UNIVERSITAT DE BARCELONA

UNIVERSITAT DE BARCELONA

APRENDER A ENSEÑAR TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN PRIMARIA DESDE UNA PERSPECTIVA CULTURAL

-Tesis Doctoral-

Presentada por:

Xhevdet THAQI

Realizada bajo dirección de:

Nuria ROSICH y Joaquim GIMENEZ

Barcelona, Marzo de 2009

PARTE II

ESTUDIO EMPIRICO. DISEÑO Y RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

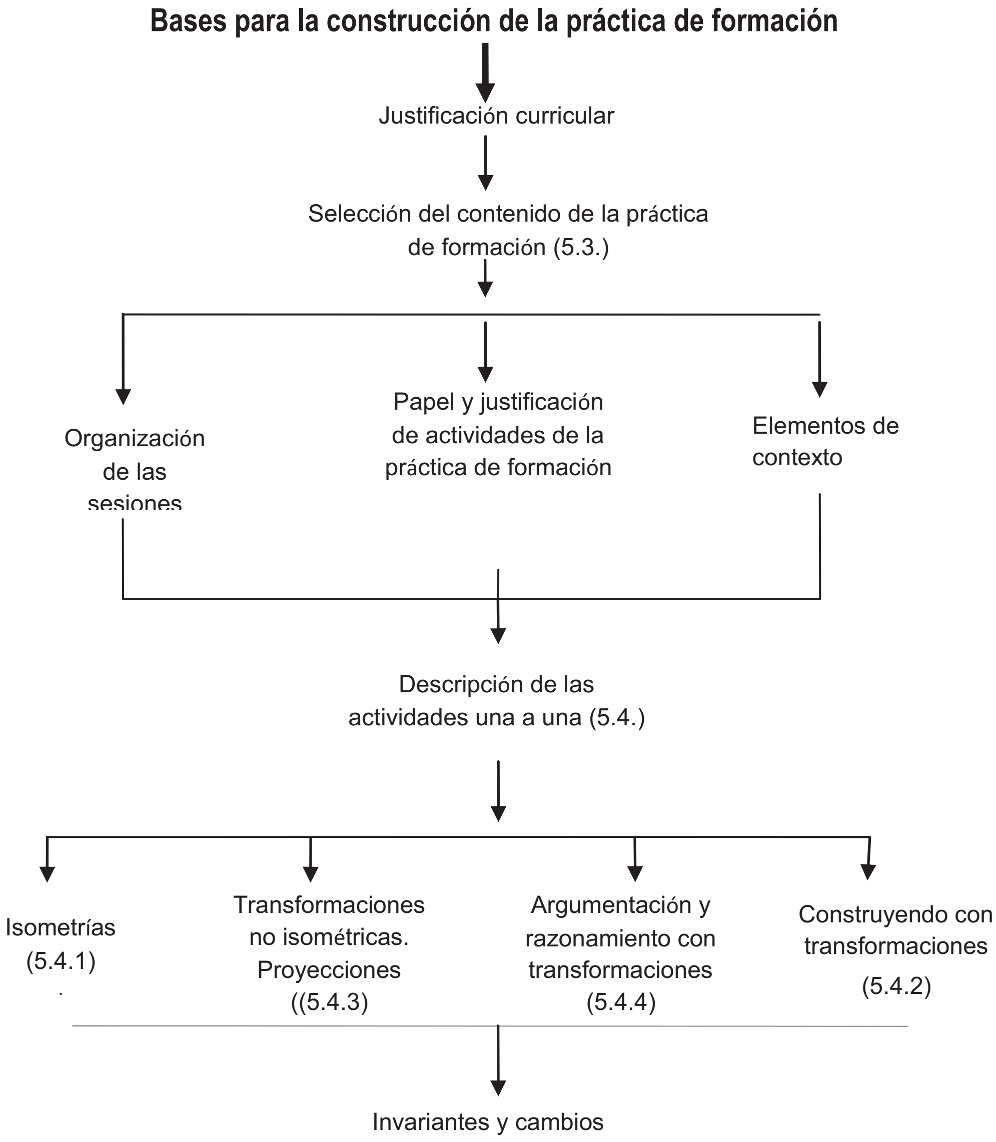
Capitulo 5.

Diseño de la práctica de formación docente

5.1. Introducción

En este capítulo vamos a explicar cuáles han sido las bases, para la estructuración de la práctica de formación que planteamos, aunque las mismas se han comentado en capítulo 4 de metodología. Hemos presentado las estructuras sobre las que se construye la práctica de formación, como son las de generar una metodología activa que asegure la participación del alumnado, así como la de realizar un aprendizaje significativo. En los apartados siguientes presentamos la justificación del diseño de la práctica de formación (5.2), los contenidos de la unidad como la participación y el lugar del desarrollo de la investigación (5.3). Al final presentamos la descripción de las actividades de la práctica de formación detalladamente (5.4).

Mediante el esquema 5.1., mostramos la estructura del diseño de la práctica de formación de profesores para aprender a enseñar las transformaciones geométricas en primaria.



Esquema 5.1. Estructura del diseño de la práctica

En este capítulo no se describe la prueba inicial, a la que se le reserva un capítulo completo (capítulo 6), pero, dicha prueba se considera como sesión inicial (S1 - PI). Por ello, se sigue la nomenclatura de las sesiones a partir de ésta como S2, S3, S4 y S5. Se deja la prueba final (S6-PF) para ser tratada en el capítulo 8.

5.2. Justificación curricular

En el Nuevo Currículo de Kosova (NCK, 2002, pp.61) propone que como primer objetivo de la enseñanza de las matemáticas en primaria es que los alumnos deben "*entender las relaciones entre el mundo en que viven y su expresión matemática*" y después el otro objetivo es "*identificar situaciones en la vida diaria por el uso de conocimientos y habilidades matemáticas*".

Por otro lado, en los libros de textos y en los programas de matemáticas de primaria se habla solo sobre las simetrías, desplazamientos y rotaciones – es decir sólo sobre las isometrías. Pensamos que las proyecciones y otras transformaciones (cambios) son una herramienta necesaria para realizar estos objetivos de la NCK. La base del diseño fue la unidad preparada para un curso anterior on line (Servat y otros 2001). Para conseguir nuestro propósito de realizar tareas profesionales que aseguren en poco tiempo una base de formación, decidimos generar 6 sesiones de trabajo (prueba inicial, 4 sesiones de prácticas y prueba final).

5.3. Selección y organización de las prácticas.

Uno de los objetivos de esta investigación fue preparar unas actividades en las que, los conocimientos básicos de transformaciones geométricas se basaran en la enseñanza intuitiva y experiencias de las transformaciones sobre la búsqueda, el descubrimiento y la comprensión por parte del futuro profesor de primaria. De esta manera, el futuro profesor aprenderá los conceptos y propiedades geométricas a partir de los aspectos del mundo cotidiano. A continuación se muestra esquemáticamente la base de organización de la secuencia de las prácticas. Ante todo, la realización de una prueba inicial que permite reconocer el nivel del alumnado y comparar las situaciones iníciales ante el contenido en ambos países. La organización y selección (Rico 2000) se hace en base a privilegiar el contenido didáctico, y desarrollar las tareas profesionales de forma dialógica, y se pretende tanto afianzar el contenido matemático como el didáctico. Lo cultural está presente en las tareas de forma unificada, procurando que se produzca un intercambio de escrituras culturales, dado que en los dos países se tratará la misma secuencia de actividades. Para ello, se proponen actividades en donde cada cultura aprenderá algo de la otra. Se resume las decisiones tomadas en el esquema de la figura 5.2.

Organizador de la secuencia propuesta

		Lo matemático	Lo didáctico-estratégico
Contextualización	Sesión 2	Reconocer y construir mosaicos	La escuela realiza trabajos con transformaciones
		De la simetría como propiedad a la idea de transformación SiA1,SiA2, SiA3	Los mosaicos y el arte. Trabajos en forma de proyectos
		Los bordados como modelo cultural de construcción de isometrías Si4	Las formas simétricas. Evocación de la simetría
Caracterización y tipología		Ampliación del conjunto de transformaciones isométricas/no	Los bordados
		Transformaciones en el aula	
	Sesión 3	Isometría en la historia Concepto. Propiedades. Clasificaciones. Ejemplos.	Reconocimiento de propuestas de trabajo sobre simetría. Identificación de características y usos diversos tipos de recursos Arte, materiales, artículos de formación
	Sesión 4	Transformación proyectiva como objeto y como proceso. Características.	Revivir situaciones de aula permite identificar problemáticas cognitivas
Consolidación	Sesión 5	Identificar procesos de razonamiento mediante problemas	Reconocer el poder de mediadores (recursos) diferentes para promover argumentaciones de diversos tipos
	Sesión 6	Profundizar mediante situaciones con sentido cualitativo	

Figura 5.2. Organización de la secuencia de la práctica propuesta

Es importante tener en cuenta que no es fácil en poco tiempo hacer un análisis de un proceso escolar, y menos aún que surja de una experiencia planeada, realizada y discutida. Por ello se recurre a la observación provocadora como elemento de reflexión. Muchos trabajos se realizan a partir de la observación de experiencias escolares diferentes que focalizan el contenido. Con ello, se pretende tener elementos para la observación del desarrollo de lo conceptual. A continuación, se destacan los contenidos asociados a las sesiones, explicando lo que se trata en cada una de las actividades, de forma pormenorizada.

Sesión 1 (PI): Prueba Inicial.

(ver capitulo 6 - apartado 6.2)

Sesión 2 (SI): Isometrías y la vida cotidiana.

En forma de tabla mostramos las tareas, contenido matemático y didáctico de la tarea planteada en la sesión, así como el tiempo de la realización de cada tarea en minutos (T).

Tareas	Contenido matemático	Contenido didáctico-profesional	T
2.1. Presentación: Una experiencia sobre	Introducción al concepto de isometría y sus significados. Introducción en el proceso de reconocer un patrón de repetición, e identificar un sistema de codificación para la misma	Asunción de posiciones juiciosas sobre la calidad de un trabajo escolar realizado. Práctica de comunicación docente en lengua extranjera. Reflexión sobre un trabajo didáctico realizado por otros a partir de un material dado sobre un proceso constructivo de enseñanza de las isometrías. Reconocimiento del trabajo de patrones de repetición con mosaicos. La simetría como fenómeno trabajado en la escuela.	30 min.
2.2. Las actividades sobre transformaciones isométricas	Introducción al concepto de isometría y sus propiedades Distinción entre transformación simétrica y propiedad simétrica de una figura. Saber desarrollar el aspecto conceptual de transformación isométrica, que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada, o como un proceso que consiste en una aplicación de un conjunto de puntos del plano/espacio en otro conjunto de puntos según una determinada regula (función). Identificar y reconocer los diferentes tipos de isometrías: simetrías, rotación, traslación, etc., reconociendo multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y identificar propiedades importantes Comprender y describir el proceso de transformación geométrica, Aprender a argumentar, justificar y razonar las transformaciones geométricas.	Identificar las situaciones donde el futuro profesor podrá reflexionar y profundizar, en diferentes perspectivas, sobre un proceso constructivo de aprendizaje de las isometrías. Interpretación y autovaloración del trabajo propio y juzgar el de otros en su grupo de trabajo. Construcción de ideas alternativas sobre las transformaciones isométricas en tareas diferentes. Reconocimiento de tareas matemáticas en países diferentes, y reflexión sobre influencias que pueden tener los contextos culturales diferentes.	40 min

2.3. Actividad didáctica: Presentación en video de una clase sobre simetría	Saber desarrollar el aspecto conceptual de transformación simétrica, que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada, o como un proceso que consiste en una aplicación de un conjunto de puntos del plano/espacio en otro conjunto de puntos según una determinada regula (función). Identificar los diferentes tipos de isometrías: simetrías, rotación, traslación.	Integración de experiencias realizadas por otros profesores. Reflexión sobre el significado de los procesos de enseñanza. Identificación de situaciones donde el futuro profesor podrá reflexionar y profundizar, en diferentes perspectivas, sobre un proceso constructivo de enseñanza de las isometrías Interpretar comportamientos profesionales sobre transformaciones; Interpretación y autovaloración el trabajo propio y juzgar el de otros. Reconocimiento de una propuesta actividad sobre la simetría en Primaria a lo largo de las diferentes clases. (actividad de ampliación)	20 min

Sesión 3 (SR): *Aprender el uso y valor de los recursos para aprender a enseñar las transformaciones geométricas*

Las tareas, su contenido matemático, contenido didáctico y el tiempo de realización de cada tarea presentamos en forma de tabla:

Tareas	Contenido matemático	Contenido didáctico-profesional	T
3.1. Presentación : Articulo como recurso de formación	- Desarrollo del concepto de isometría y sus propiedades - Desarrollo de la capacidad de reconocer la diferencia entre transformación simétrica y propiedad simétrica - Profundización del conocimiento sobre transformación isométrica, que produce una nueva figura de la primitivamente dada, en otro conjunto de puntos según una determinada regula (función). - Uso de multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y identificar propiedades importantes.	- Observación de producciones de futuros profesores como una experiencia de trabajo, asumiendo posiciones juiciosas sobre la calidad del trabajo realizado. - Articulación de reflexiones a partir de artículos. - Reflexión sobre el significativo de los procesos de enseñanza; - Implicación en procesos de comunicación pública de actividades profesionales docentes en matemática.	30
3.2. Las actividades especificas sobre recursos didácticos	- Descripción de las propiedades de las transformaciones a partir de los recursos didácticos. - Uso de los recursos didácticos en el proceso de reconocer un patrón de repetición, e identificar un sistema de codificación para la misma. - Reconocimiento de que los recursos didácticos potencian el uso de modelos y esquemas de representación conceptual. - Desarrollo de argumentaciones y justificaciones ante situaciones de diferentes tipos de transformaciones cuando usamos medios o materiales diferentes.	- Construcción situaciones de aula a partir de los contenidos mediante los recursos didácticos. - Reconocimiento el papel de recurso didáctico (papel blanco, cuadriculado, espejo,…) en comprensión de la transformación como proceso matemático (tanto estático, como en movimiento) incluyendo propiedades de dicho proceso. - Construcción de ideas diferentes sobre las transformaciones isométricas en tareas diferentes.	60

En estas dos sesiones, se realiza el tratamiento de las isometrías. Y, a continuación, se desarrollan actividades para aprender a enseñar las transformaciones no isométricas (homotecias, y deformaciones diferentes). Como se explicó en el capítulo teórico, se centra el desarrollo de las proyecciones, sin poder hacer un tratamiento detallado histórico, como hubiéramos querido, por falta de tiempo suficiente. En todas las actividades, se identifican elementos de lo didáctico como prioritario, y en este caso, se analiza un video de una clase realizada en primaria con las sombras.

Sesión 4 (**SP**): *Proyecciones y sombras.*

En la tabla a continuación presentamos las tareas de la sesión 4 (SP), los contenidos matemático y didáctico de cada tarea, así como el tiempo de realización de las tareas.

Tareas	Contenido matemático	Contenido didáctico-profesional	T
4.1. Reconocimiento del trabajo con sombras en Primaria	- Que los estudiantes aprendan a reflexionar sobre el concepto de transformación proyectiva a partir de las experiencias mostradas en el video. - Que los estudiantes reconocen el proceso de transformación proyectiva. - Que reconocen las diferencias entre proyección y isometría.	- Reflexión sobre el significado de los procesos de enseñanza sobre proyecciones. - Propuesta y comentario de experimentaciones breves en Primaria. - Articulación de reflexiones sobre aprendizaje escolar de clase. - Reconocer producciones verbales de los niños/as como elemento de discusión y contraste dialógico - Relación e interpretación de diferentes representaciones sobre situaciones de proyección (referentes culturales en la pintura). - Integración de experiencias realizadas por otros profesores. - Interpretación y autovaloración del trabajo propio y juzgar el de otros.	30

4.2. Propiedades de proyecciones a través de sombras	- Introducción del concepto de transformación proyectiva como operación geométrica que permite deducir una nueva figura de la primitivamente dada, - Introducción del concepto de proyección como un proceso que consiste en una aplicación de un conjunto de puntos del plano/espacio en otro conjunto de puntos, según una determinada función. - Identificar y describir las propiedades de transformación proyectiva. - Desarrollar la capacidad de interpretar imágenes planas que representan situaciones espaciales, habilidades para establecer uniones operativas entre las imágenes y la realidad representada. - Desarrollar las argumentaciones y justificaciones a partir de situaciones de transformación geométrica, mirando diferentes tipos de transformaciones. - Profundizar el análisis sobre la transformación geométrica que mantiene la forma y cambia el tamaño.	- Observación de producciones de futuros profesores como una experiencia de trabajo, asumiendo posiciones juiciosas sobre el trabajo realizado. - Articulación de reflexiones a partir de las experiencias realizadas en las actividades. - Construcción de situaciones de aula a partir de los contenidos. - Reconocimiento de cómo se construyen significados (ideas) diferentes sobre las proyecciones en tareas diferentes. - Identificación de situaciones donde el futuro profesor podrá reflexionar y profundizar, en diferentes perspectivas, sobre un proceso constructivo de aprendizaje de las proyecciones. - Interpretación y autovaloración del trabajo propio y juzgar el de otros en su grupo de trabajo. - Construcción de ideas alternativas en países diferentes, y qué influencias pueden tener los contextos culturales diferentes.	60

Sesión 5 (SA): *Razonar, argumentar y justificar transformaciones geométricas*

Las tareas de la sesión, los contenidos matemáticos y didácticos de las tareas y su tiempo de realización se muestran en la tabla a continuación:

Tareas	Contenido matemático	Contenido didáctico-profesional	T
5.1. Presentación del tema	- Desarrollo del concepto de transformación como un proceso que consiste en una aplicación de un conjunto de puntos del plano/espacio en otro conjunto de puntos, según una determinada función.	- Reflexión predictiva a partir del valor que tiene en la enseñanza la argumentación y el razonamiento. - Discusión a los alumnos mediante presentación visual de las actividades.	10m

5.2. Actividades sobre razonar, argumentar y justificar las transformaciones geométricas	- Reconocimiento de la esquematización a partir de situaciones de expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades. - Desarrollo del razonamiento visual hacia un razonamiento con una simbolización adecuada, y el razonamiento científico. - Desarrollo de la capacidad de argumentaciones, justificaciones y razonamiento ante situaciones de transformación geométrica, mirando diferentes tipos de transformaciones. - Reconocimiento del valor de que los estudiantes encuentren analogías, ejemplos, etc. que les son suficientes para estar seguros de la validez de un enunciado - Generar mosaicos mediante transformaciones	- Saber trabajar con representaciones gráficas de diversos tipos. - Identificación del papel clave de la argumentación en el aula de Primaria - Análisis de cómo se construyen ideas diferentes sobre las transformaciones isométricas en tareas diferentes? - Identificación de influencias que pueden tener los contextos culturales diferentes. - Favorecer la construcción de significados a partir de lo personal y del colectivo, atento a la diversidad cultural, que favorezca la investigación y el descubrimiento. - Desarrollo de habilidades complejas de razonamiento profesional, con vistas a un aprendizaje constructivo y significativo en los diferentes niveles de la enseñanza. - Desarrollo de la capacidad de argumentaciones, justificaciones y razonamiento ante situaciones de transformación geométrica, cuando usamos medios o materiales diferentes.	50

Sesión 6 (PF). *Prueba Final*

Como ya se ha indicado, la sesión última (S6-PF) se dedica a una prueba final que se presenta en el capítulo 8. La principal variable distintiva en el diseño de la experiencia en ambos países, es el hecho de que en la UP se realizará después de un curso de matemática, en el que los estudiantes han trabajado la geometría. En dicho programa aparece el contenido de las transformaciones geométricas. En UB, no es así, y los estudiantes reciben sólo la formación de estas sesiones descritas.

