5. Estudio del marco teórico de las investigaciones de la resolución de problemas aritméticos de en la etapa educativa obligatoria.

5. Estudio del marco teórico de las investigaciones de la resolución de problemas aritméticos en la etapa educativa obligatoria.

¿Cómo puede ser que la Matemática, siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, esté tan admirablemente adaptada a los objetos de la realidad?

Albert Einstein.

5.1 Introducción

El área de la resolución de problemas, específicamente en el campo de las matemáticas, ha sido objeto de interés por las diferentes corrientes del pensamiento sobre la teoría y la práctica educativa. Durante muchos años, el enfoque asociacionista enfatizó los principios generales del aprendizaje, particularmente la ley del efecto y la ley del ejercicio. Tanto la ejercitación como la práctica han tenido un papel fundamental en la historia de la enseñanza de la matemática, especialmente en la aritmética. En un momento dado fue el medio principal de instrucción, sin embargo hoy en día, ambas forman parte del currículo de la matemática, aunque acompañadas de experiencias concretas y explicaciones de los principios matemáticos subyacentes.

Desde el punto de vista del enfoque cognoscitivo, sin embargo, se ha enfatizado el papel del razonamiento que permite al sujeto que resuelve el problema, el hecho de comprenderlo, diseñar un plan, llevarlo a cabo y supervisar la (Mayer, 1992) este enfoque ha representado un cambió de énfasis en la enseñanza de la matemática ya que en lugar de preguntar "¿qué procedimientos debe dominar el alumno?", la pregunta es: "¿qué significa pensar matemáticamente?". En vez de enfatizar el producto de la resolución del problema (esto es, obtener un resultado correcto), este enfoque sugiere enfatizar el proceso resolución (qué sucede en la mente del estudiante cuando resuelve un problema).

5.2 Los problemas matemáticos.

En muchos trabajos se ha abordado la cuestión de la definición de problema y sus más diversas perspectivas. El contenido del término viene determinado, generalmente, a partir de la actividad que implica, más que en la forma que se propone. Haciendo un repaso por la bibliografía, Borasi (1986), reclama la clarificación del concepto, por no ser usado siempre de la misma manera en contextos diferentes. Parece ser, que en lo que sí existe un acuerdo generalizado es el de considerar un problema como una situación que presenta dificultades y para las cuales no hay soluciones evidentes. Así, Krulik y Rudnik (1980) definen el problema como: *”una situación cuantitativa o no, que pide una solución, para la cual los individuos implicados, no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla”.*

Perales (1993), aborda esta cuestión, ajustándose a la definición de Labarrere (1987):*” El problema adquiere así una dimensión de actividad de enseñanza – aprendizaje, tanto de conceptos como de habilidades, y evaluadora no sólo de dicho aprendizaje sino de los propios mecanismos cognitivos puestos en juego por el educando”.* En esta definición encontramos en toda su extensión las características por las cuales la resolución de problemas es tan importante: pueden recogerse bajo un mismo parámetro la constancia de la adquisición de conceptos y de procedimientos en el alumno.

A la hora de diferenciar entre ejercicios y problemas la cuestión de la resolución de problemas sigue dos perspectivas diferenciadas. La primera vendría definida como justificación práctica de conocimientos y de técnicas que previamente se han estudiado. La segunda sería la resolución de problemas a partir de un contexto o enunciado bien planteado.

Una de las primeras referencias acerca del significado de la resolución de problemas la encontramos en Leif y Delazy (1961). Para ellos, la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas encuentra su significado en saber aplicar los conocimientos que previamente se han adquirido.

Para estos autores, resolver un problema significa buscar la respuesta a la cuestión planificada, sin necesidad de hacer experimentos reales, que a veces, incluso, son imposibles de realizar. Por tanto, se trata de buscar un determinado número de problemas, adecuados a su nivel de conocimientos y lenguaje que les facilite esta aplicación práctica de aquello que han aprendido.

Debney (1971), citado por Garret (1988), dice que el hecho de solucionar problemas significa pensar creativamente.

Para Resnick y Claser (1976), un sujeto soluciona un problema cuando realiza una tarea que previamente no había realizado y para la que la instrucción no especifica de manera total, la forma de realización del mismo.

Igualmente para el National Council of Supervisor of Math (1977), “la resolución de problemas es el proceso de aplicación de conocimientos adquiridos previamente a una situación familiar o no”.

A partir de 1980 surgen intentos rigurosos por estudiar la naturaleza de los problemas, en los que se considera la idea de proponer el modelo de la resolución de problemas para la comprensión de los conceptos matemáticos y para que los propios profesores tengan una “representación” de los procesos de comprensión de los alumnos. En esta línea, Carpenter y Moser (1983) señalan que los problemas verbales podrían ser utilizados como elemento base para el desarrollo de los conceptos de adición y sustracción, antes incluso que el aprendizaje de las habilidades de cálculo, que podrían surgir a partir de aquellos.

Lesh, Landau y Hamilton (1983) consideran que existe una interacción entre el contenido de las matemáticas y los procesos utilizados para resolver los problemas, aunque es difícil que se lleve a la práctica, a no ser que se implicasen mediante la participación y el convencimiento, entre otros los profesores.

5.3 Clasificación de los problemas aritméticos elementales verbales.

Cualquier clasificación que se realice de los problemas lleva implícita la finalidad del estudio en el que esté en marcha. Así, Polya, en su libro *"Cómo plantear y resolver problemas",* distingue entre problemas de encontrar y problemas de probar. Butts (1980) desde el punto de vista del nivel de creatividad necesaria para atacarlos, los jerarquizar en:

- ejercicios de reconocimiento,
- ejercicios algorítmico,
- problemas de aplicación,
- problemas de búsqueda o de investigación abiertos y,
- situaciones problemáticas.

R. Charles y F. Lester (1982) realizan una clasificación en seis tipos de problemas:

- Ejercicios de repetición.
- Problemas de traducción simple.
- Problemas de traducción compleja.
- Problemas de procesos.
- Problemas aplicados.
- Problemas de puzzles.

Borasi (1986) establece siete tipos de problemas: a) Ejercicios; b) Word-problem; c) Problemas de puzzles; d) Poblemas de una conjetura; e) Problemas de la vida real; f) Situación problemática y g) Situación.

Puig y Cerdán (1988) clasifican los problemas aritméticos en problemas de una etapa y problemas de más de una etapa dependiendo de que sea necesario para alcanzar la solución realizar una o más operaciones aritméticas.

Labarrere (1987) propone una doble distinción: según los conceptos matemáticos que revelan al alumno y según la naturaleza o el tipo de exigencia que plantean al individuo que los resuelve (problemas de hallazgo o determinación, de construcción, recreativos, etc...)

Durante estos últimos años ha resurgido el interés por los PAEV y se ha puesto de manifiesto la influencia de tres factores que pueden explicar las diferencias encontradas hacia el nivel de ejecución de los problemas, determinando unos factores que permiten realizar una nueva clasificación de los PAEV. Estos factores son:

- Estructura semántica
- El lugar que ocupa la incógnita, y
- La formulación verbal del problema.

Estos tres factores inciden en la representación que el alumno hace del problema (Bermejo y Rodríguez, 1990,a), ya que los errores en la resolución no son debidos a la ejecución del cálculo operatorio sino a una inadecuada construcción de la representación inicial del problema.

La resolución de PAEV pone de manifiesto la influencia de tres factores que podrían explicar las diferencias sistemáticas encontradas respecto a la ejecución de los problemas. Estos factores son la estructura semántica, la formulación verbal del problema y el lugar que ocupa la incógnita. Estos factores inciden en la representación que el alumno hace del problema (Bermejo y Rodríguez, 1990,a) Según estos autores los errores en la resolución de los problemas no son debidos a la ejecución de la operación correspondiente, sino sobretodo a la inadecuada construcción de la representación inicial del problema.

Carpenter y Moser (1982) identificaron tres dimensiones fundamentales:

- la *dimensión activa-estática*, que determina la relación entre los conjuntos o los objetos implicados en la tarea, en los que a veces es evidente la presencia de una acción (transformando o cambiando la cantidad de un conjunto) y otras, la relación entre las cantidades es más estática.
- La *relación inclusiva*, en la cual algunos problemas dos cantidades aparecen como subconjuntos de otra, y
- Tareas que implican *acción*, incrementando o disminuyendo la cantidad inicial.

Partiendo de estos criterios, los autores proponen seis categorías de problemas: de unión, de separación, de parte-parte-todo, de comparación, de igualación añadiendo y de igualación sacando.

Vergnaud (1982) basa su clasificación en tres conceptos: medida, transformación temporal y relación estática, formada por seis categorías de problemas aditivos y de sustracción: composición de dos cantidades, una transformación une dos cantidades, una relación estática une dos cantidades, composición de dos transformaciones, una transformación une dos relaciones y por último una composición une dos relaciones estáticas.

Nesher (1982) propone que la dependencia semántica entre las proposiciones del texto (los datos y la incógnita), pueden venir dadas por siete tipos de palabras: a) argumentos (cuantificados numéricamente –niños/ niñas-) b) adjetivo (califican los argumentos cuantificados –libros grandes / libros pequeños-) c) agentes (a los que se hace referencia (Ana tenía.../ José tenía..) d) localización (relación espacial entre los objetos -encima / debajo...) e) tiempo (relación temporal entre los acontecimientos del texto - ayer / hoy / mañana...) f) verbos (expresan la dependencia semántica - cogió / dio...) y g) términos relacionales (que afectan a dos argumentos cuantificados – más que / tantos como / menos que...). A partir de la dependencia semántica de estos siete tipos de palabras encontramos tres categorías contextuales en Vergnaud y Durand (1976)

Greeno, (1978), Moser (1979): texto dinámico (verbos con expresión tácita de secuenciación temporal) texto estático (con inclusión de las categorías de argumentos, adjetivos, agentes, localización y tiempo) y texto comparación (con inclusión de la categoría de términos relacionales).

5.4. Variables de la tarea

Se denominan variables de tarea a aquellas características del problema que asumen un valor particular dentro de un posible conjunto de valores (Puig y Cerdán, 1988). Las variables pueden ser de una gran cantidad de tipos. Kilpatrick (1978), presentó una clasificación con el fin de organizar todos los elementos que hay que tener presentes, al realizar un estudio con un determinado nivel de detalle.
Distinguió entre variables *independientes* y variables *dependientes*. Las primeras son aquellas que pueden medirse antes de que comience la tarea y las dependientes son aquellas obtenidas de la medida de las respuestas de los alumnos respecto a las tareas que se les plantean. Dentro de las variables independientes, Kilpatrick hace una diferenciación entre *las variables de sujeto, las variables de la tarea y las variables de situación*.

Asimismo, incluye en las variables dependientes las variables de resultado, las variables del proceso, las variables de evaluación y por último las variables concomitantes (que incluirían todas aquellas variables que puedan medirse y no sea de las tres anteriores categorías. Dentro de las variables a considerar en el tema de la resolución de problemas hemos de restringirnos a tres fundamentalmente: variables sintácticas, de contexto y de contenido.

A continuación pasamos a analizar cada una de ellas.

a) Variables sintácticas.

Definimos variable sintáctica como aquellas características del problema que tienen que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Ocupan el inicio del proceso de resolución del problema, ya que trata de la comprensión de los términos del mismo.

La categoría de variable sintáctica incluye aspectos como son:

- tamaño del problema, que se puede medir por el número de caracteres (letras o números), palabras o frases
- complejidad gramatical, entendida como el número de sustantivos, adjetivos, pronombres, etc, o al tipo de oraciones y proposiciones que constituyen el enunciado del problema.
- presentación de los datos mediante números, símbolos o palabras
- la situación de la pregunta en texto del problema, que podrá dar lugar a situaciones diferentes: o bien que esten explicitados los tres elementos del enunciado, por lo que tendremos dos sentencias diferentes, a saber:
    1. Canónicas: son del tipo [a + b = ?]
    2. No canónicas: del tipo [a + ? = c] o [? + b = c]

  O bien, que no estén correctamente explicitadas, por lo que podremos encontrarnos con situaciones diversas, como por ejemplo que el texto completo sea una interrogación en la que se entremezclen tanto la información como la pregunta del problema.
- la explicitación de la relación semántica entre los datos y la incógnita, la presencia de datos o no en la pregunta del problema, la existencia de datos irrelevantes
- orden de presentación de los datos en el texto del problema se corresponden con el orden en que éstos han de ser considerados a la hora de efectuar la operación.

Algunos investigadores apoyan la idea de la reformulación de problemas simples de adición y substracción afecta a la relativa dificultad de algunos problemas (Lindvall e Ibarra (1980), Cohen y Stover (1981) ; De Corte, Verschaffel y De Win, 1985, Cumins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988).

Según Lindvall e Ibarra (1980), los problemas de combinación del tipo 2 (los más difíciles de su categoría) se convertían en más fáciles al reformularlos de manera diferente.

Cohen y Stover (1981) reformularon problemas verbales y variaron tres factores: el uso de diagramas, la reducción de información extraña y la combinación del orden de la presentación de los datos. En alumnos de 6º grado, encontraron que los problemas adaptados eran resueltos en mayor grado que los originales.

Cumins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988) sugieren que ciertas palabras y frases son ambiguas para alumnos y que, la utilización de estos términos en problemas verbales conducen a representaciones incoherentes, reduciéndose tales efectos al reformular el problema

b) Variables de contenido y de contexto.

Las variables de contenido y contexto dan cuenta del significado del texto. Las variables de contenido se refieren al significado matemático profundo, mientras que las de contexto lo hacen a los significados no matemáticos, aquellos que son incidentales en el problema.

Webb (1977) clasifica las variables de contenido utilizando varios criterios:

- Tema matemático

- Campo de aplicación.
- Contenido semántico.
- Variables que describen los elementos del problema.
- Material matemático utilizable.

