Diferenciació, llei de probabilitat i temps local per a integrals estocastiques en el pla

Olga Julià i de Ferran

DIFERENCIACIÓ, LLEI DE PROBABILITAT I TEMPS LOCAL PER A INTEGRALS ESTOCÀSTIQUES EN EL PLA

Olga Julià i de Ferran

Memòria presentada per a optar al grau de Doctor en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona.

Vist i Plau

El Director de la Tesi

David Nualart

Signat: David Nualart i Rodon

Catedràtic d'Estadística i Investigació Operativa de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

ÍNDEX

Vull fer palès el meu agraïment al Dr. David Nualart pel seu interès i dedicació en aquesta memòria. Les seves idees, crítiques i llargues hores d'atenció al desenvolupament del treball, han estat fonamentals per a dur-lo a bon terme.

INTRODUCCIÓ

Certs fenòmens físics, per exemple el soroll tèrmic, la temperatura, la pressió i la velocitat del vent en un observatori meteorològic, es formalitzen mitjançant un procés aleatori unidimensional indexat en un interval de la recta real que generalment simbolitza el temps. Hi ha però altres situacions on és més natural considerar famílies de variables aleatòries indexades en una part de R^n $(n \geq 2)$, com són la propagació de les ones en una superfície, la densitat electrònica dins el volum de l'àtom, la temperatura a la superfície de la terra, les tensions mecàniques dins d'un sòlid etc...

El desenvolupament de la teoria dels processos estocàstics a paràmetre multidimensional és relativament recent; no és fins els treballs de Wong i Zakai [40] (1974) i Carioli i Walsh [9] (1975) que aquesta teoria, i en especial la dels processos biparamètrics, adquireix importància.

La teoria general dels processos indexats en R^2 no consisteix en una generalització inmediata dels conceptes i resultats obtinguts en el cas uniparamètric. La dificultat que planteja la geometria de l'espai a l'hora de definir nocions com "passat" i "futur" fa que algunes propietats certes en R ja no ho siguin en R^2, i conceptes tan impotants com el de martingala o la propietat de Markov admetin més d'una generalització.

Aquest treball s'enmarca en el camp dels processos estocàstics biparamètrics i en especial es centra en les integrals estocàstiques en el pla.

Carioli [8] (1971) és el primer en generalitzar la integral estocàstica d'Itô a dues dimensions, més tart Wong i Zakai [40]

(1974), per tal de representar les martingales adaptades al moviment brownià així com els funcionals de wiener mitjançant integrals estocàstiques respecte el procés de Wiener, introdueixen la integral doble.

Carioli i Walsh en [9] (1975) a l'objecte d'estudiar els processos holomorfs fan un estudi extens de les martingales biparamètriques, introduint la integral simple, la integral doble i la integral de línia respecte una martingala.

Aquesta memòria està dividida en tres capítols que responen a problemes ben diferents,

1) Teorema Fonamental del Càlcul per a integrals estocàstiques respecte el brownià.

Aqueste qüestió ha estat tractada en els cas unidimensional per Issaacson [19] i Zabaczyk [46] per a integrals del tipus $\int_0^t \phi(s)dW(s)$.

En el capítol I estudiem sota quines condicions els límits

$$\lim_{|\Delta_z| \to 0} \frac{\int_{\Delta_z} \phi_{z'} dW_{z'}}{W(\Delta_z)} \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{|\Delta_z| \to 0 \\ |\Delta_{z'}| \to 0}} \frac{\int_{\Delta_z} \int_{\Delta_{z'}} \psi(\xi, \xi') dW_{\xi'} dW_{\xi}}{W(\Delta_z) W(\Delta_{z'})}$$

existeixen i són iguals a ϕ_z i $\psi(z,z')$ respectivament. Si els processos ϕ_z i $\psi(z,z')$ són continus obtenim convergència en probabilitat. En el cas que l'espai $L^2(\Omega, \ ,P)$ sigui separable no són necessàries les hipòtesis de continuitat i la convergència és en L^p ($\forall p \in (0, \frac{2}{3})$).

2) Lei de probabilitat de la integral estocàstica doble respecte dos moviments brownians independents.

D.Nualart en [28] estudia la distribució de la variable

$J_{st} = \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} I_{\{z \curlywedge z'\}} dW_z dW_{z'}$. En el capítol II ens preguntem sobre la llei de la variable $P_{st} = \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} I_{\{z \curlywedge z'\}} dW_z dW_{z'}$, on W^1 i W^2 són dos processos de Wiener independents; calculem la seva funció característica

$$\phi(x) = \left[\prod_{i \, 0} \cosh \frac{(2xst)}{(2i-1)\pi} \right]^{-1/2},$$

i obtenim la següent expressió pels seus moments

$$E\left[(P_{st})^{2p}\right] = (st)^{2p} E\left[(P_{11})^{2p}\right] = (st)^{2p} \frac{(2p)!}{p!\,2^p} m_p$$

on $m_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{(p-1)!}{(p-k)!} 2^{k-1} \mu_k m_{p-k} \quad (m_0 = 1)$

i $\mu_k = \int_{[0,1]^k} (x_1 \wedge x_2)(x_2 \wedge x_3) \ldots (x_k \wedge x_1) dx_1 dx_2 \ldots dx_k =$

$= \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{2(2k)!} |B_k|$ (B_k és el k-èssim nombre de Bernouilli)

Finalment les tècniques utilitzades pes aquest estudi ens permeten aportar un contraexemple del Teorema Central del Límit de naturalesa diferent al mostrat en [28] .

3) Temps local d'una martingala respecte la mesura associada a la seva variació quadràtica.

Una de les aplicacions de la fórmula de Itô és l'obtenció del temps local d'una martingala. La complexitat de la fórmula d'Itô en dos paràmetres fa que el procés de temps local obtingut ho sigui respecte la mesura associada a $<\tilde{M}>$ i no a $<M>$ com desitjariem (Carioli i Walsh [9] , D.Nualart [30]).

Si M és una martingala de quadrat integrable, mitjançant el temps local de la martingala M considerada com una martingala uniparamètrica, i utilitzant la fórmula de derivació per parts obtenim en el capítol III un temps local continu respecte la mesura associada a M , tot i imposant fortes hipòtesis sobre continuïtat i derivabilitat dels processos $\langle M \rangle_{st}$, $\langle M_{.t} \rangle_s$ i $\langle M_{s.} \rangle_t$.

Com que el procés J_{st} no compleix aquestes hipòtesis, això ens porta a dedicar l'última part del tercer capítol a l'obtenció del seu temps local.

0. TEORIA GENERAL DE PROCESSOS A DOS PARÀMETRES

Aquest capítol està dedicat a introduïr els conceptes i resultats de la teoria general dels processos a dos paràmetres que són necessaris per al desenvolupament d'aquest treball.

Alguns resultats més específics que s'utilitzaran en certes demostracions seran introduïts en el seu moment.

No farem les demostracions dels resultats que enunciarem, tan sols donarem la referència del lloc on es poden trobar per tal de no allargar aquest capítol de caràcter introductori.

La teoria de processos estocàstics indexats en R no es generalitza de forma natural quan el conjunt d'índexs és R_+^2, on no podem definir un "bon" ordre total. El fet de disposar solament d'ordre parcial en el conjunt d'índexs del procés canvia substancialment conceptes tan fonamentals com el de martingala o temps d'atur, donat que nocions com "passat" i "futur" admeten diverses interpretacions.

Considerem sobre els elements de R^2 la relació d'ordre parcial, si $z,z' \in R_+^2$ $z=(s,t)$ i $z'=(s',t')$,

$$z \leq z' \Leftrightarrow s \leq s' \text{ i } t \leq t'.$$

L'ordre parcial sobre R^2 és l'únic compatible amb la mètrica natural de R^2, és a dir, l'interval $[z,z'] = \{ \xi \in R^2 / z \leq \xi \leq z' \}$ ($z < z'$) està contingut en la bola tancada de centre $\frac{z+z'}{2}$ i radi $\frac{d(z,z')}{2}$.

Definim també les següents relacions,

$$z < z' \Leftrightarrow s < s' \text{ i } t < t'$$

$$z \curlywedge z' \Leftrightarrow s \leq s' \text{ i } t \geq t'.$$

Si A i B són dos subconjunts de R_+^2, direm que $A \curlywedge B$ si $\forall z \in A$ i $\forall z' \in B$, $z \curlywedge z'$.

A tot el llarg del nostre treball, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ serà un espai de probabilitat complet, i $\{\mathcal{F}_z, z\in R^2_+\}$ una filtració de sub-σ-àlgebres de que compleixen les següents propietats:

F1) És una família creixent.

$\forall z \leqslant z' \in R^2_+, \quad \mathcal{F}_z \subseteq \mathcal{F}_{z'}$

F2) És una família completa.

$\mathcal{F}_0$ conté tots els conjunts negligibles de $\mathcal{F}$.

F3) És una família contínua per la dreta.

$\forall z\in R^2_+, \quad \mathcal{F}_z = \bigcap_{z'>z} \mathcal{F}_{z'}$

F4) Independència condicional.

$\forall z=(s,t)\in R^2_+$ definim $\mathcal{F}^1_{st} = \sigma<\bigcup_{s'\in R_+} \mathcal{F}_{s't}>$ i $\mathcal{F}^2_{st} = \sigma<\bigcup_{t'\in R_+} \mathcal{F}_{st'}>$

aleshores, $\mathcal{F}^1_{st}$ i $\mathcal{F}^2_{st}$ són independents donat $\mathcal{F}_z$.

En termes de variables aleatòries, la propietat F4) s'expressa; $\forall X$ $\mathcal{F}^1_z$-mesurable i afitada i $\forall Y$ $\mathcal{F}^2_z$-mesurable i afitada,

$$E[X.Y/\mathcal{F}_z] = E[X/\mathcal{F}_z]E[Y/\mathcal{F}_z].$$

La família de variables aleatòries $X=\{X_z, z\in D\subset R_+\}$ s'anomena procés estocàstic. Direm que el procés X és:

- mesurable si l'aplicació $X:\Omega\times D \longrightarrow R$, $(\omega,z) \mapsto X_z(\omega)$ és $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(D)$-mesurable.
- adaptat si X_z és $\mathcal{F}_z$-mesurable per a tot $z\in D$.

En general considerarem tots els processos indexats en R^2_+ o un rectangle de R^2_+. Direm que el procés $X=\{X_z, z\in R^2_+\}$ és progressivament mesurable si $\forall z\in R^2_+$, l'aplicació

$X: [0,z]\times\Omega \longrightarrow R$, $(z',\omega) \mapsto X(z',\omega)$ és $\mathcal{B}([0,z])\times\mathcal{F}_z$-mesurable.

Per a tot interval $(z,z']$ definim l'increment del procés X en aquest interval com:

$$X(z,z'] = X_{z'} - X_{st'} - X_{s't} + X_z \quad (z<z', \text{ i } z=(s,t), \; z'=(s',t')).$$

Martingales

Com ja hem dit el concepte de martingala en una dimensió no es generalitza amb facilitat a causa dels diferents conceptes de passat i futur que sorgeixen de l'ordre parcial de R^2.

La definició de martingala en un paràmetre es pot transportar a R_+^2 de la forma:

$M=\{M_z, \ z\in R_+^2\}$ és una martingala si,

1) M és adaptada.

2) $\forall z\in R_+^2$, M_z és integrable.

3) $\forall z<z'$, $E[M_{z'}/F_z]=M_z$.

Si tenim en compte que en dues dimensions els increments són rectangles, tenim la següent definició,

M és martingala feble si,

1) M és adaptada.

2) M_z és integrable $\forall z\in R_+^2$.

3) $E[M(z,z']/F_z]=0 \quad \forall z<z'$.

Observem que tota martingala és una martingala feble.

Si pensem el procés M com una família de martingales unidimensionals $M=\{(M_{t.})_{s\geq 0}, \ t\geq 0\}$, podem definir,

M és 1-martingala si,

1) M és adaptada a la filtració F_z^1.

2) M_z és integrable per a tot $z\in R_+^2$.

3) $E[M(z,z']/F_z^1]=0 \quad \forall z<z'\in R_+^2$.

Igualment podem definir el concepte de 2-martingala.

Finalment considerant com passat de $z \in R^2_+$, el conjunt $\{z' / z \nless z'\}$ resulta,

M és <u>martingala forta</u> si

1) M és adaptada.

2) M_z és integrable $\forall z \in R^2_+$.

3) M és nul.la en els eixos.

4) $E[M(z,z'] / \mathcal{F}^1_z \vee \mathcal{F}^2_z] = 0 \quad \forall z < z' \in R^2_+$.

El següent resultat dóna la relació entre aquestes definicions, (vegeu Carioli i Walsh [9])

- si M és 1 i 2-martingala, i $\{M_{s0}, \mathcal{F}_{s0}, s \geq 0\}$ i $\{M_{0t}, \mathcal{F}_{0t}, t \geq 0\}$ són martingales uniparamètriques $\Longrightarrow$ M és martingala.
  (aquesta implicació s'obté gràcies a la hipòtesi F4).
- M és martingala $\Rightarrow$ M és 1 i2-martingala $\Rightarrow$ M és martingala feble.
- M és martingala forta $\Rightarrow$ M és 1 i 2-martingala $\Rightarrow$ M és martingala feble.

Necessitem també els següents conceptes de martingales,

M és una <u>martingala d'increments ortogonals en el sentit 1</u> si

1) M és 1-martingala.

2) Si $D_1 = (z_1, z'_1]$, $D_2 = (z_2, z'_2]$, $z = z_1 \wedge z_2$ i $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, aleshores
   $E[M(D_1)M(D_2) / \mathcal{F}^1_z] = 0$.

Definim de forma simètrica les <u>martingales d'increments ortogonals en el sentit 2</u>.

Si M és una martingala d'increments ortogonals en els dos sentits direm senzillament que M és una <u>martingala d'increments ortogonals</u>., aquesta noció va ser introduïda per Zakai [47] que l'anomena també "matingala amb variació independent de la direcció".

Per a $p \geq 1$, sigui

$\mathcal{M}^p$= {la classe de totes les martingales contínues per la dreta $M=\{M_z, z\in R^2_+\}$ nul.les en els eixos i tals que $E[|M_z|^p]<\infty$ $\forall z\in R^2_+$ }.

$\mathcal{M}^p_C$= {la classe de les martingales contínues de $\mathcal{M}^p$ }.

i $\mathcal{M}^p_F$= {la classe de les martingales fortes de $\mathcal{M}^p$ }.

Per a tot $z_0\in R^2_+$ podem definir $\mathcal{M}^p(z_0)$ = { la classe de totes les martingales $M=\{M_z, z\leq z_0\}$, contínues per la dreta i tal que $E[|M_{z_0}|^p]<\infty$ } , igualment definiriem $\mathcal{M}^p_C(z_0)$ i $\mathcal{M}^p_F(z_0)$.

Si M i N $\in \mathcal{M}^2(z_0)$ definim el producte escalar

$[M, N]=E[M_{z_0}N_{z_0}]$ que indueix la norma $\|M\|=E[|M_{z_0}|^{1/2}]$.

Amb aquesta norma $\mathcal{M}^2(z_0)$ és un espai de Hilbert i, $\mathcal{M}^2_C(z_0)$ i $\mathcal{M}^2_F(z_0)$ són subespais tancats (vegeu Carioli i Walsh [9]).

Direm que $\{X=X_z, z\in R^2_+\}$ és un <u>procés creixent</u> si

1) X és contínu per la dreta i adaptat.

2) X és nul en els eixos.

3) $X(z,z']\geq 0 \quad \forall z<z'\in R^2_+$.

Donat un procés creixent X sempre podem considerar la mesura aleatòria induïda per X sobre R^2_+, definida pels rectangles de la forma usual,

$$\mu(z,z'] = X(z,z'] = X_{z'} - X_{st'} - X_{s't} + X_z \quad z=(s,t) \; z'=(s',t').$$

Definim la <u>tribu previsible</u> $\mathcal{P}$ com la tribu de parts de $R^2_+\times\Omega$ generada pels conjunts de la forma $(z,z']\times A$, $\forall z,z'\in R^2_+$, $z<z'$, i $\forall A\subset \mathcal{F}_z$.

Direm que un procés $X = \{X_z, z \in R^2_+\}$ és __previsible__ si l'aplicació $X: R^2_+ \times \Omega \longrightarrow R$ és P-mesurable.

$$(z, \omega) \longrightarrow X_z(\omega)$$

La descomposició de Doob-Meyer d'una submartingala és certa només en part, (vegeu [9]):

Si $M \in \mathcal{M}^2$, existeix un procés creixent i previsible $\langle M\rangle = \{\langle M\rangle_z, z \in R^2_+\}$ tal que $\{M^2_z - \langle M\rangle_z, z \in R^2_+\}$ és una martingal feble [9] .

La unicitat d'aquest procés és una qüestió més delicada, no obstant és cert si $M \in \mathcal{M}^2_C$ i en aquest cas $\langle M\rangle$ admet una versió contínua (vegeu D.Nualart [29])

Si M i N són dues martingales de $\mathcal{M}^2$, definim

$$\langle M,N\rangle = \tfrac{1}{2}(\langle M+N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle)$$

i es compleix que $M.N - \langle M,N\rangle$ és una martingala feble.

Direm que M i N són ortogonals ($M \perp N$) si M.N és una martingala feble, és a dir, $\langle M,N\rangle = 0$.

Per a cada t considerem la martingala M_{st} com una martingala unidimensional; sabem , per la descomposició de Doob-Meyer [12] , que existeix un únic procés creixent i F^2_{st}-previsible, que anomenarem $\langle M_{.t}\rangle_s$, tal que $M_{st} - \langle M_{.t}\rangle_s$ és una martingala en la coordenada s. El procés $\langle M_{.t}\rangle_s$ està definit per a cada t, per tant no podem esperar bones propietats respecte a t.

Igualment podem considerar el procés $\langle M_{s.}\rangle_t$. En alguns casos notarem $\langle M_{.t}\rangle_s = \langle M\rangle^1_{st}$ i $\langle M_{s.}\rangle_t = \langle M\rangle^2_{st}$.

__Desigualtats Maximals__

Les desigualtats maximals de Doob van ser generalitzades a dos paràmetres per Carioli [47] :

Sigui $M = \{M_z, z \in R_+^2\}$ una martingala contínua per la dreta. Aleshores,

(a) $\lambda P(\sup_z |M_z| \geq \lambda) \leq \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} \sup_z E[|M_z| \log^+ |M_z|] \quad \forall \lambda > 0.$

(b) $E[\sup_z |M_z|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^{2p} \sup_z E[|M_z|^p] \quad \forall p > 1.$

Una conseqüència d'aquest resultat, demostrada també per Carioli [47] , és la següent

Lema

Si $M = \{M_z, z \in R_+^2\}$ és una martingala afitada en Llog, convergeix q.s. cap a un límit $M_{\infty\infty}$ i $M_z = E[M_{\infty\infty} / F_z]$ (M és afitada en Llog si $\forall z \in R_+^2$, $E[|M_z| \log^+ |M_z|] < \infty$).

Si $M = \{M_z, z \in R_+^2\}$ és una martingala, designarem, en el cas que existeixin, per a $M_{\infty\infty}$ a la variable terminal, i per $M_{s\infty}$ i $M_{\infty t}$ a les variables terminals considerant la martingala M com una martingala unidimensional en s o t respectivament.

Les desigualtats de Burkholder, Davis , Grundy no s'estenen amb facilitat a dos paràmetres; en el cas d'una martingala indexada en N , les trobem en els treballs de Metreux [25] i Ledoux [20] . Meyer [26] dóna una versió d'aquestes desigualtats per a martingales indexades en el pla considerant només els seus valors sobre un reixat de R_+^2. Per a martingales de $\mathcal{M}_c^2$, disposem de la següent desigualtat (vegeu Nualart [31])

Sigui $F: R_+ \longrightarrow R_+$ una funció tal que,

a) és creixent

b) $F(0) = 0$ i $F(x) > 0$ per a $x > 0$

Direm que F és moderada si $\exists\alpha>1$ tal que $\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} < \infty$.

Direm que F és de Yong si és convexa, moderada, i $\inf_{x>0} \frac{xf(x)}{F(x)} > 1$,

on f és la derivada per la dreta de F.

Teorema

Per a tota funció moderada F, existeixen dues constants, c i C, que no depenen de F i tals que per a tota martingala $M \in \mathcal{M}_C^2$ tancada (és a dir, $\sup_z E[\,|M_z|^2\,] < \infty$)

$$cE[F(\langle M\rangle_{\infty\infty})] \leq E[F(\sup_t \langle M_{.t}\rangle_\infty)] \leq C\,E[F(\langle M\rangle_{\infty\infty})] .$$

i si F és una funció de Yong,

$$cE[F(\langle M\rangle^{1/2}_{\infty\infty})] \leq E[F(\sup_z |M_z|)] \leq C\,E[F(\langle M\rangle^{1/2}_{\infty\infty})] .$$

Moviment Brownià bidimensional

Per tal de generalitzar el moviment brownià podem seguir diferents camins:

a) $W=\{W_z,\ z\in R^2_+\}$ un procés gaussià centrat i amb covariància

$$E\,[W_{st}W_{s't'}] = (s\wedge s')(t\wedge t') .$$

b) Sigui W la mesura aleatòria sobre R^2_+ tal que $\forall A \in \mathcal{B}(R^2_+)$, W(A) és una variable aleatòria gaussiana, centrada i amb variància $\mu(A)$, on μ és la mesura de Lebesgue, i tal que si $A,B \in \mathcal{B}(R^2_+)$ i $A\cap B=\emptyset$ aleshores W(A) i W(B) són independents (vegeu Orey i Pruit [32] , Wong i Zakai [40], Park [33]).

Definim $W_z = W(0,z]$; aleshores $W=\{W_z, z\in R^2_+\}$ és un procés de Wiener bidimensional.

Qualsevol d'aquestes definicions dóna lloc al mateix procés $W = \{W_z,\ z\in R^2_+\}$ que anomenarem procés de moviment brownià , o procés de Wiener bidimensional, o també drap brownià.

Fixat $(s,t)\in R^2_+$, els processos unidimensionals $\{ \frac{W_{st}}{\sqrt{s}} \quad t \geq 0 \}$ i $\{ \frac{W_{st}}{\sqrt{t}} \quad s \geq 0 \}$ són moviments brownians.

El procés W és una martingala forta respecte la σ-àlgebra $F_z = \sigma < W_{z'}, \; z' \leq z >$ i pertany a tots els $\mathcal{M}^p$ $p \geq 0$.

Suposarem sempre que W és un procés continu donat que té una versió amb trajectòries contínues (vegeu Park [33] , Yeh [43])

Regions d'atur

El temps d'atur es generalitza en dues dimensions per dos conceptes íntimament lligats, les línees d'atur i les regions d'atur. El primer en introduïr aquests conceptes és J.B.Walsh [37] que els utilitza per a estudiar el problema de Dirichlet per a funcions bisuperharmòniques.

Al llag d'aquest treball utilitzarem regions d'atur, i per tant ens centrarem en aquest concepte (vegeu Carioli i Walsh [10]); les línees d'atur són també una bona eina en la teoria dels processos estocàstics a dos paràmetres com mostra el treball de Merzbach ([23],[24]).

Sigui A una aplicació d'Ω en els conjunts de R^2_+ . Direm que A és un conjunt aleatori si per a tot $z\in R^2_+$, $I_A(z)$ és una variable aleatòria.

Direm que D és una regió d'atur si

(1) D és un conjunt aleatori progressivament mesurable, tancat i que conté els eixos.

(2) Si $z\in D$ aleshores $[0,z] \subset D$.

De fet en la definició que donen Carioli i Walsh en [10] , les regions d'atur no tenen perquè estar recolzades en els eixos, n'hi ha prou que sobre $\{D \neq \emptyset\}$, $Z \in D$, on $Z = \inf D$; però nosaltres utilitzarem tan sols les regions d'atur que hem definit.

El següent resultat ens dóna les condicions per tal que un conjunt aleatori sigui una regiò d'atur.

<u>Proposició</u> (vegeu [10])

Sigui D un conjunt aleatori tancat que conté els eixos de coordenades. Suposem que

(1) Si $z \in D$, aleshores $[0,z] \subset D$,

(2) $\forall z \in R_+^2$, $\{z \in D\} \in \mathcal{F}_z$.

Aleshores D és una regió d'atur.

Direm que un procés $M = \{M_z, \mathcal{F}_z, z \in R_+^2\}$ <u>és localment de $\mathcal{M}^p$</u> si existeix una successió (D_n) de regions d'atur i una successió de martingales (M_n) tals que

(1) $D_n \subset D_{n+1}$ per a tot n, i $\bigcup_n D_n = R_+^2$ q.s.

(2) $M^n \in \mathcal{M}^p$ per a tot n.

(3) $\forall n$ i quasi per a tot , $M_z^n(\omega) = M_z(\omega)$ $\forall z \in D_n(\omega)$.

Direm que la successió (D_n) redueix M. Designarem per $\mathcal{M}_{loc}^p$ el conjunt dels processos localment de $\mathcal{M}^p$.

<u>Integrals Estocàstiques</u>

Em el desenvolupament del càlcul estocàstic en el pla esdevé necessari definir diferents tipus d'integrals estocàstiques: les integrals simples $\int_{R_z} \phi(z')dM_{z'}$, que són una generalització de la integral de Itô, les integrals dobles $\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')dM_{z'}dN_{z''}$ introduïdes per Wong i Zakai [40] , integrals de línia $\int_T \phi(z)dM_z$

(on T és una corba contínua i creixent de R^2_+) i integrals mixtes $\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')d\mu_{z'}dM_{z''}$ i $\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')dM_{z'}d\mu_{z''}$.

Nosaltres utilitzarem tan sols les integrals simples, dobles i mixtes, aquestes últimes quan la mesura μ és la mesura de Lebesgue.

<u>Integral simple</u>

Donada una martingala $M=\{M_z, F_z, z\in R^2_+\}$, $M \in \mathcal{M}^2$, considerem la classe $\mathcal{L}^2_M$ dels processos previsibles $\phi = \{\phi_z, z\in R^2_+\}$ tals que $E[\int_{R_z} \phi^2(z')d<M>_{z'}] < \infty$ $\forall z\in R^2_+$. Si $\phi \in \mathcal{L}^2_M$, podem definir la integral simple de ϕ respecte M,

$$\phi.M_z = \int_{R_z} \phi(z')dM_{z'}.$$

Primer es defineix per a $z\in[0,z_0]$ i per processos ϕ simples, és a dir, $\phi(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}(z)$ on $A_i= (z_i,z_i']\subset(0,z_0]$ i α_i són variables aleatòries afitades, i cada α_i és F_{z_i}-mesurable, posant en aquest cas $\phi.M_z= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M((z_i,z_i']\cap R_z)$, després s'estén per a processos de $\mathcal{L}^2_M$ (vegeu Carioli i Walsh [9]).

La integral simple compleix entre d'altres les següents propietats

- isometria $E\left(\int_{R_z} \phi(z')dM_{z'})^2\right] = \int_{R_z} E[\phi(z')^2]\, d<M>_{z'}$.
- $\phi.M \in \mathcal{M}^2$.
- $\phi.M$ és contínua si M ho és.
- $\phi.M$ és martingala forta si M ho és.
- $<\phi.M, \psi.N> = \int_{R_z} \phi\psi\, d<M,N>$.

Si M=W, la integral simple es pot definir per a tots els processos mesurables i adaptats $\phi=\{\phi_z,\ z\in R^2_+\}$ tals que $E[\int_{R_z} \phi(z')^2 dz']<\infty$ (vegeu [22]). Entendrem per a $\mathcal{L}^2_W$ la classe d'aquests processos.

Integral doble

Per al desenvolupament de càlcul estocàstic n-dimensional necessitem de les integrals dobles que van ser introduïdes per Wong i Zakai [40] per tal de representar les martingales així com els funcionals de Wiener mitjançant integrals estocàstiques.

Siguin $M=\{M_z,\ z\in R^2_+\}$ i $N=\{N_z,\ z\in R^2_+\}$, $M,N\in\mathcal{M}^4$, on M és una 2-martingala a increments ortogonals en el sentit 2 i N és una 1-martingala a increments ortogonals en el sentit 1.

Definirem la integral doble respecte M i N per als processos $\psi=\{\psi(z,z'),\ \forall z,z'\in R^2_+\}$ tals que

a) $\psi(z,z')=0$ si no tenim $z\bar{\wedge} z'$.

b) ψ és previsible, és a dir, és mesurable respecte la tribu $\mathcal{D}$ de $\Omega\times R^2_+\times R^2_+$ generada pels conjunts $(z_1,z_1']\times(z_2,z_2']\times A$ on $(z_1,z_1']\bar{\wedge}(z_2,z_2']$ i $A\in\mathcal{F}_{z_1\vee z_2}$.

c) $E[\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(\xi,\zeta)^2 d<M>^1_\xi d<N>^2_\zeta]<\infty \qquad \forall z\in R^2_+$.

Definim per $\mathcal{L}^2_{MN}$ la classe dels processos que compleixen a, b i c.

La integral doble es defineix primer en $(0,z_0]^2$ i per a processos simples,

$$\psi(z,z')=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i I_{A_i}(z)I_{B_i}(z')$$

on $\cup A_i=(0,z_0]$, $\cup B_i=(0,z_0]$, $A_i=(z_i,z_i']$ $B_i=(\xi_i,\xi_i']$, $A_i\bar{\wedge} B_i$ $\forall$ i=1,2,...n; α_i és una variable afitada $\mathcal{F}_{z_i\vee\xi_i}$-mesurable.

Per aquests processos posarem

$$\psi MN_z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M[A_i \cap R_z] N[B_i \cap R_z]$$

la integral s'estén a tots els processos de $\mathcal{L}^2_{MN}$ (vegeu Guyon i Prun [15].).

Aquesta integral té entre d'altres propietats,

- isometria $E[(\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')dM_{z'}dN_{z''})^2] =$

$$= \int_{R_z}\int_{R_z} E[\psi^2(z',z'')]\, d<M>^1_{z'} d<N>^2_{z''}$$

- $\psi.MN$ és una martingala
- $\psi.MN$ és contínua si M i N ho són.
- $<\psi.MN, \phi.MN>_z = \int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')\phi(z',z'')d<M>^1_{z'} d<N>^1_{z''}$
- Si $P \in \mathcal{M}^2$ i $f \in \mathcal{L}^2_P$, f.P és ortogonal a $\psi.MN$.

Si M=N=W, la condició b pot substituir-se per

b') ψ és $\mathcal{B}(R^2_+) \times F$-mesurable i $\psi(z,z')$ és $F_{z\vee z'}$-adaptat

$\mathcal{L}^2_{WW}$ indicarà la classe dels processos que compleixen a,b' i c.

Les integrals simples i dobles són suficients per a representar les martingales adaptades a la tribu del brownià i de quadrat integrable (vegeu Wong i Zakai [40])

Si $M = \{M_z,\ z \in R^2_+\}$ és una martingala browniana de quadrat integrable, existeixen $\phi = \{\phi_z, z \in R^2_+\} \in \mathcal{L}^2_W$ i $\psi = \{\psi(z,z'),\ z,z' \in R^2_+\} \in \mathcal{L}^2_{WW}$ tals que

$$M_z = M_0 + \int_{R_z} \phi(z')dW_{z'} + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')dW_{z'}dW_{z''}.$$

Carioli i Walsh demostren en [9] que M és una martingala forta si i només si $\psi \equiv 0$

Integrals mixtes

Per a poder representar les martingales febles i les 1 i 2-martingales necessitem d'un altre tipus d'integral, la integral mixta introduïda per Wong i Zakai en [33].

Siguin $M=\{M_z, z\in R^2_+\}$ i $N=\{N_z, z\in R^2_+\}$ una 1-martingala a increments ortogonals en el sentit 1 i una 2-martingala amb increments ortogonals en el sentit 2 respectivament.