5.4. Tareas profesionales. Descripción.

Se trabaja con presentaciones PowerPoint, uso de ordenador y software dinámico. Además, también se ha dispuesto de los materiales complementarios que se necesitan para todas las sesiones. Durante el desarrollo de las sesiones de la práctica de formación se han preparado para cada estudiante, fichas de trabajo, para poder tener sus producciones y luego analizarlas. La cantidad de sesiones de la práctica de formación y su duración es la que presentamos en la tabla siguiente:

Sesiones de la práctica de formación docente (PFD)		Lugar	t
1. La prueba inicial (PI)		FEUP-Gjilan	60 m
		FFPUB-Barcelona	60 m
2. Isometrías y la vida cotidiana (SI)	5.1. Presentación: “Una experiencia sobre isometrías” - (SIP)	FEUP-Gjilan	30 m
		FFPUB-Barcelona	30 m
	5.2. Las actividades sobre transformaciones isométricas (SIA)	FEUP-Gjilan	40 m
		FFPUB-Barcelona	50 m
	5.3. Actividad didáctica: Presentación en video de una clase de primaria (de Kosova) sobre simetría. (SID)	FEUP-Gjilan	20 m
		FFPUB-Barcelona	10 m
3. Aprender el uso y valor de los recursos para aprender a enseñar las transformaciones (SR)	3.1.Presentación: *Articulo científico como recurso de formación* (SRP)	FEUP-Gjilan	30 m
		FFPUB-Barcelona	20 m
	3.2. Las actividades especificas sobre recursos didácticos y transformaciones geométricas (SRA)	FEUP-Gjilan	60 m
		FFPUB-Barcelona	60m
4. Proyecciones y sombras (SP)	4.1.Reconocimiento del trabajo con sombras en Primaria (SPP)	FEUP-Gjilan	30 m
		FFPUB-Barcelona	10 m
	4.2. Propiedades de las sombras (SPA)	FEUP-Gjilan	60 m
		FFPUB-Barcelona	50 m
5. Razonar , argumentar y justificar transformaciones geométricas (SA)	5.1. Presentación del tema (SAP)	FEUP-Gjilan	10 m
		FFPUB-Barcelona	10 m
	5.2. Actividades sobre razonar, argumentar y justificar las transformaciones geométricas (SAA)	FEUP-Gjilan	50 m
		FFPUB-Barcelona	50 m
La prueba final (PF)		FEUP-Gjilan	60 m
		FFPUB-Barcelona	60 m

Figura 5.3. Las sesiones de la práctica de formación docente

A continuación, describimos el proceso de gestión de las actividades de las sesiones de la práctica de formación.

5.4.1. Isometría y la vida cotidiana.

Como ya hemos explicado, esta sesión se compone de tres partes: 1. ***SIP*** *- Una experiencia sobre isometrías,* 2. ***SIA*** - *Las actividades sobre isometrías*; y 3. ***SID*** - Actividad didáctica. *Videograbación de una clase de primaria (Kosova) sobre transformaciones isométricas*.

La escritura cultural de esta sesión se centra en el uso de la fotografía, y los elementos usuales de la vida: labios, manos, etc. Se usan los bordados, que forman parte de la cultura española y kosovar. Se eligen los de Kosova, porque sigue siendo un elemento artesanal muy vivo en la actualidad.

1. SIP: "*Una experiencia sobre isometrías".*

Se pidió a los estudiantes si había algún voluntario para hacer un resumen sobre un capítulo del libro que hablaba sobre un proyecto de una experiencia de la enseñanza de isometrías en Primaria, para hacer un resumen y explicarlo a los demás compañeros. La finalidad de haber escogido esta experiencia era porque en este libro se presenta un trabajo sobre las isometrías para una clase de Primaria a nivel europeo (Matem**art**ica, 2002). Para que el estudiante realice el resumen y presentación, se le dieron pautas claras de cómo ha de realizarlo, usar y describir la referencia y citar el libro. Este tipo de trabajo se inserta en la voluntad de que los estudiantes articulen sus reflexiones a partir de artículos y otras experiencias, donde se muestran distintas formas de enfocar el tema de la enseñanza de las transformaciones geométricas.

Un estudiante ha preparado su presentación en *power point* (ppt). Hace una descripción de la experiencia de una escuela de primaria sobre mosaicos, sin entrar en detalles. Explica cómo son las etapas del trabajo en la clase. Luego explica por qué es importante "perder" tiempo haciendo estas actividades.

Después de la presentación, hemos preparado para la discusión y reflexión las siguientes cuestiones que se analizan según las categorías descritas en el capítulo de metodología.

Cuestiones	Elementos considerados
Explicar: ¿Cómo son etapas del trabajo en la clase? ¿Cómo fue el trabajo? ¿Cómo fue el aprendizaje matemático en estas tareas? ¿Por qué la profesora ha elegido estos mosaicos de cultura islámica? ¿Qué característica hay en todos los dibujos? ¿Qué pensáis que está explicando de matemáticas la profesora sobre lo que han hecho?	CMt2 CMt3 CMj2 CPr3 CC2 CEa1 CAr1

En la discusión se pretende enfocar la idea de la existencia de un modulo de repetición sobre el que se hacen las transformaciones.

2. **SIA** - *Las actividades sobre transformaciones isométricas*

En este apartado de la sesion planteamos 6 actividades (SIA1, SIA2, SIA3, SIA4, SIA5 y SIA6) que a continuacion describimos en detalle.

Actividad	**Elementos considerados**
SIA1. Comparamos dos fenómenos conocidos y analizamos: ***a)*** *Viendo simetría en un lago y tomando la foto* ***b)*** *hacer el simétrico con un espejo en una mesa y tomando la foto ¿La diferencia existe? Explica que diferencias ves entre uno y otro.*  *a)*  *b)* *¿Donde está el valor didáctico de la tarea, cuando se realiza con alumnado de 5º grado de Primaria?*	CPc3 CPr3 CC2 CC3 CAr1

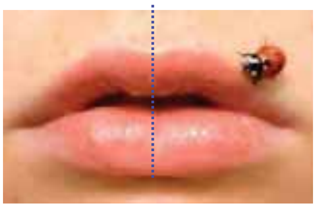
El docente presenta el problema en forma de ppt en la pizarra y pide que los estudiantes respondan a las preguntas. La actividad intenta introducir y profundizar el concepto de simetría como transformación isométrica, y también se distingue simetría como propiedad y/o como transformación. No se trata pues de una actividad con contenido didáctico centrada sobre el estudiante aunque se pretende ya desde el inicio que se vea un trabajo escolar.

Actividad	Elementos considerados
SIA2. Las manos  *a)*  *b)* *1) Indica cinco diferencias que hay entre las manos de la izquierda y de la derecha del dibujo* *2) En el dibujo (b) tienes la mano izquierda vista en el espejo. En el dibujo (a) se trata de las dos manos reales. Explica por qué esta actividad es interesante realizarla en la escuela!*	CMj1 CMj2 CEi2 CA

La actividad SIA2 tiene el mismo objetivo que la actividad anterior pero en este caso hemos elegido otro fenómeno con el fin de:

- evaluar el nivel de conocimientos conseguidos en la actividad anterior y así profundizar más sobre la distinción entre propiedad simétrica y transformación simétrica.
- los estudiantes que no han podido comprender bien el concepto de simetría como transformación y/o propiedad en la actividad anterior, esta actividad les puede ayudar a conseguir dicha comprensión.

A continuación, la actividad SIA3 se presenta con el fin de analizar diferentes experiencias reales vividas aplicando conocimientos sobre simetría.

Actividad	**Elementos a analizar**
SIA3. La repetición se encuentra en la naturaleza  ***a)*** *¿Donde está la repetición?* ***b)*** *Explica por qué este trabajo con esta imagen es un buen ejemplo para discutir sobre las simetrías con alumnado de Primaria.*	CMt1 CPr1 CPr3 CC2 Cea3 CEi1 CAr2

Los estudiantes tienen que diferenciar situación simétrica y asimétrica. Indirectamente esta actividad contribuye a la creatividad de los futuros profesores con el desarrollo de actividades de enseñanza/aprendizaje de simetrías en el futuro poniendo ejemplos falseadores y ejemplos de contraste. De esta manera el futuro profesor tiene que reflexionar sobre el significado de la transformación y ser capaz de promover la aplicación de las matemáticas a situaciones reales.

Para contextualizar transformaciones geométricas en un entorno cultural hemos puesto ejemplos de bordados kosovares, en los que se pretende reconocer el proceso de generación de una transformación a partir de un módulo. Identificando en cada una de ellos el concepto de transformación como cambio y las propiedades de las transformaciones.

En el primer bordado las flores parecen iguales de forma y se diferencian en la posición que tienen en el bordado. Queremos que los estudiantes identifiquen la transformación de una flor a otra, que en este caso es la rotación.

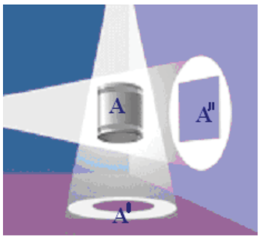
En un segundo bordado, se proponía identificar la composición de una flor compuesta por cuatro partes idénticas colocadas en la posición opuesta respecto a la parte adjunta.

Desde un punto de vista experto, existen tres posibilidades de explicar el proceso de obtener el bordado: doblando cualquiera de la mitad del bordado según dos ejes (perpendiculares entre sí) que pasan por vértices del cuadrado en el centro (dos veces); doblando la cuarta parte del bordado (4 veces), y rotando cualquiera mitad del bordado por un ángulo de 180º alrededor del centro de rotación (centro del cuadrado). Esto significa que el bordado tiene dos ejes de simetría, y un centro de rotación. En el tercer bordado se trata de la repetición de una parte que conserva el tamaño y la forma. Intentamos destacar la idea de desplazamiento que va a ayudar a los estudiantes a determinar elementos de traslación, como son el vector de traslación y el sentido de traslación.

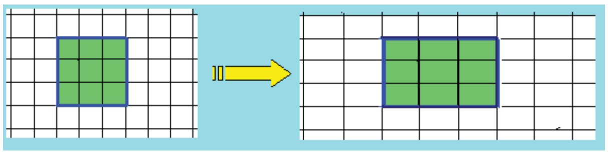
Actividad	Elementos considerados
SIA4. Bordados kosovares *Tenemos tres tipos de bordados kosovares.*    *a) ¿Cuales son las características que se observa en cada una de estos bordados?* *b) ¿Que distingue uno de otra? (Tiene simetrías o no, traslación, etc.)*	CMt 1,2,3 CMt4 CMt5 CMj1, 2 CPc2 CPr2 CC1 CC2 CC3 CEa1 CAr

Pensamos que la interrelación entre el espacio físico y el matemático no se corta en un punto determinado de desarrollo humano. El pensamiento geométrico, aunque es más abstracto, debe buscar y crear modelos físicos o gráficos para ser explicado a través de modelos geométricos. Hemos querido saber cómo provocan a los futuros profesores una acción reflexiva sobre las prácticas geométricas implícitas en los procesos de producción de los bordados.

Después de los problemas anteriores originales sobre las isometrías hemos puesto la actividad (SIA5) en forma del problema para que los estudiantes vean otro tipo de transformaciones con el objetivo de contrastar la propiedad isométrica de la simetría y conocer otro tipo de transformaciones - proyecciones que explícitamente tienen otras propiedades. Con él se quiere reconocer la visualización gráfica sobre el dibujo que aparece en algunos textos escolares.

Actividad	**Elementos considerados**
SIA5. No hay solo isometrías. *El cuerpo A es un cilindro. Proyecciones del cuerpo A son figuras A' y A''.*  *a) ¿qué tipo de figura puede ser A'?* *b) ¿qué tipo de figura puede ser A''?* *c) En que niveles educativos es apropiado este tipo de actividades manipulativamente*	CMt7 CMj7 CPc7 CPr7 CC7 CEi2 CAr1

A continuación, con el problema (SIA6) queremos saber si los estudiantes son capaces de responder correctamente a este problema, que es: *el de interpretar la transformación del cuadrado en un rectángulo explicando analíticamente - identificar los ejes de coordenadas Ox y Oy, que x'=2x quiere decir que el lado horizontal del cuadrado o el eje de coordenada x se duplica mientras que el eje de abscisa y=y' significa que el lado vertical del cuadrado se conserva - tiene la misma longitud,* etc.

Actividad	
SIA6. A menudo se usa el papel cuadriculado para reconocer transformaciones. Nos permite ver, por ejemplo como un Cuadrado se transforma en Rectángulo.  *a) Explica porque esta transformación se escribe con las ecuaciones:* *x'=2x* *y'=x* *b) ¿Qué ha cambiado y que no?* *c) Que definiciones existen entre la transformación representada y la que se obtiene por deformación con un material flexible como tela de caucho, globo, o faja médica.*	CMt6 CMj6 CPc6 CPr6 CC6 CEi2 CAr1

Este ejemplo nos da posibilidad de ver otro tipo de invariantes de las transformaciones: mientras la invariante de transformaciones isométricas es la longitud, en este tipo de transformaciones, el invariante es el ángulo.

SID: *Actividad didáctica. Presentación en video de una clase de primaria (Kosova) sobre simetría.*

En esta parte de la sesión y después del desarrollo de las actividades, se plantea presentar una videograbación de una clase de primaria de Kosova, en la que trataban el tema de transformaciones geométricas. En esta videograbación el maestro introduce el concepto de transformación de simetría axial. Nuestro objetivo es destacar la atención de la definición que el maestro de en su clase en forma: "*una figura es simétrica si se puede partir por una recta en dos partes iguales de forma y tamaño*". Efectuamos preguntas como las siguientes.

cuestiones	Elementos considerados
- *Hagen un comentario sobre la definición de simetría que pone el profesor de primaria.* - *Dibuja una figura que se puede dividir en dos partes iguales, de la misma forma pero que no sea simétrica.*	CMt2,3,5 CPc2, 3 CPr2 CC1 CAR1,3

Con esta videograbación intentamos saber si los futuros profesores son capaces de reflexionar sobre el concepto de simetría y su definición, poniendo contraejemplos que cumplen la definición dicha por el maestro pero no son simétricas, confirmando así la capacidad de comprender la diferencia entre simetría y otras transformaciones isométricas. Pensamos que esta actividad contribuye a que el futuro profesor de primaria tome conciencia de la *génesis del conocimiento de transformación geométrica*, reconociendo el papel de la conceptualización.

Esta actividad puede ayudar al estudiante que integre las experiencias de otros profesores, que reflexione sobre el proceso de enseñanza, aprenda a evaluar el trabajo de enseñar las transformaciones, además de interpretar y juzgar el trabajo propio y de otros.

5.4.2. Aprender el uso y valor de los recursos para aprender a enseñar las transformaciones

Esta sesión se compone de dos partes: 1. ***SRP*** *- Presentación: Articulo científico como recurso de formación*, y la segunda parte 2. ***SRA*** - *Las actividades especificas sobre recursos didácticos y transformaciones geométricas*.

1. **SRP**. *Presentación: Artículo científico como recurso de formación*.

Se pidió a los estudiantes un voluntario para hacer un resumen sobre un artículo científico ("*Del mito de Narciso a las transformaciones dalinianas en la escuela"* de Giménez y Trujillo 2006), que hablaba sobre los resultados conseguidos a partir de las experiencias en una escuela de primaria sobre las transformaciones geométricas, y explicarlo a los demás estudiantes. Para que el estudiante realice el resumen y presentación, se le da el artículo y pautas claras de cómo ha de realizarlo. Este tipo de trabajo se inserta en la voluntad de que los estudiantes articulen sus reflexiones a partir de artículos y otras experiencias, donde se muestran distintas formas de enfocar el tema de utilizar los recursos en la enseñanza de las transformaciones geométricas.

Se inicia la sesión con la presentación del trabajo del estudiante. El estudiante presentará su resumen en power point (ppt). Presentando el trabajo públicamente, él aprende a articular sus reflexiones a partir de un artículo, reflexione sobre el significado de los procesos de enseñanza, desarrolle la capacidad de reconocer transformaciones, comprender la multitud de ejemplos de transformaciones y de identificar propiedades.

Después de la presentación, hemos preparado para la discusión y reflexión las siguientes cuestiones:

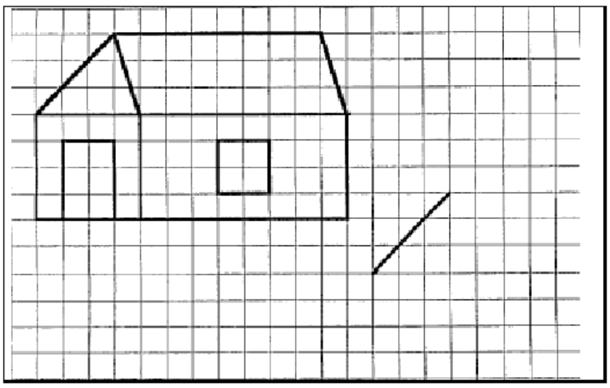
actividad	Elementos considerados
- Explicar las experiencias de la experimentación que evoque el articulo;	CMt3,6
- Hablar del mito de Narcis y la posibilidad de comparación con el mito de Kosova	CC3,6
- ¿Cómo se utilizan los distintos recursos? (Arte, Salvador Dali, espejo, tangram, `papel...)	CAr1, 2
- Si el profesor no había utilizado los recursos, la construcción del conocimiento sobre transformaciones ¿pensáis que sería diferente o igual?	CAa3 CEi1,4
- Como futuros profesores, ¿qué pensáis que es importante?	CEa2

Mediante la discusión de la presentación, los demás estudiantes desarrollan la capacidad de valorar el trabajo de otros.

2. SRA – *Las actividades especificas sobre recursos didacticos y transformaciones geometricas.*

En este parte de la sesion planteamos 12 actividades que describiremos a continuación.

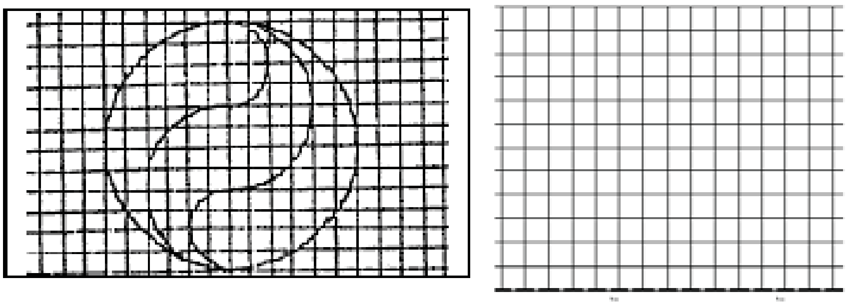
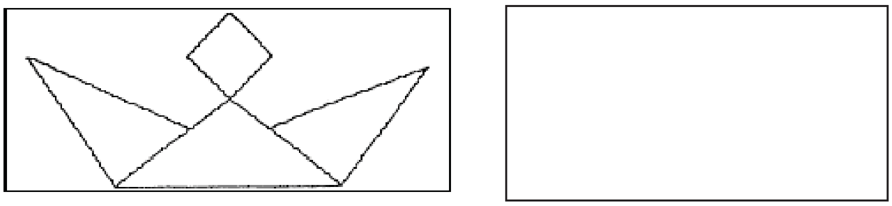
En la actividad SRA1, se adapta una tarea del Proyecto EDUMAT (Godino y Ruiz, 2000). Los estudiantes tienen que dibujar (reproducir) la imagen de la casa sobre papel blanco (no cuadriculada) con la ayuda de un compás, una regla no graduada y una escuadra.

<table>
<tr><th>actividad</th><th>Elementos</th></tr>
<tr><td>SRA1. Reproducir la casa con la ayuda de un compás, una regla no graduada y una escuadra

Realiza el ejercicio. Indicar las principales etapas de su construcción.
a) ¿Qué conocimientos y destrezas son necesarios para poder realizar este ejercicio?
b) ¿Qué conocimiento previo requiere esta construcción?
c) ¿En qué ciclo de la escuela situarías este ejercicio? Justifica la respuesta.</td><td>CMt1
CMj4
CPc4
CPr1
CC4
CEa1
CAa3</td></tr>
</table>

En esta actividad los futuros profesores, primero tienen que analizar el problema, identificando cuantos ángulos tiene, qué relación hay entre ellos, etc. Luego necesitan saber cómo utilizar los instrumentos de dibujo en las construcciones de figuras en general y de la imagen de la casa en particular.

Se pide entonces hacer una reflexión basada en preguntas como las siguientes: ¿Qué propiedades importantes juegan durante el desarrollo de la actividad, por ejemplo el paralelismo, la perpendicularidad, etc., y razonar y argumentar por qué esta actividad es interesante realizar en los grados de educación primaria? ¿Qué diferencia hay entre reflejar una casa, centrándola en una posición determinada con hacer la casa transformada de la casa A en una posición A' ¿Cuál es el significado de la transformación en cada caso?

A continuación presentamos la actividad SRA2.

actividad	**Elementos considerados**
SRA2. Papel blanco o papel cuadriculado.  a) Observa esta figura y reprodúcela sobre papel cuadriculada  b) Observa esta figura y reprodúcela sobre papel blanco. c) ¿Por qué decimos que el papel cuadriculado ayuda a la construcción de la idea de traslación mejor que el papel blanco?	CMt2 CMt4 CMj4 CPc4 CPr1 CC4 CEa1 CAa3

Con esta actividad queremos destacar la relación entre materiales didácticos usados y las propiedades de transformaciones geométricas.

En el primer ejemplo, para reproducir la imagen hace falta sólo "contar" los cuadritos y realizar la reproducción mediante las reglas de la transformación que llamamos traslación. En este caso lo importante es la equivalencia de cuadrados entre figura inicial y la figura final. Con esto se consigue profundizar el concepto de "igual de distancia" que es invariante en las isometrías.

En la segunda actividad, los estudiantes tienen que reproducir la figura en el papel blanco. Para hacerla ellos tienen que usar otros recursos (compás, regla,…), pero tienen que saber las técnicas de construcción como es trazar la recta paralela, la recta perpendicular, etc. Estas técnicas de construcción se basan en las propiedades de isometrías.