Webb (1979) respecto a las variables de contextos, da varios criterios para clasificar los tipos que suelen aparecer: el formato de presentación (manipulativo, pictorial, simbólico, verbal o mediante una combinación de varios de estos modos) y el escenario-marco o contexto verbal (familiar – no familiar, aplicado – teórico, hipotético – de hecho, etc...)

5.5. Problemas aditivos.

Se denominan problemas aditivos a aquellos en los que en su resolución entran a formar parte dos operaciones: suma y resta, tanto sean de una etapa (para su resolución solo requiere una sola operación) o de más de una etapa (dos o más operaciones).
Nesher (1982) distingue en su modelo de análisis tres componentes: la componente sintáctica, la estructura lógica y la componente semántica.

La componente sintáctica

La estructura de tiene dos partes: la parte informativa y la pregunta del problema a veces estas dos partes son distinguibles en cualquier problema pero a veces la pregunta es todo el enunciado del mismo. La parte informativa y la pregunta del problema siempre contienen dos tipos de cantidades, unas son proporcionadas como los *datos* y la otra es la *incógnita*. Esto no quiere decir que en un problema no puede haber otras cantidades presentes, sino que éstas son las únicas que es imprescindible considerar para poderlo responder o resolver correctamente. Por tanto hay cantidades que desempeñan un papel primordial en la resolución de problemas y que las secundarias sólo intervienen para proporcionar cierta información.

Respecto a la componente sintáctica diremos que en principio hemos de distinguir dos tipos de palabras: las que desempeñan algún papel en la elección de la operación y las que no desempeñan ningún. El papel de estas últimas suele limitarse a conectar el enunciado del problema con la realidad o a delimitar el contexto del problema así en el problema: *" Juan tenía cinco canicas. Ganó tres canicas. ¿Cuantas tiene ahora?",* las palabras " Juan", "canicas" son las palabras que no desempeñan ningún papel respecto a la lección de la operación, pero hace referencia a un contexto particular en el que se desarrollan las acciones, acciones que el niño ha de entender.

Podemos distinguir también entre las palabras que son cruciales a la hora de establecer la conexión existente entre la incógnita y los datos. y por ello las denominamos *palabras clave.* Estas, puede ser divididas en tres grupos:

1. Palabras que son propias de la terminología matemática y, tiene el significado preciso en el contexto matemático como añadir, doblar, dividir, repartir,...

2. Aquellas palabras tales como conectivas, verbos, etc..., que no son propias de la terminología matemática pero cuyo significado en el contexto del problema suele ser suficiente para decidir la operación que hay que realizar para resolverlo. ("ganó", "perdió").

3. Para obras grupos de palabras que expresan relaciones ("más alto que Juan", “Más viejo que su padre”).

La segunda cuestión referente a la componente sintáctica y que es muy importante en los alumnos con problemas atencionales es la longitud del denunciado, debido a los problemas de interiorización lingüística que presenta al tener probablemente mermada su memoria inmediata y a corto plazo como hemos visto en los capítulos anteriores. Enunciados muy largos hacen que el niño no pueda procesar toda la información en su memoria inmediata y acabé no dando sentido al enunciado del problema, con lo que esto conlleva. Aquellos datos superfluos y que no tienen incidencia en la resolución de problemas pueden confundir a los alumnos con deficiencias atencionales.

La tercera cuestión a estudiar es el análisis sintáctico de los elementos del problema. Formas muy complicadas en el ámbito sintáctico pueden confundir al alumno con problemas atención debido a su bajo nivel en lengua.

Otro de los aspectos a estudiar es la colocación dentro del enunciado de los datos de un problema.

La componente semántica

El contenido semántico de un problema aritmético de enunciado verbal bien puede ser analizado a trozos o bien globalmente atendiendo a la naturaleza y el sentido del texto como un todo. Ahora bien, en el análisis global de un problema es más importante que el análisis efectuado a trozos como se ha visto en lo expuesto anteriormente, ya que es muy importante a la hora de comprender los procesos utilizados por los alumnos para resolver los problemas. De aquí que ciertos autores clasificaran los problemas aritméticos de enunciado verbal en tres grandes categorías (Kintsch, Kozminsky, Strby, Mckoon y Keenan y Abril, 1975; Nesher y Teubal , 1975; Nesher y Katriel, 1977; DeCorte y Verschaffel, 1981; Carpenter, Moser y Romberg, 1982, en Nesher, 1998). Estas tres grandes categorías son las de **cambio, reunión** (llamada de **combinación** por ciertos autores) y **comparación.** Las investigaciones se llevaron a término en diferentes países, pero una investigación más avanzada, sobre el grado de dificultat de cada uno de estos tipos de problemas hizo darse cuenta de diferencias más sutiles

entre problemas de estas categorías, resultando subcategorías de las anteriores.
A continuación, repasaremos las diferentes categorías semánticas.

Los problemas de cambio se caracterizan por la presencia de una acción, modificando una cantidad inicial y dando como resultado el incremento o decremento (si se trata de un problema aditivo o de substracción) de la cantidad. Esta categoría de problemas están procesadas por una secuencia temporal de sucesos, distinguiéndose tres momentos en los que se describe este cambio después de que la cantidad inicial es sometida a la acción, que la modifica. Las tres cantidades presentes en el problema reciben los nombres de cantidad *inicial, final y de cambio*.

Al considerar que la acción puede aumentar o disminuir y que dos de las cantidades han de estar contenidas en la parte informativa del problema, en forma de *datos*, y que la otra cantidad es el objeto de la pregunta , *incógnita*, se dan seis tipos de problemas de cambio:

Subtipo	Datos	Incógnita	Acción
Cambio1	Conjuntos inicial y de cambio	Conjunto final	Aumento
Cambio2	Conjuntos inicial y de cambio	Conjunto final	Disminución
Cambio3	Conjuntos inicial y final	Conjunto de cambio	Aumento
Cambio4	Conjuntos inicial y de cambio	Conjunto de cambio	Disminución
Cambio5	Conjuntos de cambio y final	Conjunto inicial	Aumento
Cambio6	Conjuntos de cambio y final	Conjunto inicial	Disminución

Los problemas de reunión (o combinación) son aquellos en los que se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema para-parte-todo. La incógnita del problema puede versar acerca del todo o acerca de una de las partes, con lo que se dan dos subtipos de esta categoría:

Subtipo	Datos	Parte	Operación
Combinar1	Conjuntos de las dos “partes”	Conjunto del “todo”	Suma
Combinar2	Conjunto de una “parte” y conjunto del “todo”	Conjunto de una “parte”	Disminución

En esta categoría la relación entre las proposiciones viene dada por sustantivos, adjetivos, localizaciones, etc.

Dentro de la categoría de ***comparación*** se incluyen los problemas que presentan una relación estática entre dos cantidades, denominadas cantidad de *referencia*, cantidad *comparada* y *diferencia.* Encontramos seis subcategorías dentro de la categoría de comparación:

Subtipo	Datos	Incógnita	Más/Menos
Comparar1	Conjuntos de referencia y comparado	Conjunto diferencia	Más
Comparar2	Conjuntos de referencia y comparado	Conjunto diferencia	Menos
Comparar3	Conjuntos de referencia y diferencia	Conjunto comparado	Más
Comparar4	Conjuntos de referencia y diferencia	Conjunto comparado	Menos
Comparar5	Conjuntos comparado y diferencia	Conjunto referencia	Más
Comparar6	Conjuntos comparado y diferencia	Conjunto referencia	Menos

Una investigación más avanzada sobre el grado de dificultad de cada uno de estos tipos de problemas hizo diferenciar más sutilmente la clasificación sobre los problemas en cada una de estas categorías. estas tres categorías son las categorías básicas, pero algunos autores como por ejemplo Carpenter & Moser (1983) distingue una cuarta categoría llamada de **igualación,** que la tendremos en cuenta, junto a las tres anteriores por su importancia para nuestro estudio. Estos problemas se caracterizan porque existe una comparación entre las distintas cantidades, establecidas por medio del comparativo de igualad definido como “tantos como”, por lo que tendremos seis subtipos de problemas, que recogemos en este cuadro

Subtipo	Datos	Incógnita	Más/Menos
Comparar1	Conjuntos de referencia y comparado	Conjunto diferencia	Más
Comparar2	Conjuntos de referencia y comparado	Conjunto diferencia	Menos
Comparar3	Conjuntos de referencia y diferencia	Conjunto comparado	Más
Comparar4	Conjuntos de referencia y diferencia	Conjunto comparado	Menos
Comparar5	Conjuntos comparado y diferencia	Conjunto referencia	Más
Comparar6	Conjuntos comparado y diferencia	Conjunto referencia	Menos

Una vez vistas las diferentes categorías semánticas, procederemos al estudio de los niveles de dificultad que los problemas tienen en función de su estructura.

5.6. Niveles de dificultad en función de la estructura semántica.

En las investigaciones realizadas en los últimos veinte años, parecen ser los problemas de Cambio los que resultan ser más sencillos de resolver que los problemas de Combinación, y a su vez, estos parecen ser más fáciles de resolver que los de Comparación (Riley, Greeno y Séller, 1983; Bermejo y Rodríguez, 1987a ; Puig y Cerdán, 1988). Así mismo, los problemas de Igualación resultan más difíciles de resolver que los de Combinación (Bermejo y Rodríguez, 1987 a). Estos niveles de dificultad, pueden verse modificados en función del lugar que ocupa la incógnita.

Si nos atenemos tanto a la estructura semántica como a la posición de la incógnita dentro del enunciado, los niveles de dificultad se han descrito los siguientes:

- De manera generalizada, e independientemente de la estructura semántica, los PAEV con la incógnita en el resultado parecen ser más fáciles (Bermejo y Rodríguez, 1990 a; Nesher, 1982). La explicación de tales resultados, como la posición de la incógnita y la familiaridad con el problema pueden deberse a que los alumnos disponen de un esquema general que les informa de la estructura y la intención del problema. Los problemas en los que la incógnita es el conjunto inicial o de referencia, son los revisten mayor dificultad de resolución. (Bermejo y Rodríguez, 1990 a; Nesher, 1982), aunque la dificultad se incrementa aún más cuando ésta se sitúa en el conjunto inicial.

- Dentro del ámbito de la estructura semántica, la mayoría de los trabajos (Carpenter & Moser, 1982, 1983, 1984; Bermejo y Rodríguez, 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; citados por Bermejo y Rodríguez, 1991) hay una coincidencia en señalar que los problemas más sencillos son los de Cambio, seguidos de los de Combinación y por último los de Comparación. Ahora bien, aquellos problemas de Combinación y Comparación en los que la incógnita se ubica en uno de los sumandos, la dificultad de resolución es notablemente acentuada (Riley, Greeno y Heller, 1983).
- Las cotas de mayor dificultad llegan en los problemas de Comparación, en los que que la incógnita se ubica en el primer sumando. (Bermejo y Rodríguez, 1990 a).

- La formulación verbal del problema, entendida como el orden de presentación de la información en el problema, así como el grado de explicitación de las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, que pueden influir en los procesos de resolución de los alumnos.

Título	*Descripción general*	*Porcentaje de éxito (%)*
Combinación 1	Pregunta sobre el conjunto unión (total)	79-86
Combinación2	Pregunta sobre un subconjunto (parte)	46-52
Cambio 1	Aumento, pregunta sobre el conjunto final	79-82
Cambio 2	Disminución, pregunta sobre el conjunto final	72-75
Cambio 3	Aumento, pregunta acerca del cambio	62-72
Cambio 4	Disminución, pregunta acerca del cambio	75-77
Cambio 5	Aumento, pregunta sobre el conjunto inicial	28-48
Cambio 6	Disminución, pregunta sobre el conjunto inicial	39-49
Comparación 1	Usando «más», pregunta sobre el conjunto diferencia	76-85
Comparación 2	Usando «menos». pregunta sobre el conjunto diferencia	66-75
Comparación 3	Usando «más», pregunta sobre lo «comparado»	65-80
Comparación 4	Usando «menos», pregunta sobre lo «comparado»	66-81
Comparación 5	Usando «más», pregunta sobre el referente	43-60
Comparación 6	Usando «menos», pregunto sobre el referente	35-54

*5.1. Tabla de porcentajes de éxito en los problemas de categoría semántica de Romero y Rodríguez (19**).*

A continuación presentamos los problemas multiplicativos.

5.7. Problemas multiplicativos.

A diferencia de los problemas aditivos, no hay tanto acuerdo en la determinación de las categorías semánticas de tipo multiplicativo.

De acuerdo con Schmidt y Weiser (1995*), hay cuatro grandes estructuras:

***Isomorfismo de medidas*:** Agrupa los problemas que se resuelven con una multiplicación, en la que el resultado final es una cantidad del mismo tipo que la del primer factor. Esta categoría se subdivide en otras cinco:

- La *estructura parte-todo*, en la que el todo se forma articulando partes iguales que se repiten un número determinado de veces:

"En una estantería hay 35 cajas de conserva y cada caja contiene 12 latas.¿ Cuántas latas de conserva hay en total?"

- *Estructura de iteración,* caracterizada por la utilización de la palabra "veces" y representa situaciones que contienen repetición de los mismos componentes:

"Para vaciar la estantería de latas de conserva, puedo transportar 12 latas en un balde. ¿Cuántas latas habré transportado después de haber realizado esta operación 53 veces?"

- *Estructura de cambio multiplicativo,* que hace referencia a cambios determinados a la sometemos una cantidad inicial:

"Invierto 15500 € en un negocio y después de dos años se dobla el capital.¿A cuánto ascenderá el capital después de este periodo?"

- *Estructura de comparación comparativa*, relacionada en cierta manera con la estructura aditiva de tipo Comparación:

"Juan gana de sueldo 1550 € mensuales y su primo Antonio gana el triple que Juan. ¿Cuánto gana entonces Antonio?"

