos.

Una segona tècnica per estudiar la regularitat d'un funcional de Wiener consisteix en obtenir el seu desenvolupament en caos. Al ser els operadors L i D operadors que actuen caos a caos, l'estudi de la regularitat es redueix a un problema de convergència de sèries. Aquesta tècnica està desenvolupada en **[NV4]**. Una referència on es desenvolupa aquesta tècnica per a l'estudi d'altres funcionals brownians és **[IS1]**.

4.15 Lema [S].

Tot funcional de $\mathbb{D}^{\infty,2}$ té per descomposició en caos de Wiener l'espressió,

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(E[D^n F]).$$

4.16 Lema.

Sigui $\phi_\epsilon(x)$ el nucli gaussià, centrat i de variància ϵ. Les seves derivades es poden escriure en termes dels polinomis d'Hermite de la manera següent:

$$\phi_\epsilon^{(n)}(x) = (-1)^n \sqrt{n!}\,\epsilon^{-\frac{n}{2}} \phi_\epsilon(x) H_n(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}), \quad n \geq 1.$$

4.17 Lema.

Si Y és una variable aleatòria normal, de mitjana m i de variància σ^2, es té

$$E[H_n(Y)] = \sqrt{n!} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{\sqrt{n!}\, m^{n-2l}(\sigma^2 - 1)^l}{(n-2l)!\,2^l\, l!}.$$

Prova:

Considerem la fórmula explícita pels polinomis d'Hermite següent:

$$H_n(x) = \sqrt{n!} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{k!(n-2k)!\,2^k}.$$

Si $Y = m + \sigma U$, on U és ara una variable aleatòria normal standard, tenim,

$$H_n(Y) = \sqrt{n!} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^l}{l!(n-2l)!\,2^l} \sum_{j=0}^{n-2l} \frac{(n-2l)!}{j!(n-2l-j)!} m^j \sigma^{n-2l-j} U^{n-2l-j}.$$

Si prenem esperances, usant que els moments de la v.a. gaussiana standard valen $E[U^{(2m)}] = \frac{(2m)!}{m!2^m}$ en el cas parell i 0 en el cas senar, es té,

$$E[H_n(Y)]$$

$$= \sqrt{n!} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^l}{l!(n-2l)!2^l} \sum_{j=0}^{n-2l} \frac{(n-2l)! m^j \sigma^{n-2l-j}(n-2l-j)!}{j!(n-2l-j)!(n/2-l-j/2)!2^{n/2-l-j/2}} 1_{\{n-j=2\}}.$$

Si ara $n-j=2k$,

$$E[H_n(Y)] = \sqrt{n!} \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l m^{n-2k}(\sigma^2)^{k-l}}{l!(n-2k)!(k-l)!2^k}.$$

i sumant respecte l s'obté el resultat desitjat.

q.e.d.

4.18 Lema.

Sigui $\{F_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una família de variables aleatòries de quadrat integrable. Suposem que els seus desenvolupaments en caos venen donats per

$$F_\epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n^\epsilon), \quad f_n^\epsilon \in L_s^2(T^n).$$

Suposem també que

i) $\{f_n^\epsilon\}_\epsilon$ convergeix en $L^2(T^n)$ quan ϵ tendeix a 0 cap a una funció $f_n \in L_s^2(T^n)$.

ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_\epsilon n! ||f_n^\epsilon||_2^2 < \infty.$$

Aleshores la família $\{F_\epsilon\}_\epsilon$ convergeix en $L^2(\Omega)$ cap a $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$.

Prova:

D'una banda

$$||I_n(f_n) - I_n(f_n^\epsilon)||_2^2 = n!||f_n - f_n^\epsilon||_2^2,$$

i aquesta norma convergeix a 0 fixat n quan $\epsilon \downarrow 0$.

Finalment

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||I_n(f_n) - I_n(f_n^\epsilon)||_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!||f_n - f_n^\epsilon||_2^2$$

$$\leq 2\sum_{n=0}^{\infty} n!||f_n||_2^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} n!||f_n^\epsilon||_2^2$$

$$\leq 4\sum_{n=0}^{\infty} \sup_\epsilon n!||f_n^\epsilon||_2^2 < \infty.$$

q.e.d.