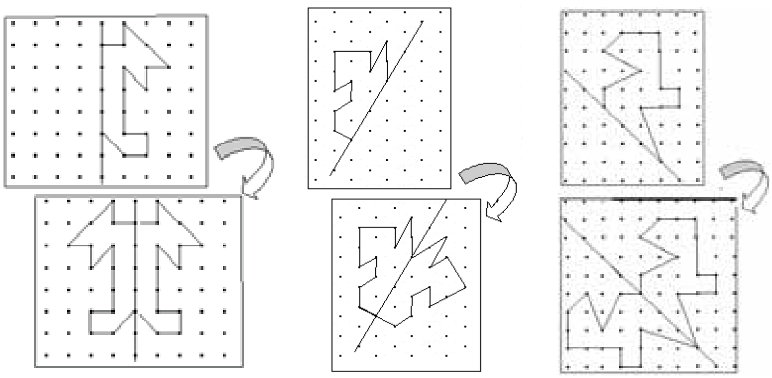
Desarrollando esta actividad los estudiantes reconocen la diferencia del uso de papel blanco y papel cuadriculado, que les ayuda tomar decisiones sobre cuando es mejor utilizar uno y otro en las clases de primaria. Un aspecto importante es mirar como el futuro profesor valora el grado de dificultad de la actividad y en el aprendizaje de la traslación y adecúa el contenido según grados de dificultades.

La actividad siguiente es del proyecto EDUMAT (Godino y Ruiz, 2000)

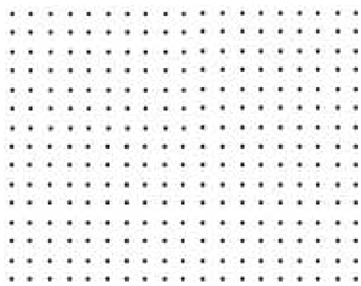
<table>
<tr><th>actividad</th><th>Elementos considerados</th></tr>
<tr><td>

SRA3. **La imagen simètrica de la figura en el papel con trama de puntos**.

Observa estas tres figuras.



- Trazar una recta en la trama de puntos.
- Trazar figura a uno de los lados de dicha recta y que alguno de sus lados toque a la recta.
- Dibujar la imagen simétrica de la figura tomando como eje de simetría la recta trazada.



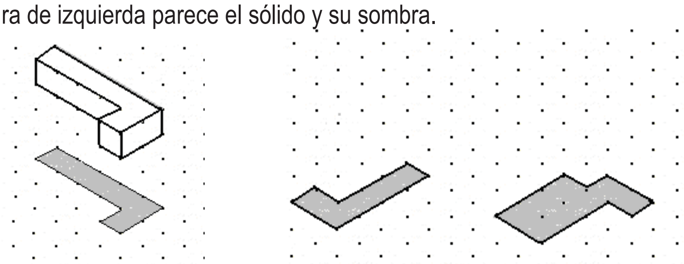
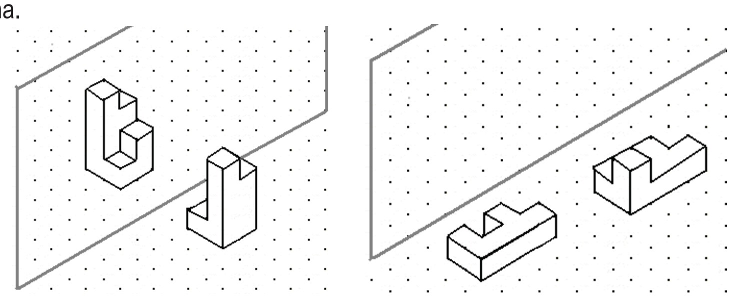
- Comprobar el resultado con un espejo situado sobre el eje.
- Comprobar el resultado doblando el papel por el eje de simetría.
- Explica la diferencia entre un papel, doblado, espejo o trama de puntos que trabajas la simetría en Primaria

</td><td>CMJ3
CPc3
CPr3
CC3
CEa3
CEi2
CAr3</td></tr>
</table>

En las primeras tres figuras (SRA3) se dan ejemplos de cómo tienen que dibujar la figura simétrica a partir de la figura dada.

Los estudiantes han de trazar una recta en cualquier posición en la trama de puntos de su ficha de trabajo. También ellos eligen una figura y han de dibujar la figura simétrica. Para obtener la figura simétrica, tienen que aplicar los conocimientos sobre la simetría y sus propiedades: el eje de simetría, puntos correspondientes a igual de distancia respecto al eje, puntos correspondientes que han de coincidir con una recta perpendicular al eje, los rectas paralelas se transforman en las rectas paralelas, rectas perpendiculares en las rectas perpendiculares etc. Para realizar la actividad en la trama de puntos, ellos identifican las ventajas del uso de la trama de puntos. Por esto se pide que identifiquen las diferencias importantes de la actividad con trama de puntos y con papel cuadriculado o con papel blanco.

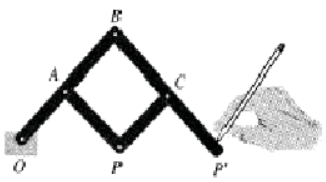
La trama de puntos (SRA4), como recurso didáctico es muy útil también para trabajar otras transformaciones, (Gaulin, 1986).

actividad	**Elementos considerados**
SRA4. Los sólidos, sus sombras y sus imágenes simétricos en la trama de puntos. - En la figura de izquierda parece el sólido y su sombra.  - En la misma manera dibuja los sólidos cuyos sus sombras parezcan como en la figura de derecha.  - En la figura de izquierda está presentado un sólido y su reflexión en el espejo. - En la figura de derecha dibujan las figuras simétricas respecto el espejo - Explica las ventajas del papel isométrico - Que inconvenientes tiene el papel isométrico	CMt3 CMt7 CMj3 CMj7 CPr3 CPr7 CC3 CC7 Cea3 CEi2 CAr3

En este caso, en la primera parte de la actividad hemos elegido el problema de reconstruir la representación de un sólido a partir de la representación de su sombra en el plano de la base, y en la segunda, construir la imagen simétrica (simetría plana – en el espacio) de un sólido.

En el primer problema los estudiantes deben utilizar la propiedad de proyección paralela construyendo los rayos paralelos desde los vértices de la sombra. Para esto, aprovechan la trama de puntos. Luego deben reconocer como construir los lados paralelos del sólido, y deben conocer el hecho de que la proyección no es aplicación biunívoca entre un conjunto de puntos del sólido y su sombra. La dificultad consiste en la visualización de la configuración de objetos no tan simples en el espacio representados en el plano.

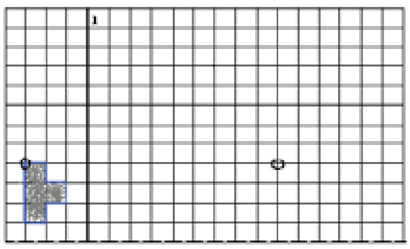
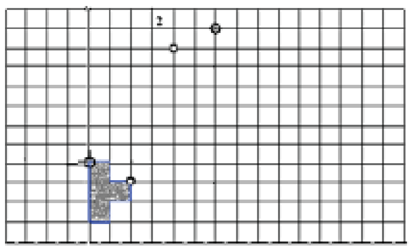
En el segundo problema los estudiantes deben construir la imagen simétrica de un sólido dado en forma de letra F, utilizando las propiedades de transformación simétrica. Las dificultades para resolver el problema son múltiples: la dificultad de visualizar los objetos por ser representados, la dificultad de imaginar la parte posterior del objeto reflejado, la dificultad de definir los criterios de representación respecto a las caras situadas en planos paralelos, la dificultad de localización de la imagen correspondiente, etc. En el desarrollo de la construcción los estudiantes deben utilizar la capacidad de visualización e imaginación.

actividad	**Elementos considerados**
SRA5. Pantógrafo de Scheiner (homotecia) Observa la actividad  - Indicar las propiedades matemáticas que se manejan al usarla. - Controle que los puntos O, P, P' están siempre alineados. - Qué significado tiene usarla en las clases de Primaria	CMt6 CMj1 CMj6 CPc6 CPr6 CC6 CEi3 CAa3

La actividad SRA5 se presenta en la forma dinámica, con el fin de presentar el pantógrafo como recurso histórico para transformación de homotecia. Además la presentación dinámica en la pantalla ante todos los estudiantes, mostramos la aplicación concreta de la construcción del triangulo (u otra figura) homotética (T') con el triangulo dado (T). Esto quiere decir que la figura que traza el lápiz P' cuando P resigue una figura dada es homotética de la figura fijada y la razón de homotecia o proporcionalidad es OP:OP'=OA:OB. Deseamos que los estudiantes destacen que mientras las isometrías pueden "verse" moviendo normalmente objetos, la visualización de las homotecias (semejanzas) o se resuelve por proyecciones adecuadas (la figura imagen es virtual) o se usa un pantógrafo.

Pedimos que los estudiantes expliquen por qué el pantógrafo posibilita la realización de la homotecia en la manera mecánica, y si es bueno o no utilizar el pantógrafo en las clases de primaria.

Para la identificación del producto de simetrías con papel cuadriculado, hemos elegido la actividad SRA6 adaptando del programa EDUMAT (Godino y Ruiz, 2002).

actividad	**Elementos considerados**
SRA6. Dibujo de la figura idéntica a la inicial en posición determinado  a)  b) - En cada una de las dos figuras siguientes dibuja una forma idéntica a la inicial pero en la posición marcada por los circulitos. - Dibuja también las imágenes de la figura inicial en los espejos 1 y 2.	CMt2 CMj2 CMj4 CMj3 CPc4 CPr4 CC4 CEa3 CEi2 CAr3

En esta actividad (SRA6) se pide hacer la repetición de la figura dada en una posición determinada. Los estudiantes han de identificar la repetición como una característica de isometrías en las actividades anteriores (SI), y por esto, queremos que con esta actividad comprendan la definición de isometría con la aplicación de la propiedad de repetición.

En el primer problema, los estudiantes han de comprender que la composición de dos simetrías cuyos ejes son paralelos es una traslación.

En el segundo ejemplo, intentamos convencer a los estudiantes de que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan (son perpendiculares) es un giro.

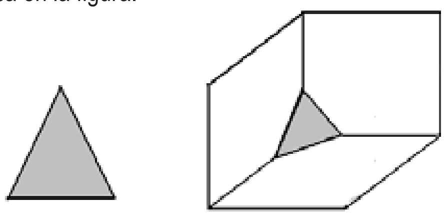
Una vez han dibujado las figuras deseadas, con el fin de demostrar que la composición de dos simetrías cuyos ejes son paralelas es un traslación, y la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro, re utilizan los espejos, se plantea la pregunta: ¿Donde debería, en cada caso, situarse un segundo espejo para que los dibujos hechos fueran una imagen del otro?

Sobre el producto de simetrías en el espacio, hemos propuesto la actividad SRA7 adaptado del libro “Construir la geometría” (Alsina, y otros, 1990).

<table>
<tr><th>actividad</th><th>Elementos de analisis</th></tr>
<tr><td>

SRA7. El rincón de espejos

- Recorta en cartulina un triangulo como esta plantilla. Sitúalo en el rincón de espejos en la posición que se indica en la figura.



- ¿Cuántas veces se repetirá? ¿Qué figura se ve? -¿Cómo la describirías la figura parecida en los espejos?
- Recorta el dibujo del desarrollo y construye la figura.
- Completa la siguiente tabla para la figura aparecida en los espejos.

<table>
<tr><td>Número de aristas</td><td></td></tr>
<tr><td>Numero de caras en un vértice</td><td></td></tr>
<tr><td>Numero de vértices</td><td></td></tr>
<tr><td>Numero de caras</td><td></td></tr>
<tr><td>Nombre de figura</td><td></td></tr>
</table>

</td><td>CMt2
CMt3
CMj3
CPc3
CC3
CEi3
CAa3</td></tr>
</table>

Con esta actividad (SRA7) deseamos estudiar las figuras geométricas, además de estudiar la estructura de transformaciones isométricas usando espejos. Queremos destacar el poder de los espejos como recurso importante en el proceso de comprender y visualizar las características de figuras espaciales y mostrar la estructura de isometrías. El uso de espejos se muestra como la actividad creativa, si los estudiantes sean capaces de tomar otros ejemplos semejantes.

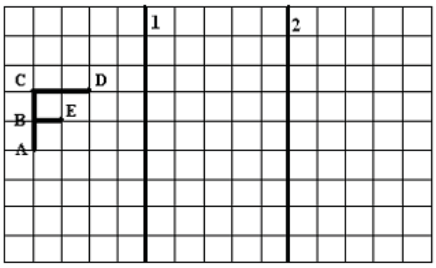
Para analizar las producciones de los participantes de la investigación sobre su reflexión sobre la acción y el proceso de transformación isométrica como producto de simetrías, proponemos la actividad que hemos elegido y adaptado de Jaime (1996).

<table>
<tr><th>actividad</th><th>Elementos de analisis</th></tr>
<tr><td>

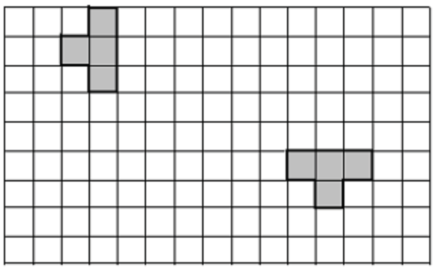
SRA8. Relación entre simetría y isometrías

Problema1.-Observa la letra F en la figura.

- Dibuja su imagen respecto al espejo 1. Marca las imágenes de A, B, C, D, E como A`, B', C', D', E'.
  - Dibuja a continuación la imagen de la F que acabas de hacer respecto al espejo 2.
  - Anota los puntos correspondientes con A'', B'', C'', D'', E''.



Problema 1


problema 2

Problema 2. En la segunda figura,

- ¿donde deberíamos situar dos espejos para pasar de la figura I a la figura II de forma similar a como se ha hecho en el problema 1?

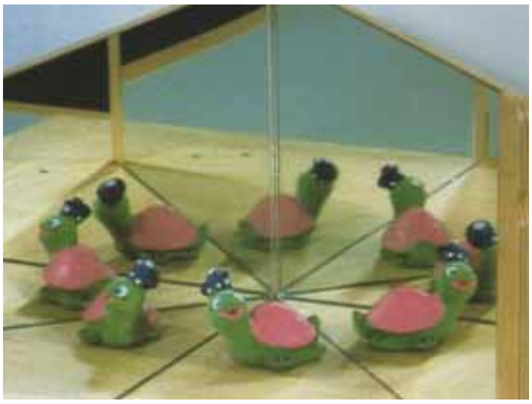
</td><td>CMt2
CMj2
CMj4
CMj3
CPc4
CPr4
CC4
CEa3
CEi2
CAr3</td></tr>
</table>

Esta actividad (SRA8) es parecida al SRA6 y se trata de dibujar la repetición de la figura de la letra F, según un procedimiento determinado que es diferente del SRA6 donde se pide dibujar en una posición determinada. Los estudiantes han de utilizar los espejos y escribir analíticamente imágenes de los puntos. Ellos han de entender que la imagen de una figura se obtiene a partir de las imágenes de los puntos. Por otra parte el primer problema, los estudiantes han de profundizar en el conocimiento de que la composición de dos simetrías cuyos ejes son paralelos es una traslación. Mientras que en el segundo problema, mediante el uso de espejos intentamos demostrar el hecho ya conocido que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro.

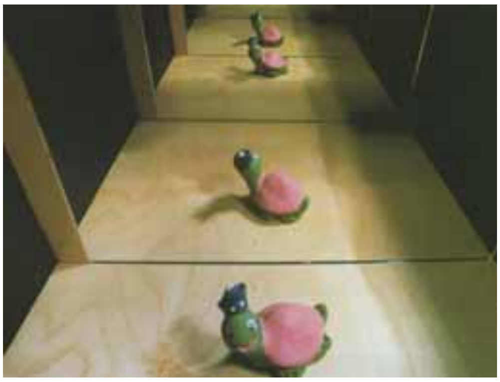
Una vez dibujados las figuras deseadas, con el fin de demostrar que la composición de dos simetrías cuyos ejes son paralelos es una traslación y la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro, se plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo son, entre ellos, los segmentos AA'', BB'', CC'', y EE''?
b) ¿Cuánto miden estos segmentos?
c) ¿Qué relación existe entre estas medidas y la distancia entre los dos espejos?

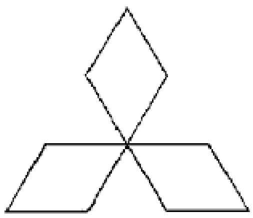
Continuamos con la presentación de las actividades SRA9 y SRA10 que hemos formulado tomando las imágenes del libro "O *ritmos dos formas*" de Bellingeri y otros (2001).

actividad	Elementos considerados
SRA9. Haciendo simetrico generamos giros  ¿Por qué decimos que usando dos espejos, no solo hacemos simétricos sino que generamos figuras giradas?	CMt2 CMt5 CMj5 CPc5 CPr5 CC5 CEa3 CEi3 Cea2 CAr1

La actividad (SRA9) que de forma directa y creativa muestra la relación entre simetría y rotación. Se trata de obtener la imagen compuesta por 8 muñecas a partir de una. Esto es porque tenemos dos espejos colocadas en la posición que forma un ángulo de 45º. Los estudiantes tienen que comprender que el producto de dos simetrías cuyos ejes forman un ángulo de 45º, produce una rotación con el centro de intersección de los espejos y con ángulo rotación de 90º. También, ellos poden descubrir la relación entre las rotaciones y las circunferencias, que si un objeto (punto) se aplica por rotación describe un arco de circunferencia.

actividad	Elementos cosniderados
SRA10. Haciendo simétrico generamos traslación  ¿Has visto el fenómeno que se observa en este foto¿ ¿Qué te permite observar que el hacer dos simetrías consecutivas obtenemos una traslación? Cuales aspectos deben ser consideradas en una reflexión profesional?	CMt4 CMj4 CPc4 CPr4 CC4 CEa3 CEi3 Cea2 CAr1

Analógicamente como en la actividad SRA9, aquí (SRA10) en la manera directa y creativa muestra la relación entre simetría y traslación. Se trata de obtener la imagen compuesta por un número infinito de muñecas a partir de una. Esto es porque tenemos dos espejos colocados en la posición de paralelos. Los estudiantes tienen que comprender que el producto de dos simetrías cuyos ejes son paralelos produce una traslación. También, ellos poden descubrir que el vector de traslación es igual al doble de distancia entre el objeto y el espejo, que quiere decir que un objeto (punto) se aplica por traslación describe una recta perpendicular al espejo.

actividad	Elementos considerados
SRA11. Encontrar el modulo que se repite. - Usa los espejos para ver donde los pones para ver si se repite el modulo y explique como se repite, cuantos veces, etc. 	CMt5 CMj5 CPc5 CPr5 CC5 CEa3 CEi3 Cea2 CAr1

Hemos planteado esta actividad (SRA11) con el fin de valorar qué piensan los estudiantes sobre la implicación de las figuras diferentes (el signo de

Mitsubishi) como realidad de una cultura global en las tareas para las transformaciones, conocer la relación entre proceso de hacer la figura y transformaciones geométricas, conocer la capacidad de identificar el modulo que se repite y de cómo se repite.

Aunque la simetría se considera preferiblemente como un elemento generador de las isometrías, el hecho de que ciertas transformaciones pueden realizarse sobre algunas figuras sin cambiarlas, es una propiedad de esas figuras. Estas propiedades, es decir, la existencia de ejes de simetría, pueden descubrirse mediante una inspección de las figuras. En este problema, los futuros profesores tienen la oportunidad de practicar en un ejemplo concreto de descubrir simetrías, como generadores de un grupo, aunque no reconocen seguramente las características del dicho grupo de transformaciones.

5.4.3. Proyecciones y sombras

La sesión *Proyecciones y sombras* (SP) se compone de dos tareas profesionales: 1. ***SPP*** *– Reconocimiento del trabajo con sombras en Primaria*., y 2. ***SPA*** *– Propiedades de las proyecciones*. Las actividades sobre las sombras y proyecciones.

A continuación presentamos la descripción de las actividades de esta sesión.

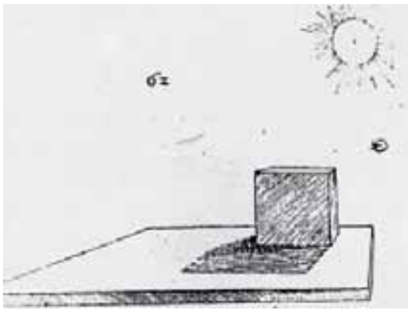
1. SPP - *Reconocimiento del trabajo con sombras en Primaria*

Primero se presenta en video una clase de primaria realizada en una escuela en Mataró (Catalunya). En la primera parte de video de la clase, se presentan las respuestas de los alumnos del tercer grado de primaria sobre la pregunta "¿Qué es una sombra?". Nos interesa poner alguna imagen representativa a base de las respuestas de los futuros profesores sobre la misma pregunta, y por este razón, antes de presentar el video de la clase, planteamos la pregunta *"¿Qué es una sombra?*" y pedimos que cada uno de los estudiantes expresan sus opiniones. Cuando los estudiantes expresan sus opiniones sobre la sombra, presentamos la parte de video de la clase de primaria, escuchando las respuestas de los niños de primaria.