- *Estructura de proporción simple*, en el que se estable una proporción entre los miembros del enunciado:

" En una fuga de agua de la cañería de la calle se pierden 12 litros por minuto. ¿Cuántos litros se perderán en tres horas?"

Multiplicación combinatoria: Agrupa a los problemas de productos cartesianos:

" Entre 4 niñas y 12 vestidos diferentes ¿cuántas combinaciones podemos realizar a la hora de vestirlas?"

Composición de operadores: Contempla los problemas multiplicativos en los que un primer oerador es transformado por otro:

" En un trabajo Juan acabó ganando después de un año el triple de lo que ganaba al principio, y para el cuarto año ya ganaba el doble de lo que ganaba al final del primer año.¿Cuántas veces más gana ahora que cuando comenzó?"

Multiplicación por fórmula : Agrupa a todos los tipos de problemas con fórmulas matemáticas o propias de las ciencias que establecen relaciones fijas entre cantidades:

" Calcula el espacio recorrido por un coche que va a una velocidad constante de 120 km por hora circulando durante 4 horas."

En Schwartz (1976), Vergnaud (1983), Quintero (1986), Nesher (1988), (citados por Maza , 1991) hay un cierto acuerdo en dividir los problemas de estructura multiplicativa en los siguientes tipos:

- **Problemas de razón.**

Compras 4 cajas de colores y en cada paquete hay 10 colores. ¿Cuántos colores has comprado en total?

- **Problemas de comparación**

Pesas 39 kgs. Si tu padre pesa dos veces lo que tú pesas ¿Cuántos kgs. pesa tu padre?

- **Problemas de combinación (de producto cartesiano)**

Para ir a la playa tienes 3 trajes de baño y 4 toallas. ¿ De cuántas maneras distintas puedes combinar las dos cosas para ir a la playa?

Los problemas de Combinación (son más difíciles que los dos tipos restantes (Hart 1982; Quintero, 1985, citados por Maza, 1991)

Para la división se dan dos casos en los dos primeros tipos y uno para el tercer tipo de los anteriores vistos correspondientes a la multiplicación:

- *Problemas de razón:*
  - **Problemas de partición-razón**.

Compras 4 cajas iguales de colores y hay en total 40 colores. ¿Cuántos hay en cada caja?

  - **Problemas agrupamiento-razón.**

Si compras 40 colores que vienen en paquetes de 10 colores cada uno. ¿ Cuántos paquetes de colores has comprado?

- *Problemas de comparación.*
  - **Problemas de partición-cuantificador**

Tu padre pesa 78 kgs, o sea, 2 veces lo que tú pesas. ¿Cuál es tu peso?

  - **Problemas de agrupamiento-cuantificador**

Si tú pesas 39 kgs y tu padre 78 kgs. ¿ Cuántas veces pesa tu padre más que tú?

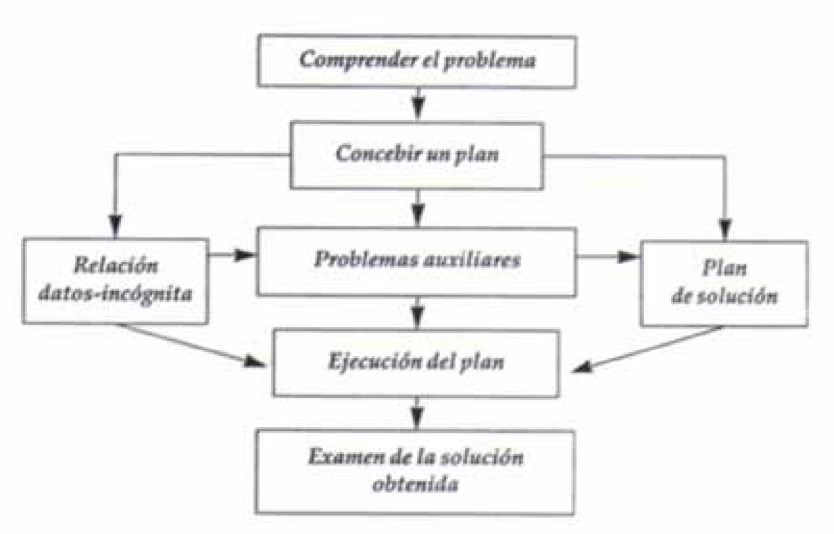
- *Problemas de combinación*

Tienes 3 trajes de baño y varias toallas de playa. Si te pones un traje de baño y te llevas una toalla cada vez que vas a bañarte, puedes ir de 12 maneras distintas ¿Cuántas toallas de playa tienes?

A continuación presentaremos las diferentes fases de la resolución de problemas.

5.8. Fases del proceso de resolución de problemas

Si la resolución de problemas es una exigencia cognitiva imprescindible para el aprendizaje de las matemáticas (Diseño Curricular Base), uno de los aspectos a considerar es el proceso resolutor. Polya (1949), en su modelo descriptivo, establece las necesidades para aprender a resolver problemas. Para este autor el principal fin es el de ayudar a que el alumno adquieras la mayor experiencia en la tarea de resolución de problemas, por lo que el profesor será el guía que en todo momento dejará al alumno asumir la parte de responsabilidad que le corresponde.



5.2. Estrategia de Polya para la resolución de problemas.

La conveniencia de encontrar una determinada estrategia es abordada por gran cantidad de autores. Shoenfeld (1980), propone un esquema similar en el que indica cuatro pasos:

- Analizar y comprender un problema: dibujar un diagrama, examinar un caso especial, intentar simplificarlo.
- Diseñar y planificar una solución

- Explorar soluciones:
  - ✓ considerando una variedad de problemas equivalentes,
  - ✓ considerando ligeras modificaciones del problema original, y
  - ✓ considerando amplias modificaciones del problema original.
- Verificar la solución.

Mayer (1986) enumera los proceso a seguir en la resolución de problemas en los siguientes.:

- Representación del problema: conversión del problema en una representación mental interna. Comprende dos pasos:
  a) Traducción: capacidad para traducir cada proposición del problema a una representación mental, expresada en una fórmula matemática.
  b) Integración de los datos: supone un conocimiento específico de los diversos tipos de problemas, a partir de un esquema adecuado a dicho problema.
- Solución del problema: diseñar un plan de solución, lo que implica:
  a) Planificación: búsqueda de estrategias para la resolución.
  b) Ejecución: realización de las operaciones/acciones diseñadas.

Bransford y Stein (1984) citado por Luceño (1999) proponen un método que incluye una fase inicial de identificación y consta de cinco fases:

- Identifica que un problema existe y cuál es.
- Definición y representación del problema.
- Exploración de posibles estrategias.
- Actuación con la estrategia deleccionada.
- Logros, observación y evaluación de los resultados.

Maza (1991) reformula el modelo de Polya, y diferencia dos procesos en la fase de *Comprensión,* en *análisis y representación* del problema y extendiendo la fase de *Revisión-Comprobación* de la siguiente forma:

- Análisis del problema, lo que implica analizar-descomponer la información que nos da el enunciado (datos, condiciones, etc)

- Representación del problema, relacionando los elementos del problema.
- Planificación, eligiendo la estrategia más adecuada para su resolución.
- Ejecución, o aplicación de la estrategia elegida, donde es conveniente la revisión constante de tal aplicación, detección de errores, corrección de los pasos, etc...
- Generalización, conectándolo con algún principio general que permita resolver ejercicios similares en el futuro.

5.9 Estrategias en la resolución de problemas.

Las estrategias son métodos generales de resolución de problemas (Luceño, 1999), constituyendo ayudas para la comprensión del problema y sugieren vías para alcanzar la solución del mismo. Por tanto, permiten llegar a la solución partiendo desde el enunciado.

La eficacia de las técnicas han verificado que su uso está directamente relacionado con el éxito en la resolución de problemas. Reys (1987) citado por Luceño (1999) afirma que las estrategias pueden enseñarse, que éstas son útiles y que enseñando estrategias se enseña a resolver problemas.

5.9.1. La modelación: tipos

Modelar es reproducir las relaciones que se dan en el enunciado del problema al eliminar los elementos innecesarios y no matemáticos (Luceño, 1999) . Una de las formas habituales de modelación es la representación gráfica, en la que mediante esquemas, el alumno es capaz de visualizar los elementos del enunciado y sus relaciones, facilitando el descubrimiento de la vía de solución.

Los tipos de modelación más utilizados son:

I. ***Los modelos lineales***, utilizados habitualmente cuando en el enunciado del problema aparece una sola magnitud o información que se haya de manejar, especialmente en los problemas de relación parte-todo. Se utilizan diferentes formas: *pictográficas* (representaciones más o menos figurativas de los elementos intervinientes), de *segmentos, de rectángulos, etc...*

En un paquete de caramelos caen 8 unidades. ¿ Cuántos caramelos tendremos si compramos tres cajas?

I I I I I I I I   I I I I I I I I   I I I I I I I I

8 +8 + 8 = 24 ó 8 x 3 = 24

II. ***Los modelos tabulares***.- Utilizados cuando en el enunciado aparecen varias magnitudes o informaciones. Normalmente se utiliza una tabla de doble entrada en la que se coloca la información.

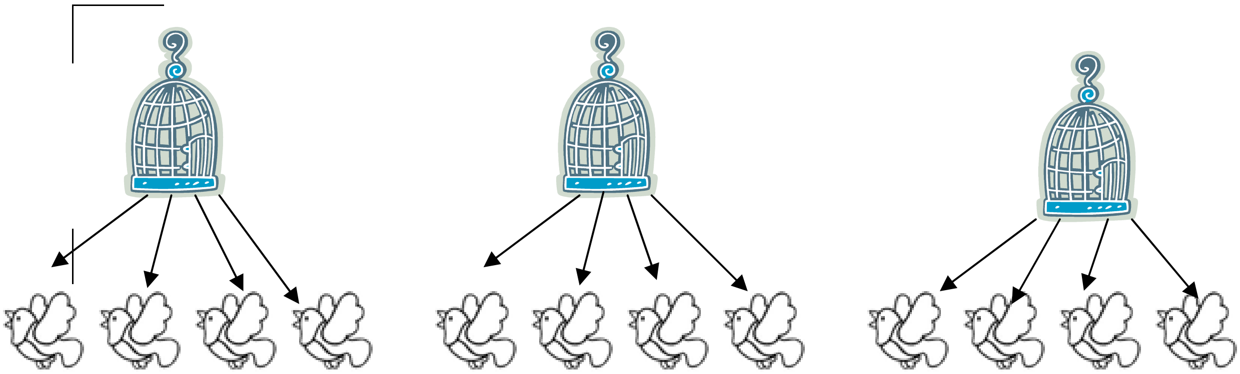
Si 5 albañiles construyen 35 metros de valla en una semana. ¿Cuántos albañiles se necesitan para vallar en el mismo tiempo un campo con un de perímetro 63 metros?

Albañiles	5	1	**¿...?**
Metros de valla	35	7	64

35 : 5 = 7 ; 63 : 7 = 9 albañiles

III. ***Los modelos ramificados***.- Utilizados en aquellos problemas de combinaciones y en los multiplicativos donde se conoce la cantidad de partes y el contenido por parte, para hallar el todo.

Juan tiene 3 jaulas y cada una de ellas hay 4 pájaros. ¿Cuántos pájaros tiene en total?



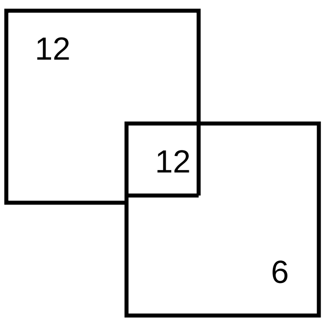
3 veces 4 = 12

4 x 3 = 12 pájaros.

IV. ***Los modelos conjuntistas.***- Cuando la información que se proporciona se refiere a características que cumplen los elementos de un conjunto, generando la formación de nuevos conjuntos.

En una clase de 30 alumnos, 24 utilizan bolígrafos de color azul y 18 alumnos utilizan bolígrafos de color negro. ¿Cuántos utilizan ambos tipos de bolígrafos?

Bolígrafo azul



Bolígrafo negro

18 +24 = 32

42 -30 = 12 alumnos.

5.9.2. Las estrategias de la lectura analítica y la reformulación.

La lectura analítica consiste en una lectura del texto profunda de manera que se diferencien sus partes y se distingan las relaciones en él, con la misión de ayudar a comprender el problema. Tras la lectura analítica se sucede un nuevo proceso de síntesis, o sea, de integración de las partes que anteriormente hemos diferenciado, con el objetivo de que el nuevo texto se transforme en un lenguaje más familiar a alumno, reformulando el enunciado como una nueva situación aparente, pero que en el fondo sólo ha cambiado de aspecto.

El análisis del texto tiene como finalidad básicamente que el alumno pueda elaborar una representación de todo el sistema de relaciones específicas, que se consigue a partir del proceso de reformulación, proceso durante el cual los elementos adquieren nuevas significaciones.

5.9.3. Las estrategias de la determinación de problemas auxiliares.

Consiste en detectar subproblemas dentro del problema. En aquellos problemas de más de una fase la respuesta pasa por encontrar problemas auxiliares.
En la práctica, la determinación de subproblemas se hace de forma natural, ya que el alumno realiza una serie de inferencias en el proceso de razonamiento.

5.9.4. Las estrategias del tanteo o ensayo y error.

Consiste en buscar las soluciones mediante pruebas sucesivas. Al ponerse en funcionamiento, el alumno elige un posible proceso resolutorio, aplicándolo. Si no correcto, se prueba con otro.
Para Luceño (1999) esta técnica se utiliza generalmente en una situación difícil de búsqueda de la solución y las condiciones del problema plantean

relaciones claras que faciliten la prueba sistemática y garantizan la posibilidad de encontrar todas las soluciones".

Además en la prueba sistemática se debe analizar cada vez la solución para compararla con las anteriores y ver si existe algún tipo de regularidad que disminuya el número de cálculos a realizar o que permita acabar concluyendo con la certeza de no haber dejado soluciones sin considerar o sin comprobar.