4.19 Proposició.

El desenvolupament en caos de Wiener de $\delta_x(W(h))$ com a funcional generalitzat, ve donat per l'expressió

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{|h|^2}(x) H_n(\frac{x}{|h|}) \frac{I_n(h^{\otimes n})}{|h|^n \sqrt{n!}}.$$

Prova:

Pels lemes 4.15. i 4.16. tenim

$$\phi_\epsilon(W(h) - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}\epsilon^{n/2}} E\{\phi_\epsilon(W(h) - x) H_n(\frac{W(h) - x}{\sqrt{\epsilon}})\} I_n(h^{\otimes n}).$$

L'expressió explícita de l'esperança és

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_\epsilon(y-x)H_n(\frac{y-x}{\sqrt{\epsilon}})\phi_{|h|^2}(y)dy.$$

Mitjançant el canvi de variable $u = \frac{y-x}{\sqrt{\epsilon}}$ es té que l'expressió anterior és igual a

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(u)\sqrt{\epsilon}\phi_\epsilon(\sqrt{\epsilon}u)\phi_{|h|^2}(x+\sqrt{\epsilon}u)du.$$

El càlcul explícit d'aquesta expressió dona

$$\phi_{|h|^2+\epsilon}(x)E[H_n(Y)],$$

on Y és una variable aleatòria gaussiana de mitjana $m = -\frac{\sqrt{\epsilon}x}{|h|^2+\epsilon}$ i variància $\sigma^2 = \frac{|h|^2}{|h|^2+\epsilon}$.
Si apliquem el lema 4.17. s'obté

$$\phi_{|h|^2+\epsilon}(x)(-1)^n\epsilon^{n/2}(|h|^2+\epsilon)^{-n/2}H_n(\frac{x}{\sqrt{|h|^2+\epsilon}}).$$

Finalment,

$$\phi_\epsilon(W(h)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\phi_{|h|^2+\epsilon}(x)(|h|^2+\epsilon)^{-n/2}H_n(\frac{x}{\sqrt{|h|^2+\epsilon}})I_n(h^{\otimes n})$$

i si $\epsilon \downarrow 0$, es té

$$\delta_x(W(h)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\phi_{|h|^2}(x)(|h|^{-n})H_n(\frac{x}{\sqrt{|h|^2}})I_n(h^{\otimes n}).$$

q.e.d.

4.20 Proposició.
$\delta_0(W(h))$ pertany a $\mathbb{D}^{-\alpha,2}$ si i només si $\alpha > 1/2$.

Prova:

Si $x = 0$, usant la expressió explícita pels polinomis d'Hermite presentada a la pàgina 87 es té

$$\delta_0(W(h)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m I_{2m}(h^{\otimes 2m})}{\sqrt{2\pi} 2^m m! |h|^{2m+1}}.$$

La norma en L^2 d'aquesta sèrie no és convergent. En efecte, es té

$$||\delta_0(W(h))||_2^2 = \frac{1}{2\pi|h|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2},$$

i per la fórmula de Stirling, aquesta serie es equivalent a

$$\frac{1}{(2\pi|h|^2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

A partir de la caracterització de $\mathbb{D}^{\alpha,2}$ de la pàgina 73 queda clara la proposició.

q.e.d.

5. Estudi de la regularitat del Temps Local Brownià, mitjançant el semigrup d'Ornstein-Uhlenbeck.

Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un proces estocàstic a valors reals. Sigui $x \in \mathbb{R}$ fix. Considerem el límit següent:

$$L(t,x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}(X(s))ds =$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \lambda\{s \in [0,t] : X(s) \in (x-\epsilon, x+\epsilon)\}.$$

on λ és la mesura de Lebesgue i $x \in \mathbb{R}$. Si existeix, aquest límit és el "temps local" del procés X en x, ja introduit en la presentació del capítol.

El temps local mesura la quantitat de temps que el procés es passa en el nivell x. La seva existència no és obvia. Per exemple en el cas del procés de Wiener standard, el conjunt $\{t \geq 0 : W(t) = x\}$ és tancat i té mesura de Lebesgue 0.

Pel cas del proces de Wiener si es pot provar que $L(t,x)$ existeix, tant en L^2 com "quasi-segurament". A més a més, es pot definir com una funció conjuntament continua de (t,x) (veure **[Ch-Wi]**).