Después se hace una discusión sobre el significado de la sombra con el fin de obtener la definición más adecuada sobre el fenómeno de la sombra, así como ver cómo la interpretan los alumnos. Una vez hemos acabado con la definición de la sombra, presentamos la segunda parte del video de la clase donde se desarrollan las actividades sobre la sombra producida por la luz del sol, por parte de los niños fuera de la clase. El video nos ayuda a comprender las características y propiedades de la transformación proyectiva mediante la discusión que se produce sobre presentación de la clase de primaria, y el mismo tiempo la discusión sobre el proceso de enseñanza de proyecciones en primaria.

2. SPA – *Propiedades de las sombras*. A continuacion de la sesion sobre proyecciones y sombras planteamos 12 actividades: SPA1, SPA2, SPA3, SPA4, SPA5, SPA6, SPA7, SPA8 y SPA9. Presentamos en detalle cada una de estas actividdes.

Empezamos con la actividad SPA1.

Actividad	Elementos considerados
SPA1. La imagen de Dürer del año 1525  *¿Que ha querido explicar Durer con esta imagen del año 1525?*	CMt7 CMj7 CPc7 CC7 CEa1 CEa3 CAr1

En el ppt, se presenta la imagen de Dürer del año 1525 y planteamos la pregunta: "*Razonen ¿qué ha querido explicar Dürer con esta imagen del año 1525*?" Sabemos que las proyecciones como transformaciones en geometría se establecen después del siglo XVII, que es después del que Durer ha producido esta imagen. Con esto esperamos que los estudiantes se cuestionen sobre las propiedades de la proyección (en este caso la sombra como producto de la proyección) De esta forma que tengan una sensibilidad ante el fenómeno de la sombra. Con un tiempo mejor, habíamos realizado una sesión sobre las transformaciones en el arte. Como Dürer es un artista esperamos que los estudiantes reconozcan la importancia de las transformaciones en el arte.

También, si los estudiantes analizan la imagen, pueden descubrir las elementos (foco, posición, cambio,…), unas propiedades de la sombra, y que es producto de la transformación proyectiva.

La actividad SPA2 está adaptada a partir de una foto de la sombra de la persona.

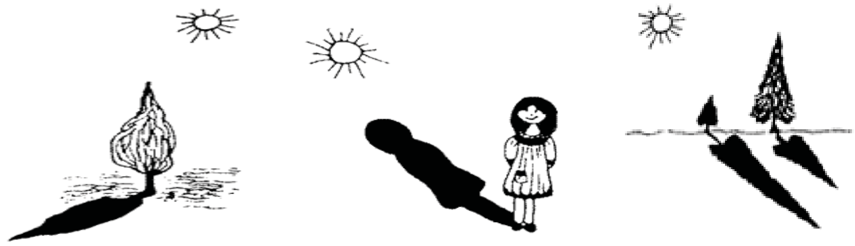
Actividad	Elementos a analisar
SPA2. La sombra larga.  *¿Cómo es posible tener una sombra tan larga*?	CMt7 CMj7 CPc7 CC7 CEa1 CEa3 CAa1 CAr1

Se presenta la sombra real de persona. La imagen es conocida para los estudiantes, pero a nosotros nos interesan sus comentarios sobre la pregunta: "*¿Cómo es posible tener una sombra tan larga*?"

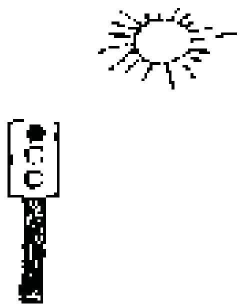
Esperamos que los estudiantes reconozcan la sombra como un producto de la proyección que es una función entre el objeto, el plano donde se proyecta el objeto y la fuente de la luz. También los estudiantes han de describir cuando es posible obtener la sombra más larga y más corta dependiendo de las posiciones de los tres componentes de la proyección.

Las actividades a continuación hemos tomado de Boero (1999). En estas imágenes tratamos llevar las actividades de los alumnos de primaria antes de futuros profesores para que por un lado identifiquen los elementos, dependencia y propiedades de la transformación proyectiva, y por otro que ellos analizen el proceso de aprendizaje de proyecciones por parte de los alumnos de primaria.

Actividad	analisis
SPA3. Presentaciones de sombras correctas y no correctas Observar la secuencia de actividades sobre sombras.	CMt7 CMj7 CC7 Cea1

 *Explica lo que no está bien, y ¿por qué?*	CEi1 CAa2 CAa3

Mientras que en la actividad anterior hemos dado importancia a la identificación de los componentes y sus relaciones de la proyección, en esta actividad (SPA3) queremos acentuar la discusión sobre las posiciones entre el objeto, su sombra y la fuente de la proyección (la luz). Para lograr estos conocimientos, planteamos la pregunta: "*Explica qué no está bien, y por qué".* Los estudiantes tienen que explicar para cada una de las situaciones si la sombra del árbol, la chica y la de los dos árboles respecto a la luz del sol está presentada correctamente. En ambos casos es importante que ellos justifiquen su respuesta. Una vez justificada la respuesta ellos aprenden a explicar geométricamente el fenómeno de la sombra, y esto va a servir en el futuro para identificar las respuestas correctas y no correctas sobre el fenómeno de la sombra.

Actividad	analisis
SPA4. Dibujar la sombra 	CMt7 CMj7 CC7 CEa1 CEi1 CAa2 CAa3

Actividad	analisis
SPA5. Dibujar el sol 	CMt7 CMj7 CC7 CEa1 CEi1 CAa2 CAa3

Presentamos la imagen donde se aparecen el sol y la columna del semáforo (SPA4). Los estudiantes tienen que dibujar la sombra del semáforo de acuerdo con la posición del sol y del semáforo.

Se presenta la imagen del objeto (niño) y su sombra - SPA5. Los estudiantes han de comentar y dibujar la posición del sol para que se produzca la sombra presentada.

Como en las actividades anteriores, se presenta la imagen (SPA6) y se pide que los estudiantes dibujen el objeto (en este caso el árbol) cuando sabemos la posición del sol y su sombra.

Con estas tres actividades intentamos profundizar el hecho que las tres componentes del fenómeno de la sombra son dependientes uno de otras dos.

Esto quiere decir que cuando sabemos dos elementos de proyección, podemos encontrar el tercero.

En la actividad SPA7 presentamos tres dibujos hechos por los alumnos de primaria sobre las sombras.

Actividad	analisis
SPA6. Dibujar el árbol 	CMt7 CMj7 CC7 CEa1 CEi1 CAa2 CAa3

Consideramos importante que evalúen los comentarios de los niños dados bajo cada dibujo.

Actividad	Elementos para analisis
SPA7. Comentaremos las opiniones de los alumnos:  - Pere: "*Aquest dibuix està equivocat perquè el peu dret està aixecat, però l'ombra no ho ensenya perquè no està enganxada al peu*" - Marta: "*Aquest dibuix està equivocat perquè l'ombra s'ha posat del dret a la mateixa part del sol*" - Albert: "*Aquest dibuix està molt equivocat perquè no ha posat el sol i perquè no hi ha l'ombra de la pilota*"	CMt7 CMj7 CC7 CEa1 CEi1 CAa2 CAa3 CAr1

De esta manera nos interesa saber si el fenómeno de la sombra es conocido por los estudiantes – lo cual nos dice que ellos ya conocen la relación entre el objeto, su sombra y la luz. Nos interesa si alguien es capaz de identificar el cuarto elemento – que es el lugar donde se parece la sombra. El tercer dibujo, puede ser comentado como dibujo correcto si hipotéticamente se considera que el chico no está con los pies a la tierra, sino que está "un poco" más alto. También nos interesa cómo los estudiantes interpretan los conocimientos sobre las proyecciones a partir de sus comentarios de contraste dialógico como modelo de enseñanza basada en la construcción cultural.

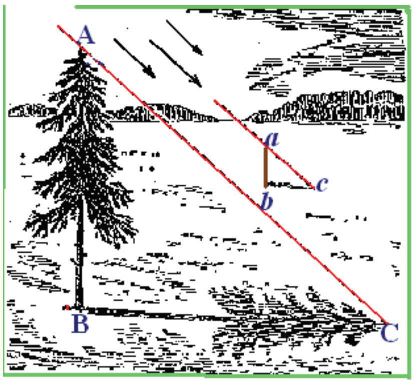
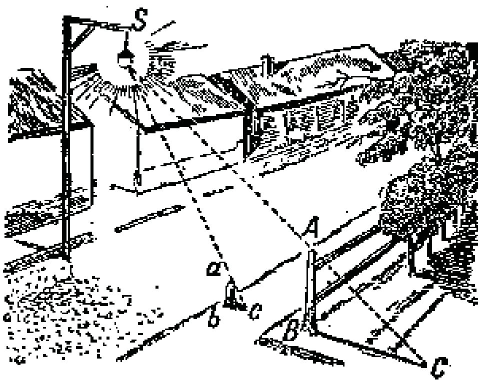
La actividad SPA8 se presenta con la imagen en ppt. Se plantea el problema de "*encontrar 14 errores que existen en la imagen y apuntar con los números cada una, explicando por qué se cuenta como error*".

Este problema nos sirve como resumen de los conocimientos sobre el fenómeno de la sombra o como una medida de saber hasta qué punto los estudiantes son capaces de identificar los errores del dibujo respecto los elementos de proyección del objeto en diferentes lugares – en la imagen, el lugar donde se aparece la sombra es el plano "horizontal", el plano vertical (el muro) o combinación de los dos.

Actividad	analisis
SPA8. Encontrar los errores 	CMt7 CMj7 CPc7 CPr7 CC7 CEa1 CEi1 CAa2 CAa3 CAr3

Con el fin de reconocer la aplicación de transformación proyectiva en la vida cotidiana, y para reconocer la diferencia entre proyección afín y la proyección central se plantea la actividad SPA9.

En la primera imagen presentamos un árbol con su sombra junto con una pértiga y su sombra. Planteamos pregunta “¿La altura del árbol, cuantas veces es mayor que la altura de la pértiga, y cuantos tantas veces la sombra del árbol es más larga que la sombra de la pértiga?” Nuestra intención es que los estudiantes utilicen la proporción en resolver el problema.

Actividad	analisis
SPA9. Medir la altura de un árbol alto. 	CMt6 CMj6 CPr6 CC6 CEi1 CEa1 CAr1 CAa4

En la segunda imagen presentamos dos objetos (una pértiga grande y otra pequeña) y sus sombras. La diferencia respecto a la primera imagen es que en este caso la fuente de la luz es la lámpara (S). Nuestro objetivo es que los estudiantes reconozcan la diferencia entre la proyección paralela y proyección central.

A partir de estas observaciones se pretende que los futuros profesores:

a) reconocen la idea intuitiva de la proyección paralela a partir de la sombra, como función que en un foco (sol) frente a un objeto se produce un imagen.

b) Identificación del hecho que el trabajo con sombras es bueno y tiene un raíz cultural en nuestra entorno

c) Identificación del valor del contenido considerando como forma de construcción de las ideas matemáticas

d) La proyección es un tipo de transformaciones geométricas, diferente a las isometrías.

5.4.4. Razonar, justificar y argumentar mediante transformaciones

La última sesión de la práctica de formación contiene dos partes: 1. *SAP* – Presentación de la sesión, y 2. *SAA* - Las actividades sobre razonar, argumentar y justificar las transformaciones geométricas.

1. SAP – *Presentación del tema.*

El docente/investigador presentará un breve discurso sobre el poder histórico del razonamiento geométrico, tratando de explicar que por razonamiento se entiende la habilidad de desarrollar un argumento lógico, acciones y efectos de discurrir para ordenar las ideas en la mente con el fin de llegar a una conclusión. Luego presentará diferentes definiciones sobre razonamiento como el de Godino y Recio (1998) basado en la idea de Balacheff que explica el significado de razonamiento como l*a actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos. Al mismo tiempo el razonamiento se desarrolla por medio de dichas prácticas, de modo que el estudio del razonamiento está constitutivamente ligado al estudio de la argumentación*.

En una tarea de razonamiento informal, la conclusión a la que llega un mismo sujeto enfrentado a un mismo problema puede ser diferente dependiendo del contexto situacional en el que se encuentre, de sus estados de ánimo o de su base de conocimientos sobre el contenido del problema. Según Polya, las bases del razonamiento plausible (informal) son *la inducción*, *la generalización*, *la especialización* y *la analogía*.

El proceso de argumentación que desarrollan los matemáticos para justificar la verdad de las proposiciones matemáticas recibe el nombre de "demostración matemática". El modelo prototípico de demostración matemática es la *demostración deductiva*. Los argumentos deductivos "puros" tienen lugar en el seno de un sistema axiomático, formal. Cada paso de la demostración es una proposición verdadera. La última es la tesis o conclusión del teorema.

A continuación se presentan las actividades con el fin de analizar las formas de operar con ejemplos genéricos, ejemplos aislados, analogías, simbolización y argumentaciones. Por esto, nos interesa conocer *¿cómo son las* *argumentaciones del futuro profesor cuando se propone situaciones de transformación geométrica, mirando diferentes tipos de transformaciones?*

Para poder responder a estas cuestiones tenemos que saber cómo razonan los futuros profesores ante una situación problemática, como justifican sus proposiciones y cuál es su capacidad de argumentación.

Con todo ello se pretende llegar a la idea que en una transformación hay elementos que permanecen y otros que cambian

2. SAA – *Actividades sobre razonar mediante transformaciones. Invariantes y cambios.*

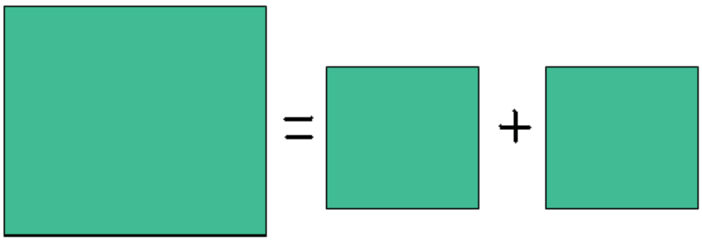
Esta parte de la sesión contiene 10 actividades: SAA1, SAA2, SAA3, SAA4, SAA5, SAA6, SAA7, SAA8, SAA9 y SAA10 . Presentamos en detalle cada una de estas actividdes y los elementos según que hacemos el analisis de la actividad.

Actividad	elementos
SAA1: **Escribir la reciproca de las siguientes propiedades y analizar su verdad o falsedad!** *Si un polígono es regular, entonces,…* • *Todos los paralelogramos tienen ejes de simetría. (Ilustrar con ejemplos)* • *El número de ejes para un polígono puede ser mayor que el número de los lados. (Ilustra con ejemplo o contraejemplo)* • *Si un polígono tiene centro de simetría, el centro se determina por intersección de dos ejes de simetría del polígono.*	CMt3 CMj3 CPr2 CPr3

La actividad (SAA1) se plantea en forma de preguntas para todos los participantes. Se trata de la aplicación de transformaciones en el estudio de los polígonos regulares e irregulares, estableciendo la equivalencia entre la condición de ser polígono regular con la condición de tener un número determinado de ejes de simetría. Esta equivalencia se hace formulando el enunciado recíproco de lo dado.

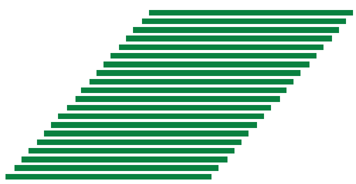
Actividad	analisis
SAA2: Kubos SOMA • *Haz la figura, la cara frontal de cual es como en la cartela dada!* • *Haz la figura y después encontré la cartela correspondiente con las caras de la figura hecha!*	CMj2 CPR2 CEi2

La actividad SAA2 se hace utilizando los cubos SOMA. Se trata de un conjunto de tarjetas con las figuras formadas de las caras del cubo Soma. En primer lugar se requiere formar la figura en el cubo según la figura que se aparece en la tarjeta dada. En segundo lugar se trata de "encontrar" la figura que le corresponde a la figura en la cara del cubo. En ambos casos los estudiantes tienen que "hacer" transformaciones girando o trasladando las partes para que se logre la figura buscada.

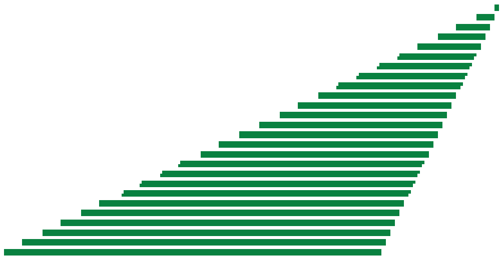
Actividad	analisis
SAA3: Un cuadrado dado (c^2) divide en dos otros cuadrados iguales (a^2), así que: $2a^2=c^2$  Describe el proceso: razona para demostrar la propiedad	CMj2 CMj3,4,5 CPc2 CPr2 CPr3,4,5 CC2 Cea2

En la actividad SAA3, se pide que un cuadrado dado con el lado c, se divide en dos cuadrados iguales con el lado a, quiere decir que $c^2=2a^2$.

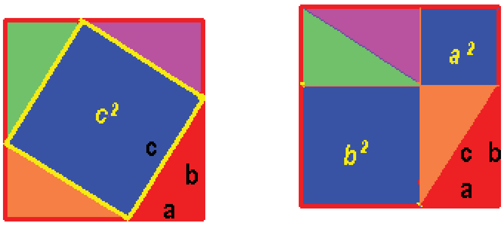
Los estudiantes pueden resolver el problema utilizando cortes del papel. La solución consiste en cortar el cuadrado grande según diagonales en cuatro partes iguales, y luego adjuntar dos a dos para obtener dos cuadrados más pequeños pero iguales. Otra manera de resolver el problema es la dirección inversa: partir de dos cuadrados pequeños cortando por los diagonales y colocar en la posición adecuada para obtener un cuadrado.

Actividad	analisis
SAA4: Observa i explica la transformació *(que se muestra en applet)*  Explica la propietat que veus que s'observa en aquesta transformació!. Per que diu que se trata de conservació de àrea?	CMj6 CPc6 CPr6 CC6 CEa2 CAa4

Con la actividad SAA4 se muestra la transformación dinámica de un paralelogramo ante todos los participantes, donde dos vértices del paralelogramo quedan estables y otros dos se desplazan horizontalmente dentro de un segmento determinado. Los estudiantes tienen que explicar *la propiedad que se observa en esta transformación.* La propiedad que se observa es la conservación del área del paralelogramo. Para justificar esta propiedad, los estudiantes tienen que utilizar la forma analítica de área del paralelogramo y así argumentar como función de dos parámetros: la de base que es fijo o de altura que es constante en todo el proceso.

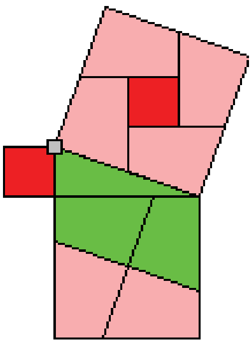
Actividad	analisis
SAA5: Observa esta otra transformación. (Se reconocen triángulos con la misma base y la misma altura?)  Explica la propiedad que veas que se observa en esta transformación.	CMj6 CPc6 CPr6 CC6 CEa2 CAa4

Igual como en la actividad anterior y en esta actividad SAA5 se muestra la transformación dinámica de un triángulo - dos vértices estables y uno desplaza horizontalmente dentro de un segmento determinado. Se trata de justificar la función de área del triángulo que es una función de dos parámetros y que se conserva el área durante el proceso de transformación presentada. En este caso, como en el anterior la conservación sugiere el principio de Kavalieri.

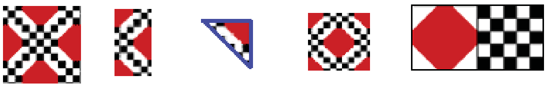
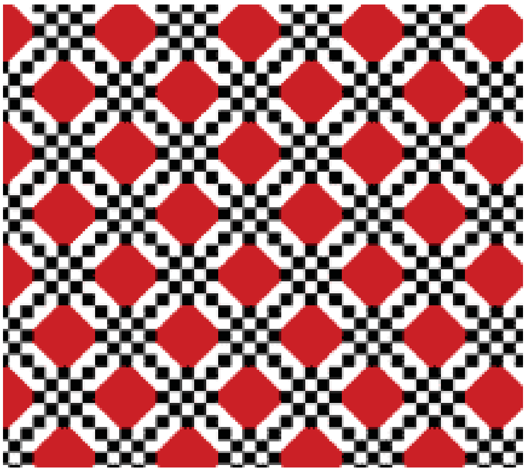
Actividad	analisis
SAA6: Ahora observa esta transformación  Explica la propiedad que se observa en esta transformación. ¿Que se conserva que se cambia?	CMj2 CMj3,4,5 CPc2 CPr2 CPr3,4,5 CC2 CEa2 Cea3

La actividad SA6 se trata de las demostraciones del teorema de Pitágoras. Esta actividad nos va a permitir adentrarnos en las características de los conocimientos científicos, más concretamente matemáticos, que implican una manera de razonar, argumentar y demostrar muy específica y determinada, muy peculiar, la que se recoge de manera implícita con el nombre de "teorema". Además es una demostración fácilmente realizable recortando y colocando las figuras de los dos cuadrados adecuadamente, y así hacer que los alumnos observen la veracidad de esta propiedad.