Sigui $\psi(z,z')$ (repectivament $\phi(z,z')$) un procés F^1_z-previsible (repectivament F^2_z-previsible) tal que $\Psi(z,z')=0$ ($\phi(z,z')=0$) si no tenim $z\bar{\wedge}z'$.

Com sempre es defineix primer les integrals mixtes en $[0,z_0]^2$ i per a processos simples

$$\psi(z,z') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I_{A_j}(z) I_{B_j}(z')$$

$$\phi(z,z') = \sum_{j=1}^{n} \beta_j I_{A_j}(z) I_{B_j}(z')$$

on $\cup A_j=\cup B_j=(0,z_0]$, $A_j=(z_j,z_j']$, $B_j=(\xi_j,\xi_j']$, $A_j\bar{\wedge}B_j$ $\forall j=1,\dots,n$, α_j i β_j són variables aleatòries afitades $F^1_{z_j}$-mesurable i $F^2_{z_j}$-mesurable respectivament; per aquests processos s'escriu

$$\psi\cdot_\mu M_z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i\, \mu(A_j\cap R_z) M[B_j\cap R_z], \qquad \text{i}$$

$$\phi\cdot N\mu_z = \sum_{j=1}^{n} \beta_i N[A_j\cap R_z]\, \mu(B_j\cap R_z).$$

Després s'estén a la classe dels processos Ψ i ϕ ja esmentada (vegeu Guyon i Prun [15]).

Les integrals $\psi\cdot_\mu M$ i $\phi\cdot N_\mu$ són respectivament 1-martingala i 2-martingala pròpia ([15]).

La definició d'integral mixta que hem introduït inclou sota certes condicions la integral mixta definida en [9] per Carioli i Walsh (vegeu Wong i Zakai [41]).

Fórmula de diferenciació d'Itô.

Una de les eines més importants del càlcul estocàstic és la fórmula d'Itô. En un paràmetre, si $X=(X^1,\dots,X^n)$ és una semimartingala contínua i $F:R^n \longrightarrow R$, una funció de classe $\mathcal{C}^2$, tenim

$$F(X_T)-F(X_0) = \sum_i \int_{[0,T]} \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_s)\,dX_s^i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{[0,T]} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s$$

El primer en generalitzar la fórmula de Itô és Wong [39] amb el resultat següent

Teorema

Per a tota funció $f: \begin{array}{ccc} R^3 & \longrightarrow & R \\ (u,s,t) & & f(u,s,t) \end{array}$ contínua, derivable de primer ordre per a (s,t) i de segon ordre per a u, amb derivades contínues, tal que compleix

$$\frac{\partial f}{\partial t} + s\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \quad ;$$

i per a tota martingala $\{X_z,\ z \in R_+^2\}$ de la forma $X_z = \int_{R_z} \phi(z')\,dW_{z'}$

tenim que $f(X_z,z)$ és també una martingala que s'expressa

$$f(X_z,z) - f(0,s,0)-f(0,0,t)+f(0,0,0)=$$

$$= \int_{R_z} f'(X_{z'},z')\,\phi(z')\,dW_{z'} + \tfrac{1}{2}\int_{R_z}\int_{R_z} f'(X_{z'\vee z''},z'\vee z'')\,\phi(z')\,\phi(z'')\,dW_{z'}\,dW_{z''}.$$

Carioli i Walsh [9] donen una fórmula de Itô més general que la de Wong [39] per a funcions f contínuament diferenciables de quart ordre. Més tart Wong i Zakai [42] consideren els processos $\{X_z,\ z\in R^2_+\}$ que es poden representar com a sumes d'integrals estocàstiques respecte el procés de Wiener bidimensional i d'integrals deterministes; i demostren una fórmula d'Itô que que permet escriure $f(X_z)$ com a sumes d'integrals del mateix tipus (en aquest cas f és una funció $f:R\rightarrow R$ contínuament diferenciable de quart ordre)

M.Sanz dona una fórmla d'Itô per a una funció $f(z,W(z))$ expressant-la mitjançant els operadors de difusió associats a les dues famílies de martingales a un paràmetre $(W_{.t})_s$ i $(W_{s.})_t$ (vegeu [34] [35]).

Per a martingales de $\mathcal{M}^4_{c,loc}$ tenim també una fórmula d'Itô deguda inicialment a Chevalier [11] sota la hipòtesi que tota martingala de $\mathcal{M}^2$ té una versió contínua; i demostrada després per D.Nualart [30] sense aquesta hipòtesi,

Teorema

Sigui $f:R\rightarrow R$ una funció de classe $\mathcal{C}^4$, nul.la en 0; i sigui M una martingala de $\mathcal{M}^4_C$. Aleshores, per a tot $(s,t)\in R^2_+$ tenim,

$$f(M_{st}) = \int_{R_{st}} f'(M_z)dM_z + \int_{R_{st}} f''(M_z)d\tilde{M}_z + \tfrac{1}{2}\int_0^s f''(M_{xt})d\langle M_{.t}\rangle_x +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(M_{sy})d\langle M_{s.}\rangle_y - \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}} f''(M_z)d\langle M\rangle_z -$$

$$- \int_{R_{st}} f''(M_z)d\langle M,\tilde{M}\rangle_z - \tfrac{1}{4}\int_{R_{st}} f^{(4)}(M_z)d\langle\tilde{M}\rangle_z .$$

($\tilde{M}$ és una martingala associada a M , vegeu D.Nualart [29] Lema 3.2).

Per un argument de localització es pot demostrar aquest Teorema per a martingales de $\mathcal{M}^4_{C,loc}$.

Si M és una martingala contínua unidimensional, aplicant la fórmula d'Itô a la funció $F(x)=(x-a)^+$ obtenim el temps local $\{L_t^a, a\in R, t \geq 0\}$ de la martingala M que compleix:

<u>Teorema</u> (vegeu Ázema-Yor [3])

Per a tota funció $\psi:R\to R$ mesurable i positiva,

$$\int_0^t \psi(M_s)\,d\langle M\rangle_s = \int_R \psi(a)L_t^a da.$$

El procés L_t^a és la densitat del temps d'ocupació en el punt a de la martingala M durant l'interval de temps [0,t] respecte la mesura associada a la seva variació quadràtica.

Per a dos paràmetres tenim resultats similars. D.Nualrt en [30] demostra l'existència d'un temps local per a martingales de $\mathcal{M}_C^4$:

<u>Teorema</u>

Sigui M una martingala de $\mathcal{M}_C^4$. Existeix un procés $\{L_{st}^x$, $(s,t)\in R_+^2$, $x\in R\}$ continu en (x,s,t), tal que quasi per a tot ω, tenim

$$\int_{R_{st}} f(M_z)\,d\langle \tilde{M}\rangle_z = \int_R L_{st}^x f(x)\,dx$$

per a tot $(s,t)\in R_+^2$ i per a tota funció mesurable i afitada f.

Si M=W, aquest temps local va ser trobat per Carioli i Walsh [9] .

Observem que el procés L_{st}^x és la densitat del temps local d'ocupació de la martingala M respecte la mesura associada a $\tilde{M}$ i no a M .

En el cas particular del moviment brownià bidimensional Walsh [38] demostra l'existència d'un temps local L_{st}^x continu en (x,s,t), i per a cada x fix contínuament diferenciable en s i t, tal que, quasi per a tot ω ,

$$\int_0^s \int_0^t f(W_{uv})\,dudv = \int_{\mathbb{R}} L_{st}^x\,dx \quad \forall (s,t)\in R_+^2 \text{ i } \forall f:R\to R \text{ boreliana.}$$

I DERIVADES DE LES INTEGRALS ESTOCÀSTIQUES RESPECTE EL MOVIMENT BROWNIÀ.

I.1 INTRODUCCIÓ.

Sigui $\{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ un moviment brownià, i $\{\Phi_t \; t \in R\}$ un procés mesurable , adaptat i de quadrat integrable; en aquestes condicions podem definir la integral estocàstica del procés respecte el moviment brownià: $Y_t = \int_0^t \Phi_s dW_s$.

Issaacson en [19] obté un teorema anàleg al Teorema fonamental del càlcul, per a integrals estocàstiques respecte el moviment brownià. El resultat al que arriba és el següent:

Teorema(veure [19]): Si es compleixen una de les següents condicions:

a) El procés $\{\Phi_t, t \geq 0\}$ és continu quasi segurament

b) L'espai $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ és separable

Aleshores : $\dfrac{\int_t^{t+\Delta t} \Phi_s dW_s}{W_{t+\Delta t} - W_t}$ convergeix en probabilitat cap a Φ_t quan $\Delta t \to 0$ ($\Delta t > 0$).

No cal esperar convergència quasi segura ni en l'espai L^2. Estudiem,per exemple, la integral estocàstica del moviment brownià respecte ell mateix: $\int_0^t W_t dW_t$. Per la fòrmula de Itô podem escriure:

$$\int_t^{t+\Delta t} W_s dW_s = \frac{1}{2}(W^2_{t+\Delta t} - W^2_t - \Delta t)$$

per tant:

$$\frac{\int_t^{t+\Delta t} W_s \, dW_s}{W_{t+\Delta t} - W_t} = \frac{1}{2}(W_{t+\Delta t} + W_t - \frac{\Delta t}{W_{t+\Delta t} - W_t}) =$$

$$= W_t + \frac{W_{t+\Delta t} - W_t}{2} - \frac{\Delta t}{W_{t+\Delta t} - W_t} \qquad (1.1).$$

El segon sumand de la dreta de (1.1) convergeix cap a zero quasi segurament i en l'espai L^2 ; però el tercer sumand no ho fa en cap dels dos sentits.

J.Zabczyk en [46] estudia per a quins p>0, el quocient $\dfrac{\int_t^{t+\Delta t} \phi_s dW_s}{W_{t+\Delta t} - W_t}$ convergeix en L^p; i demostra el següent Teorema:

Teorema (veure [46]): Si $\{\phi_t, t \in [0,1]\}$ és un procés mesurable, adaptat, i de quadrat integrable; i $0<p<2/3$, aleshores:

1) $\dfrac{\int_a^b \phi_t dW_t}{W_b - W_a} \in L^p$ per a tot interval $[a,b] \subset [0,1]$.

2) Si a més tenim:

$$\frac{1}{b_n - a_n} E\left[\int_{a_n}^{b_n} (\phi_t - \phi_{a_n})^2 dt\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

aleshores:

$$\frac{\int_{a_n}^{b_n} (\phi_t - \phi_{a_n}) dW_t}{W_{b_n} - W_{a_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{en } L^p.$$

3) Per a p=2/3, existeix un procés $\{Y_t, t\in[0,1]\}$ mesurable, adaptat i de quadrat integrable; i una successió d'intervals $[a_n, b_n] \subset [0,1]$, $a_n \longrightarrow 0$, $b_n \longrightarrow 0$, tals que:

$$\frac{1}{b_n - a_n} E\left[\int_{a_n}^{b_n} Y_s^2 ds\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$E\left[\left|\frac{\int_{a_n}^{b_n} Y_s dW_s}{W_{b_n} - W_{a_n}}\right|^{2/3}\right] = +\infty .$$

L'autor observa que si $\phi_{t+h} \xrightarrow[h\to 0]{} \phi_t$ en $L^1(\Omega, F, P)$, aleshores pel Teorema,

$$\frac{\int_t^{t+h} \phi_s dW_s}{W_{t+h} - W_t} \xrightarrow[h\to 0]{} \phi_t \text{ en } L^p(\Omega, F, P),\ p<2/3 .$$

Hem vist doncs, que amb un paràmetre i sota certes hipòtesis podem recuperar el procés integrat a partir de la integral estocàstica respecte el moviment brownià; de la mateixa forma ens podem preguntar si en dues dimensions això és possible. En el següent apartat s'obtenen alguns resultats en aquest sentit per a les integrals del tipus $\int_{R_{st}} \phi_z dW_z$ i $\int_{R_{st}} \int_{R_{st}} \psi(z,z') dW_z dW_{z'}$.

I.2 TEOREMES DE DERIVACIÓ

Si $\{Y_z, z\in R_+^2\}$ és un procés, notarem per

$\Delta_z^{hk}=(s,s+h]\times(t,t+k]$

$Y(\Delta_z^{hk})= Y_{s+h,t+k} - Y_{s+h,t} - Y_{s,t+k} + Y_{st}$

$\forall z=(s,t)\in R_+^2$ i $\forall h,k>0$.

<u>Teorema(1.2.1)</u>

Sigui $\Phi=\{\Phi_z, z\in R_+^2\}$ un procés de la classe $\mathcal{L}_W^2$, Φ continu quasi segurament. Definim per Y_z la integral estocàstica de Φ_z respecte el moviment brownià:

$$Y_z=\int_{R_z}\Phi_s dW_s \qquad \forall z\in R_+^2$$

Aleshores: $\dfrac{Y(\Delta_z^{hk})}{W(\Delta_z^{hk})}$ convergeix en probabilitat quan h i k $\longrightarrow 0$, i el seu límit és igual a Φ_z, per a tot punt $z=(s,t)\in R_+^2$.

Demostració:

Fixem un punt $z=(s,t)$. Aleshores:

$$\frac{Y(\Delta_z^{hk})}{W(\Delta_z^{hk})}-\Phi_z=\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}\frac{\Phi_{z'}-\Phi_z}{W(\Delta_z^{hk})}dW_{z'},$$

per tant, $\dfrac{Y(\Delta_z^{hk})}{W(\Delta_z^{hk})}-\Phi_z$ convergeix en probabilitat cap a zero si i només, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_\varepsilon>0$ tal que si $0<k<\delta_\varepsilon$ i $0<h<\delta_\varepsilon$, aleshores:

$$P\left[\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}\frac{\Phi_{z'}-\Phi_z}{W(\Delta_z^{hk})}dW_{z'}\right|>\varepsilon\right]\leq\varepsilon \qquad (1.1).$$

Ara bé, $\forall K>0$ podem escriure:

$$P\left[\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{W(\Delta_z^{hk})}\,dW_{z'}\right|>\varepsilon,\ \left|\frac{(h.k)^{1/2}}{W(\Delta_z^{hk})}\right|\leq K\right]+$$

$$+P\left[\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{W(\Delta_z^{hk})}\,dW_{z'}\right|>\varepsilon,\ \left|\frac{(hk)^{1/2}}{W(\Delta_z^{hk})}\right|>K\right]\leq$$

$$\leq P\left[\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{(hk)^{1/2}}\,dW_{z'}\right|>\varepsilon/K\right]+P\left[\left|\frac{(hk)^{1/2}}{W(\Delta_z^{hk})}\right|>K\right]\ (1.2).$$

Per ser $\frac{W(\Delta_z^{hk})}{(h.k)^{1/2}}$ una variable aleatòria de llei $N(0,1)$, podem trobar una constant K_ε tal que $P\left[\left|\frac{W(\Delta_z^{hk})}{(h.k)^{1/2}}\right|<1/K_\varepsilon\right]<\varepsilon/2$ (1.3)

Prenem $K=K_\varepsilon$. Per la continuïtat de ϕ_z podem trobar un $\delta>0$ de forma que:

$$P\left[\sup_{\substack{t<t'<t+\delta\\ s<s'<s+\delta}}|\phi_{s't'}-\phi_{st}|^2>\varepsilon^3/4K^2\right]<\varepsilon/4.$$

Definim la regió aleatòria $D_\omega=\{z''\in R_+^2/\ \sup_{z\leq\xi\leq z''}|\phi_\xi-\phi_z|^2\leq\frac{\varepsilon^3}{4K}\}$. $I_{D_\omega}(z)$ és un procés de la classe $\mathcal{L}_W^2$.

Si h i $k\leq\delta$, tenim,

$$E\left[\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}I_D(z')\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{(h.k)^{1/2}}\,dW_z\right|^2\right]=$$

$$=\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}\frac{E\left[|\phi_{z'}-\phi_z|^2\,I_D(z')\right]}{(h.k)}\,dz'$$

Per un $\omega\in\Omega$ fix, si $z'=(s,t)\in D_\omega$, aleshores $|\phi_{z'}(\omega)-\phi_z(\omega)|^2<\varepsilon^3/4K^2$; en conseqüència,

$$E\left[|\phi_{z'}-\phi_z|^2 I_D(z')\right]<\varepsilon^3/4K^2$$, i per tant

$$P\left[\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h}I_D(z')\frac{|\phi_{z'}-\phi_z|}{(h.k)^{1/2}}\,dW_{z'}\right|>\varepsilon/K\right]<\varepsilon/4\ (1.4).$$

En efecte, si la desigualtat fòra contrària, podriem escriure:

$$E\left[\,\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h} I_D(z')\,\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{(hk)^{1/2}}\,dW_{z'}\right|^2\right] \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon^2}{K^2}.P\left[\,\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h} I_D(z')\,\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{(hk)^{1/2}}\,dW_{z'}\right| > \frac{\varepsilon}{K}\right] \geq \frac{\varepsilon^3}{4K^2}$$

i això dóna lloc a contradicció.

Sigui $\Omega' = \{\omega\in\Omega \,/\, (s+h,\ t+k)\in D_\omega\}$. Si $\omega\in\Omega'$,

$$I_{D^c_\omega}(z').\frac{\phi_{z'}(\omega)-\phi_z(\omega)}{(hk)^{1/2}} = 0 \quad \text{per a tot } z'\in[\,s,\ s+h\,]\times[\,t,t+k\,] \;;$$

per la propietat de localitat de la integral estocàstica [12]

deduïm que $\displaystyle\int_t^{t+k}\int_s^{s+h} I_{D^c}(z')\,\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{(hk)^{1/2}}\,dW_{z'} = 0$ en Ω'.

Per tant:

$$P\left[\,\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+k} I_{D^c}(z')\,\frac{\phi_{z'}-\phi_z}{(hk)^{1/2}}\,dW_{z'}\right| > \frac{\varepsilon}{K}\right] \leq$$

$$\leq P\left[\,(s+h,\ t+k)\in D^c\right] < P\left[\sup_{\substack{t\leq t'\leq t+\delta\\ s\leq s'\leq s+\delta}} |\phi_{s't'}-\phi_z|^2 > \frac{\varepsilon^3}{4K^4}\right] < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1.5)$$

Finalment, enllaçant (1.2),(1.3),(1.4),i (1.5) obtenim el que voliem □.

Igualment, per les integrals del tipus $\int_{R_z}\int_{R_z}\phi(z',z'')\,dW_{z'}dW_{z''}$ obtenim el mateix resultat:

Definim $A=\{z=(s,t),\ z'=(s',t')\in R^2_+,\ s\leq s' \text{ i } t\geq t'\}$.

<u>Teorema(1.2.2)</u>

Sigui $\phi = \{\phi(z,z'),\ z,z'\in R^2_+\}\in\mathcal{L}^2_{WW}$, continu sobre la regió A en les dues variables quasi segurament.

Aleshores: $\displaystyle\int_{\Delta_z^{hh'}} \int_{\Delta_{z'}^{kk'}} \frac{\phi(\xi,\xi)\,dW_\xi\, dW_{\xi'}}{W(\Delta_z^{hh'})W(\Delta_{z'}^{kk'})}$

convergeix cap a $\phi(z,z')$, en probabilitat, quan $h,h',k,k' \longrightarrow 0$ per a tot $z,z' \in A$, $z \neq z'$.

Demostració:

Fixem $z,z' \in A$, $z \neq z'$. Definim:

$$B = \{ \omega \ / \ \left| \int_{\Delta_z^{hh'}} \int_{\Delta_{z'}^{kk'}} \frac{\phi(\xi,\xi') - \phi(z,z')}{W(\Delta_z^{hh'})W(\Delta_{z'}^{kk'})} dW_\xi\, dW_{\xi'} \right| > \varepsilon \}$$

(el conjunt B depèn de h,h',k,k',z i z'). Aleshores:

$$P(B) \leq P\left(B \cap \left\{ \left| \frac{(hh'kk')^{1/2}}{W(\Delta_z^{hh'})W(\Delta_{z'}^{kk'})} \right| > R \right\} \right) + P\left(\left| \frac{(hh'kk')^{1/2}}{W(\Delta_z^{hh'})W(\Delta_{z'}^{kk'})} \right| \leq R \right)$$

per a tot $R > 0$.

Podem fer h,h',k i k' prou petits per tal que $\dfrac{W(\Delta_z^{kk'})}{(hh')^{1/2}}$ i $\dfrac{W(\Delta_z^{hh'})}{(kk')^{1/2}}$ siguin dues variables aleatòries $N(0,1)$ independents (degut a que $z \neq z'$). Existeix una constant $R_\varepsilon > 0$, independent de h,h',k,k',z i z', tal que

$$P\left(\left| \frac{W(\Delta_z^{hh'})}{(hh')^{1/2}} \right| . \left| \frac{W(\Delta_{z'}^{kk'})}{(kk')^{1/2}} \right| > \frac{1}{R_\varepsilon} \right) < \varepsilon/2.$$

Tenim doncs:

$$P(B) \leq \frac{\varepsilon}{2} + P\left(\left| \int_{\Delta_z^{hh'}} \int_{\Delta_{z'}^{kk'}} \frac{|\phi(\xi,\xi') - \phi(z,z')|}{(hk)^{1/2}(h'k')^{1/2}} dW_\xi\, dW_{\xi'} \right| > \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon} \right)$$

Prenem $z_0 \in R_+$ tal que $z,z' \in [0,z_0]$.

El procés $\phi(z,z')$ és continu, per tant, $\forall\, \varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que,

$$P\Big(\sup_{\substack{|(\xi,\xi')-(z,z')|<\delta \\ \xi,\xi' \quad [0,z_0] \quad A}} |\phi(\xi,\xi')-\phi(z,z')| > \frac{\varepsilon^3}{4R_\varepsilon}\Big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definim la regió aleatòria

$$D_\omega = \{(\xi,\xi')\in A : \sup_{\substack{z\le\zeta\le\xi \\ z'\le\zeta'\le\xi'}} |\phi(z,z')-\phi(\zeta,\zeta')|^2 \leq \frac{\varepsilon^3}{4R_\varepsilon^2}\}.$$

observem que $I_D(\omega,\xi,\xi') \in \mathcal{L}^2_{WW}$.

Prenem h,h',k,k' més petits que $\delta/2$ i K.

Aleshores:

$$E\Big[\Big|\int_{\Delta_z^{hh'}}\int_{\Delta_{z'}^{kk'}} I_D(\xi,\xi')\frac{\phi(\xi,\xi')-\phi(z,z')}{(hk)^{1/2}(h'k')^{1/2}}dW_\xi dW_{\xi'}\Big|^2\Big] =$$

$$= \int_{\Delta_z^{hh'}}\int_{\Delta_{z'}^{kk'}} \frac{E[I_D(\xi,\xi')|\phi(\xi,\xi')-\phi(z,z')|^2]}{hkh'k'}\, d\xi d\xi' \leq \frac{\varepsilon^3}{4R_\varepsilon^2}$$

i per tant,

$$P\Big[\Big|\int_{\Delta_z^{hh'}}\int_{\Delta_{z'}^{kk'}} I_D(\xi,\xi')\frac{\phi(\xi,\xi')-\phi(z,z')}{(hk)^{1/2}(h'k')^{1/2}}dW_\xi\, dW_{\xi'}\Big| > \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon}\Big) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'aquí tenim:

$$P(B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} +$$

$$+P\Big[\Big|\int_{\Delta_z^{hh'}}\int_{\Delta_{z'}^{kk'}} I_{D^c}(\xi,\xi')\frac{\phi(\xi,\xi')-\phi(z,z')}{(hk)^{1/2}(h'k')^{1/2}}dW_\xi\, dW_{\xi'}\Big| > \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon}\Big] \quad (1.7).$$

Només ens cal demostrar que l'últim terme de la dreta en la desigualtat (1.7) és més petit que $\varepsilon/4$.

Si $(s+h,t+h',s'+k,t'+k')\in D_{\omega'}$, aleshores per a aquest ω',

$$I_{D^c_{\omega'}}(\xi,\xi')\frac{\phi(\xi,\xi')(\omega')-\phi(z,z')(\omega')}{(hk)^{1/2}(h'k')^{1/2}}=0$$

per a tot $(\xi,\xi')\in\Delta_z^{hh'}\times\Delta_{z'}^{kk'}$, i per la propietat de localitat de la integral estocàstica, podem afirmar:

$$\left(\int_{\Delta_z^{hh'}} \int_{\Delta_{z'}^{kk'}} I_{D^c}(\xi, \xi') \frac{\phi(\xi, \xi') - \phi(z,z')}{(hk)^{1/2}(h'k')^{1/2}} \, dW_\xi dW_{\xi'}\right)(\omega') = 0.$$

Per tant

$$P \left[\left| \int_{\Delta_z^{hh'}} \int_{\Delta_{z'}^{kk'}} I_{D^c}(\xi, \xi') \frac{\phi(\xi, \xi') - \phi(z,z')}{(hk)^{1/2}(h'k')^{1/2}} dW_\xi \, dW_{\xi'} \right| > \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon} \right] <$$

$$< P\,[(s+h, t+h', s'+k, t'+k')\ D^c\,] < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Teorema(1.2.3)

Sigui $\{\phi_z, z \in R^2_+\}$ un procés de $\mathcal{L}^2_W$, i $\{\psi(z,z''), (z,z') \in R^2_+ x R^2_+\}$ un procés de $\mathcal{L}^2_{WW}$.

1) Si existeix un $z_0 = (s,t)$ R^2_+ tal que:

$$\lim_{h,k \to 0} \frac{1}{hk} \int_{\Delta_{z_0}^{hk}} E\,[\,|\phi_z - \phi_{z_0}|^2\,]\, dz = 0,$$

aleshores

$$\frac{1}{W(\Delta_{z_0}^{hk})} \int_{\Delta_{z_0}^{hk}} \phi_z dW_z$$

convergeix cap a ϕ_{z_0}, quan $h,k \to 0$, en l'espai L^p, per a tot $p \in (0,2/3)$.

2) Si existeix un punt $(z_0, z_0') \in A, (z_0 \neq z_0')$, tal que

$$\lim_{\substack{h,k \to 0 \\ h'k' \to 0}} \frac{1}{hh'kk'} \int_{\Delta_{z_0}^{hh'}} \int_{\Delta_{z_0'}^{kk'}} E\,[\,|\psi(z,z') - \psi(z_0, z_0')|^2\,]\, dz dz' = 0$$

aleshores

$$\frac{1}{W(\Delta_{z_0}^{hh'})W(\Delta_{z_0'}^{kk'})} \int_{\Delta z_0}^{hh'} \int_{\Delta z_0'}^{kk'} \psi(z,z') dW_{z'} dW_z$$

convergeix cap a $\psi(z_0, z_0')$, quan $h, h', k\ ik' \to 0$, en l'espai L^p, per a tot $p \in (0,2/3)$.

Demostració:

Demostrarem primer l'apartat 1).

Sigui $p \in (0,2/3)$ fix. Aleshores :

$$E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta_{z_o}^{hk})}\int_{\Delta_{z_o}^{hk}} (\phi_z - \phi_{z_o})dW_z\right|^p\right] \leq$$

per la desigualtat de Hölder

$$\leq E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta_{z_o}^{hk})}\right|^{pp'}\right]^{1/p'} E\left[\left|\int_{\Delta_{z_o}^{hk}} (\phi_z - \phi_{z_o})dW_z\right|^{pq'}\right]^{1/q'} \quad (1.8).$$

Prenem $p' = \frac{2}{(2-p)}$ i $q' = \frac{2}{p}$ $(pq=2)$.

$$(1.8) < E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta_{z_o}^{hk})}\right|^{pp'}\right]^{1/p'} \left|\int_{\Delta_{z_o}^{hk}} E[|\phi_z - \phi_{z_o}|^2 dz\right|^{1/q'} =$$

$$= E\left[\left|\frac{1}{W_{11}}\right|^{pp'}\right]^{1/p'} \left|\frac{1}{hk}\int_{\Delta_{z_o}^{hk}} E[|\phi_z - \phi_{z_o}|^2 dz\right|^{1/q'}] \quad (1.9).$$

Fixem-nos que $pp'<1$, i per tant $E\left[\left|\frac{1}{W_{11}}\right|^{pp'}\right]<\infty$. El segon factor de la dreta de (1.9) convergeix a zero per hipòtesis; deduïm doncs:

$$\lim_{h,k\to 0} E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta_{z_o}^{hk})}\int_{\Delta_{z_o}^{hk}} (\phi_z - \phi_{z_o})\, dW_z\right|^p\right]=0.$$

Per a demostrar 2) procedim de la mateixa forma fins a obtenir:

$$E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta_{z_o}^{hh'})W(\Delta_{z_o'}^{kk'})}\int_{\Delta_{z_o}^{hh'}}\int_{\Delta_{z_o}^{kk'}} (\psi(z,z') - \psi(z_o,z_o'))dW_z dW_{z'}\right|^p\right] \leq$$

$$\leq E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta_{z_o}^{hh'})\;W(\Delta_{z_o'}^{kk'})}\right|^{pp'}\right]^{1/p'} .$$

$$\cdot\left|\int_{\Delta_{z_o}^{hh'}}\int_{\Delta_{z_o'}^{kk'}} E[|\psi(z,z') - \psi(z_o,z_o')|^2]dzdz'\right|^{1/q'} \quad (1.10).$$

Les variables $W(\Delta_{z_o}^{hh'})$ i $W(\Delta_{z_o'}^{kk'})$, per a h,h',k i k' prou petits, són independents perquè $z_o \neq z_o'$; per tant:

$$E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta_{z_0}^{hh'})\;W(\Delta_{z_0'}^{kk'})}\right|^{pp'}\right]^{1/p'} = (hh'kk')^{-p/2}\, E\left[\left|\frac{1}{W_{11}}\right|^{pp'}\right]^{2/p'}$$

Igual que abans, del fet que $pp' < 1$, es desprèn que $E\left[\left|\frac{1}{W_{11}}\right|^{pp'}\right] < \infty$. La desigualtat (1.10) queda de la forma:

$$(1.10) \leqslant E\left[\left|\frac{1}{W_{11}}\right|^{pp'}\right]^{2/p'} .$$

$$\cdot\left|\frac{1}{hh'kk'}\int_{\Delta_{z_0}^{hh'}}\int_{\Delta_{z_0'}^{kk'}} E\left[|\psi(\xi,\xi')-\psi(z_0,z_0')|^2\right] d\xi d\xi'\right|^{1/q'}.$$

El segon factor convergeix a zero per hipòtesis, això fa que

$$\lim_{hh'kk'\to 0} E\left|\int_{\Delta_{z_0}^{hh'}}\int_{\Delta_{z_0'}^{kk'}} \frac{\psi(z,z')-\psi(z_0,z_0')}{W(\Delta_{z_0}^{hh'})W(\Delta_{z_0'}^{kk'})}\, dW_z dW_{z'}\right|^p = 0$$

com voliem $\square$.

Notes

1- Evidentment, si $\phi_{s+h,t+k}$ convergeix cap a ϕ_{st} en L^2 (respectivament $\Psi(s+h,t+h',s'+k,t'+k')$ convergeix cap a $\psi(s,t,s',,t')$) les hipòtesis del Teorema(1.2.3) es compleixen.

2- Si en lloc de la hipòtesi 1) del Teorema(1.2.3) posem

$$1')\quad \frac{1}{hk} E\left[\left|\int_t^{t+k}\int_s^{s+h} (\phi_z-\phi_{z_0})dW_z\right|^p\right] \xrightarrow[h,k\to 0]{} 0,$$

aleshores

$$\frac{1}{W(\Delta_{z_0}^{hk})}\int_{\Delta_{z_0}^{hk}} \phi_z dW_z$$

convergeix cap a ϕ_{z_0}, quan $h,k \to 0$, en l'espai L^q, per a tot $q \in (0, \frac{p}{p+1})$.