Observem que, fixats t i x, el temps local es pot interpretar com un funcional a l'espai de Wiener i per tant té sentit questionar-se per la seva regularitat, és a dir per a quins $\alpha > 0$, i $p > 1$ està en $\mathbb{D}^{\alpha,p}$.

Observem d'altra banda que el temps local es pot expressar en termes de funcionals generalitzats de la manera següent:

$$L(t,x) = \int_0^t \delta_x(X_s)ds.$$

Bones referències pel temps local brownià són **[Ch-Wi]** i **[KS]**.

Abans d'iniciar aquest estudi necessitem diversos lemes relacionats amb el temps local.

4.21 Lema [Ch-Wi].

Per a cada (t,x) es té,

$$(W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ = \int_0^t 1_{[x,\infty)}(W_s)dW_s + \frac{1}{2}L(t,x).$$

4.22 Lema.

Sigui $\phi_\epsilon(y)$ el nucli gaussià, centrat, de variancia ϵ. Aleshores, fixats $t > 0$ i $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \phi_\epsilon(W_s - x)ds \longrightarrow_{\epsilon\downarrow 0} L(t,x).$$

en $L^p(\Omega)$, $\quad \forall p \geq 1$.

Prova:

La prova és anàloga a la prova de l'existència del temps local brownià en [Ch-Wi]. Aqui el nucli es diferent, i la convergència més lenta.

q.e.d.

4.23 Lema.

Sigui $p > 1$ i $\alpha > 0$. Sigui $\{F_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una família de funcionals de $L^p(\Omega)$ que convergeix a F en L^p quan $\epsilon \downarrow 0$. Si aquesta família està uniformement fitada a $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ aleshores, $F \in \mathbb{D}^{\alpha,p}$.

Prova: Aquest resultat és conseqüència del teorema de convergència dominada.

q.e.d.

El resultat següent estableix amb precisió el nivell de regularitat del temps local.

4.24 Teorema.

i) Si $p \geq 2$ i $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, aleshores $L(t,x) \in \mathbb{D}^{\alpha,p}$.

ii) $L(t,x) \notin \mathbb{D}^{\frac{1}{2},2}$.

Prova:

Per la fórmula de Tanaka (lema 4.21.) es té

$$(W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ = \int_0^t 1_{[x,\infty)}(W_s)dW_s + \frac{1}{2}L(t,x).$$

Per tant el problema es redueix a veure que

$$N(t,x) = \int_0^t 1_{[x,\infty)}(W_s)dW_s \in \mathbb{D}^{\alpha,p}.$$

D'altra banda, aquesta integral estocàstica és el límit en L^p quan $\epsilon \downarrow 0$ de

$$N_\epsilon(t,x) = \int_0^t F_\epsilon(W_s - x)dW_s.$$

on F_ϵ és la funció de distribució d'una variable gaussiana, centrada i de variancia ϵ.

Pel lema 4.22. és suficient veure que $\{N_\epsilon(t,x)\}_\epsilon$ és una successió fitada en $\mathbb{D}^{\alpha,p}$, uniformement en $\epsilon > 0$.

Per les desigualtats de Meyer (lema 4.7.) tenim que $||N_\epsilon(t,x)||_{\alpha,p}$ és equivalent a

$$||(Id - L)^{(\alpha-1)/2}D_\theta \int_0^t F_\epsilon(W_s - x)dW_s||_{L^p(\Omega;H)}.$$

D'altra banda,

$$D_\theta(N_\epsilon(t)) = F_\epsilon(W_\theta - x)1_{[0,t]}(\theta) + \int_0^t 1_{\{s>\theta\}}\phi_\epsilon(W_s - x)dW_s.$$

Observem que

$$||(Id-L)^{(\alpha-1)/2}F_\epsilon(W_\theta - x)1_{[0,t]}(\theta)||_{L^p(\Omega;H)}$$

està fitada uniformement en ϵ ja que F_ϵ està fitada per 1.