Para acabar dominando esta técnica los alumnos pueden ejercitarse en situaciones de estos tipos:

a) Ejercicios donde el alumno haya de buscar diferentes posibilidades a la hora de resolver una situación (p.e. "indicar diferentes formas de pagar con monedas algo que nos ha costado 8, 28 €").

b) Situaciones donde se hayan de calcular distintas combinaciones (p.e " Escribe diez números de cuatro cifras con las cifras 3, 5, 7 y 9")

c) Ejercicios en los que el alumno ha de buscar cantidades con ciertas condiciones (p.e. "Busca los divisores de 128 mayores de 10 que no acaben en 2")

5.9.5. La estrategia de la comprobación.

Esta técnica tiene la función de garantizar que el procedimiento que se ha empleado y los cálculos que hemos realizado, así como los resultados que hemos obtenido sean correctos, o al menos entren dentro de lo posible.

La comprobación se puede utilizar abundantemente cuando se dan relaciones parte – todo en un problema. Así, el todo ha de ser mayor que las partes y si se ha de hablar de una parte, ésta ha de ser menor que el todo. Según Luceño (1999), se pueden controlar hasta cuatro formas de hacer el control:

a) Realizar una estimación previa y compararla con el resultado.

b) Utilizar como dato el resultado obtenido, conduciendo esto a un nuevo problema cuya solución permite verificar si se obtienen algunas condiciones dadas en origen en el problema.

c) Realizar la operación inversa a la realizada en el problema original y ver si se obtiene el dato.

d) Realizar el problema por otra vía diferente y comparar los resultados.

5.10. El proceso de resolución de PAEVs: factores, dificultades y estrategias facilitadoras.

A continuación presentamos los aspectos a estudiar en el proceso de resolución de los problemas aritmético-verbales, sus dificultades y estrategias que pueden facilitar al alumno la resolución.

5.10.1. Dificultades en la resolución de problemas.

Conocemos algunas de las dificultades que los alumnos encuentran al resolver los problemas aritmético-verbales.

Planteamos el problema siguiente:

Un niño tenía 8 cromos y le compraron 4 cromos más. ¿Cuántos cromos tiene ahora?

Normalmente un niño reconoce este problema como un problema que se resuelve con una única operación: la suma de los dos datos del problema. El profesor puede presuponer que en la resolución del problema solamente es necesario elegir correctamente la operación matemática. Por tanto esta manera de pensar defiende que en la resolución de un problema aritmético se deben desarrollar dos etapas (Maza 1995):

a) Una traslación directa, por la cual los elementos del problema (cantidades, relaciones entre ellas, expresiones verbales) se aplican directamente a una de las operaciones que el niño conoce.
b) El cálculo, en el que se aplica la operación requerida a estos elementos.

En la aplicación de este método resulta como mecanismo importantísimo la utilización de “palabras clave”. Así en este problema la palabra “más” puede implicar mecánicamente la reacción de aplicar la operación suma y no otra. Lo mismo podría suceder si las palabras que nos encontramos son “menos”, para la aplicación de la operación resta, “doble” para la operación de multiplicar o “entre” para la división

Las dificultades de la resolución de problemas aritméticos se acentúan cuando en el ejercicio aparecen aquellas palabras clave que no corresponden con la correcta aplicación de la operación. Así por ejemplo:

Juan tenía 26 € y su tío le dio unos cuantos más. Ahora tiene 42 €. ¿Cuántos € le dio su tío?

Ahora aparecen una serie de palabras clave que nos inducen a utilizar la operación suma (“más”, “le dio”) y en cambio la operación a aplicar para resolver correctamente el ejercicio es evidentemente una resta. Es por ello que las palabras clave no pueden ser los únicos mecanismos empleados en la interpretación de un problema aritmético. La comprensión es un término amplio.

En palabras de Maza (1995),

> “Comprender un problema aritmético consiste en representar internamente sus cantidades, las acciones que se ejercen sobre estas cantidades la equivalencia final entre las acciones ejercidas y el resultado de las mismas. Comprender es además, interpretar dicha representación. Ambos procesos, representar e interpretar, no están disociados sino estrechamente unidos La representación interna de los elementos del problema se construye pero también se actúa sobre ella y desde ella”.

La metodología adecuada en la enseñanza de los problemas aritméticos es fundamental en la correcta adquisición del aprendizaje de los mismos, y esto pasa por una metodología que supere las características

superficiales (como las palabras clave) y abordar otras más profundas ligadas a la construcción de una adecuada representación interna, por lo que según Maza (1995) es necesario no sólo facilitar el profesor este tránsito (meta final), sino también la evitación de pasos erróneos ejecutables por parte del alumno.
Por ello este autor señala tres fuentes de obstáculos:

I. Interpretación del problema como* aplicación *de la teoría.

Esta metodología parte de dos supuestos:

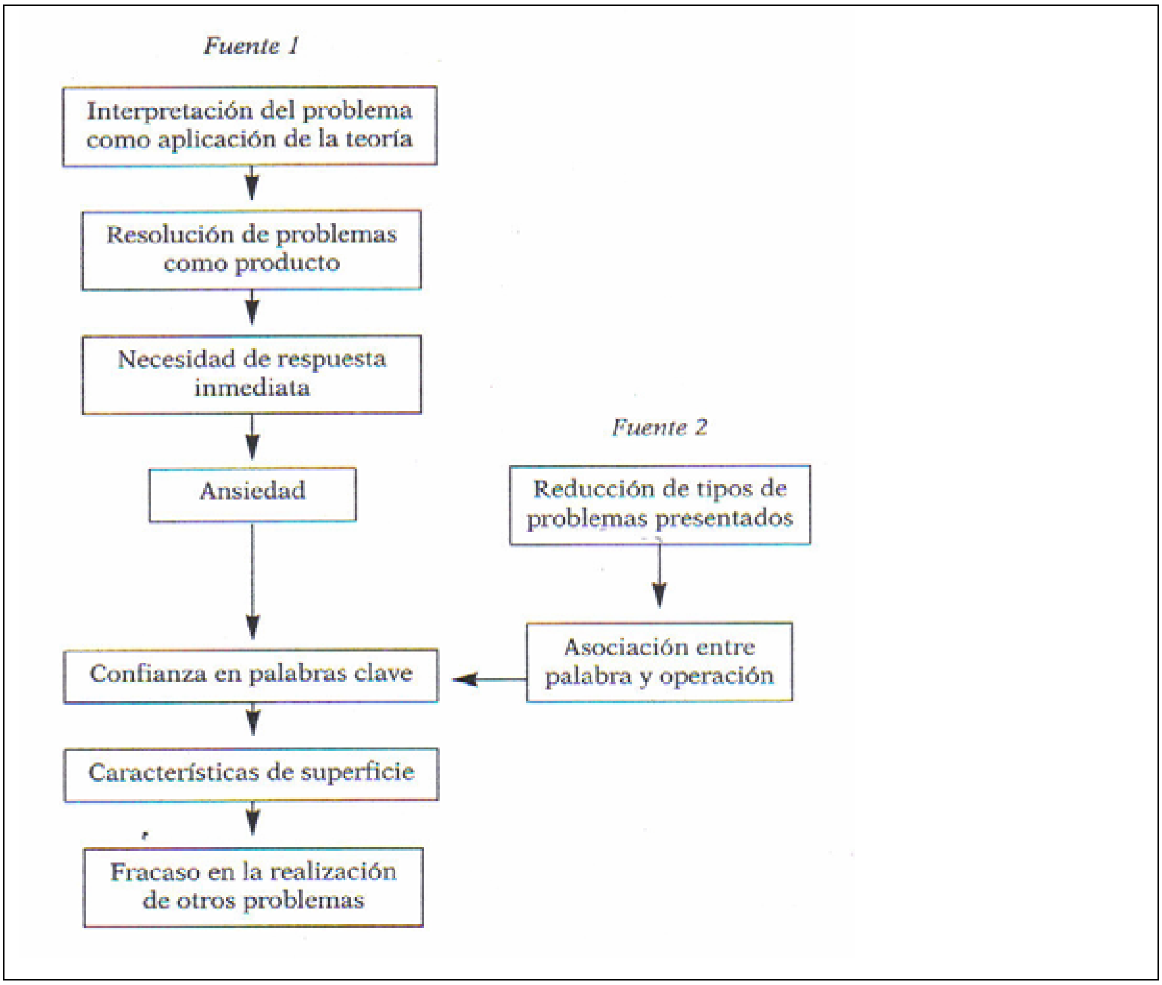
a) "La posición entorno a la relación entre la teoría y la práctica suele ser la de preceder la primera a la segunda".
   Aquí uno de los objetivos fundamentales es el de garantizar una correcta simbolización del procedimiento.
b) "El alumno no dispone de estrategias previas para poder resolver el problema o si las tiene no son las adecuadas, por tanto hasta que el alumno no disponga del método adecuado no abordará la tarea de resolver problemas".

Ahora bien, los alumnos, según diferentes estudios (Carpenter , Moser y Romberg, 1982; Fuson y Willis, 1988 y Maza1989, 1991, citados por Maza, 1995) demuestran que disponen de métodos no escolarizados y de estrategias informales., muchas veces acertadas, pero limitadas*.* *.*

II. Reducción de los tipos de problemas presentados.

La metodología que se basa en el aprendizaje de unos pocos modelos-tipo de ejercicios tarea distintas consecuencias. La proliferación de problemas aditivos de cambio aumentando ante los de otra tipología o los multiplicativos del tipo de razón ante los problemas de combinación...

La utilización de aquellos enunciados en los que la forma canónica responde a una estructura en la que la incógnita se presenta al final del enunciado, pueden ser los que inicien el proceso de resolución, pero ha de haber un progresivo planteamiento de otras formas no canónicas.



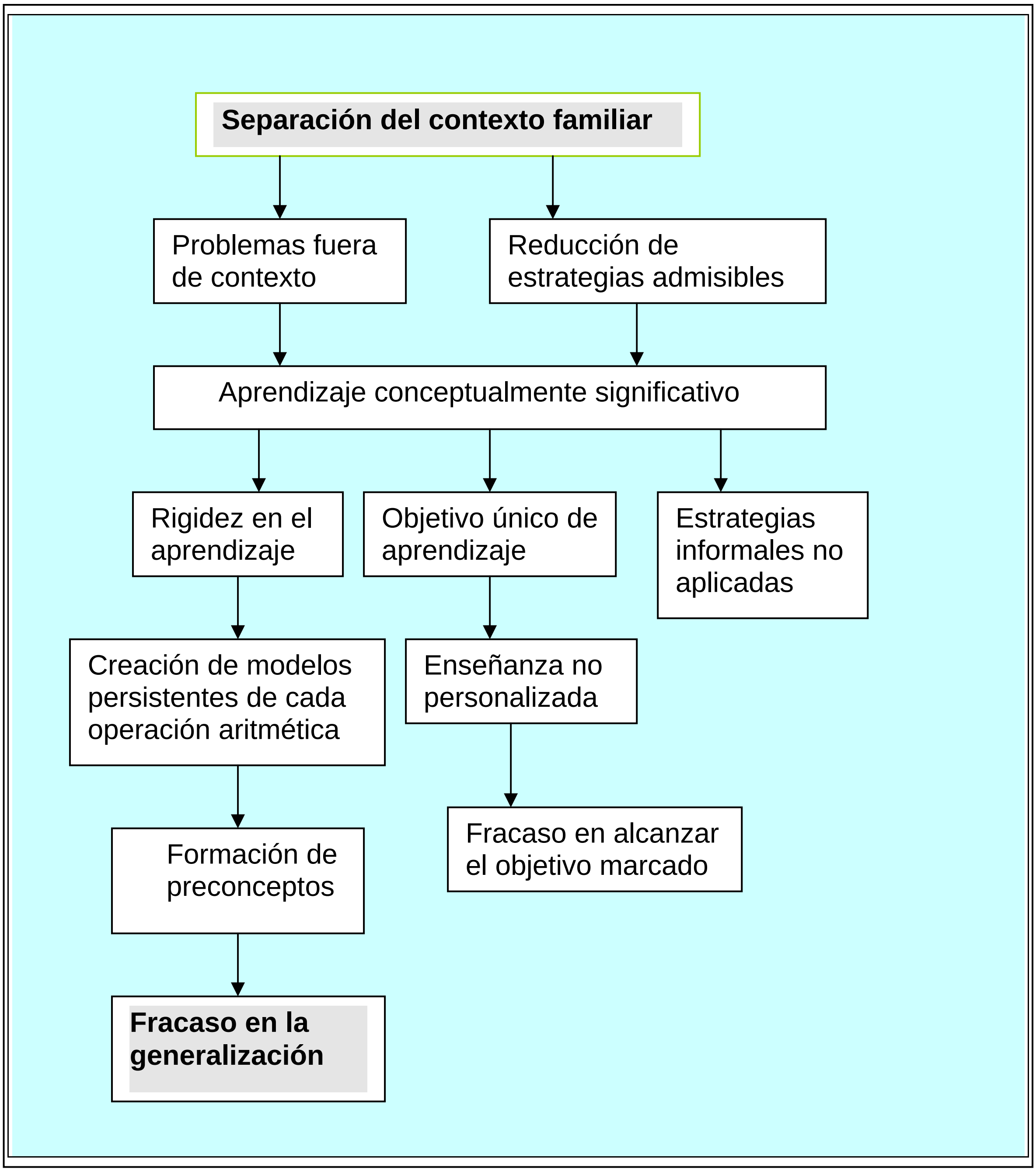
5.3. Fuentes 1 y 2 de obstáculos en la resolución de problemas aritméticos (Maza, 1995)

III. Separación del contexto familiar

El proponer a los alumnos problemas que no tienen mucho que ver con la realidad e intereses del alumno (como, por ejemplo, plantear enunciados con un lenguaje adulto) fomenta un mal aprendizaje. Por ello elementos del enunciado relativos a su vida diaria (cromos, canicas, etc...) han de sustituir a otros para ellos no comunes.