Igualment, si substituïm 2) per

$$2')\quad E\left|\frac{1}{hh'kk'}\int_{\Delta_{z_0}^{hh'}}\int_{\Delta_{z_0'}^{kk'}}\psi(z,z')\,dW_z\,dW_{z'}\right|^p \xrightarrow[h,h',k,k'\to 0]{} 0\,,$$

aleshores:
$$\frac{1}{W(\Delta_{z_0}^{hh'})\,W(\Delta_{z_0'}^{kk'})}\int_{\Delta_{z_0}^{hh'}}\int_{\Delta_{z_0'}^{kk'}}\psi(z,z')\,dW_z\,dW_{z'}$$

convergeix cap a $\psi(z_0,z_0')$, quan $h,h',k,k' \longrightarrow 0$, en l'espai L^q, per a tot $q\in(0,\frac{p}{p+1})$.

La demostració és idèntica a la del Teorema(1.2.3), aplicant la desigualtat de Hölder per a $p'=\frac{p}{p-q}$ i $q'=p/q$.

Si l'espai $L\,(\Omega,\mathcal{F},P)$ és separable obtenim un Teorema més general. Per a poder demostrar aquest resultat necessitem el següent lema d'Anàlisis:

<u>Lema(1.2.4)</u>

Per a tota funció $f\in L^1(R^n)$, quasi per a tot $x\in R^n$ tenim:
$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{A(x,r)} f(x')\,dx' = f(x)\,,$$
on $A(x,r) = (x_1,x_1+r]\times(x_2,x_2+r]\times\ldots\times(x_n,x_n+r]$ éssent $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

Demostració:

Aquest Teorema és una modificació trivial del mateix resultat per a cubs oberts de centre x i costats de longitut 2r. (vegeu Guzmán [16]).

Per a cada $f\in L^1(R^n)$ i $\forall x\in R^n$, podem definir l'operador maximal de Hardy-Littlewood (vegeu [16],capitol II,pag 35):

$$Mf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{Q(x,r)}\int_{Q(x,r)}|f(y)|\,dy$$

on $Q(x,r)$ és el cub obert de centre x i costats 2r. Per la demostració del Teorema ens interessa la següent propietat de l'operador maximal de Hardy-Littlewood:

per a tota $f \in L^1_{loc}(R^n)$, i per a tota $\lambda < 0$, tenim,

$|\{x \in R^n,\ Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{c_n}{\lambda} \|f\|_1$, on c_n és una constant que no depèn de f.

Per a tot $\lambda > 0$ definim:

$$P_\lambda = \{x \in R^n,\ \limsup_{r \to \infty} |\frac{1}{r^n} \int_{A(x,r)} |f(x')-f(x)|dx'| > \lambda\}.$$

Demostrarem que P_λ és de mesura zero. En efecte, per a tot $\varepsilon > 0$, prenem una funció contínua g tal que $\|h\|_1 < \varepsilon$ on $h=f-g$.

Aleshores: $\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{A(x,r)} g(y)dy = g(x)$ degut a la continuïtat de g. Per tant,

$$P_\lambda = \{x \in R^n,\ \lim\sup_{r \to 0} |\frac{1}{r^n} \int_{A(x,r)} (h(y)-h(x))dy| > \lambda\} \subset$$

$$\subset \{x\ R^n,\ \lim\sup_{r \to 0} |\frac{1}{r^n} \int_{A(x,r)} h(y)dy| > \frac{\lambda}{2} \cup \{x\ R^n;\ |h(x)| > \frac{\lambda}{2}\} =$$

$$= P^1_\lambda \cup P^2_\lambda;$$

$$\lim\sup_{r \to 0} \frac{1}{r^n} |\int_{A(x,r)} h(y)dy| < \lim\sup_{r \to 0} \frac{1}{rn} \int_{A(x,r)} |h(y)|dy \leqslant$$

$$\leqslant \lim\sup_{r \to 0} \frac{2^n}{|Q(x,r)|} \int_{|Q(x,r)|} |h(y)|dy \leqslant 2^n Mh(x).$$

Això ens permet calcular la mesura exterior de P^1_λ ,

$$|P^1_\lambda|_e \leqslant \{x;\ 2^n Mh(x) > \frac{\lambda}{2}\} < \frac{2^{n+1}}{\lambda} c_n \|h\|_1 < \frac{2^{n+1}}{\lambda} c_n\ \varepsilon$$

per altra banda: $|P^2_\lambda| = \{x, |h(y)| > \frac{\lambda}{2}\} \leqslant \frac{2\|h\|_1}{\lambda} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\lambda}$.

Per ser $\varepsilon > 0$ arbitrari, $|P_\lambda| = 0$.

Teorema(1.2.5)

Sigui L ($\Omega,\mathcal{F}$,P) separable. Sigui $\{\phi_z, z\ R^2_+\}$ un procés de la classe $\mathcal{L}^2_W$ i $\{\psi(z,z'), z,z'\ R^2_+\}$ un procés de la classe $\mathcal{L}^2_{WW}$.

Aleshores:

a) $\forall z \in R^2_+/N \quad (\mu(N)=0)$

$$\lim_{h\to 0} E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta^{hh}_z)}\int_{\Delta^{hh}_z}\phi_{z'}dW_{z'} - \phi_z\right|^p\right]=0$$

per tot $p\in(0,2/3)$.

b) $\forall (z,z')\in A/\{((z,z');z=z')UN\} \quad (\mu(N)=0)$

$$\lim_{h\to 0} E\left[\left|\frac{\int_{\Delta^{hh}_z}\int_{\Delta^{hh}_{z'}}\psi(\xi,\xi)dW_\xi dW_{\xi'}}{W(\Delta^{hh}_z)\,W(\Delta^{hh}_{z'})} - \psi(z,z')\right|^p\right]=0$$

per a tot $p\in(0,2/3)$.

Demstració:

a) Procedim igual que en el Teorema(1.2.3). Per a tot punt $z\in R^2_+$

$$E\left[\left|\frac{1}{W(\Delta^{hh}_z)}\int_{\Delta^{hh}_z}\phi_{z'}dW_{z'} - \phi_z\right|^p\right] \leq$$

$$\leq E\left[\left|\frac{1}{W_{11}}\right|^{pp'}\right]^{1/p'}\left|\frac{1}{h^2}\int_{\Delta^{hh}_z}E\left[\left|\phi_{z'}-\phi_z\right|^2\right]dz'\right|^{1/q'} \quad (1.11).$$

Com sempre p'i q' són tals que $pq'=2$.

Per a $p\in(0,2/3)$, $pp'<1$; per tant $E\left[\left|\frac{1}{W_{11}}\right|^{pp'}\right]<\infty$.

Només ens cal demostrar que el segon factor de la dreta de (1.11) convergeix a zero.

Sigui $Q=\{\gamma_i\}_{i\in I}$ el conjunt numerable i dens d'elements de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Per a cada $\gamma_i\in Q$, tenim:

$$\frac{1}{h^2}\int_{\Delta_z^{hh}} E\,[|\phi_{z'}-\phi_z|^2]\,dz' \leq 2\,\frac{1}{h^2}\int_{\Delta_z^{hh}} E\,[|\phi_{z'}-\gamma_i|^2]\,dz' + $$

$$+2E\,[|\gamma_i-\phi_z|^2]\;.$$

Definim la funció $f_{\gamma_i}(z):R_+\longrightarrow R,\ f_{\gamma_i}(z)=E\,[|\phi_z-\gamma_i|^2]$.

$f_{\gamma_i}\in \mathcal{L}^1_{loc}(R^2)$ (per a tot $x\in R^2_+$, $\int_{R_x} E\,[|\phi_{z'}-\gamma_i|^2]\,dz' \leq$

$\leq 2E\,[|\gamma_i|^2]\,.\,|R_x| + 2\int_{R_x} E\,[|\phi_z|^2] < \infty$).

Pel lema (1.2.4) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_{\Delta_z^{hh}} f_{\gamma_i}(z')dz' = f_{\gamma_i}(z) =$

$E\,[|\phi_z-\gamma_i|^2]$ per a tot $z\in R^2_+/N_i$ (on $\mu(N_i)=0$).

Sigui $N=\bigcup_{i\in I} N_i$, evidentment $\mu(N)=0$.

Si $z\in R^2_+/N$ tenim:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_{\Delta_z^{hh}} E\,[|\phi_{z'}-\phi_z|^2]\,dz' < 4E\,[|\gamma_i-\phi_z|^2] \qquad \forall\gamma_i\in Q.$$

Per ser Q un conjunt dens en $L^2(\Omega,\ ,P)$, $\varepsilon>0$ existeix un $\gamma_i\in Q$ tal que $E[|\gamma_i-\phi_z|^2] < \frac{\varepsilon}{4}$.

Per tant: $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_{\Delta_z^{hh}} E\,[|\phi_{z'}-\phi_z|^2]\,dz' < \varepsilon \quad \forall\varepsilon>0;$

del que resulta la convergència que voliem.

b) Igual que en a) només cal demostrar que

$$\frac{1}{h^4}\int_{\Delta_z^{hh}}\int_{\Delta_{z'}^{hh}} E[|\psi(z,z')-\psi(\xi,\xi')|^2]\,dW_\xi dW_{\xi'} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\;.$$

Fent servir el conjunt Q numerable i dens de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$,

tenim, $\frac{1}{h^4}\int_{\Delta_z^{hh}}\int_{\Delta_{z'}^{hh}} E\,|\psi(z,z')-\psi(\xi,\xi')|^2]\,dW_\xi\,dW_{\xi'} \leq$

$\leq 4E\,[|\psi(z,z')-\gamma_i|^2]$.

Per a tot $(z,z')\in A/N$ ($\mu(N)=0$) en virtut del Lema (1.2.4). Fent $E[|\psi(z,z')-\gamma_i|^2]<\varepsilon$ per a un γ_i convenient obtenim el que voliem $\square$.

II LLEI DE PROBABILITAT DE LA INTEGRAL DOBLE RESPECTE DOS MOVIMENTS BROWNIANS INDEPENDENTS

II.1 INTRODUCCIO´

Aquest capítol pren com a referència el treball de D.Nualart en [28] on estudia la distribució del procés

$$J_{st}= \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} I_{\{z \bar{\wedge} z'\}} \, dW(z)dW(z')$$

El nostre objectiu és obtenir resultats similars per al procés

$$P_{st}= \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} I_{\{z \bar{\wedge} z'\}} \, dW(z)dW(z')$$

on W_1 i W_2 són dos moviments brownians a dos paràmetres independents.

El métode emprat en [28] per a calcular la funció característica de J_{st} no ens serveix per a obtenir la de P_{st}, aquesta resultarà d'aproximar la integral estocàstica per sumes de Riemman.

Per l'estudi dels moments de P_{st} seguim la pauta donada en [28] , arribant a una relació entre els moments de la variable P_{11} similar a la obtinguda en [28] per a J_{11}.

Finalment , les aproximacions de la integral P_{11} permeten construir una martingala triangular que compleix la condició de de Lindegerg i tal que les seves sumes parcials convergeixen cap a una variable amb funció característica del tipus $E[\exp\{-\frac{t^2}{2}\eta\}]$ on η no és el límit de les variàncies condicionals (tal com estableix el Teorema Central del Límit) donat que aquestes només convergeixen en llei.

Aquest contraexemple és de naturalesa diferent a l'exposat en [28] on les sumes parcials de la martingala triangular convergeixen cap a una variable no simètrica.

II.2 CÀLCUL DE LA FUNCIÓ CARACTERÍSTICA

Si W_t és un procés de moviment brownià ordinari, la llei de la integral estocàstica $\int_T W_t dW_t$ $(T=[0,1])$ s'obté directament de la fórmula de Itô per a la funció $F(x)=x^2$:

$$\int_T W_t dW_t = \tfrac{1}{2}(W_1 - 1).$$

Tanmateix, si W_1 i W_2 són dos processos de Wiener independents, la fórmula de Itô per al producte:

$$W_1(1)W_2(1) = \int_T W_1(t)dW_2(t) + \int_T W_2(t)dW_1(t),$$

no permet deduir de forma directa la llei de la integral estocàstica $\int_T W_1(t)dW_2(t)$.

R.Berthet en [5], a fi d'obtenir una llei del logaritme iterat per als processos

$$\left(\alpha\int_T W_1(t)dW_2(t)\ ,\ \beta\int_T W_2(t)dW_1(t)\right)_{t\in T}\ ,\quad \alpha \text{ i } \beta \in R,$$

fa un estudi de la llei de la variable

$$Z=\alpha\int_T W_1(t)dW_2(t) + \beta\int_T W_2(t)dW_1(t),$$

obtenint el resultat següent:

$$E[e^{itZ}] = \begin{cases} \left[ch^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}t\right) + \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} sh^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}t\right)\right]^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \alpha\neq\beta \\ [1+\alpha^2t^2]^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \alpha=\beta \end{cases}$$

D'on resulta que la llei de $\int_T W_1(t)dW_2(t)$ té per funció característica $\phi(t)=[ch^2(\tfrac{1}{2}t) + sh^2(\tfrac{1}{2}t)]^{-\frac{1}{2}}$.

M.Yor [44] obté la llei de la variable Z mitjançant la fórmula de Paul Lévy [21] :

$$\forall b\in R-\{0\},\quad E\left[\exp i\{b\int_T (W_1 dW_2 + W_2 dW_1)\} / W_1=x,\ W_2=y\right] =$$

$$= \frac{b}{\mathrm{sh}\, b}\exp \frac{x^2+y^2}{2}[1-b\coth b] .$$

Si $\{W_z, z\in R_+^2\}$ és un procés de moviment brownià a dos paràmetres, la distribució de la variable $\int_{T^2} W(z)dW(z)$, que per raons de simetria és la mateixa que la de $\int_{T^2}\int_{T^2} I_{\{z\curlywedge z'\}} dW_z dW_{z'}$, té per funció característica

$$\phi(t) = e^{-it/4}\left[\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{it}{(2k-1)\pi}\right]^{-1}\left[1-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\tan g\frac{it}{(2k-1)\pi}\right]^{-1/2},$$

segons l'estudi que D.Nualart fa d'aquesta integral en [28]. Aquest resultat s'obté a partir de la relació de la funció característica de la integral doble de Itô, $I(f)$, per a qualsevol f de $L^2(T^2 x T^2)$, amb els valors propis de l'operador K de $L^2(T^2)$ determinat pel nucli simètric $\tilde{f}(z,z') = \frac{1}{2}(f(z,z')+f(z',z))$.

Si $W_1(z)$ i $W_2(z)$ són dos processos de moviment brownià indexats en R_+^2, la fórmula de Itô per al producte ens diu:

$$W_1(z)W_2(z) = \int_{R_z} W_1(z')dW_2(z') + \int_{R_z} W_2(z')dW_1(z') +$$
$$+ \int_{R_z}\int_{R_z} I_{\{z'\curlywedge z''\}} dW_1(z')dW_2(z'') +$$
$$+ \int_{R_z}\int_{R_z} I_{\{z'\curlywedge z''\}} dW_2(z')dW_1(z'') \stackrel{def}{=} P_z+M_z+Z_z+L_z \quad (2.1)$$

De [28] podem deduir directament la funció característica de $P_{11}+M_{11}$ i de $Z_{11}-M_{11}$, expressant aquestes sumes com a diferència de dues integrals independents del tipus $\int_{T^2} W(z)dW(z)$.

En efecte, $\{ \frac{W_1(z) + W_2(z)}{\sqrt{2}} \}_{z\in R^2_+}$ i $\{ \frac{W_1(z) - W_2(z)}{\sqrt{2}} \}_{z\in R^2_+}$ són dos moviments brownians bidimensionals independents. Posem,

$$\int_{T^2} W_1(z)dW_2(z) + \int_{T^2} W_2(z)dW_1(z) =$$

$$= \int_{T^2} \frac{W_1(z)+W_2(z)}{\sqrt{2}} d(\frac{W_1(z)+W_2(z)}{\sqrt{2}}) + \int_{T^2} \frac{W_1(z)-W_2(z)}{\sqrt{2}} d(\frac{W_1(z)-W_2(z)}{\sqrt{2}})$$

i $$\int_{T^2}\int_{T^2} I_{\{z\bar{\wedge}z'\}} dW_1(z)dW_2(z) + \int_{T^2}\int_{T^2} I_{\{z\bar{\wedge}z'\}} dW_2(z)dW_1(z) =$$

$$= \int_{T^2}\int_{T^2} I_{\{z\bar{\wedge}z'\}} d(\frac{W_1(z)+W_2(z)}{\sqrt{2}})\, d(\frac{W_1(z)+W_2(z')}{\sqrt{2}}) +$$

$$+ \int_{T^2}\int_{T^2} I_{\{z\bar{\wedge}z'\}} d(\frac{W_1(z)-W_2(z)}{\sqrt{2}})\, d(\frac{W_1(z)-W_2(z)}{\sqrt{2}}).$$

Per tant la funció característica de $P_{11}+M_{11}$ i de $Z_{11}+L_{11}$ és la funció:

$$\phi(t) = (\prod_{k=1}^{\infty} \cosh \frac{t}{(2k-1)\pi})^{-1} (1 - 16(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \tanh \frac{t}{(2k-1)\pi}))^{-\frac{1}{2}}.$$

L'objecte d'aquest capítol és estudiar la llei de cada un dels sumands de (2.1). N'hi ha prou en trobar la distribució de P_{11}, com ens demostra el següent resultat:

Proposició (2.2.1)

Per a tot $z=(s,t)\in T^2$, les variables P_{st}, stP_{11}, Z_{st}, stZ_{11}, L_{st}, stL_{11}, M_{st} i stM_{11}, segueixen la mateixa llei de probabilitat.

Demostració:

Es evident que P_{st} i L_{st} són igualment distribuïdes, el mateix podem dir de Z_{st} i M_{st}.

Si $\{W_z, z\in T^2\}$ és un moviment brownià bidimensional, el procés $\{\sqrt{ab}W(\frac{s}{a}, \frac{t}{b}), (s,t)\in T^2\}$ és també un proces de Wiener,

per tant, només cal demostrar que les variables aleatòries Z_{11} i P_{11} són igualment distribuïdes.

Considerem els conjunts $\Delta_{ij} = (i2^{-n},(i+1)2^{-n}]x(j2^{-n},(j+1)2^{-n}]$ per a $0\leq i,j\leq 2^n-1$ i $n\geq 1$. Definim $W(\Delta_{ij}) = W((i+1)2^{-n},(j+1)2^{-n}) - W((i+1)2^{-n},j2^{-n}) - W(i2^{-n},(j+1)2^{-n}) + W(i2^{-n},j2^{-n})$; les variables P_{11} i Z_{11} poden ésser considerades com a límit en $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ de les sumes $\sum_{\substack{i<i'\\ j<j'}} W_2(\Delta_{ij})W_1(\Delta_{i'j'})$ i $\sum_{\substack{i<i'\\ j<j'}} W_1(\Delta_{ij})W_2(\Delta_{i'j'})$

respectivament [40] , d'on resulta la proposició tenint en compte que $\{W_1(\Delta_{ij}), W_2(\Delta_{ij}), 0<i,j<2^{-n}\}$ són variables aleatòries independents i igualment distribuïdes $\square$.

La proposició (2.2.1) dóna un resultat anàlag a l'obtingut per D.Nualat en [28] , on es demostra que les integrals $\int_{R_{st}} W(z)dW(z)$, $st\int_{T^2} W(z)dW(z)$, $\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} I_{\{z\bar{\wedge}z'\}} dW(z)dW(z')$ i $st\int_{T^2}\int_{T^2} I_{\{z\bar{\wedge}z'\}} dW(z)dW(z')$, són variables igualment distribuïdes. Per a estudiar la llei de la variable P_{11} necessitem de les proposicions següents:

<u>Proposició (2.2.2)</u>

Les funcions $\{2\cos(2k-1)\frac{\pi x}{2}\}_{k=1}^{\infty}$ formen una base ortonormal de l'espai $L^2(T)$.

Demostració:

Per a tot $k,l \geq 1$, $k \neq l$ les funcions $\sqrt{2}\cos(2k-1)\frac{\pi x}{2}$ i $\sqrt{2}\cos(2l-1)\frac{\pi x}{2}$ són ortonormals. En efecte:

$$< \sqrt{2}\cos(2k-1)\frac{\pi x}{2}, \sqrt{2}\cos(2l-1)\frac{\pi x}{2} > = 2\int_0^1 \cos(2k-1)\frac{\pi x}{2}\cos(2l-1)\frac{\pi x}{2}dx =$$

$$= \int_0^1 \cos(2k-2l)\frac{\pi x}{2}dx + \int_0^1 \cos(2k+2l-2)\frac{\pi x}{2}dx = \delta_{kl}.$$

És conegut que $\{f_k = 2\cos(2k-1)\pi x, \bar{f}_k = 2\sin(2k-1)\pi x\}_{k \geq 1}$ és una base ortonormal de l'espai $L^2(T)$. Sigui $\phi \in L^2(T)$ tal que $\forall k > 1$, $\int_T \phi(x)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}dx = 0$.

Definim, $\psi(x) = \phi(2x)$ $0 \leq x < \frac{1}{2}$ i $\psi(x) = -\phi(2-2x)$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, aleshores

$$\int_0^1 \psi^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \phi^2(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi^2(2-2x)dx = \int_0^1 \phi^2(x)dx < \infty,$$

per tant $\psi \in L^2(T)$.

També, $\int_0^1 \phi(x)\cos\frac{(2k-1)}{2}\pi x dx =$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \psi(x)\cos(2k-1)\pi x dx = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(x)\cos(2k-1)\pi x dx.$$ Per tant,

$\int_0^1 \psi(x)\cos(2k-1)\pi x dx = 0$; i per simetria

$\int_0^1 \psi(x)\sin(2k-1)\pi x\, dx = 0$. Aleshores $\Psi(x) = 0$ q.s. i $\Phi(x) = 0$ q.s. $\square$.

<u>Proposició (2.2.3)</u>

$\{\sqrt{2}\cos(2k-1)\frac{\pi x}{2}\}_{k=1}^{\infty}$ és la base ortonormal de funcions pròpies de l'operador de Hilbert-Schmidt de l'espai $L^2(T)$ que té per nucli la funció de $L^2(T)$, $f(x,x') = (1 - x \vee x')$. A més, la sèrie de funcions

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} \cos(2k-1)\frac{\pi x}{2} \cos(2k-1)\frac{\pi x'}{2}$$

convergeix cap a $f(x,x')$ uniformement en$[0,1]^2$.

Demostració:

Suposem que $\phi \in L^2(T)$ és una funció pròpia de valor propi λ de l'operador de Hilbert-Schmidt que té per nucli la funció f; és a dir, $\int_0^1 \phi(x)(1 - x \vee x')dx = \lambda\phi(x')$.

$$\int_0^1 \phi(x)dx - x'\int_0^{x'} \phi(x)dx - \int_0^1 x\,\phi(x)dx = \lambda\phi(x').$$

Derivem dues vegades respecte x',

$$-\int_0^{x'} \phi(x)dx - x'\phi(x') + x'\phi(x') = \lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x'}(x') \quad ,$$

$$-\phi(x') = \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x'}(x') \quad (2.2).$$

Les solucions d'aquesta equació diferencial són de la forma $A\sin\frac{x}{\sqrt{\lambda}} + B\cos\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$. Tenim,

$$\int_0^1 \sin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}(1 - x \vee x')dx = \sqrt{\lambda} - x'\sqrt{\lambda} - \lambda\sin\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \lambda\sin\frac{x'}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\int_0^1 \cos\frac{x}{\sqrt{\lambda}}(1 - x \vee x')dx = \lambda\cos\frac{x'}{\sqrt{\lambda}} - \lambda\cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

si $\lambda = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}$ per a $k \geq 1$, $\int_0^1 \cos\frac{x}{\sqrt{\lambda}}(1 - x \vee x') = \lambda\cos\frac{x'}{\sqrt{\lambda}}$.

Per la proposició (2.2.2) $\{\sqrt{2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\}_{k \geq 1}$ és una base ortonormal de funcions pròpies amb valors propis $\{ \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} \}$ de l'espai $L^2(T)$. $\{ 2\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} . \cos\frac{(2j-1)\pi x'}{2} \}_{k,j \geq 1}$ és una base ortonormal de l'espai $L^2(T^2)$, i la descomposició de la funció $f(x,x') = (1 - x \vee x')$ respecte aquesta base és la següent,

$$< f(x,x') \ , \ 2\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \cos\frac{(2j-1)\pi x'}{2} > =$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} 2\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \cos\frac{(2j-1)\pi x}{2} dx = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} \delta_{kj} ,$$

$$f(x,x') = \sum_{k \geq 1} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \cos\frac{(2k-1)\pi x'}{2} .$$

Aquesta sèrie de funcions convergeix uniformement en $[0,1]$, ja que

$$\sum_{k \geq 1} \left\| \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} 2\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \cos\frac{(2k-1)\pi x'}{2} \right\|_\infty =$$

$$= \sum_{k \geq 1} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} < \infty \quad \square.$$

La variable P_{11} és el límit en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la successió $\{T_n = \sum_{k,l=1}^{n} W_1(\frac{k-1}{n}, \frac{l-1}{n}) W_2(\Delta_{kl})\}_{n \in N}$, on $W_2(\Delta_{kl}) = W_2(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) - W_2(\frac{k-1}{n}, \frac{l}{n}) - W_2(\frac{k}{n}, \frac{l-1}{n}) + W_2(\frac{k-1}{n}, \frac{l-1}{n})$ (vegeu [9]).

Aquest fet ens servirà per a poder donar la funció característica de P_{11}.

Teorema (2.2.4)

La funció característica de P_{11} és:

$$\phi(t) = E[e^{itP_{11}}] = [\prod_{k \geq 1} \cosh(\frac{2t}{(2k-1)\pi})]^{-\frac{1}{2}}.$$

Demostració:

$$E[e^{itT_n}] = E[\exp\{it(\sum_{k,l=1}^{n} W_1(\frac{k-1}{n}, \frac{l-1}{n}) W_2(\Delta_{kl}))\}] =$$

$$= E\left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2n^2}\sum_{k,l=1}^{n} W_1\left(\frac{k-1}{n},\frac{l-1}{n}\right)^2\right\}\right] =$$

$$= E\left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2n^2}\sum_{k,l=1}^{n-1} W_1\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)^2\right\}\right] .$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n-1} W_1\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n-1}\left(\sum_{k'=1}^{k}\sum_{l'=1}^{l} W_1(\Delta_{k'l'})\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n-1}\sum_{k',l'=1}^{n-1} W_1(\Delta_{kl})W_1(\Delta_{k'l'})(n-k\vee k')(n-l\vee l') =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n-1}\sum_{k',l'=1}^{n-1} W_1(\Delta_{kl})W_1(\Delta_{k'l'})f\left(\frac{k}{n},\frac{k'}{n}\right)f\left(\frac{l}{n},\frac{l'}{n}\right),$$

segons la Proposició (2.2.3)

$$= \sum_{k,l,k',l'=1}^{n-1}\Big[W_1(\Delta_{kl})W_1(\Delta_{k'l'}) \sum_{i,j>1}\frac{64}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4}$$

$$\cdot\cos(2i-1)\frac{\pi k}{2n}\cdot\cos(2i-1)\frac{\pi k'}{2n}\cdot\cos(2j-1)\frac{l\pi}{2n}\cdot\cos(2j-1)\frac{\pi l'}{2n}\Big] =$$

$$= \sum_{i,j\ 1}\frac{16}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4}\left(2\sum_{k,l=1}^{n-1} W_1(\Delta_{kl})\cos(2i-1)\frac{\pi k}{2n}\cos(2j-1)\frac{\pi l}{2n}\right)^2$$

$$= \sum_{i,j\ 1} a_{ij}(X^n_{ij})^2 \quad , \quad \text{on} \quad a_{ij}=\frac{16}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4} \qquad i$$

$$X^n_{ij} = 2\sum_{k,l=1}^{n} W_1(\Delta_{kl})\cos(2i-1)\frac{\pi k}{2n}\cos(2j-1)\frac{\pi l}{2n} =$$

$$= 2\sum_{k,l=1}^{n} W_1(\Delta_{kl})\cos(2i-1)\frac{\pi k}{2n}\cos(2j-1)\frac{\pi l}{2n} \quad ,$$

perquè $\cos(2i-1)\frac{\pi}{2}=0$.

Sabem que X_{ij}^n convergeix en L^2 cap a

$$Y_{ij} = \int_{T^2} 2\cos(2i-1)\frac{\pi x}{2}\cos(2j-1)\frac{\pi y}{2}dW_1(x,y) \quad [9] \; .$$

La successió $\frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n-1} W_1(\frac{k}{n},\frac{l}{n})^2$ convergeix en $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$

cap a $\sum_{i,j\geq 1} a_{ij}Y_{ij}^2$. En efecte, $\forall\varepsilon>0$, per ser $\sum_{i,j\geq 1} a_{ij}<\infty$

(posem $\sum_{i,j\geq 1} a_{ij} = K$) existeix un $s\in N$, tal que

$$\sum_{\substack{i>s\\ j\geq 1}} a_{ij} + \sum_{\substack{i\geq 1\\ j>s}} a_{ij} < \varepsilon/20.$$

També $E[\,|(X_{ij}^n)^2-Y_{ij}^2|\,]\leq E[(X_{ij}^n)^2] + E[Y_{ij}^2]< 5$,

perquè la variable aleatòria Y_{ij} segueix una llei $N(0,1)$ com veurem més endevant, i les variables X_{ij}^n, $\forall n\, N$ i $\forall i,j\geq 1$, tenen el moment de segon ordre afitat per 4,

$$E[(X_{ij}^n)^2] = 4E[(\sum_{k,l=1}^{n-1} W_1(\Delta_{kl})\cos(2i-1)\frac{\pi k}{2n}\cos(2j-1)\frac{\pi l}{2n})^2] =$$

$$= 4\sum_{k,l=1}^{n-1} E[(W_1(\Delta_{kl}))^2]\cos^2(2i-1)\frac{\pi k}{2n}\cos^2(2j-1)\frac{\pi l}{2n} <$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n-1} 4\cos^2(2i-1)\frac{\pi k}{2n}\cos^2(2j-1)\frac{\pi l}{2n} \leq 4\frac{(n-1)^2}{n^2} < 4.$$

Aleshores, $E[\,|\sum_{i,j\geq 1} a_{ij}(X_{ij}^n)^2 - \sum_{i,j\geq 1} a_{ij}Y_{ij}^2|\,]\leq$

$$\leq 2E[\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}|(X_{ij}^n)^2 - Y_{ij}^2|\,] +$$

$$+ 2E\left[\sum_{\substack{i>s\\ j\geq 1}} a_{ij} |(X^n_{ij})^2 - Y^2_{ij}| + \sum_{\substack{i\geq 1\\ j>s}} a_{ij} |(X^n_{ij})^2 - Y^2_{ij}| \right] <$$

$$< 2 \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} E\left[|(X^n_{ij})^2 - Y^2_{ij}| \right] + 10 \left(\sum_{\substack{i>s\\ j\geq 1}} a_{ij} + \sum_{\substack{i\geq 1\\ j>s}} a_{ij} \right) \quad (2.3).$$

Per a tot $\varepsilon>0$, existeix un $n_0 \in N$ tal que si $n \geq n_0$, aleshores $E[|(X^n_{ij})^2 - Y^2_{ij}|] < \frac{\varepsilon}{4K}$, $\forall i,j \in \{1,2,\ldots s\}$, perquè

$$\lim_{n\to\infty} E[|X^n_{ij} - Y_{ij}|^2] = 0 \quad \forall i,j > 1, \quad \text{i a més}$$

$$E[|(X^n_{ij})^2 - Y^2_{ij}|] \leq E[(X^n_{ij} - Y_{ij})^2]^{1/2} E[|X^n_{ij} + Y_{ij}|^2]^{1/2} <$$

$$< 3E[(X^n_{ij} - Y_{ij})^2]^{1/2}.$$

Substituïnt en (2.3) tenim:

$$E\left[\left| \sum_{i,j\geq 1} a_{ij}(X^n_{ij})^2 - \sum_{i,j\geq 1} a_{ij} Y^2_{ij} \right|\right] < 2K\frac{\varepsilon}{4K} + \frac{10}{20}\varepsilon \leq \varepsilon,$$

si $n \geq n_0$. Aleshores,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left| \sum_{i,j\geq 1} a_{ij}(X^n_{ij})^2 - \sum_{i,j\geq 1} a_{ij} Y^2_{ij} \right|\right] = 0.$$

Gràcies que la convergència en l'espai $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ implica la convergència en llei, per a tota funció contínua i afitada $g: R \longrightarrow R$ tenim:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[g\left(\frac{1}{n^2} \sum_{k,l=1}^{n-1} W_1\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right)^2\right)\right] = E\left[g\left(\sum_{i,j\geq 1} a_{ij} Y^2_{ij}\right)\right].$$

Prenem $g(x) = (\exp\{-\frac{t^2}{2}x\}) \wedge 1$, $\forall x \in R$. Ens queda:

$$\lim_{n\to\infty} E[e^{itT_n}] = \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2n} \sum_{k,l=1}^{n-1} W_1\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right)^2\right\}\right] =$$

$$= E\left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2n}\sum_{i,j>1} a_{ij} Y_{ij}^2\right\}\right] \quad (2.4)$$

$\{ Y_{ij} = \int_{T^2} 2\cos(2i-1)\frac{\pi x}{2}\cos(2j-1)\frac{\pi y}{2}\, dW_{xy} \}_{i,j>1}$ és una successió de variables aleatòries gaussianes i centrades, per ser $Y_{ij} \in H$, $\forall i,j \geq 1$, on H és el subespai tancat de l'espai de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generat per l'envoltura lineal del moviment brownià $\{W_1(z)\}_{z \in R_+^2}$; a més les variables $\{ Y_{ij} \}_{i,j \geq 1}$ són independents i reduïdes, ja que

$$E[Y_{ij} Y_{i'j'}] =$$

$$= \int_{T^2}\int_{T^2} 4\cos(2i-1)\frac{\pi x}{2}\cos(2j-1)\frac{\pi y}{2}\cos(2i'-1)\frac{\pi x'}{2}\cos(2j'-1)\frac{\pi y'}{2}\, dx\,dx'\,dy\,dy'$$

$$= \delta_{ii'} \cdot \delta_{jj'}$$

(recordem que $\{2\cos(2i-1)\frac{\pi x}{2}\cos(2j-1)\frac{\pi y}{2}\}_{i,j \geq 1}$ és una base ortonormal de l'espai $L^2(T^2)$).