Per tant el problema es redueix a fitar, de manera uniforme en ϵ,

$$(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^t 1_{\{s>\theta\}}\phi_\epsilon(W_s - x)dW_s.$$

Aquesta expressió es pot escriure com

$$R(\int_0^t 1_{\{s>\theta\}}(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s - x)dW_s)$$

on R és l'operador $R = (Id - \frac{Id}{L})^{\frac{\alpha-1}{2}}$, que és fitat sobre els funcionals centrats.

Per tant serà suficient fitar

$$||\int_0^t 1_{\{s>\theta\}}(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s - x)dW_s||_p^p$$

$$= E(\int_0^t |\int_0^t 1_{\theta\le s}(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s - x)dW_s|^2 d\theta)^{p/2}$$

$$= E\{||M(t,\theta)||_H^p\}$$

on

$$M(t,\theta)=\int_0^t 1_{\{\theta\le s\}}(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s-x)dW_s$$

és una martingala local continua i $H=L^2([0,1])$.

Si $p\ge 2$, aplicant la desigualtat de Burkholder per a martingales a valors en espais de Hilbert, s'obté la fita següent:

$$C(p)E\{\int_0^1\int_0^t 1_{\{\theta\le s\}}|(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s-x)|^2 dsd\theta\}^{p/2}.$$

Integrant respecte θ i aplicant després la desigualtat de Hölder, podem fitar l'expressió anterior per

$$C(p,t)\int_0^t s^{p/2}E|(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s-x)|^p ds.$$

Finalment, repetint la prova del teorema 4.14. per

$$||(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s-x)||_p$$

s'obté

$$\sup_{\epsilon>0}E|(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_\epsilon(W_s-x)|^p\le C(p,\alpha)s^{-p/2}$$

ja que en aquest cas $|h|=s^{1/2}$.

Per veure (ii) considerem $\alpha<\frac{1}{2}$. Per isometria es té

$$E\int_0^t|\int_0^t 1_{\{\theta\le s\}}(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\delta_x(W_s)dW_s|^2 d\theta$$

$$= \int_0^t sE|(Id-L)^{\frac{\alpha-1}{2}}\delta_x(W_s)|^2 ds.$$

Analogament a la prova del teorema 4.14. (ii) es té que aquesta integral tendeix a ∞ quan $\alpha \uparrow \frac{1}{2}$.

q.e.d.

6. Estudi de la regularitat del temps local brownià mitjançant desenvolupaments en caos.

El resultat d'aquesta secció es refereix al procés de Wiener multiparamètric, pero només pel temps local en $x = 0$. Sobre el temps local pel drap brownià una bona referència és [**Wa**].

Sigui $T = [0,1]^k$, amb $k \geq 1$. Sigui $W = \{W(t), t \in T\}$ el procés de Wiener multiparamètric. Denotarem per $[0,t]$ el rectangle $[0,t_1] \times \cdots \times [0,t_k]$, on $t = (t_1, \ldots, t_k)$, i per $|t|$ la seva àrea, és a dir $|t| = t_1 \cdots t_k$.

Podem escriure el temps local com

$$L(t) = \int_{[0,t]} \delta_0(W(s))ds,$$

i és el L^2–límit de

$$L_\epsilon(t) = \int_{[0,t]} \phi_\epsilon(W_s)ds.$$

En aquest marc, tenim el resultat següent:

4.25 Teorema.

$L(t)$ pertany a $\mathbb{D}^{\alpha,2}$ si i només si $\alpha < k - \frac{1}{2}$, per a qualsevol punt t fora dels eixos. A més,

$$L(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}2^m m!(\frac{1}{2}-m)^k} I_{2m}\Big(\prod_{i=1}^{k}[(t_i)^{(\frac{1}{2}-m)} - (t_{1,i} \vee \cdots \vee t_{2m,i})^{(\frac{1}{2}-m)}]\Big).$$

Prova:

A partir del desenvolupament de $\phi_\epsilon(W(1_{[0,s]}))$ es té

$$L_\epsilon(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}2^m m!} \int_{[0,t]} \frac{I_{2m}(1_{[0,s]}^{\otimes(2m)})}{(|s|+\epsilon)^{m+\frac{1}{2}}} ds$$

Aplicant el lema 4.18. obtindrem que el desenvolupament de $L(t)$ ve donat per

$$L(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}2^m m!} \int_{[0,t]} \frac{I_{2m}(1_{[0,s]}^{\otimes(2m)})}{|s|^{m+\frac{1}{2}}} ds.$$