Este contexto conlleva dos tipos de aspectos a estudiar:

- *Si los problemas han de reducirse a sus vivencias diarias o por el contrario han de ser problemas generados en clase de matemáticas con los diferentes materiales manipulativos.*
- *Si se deben admitir estrategias no escolarizadas o informales o por el contrario se ha de prescindir de ellas.*



5.4. Obstáculos (fuente 3) según Maza, 1995.

5.10.2. Dificultades y errores en el proceso de resolución de problemas en alumnos con dificultades de aprendizaje.

Nos referimos cuando hablamos de error, a aquel cometido al resolver los problemas aritmético-verbales, derivados de la equivocación bien en la aplicación de los algoritmos o en el cálculo de los mismos.

Kintsch (1987) descubrió tres posibles fuentes de error al resolver problemas aritméticos sencillos presentados en forma verbal:

1) mal uso o desconocimiento de estrategias aritméticas, falsas concepciones y fracaso en el procedimiento de conteo,

2) comprensión equivocada del problema, principalmente, por factores lingüísticos, y ,

3) sobrecarga de elementos en la memoria de corto plazo.

Jitendra y Kameenui (1996) examinaron de manera extensiva los patrones de errores cometidos por los estudiantes cuando resuelven problemas de tipo verbal, con el fin de comprender sus procesos de razonamiento y diseñar los procesos de instrucción correspondientes para remediarlos. Éstos van desde errores simples de cálculo, hasta otros más sofisticados derivados de la teoría del análisis de errores en lectura y el procesamiento de la información.

Los errores basados en el análisis de la lectura incluyen entre otros:

a) errores en comprensión de lectura,

b) ausencia de destrezas en los procesos de codificación,

c) errores derivados del procesamiento de información, que a su vez incluyen:

- dificultades en el lenguaje,
- representaciones espaciales,
- conocimiento inadecuado de conceptos y,

- destrezas, prerrequisitos, asociaciones incorrectas o aplicación de estrategias irrelevantes.

En opinión de algunos autores (Critchey, 1970), citado por Miranda y otros, (2000) es muy difícil que un estudiante con deficiencias en la lectura pueda obtener un rendimiento medio en matemáticas. La opinión más extendida entre los expertos es que el factor que explicaría las dificultades que experimenta estos niños se dio un déficit en el manejo de símbolos.

Son numerosos los estudios que demuestran la importancia de los déficits de comprensión de los enunciados para explicar el fracaso en la resolución de problemas. Se ha comprobado que la dificultad en la resolución de problemas de la estructura semántica de los conceptos. El nivel porcentual de errores se incrementa cuando se comparan los resultados obtenidos en ejecución de un mismo problema según se plantea en numéricamente con formato de Hervás. Además ese porcentaje van en aumento a medida que los problemas son más complejos lo que significa que el alumno debe poseer un mapa lingüístico sobre el la tarea en la que se enmarca el problema (Kinstch y Greeno, 1985).

Hemos de distinguir en el ámbito de resolución de problemas, dos aspectos importantes: por una parte los déficits que el alumno, en general – y los TDA en particular – padece en los procesos implicados a la hora de resolver los problemas aritméticos verbales y por otra el desarrollo general de estrategias de resolución de tales problemas.

a) Déficit en los procesos implicados en la resolución de problemas.

Siguiendo las teorías cognitivas sobre la resolución de problemas cuando el alumno se enfrenta a un problema en primer lugar debe prestar suficiente atención para diferenciar la información relevante de la información que relevante organizando lo espacial y temporalmente, por lo cual necesita tener un nivel aceptable de comprensión lectora. Además, debe ser capaz de activar su memoria en situaciones problemáticas con cierto grado de semejanza de cara a representarse bien del problema. Sólo así podrá elegir la estrategia más apropiada y que gracias a la supervisión y el control continuo en la ejecución del mismo y la modificando de cara a alcanzar el objetivo preestablecido.

A continuación, basándonos en la a revisión de la literatura especializada estudiaremos las dificultades de aprendizaje de la resolución de problemas en los alumnos:

a) Recursos atencionales limitados.

Las dificultades de atención impiden a los alumnos la utilización de estrategias ordenadas y jerarquizadas, lo que hace que se aplique de forma impulsiva aquella operación que sugiere alguna palabra clave del enunciado.

Los estudiantes con déficit atención manifiestan dificultades a la hora de abordar de manera eficaz la lectura del problema con el objetivo de extraer la información relevante (atención selectiva). Debido a esta poco capacidades de atender a los aspectos esenciales para resolver el problema y a rechazar aquellos aspectos irrelevantes, los alumnos tenderán a elaborar relaciones de los mismos rellenando los huecos con informaciones que no son pertinentes.

Algunos autores como Zentall (1990) defiende en que al darse estas limitaciones de atención, la carga atención al que suponen los mecanismos de cálculo, cuando no se ha logrado el nivel de automatización suficiente, pueden dificultar la comprensión del problema. Esto es, si el alumno no tienen automatizado la operación tendrá que centrar su atención en esa tarea en detrimento de otros aspectos, que podrían ayudarle a captar qué es lo que se les solicita y que lo que se le proporciona. Cualquier actividad implicada en la resolución del problema que cada alumno y que de centre su atención de la comprensión del problema como puede ser el proceso de cálculo, es posible que interfiera en su resolución. Sin embargo no todas las investigaciones realizadas sobre esta cuestión han ofrecido respaldo a esta hipótesis. Rabinowitz y Woolley (1995), citada por Miranda y otros (2000), no encontraron evidencias sobre esta hipótesis. La ausencia de interacción entre comprensión del problema y proceso de cómputo cuestiona la idea de que la automatización facilita la solución de problemas y las afirmaciones de que el incremento de las exigencias de cálculo pueden interferir en la solución de los problemas. De momento, pues, no puede concluirse consistentemente el hecho de que las limitaciones atención al es que manifiestan los estudiantes con dificultades en la aprendizaje durante el proceso de resolución de problemas se deban a los requerimientos derivados de un cálculo no automatizado.

b) Déficit perceptivo-espaciales.

Los alumnos con déficit en el factor visual y espacial puede llegar a resolver problemas verbales simples pero se enfrentarán a fuertes obstáculos cuando el problema se compone de varias operaciones, presente tiempos distintos y sobre todo, cuando implique las nociones de tiempo y espacio para su realización.

c) Déficits en la percepción temporal.

La manifiesta imposibilidad de diferencias secuencias temporales como antes, ahora, después afecta esencialmente a la resolución del problema de cambio que se regían por el factor temporal. Se puede actuar ante esta dificultad, reescribiendo el problema – como se explica en el siguiente punto – dando algunas pistar en el enunciado.
El problema de cambio 5: *“Claudia llevó al colegio unos cuantos cromos y al regalarle 5 su amigo Tasio ahora tiene 28 cromos. ¿Cuántos cromos*

llevó al colegio?”, podemos presentarlo introduciendo alguna pista de carácter temporal, como la siguiente: “*Al principio*, Claudia llevó al colegio unos cromos y *después* de regalarle 5 su amigo Tasio, *al final* tenía 28 cromos ¿Cuántos cromos *llevó al principio* Claudia?”

d) Déficits de memoria

Los alumnos con dificultades en la aprendizaje de las matemáticas obtienen puntuaciones inferiores en las tareas de recuerdo numérico lo que dificulta enormemente la tarea de resolución de problemas. Para algunos autores (Swanson, 1994) sus dificultades de memoria no se deben a una capacidad deficiente sino al modo en que procesar información. Efectivamente el déficit de memoria de estos alumnos hay que buscarlo principalmente en la escasa aplicación de estrategias de memorización sobre la información entrante, más que en un a capacidad del almacén de memoria, lo que iría en la línea de las aportaciones de Torgesen (1977) quien ha definido a los estudiantes con dificultades de aprendizaje como aprendices pasivos.

e) Déficits en el lenguaje y comprensión lectora

Otro de los factores implicados en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas es un repertorio léxico en general insuficiente y/o un desconocimiento de la terminología propia de las matemáticas en particular ya que para resolver problemas matemáticos es necesario entender el vocabulario asociado.

Desde los inicios de la década de los ochenta, Rimoldi (1984), citado por Poggioli (1996) ha venido examinando el papel que tienen las estructuras lógicas y los sistemas simbólicos en la resolución de problemas. Este autor ha examinado los efectos de la edad, el sexo, el nivel socioeconómico, la pertenencia a grupos culturales diferentes, etc. Mayormente, los estudios señalan, por una parte, la verificación de la hipótesis que establece la relación entre los conceptos de lenguaje y la estructura lógica y, por la otra, que la no resolución de un problema puede deberse a un uso deficiente o al desconocimiento del lenguaje utilizado en el enunciado, aunque no ha sido contemplado en toda su dimensión por los teóricos clásicos del área de resolución de problemas (Poggioli, 1997).

Los investigadores de la comprensión del discurso han argumentado y estudiado con mayor énfasis la relación entre el lenguaje, el sistema simbólico y las estructuras de pensamiento. El lenguaje y el sistema de símbolos constituyen el formato básico de información almacenada en la memoria y éste es un conocimiento que permite comprender y representar el problema. Sin control del sistema simbólico es imposible pretender que un individuo opere satisfactoriamente aunque pueda ser capaz de traducir y comprender la estructura subyacente al problema (Kintsch, 1986).

Se ha observado que la mayor parte de los estudiantes, independientemente del nivel de escolaridad, resuelven menos problemas cuando éstos se presentan en forma verbal que cuando se presentan en forma matemática. Se ha comprobado que en muchas situaciones problema, una de las principales dificultades estriba en transformar el estado inicial, formulado en lenguaje natural, al estado formal en lenguaje matemático. Una vez obtenida la transformación y si ésta es correcta, el problema está prácticamente resuelto.

b) Desarrollo general de estrategias de resolución de problemas en matemáticas.

Los resultados de diversos estudios realizados han permitido determinar las dificultades de los estudiantes al resolver problemas. Entre ellas se pueden mencionar las siguientes:

1) Poco dominio de procedimientos heurísticos, generales y específicos, para resolver problemas.

2) Bajo nivel de análisis o análisis superficial de la situación problemática planteada en el enunciado del problema.

3) Dificultad para planificar el proceso de resolución del problema, englobando los siguientes aspectos:

- representación mental del enunciado del problema,
- aislamiento de la información relevante,
- organización de la información,
- planificación de estrategias resolución,
- aplicación de procedimientos adecuados y,
- verificación de la solución, revisión y supervisión de todo el proceso resolución.

4) Ausencia de conocimiento metacognoscitivo, lo cual le impide tener conciencia de los procesos y estrategias que utiliza para la resolución del problema y corregirlos en caso de ser necesario.

La investigación en metacognición en el área de resolución de problemas ha tratado de identificar procesos estratégicos que pueden aplicarse a todo tipo de problemas, más que a áreas específicas. Brown (1978) identificó varios procesos estratégicos que los estudiantes deben adquirir para ayudarlos a convertirse en solucionadores efectivos de problemas. Estos son:

- Conocer nuestras limitaciones como aprendiz.
- Estar consciente de las estrategias que uno sabe cómo usar y cuándo cada una de ellas es apropiada.
- Identificar el problema a resolver.
- Planificar las estrategias apropiadas.

- Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema.
- Evaluar la efectividad de los pasos anteriores de manera que el solucionador de problemas sepa cuando finalizar de trabajar en el problema.

En el cuadro siguiente se indican los pasos a seguir en la resolución de un problema y las preguntas que el alumno debe hacerse en cada paso con el fin de llevar a cabo un proceso metacognoscitivo en el transcurso de la resolución (Bañuelos, 1995).

Primero	Comprensión del problema
Comprender el problema	¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es posible cumplir las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita?, ¿Son insuficientes?, ¿Son redundantes?, ¿Son contradictorias? Represente el problema con una figura. Adopte una notación adecuada. Separe las diferentes partes de las condiciones, ¿Puede ponerlas por escrito?
Segundo	**Concepción de un plan**
Descubrir las relaciones entre los datos y la incógnita. **Puede verse obligado a tomar en cuenta problemas auxiliares si no encuentra una relación inmediata.** **Debe llegar a tener un plan de resolución**	¿Se ha encontrado antes con el problema?, ¿Lo ha visto de forma diferente?, ¿Conoce algún problema relacionado?, ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Revise la incógnita. Intente recordar algún problema familiar que tenga una incógnita igual o parecida. ¿Puede replantearse el problema? Si no puede resolver el problema propuesto, intente resolver primero algún problema que se relacione con el mismo. ¿Puede imaginarse un problema más sencillo, relacionado con éste?, ¿Algún problema más general?, ¿más particular?, ¿Análogo? ¿Puede resolver alguna parte del problema? Mantenga sólo una parte de las condiciones, abandone la otra parte. ¿Hasta qué punto se determina entonces la incógnita, cómo puede variar? ¿Podría extraer algo práctico a partir de los datos? ¿Puede pensar en otros datos adecuados para hallar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita, o los datos, o las dos cosas si hace falta, para que la incógnita esté más próxima a los datos nuevos? ¿Ha utilizado todas las condiciones? ¿Ha tomado en cuenta todos los elementos esenciales que intervienen en el problema?
Tercero	**Ejecución del plan**
Llevar a cabo un plan	Cuando lleve a cabo su plan de resolución, compruebe cada paso. ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrar que es correcto?
Cuarto	**Verificación**
Examinar la solución obtenida	¿Puede comprobar el resultado? ¿Puede comprobar el razonamiento? ¿Puede percibirlo a simple vista? ¿Puede utilizar el resultado o el método para algún otro problema?