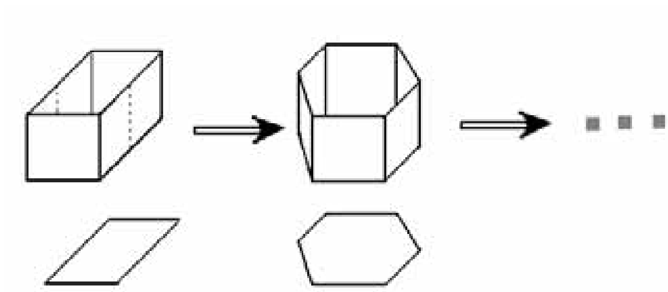
Como podemos observar los dos cuadrados expuestos en la figura tienen las mismas dimensiones $(a+b)\times(a+b)$ así que también tienen la misma área $(a+b)^2$. La solución consiste en la aplicación de la equivalencia de áreas. Así, en el primer cuadrado las partes que le vamos a desplazar, son cuatro triángulos iguales, y se ve claramente que el área resultante es c^2, ya que la figura que nos queda es un cuadrado de lado c. Para el segundo cuadrado también debemos desplazar los cuatro triángulos iguales, pero ahora los debemos desplazar en una distribución distinta, y obtenemos dos cuadrados uno de lado *a* y otro de lado *b*, así que el área de la figura resultante es a^2+b^2. Ahora haciendo uso de la segunda propiedad de las áreas, tenemos que $h^2=a^2+b^2$. Este proceso de desplazamiento de las partes se muestra como transformación dinámica y los estudiantes tienen la posibilidad de justificar el teorema de Pitágoras usando las transformaciones como conservación de áreas equivalentes.

Actividad	analisis
SAA7: Ara observa aquesta altra: La base del triangle no es mou, i pugem el vertex C  Explica la propietat que veus que s'observa en aquesta transformació.	CMj2 CMj3,4,5 CPc2 CPr2 CPr3,4,5 CC2 CEa2 Cea3

La actividad SAA7 muestra la dependencia funcional entre los lados del triángulo rectángulo moviendo un vértice del triángulo. En la concreto, si *a, b* y *c,* son los lados del triángulo rectangular, entonces se muestra la función $c^2=a^2+b^2$ que es el teorema de Pitágoras.

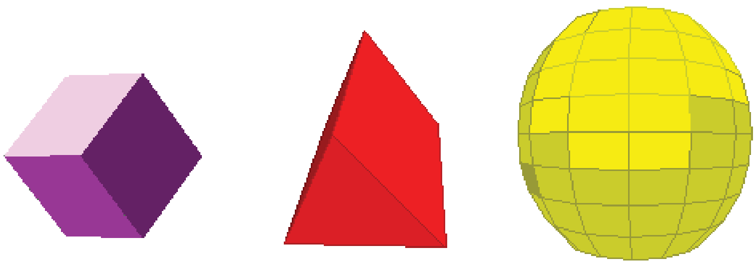
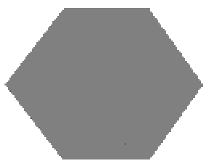
Actividad	analisis
SAA8: ¿Con cuál o cuáles de éstas figuras:  ¿Puedes obtener el mosaico de abajo por repetición?  Explica en cada caso, ¿qué transformaciones haces para repetir la pieza y que se obtenga el mosaico?	CMt1 CMt2 CPc2 CPr1 CPr2 CC2 CEa2 CEa3 Cei2

Aunque la simetría se considera preferiblemente como una transformación, el hecho de que ciertas transformaciones pueden realizarse sobre algunas figuras sin cambiarlas, es una propiedad de esas figuras. Estas propiedades, es decir, la existencia de ejes de simetría, pueden descubrirse con una inspección de las figuras. En esta actividad (SAA8), los futuros profesores tienen la oportunidad de practicar en el arte de descubrir simetrías, traslación y rotación intentando obtener el mosaico con las piezas propuestas en el principio.

Actividad	analisis
SAA9: Transformación de la caja Poliedro de cuadro caras se transforma en otro de seis caras.  - Compara los volúmenes de cada uno de los poliedros - Obtener desarrollos de los poliedros en el plano Analizar en cada caso de ¿que transformación se trata? ¿Qué cambia? ¿Que se conserva?	CMt6 CPc6 CPr6 CC6 CEa1 Cei1,2

La actividad SAA9 trata de justificar una conclusión independiente ya sea correcta o incorrecta sobre la comparacion de volumenes de los dos poliedros . La justificacion consiste en la utilizacion de la transformacion de la misma figura (caja-poliedro), en el caso que unos aspectos cambian y otros se conservan.

Para poder desarrollar más alla la idea de transformación proyectiva, ponemos la actividad SAA10. Poniendo la atracción de transformacion de un mismo objeto (cubo) en diferentes figuras (rectángulo, cuboide, hexágono etc., presentamos la actividad SAA10.

Actividad	analisis
 **SAA10**: ¿Qué objeto puede producir esta sombra?   ¿El mismo objeto puede producir esta sombra?	CMj7 CPc7 CPr7 CC7 CEa1 CEa2 CEi2 CAr3

La actividad SAA10, pide un conocimiento deseable sobre la transformación de la proyección para poder justificar que la sombra de un cubo puede ser un cuadrado y en otra posición puede ser un hexágono. La argumentación de este fenómeno pide que los estudiantes conozcan bien la relación entre objeto transformado, la fuente de la luz y el lugar donde se aparece la sombra.

Capítulo 6.

Resultados sobre conocimientos iniciales de futuros profesores

6.1 Introducción

Con el diseño y la realización de la prueba inicial empieza la segunda fase de la investigación. Teniendo en cuenta que nuestros participantes han pasado la escolarización mínimo de doce años, nos interesa saber cuál es la imagen conceptual sobre la transformación geométrica que poseen los futuros profesores de primaria antes de desarrollar las actividades de nuestra practica de formación profesional sobre transformaciones. Ello responde al objetivo 2 de nuestra investigación. Para ello consideramos que es necesario realizar una prueba de conocimientos haciendo el estudio sistemático de los diversos significados de transformación y nociones relacionadas, desde diversos puntos de vista, entre ellos el aspecto cultural. Primero establecemos los problemas de la prueba haciendo una selección de las actividades, clasificamos y finalmente presentamos a los participantes de nuestra investigación en las dos facultades: FFP de UB y FEUP. Procuramos que la realización de la prueba inicial sea igual para los dos grupos. Una vez obtenidos los resultados de la prueba inicial, se analizaran las producciones de futuros profesores sobre el aspecto matemático de transformación analizando el significado de transformación, las relaciones y jerarquía en la noción de transformación, el aspecto dinámico de transformación, comunicación y razonamiento con transformaciones y elementos culturales e históricos en la transformación geométrica.

A continuación, como ya indicamos en el capítulo de metodología, analizaremos los conocimientos iníciales sobre el aprendizaje y la instrucción de transformaciones geométricas, sobre la assumpcion de la actividad profesional y sobre las actitudes críticas y reflexivas hacia la enseñanza de transformaciones en educación primaria.

6.2. Diseño de una prueba de conocimientos iniciales

Los contenidos sobre los que se construye la prueba, se han seleccionado en base a los planteamientos considerados en el marco referencial y en los precedentes que se conocen sobre la formación y los currículos de las facultades de formación de profesores de primaria. Se considera que todos los estudiantes han terminado con éxito los estudios de secundaria general o de 12 años de escuela en total (Kosova) y de Bachillerato (Catalunya). Los datos obtenidos en la prueba inicial nos deben permitir hacer la comparación con los datos de la prueba final y para que identifiquemos los elementos característicos del progreso eventual de los futuros profesores durante el desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica planteada sobre aprender a enseñar las transformaciones en Primaria.

Ante todo, consideramos que la prueba debe contemplar los contenidos siguientes:

- El concepto de transformación como característica estática,
- El concepto de transformación geométrica como proceso,
- El conocimiento de diferentes transformaciones, las relaciones entre transformaciones isométricas y jerarquía conceptual,
- La capacidad de razonar describiendo el fenómeno de transformación,
- La integración de los elementos culturales al significado de transformación,
- La capacidad de tener en cuenta el aprendizaje de transformación,
- Sobre lo qué y cómo piensan los estudiantes en sus futuras aulas sobre las formas, estilos y los elementos curriculares, respecto a las transformaciones,
- Las actitudes hacia el aprendizaje y la enseñanza de transformaciones geométricas.

Condiciones. La prueba se realizó en las aulas normales de trabajo de las facultades correspondiente de FEUP y de FFPUB. En el grupo de FEUP participaron 14 estudiantes del tercer curso de la especialidad en educación primaria y en el grupo de FFPUB, 13 estudiantes del segundo curso de la especialidad en educación primaria. Los mismos estudiantes participaron en el desarrollo de la práctica de formación docente sobre transformaciones y en la prueba final. Para la implementación de la prueba, se dan las explicaciones necesarias. El tiempo total de la realización de la prueba fue de hasta 80 minutos. Para realizar la prueba inicial, los estudiantes utilizaron materiales y recursos necesarios como papel, regla, escuadra y compás.

Sabemos que, por el contrario, la tradición escolar mira las transformaciones como simples cambios, observando sus propiedades. Así, a través de las preguntas, deseamos conocer si nuestros futuros profesores de primaria reconocen el valor dinámico de las transformaciones, frente al estático, que es el tradicional en los currículos recientes. Se presentan las tareas de los ítems asociando a cada enunciado los elementos a analizar (Tabla .6.1.) respecto a las categorías sobre aspecto matemático de transformación geométrica y las categorías sobre conocimiento didáctico-estratégico de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en la educación primaria.

Tipo	Aspecto	Actividades que se construyen
CM	Terminología. Tipos.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 14
	Propiedades. Relaciones y jerarquías	1, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 14
	Transformación como proceso o cambio	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12
	Comunicación y razonamiento	1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
	Elementos culturales e históricos	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13
CE	Elementos de Aprendizaje	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
	Elementos de instrucción	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12, 13, 14
CA	Implicación	1, 2, 5, 6, 7, 9

Tabla 6.1. Las tareas y los elementos a analizar de la Prueba Inicial

Recordemos que, para analizar cualitativamente los resultados, se observarán sujetos característicos de los distintos tipos de respuesta.

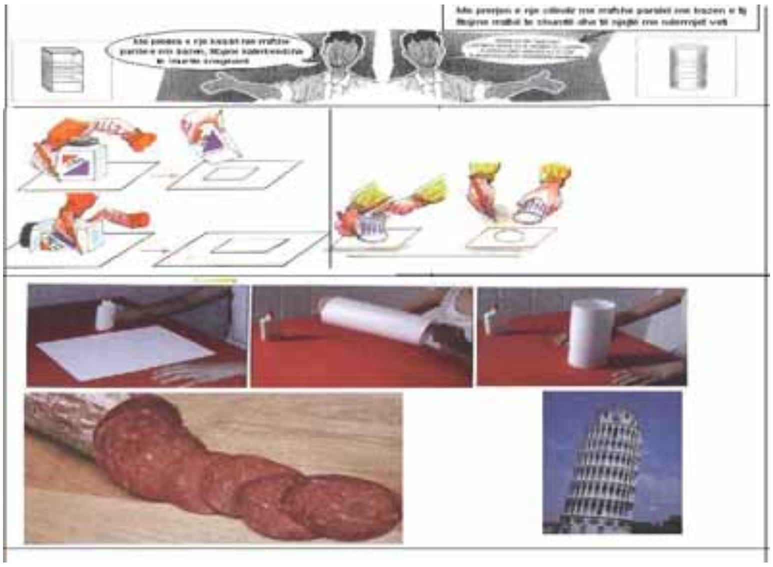
6.2.1. Descripción y justificación de los ítems

Se diseña una prueba de catorce ejercicios que describimos a continuación y se asocian a los elementos que nos interesa analizar, y se mostraron en el capítulo de metodología.

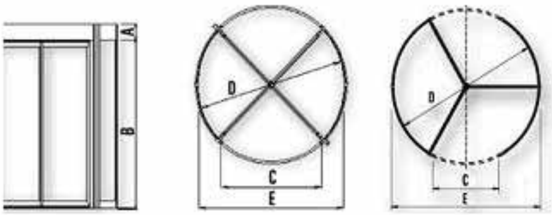
En la actividad 1 se muestra una tarea de un libro de texto, con preguntas que sirven para identificar si se sabe asociar el contenido a las imágenes que evocan movimientos en el espacio. En las figuras se visualiza: (a) la figura prismática como traslación en el espacio de una sección (circular o cuadrada), (b) la estampación como modelo visual de la proyección paralela, (c) la transformación de un espacio plano a una forma cilíndrica como igualdad de superficie, (d) la traslación en el espacio correspondiente a mantener una distancia en las ruedas.

Al proponer esta tarea, consideramos que podemos no sólo ver el conocimiento matemático, sino también como se enfrenta con la enseñanza correspondiente. En efecto, pensamos que una de las competencias profesionales de un docente de Primaria es saber identificar características de visualización sobre los contenidos matemáticos. Por otra parte, con ello, proponemos una tarea que no es habitual en los dos países, y nos va a permitir que sea sorpresa para establecer comparaciones entre las formas de respuesta de dos realidades culturales diferentes.

Se usa el contexto de evaluación, para comprometer al estudiante en su respuesta, como si hubiéramos quitado las preguntas correspondientes a las imágenes. Pero, mucho nos tememos que los futuros docentes no sean suficientemente conscientes de que este tipo de visualizaciones son importantes para el aula de matemática.

Actividad 1	Elementos a analizar
Observa las actividades que ves aquí para evaluar conocimientos de los alumnos de de 3 grado de primaria en cuestiones de geometría. A) Explica ¿qué se quiere evaluar sí se muestra eso en la página del libro?  B) Observa a las imágenes y diga ¿quina propiedad es esta? Explica lo. 	CMt1 CMj1 CPc1 CPr1 CC1 CEi1 CEi2 CEa2 CEa3 CEi1 CAr1 CAr3

Las actividades 2,3 y 4 forman un paquete de tareas para reflexionar acerca de la noción de rotación. En la actividad 2, se usa un contexto de venta, que además se corresponde al lugar de donde se han obtenido las imágenes. En efecto, las imágenes del plano vertical y horizontal se encuentran en una página de la empresa que fabrica puertas giratorias. Se propone esta situación porque se quiere ver si se identifica el giro como movimiento plano o como rotación en el espacio. Sabemos que la escuela no acostumbra a plantear situaciones tridimensionales, acentuando el eje de giro en lugar del centro de giro. Nos permitirá reconocer también si se identifican las características de la rotación (centro y ángulo de giro). También nos debe permitir ver si los estudiantes para futuro profesor reconocen el valor de las vistas. Asimismo, queremos ver si identifican los términos rotación o giro, y si identifican las medidas interior y exterior de las vistas.

Actividad 2	Elementos
Por qué consideras que han puesto estas fotografías, ¿Para venderlo mejor?   ¿Qué tiene que ver etas imágenes en una clase de matemáticas?	CMt5 CPc5 CPr5 CC1 CEi1 CEi2 CEa1 CAa3
Actividad 3. Observa cómo funciona esta puerta (en la imagen del problema 2). Explícalo matemáticamente como una transformación. Indica alguna propiedad de esta transformación.	CMt5 CMj5 CPc5 CC5 CEi4
Actividad 4. Indica un enunciado/actividad que haces para evaluar el conocimiento de sentido de la rotación en la primaria.	CMt5 CMj5 CPc5 CC5 CEa3 CEi4

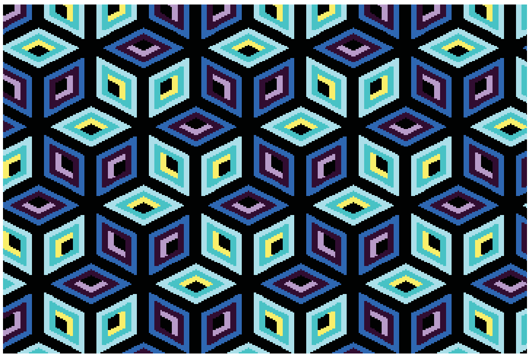
En la cuestión 3, se quiere saber como se establece una argumentación sobre la idea de rotación, y en la 4 se pretende acentuar el control del aspecto didáctico correspondiente a la rotación.

En la actividad 5, se pone en juego el conocimiento que se tiene sobre la identificación del módulo que genera un bordado, y cómo se habla de la transformación que actúa sobre dicho módulo.

La estructura del bordado está compuesta por formas geométricas. Éstas partes-módulos, están distribuidos en tal manera que formando una figura estética. Esta distribución, de hecho, es la repetición que se puede interpretar por el lenguaje de simetría o rotación.

Actividad 5	Elementos
Observa un bordado típico kosovar como en la figura . A) Es una parte que se repite. Encuéntralo y márcalo en el dibujo. B) Explica cómo vas a utilizar un papel transparente para mostrar la rotación como transformación que conserva tamaño. C) Si sabes cómo se llaman transformaciones cuyos conservan (no cambian) tamaño y forma del objeto pero cambian la posición del objeto. 	CMt2,3,5 CMj2 CPc2,3,5 CPr3 CPr5 CC2,3,5 CEi1 CEi2 CEi4 CEa3 CAa3

En la actividad 6, el objetivo es muy semejante al anterior, cambiando el contexto del bordado por el gráfico de Escher. La diferencia principal está en que los estudiantes pueden identificar multitud de módulos. Deseamos ver si se considera el módulo plano, o la figura espacial que “se percibe”. No sabemos si los estudiantes se dejan llevar por la repetición en la imagen o bien se identifica como transformación del módulo.

Actividad 6	Elementos
Observa ese mosaico en la figura siguiente:  A. Hay una parte que se repite. Encuéntralo y márcalo. B. Explica cómo vas a utilizar un papel transparente para mostrar translación como transformación que conserva tamaño. **C.** Si sabes cómo se llaman las transformaciones que conservan (no cambian) el tamaño y la forma del objeto pero cambian la posición del objeto.	CMt2 CMt3, CMt4 CMj2 CPc2 CPc3 CPc4 CPr3 CPr4 CC2 CC3 CC4 CEi1 CEi2 CEi4 CEa3 CAa3

En la actividad 7, se pide explícitamente la elaboración de ejemplos para simetría y semejanza. Buscar ejemplos es una de las formas de mostrar que se conocen los conceptos y sus características. Ahora bien, en esta pregunta se da un formato didáctico en el sentido que se dice que se usen en la explicación del contenido.

Actividad 7	Elementos
Presenta tres ejemplos (actividades) que puedes utilizar en la explicación de la simetría; y tres ejemplos para explicar la semejanza (homotecia)	CMt3, 6 CPc3, 6 CC3,6 CEa1 CEa3 CEi1 CEi2 CAa3 CAr2

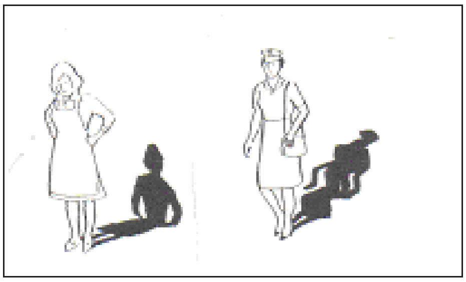
En la actividad 8, se pide explícitamente por el contenido de la estructura de las isometrías generadas por la simetría como generador. Sabemos que no se tiene ese contenido, pero queremos ver si se evoca por lo menos en alguna situación concreta.

Actividad 8	Elementos a analizar
Explica el sentido de enunciado: ***"La translación es producto de dos simetrías"***	CMt3,4 CMj3,4 CPc2 CEa3 CEi3

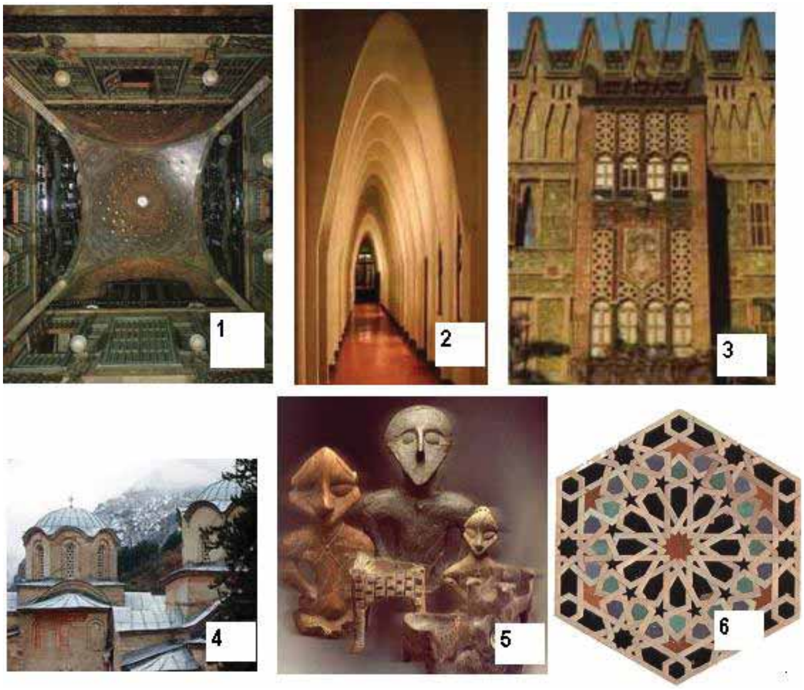
En la actividad 9, se busca específicamente que se proponga una definición de transformación y cómo se distingue de la idea de movimiento, que suponemos que se identifica a menudo con la idea física de movimiento.