En efecte, en aquest cas és suficient veure

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_\epsilon ||I_n(f_n^\epsilon)||_2^2 < \infty.$$

Ara be

$$||I_n(f_n^\epsilon)||_2^2 = ||\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}2^m m!} \int_{[0,t]} \frac{I_{2m}(1_{[0,s]}^{\otimes 2m})}{(|s|+\epsilon)^{m+1/2}} ds||_2^2$$

$$= \frac{1}{2\pi 2^{2m}(m!)^2} \int_{[0,t]} \int_{[0,t]} \frac{E[I_{2m}(1_{[0,u]}^{\otimes 2m}) I_{2m}(1_{[0,v]}^{\otimes 2m})]}{[(|u|+\epsilon)(|v|+\epsilon)]^{m+1/2}} du dv$$

$$= \frac{(2m)!}{2\pi 2^{2m}(m!)^2} \int_{[0,t]} \int_{[0,t]} \frac{\langle 1_{[0,u]}, 1_{[0,v]}\rangle}{[(|u|+\epsilon)(|v|+\epsilon)]^{m+1/2}} du dv$$

$$\leq \frac{(2m)!}{2\pi 2^{2m}(m!)^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \frac{[(u_1 \wedge v_1)\cdots(u_k \wedge v_k)]^{2m}}{(u_1 v_1 \cdots u_k v_k)^{m+1/2}} du_1 dv_1 \cdots du_k dv_k.$$

Fent els canvis de variable $u_i/t_i = x_i$ i $v_i/t_i = y_i$ i agrupant les integrals s'obté l'expressió següent:

$$= \frac{(2m)!}{2\pi 2^{2m}(m!)^2}|t|(\int_0^1 \int_0^1 \frac{(x \wedge y)^{2m}}{(xy)^{m+1/2}} dxdy)^k$$

$$= \frac{(2m)!}{2\pi 2^{2m}(m!)^2}|t|(\frac{4}{2m+1})^k = \alpha_m.$$

Aplicant la formula de Stirling és clar que la successió de α_m és equivalent a

$$\frac{|t|}{2\pi\sqrt{m\pi}}(\frac{4}{2m+1})^k$$

i aquesta successió és sumable.

Finalment aplicant el teorema de Fubini s'obté l'expressió de $L(t)$ desitjada.

q.e.d.

Una altra questió que ens podem plantejar és saber sota quines condicions el desenvolupament en caos de Wiener convergeix quasi-segurament.

En particular veurem que el temps local brownià coincideix amb el seu desenvolupament en caos de Wiener quasi-segurament.

4.26 Lemma (de Rademacher-Menchov) [St].

Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió ortogonal de variables aleatòries. Suposem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (log n)^2 E(X_n^2) < \infty.$$

Aleshores, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergeix quasi-segurament.

Observem doncs que si F és un funcional brownià que pertany a l'espai de Sobolev $\mathbb{D}^{\epsilon,2}$ per a cert $\epsilon > 0$, el seu desenvolupament en caos convergeix quasi-segurament. En particular ho farà el temps local brownià.

7. Regularitat del Temps Local d'autointersecció renormalitzat del moviment brownià pla.

L'objectiu d'aquest apartat és aplicar la tècnica de l'estudi de la regularitat d'un funcional mitjançant el seu desenvolupament en caos de Wiener, a l'estudi del temps local d'autointersecció del moviment brownià pla.

Sigui $W = \{(W_t^1, W_t^2), t \in [0,1]\}$ un moviment brownià pla standard. Escriurem $[X] = X - E(X)$ per a qualsevol variable aleatòria integrable X.

Es conegut el resultat següent degut a Rosen (veure [**R**] i també [**LG**]).

4.27 Teorema.

$$\mathcal{L}_\epsilon = \int_{0<s<t<1} [\phi_\epsilon(W_t^1 - W_s^1)\phi_\epsilon(W_t^2 - W_s^2)] dsdt$$

convergeix en $L^2(\Omega)$.

En aquesta secció millorarem aquest resultat. En efecte, val el teorema següent:

4.28 Teorema.

$\mathcal{L}_\epsilon$ *convergeix en* $\mathbb{D}^{1/2-\delta,2}$, *per a tot* $\delta > 0$.