5.5. Etapas y secuencias para desarrollar conocimiento metacognoscitivo para la resolución de problemas según Bañuelos (1995)

Respecto a otros aspectos de las dificultades en el proceso de la resolución de problemas, se han descrito los siguientes:

5) Tendencia a operar directamente sobre los datos explicitados en el enunciado del problema.

6) Dificultad para encontrar los datos intermedios, no explícitos en el enunciado del problema.

7) Tendencia a mantenerse dentro de lo que exige el problema, sin ir más allá de su planteamiento.

8) Bajos niveles afectivos y motivacionales hacia la matemáticas y hacia la resolución de problemas.

9) Desconocimiento acerca de los tipos de conocimiento involucrados en la resolución de un problema.

10) Desconocimiento de las etapas y de los pasos generales que se pueden seguir para resolver un problema.

Estos hallazgos han constituido el centro de la preocupación por parte de todos aquellos involucrados en la enseñanza de la matemática y se ha concluido que ellos son la causa, en primer lugar, del fracaso consistente generalizado por parte de los estudiantes en la adquisición de las habilidades matemáticas requeridas en los diferentes niveles del sistema educativo; en segundo lugar, de la dificultad evidente para realizar todas aquellas actividades que impliquen procesos de naturaleza matemática y o algebraica; en tercer lugar, el desconocimiento de la importancia de la matemática y para la vida cotidiana y otras disciplinas; y finalmente el desconocimiento de la matemática no sólo constituye un área específica del conocimiento sino que está vinculada con la estructura del pensamiento de los individuos.

5.10.3. Estrategias facilitadoras para los alumnos con dificultades de aprendizaje en la resolución de problemas.

Desde los planteamientos teóricos descritos anteriormente, podríamos argumentar que la instrucción en resolución de problemas debería centrarse en ofrecer al alumno una serie de estrategias facilitadoras necesarias para llegar a una representación coherente de los enunciados, para, a partir de ella, poder razonar la resolución del problema. Sin embargo esto contrasta con la enseñanza habitual en la resolución de problemas, centrada principalmente en la solución, especialmente en los algoritmos de las operaciones, prestando poca o ninguna atención a los aspectos relacionados con la comprensión. En este sentido, Orrantia y cols. (1993), han desarrollado en una de sus investigaciones un programa de instrucción que intenta recoger todos los aspectos relacionados con la resolución, especialmente aquellos que tienen que ver con la representación del problema. Las dos primeras etapas de su programa de instrucción, están relacionadas con la comprensión del enunciado y se refieren a las *ayudas textuales (reescritura)* y la *representación lingüística del problema (base del texto)*. Los otros componentes del programa de instrucción de este autor, son: *Representación figurativa del problema (modelo de la situación), Razonamiento (planificación de la solución) y Revisión/evaluación/supervisión (ayudas metacognitivas).*

Aunque se comentarán a nivel general estas ayudas se hace una especial atención a la primera de ellas, porque en una parte de la fase experimental se realiza una implementación con los alumnos sobre la reescritura del enunciado.

a) Ayudas textuales (Reescritura)

La primera fase consiste en reescribir el problema de manera que el enunciado sea más comprensible. Existen investigaciones, (citadas por

Orrantia y cols., 1993), que han demostrado que cuando se presentan los problemas con una serie de ayudas lingüísticas que hacen explícita la relación entre los conjuntos, esto es, su estructura semántica, la ejecución mejora.

Hudson (1983, citado por Lago y otros, 2001) demostró que los problemas de comparación reformulados resultaban más sencillos para los alumnos que aquellos problemas sin reformular, aunque fue criticado por porque en la propia reformulación se sugería la estrategia de resolución (en este caso se trataba de un “emparejamiento” de los datos).

Lago y cols. (2001) consideran que la reformulación producirá efectos beneficiosos en los procesos de comprensión de los alumnos, manifestándose estrategias no solo de emparejamiento sino de otras como las de conteo, introduciendo modificaciones respecto al trabajo de Hudson para esclarecer el probable efecto de los diferentes tipos de representación de las cantidades del problema.

El objetivo de reformular el enunciado es la de resaltar la estructura semántica del problema. Para ello tendremos en cuenta los principales déficits de los alumnos con TDAH modificando el enunciado para que el alumno consiga una significatividad del mismo que posteriormente le permita realizar una representar un esquema correcto del enunciado.

Para ello será necesario analizar las características de los problemas e intentar modificar los enunciados, adaptándolos a su déficit.

Las pautas que Orrantia (1993) propone para facilitar una representación correcta del enunciado del problema, son las siguientes:

Problemas de cambio:

La característica principal de los problemas de cambio es el proceso caracterizado por una acción, implícita o explícita, de modificación de una cantidad con resultado de un incremento o decremento de la misma. Esta acción está enmarcada en un proceso caracterizado por la temporalidad, por ejemplo, en el siguiente problema de Cambio 1,

Teresa tenía 6 caramelos y Pilar le da 4 más. ¿Cuántos tiene ahora Teresa?

En los ***problemas de cambio*** se pasa de una situación *inicial* a otra *final* tras una *modificación o un cambio*. Los alumnos con TDAH tienen dificultades en
Procesar enunciados en los que las secuencias temporales no están bien definidas. Necesitan enmarcar correctamente la acción en una secuencia temporal, con la ayuda de palabras tales como primero, al principio, antes, ahora, mientras, después, etc...en el enunciado para entender de manera correcta la acción de crecimiento o decrecimiento. Así el problema anterior podemos reescribirlo de la siguiente manera:

Teresa tenía al principio 6 caramelos y Pilar le da después 4 más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Teresa?

Problemas de combinación:

Engloban los problemas aditivos en los que se describe una relación entre conjuntos con el esquema *parte-parte-todo*. En esta categoría la secuenciación temporal no tiene importancia, sino que aquí es el conocimiento de la pertenencia de cada cantidad de cada una de las partes. Entre los dos tipos de problemas de Combinación parecen revestir de mayor dificultad los de Combinación 2, o sea aquellos en los que se pregunta por una de las partes.
Planteamos un problema de Combinación, como el siguiente:

Montse i Joan tienen 84 cromos entre los dos. Si Montse tiene 28 cromos. ¿Cuántas canicas tiene Joan?

Ante este enunciado, el alumno ha de saber diferenciar las cantidades de ambas partes. Una reescritura del tipo:

Montse y Joan tienen 84 cromos entre los dos. De estos cromos 28 son de Montse y el resto son de Joan ¿Cuántos cromos son de Joan?

Problemas de Comparación:

De los problemas de esta tipología, los de Comparación 5 fueron los que menos correctos efectuaron. Investigaciones anteriores (Hudson, 1983, citado por Orrantia, 199?) centraron la reescritura en aquellos problemas de Comparación en los que se pregunta por el conjunto diferencia. Para los alumnos con TDAH, sería conveniente reescribir como considera Orrantia, que lo que hace difícil a estos problemas, es considerar qué hace referencia a al conjunto mayor o menor, añadiendo una sentencia que matice este hecho. Así en el problema:

Montse tiene 105 cromos, que son 24 más de los que tiene Joan. ¿Cuántos cromos tiene Joan?

En este tipo de enunciados es conveniente reescribirlos resaltando de manera concreta los conjuntos mayor y menor, de la siguiente manera:

Montse tiene más cromos que Joan. Montse tiene 105, que son 24 más de los que tiene Joan. ¿Cuántos cromos tiene Joan?

Problemas de Igualación:

Estos problemas son los más difíciles para la generalidad de alumnos y aún más para los alumnos con TDAH. La característica de estos es el establecimiento de una comparación entre las cantidades que aparecen en el enunciado establecida mediante el comparativo de igualdad “tantos como”. Los problemas de comprensión y correcta interpretación del enunciado pasan por:

- reconocer las tres cantidades que entran en juego: la de *referenci*a, la *comparada* y la de *diferencia.*
- Especificar los conjuntos mayor y menor.

El objetivo por tanto será presentar al alumno un enunciado en el que distingan claramente las tres cantidades y su relación de mayor/menor, reescribiendo y matizando lo posible para que estos interpreten de manera correcta el problema.

En los problemas:

Problema de Igualar 1

Marta tiene 73 € y su hermana Nuria tiene 48 €.¿Cuántos euros le faltan a Núria para tener tantos como Marta?

Problema de Igualar 3

José tiene 85 cromos. Si Pedro consigue 18 tendrá tantos como José. ¿Cuántos tiene Pedro?

Problema de Igualar 5

Andrés tiene 118 cromos. Si Andrés consigue 22, tendrá tantos como Ignacio. ¿Cuántos tiene Ignacio?

Podríamos reescribir el enunciado de manera que queden reflejadas las tres cantidades mencionadas arriba, así como las pista para que diferencien los conjuntos mayor y menor:

Problema de Igualar 1

Marta tiene 73 € y su hermana Nuria menos, ya que tiene sólo 48 €. ¿Cuántos hemos de dar a Núria para tener tantos euros como Marta?

Problema de Igualar 3

José tiene 85 cromos. Pedro tiene menos, pero si le damos 18, tendrá tantos como José ¿Cuántos tiene Pedro?

Problema de Igualación 5

Andrés tiene 118 cromos. Ignacio tiene más, pero si Andrés compra 22 cromos, tendrá tantos como Ignacio. ¿Cuántos tiene Ignacio?

A continuación se expone la representación lingüística como segundo aspecto facilitador en la resolución de problemas aritmético-verbales.

b) Representación lingüística del problema (base del texto)

La segunda de las acciones que Orrantia propone para facilitar la resolución de los problemas aritmético-verbales es la ayuda, que está relacionada según el modelo de Kintsch y Greno (1985) con la representación de la base del texto. Consiste en articular el enunciado del problema en función de lo que se conoce y de lo que no se conoce.

En el problema de Cambio 6:

Teresa llevó a clase algunas castañas y dio 8 a Elisa. Le quedaron 10 castañas. ¿Cuántas tenía al principio?

Se podría articula este enunciado de la forma siguiente:

Lo que yo sé por el enunciado es:

Al principio Teresa llevó algunas

Después regaló 8

Al final le quedaron 10

Lo que no sé es

¿Cuántas canicas llevó *al principio*?

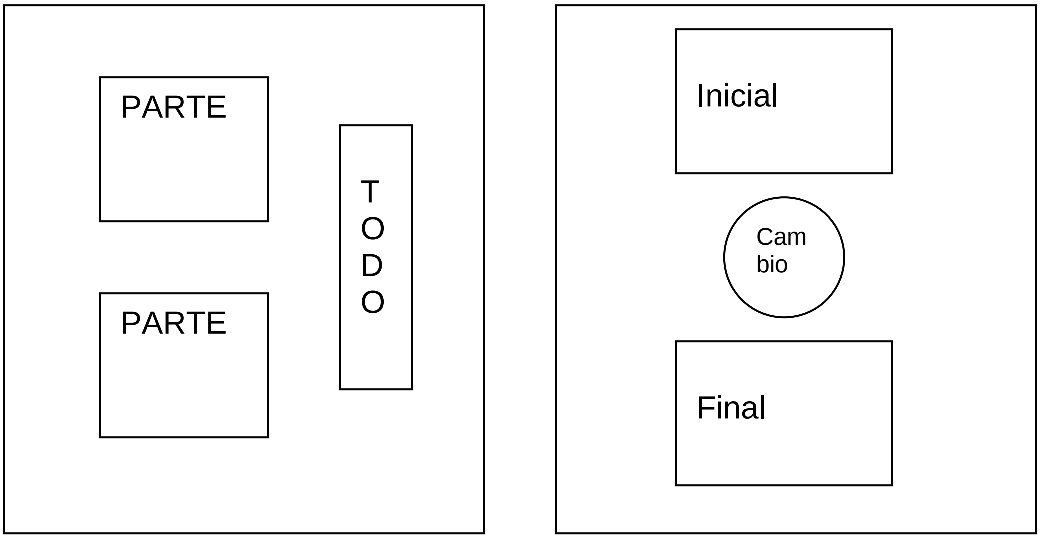
Al realizar esta acción de articular el enunciado entre lo que se conoce y no se conoce, se pretende que el alumno llegue a una representación inicial del problema, separando los datos por una parte y la pregunta por otra.

En este sentido tal articulación Orrantia la considera como la macroestructura (de la que habla van Dijk, 1980) del problema, en el que se recoge lo más elemental del mismo.

c) Representación figurativa.

Esta ayuda sirve para crear un modelo de la situación descrita en el enunciado del problema, enseñando al alumno los distintos esquemas de la teoría de Kintsch y Greeno (1985), que son el esquema "parte – todo", esquema de "transferencia" y esquema "más que y menos qué".

El sentido de esta ayuda que trata de representar con un dibujo el problema, servirá para que el alumno"rellene" cada casilla que se refiere al conjunto conocido y desconocido.