Actividad 9	Elementos a analizar
¿Es para ti la transformación y movimiento lo mismo? Explica ¿por qué?.	CMt1 CPc1 CPr1 CEa1 CEi1 CAr1

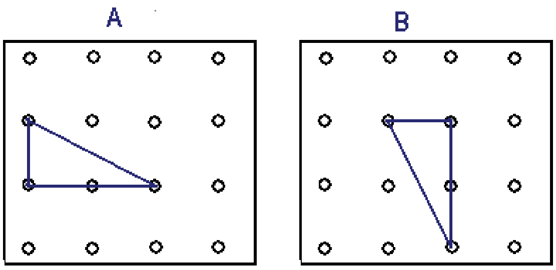
En la actividad 10, se evoca la noción de proyección puntual y el uso de la representación visual de las sombras como modelo cultural habitual. Sabemos que la imagen de las sombras en una escalera, debería evocar que los futuros docentes supieran ver la importancia de ese detalle. Precisamente porque es habitual que la pantalla sea una escalera, cuando normalmente es un plano, y deseamos ver sus argumentaciones.

Actividad 10	Elementos a analizar
Colócate al lado de una escalera en el primer escalón. Imagina tu sombra  ¿Cómo será tu sombra si la persona sube tres escalones? ¿Puede ser que haya transformación? ¿Por qué decimos que cuando se trabaja con las sombras se trabajan proyecciones?	CMt7 CMj7 CPc7 CPr7 CC7 CEi1 CEi2 CEa1 CAa3

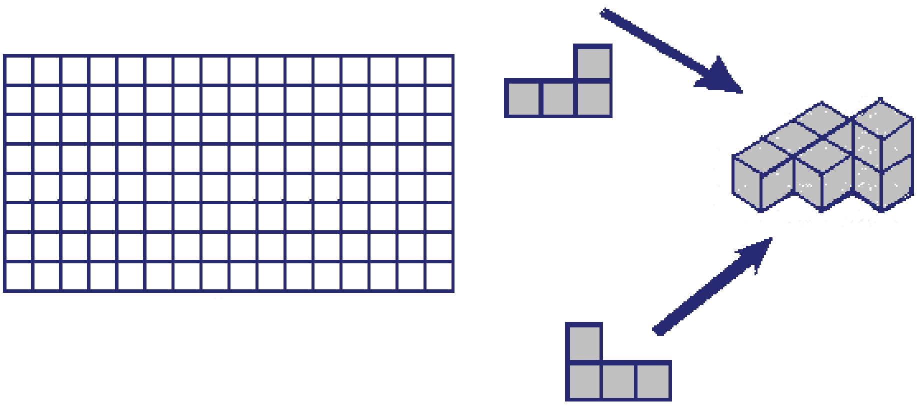
La actividad 11 pide la atención de los estudiantes sobre elementos de las dos culturas kosovar y de Catalunya. En efecto, las tres primeras imágenes son conocidas obras de Gaudi en Barcelona, en las que domina la repetición y se evoca tanto las formas de la foto (isometría plana) o las formas de la realidad (repetición en el. espacio).

Actividad 11	Elementos a analizar
Mira los siguientes objetos arquitectónicos.  Explica ¿qué tipo de transformaciones se pueden trabajar en primaria?	CMt1 CMt2, CMt6, CMt7 CPr1 CC1 CEa2 CEi2

La actividad 12 pretende valorar si los estudiantes conocen el movimiento compuesto de una rotación con un giro (semejanza) para relacionar las dos figuras que se muestran dibujadas. Sabemos que muchos estudiantes sólo distinguirán la igualdad de las figuras, y no reconocerán la transformación.

Actividad 12	Elementos a analizar
Explica la transformación de la figura A en la figura B 	CMt1 CMt2,3,5 CMj2,3 CPC2,3,5 CPr2 Cea1 CEi2

En la actividad 13 se vuelve a plantear el hecho de que la propuesta sale de un libro de texto. Se plantea el concepto de la proyección puntual con el uso de la representación isométrica en papel cuadriculado. Consideramos que no es fácil ya que no se trata habitualmente este contenido usando dicha representación.

Actividad 13	Elementos a analizar
En un libro de texto se dice que la siguiente actividad tiene como objetivo reconocer el aprendizaje en el uso de relaciones i transformaciones geométricas. ¿Por qué? ¿De qué tipo de transformaciones se trata esta actividad? 	CMt7 CMj7 CPc7 CPr7 CC7 Cea1 Cea3 CEi1 CEi2

La actividad 14 provoca una reflexión sobre los tipos de transformación y el saber asociar las ideas de invariancia propia de la geometría de Klein.

Actividad 14	Elementos a analizar
Marca las frases que consideras que ajustan la que tiene una transformación que convierte un rectángulo de 3x7cm hecho con una cuerda de 20cm en otro rectángulo diferente con la misma cuerda que tiene medidas diferentes. **A)** conservación de perímetro y área **B)** transformación de perímetro e invariable de área **C)** Invariancia de perímetro **D)** Conservación y invariancia de área **E)** Mantenimiento de perímetro con igualdad de área.	CMt1 CMt2 CMt6 CMj1 CMj2 CMj6 Cea1 CEi1

Con las actividades explicadas, consideramos que vamos a conseguir nuestro objetivo de comparar los conocimientos previos de los estudiantes en ambos países. Además, creemos que nuestra propuesta se ajusta la búsqueda que siguieron los niveles de Van Hiele, puesto que son preguntas suficientemente abiertas para provocar que los estudiantes razonen según su nivel de conocimiento. A partir de las actividades diseñadas, podemos ver la consistencia de las respuestas de los estudiantes en el análisis pormenorizado, a partir del análisis de las respuestas según niveles o grados de elaboración y corrección que se explicará `en cada caso. En cada aspecto correspondiente, se presentarán los criterios específicos de valoración. Para cada estudiante y pregunta se asigna una categoría de las anteriores a cada uno de los aspectos estudiados. Como resumen se decide asignar un nivel o grado en la categoría en cuanto un 80% de las respuestas se encuentran en dicho grado. Posteriormente se contrastan los resultados globales, se explican los resultados en los dos países, se muestran observaciones cualitativas correspondientes a las asignaciones y se resumen las características comparativas como resumen final.

6.3. Resultados sobre el aspecto matemático de la transformación geométrica

A continuación explicaremos los resultados observados para cada una de las categorías de análisis descritas en el capítulo de metodología.

6.3.1. Sobre el objeto transformación. Terminología y tipos.

Es importante valorar qué tipos de transformaciones los estudiantes conocen además de las isometrías. Además, decidimos ver si los estudiantes consideran la idea de transformación objeto matemático f que a una figura A transforma en la figura B donde f(A)=B. Por último, identificar qué terminología usa, y si es o no adecuada.

Sobre esta categoría, definimos cuatro grados de construcción de conocimientos A-alto, B-medio, C-bajo, 0- Muy bajo. Asignamos el grado O a las respuestas en blanco o con respuestas no significativas a nuestros propósitos:

Grado A. Tiene la imagen conceptual completa sobre transformación justificando las interpretaciones de esa imagen.

Grado B. Muestra imágenes conceptuales formadas por unos *pocos ejemplos prototípicos* que incluyen alguna *propiedad matemática* relevante que se corresponda.

Grado C. Muestra imágenes conceptuales más pobres, formadas por unos *pocos ejemplos prototípicos* y *propiedades de tipo visual.*

Grado O. No hay respuesta o no aporta elementos significativos sobre terminología y conceptos de transformaciones.

Se han asignado dichas categorías a las respuestas dadas por cada uno de los estudiantes, para proporcionarnos tablas que recojan los resultados correspondientes a cada uno de los grupos estudiados.

A continuación mostramos las tablas siguientes correspondientes a ambos grupos (tabla 6.2 para los participantes del grupo FEUP y tabla 6.3 para los participantes del grupo FFPUB).

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	C	B	C	B	C	C	C	O	C	C	C	C
2	A	B	C	C	B	C	C	C	C	C	B	A	B	C
3	B	B	C	B	B	B	C	B	B	B	B	B	B	C
4	B	B	C	B	B	B	C	B	C	B	B	C	C	B
5	B	C	C	B	B	C	C	C	C	C	B	A	A	C
6	B	C	B	B	A	B	B	B	C	B	C	B	B	C
7	A	B	B	B	B	B	B	A	A	B	A	A	A	C
9	B	C	C	B	B	O	C	B	C	B	C	C	B	B
10	O	A	O	C	O	B	O	B	O	O	O	B	C	B
11	C	B	C	A	B	C	C	B	O	O	C	B	O	O
12	A	A	C	C	C	C	C	B	O	B	C	B	B	C
14	C	A	A	C	B	C	C	C	C	A	C	A	A	B
Resumen	B	B	C	B	B	B	C	B	C	B	C	B	B	C

Tabla 6.2 Respuestas de los estudiantes de FEUP sobre terminología y tipos en PI

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	B	B	C	B	C	B	B	B	B	C	B	CB	B
2	C	C	B	C	C	C	C	B	C	C	B	C	C
3	B	O	O	O	B	C	B	C	O	C	B	O	O
4	B	C	C	C	C	C	O	O	C	O	B	C	C
5	C	A	C	O	C	B	C	B	O	B	B	B	C
6	C	B	O	B	C	C	C	C	B	B	C	C	C
7	C	B	C	B	B	B	C	B	B	C	C	B	O
8	C	O	O	A	O	O	C	O	B	C	C	C	O
9	C	C	O	B	B	B	B	O	C	B	B	A	O
10	B	A	C	B	C	C	B	O	B	C	B	B	C
11	C	C	O	O	B	C	O	O	B	O	C	B	O
12	C	B	C	O	C	C	O	A	B	B	A	C	C
14	C	A	O	A	C	A	C	C	C	C	C	A	O
Resume	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**C**	**C**	**B**	**B**	**C**	**B**	**B**	**C**

Tabla 6.3. Resultados de los estudiantes de FFPUB sobre terminología y tipos en PI.

A continuación mostramos los resultados comparativos en forma de tabla 6.4.

Grados de conocimientos sobre **objeto transformación, terminología y tipos**	FEUP n=14	FFPUB N=13
A) Estudiantes capaces de construir imágenes conceptuales completas utilizando una terminología y afirmaciones correctas.	0%	0%
B) Identifica la transformación de la figura sin explicar la transformación de sus elementos e identifica alguna propiedad relevante de la transformación.	9 - 64%	6 - 46%
C) Estudiantes con las imágenes conceptuales más pobres, formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual.	6 - 36%	7 - 54%

Tabla 6.4. Comparación de resultados de análisis sobre objeto transformación, terminología y tipos

En base a las observaciones realizadas, podemos evidenciar el siguiente resultado s***obre la comparación entre FEUP y FFPUB.***

Resultado 6.3.1. *En ambos grupos no encontramos los estudiantes con el grado alto de conocimientos sobre el objeto de transformación, el uso de terminología y tipos. Con el grado medio de conocimientos están la mayoría (64%) de los estudiantes de FEUP, y menos de la mitad (46%) los de la FFPUB.*

En ambos países menos de la mitad de los estudiantes muestran alguna propiedad relevante de las transformaciones geométricas aunque no se utilizan correctamente para describir todos los tipos de transformaciones. Así, en FEUP el 36% reconocen la transformación sin discriminación de propiedades relevantes, no utilizan la terminología adecuada y no identifican correctamente otros tipos de transformaciones. Un 64% de los estudiantes de Kosovo identifican la isometría como desplazamiento físico, y no descubren los elementos que se conservan. Sólo un 43% reconocen las deformaciones como transformaciones de forma y tamaño, y un 36% reconocen la relación entre un objeto y su imagen y la fuente de proyección.

En el caso de FFPUB, un 54% muestran que poseen las imágenes conceptuales formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual y explicaciones que se basan en la apariencia visual de esos prototipos. La mayoría de ellos reconocen la transformación isométrica identificando la simetría como resultado de doblado o reflexión (espejo) que conserva forma y tamaño. La imagen conceptual de transformación se identifica como la relación entre dos estados de un objeto en momentos diferentes. Las deformaciones del objeto son los ejemplos preferidos de transformaciones para la mayoría de los participantes, mientras que la proyección se reconoce como una transformación de la sombra.

A continuación, detallamos aspectos cualitativos que acompañan la observación anterior, y nos permiten hacer un análisis más detallado.

Resultado 6.3.2. *La mayoría de los estudiantes no muestra una imagen conceptual completa de la transformación geométrica. El significado de transformación para los participantes de la FEUP se identifica como repetición o movimiento que presenta la relación entre dos conjuntos de puntos o otros elementos en cuestión; mientras para los participantes de la FFPUB la transformación significa el sentido común de la palabra presentando como relación entre dos conjuntos: el objeto y su estado, con el cambio de alguna característica. El cambio de posición no es siempre la característica de transformación del objeto.*

Al analizar cualitativamente las respuestas de los estudiantes de FEUP hemos identificado que el significado de transformación en general en la mayoría de los casos se identifica como repetición, desplazamiento y movimiento (para las isometrías), y sólo dos estudiantes muestran un intento de expresar el concepto de transformación como función.

Resultado 6.3.3. *Pocos estudiantes muestran confusiones terminológicas importantes como por ejemplo llamar rotaciones a las simetrías.*

En efecto, en problemas como el del bordado, no siempre se dan las explicaciones necesarias sobre la relación entre la rotación y la simetría axial. En dichos casos no sabemos exactamente el significado del error.

"...en una hoja dibujaran la parte de la figura la cual la giraran para que se obtiene la imagen entero. Asi se vera la rotación".

(Vj, A5: 3)

El estudiante identifica la rotación a base de la intuición de obtener la imagen del bordado que determina el hecho de girar la parte generadora, y luego se vuelve a recordar que esto es rotación.

En otros casos no podemos decir que se trata de confusión, sino interpretación. Así, por ejemplo, se denomina a las isometrías como desplazamientos, que pueden ser "rotación" o "traslación"

> *"...y en este caso tenemos tambien desplazamiento, donde atraves desplazamientos se obtiene todo la figura".*
>
> (Fi, A6, :p3)

Resultado 6.3.4: *Una parte importante de los estudiantes en ambos grupos alude a la repetición como fenómeno que se utiliza en la construcción de la imagen conceptual de transformación isométrica.*

En efecto, se observa en las respuestas de las actividades 1, 5 y 6 como algunos estudiantes identifican las dos partes que se repiten sin mostrar elementos constituyentes, por ejemplo, el eje de dicha simetría:

> "*es el cuadrado que se repite y si lo giramos obtenemos todo el mosaico....estas transformaciones llamamos simetrías axiales"*.
>
> (Ar, A6, p6).

Resultado 6.3.5: *No hay estudiantes que hayan mostrado completamente todas las características de cada una de las isometrías. Así, por ejemplo el ángulo y el centro de la rotación, el vector de traslación, etc.*

Sólo un estudiante de FEUP es capaz de identificar la rotación en el mosaico entendido como objeto construido por los cubos iguales con tres caras diferentes y todo mosaico se puede construir si un cubo lo giramos en tres direcciones:

> *"...es solo una parte que se repite (ha dibujado una cara del cubo) pero en todo el mosaico aquello se ha rotado en 3 direcciones..."* .
>
> (Ad, A6: p3)

Pero esta respuesta no la hemos considerado de nivel alto porque le falta poner más detalles sobre el mencionado *giro en tres direcciones* y porque se contradice con lo que enuncia en una frase más adelante cuando dice *"…y se ha cubierto toda la superficie".*

Pocos estudiantes son capaces de dar propiedades poco usuales de las transformaciones. Tal es el caso de usar la idea de rotación que se reproduce con período 2*п*.

> "*en manera matematica, la rotación de esta puerta se vuelve en forma inicial despues de una rotación con periodo T=2п".*
>
> (, Pe, A2, p 4)

Se utiliza el concepto "rotación" sin explicarnos los elementos importantes de la rotación que son el angulo de rotación y el centro (eje) de rotación. El estudiante Pe intenta razonar inductivamente que la porta hace una rotación, y por esta razon, la puerta se vuelve en la posición inicial despues de girar por un angulo de 360 grados, utilizando simbolica T=2п. Quedan sin saber qué significa T, cuál es eje de rotación, cuándo se puede entrar y cuándo no se puede, etc..

Resultado 6.3.6*: El significado de transformación isométrica para diversos estudiantes se asimila al desplazamiento físico como cambio de posición, con igualdad de forma y tamaño. Mientras que la transformación se identifica con un cambio de forma. Esto parece ocurrir en ambos países.*

En efecto, algunos estudiantes de UP identifican explícitamente la rotación como isometría y el movimiento como desplazamiento físico. En la pregunta del actividad 4, de poner un enunciado para sentido de rotación, obtenemos respuestas:

Ad	Ar	Dr	Da
… cuando giramos las hojas de un libro obtenemos en posiciones diferentes…",	*…el movimiento de lápiz….girándolo….*	*… …el movimiento de las agujas del reloj…"*	*… la obertura de la ventana o de la puerta*

La idea de movimiento físico en la FFPUB se percibe en las respuestas siguientes:

Al	Li	Yo
es la propiedad de hacer rodar un objeto haciendo el material circular …	*cuando se mueve el objeto es gracias a nuestra fuerza contra el objeto y este resbala y paralelamente se mueve*	*la propiedad que los objetos cilíndricos tienen para moverse, rodar …*

Algunos estudiantes del FEUP caracterizan además los movimientos (isometrías) como invariancia de forma y tamaño, cuando hablan de comparar *transformación y movimiento*[1] .

Ar	Da	Dr
*no (*es lo mismo*) porque la transformación quiere decir una cosa se transforma en otra cosa mientras con el movimiento entendemos cambio de posición de una misma cosa*	*si, es lo mismo porque una figura pasa de un lugar en otro, sin cambiar la forma y magnitud que es una transformación*	*El movimiento es desplazamiento de una cosa de un lugar en otro que es una transformación*

Pero, pocos estudiantes de FEUP hablan explícitamente de las isometrías como conjunto de transformaciones que conservan el tamaño y la forma. Sí en cambio se identifican las simetrías, rotaciones y traslaciones como transformaciones con dicha propiedad. Ahora bien, en algún caso, la actividad hace que lo intuitivo pase por delante del conocimiento estructurado. Así, ante la observación del bordado, algunos estudiantes muestran la rotación como la única isometría, puesto que la identifican como la única transformación que actúa sobre el módulo que han marcado.

La mayoría de estudiantes de FFPUB (11 de total de 13) piensan que un movimiento no es transformación. Pero sólo algunos lo describen con cierta corrección:

> *"…Yo por movimiento entiendo coger cualquier objeto o imagen y desplazar de sitio, pero sin que por ello el objeto sufra alteración.*
> *(Mc, p3: 2-3)*

[1] A la pregunta del investigador, Ad responde que "entre una respuesta no fundamentada y una respuesta en blanco, prefiero la segunda".

Así, pues, la imagen conceptual de transformación geométrica está construida en base a propiedades de tipo visual (transformar=deformar), y movimiento isométrico= desplazamiento.

Resultado 5.3.7: *Pocos estudiantes reconocen explícitamente los elementos que caracterizan (propiedades) cada tipo de isometría. En el caso de las simetrías, se describen: el eje, las formas reales asociadas, etc. Muy pocos estudiantes se refieren a propiedades como el cambio de sentido. No se dan propiedades características de la traslación. Y de las rotaciones se alude sólo a los ángulos, pero no a la conservación de la distancia.*

Ante todo, digamos que en algunos casos la transformación se ve como *aplicación de un conjunto en el otro,* pero no se identifica esta aplicación entre posiciones del objeto en dos lugares diferentes. Esto se explica con las figuras simétricas, porque se establece fácilmente la correspondencia entre las dos partes de la figura u objeto. Sin embargo, para otros tipos de transformaciones, habría que imaginar la posición inicial y final de la figura transformada para poder establecer la idea de transformación como aplicación.

Algunos estudiantes kosovares afirman adecuadamente que el movimiento es sólo un tipo de transformación geométrica. Que es así, nos convencimos si analizamos la respuesta del problema 12 donde se pide explicar la transformación de la figura A en la figura B, cuando Ad lo explica utilizando transformación de los conjuntos de puntos de la figura A en los correspondientes puntos de la figura B.

Sh establece una relación correcta entre la propiedad de conservacion del tamaño y forma en las transformaciones isometricas: en la pregunta "como se llaman transformaciones que conservan forma y tamaño..." responde "*simetria, traslación, rotación*".