Tenim, $$\lim_{n\to\infty} E[e^{itT_n}] = \lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\sum_{i,j\geq 1} a_{ij} Y_{ij}^2\right\}\right] =$$

$$= \prod_{i,j\geq 1} E\left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2} a_{ij} Y_{ij}^2\right\}\right] =$$

$$= \prod_{i,j\geq 1} (1 + t^2 a_{ij})^{-1/2} =$$

$$= \prod_{i,j\geq 1}\left(1 + t^2\frac{16}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left[\prod_{i\geq 1}\cosh\left(\frac{2t}{(2i-1)\pi}\right)\right]^{-1/2} \quad \text{(Vegeu [14])} \ \square.$$

Corol .lari (2.2.5)

La integral estocàstica $P_{11} = \int_{T^2} W_1 dW_2$ té la mateixa distribució que la variable:

$$S = \sum_{i,j \geq 1} \frac{4}{(2i-1)(2j-1)\pi^2} \eta_{ij} \xi_{ij} \;;$$

on $\{\eta_{ij}\}_{ij \geq 1}$ i $\{\xi_{ij}\}_{ij \geq 1}$ són variables aleatòries independents i igualment distribuïdes amb llei $N(0,1)$.

Demostració:

$$E[e^{itS}] = E[\exp\{it(\sum_{i,j \geq 1} \frac{4}{(2i-1)(2j-1)\pi^2} \eta_{ij} \xi_{ij})\}] =$$

$$= \prod_{i,j \geq 1} E[\exp\{-\frac{t^2}{2} \frac{4}{(2i-1)^2 (2j-1)^2 \pi^4} \xi_{ij}^2\}] =$$

$$= \prod_{i,j \geq 1} (1 + \frac{16t^2}{(2i-1)^2 (2j-1)^2 \pi^4})^{-1/2} =$$

$$= \prod_{i \geq 1} [\cosh(\frac{2t}{(2i-1)\pi})]^{-1/2} \quad \square .$$

II.3 MOMENTS I CUMULANTS

El Corolari (2.2.5) ens permet calcular fàcilment els moments exponencials de P_{11}.

<u>Lema (2.3.1)</u>

Per a tot $t \in R$, $E[e^{tP_{11}}] = \prod_{j \geq 1} \cos^{-1/2}\left(\frac{2t}{(2j-1)\pi}\right)$

si $|t| < \pi^2/4$, i $E[e^{tP_{11}}] = \infty$ si $|t| > \pi^2/4$.

Demostració:

$$E[e^{tP_{11}}] = E[e^{tS}] = \prod_{i,j \geq 1} E\left[\exp\left\{t\frac{4}{(2i-1)(2j-1)\pi^2}\eta_{ij}\xi_{ij}\right\}\right]$$

El producte de dues variables aleatòries independents normals centrades i reduïdes, pot expressar-se, excepte un factor escalar, com a diferència de dues variables aleatòries independents amb llei χ^2:

$$\eta_{ij}\xi_{ij} = \tfrac{1}{2}\left[(\eta_{ij} + \xi_{ij})^2/2 - (\eta_{ij} - \xi_{ij})^2/2\right].$$

Si X és una variable aleatòria amb llei χ^2, els seus moments exponencials són:

$E[e^{tX}] = (1-2t)^{-1/2}$ si $1-2t > 0$ i

$E[e^{tX}] = \infty$ si $1-2t \leq 0$.

En el nostre cas,

$$E\left[\exp\left\{\frac{4}{(2i-1)(2j-1)\pi^2}\eta_{ij}\xi_{ij}\right\}\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{4t}{(2i-1)(2j-1)\pi^2}\right)^{-1/2}\left(1 + \frac{4t}{(2i-1)(2j-1)\pi^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \left(1 - \frac{16t}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4}\right)^{-1/2} \quad \text{si } |t| < \frac{(2i-1)(2j-1)\pi^2}{4}$$

i $E[\exp\{\frac{4t}{(2i-1)(2j-1)\pi^2}\eta_{ij}\,\xi_{ij}\}] = \infty$ si $|t| \geq \frac{(2i-1)(2j-1)\pi^2}{4}$.

Per tant, $$E[e^{St}] = \prod_{j,k\geq 1} \left(1 - \frac{16t^2}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{j\geq 1} \cos^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2t}{(2j-1)\pi}\right) \quad \text{si } |t| < \frac{\pi^2}{4}$$

i $$E[e^{St}] = \infty \quad \text{si } |t| \geq \frac{\pi^2}{4} .$$

Per a calcular els moments de la variable P_{11} utilitzem el mateix mètode que fa servir D.Nualart en [28] per a trobar els moments de la integral $\int_{T^2} W_{xy}dW_{xy}$.

Sabem per [27] que si $\{U_t^n, t\in[0,1], n\geq 1\}$ i $\{\bar{U}_t^n, t\in[0,1], n\geq 1\}$ són dues successions de moviments brownians independents, les sumes $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} U_s^i \bar{U}_t^i$ convergeixen feblement cap a $W_1(s,t)$ en $\mathcal{C}([0,1]^2)$.

Recordem que $W_1(s,t).W_2(s,t) = P_{st} + Z_{st} + L_{st} + M_{st}$. Si prenem dues successions de processos de moviment brownià independents, i també independents de les dues successions anteriors, $\{V_t^n, t\in[0,1], n\geq 1\}$ i $\{\bar{V}_t^n, t\in[0,1], n\geq 1\}$, aleshores $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} U_n^i \bar{U}_t^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} V_s^j \bar{V}_t^j\right)$ convergeix feblement cap a $W_1(s,t)W_2(s,t)$, en $\mathcal{C}([0,1]^2)$. Calculem

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} U_s^i\bar{U}_t^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} V_s^j\bar{V}_t^j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} U_s^i\bar{U}_t^i V_s^j\bar{V}_t^j \qquad (2.4).$$

Aplicant la fórmula de Itô als productes $U_s^i V_s^j$, $\bar{U}_t^i \bar{V}_t^j$:

$$(2.4) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^s U^i dV^j + \int_0^s V^j dU^i \right)\left(\int_0^t \bar{U}^i d\bar{V}^j + \int_0^t \bar{V}^j d\bar{U}^i \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^s U^i dV^j \int_0^t \bar{U}^i d\bar{V}^j + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^s U^i dV^j \int_0^t \bar{V}^j d\bar{U}^i +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^s V^j dU^i \int_0^t \bar{U}^i d\bar{V}^j + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^s V^j dU^i \int_0^t \bar{V}^j d\bar{U}^i =$$

$$= S_{st}^n + T_{st}^n + \hat{T}_{st}^n + \hat{S}_{st}^n .$$

El següent Lema demostra que cadascun dels sumands S_{st}^n , T_{st}^n, $\hat{T}_{st}^n$ i $\hat{S}_{st}^n$ convergeix feblement cap a P_{st}, Z_{st}, L_{st}, M_{st} en $\mathcal{C}([0,1])$ respectivament. Per raons de simetria, només cal demostrar-ho per a T_{st}^n.

<u>Lema (2.3.2)</u>

La successió $T_{st}^n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^s U^i dV^j \int_0^t \bar{V}^j d\bar{U}^i$ convergeix feblement cap a $Z_{st} = \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} I_{\{z \bar{\wedge} z'\}} dW_1(z) dW_2(z')$.

Demostració:

Prenem $t_k^m = k2^{-m}$ per a tot $k=0,1,2,..,2^m$, i per a tot $m \geq 1$.

Definim:

$$T_{st}^{nm} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=0}^{2^m-1} U^i(t_h^m \wedge s) \left[V^j(t_{h+1}^m \wedge s) - V^j(t_h^m \wedge s) \right] \bar{V}^j(t_k^m \wedge t) \cdot$$

$$\cdot \left[\bar{U}^i(t_{k+1}^m \wedge t) - \bar{U}^i(t_k^m \wedge t) \right]$$

$$Z^m_{st} = \sum_{h,k=0}^{2^m-1} [W_2(t^m_{h+1}\wedge s,\ t^m_k \wedge t) - W_2(t^m_k\wedge s,\ t^m_k\wedge t)] \cdot$$
$$[W_1(t^m_h\wedge s,\ t^m_{k+1}\wedge t) - W_1(t^m_h\wedge s,\ t^m_k\wedge t)] \quad .$$

Sabem que $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^i_s \bar{U}^i_t\ ,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V^i_s \bar{V}^i_t\right)$ convergeix feblement cap a $(W_1(s,t), W_2(s,t))$. Composant amb la funció $g_m \in \mathcal{C}(T^4)$:

$$g_m(x,y) = \sum_{h,k=0}^{2^m-1} [x(t^m_h\wedge s,\ t^m_{k+1}\wedge t) - x(t^m_h\wedge s,\ t^m_k\wedge t)] \cdot$$
$$[y(t^m_{h+1}\wedge s,\ t^m_h\wedge t) - y(t^m_h\wedge s,\ t^m_k\wedge t)] \quad .$$

obtenim que T^{nm}_{st} convergeix en llei cap a la variable Z^m_{st} quan n tendeix a infinit.

Tenim també que $\sup_n E[\,|T^{nm}_{st} - T^n_{st}|\,] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, per a tot $(s,t)\in T^2$.

En efecte:
$$E[\,|T^{nm}_{11} - T^n_{11}|^2] =$$

$$= E\Big[\Big|\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h,k=0}^{2^m-1} U^i(t^m_h)\,[\bar{U}^i(t^m_{k+1}) - \bar{U}^i(t^m_k)]\,\bar{V}^j(t^m_k)\,[V^j(t^m_{h+1}) - V^j(t^m_h)] -$$
$$- \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 U^i dV^j \int_0^1 \bar{V}^j d\bar{U}^i\ \Big|^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} E\Big[\Big|\sum_{h,k=0}^{2^m-1} U^i(t^m_h)\,[\bar{U}^i(t^m_{k+1}) - \bar{U}^i(t^m_k)]\,\bar{V}^j(t^m_k)[V^j(t^m_{h+1}) - V^j(t^m_h)]$$
$$- \int_0^1 U^i dV^j \int_0^1 \bar{V}^j d\bar{U}^i\ \Big|^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\, n^2 E\Big[\sum_{h;k=0}^{2^m-1} U^i(t^m_h)^2 [\,\bar{U}^i(t^m_k) - \bar{U}^i(t^m_k)\,]^2\, \bar{V}^j(t^m_k)^2 [\,V^j(t^m_{h+1}) - V(t^m_h)\,]^2 +$$

$$+ \left(\int_0^1 U^i dV^j \int_0^1 \bar{V}^j d\bar{U}^i \right)^2 - 2 \sum_{h,k=0}^{2^m-1} U^i(t_h^m)[\bar{U}^i(t_{k+1}^m) - \bar{U}^i(t_k^m)]\, \bar{V}^j(t_k^m).$$

$$[V^j(t_{h+1}^m) - V^j(t_h^m)] \int_0^1 U^i dV^j \int_0^1 \bar{V}^j d\bar{U}^i \,] =$$

$$= \sum_{h,k=0}^{2^m-1} h2^{-m}2^{-m}k2^{-m}2^{-m} + (\tfrac{1}{2})^2 - 2 \sum_{h,k=0}^{2^m-1} E\left[\int_{t_h^m}^{t_{h+1}^m} U^i(t_h^m) dV^j \int_{t_h^m}^{t_{h+1}^m} U^i dV^j \right]$$

$$.E\left[\int_{t_k^m}^{t_{k+1}^m} \bar{V}^j(t_k^m) d\bar{U}^i \int_{t_k^m}^{t_{k+1}^m} \bar{V}^j d\bar{U}^i \right] .$$

Donat que $E\left[\int_{t_h^m}^{t_{h+1}^m} U^i(t_h^m) dV^j \int_{t_k^m}^{t_{k+1}^m} U^i dV^j \right] =$

$$= \int_{t_h^m}^{t_{h=1}^m} E[\, U^i(t_h^m) U^i(x) \,] dx = 2^{-2m} h,$$ ens queda:

$$E[|\, T_{11}^{nm} - T_{11}^{n} \,|^2] = \sum_{h,k=0}^{2^{-m}-1} hk2^{-4m} + \tfrac{1}{4} - 2 \sum_{h,k=0}^{2^{-m}-1} hk2^{-4m} =$$

$$= \tfrac{1}{4} - 2^{-4m} \frac{2^{2m}(2^m-1)^2}{4} = \tfrac{1}{4} - \frac{(1-2^{-m})^2}{4} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 .$$

Definim $A_{hk} = (0,h] \times (k, k+1]$, $B_{hk} = (h, h+1] \times (0, k]$ i

$$D_m = \bigcup_{k,h=0}^{2^{-m}-1} A_{hk} \times B_{hk}.$$

Z_{11}^m coincideix amb $\int_{T^2} \int_{T^2} I_{D_m}(z,z') dW_1(z) dW_2(z')$; a més

I_{D_m} convergeix en $L^2(T^2 \times T^2)$ cap a I_D on $D = \{(z,z') \in R_+^2 \times R_+^2 \,/\, z \bar{\wedge} z'\}$,

$$\int_{T^2} \int_{T^2} |I_{D_m}(z,z') - I_D(z,z')|^2 dz dz' \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{h,k=0}^{2^m-1} \int_{T^2}\int_{T^2} I_{C_{hk}}(z) I_{E_{hk}}(z')\,dz\,dz' = 2(2^m-1)^2 2^{-2m} 2^{-m} 2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

on $C_{hk} = (h\,,\,h+1]\times(k\,,\,k+1]$ i $E_{hk} = \left(\bigcup_{h=0}^{2^m-1} C_{hk}\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{2^m-1} C_{hk}\right)$

Això demostra que Z_{11}^m convergeix en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cap a Z_{11}, i per tant

$$E\left[\,|Z_{11}^m - Z_{11}|^2\right] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

T_{st}^{nm} i T_{st}^{n} són martingales respecte a la filtració $\mathcal{F}'_{st} = \sigma< U_{s'}^i, \bar{U}_{t'}^i, V_{s'}^i, \bar{V}_{t'}^i,\ s'\leqslant s,\ t'\leqslant t,\ i\in\{1,2,\dots,n\}>$; i els processos Z_{st}^m i Z_{st} són martingales respecte a la filtració $\mathcal{F}_{st} = \sigma< W_1(s',t')\,,\,W_2(s',t'),\ s'\leqslant s\,,\ t'\leqslant t >$. Per les desigualtats de Carioli-Doob per a martingales amb dos paràmetres, obtenim:

$$\sup_n E\left[\sup_{s,t} |T_{st}^{nm} - T_{st}^{n}|^2\right] \leqslant C \sup_n E\left[\,|T_{11}^{nm} - T_{11}^{n}|^2\right] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$$\text{i } E\left[\sup_{s,t} |Z_{st}^m - Z_{st}|^2\right] \leqslant C E\left[\,|Z_{11}^n - Z_{11}|^2\right] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

En el conjunt de totes les probabilitats sobre $\mathcal{C}(T^2)$, considerem la mètrica determinada per la distància:

$$d(\mu,\nu) = \|\mu-\nu\|_{BL^*} \quad \text{on} \quad \|\mu\|_{BL^*} = \sup\left\{ \left|\int f\,d\mu\right|,\ \|f\|_{BL} \leqslant 1\right\}$$

$$\text{i } \|f\|_{BL} = \sup_{x\in\mathcal{C}(T^2)} |f(x)| + \sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in\mathcal{C}(T^2)}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_\infty}.$$

Aquesta mètrica indueix la convergència feble [2] , i compleix: $d(\ L(X),L(Y)\ ) \leq E\ (\sup_{s,t} |X_{st}-Y_{st}|)$.

Aleshores:

$$d(L(T^n)\ ,\ L(Z)\ ) \leq d(\ L(T^n)\ ,\ L(T^{nm})\ )\ +\ d(\ L(T^{nm})\ ,\ L(Z^m)\ )\ +$$

$$+\ d(\ L(Z^n)\ ,\ L(Z)\ ) \leq$$

$$\leq \sup_n E\ [\sup_{s,t} |\ T^{nm}_{st}\ -\ T^n_{st}|\ ]\ +\ d(\ L(T^{nm})\ ,\ L(Z^m)\ )\ +$$

$$+\ E\ [\sup_{s,t} |\ Z^m_{st}\ -\ Z_{st}|\ ]\ .$$

Fent tendir n i m a infinit obtenim $\lim_{n\to\infty} d(\ L(T^n),L(Z)\ )=0$ □.

Siguin $\{\ Y^i_s\ ,\ s\in T,\ i\in N\ \}$ i $\{\ X^i_s,\ s\in T,\ i\in N\ \}$ dues successions de moviments brownians independents. Definim

$$\hat{S}^n_{st} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^s X^i dX^j \right) \left(\int_0^t Y^i dY^j \right).$$

D.Nualart demostra en [28] que $\hat{S}^n_{st}$ convergeix feblement cap a $K_{st} = \int_{R_{st}} W(z)dW(z)$, i això li permet d'obtenir la següent relació dels moments de la variable K_{11}:

$$E\ [K^p_{11}]\ =\ \sum_{k=1}^{p} \frac{(p-1)!}{2(p-k)!}\ \nu_k E\ [K_{11}^{m-p}]\ ,$$

on $\nu_k = E(\xi_{12}\ \xi_{23} \cdots \xi_{(k-1)k}\ \xi_{k1})$, $\xi_{ij} = \left(\int_0^1 X^i dX^j \right) \left(\int_0^1 Y^i dY^j \right)\ +$

$$+\left(\int_0^1 X^j dX^i \right) \left(\int_0^1 Y^j dY^i \right).$$

El mateix mètode ens permet calcular una expressió pels moments de la variable P_{11}.

Lema (2.3.3)

$$\text{Per a tot } p \geqslant 1,\ p \in N, \quad E[\, P_{11}^{2p} \,] = \frac{(2p)!}{p!\,2^{p}}\, m_p$$

$$\text{i } E\,[P_{11}^{2p-1}] = 0,$$

$$\text{on } m_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{(p-1)!}{(p-k)!}\, 2^{k-1}\, \mu_k\, m_{p-k} \qquad (m_0 = 1)\ ;$$

$$\mu_k = \int_{[0,1]^k} (x_1 \wedge x_2)(x_2 \wedge x_3)\dots(X_{k-1} \wedge x_k)(x_k \wedge x_1)\,dx_1 \dots dx_k .$$

Demostració:

Pel Lema (2.3.2) $S_{11}^{n} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^1 U^i dV^j \right)\left(\int_0^1 \bar{U}^i d\bar{V}^j \right)$

convergeix feblement cap a la distribució de Z_{11}, que és la mateixa que la de P_{11}. Calcularem els moments de la variable S_{11}^{n}:

$$E\,[(S_{11}^{n})^{p}] =$$

$$= \frac{1}{n^p} \sum_{i,j \in \{i,\dots,n\}^p} E\Big[\prod_{k=1}^{p} \int_0^1 U^{i_k}\, dV^{j_k} \Big]\, E\Big[\prod_{k=1}^{p} \int_0^1 \bar{U}^{i_k} d\bar{V}^{j_k} \Big] =$$

$$= \frac{1}{n^p} \sum_{i,j \in \{i,\dots,n\}^p} \Big(E\Big[\prod_{k=1}^{p} \int_0^1 U^{i_k} dV^{j_k} \Big] \Big)^2 \quad \text{on } i=(i_1,\dots,i_k),\ j=(j_1,\dots,j_k)$$

Si existeix un nombre $h \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\#\{\, k=1,\dots,p\ ;\ i_k = h \,\}$ o bé $\#\{\, k=1,\dots,p\ ;\ j_k = p \,\}$ és imparell,

aleshores $E\Big[\prod_{k=1}^{p} U^{i_k}\, dV^{j_k} \Big] = 0$. En efecte:

considerem les martingales $X_t^k = \int_0^t U_s^{i_k} dV_s^{j_k}$, respecte la filtració $\mathcal{F}_t = \sigma < U_s^{i_k}, V_s^{j_k}, s \leq t, k=1...p>$. Sigui $F: R^p \longrightarrow R$ el funcional $F(x_1,\dots,x_p) = \prod_1^p x_i$, $F \in \mathcal{C}_\infty(R^p)$. Apliquem Itô a $F(X^1,\dots,X^p)$:

$$F(X_1^1,\dots,X_1^p) = \sum_{h=1}^p \int_0^1 \prod_{\substack{k=1\\k\neq h}}^p X_s^k dX_s^h + \tfrac{1}{2} \sum_{h,m=1}^p \int_0^1 \prod_{\substack{k=1\\k\neq h,m}}^p X_s^k \, d<X^h,X^m>_s \qquad (2.5)$$

$$<X^h, X^m>_s = < \int_0^s U_x^{i_h} dV_x^{j_h} , \int_0^s U_x^{i_m} dV_x^{j_m} > =$$

$$= \int_0^s U_x^{i_h} U_x^{j_m} d<V_x^{j_h} , V_x^{j_m}> = \int_0^s U_x^{i_h} U_x^{j_m} dx \, \delta_{j_h j_m}.$$

El primer sumand de la dreta de (2.5) és una martingala nul.la a l'origen, per tant

$$E\left[\sum_{h=1}^p \int_0^1 \prod_{\substack{k=1\\k\neq h}}^p X_s^k dX_s^h \right] = 0.$$

Calculem $E\left[\prod_{k=1}^p \int_0^1 U^{i_k} dV^{j_k} \right]$:

$$E[F(X_1^1 \dots X_1^k)] = \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{h,m=1\\h\neq m}}^p \int_0^1 E\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq h,m}}^p X_{s_1}^k U_{s_1}^{i_h} U_{s_1}^{i_m} \right] \delta_{j_h j_m} ds_1 \qquad (2.6).$$

Tornem a aplicar la fórmula de Itô a $\prod_{\substack{k=1\\k\neq h,m}}^p X_{s_1}^k$, tenim:

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq h,m}}^p X_{s_1}^k = \sum_{\substack{h'=1\\h'\neq h,m}}^p \int_0^{s_1} \prod_{\substack{k=1\\k\neq h,h',m}}^p X_{s_2}^k dX_{s_2}^{h'} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{h',m'=1 \\ h'\neq m' \\ h',m'\neq h,m}}^{p} \int_0^{s_1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h,h',m,m'}}^{p} X_{s_2}^{k} \, U_{s_2}^{i_{h'}} U_{s_2}^{i_{m'}} \, \delta_{j_{h'},j_{m'}} \, ds_2$$

Per tant:

$$E\Big[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h,m}}^{p} X_{s_1}^{k} \, U_{s_1}^{i_h} U_{s_1}^{i_m} \Big] =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{h',m'=1 \\ h'\neq m' \\ h'm'\neq h,m}}^{p} \int_0^{s_1} E\Big[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h,h',m,m'}}^{p} X_{s_2}^{k} \, U_{s_2}^{i_{h'}} U_{s_2}^{i_{m'}} U_{s_1}^{i_h} U_{s_1}^{j_m} \Big] \, \delta_{j_{h'},j_{m'}} \, ds_2$$

la fórmula (2.6) queda:

$$E\,[F(X_1^1,\dots,X_1^k)\,] =$$

$$= \frac{1}{2^2} \sum_{\substack{h,m=1 \\ h\neq m}}^{p} \; \sum_{\substack{h',m'=1 \\ h'\neq m' \\ m',h'\neq m,h}}^{p} \int_0^1 \int_0^{s_1} E\Big[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h,h',m,m'}}^{p} X_{s_2}^{k} \, U_{s_2}^{i_{h'}} U_{s_2}^{i_{m'}} U_{s_1}^{i_h} U_{s_1}^{i_m} \Big] \cdot$$

$$\delta_{j_h j_m} \, \delta_{j_{h'},j_{m'}} \, ds_2 \, ds_1$$

Podriem reiterar aquest procés tantes vegades com fos necessari fins obtenir (2.6) com a sumes d'integrals del tipus:

$$\int_0^1 \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_{p-1}} E\,[\,U_{s_1}^{i_{h_1}} U_{s_1}^{i_{m_1}} U_{s_2}^{i_{h_2}} U_{s_2}^{i_{m_2}} \cdots U_{s_p}^{i_{h_p}} U_{s_p}^{i_{m_p}}\,] \cdot$$

$$\cdot\, \delta_{j_{h_1} j_{m_1}} \cdots \delta_{j_{h_p} j_{m_p}} \, ds_p \cdots ds_1 .$$

Si existeix un $r \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\#\{k=1\dots p;\ j_k=r\}$ és imparell, resulta que tots els sumands són zero, perquè les deltes de Dirac agrupen els índexs dos a dos. El mateix podem dir si $\#\{k=1\dots p\ ;\ i_k=r\}$ és imparell, donat que els moments imparells de U^r són zero.

Per tant si p és imparell $E[P_{11}^p] = 0$. Tenim, aleshores:

$$E[(S_{11}^n)^{2p}] = \frac{1}{n^{2p}} \sum_{i,j\in\{1,\dots,n\}^{2p}} \left(E\left[\prod_{k=1}^{p} \int_0^1 U^{i_k} dV^{j_k}\right]\right)^2 .$$

Definim ν_{ij} igual al nombre d'índexs diferents en $(i,j)=$ $(i_1,\dots i_p,j_1,\dots,j_{2p})$. Evidentment $1\leq \nu_{ij} \leq 2p$.

Sigui $i,j \in \{1,\dots,n\}^{2p}$, tals que $\nu_{ij}= h<2p$, aleshores:

$$E\left[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k} dV^{j_k}\right] \leq \max_{\substack{r,s\ \{1,2,\dots n\}^{2p} \\ \nu_{sr}=h}} E\left[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{r_k} dV^{s_k}\right] = C$$

El valor d'aquest màxim no depèn de n, això ens permet escriure,

$$\frac{1}{n^{2p}} \sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots n\}^{2p} \\ \nu_{ij}=k}} \left(E \prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k} dV^{j_k}\right)^2 < \frac{1}{n^{2p}}\binom{n}{k} k^{4p}C^2 =$$

$$= \frac{1}{n^{2p}} \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{k!} k^{4p}C^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dels parells $i,j \in \{1,\dots,n\}^{2p}$ tals que $\nu_{ij}=2p$, només ens cal considerar aquells en què hi hagi p indexs diferents en "i", i p indexs diferents en "j"; si no fos així, tindriem que $E\left[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k} dV^{j_k}\right]= 0$ segons hem vist abans.

Aleshores:

$$\frac{1}{n^{2p}} \sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots,n\}^{2p} \\ \nu_{ij}=2p}} E\left[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k} dV^{j_k}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n^{2p}} \binom{n}{2p}\binom{2p}{p} \frac{(2p)!}{2^p} \sum_{i\in \hat{G}_p} \left(E\left[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k} dV^{\epsilon_k}\right]\right)^2$$

on $\hat{G}_p$ són les permutacions dels elements $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2p}) = (1,1,2,2,3,3,\dots,p,p)$.

Les variables $\{(S^n_{11})^p\}$ són uniformement integrables per tot $p \geq 1$ (gràcies que $\sup_n E[(S^n_{11})^p] < \infty$, per tot $p \geq 1$).

Per tant S^p_{11} convergeix en L^p $\forall p \geq 1$, i tindrem:

$$E[S^{2p}_{11}] = \lim_{n\to\infty} E[(S^n_{11})^{2p}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{2p}} \frac{n!}{(n-2p)!} \frac{2p!}{2^p (p!)^2} \sum_{i\in G_p} \left(E\left[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k} dV^k \right] \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{(2p)!}{(p!)^2\, 2^p} \sum_{i\in \hat{G}_p} E\left[\left(\prod_{k=1}^{p} \int_0^1 U^{i_k} dV^k \right) \right]^2 \qquad (2.7)$$

Fixem una permutació $\hat{\imath} = (i_1, i_2, \dots, i_{2p}) \in \hat{G}_p$.

Direm que $j \longleftrightarrow h$ ($j,h \in \{1,\dots,p\}$) si es compleix alguna de les següents igualtats:

$$i_{2j} = i_{2h},\ i_{2j-1} = i_{2h},\ i_{2j} = i_{2h-1},\ i_{2j-1} = i_{2h-1}.$$

Cada element $j \in \{1,\dots,p\}$ està relacionat amb ell mateix, o amb un o dos elements diferents de $\{1\dots,p\}$(si només existeix un $k \neq j$ tal que $k \longleftrightarrow j$, aleshores no existeix cap altre element que es relacioni amb k).

Definim el cicle $1 \leftrightarrow j_1 \leftrightarrow j_2 \ \dots\ j_n \longleftrightarrow 1$ (on $1, j_1, \dots, j_n$ són elements de $\{1,2\dots p\}$ diferents) de forma que j_1 és tal que $i_1 = i_{2j_1}$ o $i_1 = i_{2j_1 - 1}$; si aquest cicle no compren tots els índexs $\{1,2,\dots p\}$ podem fer-ne un altre començant per l'índex k més petit dels restants i procedint de la mateixa forma $k \longleftrightarrow k_1 \ \dots k_m \longleftrightarrow k$ ($k_1, k_2, \dots k_m, k$ diferents) sempre essent K_1 tal que $i_{2k-1} = i_{2k_1}$

ó $i_{2k-1} = i_{2k_1-1}$. Repetim el procediment fins a descomposar el conjunt $\{1,2,\ldots,p\}$ en cicles.

Tots els cicles que obtenim de la permutació inicial $\hat{\imath} \in \hat{G}_p$ defineixen una permutació σ del conjunt $\{1,2,\ldots,p\}$.