5

.6. Esquema "parte-todo" y esquema de "transferencia" de Kintsch y Greeno (1985)

d) Razonamiento

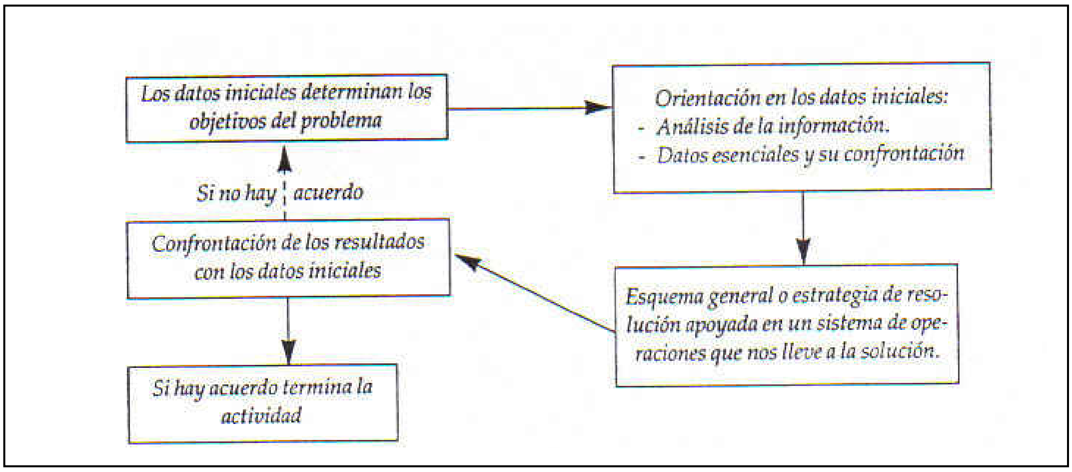
Esta ayuda se relaciona con la decisión que hay que tomar sobre la operación que se ha de aplicar en la fase de resolución del problema. Consiste en razonar con el alumno acerca de las características de los conjuntos inicial y final ("¿el conjunto inicial será más grande o más pequeño que el final?"). Se hace pensar al alumno sobre cuestiones de este tipo, a base de preguntas, con intención de que sea él el que “razonando” encuentre el medio de solucionar el problema.

e) Ayudas metacognitivas.

Estas ayudas sirven para revisar y evaluar la aplicación de las ayudas anteriores. Se ha de intentar que el alumno se pregunte interrogantes como : ” ¿he realizado bien el esquema?”, si no es así “¿en qué he de fijarme para hacerlo correctamente?”, etc... Todos estos interrogantes irán encaminados a la autorregulación del propio alumno en todo el proceso resolutivo del problema.

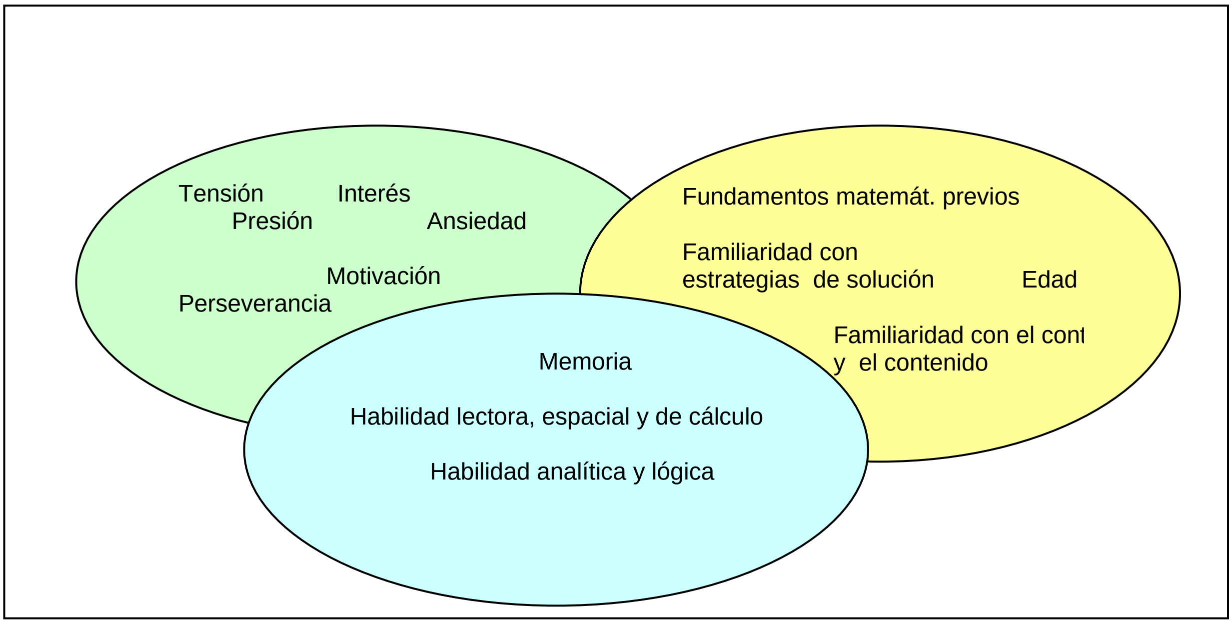
5.10.4. Factores incidentes en la resolución de problemas.

La resolución de un problema implica una actividad intelectual por parte del alumno, que supone la comprensión de la situación en la que el problema se desarrolla. Para Luria y Tsvetkova (1981) el objetivo planteado en un problema concreto está contenido en unos datos determinados y consecuentemente la actividad intelectual comienza por la orientación en los datos. Tal orientación se basaría en el análisis de la información que se puede obtener de los mismos (conocidos y desconocidos) y confrontándolos. Si tal orientación tiene lugar, aparecerá un esquema general o estrategia de resolución que se apoyará en un algoritmo o en un conjunto de operaciones que conducirá a la solución. El esquema sobre resolución de problemas de estos autores es el siguiente:



5.7. Esquema de Luria y Tsvetkova en González Ramírez (2000)

Charles y Lester (1982) analizan el proceso mental de la resolución de problemas centrándose en los problemas de matemáticas, señalando tres conjuntos de factores que interaccionan en la resolución de los mismos (factores de experiencia, factores afectivos y factores cognitivos), como aparece en el diagrama:



5.8. Factores influyentes en los procesos de resolución de problemas según Charles y Lester (en González Ramírez, 2000)

También Borasi (1986) citado por González Tablas (2000) coincide con estos autores al hacer algunas consideraciones sobre los resolutores de problemas.

5.11. La *normativa* entorno a la resolución de problemas dentro del currículum escolar.

El Diseño Curricular Base (1989) no contempla la resolución de problemas como un bloque de contenidos específico sino que se constituye como eje transversal de todo el área de matemáticas. Así, podemos extraer estas idea del DCB, que nos denotan la importancia del tema que tratamos:

> "La resolución de problemas como contenido curricular es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interrelación entre los distintos bloques y las restantes áreas."
>
> "La resolución activa de problemas es considerada como el método más conveniente de aprender matemáticas; es la aplicación de las matemáticas a diferentes situaciones..."
>
> "...Los problemas elegidos en la escuela deberán sacarse de situaciones que partan de la realidad de los alumnos, que provoque su interés y que mantengan su atención, y de situaciones imaginadas que sean sugerentes y atractivas para el niño...."
>
> "La dificultad que ha supuesto para los alumnos la resolución de problemas radica, en general, de unos planteamientos metodológicos inadecuados y especialmente de la falta de motivación ..."
>
> "Como conclusión se recomienda que si al niño no se le permite abordar problemas de un nivel adecuado a sus conocimientos y su esfuerzo no se ve compensado por el éxito, sus capacidades de resolución de problemas no se desarrollan de forma adecuada."

5.12. Estudios sobre el aprendizaje matemático de los alumnos con TDA.

La bibliografía sobre los estudios de habilidades aritméticas y de resolución de problemas realizadas con alumnos con TDA, que hemos encontrado es escasa. A diferencia de las investigaciones y estudios que tratan sobre los aspectos médicos psicológicos y comportamentales sobre los niños con Déficit Atención con o sin Hiperactividad, estos se ven relegados a unas pocas experiencias cuando de lo que se trata es ver sus problemas en el campo de las matemáticas.

Esto incide directamente en no poder constatar comparaciones entre los diferentes resultados obtenidos en nuestra investigación con otras, aunque sí compararemos con aquellos aspectos paralelos que aparecerán en nuestro estudio, como los problemas con el cálculo y otros.

Además de los estudios ya nombrados sobre los problemas con el cálculo en el apartado 4.4.2. del capítulo anterior, se incluyen aquí diferentes estudios, en los que se explican de manera más extensa alguna de las investigaciones con alumnos con TDA.

Ackerman, Jean, Anhalt y Dykman (1986) publican un artículo en el que la posición que defienden es la que los niños con TDA son propensos a experimentar dificultades en la aritmética básica, aunque asimilen las habilidades lectoras y ortográficas al ritmo propio de su edad. Los profesores e investigadores pueden ser lentos en darse cuenta de esta deficiencia computacional pues la mayoría de los test aritméticos individuales y grupales estandarizados para los estudiantes más jóvenes tienen un tiempo límite generoso. En este tiempo suficiente, los alumnos pueden resolver problemas de combinaciones simples con una estrategia de contar. Como conclusiones del trabajo, exponen que la evidencia presentada en el artículo *sugiere que tanto los educadores como los investigadores se equivocaban en la apreciación de la significación de los factores de retardo de la automatización en las escuelas de Primaria*. La preocupación de los autores venía propiciado por el resultado de los estudios posteriores que apuntaban que el fracaso de la automatización (o retardo) a menudo es un presagio de incompetencia aritmética posterior. Además era obvio que la dependencia en una estrategia de cálculo, más que no el almacenamiento fácil de un número usurpa mucha de la capacidad limitada de atención (o el espacio de memoria de trabajo) y que las operaciones mentales que requieren considerable capacidad o espacio no se pueden llevar a término con eficacia. Respecto a los errores de cálculo en grupos con desorden de atención, indicaban que igual que sucede en alumnos con Desorden de Lectura, mostraban déficits aritméticos más serios conforme avanza su escolaridad. En el estudio, muestran que muchos alumnos normales con TDA mostraban una automatización atrasada temprana en sus trayectorias escolares en hechos numéricos. Les desconcertaba que tuviesen dificultad para aprender estos tipos de asociaciones simbólicas de memoria cuando el reconocimiento de palabras avanzaba más o menos según las previsiones. En los alumnos con los que trabajaron, el déficit cognitivo mayor era la memoria y no el razonamiento espacial. La diferencia entre la adquisición de la lectura y la aritmética, es que cuando el alumno en su lectura en voz alta es susceptible de ser corregido por el profesor, mientras que la práctica de la aritmética es una actividad más independiente: los errores no se analizan de inmediato y no se pone énfasis en la velocidad, permitiendo al alumno utilizar una estrategia de cálculo más cómoda que no insistiendo en el esfuerzo para memorizar hechos. Los alumnos con TDA necesitan más o menos un feedback continuado para funcionar de manera eficiente, por lo que la utilización de programas de ordenador puede dar el feedback instantáneamente (y además puede programarse con soluciones cronometradas) la instrucción asistida por ordenador tiene un atractivo especial para los alumnos con TDA, especialmente cuando se refuerza con premios.

Zentall (1990) estudió la actuación de adolescentes con dificultades de aprendizaje, con TDAH y sin deficiencias respecto una serie de medidas cuando éstos trabajaban en problemas matemáticos. Se encontraron diferencias entre los grupos experimental y de control en la velocidad de recuperación de “hechos matemáticos” en cada operación, aunque no en cuanto a su precisión. La recuperación de datos de manera rápida sólo fue un predictor significativo de un número de respuestas correctas en los problemas verbales. A causa de los controles procedimentales y estadísticos utilizados, solo se encontraron diferencias entre ambos grupos en la resolución de problemas, concretamente en *los problemas de enunciado verbal*. Este trabajo da apoyo, sobretodo, a las predicciones teóricas según las cuales los alumnos con TDAH y con dificultades de aprendizaje tienen dificultades con los estímulos repetitivos, cosa que contribuye a aumentar sus déficits matemáticos básicos o avanzados.

Zentall, Smith, Lee y Wieczorek , (1992) estudiaron a grupos desde 2º a 7º grado con el objeto de estudiar los déficits de problemas verbales mediante el ordenador, en grupos con TDAH y sin deficiencia. Así se identificaron tres tipos de problemas que sólo se diferenciaban del emplazamiento de la incógnita dentro del problema. Se propusieron problemas con la posición de la incógnita en primer lugar (? + =b), en posición intermedia (a + ? .= b) y en la forma más familiar (a + b = ?).
El esquema se vio alterado al cambiar el orden de la información, sin cambio alguno en el vocabulario o la información. Así se concluyó que los alumnos con déficit, al utilizar la memoria de corto plazo, respondían peor que sus paralelos, cuando la incógnita estaba al comienzo y en medio del problema mientras se procesaba la información de éste. Las diferencias se mantenían en los problemas verbales que no requerían cambio alguno en el orden verbal, dándose en cambio en casos que requerían una transformación del orden de la información verbal asociados a la lectura.
Se encontraron diferencias, especialmente, en problemas de multiplicación en alumnos con deficiencias y otros en problemas clásicos donde la variable incógnita aparecía al final del problema. Esto no se atribuyó a problemas en el cálculo.

Especular que los alumnos con TDAH muestran déficits de conceptos matemáticos cuando se controlan el cociente intelectual y la comprensión lectora se sostiene por hallazgos similares de Judd & Bilsky (1989).

Zentall y Ferkis (1993) examinaron la forma de solucionar problemas matemáticos por los jóvenes con discapacidades de aprendizaje (LD), trastorno de déficit de atención (TDA) y trastorno de déficit de atención con hiperactividad (TDAH).
Llegaron a la conclusión de que *los logros matemáticos de los jóvenes con dificultades para el aprendizaje, déficit de atención y trastornos de hiperactividad por falta de atención es más bajo que el de sus compañeros sin déficit.*

La habilidad cognitiva - incluida la memoria- y la lectura contribuyen a las destrezas de comprensión necesarias para eliminar información ajena e irrelevante, así como a manejar operaciones múltiples, y transformar la información verbal en problemas. Además, el cálculo lento afecta a la solución de problemas al incrementar la carga de atención. A través de este trabajo y la revisión de otros estudios, se ha documentado que cuando el cociente de inteligencia y la lectura están controlados los déficits matemáticos llamados "ciertos" son específicos de conceptos matemáticos y tipos de problemas. La instrucción se traza indirectamente según las características del alumno que a su vez interactúan con el currículum de matemáticas común.

Un análisis en profundidad, trató de examinar la solución de problemas dividida en sus partes componentes de comprensión y realización de cálculo.