Prova:

Sigui $\Delta = (s,t]$, i $|\Delta|$ la longitud de l'interval Δ. Mitjançant el desenvolupament en caos de Wiener de $\phi_\epsilon(W(h))$, tenim

$$\mathcal{L}_\epsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi 2^n} \sum_{l+p=n} \frac{1}{(l!)(p!)} \int_{0<s<t<1} \frac{I_{2l}^1(1_\Delta^{\otimes(2l)}) I_{2p}^2(1_\Delta^{\otimes(2p)})}{(|\Delta| + \epsilon)^{n+1}} dsdt.$$

on I_{2l}^1 i I_{2p}^2 denoten respectivament les integrals estocàstiques múltiples respecte els moviments brownians W^1 i W^2.

Els termes d'aquesta suma són ortogonals. Per tant la norma a L^2 del terme n−èssim serà

$$\frac{1}{(2\pi)^2 2^{2n}} \sum_{l+p=n} \frac{1}{(l!)^2(p!)^2} \int_{s<t,u<v} \frac{E\{I_{2l}^1(1_\Delta) I_{2l}^1(1_{\Delta^*})\} E\{I_{2p}^2(1_\Delta) I_{2p}^2(1_{\Delta^*})}{((|\Delta| + \epsilon)(|\Delta| + \epsilon))^{n+1}} dsdt.$$

on $\Delta^* = (u, v]$.

Podem estimar aquest terme per

$$\frac{(2n)!}{(2\pi)^2 2^{2n}(n!)^2} \sum_{l+p=n} (\frac{n!}{(l!)(p!)})^2 \int_{s<t,u<v} \frac{(2l)!(2p)!\langle 1_\Delta, 1_{\Delta^*}\rangle^{2n}}{(2n)!(|\Delta||\Delta^*|)^{n+1}} dsdtdudv$$

$$= \frac{(2n)!}{(2\pi)^2 2^{2n}(n!)^2} \{ \sum_{l+p=n} (\frac{\binom{n}{l}\binom{n}{p}}{\binom{2n}{2l}}) \} \int_{s<t,u<v} \frac{|\Delta \cap \Delta^*|^{2n}}{(|\Delta||\Delta^*|)^{n+1}} dsdtdudv.$$

Observem que

$$\sum_{l+p=n} \frac{(\binom{n}{l})^2}{\binom{2n}{2l}} \leq (n+1) \max_{0\leq l \leq n} \frac{\binom{n}{l}^2}{\binom{2n}{2l}} \leq n+1.$$

D'altra banda,

$$\int_{s<t,u<v} \frac{|(s,t] \cap (u,v]|^{2n}}{((t-s)(v-u))^{n+1}} dsdtdudv \leq \frac{3}{n(n+1)}.$$

Per veure aquesta estimació, descompondrem la integral considerant les diferents posicions de s, t, u i v. Podem escriure la integral com

$$2 \int_{u<s<v<t} \frac{(v-s)^{2n}}{((t-s)(v-u))^{n+1}} dsdtdudv + 2 \int_{u<s<t<v} \frac{(t-s)^{n-1}}{(v-u)^{n+1}} dsdtdudv.$$

El segon sumand es pot estimar de la manera següent manera,

$$\frac{2}{n} \int_{u<s<v} \frac{(v-s)^n}{(v-u)^{n+1}} dsdudv = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Quant al primer sumand tenim

$$\frac{2}{n}\int_{s<v<t}\frac{(v-s)^n}{(t-s)^{n+1}}dsdtdv-\frac{2}{n}\int_{s<v<t}\frac{(v-s)^{2n}}{(t-s)^{n+1}v^n}dsdtdv$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{2}{n^2}\int_{s<v}\frac{(v-s)^{2n}}{(1-s)^n v^n}dsdv+\frac{2}{n^2}\int_{s<v}\frac{(v-s)^n}{v^n}dsdv$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n^2}\int_{s<v}\frac{(v-s)^n}{v^n}[1-\frac{(v-s)^n}{(1-s)^n}]dsdv$$

$$\leq\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n^2}\int_{s<v}\frac{(v-s)^n}{v^n}dsdv$$

i integrant respecte s es té

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n^2}\int_0^1\frac{v}{(n+1)}dv$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}(1+\frac{1}{n}).$$

Per tant la norma L^2 de cada terme pot ser estimada per

$$\frac{(2n)!}{(2\pi)^2 2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{n}(2+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{(2\pi)^2}3n^{-3/2}.$$

És a dir, una constant per $n^{-3/2}$. Finalment el lema 4.18. ens permet concloure la prova d'aquest teorema. q.e.d.