Anomenem G_p al conjunt de totes les permutacions del conjunt $\{1,2,\ldots p\}$. Donat un element σ de G_p podem definir el conjunt I_σ de totes les permutacions $\hat{\imath} \in \hat{G}_p$ que determinin la permutació σ segons el mètode descrit anteriorment.

Per tal de calcular el cardinal de I_σ observem que si $\hat{\imath} = (i_1, i_2, \ldots, i_{2p}) \in \hat{G}_p$ determina la permutació $\sigma \in G_p$, tenim:

1) Sigui $k \in \{1,2,\ldots p\}$ tal que k no és primer element de cap dels cicles que defineixen σ .

   La permutació $(i_1,\ldots,i_{2k},i_{2k-1},\ldots,i_{2p}) \in \hat{G}_p$ determina la mateixa permutació $\sigma \in G_p$.

2) Sigui $\rho \in G_p$, aleshores $(\rho(i_1), \rho(i_2), \ldots, \rho(i_{2p})) \in \hat{G}_p$ indueix la mateixa relació que $\hat{\imath}$ entre els elements de $\{1,2,\ldots p\}$, donat que $i_k = i_h \Leftrightarrow \rho(i_k) = \rho(i_h)$; en conseqüència $(\rho(i_1), \rho(i_2), \ldots, \rho(i_{2p}))$ determina la mateixa permutació σ.

El cardinal de I_σ és doncs $2^{p-n_\sigma} p!$ on n_σ = el nombre de cicles en què es descomposa σ .

El valor de $E[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k} dV^k]$ només depèn de la permutació determinada per $(i_1,\ldots,i_{2p})$. En efecte, calculem el valor d'aquesta esperança per la fórmula de Itô:

$$E\Big[\prod_{k=1}^{2p}\int_0^1 U^{i_k}\,dV^{\varepsilon_k}\Big]=\sum_{h_1=1}^{p}\int_0^1 E\Big[\prod_{\substack{k=1\\ k\neq 2h_1,2h_1-1}}^{2p}\Big(\int_0^{s_1} U^{i_k}\,dV^{\varepsilon_k}\Big)U_{s_1}^{i_{2h_1}}U_{s_1}^{i_{2h_1-1}}\Big]ds_1$$

$$=\sum_{h_1=1}^{p}\sum_{\substack{h_2=1\\ h_2\neq h_1}}^{p}\int_0^1\int_0^{s_1} E\Big[\prod_{\substack{k=1\\ k\neq 2h_1,2h_1-1\\ k\neq 2h_2,2h_2-1}}^{p}\Big(\int_0^{s_2} U^{i_k}\,dV^{\varepsilon_k}\Big)U_{s_1}^{i_{2h_1}}U_{s_1}^{i_{2h_1-1}}.$$

$$.U_{s_2}^{i_{2h_2}}U_{s_2}^{i_{2h_2-1}}\Big]ds_2\,ds_1 \quad =\ldots=$$

$$=\sum_{h_1=1}^{p}\sum_{\substack{h_2=1\\ h_2\neq h_1}}^{p}\cdots\sum_{h_p\neq h_1,\ldots,h_{p-1}}\int_0^1\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{p-1}} E\Big[U_{s_1}^{i_{2h_1}}U_{s_1}^{i_{2h_1-1}}\cdots$$

$$U_{s_p}^{i_{2h_p}}U_{s_p}^{i_{2h_p-1}}\Big]\,ds_p\ldots ds_1 =$$

$$=\int_0^1\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{p-1}}\sum_{\pi\in G_p} E\Big[U_{s_1}^{i_{2\pi(1)}}U_{s_1}^{i_{2\pi(1)-1}}\cdots U_{s_p}^{i_{2\pi(p)}}U_{s_p}^{i_{2\pi(p)-1}}\Big]$$

$$ds_1\ldots ds_p \qquad (2.8).$$

Els termes $E\,[U_{s_1}^{i_{2\pi(1)}}U_{s_1}^{i_{2\pi(1)-1}}\ldots U_{s_p}^{i_{2\pi(p)}}U_{s_p}^{i_{2\pi(p)-1}}]$ donen productes de factors de la forma $(s_i\wedge s_j)$ si $\pi(i)\longleftrightarrow\pi(j)$, és a dir, $\pi(i)=\sigma(\pi(j))$ o bé $\pi(j)=\sigma(\pi(i))$, per tant:

$$(2.8)=\int_0^1\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_p}\sum_{\pi\in G_p}\prod_{i=1}^{p}(s_i\wedge s_{\pi^{-1}(\sigma(\pi(i)))})\,ds_1\ldots ds_p \qquad (2.9).$$

Tornant a la fórmula (2.7) tenint en compte que $E\Big[\prod_{k=1}^{2p}\int_0^1 U^{i_k}\,dV^{\varepsilon_k}\Big]$ només depèn de σ,

$$\frac{2p!}{(p!)^2\,2^p}\sum_{\hat{i}\in G_p}\Big(E\Big[\prod_{k=1}^{2p}\int_0^1 U^{i_k}dV^{\varepsilon_k}\Big]\Big)^2 =$$

$$= \frac{2p!}{(p!)^2 2^p} \sum_{\sigma\in G_p} p!\, 2^{p-n_\sigma} \Big(E\Big[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k^\sigma} dV^{\varepsilon_k} \Big] \Big)^2$$

on $i_k^\sigma = (1,\sigma(1),2,\sigma(2),..,p,\sigma(p))$.

Suposem que $\sigma\in G_p$ és una permutació irreductible, aleshores, per tota $\pi\in G_p$, $\pi^{-1}\circ\sigma\circ\pi$ també és una permutació irreductible.

Definim la funció $f:[0,1]^p \longrightarrow R$,

$$f(s_1,...,s_p) = (s_1\wedge s_2)(s_2\wedge s_3)...(s_{p-1}\wedge s_p)(s_p\wedge s_1).$$

Observem que si ρ és una permutació irreductible

$$\prod_{i=1}^{p} (s_i\wedge s_{\rho(i)}) = \prod_{i=1}^{p} (s_{\rho^i(1)}\wedge s_{\rho^{i+1}(1)}) = f(s_{\rho(1)}, s_{\rho^2(1)},...,s_{\rho^p(1)}).$$

De (2.9) obtenim,

$$E\Big[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k^\sigma} dV^{\varepsilon_k} \Big] =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{s_1} .. \int_0^{s_{p-1}} \sum_{\substack{\rho=\pi^{-1}\circ\sigma\circ\pi \\ \pi\in G_p}} f(s_{\rho(1)},...,s_{\rho^p(1)})\, ds_1 ds_2 ... ds_p \quad (2.10)$$

Mentre π recorre totes les permutacions de G_p, $(s_{\rho(1)},...,s_{\rho^p(1)})$ recorre totes les permutacions de $(s_1,...,s_p)$, a més la funció $\sum_{\pi\in G_{\{s_1...s_p\}}} f(\pi(s_1),...,\pi(s_p))$ és simètrica, per tant,

$$(2.10) = \int_0^1 \int_0^{s_1} ... \int_0^{s_{p-1}} \sum_{\pi\in G_{\{s_1...s_p\}}} f(\pi(s_1),...,\pi(s_p))\, ds_1 ... ds_p =$$

$$= \frac{1}{p!} \int_{[0,1]^p} \sum_{\pi\in G_{\{s_1\dots s_p\}}} f(\pi(s_1),\dots,\pi(s_p))ds_1\dots ds_p =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\pi\in G_{\{s_1\dots s_p\}}} \int_{[0,1]^p} (s_1\wedge s_2)(s_2\wedge s_3)\dots(s_p\wedge s_1)ds_1\dots ds_p =$$

$$= \int_{[0,1]^p} (s_1\wedge s_2)(s_2\wedge s_3)\dots(s_p\wedge s_1)ds_1\dots ds_p .$$

Una permutació σ qualsevol pot descomposar-se en un cicle que conté l'element 1 ($1=j_1\to j_2\to\dots j_h\to 1$) i una permutació $\bar\sigma$ dels elements restants. Aleshores

$$E\Big[\prod_{k=1}^{2p}\int_0^1 U^{i_k^\sigma}dV^{\varepsilon_k}\Big]^2 = E\Big[\prod_{k=1}^{2h}\int_0^1 U^{j_k}dV^{\varepsilon_k}\Big]^2 E\Big[\prod_{k=1}^{2(p-h)}\int_0^1 U^{i_k^{\sigma}}dV^{\varepsilon_k}\Big]^2$$

on $(j_1,\dots,j_{2h})=(1,2,2,3,3,\dots,h,h,1)$.

Podem generar totes les permutacions $\sigma\in G_p$ composant tots els cicles possibles que contenen l'element 1 amb totes les permutacions dels elements restants. Observem que hi han $\binom{p-1}{h-1}(h-1)!$ cicles diferents de h elements que contenen el 1. Tenim:

$$m_p = \sum_{\sigma\in G_p} 2^{p-n_\sigma} E\Big[\prod_{k=1}^{2p}\int_0^1 U^{i_k^\sigma}dV^{\varepsilon_k}\Big]^2 =$$

$$= \sum_{h=1}^{p}\binom{p-1}{h-1} E\Big[\prod_{k=1}^{2p}\int_0^1 U^{j_k}dV^{\varepsilon_k}\Big]^2 2^{h-1}(h-1)!.$$

$$\cdot\Big(\sum_{\bar\sigma\in G_{p-h}} 2^{p-h-n_{\bar\sigma}}\Big(E\Big[\prod_{k=1}^{2(p-h)}\int_0^1 U^{i_k^{\bar\sigma}}dV^{\varepsilon_k}\Big]\Big)^2\Big)=$$

$$= \sum_{h=1}^{p}\binom{p-1}{h-1}2^{h-1}(h-1)!\,\mu_h^2\, m_{p-h} = \sum_{h=1}^{p}\frac{(p-1)!}{(p-h)!}2^{h-1}\mu_h^2\, m_{p-h}.$$

Fixem-nos que $n_\sigma = n_{\bar\sigma} + 1$. Finalment,

$$E[S_{11}^{2p}] = \frac{(2p)!}{p!2^p} \sum_{\sigma\in G_p} 2^{p-n} E[\prod_{k=1}^{2p} \int_0^1 U^{i_k^\sigma} dV^{\varepsilon_k}] =$$

$$= \frac{(2p)!}{p!2^p} m_p = \frac{(2p)!}{p!2^p} \sum_{h=1}^{p} \frac{(p-1)!}{(p-h)!} 2^{h-1} \mu_h m_{p-h} \qquad \square.$$

<u>Corol.lari (2.3.4)</u>

La funció característica de la variable P_{11}, seguint la notació del Lema(2.3.3), pot expressar-se de la forma:

$$\phi(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{2^k}(-t^2)^k\right).$$

Demostració:

Si una llei de probabilitat té tots els moments finits, la funció generatriu de moments es desenvolupa en sèrie de Taylor per a punts pròxims al zero,

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k t^k}{k!}$$ on m_k és el moment d'ordre k (entenem $m_0=1$).

Igualment la funció logM(t) es desenvolupa en sèrie de Taylor per a punts pròxims al zero,

$$\log M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k .$$

Els valors c_k s'anomenen cumulants de la llei de probabilitat. Els cumulants i els moments estan lligats per la relació:

$$m_p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1} c_k m_{p-k}.$$

Pel Lema (2.3.3), tenim la relació:

$$E[(P_{11})^{2p}] = \frac{(2p)!}{p!2^p} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1} 2^{k-1}(k-1)!\, \mu_k^2 m_{p-k} .$$

Pel Lema (2.3.3) sabem també que $m_{p-k} = \frac{(p-k)!}{(2p-2k)!} 2^{p-k} E[(P_{11})^{2p-2k}]$ substituint,

$$E[(P_{11})^{2p}] = \frac{(2p)!}{p!2^p} \sum_{k=1}^{p} \frac{(p-1)!}{(p-k)!} 2^{k-1} \mu_k^2 \frac{(p-k)!}{(2p-2k)!} 2^{p-k} E[(P_{11})^{2p-2k}] =$$

$$= \frac{(2p)!}{p!} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{(p-k)!}{(2p-2k)!} \mu_k^2 E[(P_{11})^{2p-2k}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \binom{2p-1}{2k-1} \mu_k^2 (2k-1)! \; E[(P_{11})^{2p-2k}] .$$

Per tant els cumulants de la llei de P_{11} són $c_{2k} = \mu_k^2 (2k-1)!$ i $c_{2k-1} = 0$, i la funció característica és :

$$\Phi(t) = \exp\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 (2k-1)!}{(2k)!} (it)^{2k} \} =$$

$$= \exp\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k} (-t^2)^k \} \quad \square.$$

Proposició (2.3.5)

$$\mu_k = \int_{[0,1]^k} (x_1 \wedge x_2)(x_2 \wedge x_3) \ldots (x_k \wedge x_1) dx_1 dx_2 \ldots dx_k =$$

$$= \sum_{i \geq 1} \left(\frac{2}{(2i-1)\pi} \right)^{2k} = 2^{2k-1} \frac{(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_k$$

on B_k és el k-èssim nombre de Bernouilli.

Demostració:

Recordem que segons el Corol.lari (2.2.5) la variable aleatòria P_{11} té la mateixa llei que la variable

$$S = \sum_{i,j \geq 1} \frac{1}{(2i-1)(2j-1)\pi^2} \xi_{ij} \zeta_{ij}$$

on $\{\xi_{ij}, \zeta_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ és una successió de variable aleatòries independents amb llei $N(0,1)$.

Es tracta de calcular els cumulants d'aquesta llei. Segons el Lema (2.3.1)

$$E[e^{St}] = \prod_{i,j\geq 1} \left(1 - \frac{16t^2}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4}\right)^{-1/2} \text{ si } |t| < \frac{\pi^2}{4},$$

per tant,
$$\log E[e^{St}] = \sum_{i,j\geq 1} (-1/2)\log\left(1 - \frac{16t^2}{(2j-1)^2(2i-1)^2\pi^4}\right) \quad (2.11).$$

La funció $\log(1-x)$ admet un desenvolupament per sèrie de Taylor per a $|x|<1$,

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Si $|t|< \frac{\pi^2}{4}$, $\left|\frac{16t^2}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4}\right| < 1$, i podem aplicar el desenvolupament en sèrie de la funció $\log(1-x)$ en (2.11),

$$\log E[e^{St}] = \sum_{i,j\geq 1} 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4t}{(2i-1)(2j-1)\pi^2}\right)^{2n} \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{2n} \sum_{i,j\geq 1} \left(\frac{1}{(2i-1)(2j-1)}\right)^{2n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{2n} \left(\sum_{i\geq 1} \frac{1}{(2i-1)^{2n}}\right)^2 \quad (2.12).$$

De (2.12) deduïm que els cumulants d'aquesta llei són:

$c_{2k-1} = 0$ i $C_{2k} = (2k-1)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{4k}\left(\sum_{i\geq 1} \frac{1}{(2i-1)^{2k}}\right)^2$. El Corol.lari (2.3.4) ens donava també una expressió dels cumulants $c_{2k} = \mu_k^2(2k-1)!$, per tant,

$$\mu_k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{(2i-1)^{2k}} = \frac{2^{2k}}{\pi^{2k}} \frac{1}{2(2k)!} (2^{2k}-1)\, \pi^{2k} B_k =$$

$$= \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_k$$ on B_k és el k-éssim nombre de Bernouilli $\square$.

Mitjançant la proposició (2.3.5) podem calcular els primers moments de P_{11}. Sabem que

$$\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad , \quad \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{(2i-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad , \quad \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{(2i-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

i $$\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{(2i-1)^8} = \frac{17.2^{-2}\pi^8}{8!}$$, per tant,

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \mu_2 = \frac{1}{6} \quad , \quad \mu_3 = \frac{1}{3.5} \quad , \quad \mu_4 = \frac{17}{3.5.6.7} \quad \ldots$$

d'on obtenim que els moments de P_{11} són

$$E[(P_{11})^2] = \frac{1}{4} = 0,25 \qquad E[(P_{11})^4] = \frac{11}{48} = 0,2292$$

$$E[(P_{11})^6] = \frac{1187}{960} = 1,2367 \qquad E[(P_{11})^8] = \frac{634673}{80640} = 7,8704.$$

II.3 CONTRAEXEMPLE DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMIT.

Direm que $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ (suposem $k_n \to \infty$ quan $n \to \infty$) és una martingala triangular si $\forall n \geq 1$ $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1 < i < k_n\}$ és una martingala i $\{\mathcal{F}_{ni}\}_{\substack{n \geq 0 \\ i \leq n \leq k_n}}$ és una successió creixent de σ-àlgebres; és a dir, per a tot $n \geq 1$

- S_{ni} és $\mathcal{F}_{ni}$-mesurable per a tot $i \in \{1, \ldots, k_n\}$
- $E[S_{ni}/\mathcal{F}_{n\,i-1}] = S_{n\,i-1}$ per a tot $i \in \{2, \ldots, k_n\}$
- $\mathcal{F}_{ni}$ $\mathcal{F}_{n\,i+1}$ per a tot $i \in \{0, \ldots k_{n-1}\}$, i

  $\mathcal{F}_{ni}$ $\mathcal{F}_{n+1\,i}$ per a tot $i \in \{0, \ldots k_n\}$.

Notarem per $X_{ni} = S_{ni} - S_{n\,i-1}$ les diferències de martingala i per $V^2_{ni} = \sum_{j=1}^{i} E[X^2_{nj}/\mathcal{F}_{n\,j-1}]$ la variància condicional de S_{ni}.

Per a martingales triangulars es pot enunciar una generalització de Teorema Central del Límit [2] :

<u>Teorema</u>

Sigui $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ una martingala de quadrat integrable. Suposem que es compleixen les condicions següents:

1) $V^2_n = \sum_{i=2}^{k_n} E[X^2_{ni}/\mathcal{F}_{n\,i-1}] \xrightarrow{P} \eta$, on η és una variable finita q.s. i tal que $P(\eta > 0) = 1$.

2) la martingala triangular $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ té la propietat condicional de Lindeberg, es a dir,

$$\sum_{i=2}^{k_n} E[X_{ni} I_{\{|X_{ni}|>\varepsilon\}} / F_{n\, i-1}] \xrightarrow[\to\infty]{P} 0 \text{ per a tot } \varepsilon>0.$$

Aleshores, $S_{nn} = \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}$ convergeix feblement cap a Z, on Z és una variable aleatòria que té per funció característica $E\,[\exp(-\frac{1}{2}\eta t^2)]$.

Si la condició de Lindeberg es compleix però la convergència de $\sum_{i=2}^{k_n} E[X_{ni}^2 / F_{n\, i-1}]$ cap a η és en llei i no en probabilitat, la conclusió del Teorema no es manté, com ho demostra un contraexemple de Dvoretsky [13] . Alvo, Cabilio i Feigin [1], troben una classe de martingales, els U-estadístics degenerats, tal que $V_n^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \eta$, es compleix la condició de Lindeberg i S_{nn} convergeix cap a una suma de variables aleatòries χ^2 independents. Nualart construeix en [28] una martingala triangular, definida per les diferències de martingala

$$X_{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{j-1} \xi_{ij} \quad \text{on} \quad \xi_{ij} = \int_T X^i dX^j \int_T Y^i dY^j + \int_T X^i dX^i \int_T Y^j dY^j$$

essent $\{X^i(t),\ t\in T,\ n\geq 1\}$ i $\{Y^i(t),\ t\in T,\ n\geq 1\}$ dues successions independents de moviments brownians amb dimensió infinita. Aquesta martingala triangular compleix la condició de Lindeberg i

$$S_{nn} = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^1 X^i dX^j\right)\left(\int_0^1 Y^i dY^j\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 X^i dX^1 \int_0^1 Y^i dY^i$$

convergeix feblement cap a $\int_{T^2} W dW$, que no té una llei simètrica, mentre que les variàncies condicionals convergeixen en llei cap a $\int_{T^3}(W_{stu}+\Delta\hat{W}_{stu})\,dsdtdu$ on $\Delta\hat{W}_{stu} = W_{11u}-W_{1tu}-W_{s1u}+W_{stu}$, i $\{W_{stu},\ (s,t,u)\in T^3\}$ és un procés gaussià centrat amb covariància $E[W_{stu}W_{s't'u'}] = (s\wedge s')(t\wedge t')(u\wedge u')$.

Amb l'ajut del Lema (2.3.2) donarem un contraexemple del Teorema Central de Límit de caire diferent. Construirem una martingala triangular, que compleix la condició de Lindeberg, i que les seves sumes parcials S_{nn} convergeixen cap a un límit que té per funció característica $E[\exp\{-\frac{t^2}{2}\eta\}]$, on η és una variable aleatòria finita tal que $P(\eta>0)=1$; a més les seves variàncies condiconals V_n^2 convergeixen en llei i no en probabilitat cap a una distribució que no coincideix amb la de η.

Sigui $Y_{ij}=\int_0^1 U^i dV^j \int_0^1 \bar{U}^i d\bar{V}^j + \int_0^1 U^j dV^i \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^i$ per a $i,j\geq 1$, $i\neq j$

$$Y_{ii}=\int_0^1 U^i dV^i \int_0^1 \bar{U}^i d\bar{V}^j \quad \text{per a } i\geq 1, \quad \text{i}$$

$$\mathcal{F}_{nj}=\sigma<U^1,\dots,U^j,\bar{U}^1,\dots,\bar{U}^j,V^1,\dots,V^j,\bar{V}^1,\dots,\bar{V}^j> \text{ per a } 1\leq j\leq n.$$

Definim $X_{nj}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j} Y_{ij}$; X_{nj} és $\mathcal{F}_{nj}$-mesurable i

$E[X_{nj}/\mathcal{F}_{n\,j-1}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j} E[Y_{ij}/\mathcal{F}_{n\,j-1}] = 0$ ($\mathcal{F}_{n0}$ és la σ-àlgebra trivial).

Aleshores $\{S_{ni}=\sum_{k=1}^{i} X_{nk},\ \mathcal{F}_{ni},\ 1\leq i\leq n,\ n\in N\}$ és una martingala triangular. Recordem que $S_{nn}=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 U^i dV^j \int_0^1 \bar{U}^i d\bar{V}^j$

convergeix feblement cap a $P_{11} = \int_{T^2} W_1 dW_2$; que té per funció característica

$$\phi(t) = E\left[e^{-\frac{t}{2}\eta}\right]$$

on $\eta = \sum_{i,j\geq 1} \frac{16}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4} \xi_{ij}^2$ segons el Teorema (2.2.4).

Els resultats següents demostraran que la martingala triangular $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1\leq i\leq n, n\in N\}$ compleix la condició de Lindeberg mentre que les seves variàncies condicionals V_n^2 convergeixen en llei cap a una variable que no té la mateixa distribució que η.

Proposició (2.4.1)

La martingala triangular $\{S_{ni}, \mathcal{F}_{ni}, 1<i<n, n\in N\}$ satisfà la propietat condicional de Lindeberg.

Demostració:

Aplicant Schwartz i Txebyxeff, resulta:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} E\left[X_{ni}^2 I_{\{|X_{ni}|>\varepsilon\}} / \mathcal{F}_{n\,i-1}\right]\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[n^2 X_{ni}^2 I_{\{|X_{ni}|\geq \varepsilon n\}}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[n^4 X_{ni}^4\right]^{1/2} P(|nX_{ni}|>\varepsilon n)^{1/2} \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{(\varepsilon n)^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[n^4 X_{ni}^4\right].$$

$E[n^4 X_{ni}^4] \leq 4n^2 C$ on C és una constant que no depèn de n ni de i, en efecte,

$$E[n^4 X_{nj}^4] = E\left[n^4 \frac{1}{n^4} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{j} Y_{i_1 j} Y_{i_2 j} Y_{i_3 j} Y_{i_4 j}\right] =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{j} E\left[Y_{i_1 j} Y_{i_2 j} Y_{i_3 j} Y_{i_4 j}\right] =$$

$$=3\sum_{\substack{i_1=1}}^{j}\sum_{\substack{i_2=1\\ i_2\neq i_1}}^{j} E[Y_{i_1j}^2 Y_{i_2j}^2] + \sum_{i=1}^{j} E[Y_{ij}^4]$$

per ser $E[Y_{i_1j}Y_{i_2j}Y_{i_3j}Y_{i_4j}] = 0$ si algun dels índexs $i_1, i_2, i_3,$ ó i_4 no es repeteix. Per Schwartz obtenim:

$$E[n^4 X_{nj}^4] \leq 3\sum_{i_1=1}^{j}\sum_{i_2=1}^{j} E[Y_{i_1j}^4]^{1/2} E[Y_{i_2j}^4]^{1/2} + \sum_{i=1}^{j} E[Y_{ij}^4] .$$

Només ens cal demostrar que $E[Y_{ij}^4] \leq C \quad \forall i,j=1,\ldots,n$, perquè aleshores

$$E[n^4 X_{nj}^4] \leq 3n^2C + nC \leq 4n^2C$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} E[X_{ni}^2 I_{\{|X_{ni}|>\varepsilon\}}] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^4} 4n^3 C \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Per a demostrar que $E[Y_{ij}^4] < C \quad \forall i,j=1,\ldots n$ considerem dos casos, quan $i\neq j$ i quan $i=j$.

Si $i\neq j$,

$$E[Y_{ij}^4] = E[(\int_0^1 U^i dV^j)^4 (\int_0^1 \bar{U}^i d\bar{V}^j)^4] + E[(\int_0^1 U^j dV^i)^4 (\int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^i)^4] +$$

$$+ 6E[(\int_0^1 U^i dV^j)^2 (\int_0^1 \bar{U}^i d\bar{V}^j)^2 (\int_0^1 U^j dV^i)^2 (\int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^i)^2] =$$

$$=2E[(\int_0^1 U^i dV^j)^4]^2 + 6(4\int_0^1\int_0^x E[(U_y^i)^2 (U_x^j)^2] dy dx)^2 =$$

$$= 2(6\int_0^1\int_0^x E[(U_x^i)^2 (U_y^i)^2]\, dy dx)^2 + 6(4\frac{1}{2.4})^2 \quad (2.13).$$

Calculem $E[(U_x^i)^2 (U_y^i)^2]$ per a $y<x$,

$$E[(U_x^i)^2 (U_y^i)^2] = E[(U_x^i - U_y^i)^2 (U_y^i)^2] + E[(U_y^i)^4] - 2E[(U_x^i - U_y^i)(U_y^i)^3] =$$

$$= (x-y)y + 3y^2 .$$

Substituint en (2.13),

$$E[Y_{ij}^4] = 2(6\int_0^1\int_0^x [(x-y)y + 3y^2]\, dy dx)^2 + 3/2 = 2(\frac{3}{4}+1)^2 + \frac{3}{2} .$$

Si i=j,

$$E[Y_{jj}^4] = E[(\int_0^1 U^j dV^j \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^j)^4] = E[(\int_0^1 U^j dV^j)^4]^2 = (\frac{3}{4}+1)^2 .$$

Prenem $C = 2(\frac{3}{4}+1)^2 + \frac{3}{2}$, i deduïm que $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} E[\sum_{i=1}^n E[X_{ni}^2 I_{\{|X_{ni}|>\varepsilon\}} / \mathcal{F}_{n,i-1}] = 0,$$ en consequència

es compleix la condició de Lindeberg:

$$\sum_{i=1}^n E[X_{ni}^2 I_{\{|X_{ni}|>\varepsilon\}} / \mathcal{F}_{n\ i-1}] \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \qquad \forall\varepsilon>0 .$$

Lema (2.4.2)

La successió $V_n^2 = \sum_{i=2}^n E[X_{ni}^2 / \mathcal{F}_{n\ i-1}]$ convergeix vers la variable aleatòria

$$\int_{[0,1]^3} \hat{W}_{stu}^2 dsdtdu + \int_{[0.1]^3} (\Delta W_{stu})^2 dsdtdu,$$

on $\Delta W_{stu} = W_{11u} - W_{1tu} - W_{s1u} + W_{stu}$, i

$\{W_{stu},\ (s,t,u)\in[0,1]^3\}$ i $\{\hat{W}_{stu},\ (s,t,u)\in[0.1]^3\}$

són processos de Wiener independents amb tres paràmetres.

Demostració:

$$E[X_{nj}^2 / \mathcal{F}_{n\ j-1}] = \frac{1}{n^2} E[\sum_{i_1,i_2=1}^{j-1} Y_{i_1 j} Y_{i_2 j} / \mathcal{F}_{n\ j-1}] +$$

$$+ \frac{2}{n^2} E[\sum_{i_1=1}^{j-1} Y_{i_1 j} Y_{i_2 j} / \mathcal{F}_{n\ j-1}] +$$

$$+ \frac{1}{n^2} E[Y_{jj}^2 / \mathcal{F}_{n\ j-1}].$$

$$\sum_{i_1,i_2=1}^{j-1} Y_{i_1 j} Y_{i_2 j} = \sum_{i_1,i_2=1}^{j-1} \int_0^1 U^{i_1} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_1} d\bar{V}^j \int_0^1 U^{i_2} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_2} d\bar{V}^j +$$

$$+2 \sum_{i_1=1}^{j-1} \int_0^1 U^{i_1} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_1} d\bar{V}^j \int_0^1 U^j dV^{i_2} \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^{i_2} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{j-1} \int_0^1 U^j dV^{i_1} \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^{i_1} \int_0^1 U^j dV^{i_2} \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^{i_2} . \tag{2.18}$$

$$\sum_{i_1=1}^{j-1} Y_{i_1 j} Y_{jj} = \sum_{i_1=1}^{j-1} \int_0^1 U^{i_1} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_1} d\bar{V}^j \int_0^1 U^j dV^j \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^j +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{j-1} \int_0^1 U^j dV^{i_1} \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^{i_1} \int_0^1 U^j dV^j \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^j .$$

$$Y_{jj}^2 = \left(\int_0^1 U^i dV^j \right)^2 \left(\int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^j \right)^2.$$

Evidentment $E[Y_{jj}^2 / \mathcal{F}_{n\ j-1}] = E[Y_{jj}^2] = \frac{1}{2}$.

Només ens cal estudiar tres tipus de sumands:

$$\int_0^1 U^{i_1} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_1} d\bar{V}^j \int_0^1 U^{i_2} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_2} d\bar{V}^j ,$$

$$\int_0^1 U^{i_1} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_1} d\bar{V}^j \int_0^1 U^j dV^{i_2} \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^{i_2} , \quad \text{i}$$

$$\int_0^1 U^j dV^{i_1} \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^{i_1} \int_0^1 U^j dV^{i_2} \int_0^1 \bar{U}^j d\bar{V}^{i_2} \qquad \text{per a } i_1 \leq j \text{ i } i_2 < j,$$

$$\text{o } i_1 < j \text{ i } i_2 \leq j.$$

La suma $\sum_{k=1}^{n} U_{\frac{k}{n}} V(\Delta_k)$ $(\Delta_k = (k-1,k]$) convergeix en L^p $\forall p > 0$, cap a la integral $\int_0^1 U(x)dV(x)$, d'on:

$$E\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} U^{i_1}_{\frac{k}{n}} V^j(\Delta_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \bar{U}^{i_1}_{\frac{k}{n}} \bar{V}^j(\Delta_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} U^{i_2}_{\frac{k}{n}} V^j(\Delta_k)\Big).$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \bar{U}^{i_2}_{\frac{k}{n}} V(\Delta_k)\Big) \Big/ \mathcal{F}_{n\,j-1}\Big] \quad (2.14)$$

convergeix en L^p $\forall p \geq 1$ cap a

$$E\Big[\int_0^1 U^{i_1} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_1} d\bar{V}^j \int_0^1 U^{i_2} dV^j \int_0^1 \bar{U}^{i_2} d\bar{V}^j \Big/ \mathcal{F}_{n\,j-1}\Big].$$

Calculem (2.14):

$$E\Big[\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{n} U^{i_1}_{\frac{k_1}{n}} \bar{U}^{i_1}_{\frac{k_2}{n}} U^{i_2}_{\frac{k_3}{n}} \bar{U}^{i_2}_{\frac{k_4}{n}} V^j(\Delta_{k_1}) \bar{V}^j(\Delta_{k_2}) V^j(\Delta_{k_3}) \bar{V}^j(\Delta_{k_4}) / \mathcal{F}_{n\,j-1}\Big]$$

(2.15)

Si $i_1, i_2 < j$, $(2.15) = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{n} U^{i_1}_{\frac{k_1}{n}} \bar{U}^{i_1}_{\frac{k_2}{n}} U^{i_2}_{\frac{k_3}{n}} \bar{U}^{i_4}_{\frac{k_4}{n}}$.

$$E[V^j(\Delta_{k_1}) V^j(\Delta_{k_3})]\, E[\bar{V}^j(\Delta_{k_2}) \bar{V}^j(\Delta_{k_4})]$$

$$= \sum_{k_1,k_2=1}^{n} U^{i_1}_{\frac{k_1}{n}} \bar{U}^{i_1}_{\frac{k_2}{n}} U^{i_2}_{\frac{k_1}{n}} \bar{U}^{i_2}_{\frac{k_2}{n}} \frac{1}{n^2} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} U^{i_1}_{\frac{k}{n}} U^{i_2}_{\frac{k}{n}}\Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \bar{U}^{i_1}_{\frac{k}{n}} \bar{U}^{i_2}_{\frac{k}{n}}\Big)$$

que convergeix cap a $\Big(\int_0^1 U^{i_1}(x) U^{i_2}(x)\, dx\Big)\Big(\int_0^1 \bar{U}^{i_1}(x) \bar{U}^{i_2}(x) dx\Big)$.