En la FFPUB, sólo una estudiante habla de isometrías como transformación que conserva la forma y el tamaño mientras otros las identifican como *repeticiones.* Y en general no se identifica la simetría en dicho conjunto. En realidad, algunos estudiantes aluden a casos particulares de isometrías como regla general. Así, algunos llaman a dicha transformación que conserva forma y tamaño: *traslación* (Al), *rotación* (Di) *rotación y traslación* (Li), *simetría* (Mc).

Algunos estudiantes tanto de la FFPUB como de la FEUP indican que "*el movimiento no es transformación*" y luego "*la transformación que cambia la posición del objeto (movimiento) es simetría/rotación/traslación*". ¿Quiere decir que la simetría/rotación/traslación no son transformaciones? No, esto quiere decir que la imagen conceptual de transformación (isometría) no es completa, y está en el proceso de construcción. Esto se ve más claro si analizamos las respuestas del problema 7 donde se pide presentar ejemplos de simetría y semejanza que mostramos a continuación.

El plegado de papel es la forma habitual de evocar el cambio de sentido en la simetría. Y el dibujo es la forma habitual de representar la semejanza, con la ayuda de los rayos que salen de un punto del plano, aunque se asocia habitualmente a la idea de proyección (figura 6.4 Arjeta).

Sólo en un caso de FEUP se identifica la semejanza como dependencia funcional, mediante intersecciones cónicas (figura 6.4Vjollca)

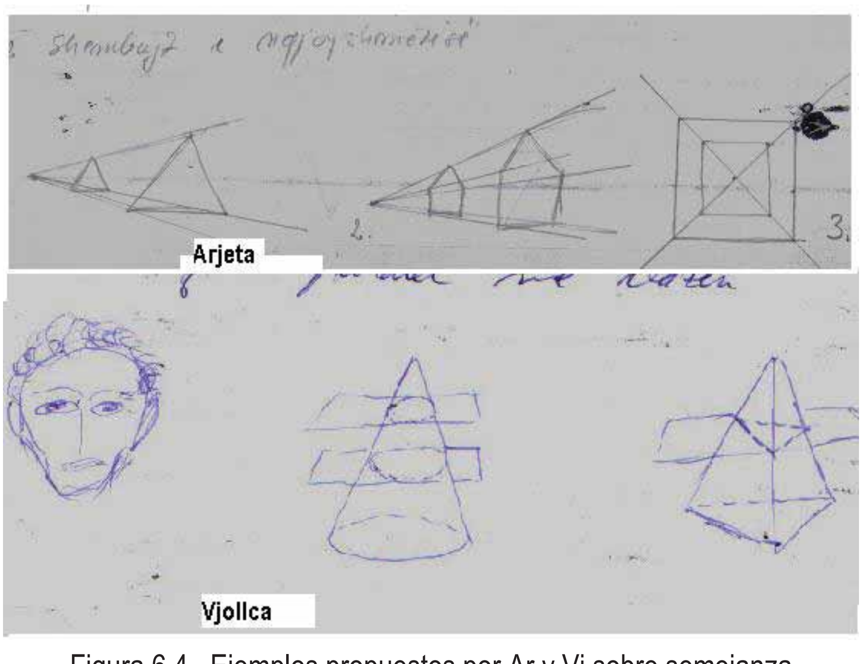


Figura 6.4 Ejemplos propuestos por Ar y Vj sobre semejanza

En el grupo de la FFPUB, el significado de semejanza se asocia al fenómeno que establece una relación entre dos *objetos parecidos* en el sentido general:

Al	Es	La
un ejemplo de semejanza puede ser la obertura de una mandarina o una naranja ya que pueden parecer de partes iguales pero no lo son	*ejemplo de similitud son las partes del cuerpo humano (manos, piernas, ojos…)*	*se pueden observar los zapatos y ves que no son iguales, sobre todo si no son nuevas*

Y pocos explicitan su significado, de forma más genérica, aunque no aluden a propiedades:

"*…que es cuando una cosa se parece mucho a otra pero no es la misma…*"

(Li, p5, 3)

Aunque algunos saben que existen dichas características, reconocen que no las saben decir:

"*no conozco las propiedades de semejanza (homotecia*)".

(Jo, p5, 2)

Resultado 6.3.8: *En muchos casos, en ambos países, se reconocen ejemplos asociados a las semejanzas, sin que se muestren todas sus características. Y sólo alguno evoca la semejanza como aplicación de puntos del plano. La semejanza se interpreta en FEUP como diferencia de tamaño, conservando la forma. No así en FFPUB, donde la semejanza fundamentalmente se reduce a parecido.*

Buena parte de los estudiantes no reconocen las características de la proyección como transformación.

En efecto, ante el problema 10, sólo 5 estudiantes de la FEUP, consiguen responder correctamente sobre la proyección y dar una descripción asociada al fenómeno de la luz y las sombras.

"*la sombra será diferente del cuerpo humano*" y identifica los elementos de proyección: "*…la (fuente de la) luz se considera el centro de la proyección y las rayas de la luz se consideran las rectas de proyección.*"

(Ar, p10: 7)

Usualmente no hay una descripción explícita de la relación entre elementos y propiedades de la proyección que evidencien la noción de transformación como función, excepto el caso superficial siguiente.

"*…la sombra es la transformación del cuerpo humano…*"

(Fit, p9: 5)

En algunos casos, como es del problema 10 vemos que 6 participantes del FFPUB muestran la capacidad de identificar la relación entre la fuente de la luz, el objeto, su sombra y el plano donde se aparece la sombra.

> *"…porque las sombras crecen cuando un foco de luz incide sobre un cuerpo y éste se proyecta en un fondo opaco. Si no tendríamos un foco de luz ni un fondo opaco, no tendríamos sombra. Dependería también desde donde nos incidiera el foco, ya que si lo hiciere perpendicularmente a nuestra cabeza, es decir, en el eje de la cabeza no proyectaría ninguna sombra*."
>
> (Di, p10: 7)

Y en algún caso del grupo FEUP se identifica el detalle de la escalera como forma de explicitar el cambio de la sombra cuando la forma donde se proyecta no es plana.

> *"La sombra del cuerpo humano en la escalera parece rota segun las escaleras, ya que la sombre es plana mientras que el cuerpo es tredimensional".*
>
> (Vj, p10: 3-6)

Nos muestra la identificación correcta de la propiedad del producto de proyección – la sombra, que depende del lugar donde se presenta: si es "*escalera parece rota*" en contrario del si es plano; pero no identifica otros elementos de la proyección.

Sólo en algún caso del grupo FEUP, como el de Ad, se identifican los elementos de la transformación: el centro, las rayas y el objeto transformado.

> *"la sombra, que depende del lugar donde se presenta, si "escalera parece rota" en contrario es plano;*
>
> *(Ad p10, 4)*

En el caso de la FFPUB, algunos estudiantes identifican la transformación como relación entre dos estados diferentes de un objeto y lo usan para decir que las proyecciones no son transformaciones,

> "*No creo que haya alguna transformación porque el objeto que refleja sigue la misma gente*",
>
> (Li p10, 3-)

La misma estudiante, al hablar de los objetos arquitectónicos usa la idea de transformación en el sentido de relación entre estados diferentes del objeto:

> "*A partir de un objeto cualquiera maleable y aplicando diferentes fuerzas y trabajándolas con materias conseguimos que un objeto cambie de forma, aunque el material sea el mismo. Se pueden*

> *trabajar transformaciones con la madera estando de una forma inicial cuadrada a una redonda."*
>
> *(Li p.11: 4-8)*

Algunos estudiantes ven la transformación como un cambio "radical" del objeto. Tal es el caso de entender que las proyecciones son transformaciones que cambian la forma del objeto transformado.

> "*… Decimos que se trabajan proyecciones porque las formas cambian*"
>
> (Al p10, 4)

Ningún estudiante de los dos grupos identifica correctamente la dependencia funcional entre elementos de proyección. Las inconsistencias se muestran en verbalizaciones en donde la reconoce que la sombra es la transformación del cuerpo:

> "*Toda sombra es proyección porque proyecta/refleja el cuerpo de la persona*".
>
> (So, p10: 3)

Muchos de ellos no identifican los elementos de proyección (grado C de respuesta) como por ejemplo el centro de proyección, la alineación de los rayos de proyección y otras propiedades de proyección.

Al no nos pone otras propiedades de proyecciones. La respuesta de Ol en el mismo problema muestra la identificación de la proyección con deformación:

> "*…trabajar con sombras decimos que se trabaja con proyecciones porque se producen deformaciones de las figuras. Se proyecta una imagen partiendo de otra, como seria de los proyectores. La imagen proyectada sufre una deformación, se amplía o reduce*".
>
> (Ol, p10:9)

También Li cree que las proyecciones no son transformaciones, pero al responder al problema 11 muestra un sentido más amplio de transformación:

> "*A partir de un objeto cualquiera maleable y aplicando diferentes fuerzas y trabajándolas con materias conseguimos que un objeto cambie de forma, aunque el material sea el mismo. Se pueden trabajar transformaciones con la madera estando de una forma inicial cuadrada a una redonda."*
>
> (Li, p10:7)

Observamos muchos estudiantes con un conocimiento muy pobre sobre el concepto de transformación en general y de proyección en particular:

> "*…no hay transformación. Las sombras son las proyecciones de una imagen, gracias a un foco de luz*"

(Na, p10; 4)

que quiere decir que Na no cuenta proyecciones como transformaciones, y además no distingue la relación entre la imagen y la sombra diciendo que "*las sombras son proyecciones de una imagen*".

Resultado 6.3.9. *Las representaciones y visualizaciones de transformaciones no isométricas no parecen ser suficientes para reconocer dichas transformaciones por los estudiantes de Kosova. Hay respuestas más consolidadas en UB.*

Así, en el problema 13 solo un estudiante responde en FEUP y en el problema 14 solo aparecen 6 respuestas correctas. Es decir, no son capaces de identificar las transformaciones isoperimetricas. Muy pocos reconocen las deformaciones como transformaciones. Cuando se reconocen las imágenes conceptuales están formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual - que basan sus juicios en la apariencia visual de esos prototipos, comparándolos con las figuras sobre las que deben trabajar y rechazando como ejemplos aquellas figuras que no coinciden con los prototipos de su imagen del concepto.

> "*la transformación que convierte un rectángulo de 3X7 cm hecho con una cuerda de 20 cm en otro rectángulo diferente con la misma cuerda que tiene medidas diferentes es* ***conservación del perímetro y del área****".*

(Da, p14: 5)

6.3.2. Sobre el sistema conceptual. Caracterizaciones y ejemplos

Pensamos que no se ha realizado ninguna pregunta explícita para la ejecución de un sistema conceptual que nos permita identificar cuáles son las jerarquías que los estudiantes conocen y aluden en sus explicaciones. A pesar de ello, consideramos que a partir de sus respuestas tenemos evidencias suficientes para mostrar sus conocimientos sobre dicho aspecto. Algunas ideas ya se vislumbraron en el apartado anterior. Así, nos preguntamos si serán capaces de reconocer si saben clasificar las isometrías como: simetrías, giros y traslaciones. Deseamos identificar si saben distinguir entre isometrías y otras transformaciones estableciendo un "mapa jerárquico" supuesto sobre las transformaciones a partir de sus propiedades. Distinguimos cuatro grados en su manifestación de conocimientos:

> *Grado A.* Reconoce multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y establece relaciones entre diferentes isometrías o isometrías y otras transformaciones mediante propiedades que los distinguen.
>
> *Grado B.* Identifica correctamente alguna transformación y las propiedades relevantes de la transformación pero no establece la relación adecuada entre diferentes transformaciones y sus propiedades.
>
> *Grado C.* Muestra conocimiento débil de transformaciones. No identifica el hecho que las propiedades relevantes sobre la transformación sirva para establecer relaciones entre diferentes transformaciones.
>
> *Grado 0*. No hay respuesta

Como hicimos en el apartado anterior, comenzamos por mostrar las asignaciones correspondientes a los dos grupos de estudiantes después de ver sus respuestas. Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes de la FEUP las presentamos en la tabla 6.5., y los resultados del grupo de FFPUB en la tabla 6.6.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	C	B	C	C	C	C	C	O	C	B	C	B
3	B	C	C	C	B	C	C	B	C	C	C	B	C	C
4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C	C
5	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
6	B	C	C	C	B	C	C	B	C	C	C	B	C	C
7	B	C	C	B	C	C	C	B	C	C	B	C	B	C
8	O	C	O	C	O	O	O	O	O	O	O	B	C	B
10	O	B	O	C	O	C	O	B	O	O	O	C	C	C
11	C	C	C	B	B	C	O	C	O	O	C	C	O	O
12	B	B	C	C	C	C	C	B	O	C	C	C	B	C
14	C	A	A	C	A	C	C	C	C	A	C	A	A	C
Resumen	B	C	C	C	B	C	C	B	C	C	C	C	C	C

Tabla 6.5. Resultados de los estudiantes de FEUP sobre conocimientos iniciales de relaciones y jerarquías en la noción de transformación

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	C	C	B	C	C	B	C	B	C	C	C	C
2	C	C	C	B	B	C	B	C	C	C	B	C	C
4	C	C	C	C	C	C	O	O	C	O	B	C	C
5	B	B	B	C	B	C	C	B	O	C	B	B	C
6	B	B	O	B	C	C	C	B	B	C	B	B	C
7	C	B	C	B	B	B	B	C	B	C	C	B	O
8	C	O	O	A	O	O	C	O	B	C	C	B	O
10	B	A	C	C*	C	C*	B	O	B	C	B	B	C
11	C	B	O	O	C	C*	O	O	C	O	C	B	O
12	C	B	B	O	B	B	O	A	B	B	A	C	B
14	C	A	O	A	B	A	C	C	C	B	C	A	O
Resumen	C	B	C	B	C	C	C	C	B	C	B	B	C

Tabla 6.6. Resultados de los conocimientos iniciales de FFPUB sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación

A continuación se reconocen los resultados comparados en la tabla 6.7.

Grados de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación	FE-UP n=14	FFP-UB N=13
A. Reconocer multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y establece relaciones entre diferentes isometrías o isometrías y otras transformaciones.	- o%	- o%
B. Identifica correctamente alguna transformación y las propiedades relevantes de la transformación pero no establece la relación adecuada entre diferentes transformaciones y sus propiedades.	3 o 21%	5 o 38%
C. Conocimiento débil de transformaciones. No identifique las propiedades relevantes sobre la transformación y tampoco relaciones entre diferentes transformaciones.	11 o 79%	8 o 62 %

Tabla 6.7. Comparación sobre ejemplos de transformación

A partir de las observaciones realizadas sobre las respuestas analizadas cualitativamente, podemos constatar los siguientes resultados.

Resultado 6.3.10. *Ninguno de los participantes de la investigación de ambos grupos no muestra el grado alto de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación. En general se da un grado bajo de respuestas porque no se asocian a cada transformación las propiedades correspondientes como características que las distinguen y relacionan.*

Vemos un dominio visual de las propiedades de las transformaciones, por encima de su caracterización. Por ejemplo, más de la mitad reconoce la simetría como propiedad de figuras, y ejemplifica correctamente pero no se destacan el valor del eje para explicar la simetría, así como mostrar su estructura.

"Como ejemplos para la simetria tomaria los dos ojos humanos, las dos orejas, las dos manos etc".

(Vj P7:13)

Las explicaciones muestran los procesos de construcción (de simetría), pero no se distingue de otras transformaciones.

"para ilustrar la simetría pondremos como ejemplo el plegado del papel donde destacamos el eje de simetría el lado del plegado, luego, dibujamos una figura

> *(corazón, letra B etc.) en una parte de la hoja plegamos y notamos las partes que coinciden*".
>
> (Fit ,P7; 6)

En los estudiantes de FFPUB, sólo en algunos casos se perciben distinciones explícitas, como por ejemplo con las explicaciones de que el movimiento no es una transformación geométrica

> "*La transformación cambia el objeto y el movimiento no*", de La: "*no es lo mismo, porque el movimiento no implica un cambio de la forma, sino solo en la posición, mientras que la transformación implica un cambio en la forma*",
>
> (Al, P9:8)

O bien al distinguir la transformación y movimiento.

> "*cuando se hace una transformación se cambia la forma, y con un movimiento no se cambia la forma sino que se cambia el lugar*". (Na)

En muchos casos los estudiantes muestran la capacidad de identificar características sólo visuales de las deformaciones como la semejanza

> "*…si mostramos una mandarina y una esfera…*"
>
> *(Al, p7:12),*
>
> *"los partes del cuerpo - manos, piernas, ojos…*"
>
> (Es, p7:15),

Resultado. 6.3.11. *No se muestran bases suficientes para reconocer la estructura de grupo de las isometrías que dejan invariante una figura. Tampoco se perciben buenas relaciones entre transformaciones distintas como jerarquía conceptual.*

Así, no se establece una buena relación entre simetrías y rotaciones o traslaciones, como se pedía en el problema 8. Sólo en los casos de Sh y Xh encontramos un intento de identificar correctamente dicha relación. Sh interpreta esa relación con el dibujo y Xh explicando que la traslación por un vector v es producto de las simetrías axiales los ejes de los cuales son paralelos.

Pocos estudiantes muestran una transformación como composición de otras dos. Tal es el caso de la transformación de la figura A en la figura B como composición de (rotación X simetría) y (simetría axial X simetría axial). Lo que falta es la utilización formal de juicios adecuados en la definición de transformación de la figura A en la figura B. Como podemos ver en el problema 8 (explicar que la traslación es producto de dos simetrías) donde Ar y Ad otra vez, prefieren no responder.

Sólo en algún caso, se muestra algo de la estructura de rotaciones a partir del ejemplo de los bordados.

"…es solo una parte que se repite (ha dibujado una cara del cubo) pero en todo el mosaico aquello se ha rotado en 3 direcciones…".

(Vj, P6: 3-4)

En el caso de FFPUB tampoco se desarrollan indicios de la estructura de las isometrías, como tampoco se ven relaciones entre diferentes transformaciones. En efecto, la mayoría de los participantes de la FFPUB se limitan a la identificación de las características visuales de simetrías, rotaciones, traslaciones, deformaciones y proyecciones.

Algunos estudiantes establecen relaciones en cuanto unen la propiedad de conservación forma y tamaño con el proceso de movimiento:

"*Calcas la parte que se repite en el papel transparente. Después vas moviendo el papel por sobre el bordado y los niños se dan cuenta que las otras partes caben dentro de la línea dibujada (el papel transparente). De esta manera se enseña que la transformación rodándola conserva el tamaño*".

(Na, p5,:12)

Pocos estudiantes identifican la equivalencia entre la figura y su imagen simétrica, el cambio de la orientación de la imagen simétrica respecto a la figura, identifica visualmente el vector de traslación, y confirma que la traslación de una figura es igual al producto de dos simetrías axiales con ejes paralelos:

"*La translación es producto de dos simetrías" porque se debe a la simetría de la simetría. Si tengo la figura **a** y obtengo la figura simétrica **a'**, y de esta obtengo la figura **a''**. **a''** es la translación de **a**".*

(Jo, p8 : 4)

La representación de esta relación se ve en el dibujo de la figura 6.8.

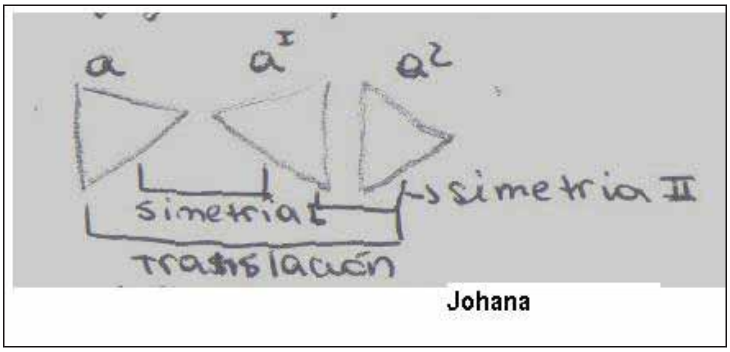


Figura 6.8. Representación de traslación como producto de dos simetrías por Jo

Otros establecen la relación de una rotación como producto de dos simetrías axiales, aunque empleando una terminología no adecuada:

> "*pienso que una traslación es producto de dos simetrías: una vertical y después, otra horizontal*"
>
> (So, p10: 4)

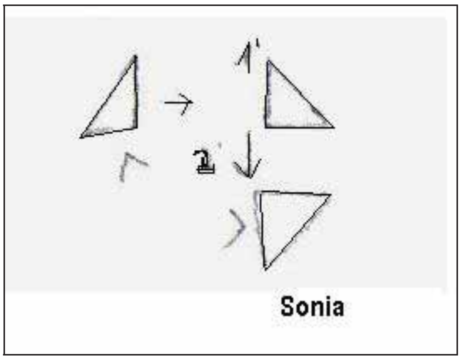


Figura 6.9. So representación de Sonia de la rotación como producto de dos simetrías

En resumen veamos que solo 6 participantes de la FFPUB identifican la parte que se repite en relación al patrón, indicando el elemento generador a veces reconociendo el centro y ángulo - en caso de rotación, el vector de desplazamiento - en caso de traslación, o el eje de simetría - en caso de simetría.