Referències.

[AH-T] A.N. Al-Hussaini, L.Tang, *A representation formula for Poisson functionals*, preprint.

[B] A.V. Balakrishnan, "Applied Functional Analysis," Springer-Verlag.

[BC] R.F. Bass, M. Cranston, *The Malliavin calculus for pure jump processes and applications to local time*, Annals of Probability 14 (1986), 490-532.

[BGJ] K. Bichteller, J.B. Gravereaux, J. Jacod, "Malliavin calculus for processes with jumps," Gordon and Breach, 1987.

[Bi] J.M. Bismut, *Calcul des variations stochastiques et processus de sauts*, ZFW 63 (1983), 147-235.

[BH1] N.Bouleau, F.Hirsch, *Propietés d'absolue continuité dans l'espace de Dirichlet et applications aux équations differentielles stochastiques*, in "Séminaire de Probabilités XX, Lectures Notes in Mathematics 1204."

[BH2] N.Bouleau, F.Hirsch, "Dirichlet Forms and Analysis on Wiener space," Walter de Gruyter, 1991.

[CP] Eric A. Carlen and E.Pardoux, *Differential Calculus and Integration by parts on Poisson space*, in "Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics," Kluwer Academic, 1990, pp. 63-73.

[Ch-Wi] K.L.Chung, R.J.Williams, "Introduction to Stochastic Integration," Birkhäuser.

[D] R.M. Dudley, "Real Analysis and Probability," Wadsworth-Brooks.

[DKW] A.Dermoune, P.Kree and L.Wu, *Calcul stochastique non adapté par rapport a la mesure aléatoire de Poisson*, in "Séminaire de Probabilités XXII, Lecture Notes in Mathematics 1321," pp. 477-484.

[Fe] X. Fernique, *Regularité des trajectoires des fonctions aleatoires gaussiennes*, in "École d'Eté de Saint Flour 4, Lecture Notes in Math. 480," Springer-Verlag, 1974.

[FG] C.Florit, D.Nualart, *A local criterion for smoothness of densities and application to the supremum of the Brownian sheet*, preprint.

[GT] B.Gaveau, P.Trauber, *L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel*, J. Funct. Anal. 46 (1982), 230-238.

[H] T.Hida, "Brownian Motion," Springer-Verlag.

[I1] K.Itô, *Multiple Wiener Integral*, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 157-169.

[IW] N. Ikeda, S. Watanabe, "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes," North-Holland.

[IPV] P.Imkeller, V.Perez-Abreu, J.Vives, *Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in* $\mathbb{R}^d$ *and renormalization*, preprint.

[Kall1] G. Kallianpur, "Stochastic Filtering Theory," Springer-Verlag.

[Kall2] G. Kallianpur, *The Role of Reproducing Kernel Hilbert Space in the Study of Gaussian Processes*, in "Advances in Probability, vol. 2," 1970, pp. 49-84.

[KS] I. Karatzas, S.E. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus," Springer-Verlag.

[LG] J.F. Le Gall, *Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et le méthode de renormalisation de Varadhan*, in "Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Mathematics 1123," 1984, pp. 314-331.

[Ma] P. Malliavin, *Stochastic Calculus of Variations and Hypoelliptic operators*, Proc. of international conf. on stochastic differential equations of Kyoto (1976), 195-263.

[Me1] P.A.Meyer, *Transformations de Riesz pour les lois Gaussiennes*, in "Lecture Notes in Mathematics 1059," 1984, pp. 179-193.

[Me2] P.A. Meyer, *Elements de probabilités quantiques: probabilités sur l'espace de Fock*, in "Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Mathematics 1204," pp. 249-285.

[MNS] A.Millet, D.Nualart, M.Sanz, *Integration by parts and time reversal*, Ann. of Prob. 17 (1989), 208-238.