Si $i_1 = j$, $i_2 < j$,

$$(2.15) = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{n} U^{i_2}_{\frac{k_3}{n}} \bar{U}^{i_2}_{\frac{k_4}{n}} E[U^j_{\frac{k_1}{n}}]\, E[\bar{U}^j_{\frac{k_1}{n}}] E[V^j(\Delta_{k_1}) V^j(\Delta_{k_3})] \,.$$

$$. \; E[\bar{V}^j(\Delta_{k_2}) \bar{V}^j(\Delta k_4)] = 0.$$

Pels altres sumands de (2.13) procedim d'igual forma i obtenim,

$$E\left[\int_0^1 U^{i_1}dV^j \int_0^1 \bar U^{i_1}d\bar V^j \int_0^1 U^j dV^{i_2} \int_0^1 \bar U^j dV^{i_2} \,/\, F_{n\ j-1}\right] = 0$$

$$\forall\ i_1 \leqslant j \quad i_2 < j\ ,\ \text{ó}\quad i_1 < j \quad i_2 \leqslant j .$$

$$E\left[\int_0^1 U^j dV^{i_1} \int_0^1 \bar U^j d\bar V^{i_1} \int_0^1 U^j dV^{i_2} \int_0^1 \bar U^j d\bar V^{i_2} \,/\, F_{n\ j-1}\right] =$$

$$E\left[\left(U_1^j V_1^{i_1} - \int_0^1 V^{i_1} dU^j\right)\left(\bar U_1^j \bar V_1^{i_1} - \int_0^1 \bar V^{i_1} d\bar U^j\right)\left(U_1^j V_1^{i_2} - \int_0^1 V^{i_2} dU^j\right).\right.$$

$$\left.\cdot\left(\bar U_1^j \bar V_1^{i_2} - \int_0^1 \bar V^{i_2} d\bar U^j\right) \,/\, F_{n\ j-1}\right] =$$

$$= E\left[\int_0^1 (V_1^{i_1} - V^{i_1})dU^j \int_0^1 (\bar V_1^{i_1} - \bar V^{i_1})d\bar U^j \int_0^1 (V_1^{i_2} - V^{i_2})dU^j .\right.$$

$$\left.\cdot \int_0^1 (\bar V_1^{i_2} - \bar V^{i_2})d\bar U^j \,/\, F_{n\ j-j}\right] =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (V_1^{i_1} - V_u^{i_1})(V_1^{i_2} - V_u^{i_2})du \int_0^1 (\bar V_1^{i_1} - \bar V_u^{i_2})(\bar V_1^{i_2} - \bar V_u^{i_2})du \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } i_1, i_2 < j \\ 0 \quad \text{si} \quad i_1 = j \quad i_2 < j \quad \text{ó} \quad i_2 = j \ \ i_1 < j. \end{cases}$$

D'on $E[X_{nj}^2 / F_{n\ j-1}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{j-1} \int_0^1 U_u^{i_1} U_u^{i_2} du \int_0^1 \bar U_u^{i_1} \bar U_u^{i_2} du +$

$$+ \frac{1}{n^2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{j-1} \int_0^1 (V_1^{i_1} - V_u^{i_1})(V_1^{i_2} - V_u^{i_2})du \int_0^1 (\bar V_1^{i_2} - \bar V_u^{i_2})(\bar V_1^{i_2} - \bar V_u^{i_2})du + \frac{1}{2n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} U_u^i \bar U_v^i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{j-1} (V_1^i - V_u^i)(\bar V_1^i - \bar V_v^i)\right)^2\right] du\, dv + \frac{1}{2n^2} .$$

Considerem els processos

$$\xi_n(s,t,u) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nu]} U_s^i \bar{U}_t^i$$

$$\zeta_n(s,t,u) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nu]} V_s^i \bar{V}_t^i .$$

$$V_n^2 - \frac{(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^{n} \int_0^1 \int_0^1 [(\sum_{i=1}^{j-1} U_u^i \bar{U}_v^i)^2 + (\sum_{i=1}^{j-1} (V_1^i - V_u^i)(\bar{V}_1^i - \bar{V}_v^i))^2] du dv$$

$$= \frac{1}{n} \int_{[0,1]^3} [(\sum_{i=1}^{[ns]} U_u^i \bar{U}_v^i)^2 + (\sum_{i=1}^{[ns]} (V_1^i \bar{V}_1^i - V_1^i \bar{V}_u^i - V_u^i \bar{V}_1^i + V_u^i \bar{V}_u^i)^2)] du dv ds =$$

$$= \int_{[0,1]^3} [\xi_n(u,v,s) + (\zeta_n(1,1,s) - \zeta_n(1,v,s) - \zeta_n(u,1,s)$$
$$- \zeta_n(u,v,s))^2] du dv ds.$$

Sigui D_3 el conjunt de les funcions $f: T^3 \longrightarrow R$, contínues per la dreta i amb límits per l'esquerra, és a dir,

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \in Q_{r_1 r_2 r_3}}} f(s) \quad \text{existeix sempre i} \quad \lim_{\substack{s \to t \\ s \in Q_{\geqslant\geqslant\geqslant}}} f(s) = f(t)$$

on r_i és $\geqslant$ o $<$ i $Q_{r_1 r_2 r_3}$ és el quadrant $\{(s_1,s_2,s_3) \in T^3 / \ s_i r_i t_i$ $i=1,2,3\}$.

En D_3 podem considerar la distància de "Skorohod" (vegeu Bickel i Wichura [6]):

$$\forall x,y \in D_3 \ , \ d(x,y) = \inf \{\min (\ \|x - y\lambda\| , \ \|\lambda\| \ ) : \ \lambda \in \Lambda \}$$

on Λ és el grup de les transformacions

$$\lambda : \begin{array}{ccc} T^3 & \longrightarrow & T^3 \\ (t_1,t_2,t_3) & \longmapsto & (\lambda_1(t_1), \lambda_2(t_2), \lambda_3(t_3)) \end{array}$$

tals que cada λ_i és contínua , estrictament creixent i $\lambda_i(0)=0$, $\lambda_i(1)=1$;

i $\| x-y\lambda \| = \sup_{t\in T^3} \{|x(t)-y(\lambda(t))|\}$ i $\|\lambda\| = \sup_{t\in T^3} \{|\lambda(t)-t|\}$.

Una successió $(X^n)_{n\geq 1}$ de processos a valors en D_3 diem que convergeix feblement cap a un procés X a valors en D_3 si $E[f(X^n)] \quad E[f(X)] \quad \forall f: D_3 \longrightarrow R$ afitada i contínua respecte la métrica de Skorohod.

Les successions (ξ_n) i (ζ_n) convergeixen feblement cap al moviment brownià bidimensional (vegeu Teorema 6,Bickel i Wichura [6]).

Considerem les aplicacions

$$f: D_3 \longrightarrow R$$
$$g \longrightarrow \int_{[0,1]^3} g^2(u,v,s)\,dudvds$$

$$h: D_3 \longrightarrow R$$
$$f \longrightarrow \int_{[0,1]^3} (f(1,1,s)-f(1,v,s)-f(u,1,s)+f(u,v,s))^2\,dudvds$$

són contínues; podem afirmar,doncs, que $(V_n^2)_{n\in N}$ convergeix feblement a la variable

$$\int_{[0,1]^3} \hat{W}^2_{stu}\,dsdtdu + \int_{[0,1]^3} (W_{11u}-W_{1tu}-W_{s1u}+W_{stu})^2\,dsdtdu,$$

on $\hat{W}_{stu}$ i W_{stu} són dos moviments brownians a tres dimensions independents $\square$.

<u>Proposició (2.4.3)</u>

V_n^2 no convergeix en probabilitat.

Demostració:

Donat que $\sup_n E[(V_n^2)^4]<\infty$, si V_n^2 convergeix en probabilitat ho farà en l'espai L^2, però això es contradictori amb el fet que $(V_n^2)_{n\in N}$ no és una successió de Cauchy en L^2, és a dir,

$$\lim_{m,n\to\infty} E[\,|V_n^2 - V_m^2|^2] \neq 0.$$

En efecte, només cal demostrar que

$$E\Big[\Big|\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{m^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2 du dv - \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2 du dv\Big|^2\Big] \tag{2.16}$$

no convergeix a zero quan n i m $\to\infty$.

$$(2.16)=E\Big[\Big|\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{m^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2 du dv\ \Big|^2\Big]+$$

$$+E\Big[\Big|\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2 du dv\ \Big|^2\Big]+$$

$$+\ E\Big[2\Big(\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{m^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2 du dv\Big)\Big(\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2 du dv\Big)$$

Calculem el primer sumand:

$$E\Big[\Big(\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{m^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2 du dv\ \Big)^2\Big]=$$

$$=\sum_{j=2}^{m}\sum_{k=j}^{m}\frac{1}{m^4}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big[\sum_{i_1=1}^{j-1}\sum_{\substack{i_2=1\\ i_2\neq i_1}}^{k-1}u\tilde{u}v\tilde{v}+2\sum_{i_2=1}^{j-1}\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1\neq i_2}}^{j-1}(u\wedge\tilde{u})^2(v\wedge\tilde{v})^2+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{j-1}(u\tilde{u}+2(u\wedge\tilde{u})^2)(v\tilde{v}+2(v\wedge\tilde{v})^2)\Big]du d\tilde{u} dv d\tilde{v}$$

$$=\frac{1}{m^4}\Big[\frac{1}{2^6}(m^4-2m^3+m^2)+\frac{1}{3^3}(m^4-2m^3+2m^2-m)+\frac{5}{2.3^2}(2m^3-3m^2+m)\Big].$$

Fent el mateix per altres sumands tenim,

$$(2.16)=\frac{1}{m^4}\Big[\ \frac{1}{2^6}(m^4-2m^3+m^2)+\frac{1}{3^3}(m^4-2m^3+2m^2-m)+\frac{5}{2.3^2}(2m^3-3m^2+m)\Big]\quad +$$

$$+\ \frac{1}{n^4}\Big[\frac{1}{2^6}(n^4-2n^3+n^2)+\frac{1}{3^3}(n^4-2n^3+2n^2-n)+\frac{5}{2.3^2}(2n^3-3n^2+n)\quad +$$

$$-2\Big[\frac{(m-1)(n-1)}{mn2^6}+\frac{2}{3^2}\,\frac{(m-n)}{m^2}\ \frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\quad +\frac{2}{3^2m^2n^2}(n^4-2n^3+2n^2-n)\ +$$

$$\frac{(m-n)}{m^2n^2}n(n-1)\frac{5}{2.3^3}\ +\ \frac{5}{2.3^3}\ \frac{(2n^3-3n^2-n)}{m^2n^2}\ \Big],$$

fent $m\to\infty$ i $n\to\infty$ tenim,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\ E\Big[\ \Big|\ \sum_{j=2}^{m}\frac{1}{m^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2dudv\ -$$

$$-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n^2}\int_0^1\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{j-1}U_u^i\bar{U}_v^i\Big)^2dudv\ \Big|^2\Big]\ =$$

$$=\ 2\Big(\ \frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^3}\Big)-\frac{2}{2^6}\ >\ 0.$$

Proposició (2.4.4)

Seguint les notacions del Lema (2.4.2) i del Corol.lari(2.2.5), les variables $\int_{[0,1]^3}\hat{W}^2_{stu}dsdtdu+\int_{[0,1]^3}(\Delta W_{stu})^2dsdtdu$ i

$$\eta\ =\ \sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{16}{(2i-1)^2(2j-1)^2\pi^4}\,\xi^2_{ij}$$

no són igualment distribuïdes.

Demostració:

Provarem que els moments de segon ordre no coincideixen.

$$E\Big[\Big(\int_{[0,1]^3}\hat{W}_{stu}dsdtdu\Big)^2\Big]\ =\ \int_{[0,1]^6}E\big[\ \hat{W}^2_{stu}\hat{W}^2_{s't'u'}\big]dsdtduds'dt'du'=$$

$$= \left[\int_{[0,1]^2} (ss' + 2s\wedge s')\,ds\,ds' \right]^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right)^3 .$$

Per ser les dues integrals independents i igualment distribuïdes, i tenint en compte que

$$E \left[\int_{[0,1]^3} \hat{W}_{stu}\,ds\,dt\,du \right] = \int_{[0,1]^3} stu\,ds\,dt\,du = \frac{1}{2^3},$$

resulta,

$$E \left[\left(\int_{[0,1]^3} \hat{W}^2_{stu}\,ds\,dt\,du + \int_{[0,1]^3} (\Delta W_{stu})^2\,ds\,dt\,du \right)^2 \right] = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{2} = \frac{47}{24}.$$

D'altra banda,

$$E \left[\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{16}{(2j-1)^2 (2i-1)^2 \pi^4} \xi_{ij} \right)^2 \right] =$$

$$= \sum_{i,j,k,h=1}^{\infty} \frac{16^2\, E(\xi_{ij}^2\, \xi_{kh}^2)}{(2i-1)^2 (2j-1)^2 (2k-1)^2 (2h-1)^2 \pi^8} =$$

$$= \left(\sum_{i\geq 1} \frac{4}{(2i-1)^2 \pi^2} \right)^4 + \left(\sum_{j\geq 1} \frac{16}{(2i-1)^4 \pi^4} \right)^2 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{6^2} =$$

$$= \frac{5}{72} \quad \square.$$

III EXISTÈNCIA D'UN TEMPS LOCAL PER A MARTINGALES DE $\mathcal{M}_c^2$

III.1 INTRODUCCIÓ

Sigui $\{W_z,\ z\in R_+^2\}$ un moviment brownià bidimensional. Carioli i Walsh demostren en [9] l'existència d'un procés, anomenat temps local, $\{\phi(x,s,t)\ x\in R,\ (s,t)\in R_+^2\}$, continu conjuntament en les tres variables x,s i t, tal que quasi per a tot ω , i per a tota $f:R\longrightarrow R$ boreliana i afitada i $\forall(s,t)\in R_+$ es compleix:

$$\int_0^s \int_0^t uvf(W_{uv}(\omega))dudv=\int_R \phi(x,s,t)(\omega)f(x)dx \quad (3.1).$$

El procés $\phi(x,s,t)$ no és un temps local respecte la mesura de Lebesgue, que és la mesura associada al procés creixent de W_z, a causa del factor uv que apareix a la part esquerra de la igualtat (3.1).

Walsh en [38] defineix un temps local $L(x,s,t)$, per al moviment brownià W_z, continu en les tres variables, de la forma següent:

$$L(x,s,t)=\int_0^t L_1(x,s,t')dt'$$

on $L_1(x,s,t)$ és el temps local de $\{W_{st'},\ t'\in R_+\}$ considerat com a moviment brownià unidimensional. Aquest temps local és tal que, quasi per a tot ω ,es compleix,

$$\int_0^s \int_0^t f(W_{uv}(\omega))dudv = \int_R L(x,s,t)(\omega)f(x)dx,$$

$f:R\longrightarrow R$ boreliana i afitada i $\forall(s,t)\in R_+$

D.Nualart en [30],mitjançant una fórmula de Itô per a martingales a dos paràmetres, defineix un temps local per a martingales M de $\mathcal{M}_{c,loc}^4$ respecte la variació quadràtica de $\tilde{M}$.

Aplicant la fòrmula de Itô deguda a Wong i Zakai [42], a les martingales adaptades al procés de Wiener,

$$M_z = \int_{R_z} \phi(z')dW_{z'} + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')dW_{z'}dW_{z''} \quad (3.2)$$

on $\phi \in \mathcal{L}^2_W$ i $\psi \in \mathcal{L}^2_{WW}$ [42], podem expressar el seu temps local respecte el procès creixent $\tilde{M}$, com a sumes d'integrals estocàstiques respecte el moviment brownià W_z. Ens podem preguntar com és el temps local de les martingales M del tipus (3.2) respecte la seva variació quadràtica $\langle M \rangle_z = \int_{R_z} \phi^2(z')dz' + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi^2(z',z'')dz'dz''$ aquest problema encara resta obert en el cas general.

En aquest capítol es demostra un teorema d'existència d'un temps local continu en les tres variables, $L(x,s,t)$, per a martingales $M \in \mathcal{M}^2_c$ respecte la seva variació quadràtica, sota certes condicions de continuïtat i derivabilitat dels processos $d\langle M\rangle_z$, $d\langle M_{s.}\rangle_t$ i $d\langle M_{.t}\rangle_s$. Aquest temps local es defineix a partir de la família de temps locals $\{L_1(x,s,t),\ x \geq 0,\ (s,t) \in R^2_+\}$ de les martingales unidimensionals $\{(M_{st})_{s \geq 0}\ \ t \geq 0\}$. La família de temps locals $\{L_1(x,s,t)\ \ x \geq 0, (s,t) \in R^2_+\}$ té bones propietats de continuïtat segons el resultat obtingut per M.Yor [44]

Malauradament aquest Teorema no es pot aplicar en general a les martingales adaptades al procés de Wiener, puix que les condicions de derivabilitat exclouen els processos del tipus $\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} \psi(z,z')dW_z dW_{z'}$, i en particular el procés

$$J_{st} = \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} I_{\{z \curlywedge z'\}} dW_z dW_{z'} \ .$$

Un estudi particular per al procés J_{st} permet obtenir un temps local $L(x,s,t)$ continu en les tres variables respecte la seva variació quadràtica, es a dir, quasi per a tot ω tenim,

$$\int_R f(x)L(x,s,t)(\omega)dx = \int_0^s \int_0^t f(J_{uv}(\omega))uvdudv \quad \text{per}$$

a tota $f: R \longrightarrow R$ boreliana i afitada, i $\forall (s,t) \in R^2_+$.

III.2 COMPARACIÓ DE DUES FÓRMULES DE ITÔ PER A MARTINGALES BROWNIANES. EXPRESSIO DEL TEMPS LOCAL D'AQUESTES MARTINGALES RESPECTE LA VARIACIO QUADRÀTICA DE M.

Wong i Zakai obtenen en [42] una fórmula de Itô per a processos que poden expressar-se com a sumes d'integrals estocàstiques respecte el moviment brownià. Considerem les martingales de quadrat integrable de la forma:

$$M_z = \int_{R_z} \phi(z')\,dW_{z'} + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')\,dW_z\,dW_{z''} \quad ,$$

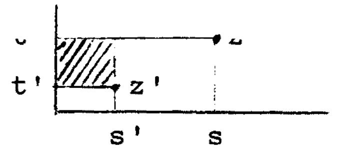
que és un cas particular dels processos estudiats en [42] . Per a tota funció $F:R \longrightarrow R$ contínuament diferenciable de quart ordre, $F(M_z)$ admet l'expressió:

$$\begin{aligned}
F(M_z) = {} & F(M_0) + \int_{R_z} F'(M_{z'})\,\phi(z')\,dW_{z'} + \frac{1}{2}\int_{R_z} F''(M_{z'})\,\phi^2(z')\,dz' + \\
& + \int_{R_z}\int_{R_z} \big[\, F''(M_{z'\vee z''})\,u(z'\vee z, z'')\,\tilde{u}(z'\ z'', z') + \\
& \qquad F'(M_{z'\vee z''})\,\psi(z',z'') \,\big]\, I_{\{z'\barwedge z''\}}\, dW_{z'}\,dW_{z''} + \\
& + \int_{R_z}\int_{R_z} \big[F''(M_{z'\vee z''})\,\psi(z',z'')\,\tilde{u}(z'\vee z'',z') + \\
& \qquad \tfrac{1}{2}F'''(M_{z'\vee z''})\,\tilde{u}\,(z'\vee z'',z')\,u(z'\vee z'',z'') \,\big]\, I_{\{z'\barwedge z''\}}\, dz'\,dW_z \\
& + \int_{R_z}\int_{R_z} \big[F''(M_{z'\vee z''})\,\psi(z',z'')\,u(z'\vee z'',z'') + \\
& \qquad + \tfrac{1}{2}F'''(M_{z'\vee z''})\,\tilde{u}(z'\vee z'',z')\,u\,(z'\vee z'',z'') \big] I_{\{z'\barwedge z''\}}\, dW_{z'}\,dz'' \\
& + \int_{R_z}\int_{R_z} I_{\{z'\barwedge z''\}} \big[\tfrac{1}{2}\,\psi^2(z',z'')\,F''(M_{z'\vee z''}) + \\
& \qquad F'''(M_{z'\vee z''})\,\tilde{u}(z'\vee z'',z')\,u(z'\ z'')\,\psi(z',z'') + \\
& \qquad \tfrac{1}{4}F^{(4)}(M_{z'\vee z''})\,\tilde{u}\,(z'\vee z'',z')\,u\,(z'\ z'',z'') \big]\, dz'\,dz''
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

on $u(z,z')=\phi(z')+\int_{R_z}\psi(\xi,z')dW_\xi$ i

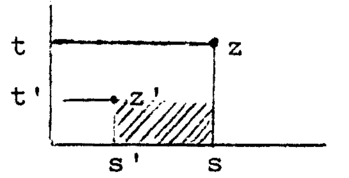
$\tilde{u}(z,z')=\phi(z')+\int_{R_z}\psi(z,\xi)dW_\xi$.

Observem que si $z=(s,t)$ i $z'=(s',t')$ són dos punts de R^2_+ tals que $z'<z$, aleshores,



$$\int_{R_z}\psi(\xi,z')dW_\xi=\int_{[(0,t'),(s',t)]}\psi(\xi,z')dW_\xi$$

Igualment,



$$\int_{R_z}\psi(z',\xi)dW_\xi=\int_{[(s,0),(s',t)]}\psi(z',\xi)dW_\xi$$

Per tant $u(z,z')$ no depèn de s i $\tilde{u}(z,z')$ no depèn de t. Entendrem que $u(t;s',t')=u(\ (s,t),(s',t')\ )$ i

$\tilde{u}(s;s',t')=\tilde{u}(\ (s,t),(s',t')\ )$.

Amb aquesta notació, podem expressar la martingala M_z com

$$M_{st}=\int_{R_{st}}u(t;s',t')dW_{s't'}=\int_{R_{st}}\tilde{u}(s;s't')dW_{s't'}.$$

Sabem que per a tota martingala $M_z\in\mathcal{M}^4_{c,loc}$ i per tota funció $F:R\longrightarrow R$ contínuament diferenciable de quart ordre, $F(M_z)$, $z=(s,t)$, s'expressa [30]:

$$F(M_z)=F(M_0)+\int_{R_z}F'(M_{z'})dM_{z'}+\int_{R_z}F''(M_{z'})d\tilde{M}_z+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^s F''(M_{xt})d\langle M_{.t}\rangle_x+\tfrac{1}{2}\int_0^t F''(M_{sy})d\langle M_{s.}\rangle_y-$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{R_z}F''(M_{z'})d\langle M\rangle_{z'}-\int_{R_z}F'''(M_{z'})d\langle M,\tilde{M}\rangle_{z'}$$

$$-\tfrac{1}{4}\int_{R_z}F^{(4)}(M_z)d\langle\tilde{M}\rangle_z\quad(3.4).$$

<u>Proposició (3.2.1)</u>

Si $M_z = \int_{R_z} \phi(z')dW_{z'} + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')dW_{z'}dW_{z''}$

i $M_z \in \mathcal{M}^2_C$ (o $M_z \in \mathcal{M}^2_{c,loc}$) i $F:R \rightarrow R$ és una funció contínuament diferenciable de quart ordre, les fórmules (3.3) i (3.4) donen la mateixa descomposició per a $F(M_z)$.

Demostració:

Per a poder aplicar la fórmula (3.4) a la martingala M_z necessitem que sigui localment de $\mathcal{M}^4_c$; en el nostre cas, donat que M_z és una martingala browniana de $\mathcal{M}^2_c$, això implica que sigui de $\mathcal{M}^p_{c,loc}$ per a qualsevol $p>1$ [11].

A fi de trobar $\langle M \rangle_z$, apliquem a $F(x)=x^2$ la fórmula (3.3)

$$M^2_z = M^2_0 + 2\int_{R_z} M_{z'}\,\phi(z')dW_{z'} + \int_{R_z} \phi^2(z')dz' +$$

$$+ \int_{R_z}\int_{R_z} [2u(z'\vee z'',z'')\tilde{u}(z'\vee z'',z') + 2M_{z'\vee z''}\psi(z',z'')]$$

$$I_{\{z'\bar{\wedge} z''\}}\, dW_{z'}dW_{z''} +$$

$$+2\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')\tilde{u}(z'\vee z'',z')dz'dW_{z''} +$$

$$+2\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')u(z'\vee z'',z'')dW_{z'}dz'' +$$

$$+ \int_{R_z}\int_{R_z} \psi^2(z',z'')dz'dz'' \qquad (3.5)$$

$\langle M \rangle_z$ és l'únic procés creixent i continu tal que $M_z - \langle M \rangle_z$ és una martingala feble, per tant,

$$\langle M\rangle_z = \int_{R_z} \phi^2(z')dz' + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi^2(z',z'')dz'dz'' \quad ,$$

donat que totes les integrals estocàstiques de (3.5) respecte el procés de moviment brownià són martingales febles.

Podem considerar M_{st} com una martingala unidimensional en s. Aplicant la fórmula de Itô en una dimensió a $F(M_{st})$ on $F(x)= x^2$, resulta:

$$M^2_{st} = M^2_0 + 2\int_0^t\int_0^s M_{(x,t)}u(t;x,y)dW_{xy} +$$

$$+ \frac{1}{2}2\int_0^s\int_0^t u^2(t;x,y)dxdy.$$

Sabem que $\langle M_{.t}\rangle_s$ és l'únic procés creixent i continu tal $(M_{.t} - \langle M_{.t}\rangle)_s$ és una martingala en s, per tant

$$\langle M_{.t}\rangle_s = \int_0^t\int_0^s u^2(t;x,y)dxdy.$$

De forma similar obtenim,

$$\langle M_{s.}\rangle_t = \int_0^s\int_0^t \tilde{u}^2(s;x,y)dydx.$$

Ens interessa calcular $\int_0^s F''(M_{xt})d\langle M_{.t}\rangle_x$. Recordem que

$$M_{xt}= \int_{R_{xt}} u(t;z)dW_z \quad , \quad \text{i}$$

$$\int_0^s F''(M_{xt})d\langle M_{.t}\rangle_x = \int_0^s F''(M_{xt})(\int_0^t u^2(t;x,y)dy\ )dx =$$

$$= \int_{R_{st}} F''(M_{xt})u^2(t;x,y)dydx.$$

Apliquem la fórmula de Itô en t, entre els punts y i t, al producte $F''(M_{xt})u^2(t;x,y)$,

$$F''(M_{xt})u^2(t;x,y) - F''(M_{xy})u^2(y;x,y) = F''(M_{xt})u^2(t;x,y) - F''(M_{xy})\,\phi^2(x,y) =$$

$$= \int_y^t \int_0^x F''(M_{xy_1})2u(y_1;x,y)\psi(x',y_1;x,y)dW_{x'y_1} +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x u^2(y_1;x,y)F'''(M_{xy_1})u(x;x',y_1)dW_{x'y_1} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_y^t \int_0^x [2F'''(M_{xy_1})2u(y_1;x,y)\,\psi(x',y_1;x,y)\tilde{u}(x;x',y_1) +$$

$$+ F''(M_{xy_1})2\,\psi^2(x',y_1;x,y) +$$

$$+ F^{(4)}(M_{xy_1})u^2(y_1;x,y)\tilde{u}^2(x;x',y_1)]\;dy_1dx'.$$

Aleshores:

$$\tfrac{1}{2}\int_{R_{st}} F''(M_{xt})d\langle M_{.t}\rangle_x = \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}} F''(M_{xt})\;\phi^2(x,y)dxdy +$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F''(M_{z\vee z'})u(z\vee z',z')\psi(z,z')dW_z dz' +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F'''(M_{z\vee z'})u\;(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\;dW_z dz' +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [4F'''(M_{z\vee z'})u(z\vee z',z')\psi(z,z')\tilde{u}(z\vee z',z) +$$

$$+F^{(4)}(M_{z\vee z'})u^2(z\vee z',z')\tilde{u}^2(z\vee z',z)\,I_{\{z\wedge z'\}} +$$

$$+F'''(M_{z\vee z'})2\psi^2(z,z')]dzdz'$$

De forma similar obtenim:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^t F''(M_{sy})\,d\langle M_{s.}\rangle_y = \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}} F''(M_{xy})\phi^2(x,y)\,dxdy \;+$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F''(M_{z\vee z'})\tilde{u}(z\vee z',z)\,\psi(z,z')\,dW_{z'}dz$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F'''(M_{z\vee z'})\tilde{u}\,(z\vee z',z)u(z\vee z',z')I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\,dW_{z'}dz$$

$$+ \tfrac{1}{4}\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [\,4F'''(M_{z\vee z'})u(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)\,\psi(z,z') \;+$$

$$+ F^{(4)}(M_{z\vee z'})\tilde{u}^2(z\vee z',z)u(z\vee z',z') \;+$$

$$+ 2F''(M_{z\vee z'})\,\psi^2(z,z')\,]\,I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\,dzdz'.$$

En particular deduïm,

$$\langle M_{.t}\rangle_s = \int_{R_{st}} \phi^2(z)dz \;+\; \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} 2u(z\;\;z',z')\,\psi(z,z')dW_z dz' \;+$$

$$+\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} \psi^2(z,z')dzdz'$$

$$\text{i}\;\langle M_{s.}\rangle_t = \int_{R_{st}} \phi^2(z)dz + \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} 2\tilde{u}(z\;\;z',z)\,\psi(z,z')dW_{z'}dz \;+$$

$$+\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} \psi^2(z,z')dzdz'.$$

Ara ens interessa trobar $\tilde{M}_{st}$. Recordem la següent versió del Teorema de descomposició de Doob-Meyer deguda a D.Nualart[29]:

$$M_{st} = 2\int_{R_{st}} M_z dM_z + 2\tilde{M}_{st} + \langle M_{s.}\rangle_t + \langle M_{.t}\rangle_s - \langle M\rangle_{st}.$$

Comparant amb la fórmula (3.5) resulta,

$$\tilde{M}_{st} = \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} u(z\vee z', z')\tilde{u}(z\vee z', z) I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\, dW_z dW_{z'}.$$

Per tant,

$$\int_{R_{st}} F''(M_z)d\tilde{M}_z = \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F''(M_{z\vee z'})u(z\vee z', z')\tilde{u}(z\vee z', z) I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\, dW_z dW_{z'}$$

$$\text{i } \langle \tilde{M}\rangle_{st} = \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} u^2(z\vee z', z')\tilde{u}^2(z\vee z', z) I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\, dz dz' .$$