Estudiaron la comprensión de los problemas alterando, en un primer estadio, la información - relevante e irrelevante - en el problema y el orden de esa información. Los factores generales que moderan el éxito de la comprensión de problemas aparecían, atribuidos a habilidades lectoras y cognitivas. Cuando estos factores no son considerados o no son tenidos en cuenta se documentaron más diferencias específicas.

La realización del cálculo se evaluó para determinar su contribución a la realización de la solución de problemas. Los factores que moderan la más lenta capacidad de cálculo de los jóvenes de escuelas británicas - de nueve a trece años de edad - no aparecen como relacionados a la capacidad cognitiva tanto como a variables de estilo cognitivo específico tales como la falta de atención, una adecuada organización, asociados a menudo a adolescentes con desórdenes de aprendizaje (LD), Trastorno de Déficit de Atención (TDA) y Trastorno de Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH). Las características de aprendizaje y de atención de estos niños se examinan dentro del contexto instructivo matemático común. En un resumen final señalaron las implicaciones de la instrucción del estudio de las matemáticas desde las diferencias grupales observadas. El fracaso de los jóvenes con déficit de atención respecto a la resolución de problemas podría atribuirse a su escasa sostenimiento de la atención en trabajos y estímulos repetitivos. Estos autores concluyeron que una carga atencional y una habilidad lenta e inadecuada contribuye de una manera importante al pobre resultado en la resolución de problemas. El déficit de atención contribuye a los aspectos de cálculo deficiente.

Zentall, S.S y colaboradores (1994) realizaron una investigación en el que valoraron la realización y el comportamiento de 121 niños de primaria sin deficiencias y 107 chicos con trastorno de Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH), de edades entre 7,4 y 14,5 años. Los estudiantes completaron tareas generadas por ordenadores de lectura, cálculo y resolución de problemas aritméticos y registraron dos medidas de realización (corrección y velocidad) y tres medidas de comportamiento (vocalización, movimiento de la cabeza y movimiento del cuerpo). *El objetivo era determinar los efectos del TDAH sobre la matemática conceptual y de cálculo.* Consistió en registrar lectura y problema de estructura, la velocidad de procesar, reconocimiento del número y la respuesta motora. Para ello mantuvieron la constante de lectura y problema de estructura *y el análisis dio puntuaciones significativamente menores en la resolución de problemas en conceptos matemáticos específicos y realización de cálculo más lenta para los niños con TDAH.* Estos resultados demostraron las implicaciones educativas de los desórdenes de déficit de atención para la habilidad matemática y la necesidad de intervenciones ajustadas de manera más específica en estos déficits. Esta investigación también proporciona cabida por complejidad y extensión lectora, habilidad motor-visual, feedback y ritmo personal.

Zentall, en este estudio, a diferencia de otros investigadores, selecciona textos graduados por nivel con una variación no sistemática con la habilidad lectora y problema de extensión. Por tanto, las diferencias específicas que eran atribuidas a cambios en la acción y operación de problemas, podían haber sido debidas al aumento de la cantidad de atención requerida para *leer los problemas más largos*.

En este estudio ampliaron los resultados conocidos sobre la resolución de problemas valorando las matemáticas separadamente de los factores cognitivos y de la tarea/trabajo que pueden contribuir a los problemas de realización de los jóvenes con TDAH. Usaron textos matemáticos con textos generados por ordenador en un examen más sistemático del problema tipo. Con este control informático crearon tres tipos de problemas por operación, en los cuales sólo se diferenciaban en el lugar donde se coloca la incógnita en el problema. Eso cambiaba el esquema cambiando el orden de la información sin cambiar la información o el vocabulario del problema.

De Corte y colaboradores (1987) establecieron que las estrategias para resolver problemas de los niños probablemente dependían no sólo en la estructura semántica, sino también en la secuencia en que las cantidades conocidas son introducidas. Más concretamente, resolver un problema con la incógnita en la posición inicial es más difícil, según Rosenthal y Resnick (1974) debido a la necesidad de transformar el orden de la información para llegar a la solución.
Se generaron tres tipos de problemas matemáticos verbales generados por ordenador en los cuales sólo difería la posición de la incógnita dentro del enunciado y no la extensión ni el vocabulario. Estos investigadores estaban especialmente interesados en la habilidad de los alumnos para manejar cambios en el orden de la información. Si el cambio en los problemas era una variable importante, entonces los alumnos con Déficit de Atención tendrían mayores dificultades que sus compañeros sin Déficit cuando la incógnita se presentaba en el comienzo o en medio del problema, porque requeriría transformar el orden de la información. Las demandas de transformar la información del problema estaban

directamente relacionadas con la lectura comprensiva y sólo indirectamente con la resolución de los problemas matemáticos.

En segundo lugar reprodujeron y ampliaron los conocimientos sobre cálculo en los jóvenes con deficiencias de atención. En su estudio demuestran que estos alumnos poseen una *velocidad de cálculo más lenta,* lo cual es lógico considerar.

En tercer lugar, calcularon las respuestas verbales, motoras y fuera de la tarea que eran colaterales a la atención de la misma, porque el error para mantener la atención puede estar en la base del déficit.

En resumen, el estudio evalúa las consecuencias de algunas habilidades aritméticas del TDAH. También evaluaron algunos factores cognitivos como son: motor visual, de cálculo matemático en la actuación, igual que factores cognitivos (motor visual y velocidad procesadora), factores de tarea (comprensión lectora, tipos de problemas semánticos) y comportamientos asociados que pueden contribuir a los problemas de estos jóvenes en las matemáticas.

Benedetto–Nasho, E & Tannock, R (1999) realizaron un estudio para evaluar cómo se equipara la capacidad en cálculo matemático en niños con TDAH comparada con la de niños sin TDAH. Además de comparar la capacidad de cálculo de, estos autores también se interesaron en examinar cuidadosamente cómo la medicación estimulante afectaba la capacidad de cálculo de los niños con TDAH. En el estudio participaron 15 niños con diagnóstico confirmado (13 niños y 2 niñas) y 15 niños sin TDAH. Los participantes tenían entre 7 y 11 años, siendo muy cuidadosos a la hora de elegirlos ya que todos los niños tenían un coeficiente similar, un nivel de los padres semejante y unos resultados similares en matemáticas, para asegurar que cualquier diferencia en capacidad de cálculo entre los grupos que se detectase no pudiera atribuirse a diferencias de capacidad intelectual o nivel educacional familiar.

El estudio constaba de dos partes. En la primera, a los niños de cada grupo se les dio instrucciones para que trabajasen independientemente en trabajos de cálculo, por medio de problemas elegidos considerados un reto suficientemente apto para su nivel de habilidad. Se incluyeron problemas de sumas y restas y se les dio un determinado tiempo. Mientras realizaban este test los niños no estaban bajo los efectos de la medicación.

En la segunda parte del estudio los niños con TDAH completaron sus trabajos durantes tres días sucesivos. Para estas sesiones recibieron metilfenidato, sin ser conscientes de que lo habían tomado.

Se estudiaron tres resultados diferentes en el trabajo de los niños:

- la productividad (nº de problemas que se intentaron resolver dividido por el nº total de problemas)
- la exactitud (porcentaje de problemas que no se completaron correctamente)
- la eficacia (nº de problemas correctos entre en total de problemas)

Se observaron también el comportamiento de los niños (falta de atención veces que se levantaban del sitio, el cálculo con los dedos, etc..) y los autores completaron un análisis detallado de los tipos de errores que los niños cometieron(p.e. sumar en lugar de restar).

El primer grupo de resultados comparó los niños con y sin TDAH, cuando aquellos no estaban medicados. Como se esperaba los *niños con TDAH intentaron resolver menos problemas* (un 20% ante un 45%) en las pruebas con un número de problemas muy superior al tiempo dado.

Respecto a la exactitud en los resultados, no se encontraron diferencias entre los dos grupos, en los problemas de sumas, pero la eficacia en los niños con TDAH fue más baja. En ,os problemas de restar que los niños con TDAH se equivocaban, mostraban una falta de comprensión respecto a las “llevadas”, sustrayendo el dígito más pequeño del mayor, independientemente de su posición en la operación.

Los errores de análisis y el comportamiento fueron también interesantes. Durante los minutos de duración del test, los niños con TDAH estaban inatentos y nerviosos, levantándose más a menudo y empleando menos

tiempo en cada problema, utilizando el cálculo digital más veces que los compañeros sin la deficiencia, utilizando esta forma de contar más básica y mucho menos desarrollada que el cálculo mental.
La segunda parte de la investigación consistió en comparar los resultados con el efecto de la medicación, apareciendo diferencias aparentes: mejoraron la exactitud de los resultados en los problemas de restar (de un 38% a un 64%), intentaron resolver el doble de problemas y mostraron un comportamiento menos inatento.
Estos resultados se obtuvieron basándose en un test de 10 minutos, desconociendo si funcionaría en un periodo superior de tiempo.
Los resultados obtenidos con respecto a la inatención y distracción entre los niños con y sin TDAH no eran diferentes bajo medicación de aquellos, utilizando además menos los dedos para calcular, aumentando así el nivel de estrategia computacional.

Marshall y cols. (1999) investigaron si los déficits específicos académicos tuvieron que ver los diferentes subtipos de Trastorno de Déficit de Atención (TDA). Veinte estudiantes (de edades de entre 8-12 años) con Desorden de Déficit de Atención con Hiperactividad (ADD/H) fueron comparados a 20 estudiantes con el Déficit de Atención sin Hiperactividad (ADD/noH). Las variables dependientes para las diferencias dentro de grupo eran cuatro tanteos en la subprueba de la Woodcock-Johnson Psycho-Educational Battery - Revised: Identificación de Letra-Palabra, Comprensión de un pasaje (de un texto), Cálculo y Problemas Aplicados. Consecuente con la mayor parte de una investigación anterior, no se encontraron diferencias significativas intergrupales sobre las medidas de logro. Las diferencias significativas aparecieron realmente, sin embargo, en las seis comparaciones dentro de grupo, toda la implicación más abajo interpretación sobre la subprueba de Cálculos de Matemáticas. Para estudiantes con ADD/H, sólo una comparación (con Problemas Aplicados de Matemáticas) alcanzó una significación. Los estudiantes con ADD/noH, sin embargo, tenían tanteos considerablemente inferiores sobre la prueba de suscripción de Cálculo comparada a todos de las otras subpruebas. Estos resultados proporcionaron el apoyo adicional a la hipótesis que la falta de atención ejerce un efecto específico y deletéreo sobre la adquisición de habilidades de cálculo aritméticas. Estas conclusiones tienen implicaciones importantes para el diagnóstico y tratamiento de ADHD como conceptuado en la cuarta edición del Manual Diagnóstico y Estadístico de Trastornos Mentales (DSM IV de la Asociación Americana de Psiquiatría, 1994), porque ellos sugieren que los estudiantes con el Tipo ADHD - predominantemente Desatento puedan tener un riesgo considerable para déficits de cálculo aritméticos.

A continuación se presenta un cuadro sinóptico con las investigaciones en matemáticas con los alumnos con TDAH.

Año	Autores	Estudio
1994	Zentall y col.	Resolución de problemas en conceptos matemáticos específicos y realización de cálculo más lenta para los niños con ADHD.
1990	Barkley	Superposición entre TDAH y trastorno del cálculo es sustancial, con estimaciones que van del 10 al 60 %
1991	Frick y otros	
1992	Semrud-Clikerman y col.	
1991	Hynd y cols.	Relación estrecha entre el trastorno del cálculo con la desatención más que con la hiperactividad-impulsividad
1998	Faraone y cols.	
1997	Marshall y cols.	
1986	Ackerman y cols.	Recuperación de hechos matemáticos más lenta que los niños sin déficit.
1990	Zentall.	
1986	Ackerman y cols.	Utilización de métodos de contar inmaduros durante el sexto curso.
1999	Benedetto y Tannock	
	Ishak, Ickowicz y cols.	Algunos niños con TDAH también presentan déficit en el procedimiento, particularmente en las restas que implican reagrupar.
1999	Benedetto y Tannock	
	Hoosen-Shakeel	

1999	Benedetto y Tannock	los niños con TDAH terminan pocos problemas de cálculo y cometen más errores que sus compañeros de rendimiento normal, no siendo raro que sus puntuaciones de rendimiento académico sean un tercio más bajas que las de sus compañeros, incluso cuando no sufran un trastorno del cálculo o del lenguaje general comórbidos.
1993	Du Paul y Rapport	
1986	Ackerman y cols	Computación lenta e inexacta y la consiguiente alteración en la adquisición y uso de operaciones de cálculo más avanzadas
1993	Geary	
1993	Zentall & Ferkis	Los logros matemáticos de los jóvenes con pocas habilidades para el aprendizaje, déficit de atención y trastornos de hiperactividad por falta de atención es más bajo que el de sus compañeros sin déficit.
2002	David Johns	
1999	Marshall, R. i cols.	Investigación sobre si los déficits específicos académicos tienen que ver los diferentes subtipos de Trastorno de Déficit de Atención
1992	Zentall y cols.	Estudiaron a grupos desde 2º a 7º grado con el objeto de estudiar los déficits de problemas verbales mediante el ordenador, en grupos con TDAH y sin deficiencia
1987	Zentall y Meller	

5.9. Cuadro resumen sobre la revisión bibliográfica de los alumnos con TDA y matemáticas.

5.13. Resumen.

A lo largo del presente capítulo se ha expuesto el marco teórico de las investigaciones en el entorno de la resolución de los problemas aritmético-verbales en la etapa escolar obligatoria. Se ha analizado el enunciado y las fases de resolución de los problemas, las representaciones aritméticas internas al resolver un problema, los factores incidentes en la resolución de problemas, a la vez que se ha expuesto las estrategias de resolución de los mismos.

Además se ha presentado la *normativa* entorno a la resolución de problemas dentro del currículum escolar.

El capítulo acaba con la exposición de la búsqueda bibliográfica sobre los estudios de los alumnos con TDAH en el entorno de las matemáticas y de la resolución de problemas.