[Ne] J.Neveu, *Processus Ponctuels*, in "École d'Eté de Saint Flour 6, Lecture Notes in Math. 598," Springer 1977, 1976.

[N] D.Nualart, *The Malliavin Calculus and some of its applications*,.

[NP] D.Nualart and E.Pardoux, *Stochastic Calculus with Anticipating Integrands*, Probability Theory and Related Fields 78 (1988), 535-581.

[NV1] D.Nualart, J.Vives, *Anticipative Calculus for the Poisson Process based on the Fock Space*, in "Séminaire de Probabilités XXIV, Lecture Notes on Math 1426," 1990, pp. 154-165.

[NV2] D.Nualart, J.Vives, *Continuité absolue de la loi du maximum d'un processus continu*, C.R.A.S.P. t.307, Serie I (1988), 349-354.

[NV3] D.Nualart, J.Vives, *Smoothness of Brownian Local Times and Related Functionals*, Potential Analysis 1 (1992), 257-263.

[NV4] D.Nualart, J.Vives, *Chaos Expansions and Local Times*, Publicacions Matemàtiques 36(2) (1992), 827-836.

[NV5] D.Nualart, J.Vives, *Smoothness of Local Time and related Wiener Functionals*, preprint.

[NV6] D.Nualart, J.Vives, *A duality formula on the Poisson space and Some Applications*, preprint.

[NZ] D.Nualart and M.Zakai, *Generalized Stochastic Integrals and the Malliavin Calculus*, Probability Theory and Related Fields 73 (1986), 255-280.

[Oc] D.Ocone, *A guide to Stochastic Calculus of Variations*, in "Stochastic Analysis and Related Topics, Lecture Notes in Mathematics 1316," 1988, pp. 1-79.

[Og] H.Ogura, *Orthogonal functionals of the Poisson processes*, Trans IEEE Inf. Theory, IT-18,4 (1972), 473-481.

[O] Owen, "Game Theory," Academic Press, 1982.

[P] N. Privault, *Chaotic and variational calculus for the Poisson proces.*, Thesis.

[R] J.Rosen, *A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion*, in "Séminaire de Probabilités XX, Lectures Notes in Math. 1204," 1985, pp. 515-531.

[Rud] W.Rudin, "Functional Analysis," McGaw-Hill, 1979.

[Ru] J.Ruiz de Chavez, *Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poisson.*, in "Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Mathematics 1123," pp. 230-241.

[Par] K.R. Parthasarathy, "Probability meaures on metric spaces," Academic Press, 1967.

[Sk] Skorohod A.V., *On a generalization of a stochastic integral*, Theor.Prob.Appl. 20 (1975), 219-233.

[St] W.Stout, "Almost sure convergence," Academic Press, 1984.

[S] D.W.Stroock, *Homogeneus Chaos revisited*, in "Sém. de Prob. XXI, Lecture Notes in Math.1247," 1987, pp. 1-7.

[Su] H.Sugita, *Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus*, J.Math. Kyoto Univ. 25(1) (1985), 31-48.

[Wa] J.B.Walsh, *The Local Time of the Brownian Sheet*, Asterisque 52-53 (1978), 47-61.

[W1] S.Watanabe, "Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus," Springer-Verlag, 1984.

[W2] S.Watanabe, *Analysis of Wiener Functionals and its applications to heat kernels*, Ann. of Prob. 15 (1987), 1-39.

[W3] S. Watanabe, *Donsker's $\delta-$ functions in the Malliavin calculus*, in "Stochastic Analysis, Liber Amicorum for Moshe Zakai," Academic Press, 1991.

[Ws] M. Wschebor, "Surfaces Aléatoires, Lecture Notes in Mathematics 1147,," Springer-Verlag, 1985.

[Wu] L.Wu, *Construction de l'opérateur de Malliavin sur l'espace de Poisson*, in "Séminaire de Probabilités XXI, Lectures Notes in Mathematics 1247," pp. 100-113.

[Yl] D.Ylvisaeker, *The expected number of zeros of a stationary Gaussian process*, Ann. Math. Stat. 36 (1965), 1043-1046.

[Y] M. Yor, *Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^3$., in "Séminaire de Probabilités XIX, Lectures Notes in Mathematics 1123," pp. 350-265.