Necessitem calcular també $\langle M,\tilde{M}\rangle_z$, per això recordem que

$\langle M,\tilde{M}\rangle_z = \frac{1}{2}\langle M+\tilde{M}\rangle_z - \frac{1}{2}\langle M\rangle_z - \frac{1}{2}\langle\tilde{M}\rangle_z$, a més,

$$\langle M+\tilde{M}\rangle_z = \int_{R_{st}} \phi^2(z)dz +$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [\psi(z,z') + I_{\{z\bar{\wedge} z'\}} u(z\vee z', z')\tilde{u}(z\vee z', z)]^2 dz dz'$$

d'on $2\langle M,\tilde{M}\rangle_{st} = \int_{R_{st}} \phi^2(z)dz +$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [\psi^2(z,z') + u^2(z\vee z', z')\tilde{u}^2(z\vee z', z) + + 2\psi(z,z')u(z\vee z', z')\tilde{u}(z\vee z', z)]^2 I_{\{z\bar{\wedge} z'\}} dz dz' -$$

$$- \int_{R_{st}} \phi^2(z)dz - \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} \psi^2(z,z')\, dz dz' -$$

$$- \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} u^2(z\vee z', z')\tilde{u}^2(z\vee z', z) I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\, dz dz' =$$

$$= 2 \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} \psi(z,z')u(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)dzdz'.$$

Substituint a la fórmula (3.4) les expressions obtingudes per a $\tilde{M}_z$, $\langle M_{.t}\rangle_x$, $\langle M_{s.}\rangle_y$, $\langle M\rangle_z$, $\langle M,\tilde{M}\rangle_z$ i $\langle \tilde{M}\rangle_z$ obtenim la fórmula (3.3). En efecte:

$$F(M_{st}) = \int_{R_{st}} F'(M_z)dM_z + \int_{R_{st}} F''(M_z)d\tilde{M}_z + \tfrac{1}{2}\int_0^s F''(M_{xt})d\langle M_{.t}\rangle_x +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t F''(M_{sy})d\langle M_{s.}\rangle_y - \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}} F''(M_z)d\langle M\rangle_z -$$

$$- \int_{R_{st}} F'''(M_z)d\langle M,\tilde{M}\rangle_z - \tfrac{1}{4}\int_{R_{st}} F^{(4)}(M_z)d\langle \tilde{M}\rangle_z =$$

$$= \int_{R_{st}} F'(M_z)\phi(z)dW_z + \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F'(M_{z\vee z'})\psi(z,z')dW_z dW_{z'} +$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F''(M_{z\vee z'})u(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}dW_z dW_{z'} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}} F''(M_z)\phi^2(z)dz +$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F''(M_{z\vee z'})u(z\vee z',z')\psi(z,z')dW_z dz' +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} F'''(M_{z\vee z'})u^2(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}dW_z dz' +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} \Big[4F'''(M_{z\vee z'}) u(z\vee z', z')\, \psi(z,z') \tilde{u}(z\vee z', z) \; +$$

$$+ F^{(4)}(M_{z\vee z'}) u^2 (z\vee z', z') \tilde{u}(z\vee z', z) \; +$$

$$+ 2F''(M_{z\vee z'}) \psi^2(z, z') \Big] I_{\{z \wedge z'\}} \, dz dz'$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_{R_{st}} F''(M_z)\, \phi^2(z) dz + \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} F'''(M_{z\vee z'}) \tilde{u}(z\vee z', z) \psi(z,z') dz dW_{z'} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} F'''(M_{z\vee z'}) \tilde{u}^2(z\vee z', z) u(z\vee z', z') I_{\{z \barwedge z'\}} \, dW_{z'} dz \; +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} \Big[4F'''(M_{z\vee z'}) u(z\vee z', z')\, \tilde{u}(z\vee z', z)\, \psi(z,z') \; +$$

$$+ F^{(4)}(M_{z\vee z'}) u^2(z\vee z', z') \tilde{u}^2(z\vee z', z) \; +$$

$$+ 2F''(M_{z\vee z'})\, \psi^2(z,z') \Big] I_{\{z \barwedge z'\}} \quad dz dz' \; -$$

$$- \tfrac{1}{2} \int_{R_{st}} F''(M_z) \phi^2(z) dz \; - \tfrac{1}{2} \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} F''(M_{z\vee z'})\, \psi^2(z,z') dz dz' \; -$$

$$- \int_{R_{st}} \; R_{st} \quad F'''(M_{z\vee z'})\, \psi(z,z') u(z\vee z', z') \tilde{u}(z\vee z', z) dz dz' \; -$$

$$- \tfrac{1}{4} \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} F^{(4)}(M_{z\vee z'}) u^2(z\vee z', z') \tilde{u}(z\vee z', z) I_{\{z \barwedge z'\}} \, dz dz' \; =$$

$$= \int_{R_{st}} F'(M_z)\, \phi(z) dW_z \; + \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} F'(M_{z\vee z'})\, \psi(z,z') dW_z dW_{z'} \; +$$

$$+ \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} F''(M_{z\vee z'}) u(z\vee z', z') \tilde{u}(z\vee z', z) I_{\{z \barwedge z'\}} \, dW_z dW_{z'} \; +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_{R_{st}} F''(M_z)\, \phi^2(z) dz \; +$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [\, F''(M_{z\vee z'})u(z\vee z',z')\psi(z,z') + $$
$$+ \tfrac{1}{2}F'''(M_{z\vee z'})u^2(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z) I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}\,] dW_z dz' +$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [F''(M_{z\vee z'})\tilde{u}(z\vee z',z)\,\psi(z,z') +$$
$$+ \tfrac{1}{2}F'''(M_{z\vee z'})\tilde{u}^2(z\vee z',z)u(z\vee z',z') I_{\{z\bar{\wedge} z'\}}] dz dW_{z'} +$$

$$+ \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [\, F'''(M_{z\vee z'})u(z\vee z',z')\tilde{u}(\, z\vee z',z)\,\psi(z,z') +$$
$$+ F^{(4)}(M_{z\vee z'})u^2(z\vee z',z')\tilde{u}^2(z\vee z',z) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}F''(M_{z\vee z'})\,\psi^2(z,z')\,]\, I_{\{z\bar{\wedge} z'\}} dz dz' \quad .$$

D.Nualart demostra l'existència d'un temps local continu per a tota martingala $M\in\mathcal{M}^4_{c,loc}$ respecte la mesura associada a la variació quadràtica de la martingala $\tilde{M}$ [30], és a dir, existeix un procés $\{\hat{L}(x,s,t),\ x\in R,\ (s,t)\in R^2_+\}$ continu en (x,s,t) tal que per a tot punt $(s,t)\in R^2_+$ i per a tota funció mesurable i afitada tenim:

$$\int_{R_{st}} f(M_z)\, d\langle\tilde{M}\rangle_z = \int_R \hat{L}(x,s,t)f(x)dx.$$

Aquet procés $\hat{L}(x,s,t)$ es defineix de la forma:

$$\hat{L}(x,s,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{R_{st}} I_{\{x<M_z<x+\varepsilon\}}\, d\langle\tilde{M}\rangle_z =$$

$$= 2/3\ [(-x)^+]^3 - 2/3\ [(M_{st}-x)^+]^3 +$$
$$+2\int_{R_{st}} [(M_z-x)^+]^2\ dM_z + 4\int_{R_{st}} (M_z-x)^+ d\tilde{M}_z +$$
$$+2\int_0^t (M_{sv}-x)^+ d\langle M_{s\cdot}\rangle_v + 2\int_0^s (M_{uv}-x)^+ d\langle M_{\cdot t}\rangle_u -$$
$$- 2\int_{R_{st}} (M_z-x)^+ d\langle M\rangle_z - 4\int_{R_{st}} I_{\{M_z>x\}}\, d\langle \ddot{M},\tilde{M}\rangle_z \ .$$

En el cas que la martingala M sigui de la forma

$$M_{st} = \int_{R_{st}} \phi(z)dW_z + \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} \psi(z,z')dW_z dW_{z'} \quad ,$$

el temps local $\hat{L}(x,s,t)$ s'expressa:

$$\hat{L}(x,s,t) = 2/3\ [(-x)^+]^3 - 2/3[(M_{st}-x)^+]^3 + 2\int_{R_{st}} [(M_z-x)^+]^2\phi(z)dW_z +$$

$$+4\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} (M_{z\vee z'}-x)^+ \psi(z,z')dW_z dW_{z'} +$$

$$+4\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} (M_{z\vee z'}-x)^+ u(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)I_{\{z\barwedge z'\}}\, dW_z dW_{z'} +$$

$$+2\int_{R_{st}} (M_z-x)^+\phi^2(z)dz +$$

$$+\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [4I_{\{M_{z\vee z'}>x\}}u^2(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)I_{\{z\barwedge z'\}} +$$
$$+4(M_{z\vee z'}-x)^+u(z\vee z',z')\,\psi(z,z')]\, dW_z dz' +$$

$$+\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [4I_{\{M_{z\vee z'}>x\}}\tilde{u}^2(z\vee z',z)I_{\{z\barwedge z'\}}u(z\vee z',z') +$$
$$+ 4(M_{z\vee z'}-x)^+\tilde{u}(z\vee z',z)\,\psi(z,z')]\, dz dW_{z'} +$$

$$+\int_{R_{st}}\int_{R_{st}} [4I_{\{M_{z\vee z'}>x\}}u(z\vee z',z')\tilde{u}(z\vee z',z)\,\psi(z,z') +$$
$$+ 2(M_{z\vee z'}-x)^+\psi^2(z,z')\,]dzdz'.$$

III.3 TEMPS LOCAL RESPECTE LA VARIACIÓ QUADRÀTICA DE LA MARTINGALA

L'objectiu d'aquest apartat és demostrar l'existència, sota certes condicions sobre la martingala, d'un temps local $L(x,s,t)$ respecte la seva variació quadràtica. El resultat que volem demostrar és el següent:

<u>Teorema (3.3.1)</u>

Sigui $\{M_z, \mathcal{F}_z, z\in R^2_+\}$ una martingala de $\mathcal{M}^2_c$ nul.la en els eixos i tal que:

a)
$$<M>_z = \int_{R_z} g(u,v)\,du\,dv$$

on $g(u,v,\omega)$ és un procés mesurable respecte $\mathcal{B}(R^2_+)\times\mathcal{F}$, adaptat, continu i amb derivada respecte u contínua, en $(0,+\infty)^2$.

b)
$$<M_{.t}>_s = \int_0^t f(u,t)\,du \quad \forall t>0$$

on $f(u,t\,\omega)$ és un procés mesurable respecte $\mathcal{B}(R^2_+)\times\mathcal{F}$, adaptat, continu, amb derivada respecte u contínua, i estictament positiu en $(0,+\infty)^2$.

c)
$$<M_{s.}>_t = \int_0^t h(s,v)\,dv$$

on $h(s,v,\omega)$ és $\mathcal{B}(R^2_+)\times\mathcal{F}$ mesurable i tal que, $\sup_{0\leq\tau\leq t} E[|h(\tau,s)|^p]<\infty \quad \forall s,t\geq 0$ i per algun $p>4$.

Aleshores existeix un temps local de la martingala $\{M_z, z\in R^2_+\}$ respecte la seva variació quadràtica, $\{L(x,s,t)\ x\in R,\ (s,t)\in R^2_+\}$, que admet una versió contínua en $(R-\{0\})\times R^2_+$.

Nota Evidentment les condicions a) b) i c) poden enunciar-se intercanviant els papers de s i t, i el resultat del Teorema no s'altera.

Donada una martingala $\{M_z, z\in R_+^2\}$ de $\mathcal{M}_c^2$, podem considerar la família de martingales unidimensionals i contínues $\{(M_{.t})_{s\geq 0}\ t\geq 0\}$ i els seus temps locals $\{L_1(x,s,t), x\in R, s\geq 0\ t\geq 0\}$ respecte la seva variació quadràtica $\langle M_{.t}\rangle_s$.

Definirem el temps local L(x,s,t) buscat mitjançant aquesta família de temps locals. Abans de demostrar el Teorema(3.3.1) necessitem alguns resultats sobre l'existència, la continuïtat i el comportament en les proximitats dels eixos, de la família $\{L_1(x,s,t),\ x\in R,\ s,t\geq 0\}$.

Lema(3.3.2)

Sota la condició c) del Teorema(3.3.1) existeix una versió de $\{L_1(x,s,t), x\in R, s,t\geq 0\}$ contínua en (x,s,t).

Demostració:

En efecte, recordem el següent resultat,

Teorema [vegeu M.Yor [45]].

Si disposem d'una família de martingales contínues unidimensionals $\{M^x, x\in R^d\}$, i $\exists p\in[1,\infty[$ i $\lambda\in]0,1]$ amb $\lambda p>4$ tal que:

$$\| M^x - M^y \|_{H_p} \leq C \| x-y \|^{\lambda} \quad (3.6),$$

aleshores existeix una versió dels temps locals d'aquestes martingales, respecte la seva variació quadràtica, $\{L^a_{xb},\ x\in R^d, a\in R, b\in R_+\}$ continus en (a,b,x).

Només ens cal comprovar que la nostra família de martingales compleix la condició (3.6).

$\forall T,S\geq 0$ considerem $\{(M_{.t})_s,\ 0\leq s\leq S,\ 0\leq t\leq T\}$.

$$\text{Si } t\leq t',\ \| M_{.t} - M_{.t'} \|_{H_p} = E[\sup_{0\leq s\leq S} |M_{st}-M_{st'}|^p]^{1/p} \quad (3.7)$$

Per la desigualtat de Doob ($p>1$) i després per la de Burkholder tenim,

$$(3.7) \leq c_p E[|M_{St}-M_{St'}|^p]^{1/p} \leq c_p \| (\int_{t'}^{t} h(S,v)dv)^{1/2} \|_p \ ;$$

finalment aplicant Jensen i Fubini resulta,

$$\leq c_p |t-t'|^{1/2} (E[\int_{t'}^{t} |h(S,v)|^{p/2} \frac{1}{|t-t'|} dv])^{1/p} \leq$$

$$\leq c_p |t-t'|^{1/2} [\sup_{t\leq\tau\leq t'} E[|h(S,\tau)|^{p/2}]^{1/p} \quad (3.8) .$$

La hipòtesi c) ens assegura que $\exists \bar{p}>4$ tal que

$\sup_{0\leq\tau\leq t} E[|h(\tau,S)|^{\bar{p}}]=K<\infty$. Prenem $p=2\bar{p}$ i resulta,

$$(3.8) \leq |t-t'|^{1/2} K^{1/p} \quad .$$

<u>Lema (3.3.3)</u>

Existeix $N\in\mathcal{F}$, $P(N)=0$, tal que per a tot $x\in R-\{0\}$, existeix una regió d'atur $D_x\subset R^2_+$, tal que $\bar{D}_x^c$ té intersecció buida amb els eixos i $L_1(x,s,t)(\omega)=0$ $\forall(s,t)\in D_x$ i $\forall\omega\in\Omega/N$.

Demostració:

Sigui $x\in R-\{0\}$fix .Definim

$$D_x(\omega)= \{(s,t)\in R^2_+ ; \sup_{z\in R_{st}} |M_z(\omega)| < \frac{\|x\|}{2}\} \ .$$

La continuïtat de la martingala M_z permet assegurar que $D_x(\omega)$és una regió d'atur .

Si ω és tal que la trajectòria $M_z(\omega)$ és contínua, la intersecció de $\overline{D}_x^c(\cdot\,\omega)$ amb els eixos és buida; recordem que la martingala M_z és nul.la sobre els eixos.

Fixem $s,t \in R_+^2$; sigui $A_{s,t} = \{\omega;\ (s,t) \in D_x(\omega)\}$. A_{st} és una part mesurable d' Ω .

Suposem que $A_{st} \neq \phi$; aleshores $\forall\ \omega \in A_{st}$ tenim,

$$I_{\{M_{s't} > x\}}(\omega) = 0 \quad \forall s' \leq s \quad \text{si } x>0$$

$$I_{\{M_{s't} > x\}}(\omega) = 0 \quad \forall s' \leq s \quad \text{si } x<0,$$

Per la propietat de localitat de la integral estocàstica, $\forall\ \omega \in A_{st}/N_{st}$, on $P(N_{st})=0$,

$$\left(\int_0^s I_{\{M_{s't} > x\}}\, d_1 M_{s't}\right)(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ M_{st} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

i per tant,

$$L_1(x,s,t)(\omega) = 2\left[(M_{st}-x)^+ - x^- - \int_0^s I_{\{M_{s't} > x\}}\, d_1 M_{s't}\right](\omega) = 0.$$

Sigui $(s_n, t_n)_{n\,1}$ un conjut numerable i dens de R_+^2. Prenem $N_x = \bigcup_n N_{s_n t_n}$ (la unió s'estén als $n \in N$ tals que $A_{s_n t_n} \neq \emptyset$).

Aleshores, $\forall \omega \in \Omega/N$, si $(s_n, t_n) \in D_x(\omega)$ resulta que $L_1(x, s_n, t_n)(\omega) = 0$.

Per la continuïtat del procés $L_1(x,s,t)$ en les tres variables demostrada en el Lema (3.3.2), $L_1(x.s.t)(\omega) = 0 \quad \forall (s,t) \in D_x(\omega)$ i $\forall \omega \in \Omega/N$ amb $P(N_x) = 0$.

Observem que si $x < x'$,

$$D_x(\omega) = \{(s,t) \in R_+^2;\ \sup_{z \in R_{st}} |M_z(\omega)| < \frac{|x|}{2}\} \subset D_{x'}(\omega).$$

Prenem $N = \bigcup_{q \in Q} N_q$; Aleshores $\forall x \in R/Q$ i $\forall q > x$, $q \in Q$, tenim,

$$L_1(r,s,t)(\omega) = 0 \quad \forall (s,t) \in D_x \text{ i } \forall \omega \in \Omega/N,$$

per la continuïtat de L_1, $L_1(x,s,t)(\omega)=0$ $\forall (s,t) \in D_x$ i $\forall \omega \in \Omega/N$ amb $P(N) = 0$ $\square$.

Amb l'ajut d'aquests dos Lemes podem demostrar el Teorema (3.3.1).

Demostració del Teorema (3.3.1).

Hem de trobar un procés $L(x,s,t)$ continu en $(0,\infty) x R^2_+$, tal que, execpte en un conjunt N de probabilitat zero, per a tota $\phi : R \longrightarrow R$ boreliana i afitada,

$$\int_0^s \int_0^t \phi(M_{uv}) d < M >_{uv} = \int_0^t \int_0^s \phi(M_{uv}) g(u,v) du dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} L(x,s,t) \phi(x) dx.$$

El procés $L_1(x,s,t)$ compleix una igualtat similar, concretament,

$$\int_0^s \phi(M_{uv}) d < M_{.t} >_u = \int_0^s \phi(M_{uv}) f(u,t) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x,s,t) \phi(x) dx.$$

Sembla natural, doncs, definir el procés $L(x,s,t)$ com,

$$L(x,s,t) = \int_0^t \frac{\partial L_1(x,s,t)}{\partial s} \frac{g(s,v)}{f(s,v)} dv.$$

Malauradament no sabem si $L_1(x,s,t)$ serà derivable respecte s; per solventar aquest problema donem la següent definició del procés $L(x,s,t)$,

$$L(x,s,t) = \int_0^t \frac{g(s,v)}{f(s,v)} L_1(x,s,v)dv - \int_0^t \int_0^s \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) L_1(x,s,t)dudv. \quad (3.9)$$

La continuïtat del procés $L(x,s,t)$ ve donada directament per la continuïtat dels processos g, f, i L_1.

Observem que quasi per a tot $\omega \in \Omega$ les funcions

$$\frac{g(s,v)}{f(s,v)} L_1(x,s,v)(\omega) \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) L_1(x,u,v)(\omega) \quad (x\neq 0)$$

són integrables en $[0,T]$ i $[0,T]\times[0,S]$ respectivament, per a tot $S,T>0$ i per a tot $x\neq 0$, donat que $f(u,v)$ és estrictament positiva en $(0,+\infty)^2$ i pel Lema (3.3.3) podem trobar una regió $D_x(\omega)$ (si $\omega \notin N$, $P(N)=0$) tal que $L_1(x,u,v)(\omega)=0$ $\forall (u,v)\in D_x(\omega)$, i per tant

$$\frac{g(u,v)}{f(u,v)} L_1(x,u,v)(\omega) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) L_1(x,u,v)(\omega) = 0.$$

Així doncs el procés $L(x,s,t)$ està ben definit i és continu en $(R-\{0\})\times R^2_+$.

Per acabar la demostració ens falta comprovar que $L(x,s,t)$ és un temps local de $(M_z)_{z\in R^2_+}$ respecte la seva variació quadràtica.

Sigui $\phi: R \longrightarrow R$ una funció boreliana i afitada. Calculem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(x,s,t)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \frac{g(s,v)}{f(s,v)} L_1(x,s,v)\phi(x)dvdx -$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(s,v)}{f(s,v)}\right) L_1(x,u,v)\phi(x)dudvdx \quad (3.10).$$

Aplicant Fubini i tenint en compte la propietat de temps local de $L_1(x,s,t)$,

$$(3.10) = \int_0^t \frac{g(s,v)}{f(s,v)} \int_0^s \phi\,(M_{uv}) f(u,v)\,du\,dv \; -$$

$$- \int_0^t \int_0^s \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) \int_0^u \phi\,(M_{s'v}) f(s',v)\,ds'\,du\,dv \quad (3.11).$$

Sabem que

$$\frac{g(s,v)}{f(s,v)} \int_0^s \phi(M_{uv}) f(u,v)\,du \; - \int_0^s \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) \int_0^u \phi\,(M_{s'v}) f(s',v)\,ds'\,du =$$

$$= \int_0^s \frac{g(u,v)}{f(u,v)} \phi(M_{uv}) f(u,v)\,du = \int_0^s g(u,v)\,\phi(M_{uv})\,du.$$

Substituint en (3.11) queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(x,s,t)\,\phi(x)\,dx = \int_0^t \int_0^s g(u,v)\,\phi(M_{uv})\,du\,dv \quad .$$

<u>Nota</u> Si D és una regió d'atur, i les condicions del Teorema(3.3.1) restringides a D es compleixen, la demostració es pot localitzar i el resultat és vàlid dins D.

Per exemple, si $(M_z)_{z\in R^2_+}$ és una martingala de $\mathcal{M}^2_c$ nul.la en els eixos tal que compleix les hipòtesis a) i b) del Teorema (3.3.1) ultra la condició que h(s,v) és un procés continu en $[0,\infty)^2$, aleshores existeix un temps local L(x,s,t) continu en $(R-\{0\})\times R^2_+$ respecte la seva variació quadràtrica. Només cal prendre les regions d'atur

$$D_n(\omega) = \{(s,t) \;/\; \sup_{(u,v)\in R_{st}} |h(u,v,\omega)| \leq n\} \quad ,$$

i aplicar el Teorema(3.3.1) dins D_n.

Estudiarem ara com s'interpreta el Teorema(3.3.1) en alguns casos particulars com són les martingales fortes i les martingales brownianes.

1 Martingales Fortes

Sigui $\{M_z, \mathcal{F}_z, z \in R^2_+\}$ una martingala forta de $\mathcal{M}^2_c$. En aquest cas $\langle M_{.t}\rangle_s = \langle M_{s.}\rangle_t = \langle M\rangle_{st}$. El Teorema (3.3.1) queda,

Si $\langle M\rangle_{st} = \int_{R_{st}} g(u,v)dudv$ on $g(u,v)$ és mesurable respecte $\mathcal{B}(R^2_+) \times \mathcal{F}$, adaptat, continu, derivable respecte u amb derivada contínua a $(0,\infty)^2$ i estricament positiu en $(0,\infty)^2$; aleshores existeix un temps local $L(x,s,t)$ de la martingala $(M_z)_{z\in R^2_+}$ respecte la seva variació quadràtica, que admet una versió contínua en $(R-\{0\})\times R^2_+$.

2 Martingales Brownianes

Tota martingala de quadrat integrable, contínua, i nul.la en els eixos, $\{M_z, z\in R^2_+\}$, adaptada a la filtració d'un brownià $\{W_z, z\in R^2_+\}$, admet l'expressió

$$M_z = \int_{R_z} \phi(z')dW_{z'} + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z',z'')dW_{z'}dW_{z''}$$

on $\phi \in \mathcal{L}^2_W$ i $\psi \in \mathcal{L}^2_{WW}$.

Veiem quina expressió admeten $\langle M\rangle_z$, $\langle M_{s.}\rangle_t$ i $\langle M_{.t}\rangle_s$ en funció de $\phi(z)$ i $\psi(z,z')$.

$$\langle M\rangle_z = \int_{R_z} \phi^2(z')dz' + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi^2(z',z'')dz'dz'' =$$

$$= \int_{R_z} \phi^2(z')dz' + \int_{R_z}\int_{R_{uv}} \psi^2(x,v;u,y)dxdydudv =$$

$$= \int_{R_z} [\, \phi^2(u,v) + \int_{R_{uv}} \psi^2(x,v;u,y)dxdy \,]dudv =$$

$$= \int_{R_z} g(u,v)dudv \quad \text{on } g(u,v) = \phi^2(u,v) + \int_{R_{uv}} \psi^2(x,v;u,y)dxdy.$$

$$\langle M_{s.}\rangle_t = \int_0^t\int_0^s (\,\phi(x,y) + \int_{R_{sy}} \psi(x,y;\zeta)dW_\zeta\,)^2 dxdy =$$

$$= \int_0^t h(s,y)dy \quad \text{on } h(s,y) = \int_0^s (\,\phi(x,y) + \int_{R_{sy}} \psi(x,y;\zeta)dW_\zeta\,)^2 dx$$

i finalment,

$$\langle M_{.t}\rangle_s = \int_0^t\int_0^s (\,\phi(x,y) + \int_{R_{xt}} \psi(\zeta;x,y)dW_\zeta\,)^2 dxdy =$$

$$= \int_0^s f(x,t)dx, \quad \text{on } h(x,t) = \int_0^t (\,\phi(x,y) + \int_{R_{xt}} \psi(\zeta;x,y)dW_\zeta\,)^2 dy.$$

Si $\psi\not\equiv 0$ no és d'esperar que $f(x,t)$ sigui derivable en x, degut a la integral estocàstica que apareix en la definició de $f(x,t)$.

Si $\psi\equiv 0$, aleshores $\{M_z, z\in R_+^2\}$ és una martingala forta i les condicions que hem obtingut en 1 per a $g(u,v)$ es transporten a $\phi(u,v)$ que ja sabem que és mesurable i adaptada; és a dir, per a que es compleixin les condicions del Teorema(3.3.1) n'hi ha prou que $\phi^2(u,v)$ sigui un procés continu, derivable respecte u en $(0,\infty)$, amb derivada contínua en $(0,+\infty)$ i no nul en $(0,\infty)^2$.

No podem aplicar el Teorema (3.3.1) al procés

$\{J_z = \int_{R_z}\int_{R_z} I_{\{z\bar{\wedge}z'\}}\, dW_z . dW_{z'}, \quad z\in R_+^2\}$ donat que

$f(x,t) = \int_0^t \left(\int_{R_{xt}} I_{\{\zeta\bar{\wedge}(x,y)\}}\, dW_\zeta\right)^2 dy = \int_0^t (W_{xt}-W_{xy})^2\, dy$ és una

semimartingala amb la part martingala de la descomposició de Doob-Meyer, no nul.la. Trobar el temps local del procés J respecte la seva variació quadràtica requereix un estudi especial.

III.4 TEMPS LOCAL DEL PROCÉS $(J_z)_{z\in R_+^2}$ RESPECTE LA SEVA VARIACIÓ QUADRÀTICA.

L'objectiu d'aquest apartat és trobar un temps local per al procés J_z, respecte la seva variació quadràtica, continu en les tres variables.

No podem utilitzar el factor $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right)$ en la definició de $L(x,s,t)$ tal com ho feiem en el Teorema(3.3.1), puix que, segons hem observat al final de l'apartat 3.3, $f(u,v)$ no és diferenciable en u. Ara bé, podem interpretar $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right)$ com el diferencial d'una semimartingala i recuperar, amb certes modificacions, la definició (3.9) de $L(x,s,t)$.

Recordem les variacions respecte una i dues dimensions del procés J_{st}:

$$\langle J\rangle_{st} = \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} I_{\{z\curlywedge z'\}}\, dz\,dz' = \frac{s^2t^2}{2} = \int_{R_{st}} g(x,y)\,dx\,dy$$

on $g(x,y)=xy \;\forall x,y\in R_+$.

$$\langle J_{.t}\rangle_s = \int_0^s\int_0^t (W_{xt}-W_{xy})^2\,dy\,dx = \int_0^s f(x,t)\,dx,$$

$$\text{on}\quad f(x,t) = \int_0^t (W_{xt}-W_{xy})^2\,dy.$$

$$\langle J_{s.}\rangle_t = \int_0^s\int_0^t (W_{sy}-W_{xy})^2\,dx\,dy = \int_0^t h(s,y)\,dy$$

$$\text{on}\ h(s,y) = \int_0^s (W_{sy}-W_{xy})^2\,dx.$$

Proposició (3.4.1)

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} E\,[|h(s,\tau)|^p]<\infty \qquad \forall p\geq 1 \text{ i } \forall s,t\geq 0.$$

Demostració:

$$E\,[\,|h(s,\tau)|^p\,]= E\,[|\int_0^s (W_{s\tau}-W_{x\tau})^2\,dx|^p\,]\leq$$

$$\leq s^{p-1}\int_0^s E\,[(W_{s\tau}-W_{x\tau})^{2p}\,]\,dx=$$

$$= s^{p-1}E\,[N^{2p}\,]\int_0^s (s\tau-x\tau)^p dx=s^{p-1}\,\frac{2p!}{p!2^p}\tau^p\,\frac{s^{p+1}}{p+1}$$

on N és una variable aleatòria N(0,1).

Aleshores,

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} E\,[|h(s,\tau)|^p\,]\leq s^{2p}\,\frac{2p!\;t^p}{p!2^p(p+1)}<\infty \qquad \forall s,t\geq 0,\ \forall p\geq 1 \quad .$$

Considerem la família de martingales unidimensionals $\{(J_{st})_{s\geq 0}\ ,\ \forall t\geq 0\}$. Pel Lema(3.3.2) i el Lema(3.4.1) existeix una versió dels temps locals d'aquestes martingales $\{L_1(x,s,t)\ \ t\geq 0,\ x\in R,\ s\geq 0\}$ contínues en $R\times R_+^2$.

Per a tot v>0, el procés $\{f(u,v)=\int_0^v (W_{uv}-W_{u\tau})^2\,d\tau\}_{u\geq 0}$ és una semimartingala, nul.la a l'origen, amb la següent descomposició de Doob-Meyer, $f(u,v)=M_{uv}+V_{uv}$, on

$$M_{uv}=\int_0^v [(W_{uv}-W_{u\tau})^2-u(v-\tau)\,]\,d\tau \text{ (martingala)}$$

$$V_{uv}=\int_0^v u(v-\tau)\,d\tau=\frac{uv^2}{2} \qquad \text{(procés de variació afitada)}$$

Per a tot $\varepsilon<0$, considerem $\psi_\varepsilon : R \to R$, contínua i dues vegades diferenciable, creixent i tal que $\psi_\varepsilon(x)=\varepsilon$ si $-\infty<x<\varepsilon$, $\psi_\varepsilon(x)=x$ si $x>2\varepsilon$, $|\psi_\varepsilon'|\leq 1$ i $|\psi_\varepsilon''|\leq 1$.

Definim la funció
$$F : R_+ \times R \longrightarrow R .$$
$$(x,\ y) \to \frac{x}{\psi_\varepsilon(y)}$$

La funció F és contínua i de classe $\mathcal{C}^2$ a $(0,+\infty)\times R$. Apliquem la fórmula de Itô en $[0,u]$ i tenim,

$$F(u,f(u,v)) = \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} =$$

$$= \int_0^u \frac{du}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} - \int_0^u \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} \psi_\varepsilon'(f(u,v))d_1 f(u,v) +$$

$$+ \int_0^u \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^3} \psi_\varepsilon'(f(u,v))^2\, d<M_{.v}>_u - \tfrac{1}{2}\int_0^u \frac{\psi_\varepsilon''(f(u,v))u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} d<M_{.v}>_u .$$

Quan $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\psi_\varepsilon(f(u,v)) \longrightarrow f(u,v)$ q.s. , $\psi_\varepsilon'(f(u,v)) \to 1$ q.s. , i $\psi_\varepsilon''(f(u,v)) \longrightarrow 0$ q.s.

Definim les aproximacions del temps local de J_{st} com,

$$L_\varepsilon(x,s,t) = \int_0^t \frac{sv}{f(u,v)} L_1(x,s,t)du -$$

$$- \int_0^t \int_0^s L_1(x,s,t)d_1\left(\frac{uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} \right)dv =$$

$$= \int_0^t \frac{sv}{f(u,v)} L_1(x,s,t)du - \int_0^t \int_0^s L_1(x,u,v)\left[\frac{v\,du}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} - \right.$$

$$- \frac{uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} \psi_\varepsilon'(f(u,v))d_1 f(u,v) + \frac{uv\,\psi_\varepsilon'(f(u,v))}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^3} d<M_{.v}>_u$$

$$\left. -\tfrac{1}{2} \frac{\psi_\varepsilon''(f(u,v))uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} d<M_{.v}>_u \right]dv \qquad (3.12)$$

per a tot $x\neq 0$ i per a tot $s,t\in R_+^2$.

Per a donar una millor expressió de $L(x,s,t)$ calculem $\langle M_{.v}\rangle_u$. Per la fórmula de Itô sabem:

$$(W_{uv}-W_{u\tau})^2 = u(v-\tau) + 2\int_0^u (W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau})\,d_1(W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau}).$$

Aleshores,

$$\langle M_{.v}\rangle_u = \left\langle 2\int_0^v\int_0^u (W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau})\,d_1(W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau})\,d\tau\right\rangle =$$

$$= 4\int_0^v\int_0^u\int_0^u (W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau})(W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau'})(v-\tau\vee\tau')\,d\sigma\,d\tau'\,d\tau =$$

$$= 4\int_0^u\left(\int_0^v\int_0^v (W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau})(W_{\sigma v}-W_{\sigma\tau'})(v-\tau\vee\tau')\,d\tau\,d\tau'\right)d\sigma .$$

Substituint $d\langle M_{.v}\rangle_u$ en (3.12) tenim:

$$L_\varepsilon(x,s,t) = \int_0^t \frac{sv}{f(u,v)}L_1(x,u,v)\,dv - \int_0^t\int_0^s \frac{v}{\psi_\varepsilon(f(u,v))}L_1(x,u,v)\,du\,dv +$$

$$+\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2}\psi_\varepsilon'(f(u,v))L_1(x,u,v)\,d_1M_{uv}\,dv +$$

$$+\int_0^t\int_0^s L_1(x,u,v)\frac{uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2}\psi_\varepsilon'(f(u,v))\,d_1V_{uv}\,dv -$$

$$-\int_0^t\int_0^s L_1(x,u,v)\frac{uv\,\psi_\varepsilon'(f(u,v))}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^3}4\left(\int_0^v\int_0^v (W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})(v-\tau\vee\tau')\,d\tau\,d\tau'\right)du\,dv.$$

El Lema (3.3.3) ens permet assegurar que els processos $\dfrac{L_1(x,u,v)}{f(u,v)^k}$ $(k=1,2,3)$ són continus i integrables en $[0,S]\times[0,T]$.

Per calcular el $\lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(x,s,t)$ podem aplicar convergència dominada en tots els termes excepte en la integral

$$\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} L_1(x,u,v)\psi_\varepsilon'(f(u,v))d_1M_{uv}dv,$$

tenint en compte que,

$$\left|\frac{L_1(x,u,v)}{\psi_\varepsilon(f(u,v))}\right| \leq \left|\frac{L_1(x,u,v)}{f(u,v)}\right| \quad , \quad \left|\frac{L_1(x,u,v)}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2}\psi_\varepsilon'(f(u,v)\right| \leq \left|\frac{L_1(x,u,v)}{f(u,v)^2}\right|$$

i $\left|\frac{L_1(x,u,v)}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^3}\psi_\varepsilon''(f(u,v))\right| \leq \left|\frac{L_1(x,u,v)}{f(u,v)^3}\right|$.

La integral $\int_0^t \int_0^s \frac{L_1(x,u,v)}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2}\psi_\varepsilon'(f(u,v))d_1M_{uv}dv$ convergeix el $L^2(\Omega, \mathcal{F},P)$ cap a $\int_0^t \int_0^s \frac{L_1(x,u,v)}{f(u,v)^2} d_1M_{uv}dv$. En efecte, les dues variables són de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ perquè $\frac{L_1(x,u,v)}{f(u,v)^2}u$ té moments de tots els ordres, com veurem en el Teorema(3.4.2); a més, aplicant de nou el teorema de convergència dominada, obtenim,

$$E\left[\left|\int_0^s \int_0^t \frac{L_1(x,u,v)}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2}\psi_\varepsilon'(f(u,v)) - \frac{uvL_1(x,u,v)}{f(u,v)^2} d_1M_{uv}dv\right|^2\right] \leq$$

$$\leq C(s,t)E\left[\int_0^s \int_0^t \left|\frac{L_1(x,u,v)}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} - \psi_\varepsilon'(f(u,v)) - \frac{uvL_1(x,u,v)}{f(u,v)^2}\right|^2 d\langle M_{.v}\rangle_u dv\right]$$

que convergeix a zero quan $\varepsilon \to 0$.

Aleshores:

$$L(x,s,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(x,u,t) = \int_0^t \int_0^s \frac{sv}{f(u,v)} L_1(x,u,v)dv -$$

$$- \int_0^s \int_0^t \frac{v}{f(u,v)} L_1(x,u,v)dudv + \int_0^s \int_0^t \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)d_1 M_{uv} dv +$$

$$+ \int_0^s \int_0^t \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)d_1 V_{uv} du -$$

$$- \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^3} L_1(x,u,t)4 \int_0^v \int_0^v (W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})(v-\tau\vee\tau')d\tau d\tau\, dudv \tag{3.13}$$

$\forall x \neq 0$ i $\forall s,t \geqslant 0$.

Teorema(3.4.2)

El procés $L(x,s,t)$ definit en (3.13) té una versió contínua en $(R-\{0\})xR^2_+$.

Demostració:

Excepte la integral $\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)d_1 M_{uv} dv$,

tots els sumands que defineixen $L(x,s,t)$ són integrals per trajectòries de processos continus, i per tant seran processos continus en $(R-\{0\})xR^2_+$.

Per demostrar la continuïtat del procés

$$\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)d_1 M_{uv} dv$$

apliquem el criteri de Kolmogorov de l'existència de versions contínues [36].

Sigui $S,T,A \in R_+ - \{0\}$. Per a tot s i $s' \in [0,S]$, t i $t' \in [0,T]$ $|x|$ i $|x'| \in (0,A]$, i $\forall p>1$, demostrarem que,

$$E[|\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)d_1 M_{uv} dv - \int_0^{t'} \int_0^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v)d_1 M_{uv} dv|^p] \leqslant$$

$$\leqslant C_p[\ E[|\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2}(L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v))d_1M_{uv}dv|^p] +$$

$$+E[|\int_0^t\int_s^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2}L_1(x',u,v)d_1M_{uv}dv|^p] \quad +$$

$$+E[|\int_t^{t'}\int_0^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2}L_1(x',u,v)d_1M_{uv}dv|^p]\ ]\leqslant$$

$$\leqslant K_1(p,S,T,A)|x-x'|^{p/2} \quad + \quad K_2(p,S,T,A)\ |s-s'|^{p/4} \ +$$
$$+\ K_3(p,S,T,A)\ |t-t'|^p.$$

a) $E[|\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2}\ [L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]\,d_1M_{uv}dv|^p\ ]\leqslant$

$\leqslant K_1(p,S,T,A)|x-x'|^{p/2}$. En efecte, per Hölder,

$$E[|\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2}\ [L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]\,d_1M_{uv}dv|^p\ ]\leqslant$$

$$\leqslant t^{2p-1}\int_0^t E\ [\sup_{s\in[0,S]}|\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2}[L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]\,d_1M_{uv}|^p]dv,$$

per la desigualtat maximal i per la de Burkholder, tenim,

$$E[\sup_{s\in[0,S]}|\int_0^s \frac{u}{f(u,v)^2}[L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]d_1M_{uv}|^p\ ]\leqslant$$

$$\leqslant C_pE[|\int_0^S \frac{u}{f(u,v)^2}[L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]\ d_1M_{uv}|^p\ ]\leqslant$$

$$\leqslant C_pE[|\int_0^S \frac{u^2}{f(u,v)^4}\ [L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]^2\ d\langle M_{.v}\rangle_u|^{p/2}]\ .$$

Aplicant la desigualtat de Schwartz reiteradament i després la de Jensen, obtenim,

$$\leqslant C_p E[\,|\int_0^S \frac{u^4}{f(u,v)^8}\,[L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]\,du|^{p/4}\,.$$

$$.\,|\int_0^S (4\int_0^v\int_0^v (W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})(v-\tau\vee\tau')\,d\tau\,d\tau')^2\,du|^{p/4}\,]\leqslant$$

$$\leqslant C_p[E[\,|\int_0^S \frac{u^4}{f(u,v)^8}[L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]^4\,du|^{p/2}]]^{1/2}.$$

$$.[E\,|\int_0^S (4\int_0^v\int_0^v (W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})(v-\tau\vee\tau')\,d\tau\,d\tau')^2\,du|^{p/2}]\,]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_p(S)[E\,[(\int_0^S \frac{u^8}{f(u,v)^{16}}\,du)^{p/2}]]^{1/4}\,.[E\,[(\int_0^S |L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)|^8\,du)^{p/2}].$$

$$.[E\,[\,|\int_0^S (4\int_0^v\int_0^v (W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})(v-\tau\vee\tau')\,d\tau\,d\tau')^{2p}\,du|\,]\,]^{1/4}\leqslant$$

$$\leqslant C(p,S,T)(E\,[\,|\int_0^S \frac{u^4}{f(u,v)^4}\,du|^{p/2}]^{1/4}.$$

$$.\;E\;(\int_0^S |L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)|^8 du)^{p/2}]^{1/4}.\;2^p.$$

$$.(E\,[\int_0^S\int_0^v\int_0^v |(W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})^{2p}(v-\tau\vee\tau')|\,d\tau\,d\tau'\,du\,])^{1/4}\leqslant$$

$$\leqslant C_1(p,S,T)\;(\;E\;[\int_0^S (\frac{u}{f(u,v)^2})^{8p}du]\,)^{1/8}.$$

$$.\,[\sup_{s\in[0,S]} E\,[\,|L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)|^{8p}]^{1/8}\,.$$

$$.(\int_0^S\int_0^v\int_0^v E\,[|(W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})|^{2p}\,].(v-\tau\vee\tau')\,d\tau\,d\tau'\,du)^{1/4}$$

Estudiem aquests factors,

1) $\left(E\left[\int_0^S \left|\frac{u}{f(u,v)^2}\right|^{8p} du \right]\right)^{1/8} = \left(\int_0^S E\left[\left|\frac{u}{f(u,v)^2}\right|^{8p}\right] du\right)^{1/8}$

Observem que el procés $\{ \frac{W_{uv} - W_{u\tau}}{\sqrt{u}} , \tau \in [0,v]\}$ segueix la mateixa distribució que el procés $\{ W_{1v} - W_{1\tau} ; \tau \in [0,1]\}$.

Aleshores, $\int_0^v \frac{(W_{uv} - W_{u\tau})^2}{u} d\tau$ té la mateixa llei que la variable $\int_0^1 (W_{1v} - W_{1\tau})^2 d\tau$ i per simetria la mateixa que $\int_0^1 W_{1\tau}^2 d\tau$.

La variable $\left(\int_0^1 W_{1\tau} d\tau \right)^{-1}$ té moments de tots els ordres, donat que, $P\left(\int_0^1 W_{1\tau} d\tau < \varepsilon \right) \leq \sqrt{2} \exp\left(- \frac{1}{2^7 \varepsilon^2}\right)$ (Vegeu Lema 8.6 Ikeda Watanabe [18]). Sigui $\hat{K}(q) = E\left[\left| \int_0^1 W_{1\tau} d\tau \right|^{-q} \right]$, aleshores,

$$\left(\int_0^S E\left[\left| \frac{u}{f(u,v)^2} \right|^{8p} \right] du\right)^{1/8} \leq \hat{K}(8p) s^{1/8} = C_2(p,S).$$

2) $E\left[\left| (W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv} - W_{u\tau'}) \right|^{2p} \right] \leq E\left[|W_{uv} - W_{u\tau}|^{4p} \right]^{1/2} .$

$\cdot E\left[|W_{uv} - W_{u\tau'}|^{4p} \right]^{1/2} =$

$$= E\left[\left| \frac{W_{uv} - W_{u\tau}}{u(v-\tau)} \right|^{4p} \right] u^{2p} (v-\tau)^p (v-\tau')^p = K(4p) u^{2p} (v-\tau)^p (v-\tau')^p,$$

on K(p) és el moment d'ordre p de la distribució N(0,1).

Per tant,

$$\left(\int_0^S \int_0^v \int_0^v E[\,|(W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})|^{2p}\,](v-\tau\vee\tau')^{2p} d\tau\, d\tau' du\right)^{1/4} \leq$$

$$\leq K(4p)^{1/2}\left(\int_0^S \int_0^v \int_0^v u^{2p}(v-\tau\vee\tau')^{2p}(v-\tau)^p(v-\tau')^p d\tau\, d\tau' du\right)^{1/4} \leq$$

$$\leq C_3(p,S,T).$$

3) El Teorema(3.2) de Barlow i Yor [45] demotra que per a tot $p\in(0,\infty)$ existeix una constant universal C_p tal que per a tot parell de martingales contínues (M,N),

$$\sup_{a\in R} \|\sup_{t\geq 0} |L_t^a(M) - L_t^a(N)\|_{L^p} \leq C_p \|M-N\|_{H_p}^{1/2} \{\|M\|_{H_p}^{1/2} + \|N\|_{H_p}^{1/2}\}$$

(on $L_t^a(M)$ i $L_t^a(N)$ són els temps locals en el punt a de les martingales M i N respectivament, respecte la seva variació quadràtica).

Aplicant aquest Teorema als processos $(J_{sv}-x)_{s\in R_+}$ i $(J_{sv}-x')_{s\in R_+}$ en el punt a=0, tenim,

$$\left(E[\sup_{s\leq S} |L_1(x,s,v)-L_1(x',s,v)|^{8p}\,]\right)^{1/8p} \leq$$

$$\leq C_p|x-x'|^{1/2}\{\|J-x\|_{H_{8p}}^{1/2} + \|J-x'\|_{H_{8p}}^{1/2}\}.$$

Per tant, $\sup_{s\in[0,S]} E[\,|L_1(x,s,v)-L_1(x',s,v)|^{8p}\,]^{1/8} \leq$

$$\leq C'_p\,|x-x'|^{p/2}\{\|J-x\|_{H_{8p}}^{1/2} + \|J-x'\|_{H_{8p}}^{1/2}\} \leq C_4(p,A,T)|x-x'|^{p/2},$$

puix que $\|J-x\|_{H_{8p}} = (E[\sup_s (J_{sv}-x)^{8p}])^{1/8p} \leq C(p)E[(J_{Sv}-x)^{8p}]^{1/8p} \leq$

$$\leq C(p)E[\,\langle J_{.v}\rangle_S^{4p}\,]\,)^{1/8p} =$$

$$= C(p)\left(E\left[\left|\int_0^S\int_0^v (W_{xv}-W_{xy})^2\,dydx\right|^{4p}\right]\right)^{1/8p} \leq$$

per la desigualtat de Jensen,

$$\leq C(p)E\left(\left[\int_0^S\int_0^v |W_{xv}-W_{xy}|^{8p}dydx\right]\right)^{1/8p} =$$

$$= C(p)\left(\int_0^S\int_0^v x(v-y)\,dydx\right)^{1/8p} K(8p)^{1/8p} \leq C(p,S,T).$$

Recuperant les desigualtats dels apartats 1),2) i 3) resulta,

$$E\left[\left|\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2}\left[L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)\right] d_1M_{uv}du\right|^p\right]\leq$$

$$\leq C_1(p,S,T)C_2(p,S)C_3(p,S,T)C_4(p,A,T)|x-x'|^{p/2} = K_1(p,S,T,A)|x-x'|^{p/2}.$$

b) Per a demostrar que

$$E\left[\left|\int_0^t\int_s^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v)d_1M_{uv}dv\right|^p\right]\leq K_2(p,T,A)|s-s'|^{p/4}$$

procedim igual que en a),

$$E\left[\left|\int_0^t\int_s^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v)d_1M_{uv}dv\right|^p\right]\leq$$

$$\leq t^{p-1}\int_0^t E\left[\int_s^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v)d_1M_{uv}dv\right|^p\Big]\leq$$

$$\leq C_p t^{2p-1}\int_0^t E\left[\left|\int_s^{s'} \frac{u^2}{f(u,v)^4} L_1^2(x',u,v)d_1\langle M_{.v}\rangle_u\right|^{p/2}\right]\leq$$

$$\leq c_p t^{2p-1} \left(E \left[\left| \int_s^{s'} \frac{u^8}{f(u,v)^{16}} du \right|^{p/2} \right] \right)^{1/4} |s,-s'|^{p/8}.$$

$$\cdot \sup_{v \in [0,T]} \left[\sup_{s \in [0,s']} E \ |L_1(x',s,v)|^{8p} \right]^{1/8} .$$

$$\cdot \sup_{v \in [0,T]} 4^{p/2} \left(\int_s^{s'} \int_0^v \int_0^v E[|(W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})|^{2p}](v-\tau\vee\tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right)^{1/4}$$

Sabem que, $\left(E \left[\left| \int_s^{s'} \frac{u^8}{f(u,v)^{16}} du \right|^{p/2} \right] \right)^{1/4} \leq$.

$$\leq |s'-s|^{p/8} E \left[\int_s^{s'} \left| \frac{u}{f(u,v)^2} \right|^{8p} du \right]^{1/8} \leq$$

$$\leq \hat{K}(8p) |s'-s|^{p/8} (2s)^{1/8} ,$$

i $\left(\int_s^{s'} \int_0^v \int_0^v E[|(W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})|^{2p}](v-\tau\vee\tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right)^{1/4} \leq$

$$\leq K(up)^{1/4} \cdot T^{(2p+1)/2} \frac{1}{2p+1} S^{p/2} (2S)^{1/4}.$$

Només queda afitar $\sup_{v \in [0,T]} \sup_{s \in [0,S]} [E|L_1(x',s,v)|^{8p}]^{1/8}$,

Tenit en compte que $L_1(x',s,0) = 0$,

$$\sup_{v \in [0,T]} \sup_{s \in [0,S]} E[|L_1(x',s,v)|^{8p}]^{1/8} \leq C_4(p,A,T)$$

De tot això deduïm:

$$E \left[\left| \int_0^t \int_s^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v) d_1 M_{uv} dv \right|^p \right] \leq K_2(p,A,S,T) |s-s'|^{p/4}.$$

c) Finalment $E \left[\left| \int_t^{t'} \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v) d_1 M_{uv} dv \right|^p \right] \leq$

$$\leq |t-t'|^{p-1} \int_t^{t'} E \left[\int_0^S \left| \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v) d_1 M_{uv} \right|^p \right] dx \leq$$

$$\leq K_3(p,S,T,A) |t-t'|^p.$$

Pel criteri de Kolmogorov existeix una versió contínua en les tres variables (x,s,t), del procés,

$$\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)\, d_1 M_{uv}\, dv \quad \square .$$

<u>Teorema (3.4.3)</u>

El procés L(x,s,t) és un temps local de la martingala $(J_{st})_{(s,t)\in R^2_+}$ respecte la mesura associada a la seva variació quadràtica $\langle J \rangle_{st}$.

Demostració:

Sigui $\Phi: R \longrightarrow R$ una funció boreliana i afitada. Aleshores,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(x,s,t)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \frac{sv}{f(s,v)} L_1(x,s,v)\,\phi(x)dvdx -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \int_0^s \frac{v}{f(u,v)} L_1(x,u,v)\,\Phi(x)dudvdx$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)\,\phi(x)d_1M_{uv}dv +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \int_0^s \frac{uv^3}{2f(u,v)^2} L_1(x,u,v)\,\Phi(x)\; dudvdx -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^3} L_1(x,u,v)\,\phi(x)d\langle M_{.v}\rangle_u dvdx =$$

per fubini,

$$= \int_0^t \frac{sv}{f(u,v)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x,s,v)\,\phi(x)dx\right)dv -$$

$$- \int_0^t \int_0^s \frac{v}{f(u,v)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x,u,v)\, \phi(x)dx \right) dudv \; +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x,u,v)\, \phi(x)dx \right) d_1 M_{uv} dv \; +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s 2\frac{uv^3}{f(u,v)^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x,u,v)\, \phi(x)dx \right) dudv \; -$$

$$- \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^3} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x,u,v)\, \phi(x)dx \right) d\langle M_{.v}\rangle_u dv$$

Recordem que per a cada $v \in R$, $L_1(x,u,v)$ és una versió contínua del temps local de la martingala $J_{.v}$ respecte la seva variació quadràtica $\langle J_{.v}\rangle_s$.

Fent servir la propietat de temps local de $L_1(x,s,t)$, tenim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_1(x,s,t)\, \phi(x)dx = \int_0^s \phi(J_{st}) d\langle J_{.t}\rangle_s =$$

$$\int_0^s \phi(J_{xt}) \left(\int_0^t (W_{xt}-W_{xy})^2\, dy \right) dx = \int_0^s \phi(J_{xt}) f(x,t)dx.$$

Substituint,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(x,s,t)\, \phi(x)dx = \int_0^t \frac{sv}{f(s,v)} \left(\int_0^s \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) dv \; -$$

$$- \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) d_1 M_{uv} dv \; +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s 2\frac{uv^3}{f(u,v)^2} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) dudv \; -$$

$$- \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^3} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) d <M_{.v}>_u dv.$$

Considerem la semimartingala $(f(u,v))_{u>0}$ i el procés de variació afitada $\left(u \int_0^u f(u,v)\, \phi(J_{xv})dx \right)_{u>0}$. Apliquem la fórmula de Itô en $[0,s]$ per la funció $F: R^2 \longrightarrow R$, on,

$$(x,y) \longrightarrow \frac{x}{\psi_\varepsilon(y)}$$

és una funció $\psi_\varepsilon : R \longrightarrow R$ contínua, dues vegades diferenciable i tal que $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon$ si $x < \varepsilon$, $\psi_\varepsilon(x) = x$ si $x > 2\varepsilon$ amb $\psi_\varepsilon'(x) < 1$ i $\psi_\varepsilon''(x) < 1$.

$$\frac{s}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} \int_0^s f(u,v)\, \phi(J_{uv})du = \int_0^s \frac{1}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} \left(\int_0^u f(x,v)\, \phi(J_{xv})dx \right)$$

$$- \int_0^s \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} f(u,v)\, \phi(x)du -$$

$$- \int_0^s \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} \psi_\varepsilon'(f(u,v)) \left(\int_0^u (J_{xv}) f(u,v)dx \right) d_1 f(u,v) +$$

$$+ \int_0^s \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^3} \psi_\varepsilon'(f(u,v)) \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) d <M_{.v}>_u$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^s \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} \psi_\varepsilon''(f(u,v)) \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) d <M_{.v}>_u .$$

Igual que abans fent tendir $\varepsilon \to 0$, tenim,

$$\frac{vs}{f(s,v)} \int_0^s f(u,v)\phi\, (J_{uv})du = \int_0^s \frac{v}{f(u,v)} \int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx)du -$$

$$- \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) d_1 M_{uv} -$$

$$- \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} \int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx\, \frac{v^2}{2} du \quad -$$

$$- \int_0^s vu\ \phi(J_{uv})du \quad + \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)dx \right) d\langle M_{.v}\rangle_u .$$

Per tant,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(x,s,t)\ \phi(x)dx = \int_0^t \int_0^s uv\ \phi(J_{uv})dudv = \int_0^t \int_0^s \phi(J_{uv})d\langle J\rangle_{uv} \qquad \square .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Alvo,M. Cabilio,P. Feigin,P.D."A Class of Martingales with non-symetric limit distributions" Z.W. n°58 pag. 87-93 (1981)

[2] Araujo,A. Giné,E."The Central Limit Theorem for real and Banach valued randon variables" Wiley (1980)

[3] Ázema. Yor,M. "en guise d'introduction" Astérisque n°52-53 Temps Lacaux. pag.4-17 (1978)

[4] Barlow,MT. Yor,M. "(Semi-)martingale Inequalities and Local Times" Z.W. n°55 pag 237-254 (1981)

[5] Berthuet,R "Loi du logaritme itere pour certaines integrals stocastiques" Ann. Scien. de l'Université de Clermont n°69 pag. 9-18 (1981)

[6] Bickel,P.J. Wichura,M.J. "Convergence criteria for multiparameter stocastic processes and some applications" Ann. Math. Statis. n°42 1656-1670(1971)

[7] Carioli,R "Une inegalité pour martingales a indices multiples et ses aplications" Seminaire de Probabilités IV, Lectures Notes n°124, Springer-Verlag pag 1-27 (1970)

[8] Carioli,R "Martingales a deux parametres de carré intégrable" C.H. Acad. Sc. Paris t 272 sèrie A pag. 1731-1734 (1971)

[9] Carioli,R. Wals, J.B. "Stochastic integrals in the plain" Acta Math. n°134 pag. 111-183 (1975)

[10] Carioli,R. Walsh,J.B. "Regions d'arret, localisations et prolongements de martingales" Z.W. n°44 pag. 279-306 (1978)

[11] Chevalier,L. "Martingales contínues a deux paramètres"
Bull. Sc. Math. 2^{e} serie n°106 pag 19-62 (1982)

[12] Dellacherie,C. Meyer,P.A. "Probabilités et Potanciel"
Actualités Scientifiques et industrielles
1385 Herman, Paris (1966)

[.13] Dvorestsky,A "Asymtotic normality for sums of dependent randon variables"
Proc. Sixth Berkeley Sympos. Math. Statis.
Probability n°2 pag 513-535 University of California (1972)

[14] Eldoon,R.Hansen "A table of Series and Products"
Prentica-Hall (1975)

[15] Guyon,X. Prunt;B." Semi-martingale a indice dans R^{2}"
Thèse Université de Paris-Sud (1980)

[16] Guzman.M "Differentiation of Integrals in R^{n}"
Lectures Notes in Math. n° 481 Spinger-Verlag

[17] Hall. Hayde "Martingala limit theory and its aplication"
Academic Press (1980)

[18] Ikeda,N. Watanabe,S. "Stochastic,Diferential Equations and Diffusion Processes" North-Holland (1981)

[19] Isaacson,D. "Stochastic Integrals and Derivatives"
Ann. of Math. Statis. vol 40 n°5 pag. 1610-1616 (1969)

[20] Ledoux. "Inegalites de Burkholder pour martingales indexées par NxN"
Processus aléatoires a deux indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T. Paris 1980) pag 122-127
Lectures Notes in Math. 863 Springer-Verlag
Berlin (1981).

[21] Lévy,P. "Wiener's Randon function, and other laplacian randon functio"
Second Sympos. of Berkeley. Probability and Statis. pag 171-187 (1950)

[22] Slipser,R.S. Shiryayev,A.N. " Statistics of randon Processes I General Theory"
Aplications of Mathematics 5 Spriger-Verlag Berlin (1977)

[23] Merzebach,E"Processus stocastiques à deux indices partielment ordennes"
Centre de mathématique Appliquées. Ecole Politechique Palaiseau, Rapport interne n°55 (1979)

[24] Merzebach.E " Stoping for two dimensional stchastic processes"
Stochastics processes en their aplications n°10 pag. 49-63 (1980)

[25] Metreux "Quelques inégalités pour martingales à paramétre bidimensionnel"
Sèminaire de Probabilités XII Lectures Notes in Math. 649 pag.170-179 Springer-Verlag , Berlin (1978)

[26] Meyer,P.A. "Theorie elementaire des processus à deux indices"
Processus aléatoires à deux indices (Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T. Paris 1980) pag 1-39 Lectures Notes in Math. n°863 Springer-Verlag Berlin 1981.

[27] Nualart,D. "Weak convrgence to the law of two-parameter continuous processes"
Z.W. n°55 pag. 255-259 (1981)

[28] Nualart,D. " On The distribution of a double stochastic integral"
Z.W. n°65 pag. 49-60 (1983) Spriger--Verlag.

[29] Nualart,D. "On the quadratic variation of two-parameter continuous martingales" Annals of Probability vol 12 n°2 pag. 445-457 (1984)

[30] Nualart,D. "Une formule d'Ito pour les martingales continues à deux indices et quelques applications"
Ann. Inst. Henri Poincaré vol 20 n°3 pag 251-275 (1984)

[31] Nualart,D. " Variations quadratiques et inégalités pour les martingales a deux indices"
apareixerà a Stochastics.

[32] Orey,S. Pruitt,W.E. " Sample functions of the n-parameter Wiener process"
Ann. of Probability vol 1 n°1 pag 138-163 (1973)

[33] Park,W.J. " A multiparameter Gaussian proces"
Ann. of Math. Statistics vol 41 n°5 pag 1582-1595 (1970)

[34] Sanz,M. "Càlcul diferencial estocàstic per a processos amb paràmetre n-dimensional"
Tesi Universitat de Barcelona (1977)

[35] Sanz,M. "Calculo diferencial estocástico para procesos con parametro n-dimensional"
Stochastica vol 2 n°4 pag 51-70 (1978)

[36] Stroock. Varadhan "Multidimensional diffusion processes"
Springer-Verlag (1979)

[37] Walsh,J.B. " Probability and a Dirichlet problem for
multiply superharmonic functions"
Ann. Inst. Fourier, Grenoble vol 18 n°2
pag. 221-279 (1968)

[38] Walsh,J.B. " The Local Time of the Brownian sheet"
Astérisque n°52-53 pag 47-61 (1978)

[39] Wong,E."A likelihood ratio formula for two-dimensional
random fields"
IEEE Transactions on Information Theori
vol It-20 n°4 pag. 418-422 (1974)

[40] Wong,E. Zakai,M. " Martingales and Stochastic integrals
for processes with a multi-dimensional
parameter"
Z.W. n°29 pag. 109-122 (1974)

[41] Wong,E. Zakai,M " Weak Martingales and Stochastic inte-
grals in the plane"
Ann. of Probability vol 4 n°4 pag.570-586 (1976)

[42] Wong,E. Zakai,M "Differentiation formulas for Stochas-
tic integrals in the plane'
Stocastic processes and their applications
n°6 pag 339-349 (1978)

[43]Yeh,J " Wiener measure in a space of functions of
two variables"
Trans. Amer. Math. Soc. n°95 pag 433-450 (1960)

[44]Yor,M. "Remarques sur une formule de Paul Levy"
Ecole d'Eté de Prob. de Saint-Flour 1979
Ann. Scientifiques de l'Université de Clermont

[45] Yor,M. "Sur la transformé de Hilber des Temps Locaux
brownians, et une extension de la formule
de Ito"
Séminaire de Prob. XVI (1982)

[46] Zabczyk,J. "Remarks of Stochastic derivation "
Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences.
serie de Sciences Math. Astr. et Phys.
vol XXI n°3 pag 263-268 (1973)

[47] Zakai. "Some classes of two-parameter martingales"
Ann. of Prob. vol 9 n°2 pag. 255-265 (1981)