6.3.3. Sobre la transformación como proceso o cambio

Consideramos importante saber qué conocimientos poseen los futuros profesores de Primaria sobre la idea de transformación como proceso o cambio. A pesar de que la idea de transformación como característica estática entre el objeto y su imagen transformada suele ser entendida de un modo rígido y absoluto en muchos currículos escolares, queremos ver cómo se desarrolla el aspecto dinámico de la transformación en cuanto cambio. Por esto analizamos las respuestas de los participantes de la investigación sobre la capacidad de identificar el proceso de transformación geométrica, de acuerdo con nuestra propuesta teórica. Debido a diferentes niveles de las capacidades de participantes, para clasificar una respuesta, los agrupamos según los grados siguientes:

Grado A. Reconoce transformación como concepto matemático – muestra evidencia de dependencia funcional, de las propiedades importantes y diferencia adecuadamente entre movimiento y transformación.

Grado B. Muestra conocimiento correcto del proceso de transformación como cambio o desplazamiento sin evidencia de propiedades importantes.

Grado C. Muestra conocimiento débil o incorrecto del proceso de transformación. En este grado, transformar significa un cambio no bien definido.

O – Sin respuestas o con respuestas poco significativas.

Pensamos que los estudiantes no tienen una visión funcional de las transformaciones, como ya se ha explicado. Pero nos interesa especialmente distinguir entre la visión estática y la dinámica.

Ante todo, como hemos decidido, en la tabla siguiente 6.10 mostramos los resultados de la clasificación de las respuestas de los estudiantes de la FEUP y, a continuación en la tabla 6.11 se muestran los resultados de la FFPUB.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	B	C	C	C	C	B	C	O	C	B	B	C
2	B	C	C	C	C	O	C	C	C*	C	C	B	C	C
3	A	A	B	C	C	O	C	C	B*	B	B	A	A	C
4	B	B	C	B	B	B	C	B	B	B	B	B	B	B
5	B	B	B	B	B	C	C	B	B	B	B	B	B	B
6	C	B	B	B	B	C	C	B	B	B	B	B	B	C
7	C	C	C	B	C	B	B	B	B	C	C	C	B	C
8	O	C	O	B	O	C	C	O	O	O	O	C	C	C
9	O	B	B	B	B	B	C	B	C	C	C*	B	B	B
10	O	B	O	B	O	C	O	B	O	O	O	B	C	B
12	A	A	C	C	C	C	C	C	O	C	C	B	A	B
13	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	O	O	O	O
Resumen	B	B	B	B	C	C	C	B	B	C	C	B	B	C

Tabla 6.10 Resultados de estudiantes de FEUP sobre el proceso de transformación

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	C	B	B	C	B	B	C	B	C	B	B	B
2	C	C	C	C	C	C	B	C	B	C	C	C	C
3	C	O	O	O	B	C	B	C	O	C	B	O	O
4	B	C	C	C	C	C	O	O	C	O	B	C	C
5	C	B	C	O	C	B	B	B	O	B	B	C	C
6	C	B	O	B	C	C	C	C	B	B	C	C	C
7	C	B	C	B	B	B	C	B	B	C	B	B	O
8	C	O	O	A	O	O	C	O	B	C	C	C	O
9	C	C	O	B	B	B	B	O	C	B	B	B	O
10	C	A	C	B	C	C	B	O	B	C	C	B	C
12	C	B	B	O	B	C	O	B	B	B	A	C	B
13	C	O	C	O	C	O	O	O	C	O	C	C	O
Resumen	C	B	C	B	C	C	B	C	B	C	B	C	C

Tabla 6.11. Resultados de estudiantes de FFPUB sobre el proceso de transformación

Los resultados comparativos de las respuestas de los estudiantes en porcentajes sobre el proceso de transformación son las que presentamos en la tabla 6.12.

Grados de conocimientos sobre el proceso de transformación	FE-UP n=14	FFP-UB N=13
A. Reconoce transformación como concepto matemático – evidencia de dependencia funcional, de propiedades importantes y diferencia entre movimiento y transformación	0%	0%
B. Conocimiento correcto del proceso de transformación, como cambio o desplazamiento sin evidencia de propiedades importantes	8 o 57%	5 o 38%
C. Conocimiento débil o incorrecta del proceso de transformación. Transformar significa un cambio no bien definido.	6 o 43%	8 o 62%

Tabla 6.12.Comparación sobre el proceso de transformación

La característica distinguida entre participantes de FEUP y de FFPUB es que los estudiantes de FEUP muestran el conocimiento de un nivel más alto que los de la FFPUB. La mayoría de los participantes de FEUP consiguen un nivel medio de reconocer el proceso de transformación que nos es el caso de FFPUB. Otra característica es que los participantes de FEUP muestran un nivel más bajo de conocimiento del proceso de proyección (5 de total 14), mientras que los de FFPUB muestran un nivel más alto (6 de total 13).

A partir de las observaciones y análisis correspondientes de las producciones escritas en las respuestas de la prueba inicial llegamos al siguiente resultado:

Resultado 6.3.12. *No encontramos estudiantes en el grado superior de conocimiento sobre los procesos dinámicos de transformación. El caso más explicitado en ambos grupos es la rotación. En las explicaciones correspondientes identificamos que los rasgos descriptivos son predominantes. Identificamos que las explicaciones del grupo de Kosovo de grado intermedio, son más precisas matemáticamente que las correspondientes del grupo de Barcelona.*

En efecto, sorprende que ante problemas como el 9 y 10, algunos estudiantes considerados buenos no consigan expresar la transformación geométrica como idea funcional dinámica. Tan sólo en la situación que evoca la rotación de una puerta, se identifica la rotación como proceso. Parece, pues, que se trate de los pocos ejemplos en los que se percibe el movimiento en el mundo real como análogo del significado del movimiento matemático, siendo que a cada posición de la puerta, le correspondiera un giro en el espacio de un número de grados determinado.

> ”*Estas imagenes, en la clase de matemáticas nos sirven para explicar el circulo, el radio, el diametro, los ángulos circulares y tambien nos sirven para explicar el sentido de la rotación*...”.
>
> (Ad, p1: 3)

La alumna no usa una terminología adecuada para describir el movimiento, puesto que no es lo mejor hablar de vectores, pero los elementos que menciona evocan el movimiento entendido en sentido funcional, en una construcción hipotética condicional.

> “...si *el eje C se mueve hasta el eje A, entonces esos dos vectores cambian de posicion*”
>
> (Ad, p1: 5)

A continuación refleja elementos abstractos de la transformación.

> “*...si se mueve un eje, se moveran todos los otros, alrededor del centro*”.
>
> (Ad, p1: 10)

En los problemas 5B y 6B (bordados y mosaico) la misma estudiante no consigue explicar la relación entre la figura (bordado, mosaico) y el proceso geométrico en el sentido matematico y preciso.

> “...*en el papel transparente dibujaria una hoja, un cuadrado y lo **giraria** hasta formar (ganar, tener) toda la imagen del bordado*”
>
> (Ad, p5: 5)

En efecto, no consigue precisar el angulo de giro, alrededor de que punto o eje, etc. En otras situaciones como el problema 9, quizás no quiere dar una respuesta intuitiva, y por esto prefiere no decir nada. Como no tiene formacion sobre proyecciones durante su carrera escolar anterior[2], ella tampoco responde al problema 10, pero muestra un grado alto en la respuesta del problema 12. En efecto, como muestra la fig.6.13, siente la necesidad de nombrar los vértices del triangulo, y a continuacion expresa la dependencia funcional entre las posiciones de los mismos:

> ”*... primero se ha hecho el desplazamiento del punto A, y **duranto el movimiento** del punto A, el punto B y el punto C toma la posición presentado como en la figura*...”
>
> (Ad, p12: 7-8)

[2] Conocimientos sobre proyecciones no ha recibido durante su carrera anterior (educación primaria, secundaria y de asignaturas de matemáticas en la FEUP).

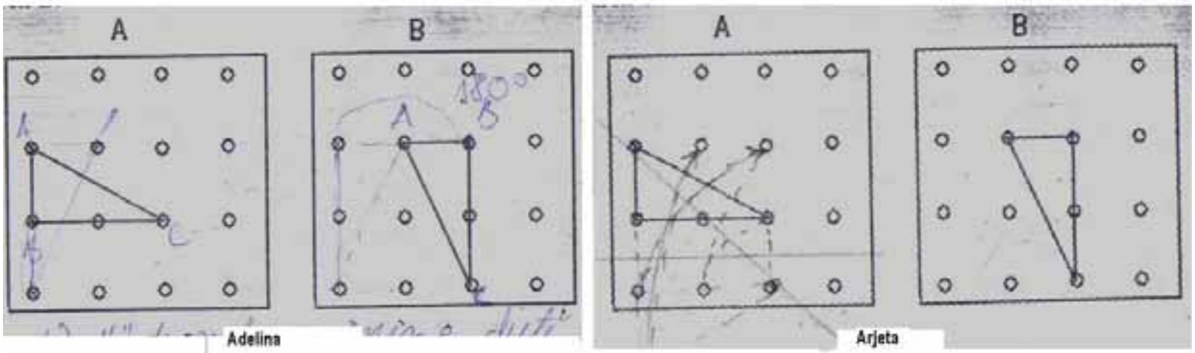


Fig. 6.13. Representacion de Ad y Ar sobre el proceso de transformacion de la figura A en la B.

Así, construye la idea de rotación como una aplicacion de tres puntos en otros tres puntos bajo la condicion:

> "*asi que el punto C ha salido de la columna del punto A una fila mas abajo, el punto B ha salido en el lugar del punto A*".
>
> (Ad, p12: 10)

El segundo paso de este proceso sera indicar la simetria axial con el eje de simetria en el lugar del espejo.

> " lo *veriamos mejor si imaginamos un espejo puesto en la columna del punto A, donde el punto A no se refleja (mueve) y en cambio, los puntos B y C se reflejan*".
>
> (Ad p12: 11)

En el mismo problema, otros estudiantes como Ar explican la transformacion del triangulo A en el triangulo B como aplicacion de dos posiciones y mediante dos simetrias axiales (figura 6.13-Arjeta)

En otros casos el funcionamiento de la puerta, no evoca la transformación directamente, sino que se alude a lo contextual, por encima de la descripción del proceso. En efecto, para Ar, si bien se identifica la rotación como transformación que conserva el tamaño, la puerta nos ayuda a "*aprender sobre los cíículos y la rotación*" aunque sin explicar el proceso de "rotando", sin identificar las características del movimiento

> "*la puerta funciona rotandose respecto a su eje, aqui tenemos que ver con la rotación*"
>
> (Da, p1: 3)

La respuesta de este estudiante ante el problema 10 y 12, muestra que Da no tiene claro la proyección como proceso que transforma un triangulo en otro triangulo:

> "*se hace mediante la rotación el cual puede ser en diversas maneras*".
>
> (Ar, p 1: 2)

Así, los estudiantes de UP que hemos cualificado de nivel intermedio, identifican la transformacion isométrica como desplazamiento de los elementos necesarios de la figura, identificando mayoriamente sólo las propiedades de conservacion de la forma y tamaño. Domina en sus explicaciones el caso de la rotación.

En cuanto al nivel bajo de respuestas en FEUP algunos estudiantes sólo evocan la realidad del fenómeno sin ninguna evidencia del contenido procesual

> *"No es la misma porque podemos coger la tiza y la giramos encima de la mesa que es una transformación, en cambio el movimiento es cuando una cosa la movemos de un sitio a otro sito".*
>
> *(Se, p9, 5)*

En otros casos, se muestra un conocimiento débil e incorrecto del proceso de transformación y del concepto de movimiento:

> *" El movimiento es cada cambio de sitio de un sitio a otro, como por ejemplo el andar, el movimiento de la mano, etc., la misma cosa es la transformación."*
>
> *(*Xh, p9; 7)

Para estos estudiantes de UP transformar significa un cambio no bien definido o un desplazamiento sin explicación adecuada. Otros identifican la rotación y traslación como desplazamiento, pero no como una transformación del conjunto de puntos. Isometría se comprende como cambio de posición, son capaces de realizar traslaciones y rotaciones con materiales concretos, mientras realicen transformación simétrica de figuras utilizando el proceso de plegado o doblando.

También en el grupo de la UB, el fenómeno de la puerta, ofrece la posibilidad para mostrar los conocimientos de la rotación como proceso isométrico en grado intermedio.

> "*Las fotos y las imágenes permiten ver cuál es el ángulo de giro de las puertas… en ellos observamos cómo nos indican el centro de la puerta y las medidas indicadas con letras.*"
>
> (Ol, p2 :5)

Y en ese caso, esta estudiante alude al contenido matemático formal que seguramente ha aprendido.

> " *El movimiento de la puerta representa una isometría que se puede entender como movimiento rígido. Para que esto ocurra el giro debe mantener el centro en una posición y además se indica el ángulo de giro p.e. 90º.*"
>
> (Ol, p2:8)

Además de esta explicación, ella es capaz de mostrar con el dibujo el proceso de rotación presentando tres momentos del proceso como en la figura 6.13.

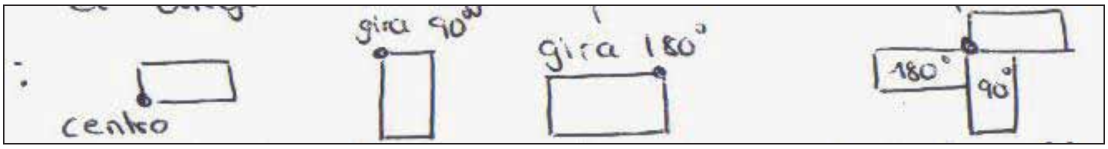


Figura 6.14. Explicación de Ol sobre el proceso de rotación

Mc respondiendo en el mismo problema (3) identifica la rotación como desplazamiento de los elementos de la puerta destacando el ángulo, el eje de rotación y la "hoja" de la puerta:

> "*Esta puerta giratoria tiene un eje de rotación central por lo tanto la "hoja" de la puerta se desplaza a lo largo de la circunferencia. Esta está formada por el radio de la hoja de la puerta. El número de particiones dependerá del ángulo descrito en cada momento "*
>
> (Mc, p3:7)

Tener claro la diferencia entre transformación geométrica y movimiento significa reconocer la transformación geométrica como concepto matemático, y pocos estudiantes parecen tenerlo claro, como sucede en el caso siguiente

> *Yo por movimiento entiendo... En cambio la transformación es cuando tengo un objeto e imagen y la hago transformarse, bien sea desplazándola como en el gráfico anterior o haciendo transformaciones equivalentes (lejos - cerca) afines o proyecciones".*
>
> *(Ol, p9:9)*

Esta interpretación de la diferencia entre el movimiento y la transformación nos ayuda de entender que la transformación es un proceso más amplio que el movimiento. En la realidad, las transformaciones isoperimétricas de un rectángulo en otro con el mismo perímetro (cuando es posible no "mover" todo el rectángulo sino una parte), homotecias y proyecciones, no es posible interpretar como movimiento. La respuesta del problema 12 por parte de Ol nos muestra que ella, no sólo que reconoce la transformación como concepto matemático, sino es capaz de explicar matemáticamente el proceso destacando los dos pasos (figura 6.14) correspondientes:

> "*Los pasos a seguir a llegar de A a B son: 1. La figura A sufre una asimetría (movimiento rígido manteniendo el centro), y 2. La figura resultante de la asimetría sufre una simetría axial...*"
>
> (Ol, p12;4)

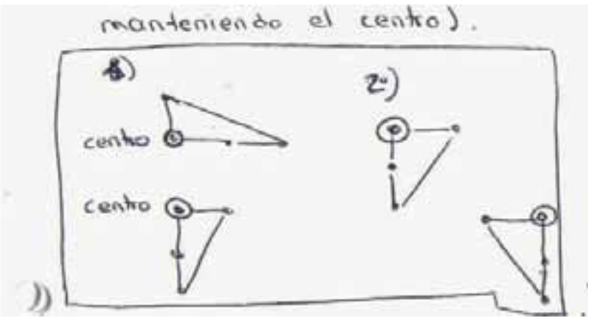


Figura 6.15. La explicación de Ol para el producto de transformaciones

Comparativamente las respuestas de varias estudiantes de UB ante el problema 10 muestran la capacidad de reconocer correctamente el proceso de transformación isométrica como desplazamiento, el proceso de deformación en función de acciones y el proceso de proyección como dependencia funcional entre elementos de proyección.

Ol	Mo	Mc	Jo	Di
La sombra variará dependiendo de la posición, en el primer escalón la sombra será igual o inferior nuestro tamaño, en cambio al subir al tercer escalón la sombra será más alargada y deforme. Esto se debe a que la sombra habrá sufrido una transformación.	La sombra será igual de larga e igual de forma y tamaño. Decimos que se trabaja con proyecciones porque se necesita una fuente de luz hacia un cuerpo opaco para que se de el fenómeno de sombra.	… mi forma propia se ha transformado en mi sombra al ser proyectada en el suelo por el efecto de la luz y el ángulo de incidencia sobre mí.	Dependiendo de donde este la persona colocada en la escalera y lo que haya alrededor, la sombra sufriría diferentes modificaciones, pero si la persona solo sube tres escalones y se queda quieta, la sombra será la misma que la del primer escalón, …	Porque las sombras crecen cuando un foco de luz incide sobre un cuerpo y éste se proyecta en un fondo opaco. Si no tendríamos un foco de luz ni un fondo opaco, no tendríamos sombra. Dependería también desde donde nos incidiera el foco, ya que si lo hiciere perpendicularmente a nuestra cabeza, es decir, en el eje de la cabeza no proyectaría ninguna sombra.

A base de estas afirmaciones se ve que todas estas estudiantes son capaces de identificar la dependencia (funcional) entre la fuente de la luz, objeto que se proyecta (transforma) y el resultante que es la sombra. Otros van más allá identificando el lugar de intersección de la sombra.

6.3.4. Sobre comunicación y razonamiento con transformaciones

Recordemos que por razonamiento entendemos la habilidad de desarrollar un argumento lógico, acciones y efectos de discurrir para ordenar las ideas en la mente con el fin de llegar a una conclusión.

Ahora nos interesa reconocer las formas de operar con ejemplos genéricos, ejemplos aislados, analogías, simbolización y argumentaciones en cuanto se use uno u otro tipo de argumentación.

Distinguimos tres grados de capacidades en los estudiantes – futuros profesores de primaria sobre la habilidad lógica, la comunicación expresión y la aplicación con transformación geométrica:

Grado A. Aporta normalmente una justificación-argumentación deductiva correcta con una simbolización adecuada, usando reglas y propiedades explícitas y apoyándola en otras proposiciones conocidas.

Grado B. Comprueba la proposición con al menos un ejemplo sin errores significativos y en algún caso mediante, alguna justificación de tipo deductivo.

Grado C. Sólo hay razonamientos de tipo intuitivo con visualización del fenómeno sin explicitación justificativa, o se observan alusiones de tipo naíf.

Grado O – Sin respuestas o explicitaciones sin valor argumentativo de ningún tipo.

Los resultados de la asignación correspondiente para los estudiantes de FEUP las presentamos en la tabla 6.16. En la tabla 6.17, se muestran los correspondientes resultados de los estudiantes del grupo UB.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	C	C	C	C	C	C	C	O	C	B	B	C
2	B	B	C	C	C	C	B	C	C	C	C	B	C	C
5	C	C	B	C	C	C	C	C	C	C	C	B	B	C
6	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C
8	O	C	O	C	O	O	C	O	C	O	C	C	C	B
9	O	B	C	B	C	B	C	C	C	C	C	C	B	C
10	O	C	O	C	O	C	C	C	O	O	O	C	C	C
11	C	C	C	C	C	C	C	C	O	O	C	C	O	O
12	B	B	C	C	C	C	C	C	O	C	C	C	C	C
13	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	O	O	O	O
Resumen	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C

Tabla 6.16 Resultados de estudiantes de FEUP sobre comunicación y razonamiento en PI

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
2	C	C	C	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C
5	B	B	B	C	C	C	B*	B	O	C	B	B	C
6	C	B	O	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C
8	C	O	O	A	O	O	C	O	C	C	C	C	O
9	C	C	O	C	C	C	C	O	C	C	C	B	O
10	C	B	C	C	C	C	B	O	C	C	C	C	C
11	C	C	O	O	C	C	O	O	C	O	C	C	O
12	C	C	B	C	B	C	O	A	B	B	A	C	C
13	C	O	C	O	C	O	O	O	C	O	C	C	O
Resumen	C	B	C	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Tabla 6.17 Resultados de estudiantes de FFPUB sobre razonamiento en PI

A partir de las asignaciones dadas, podemos reconocer las diferencias entre los dos grupos de estudiantes en la tabla que se presenta a continuación.

En forma de tabla 6.18 presentamos los resultados en porcentaje sobre conocimientos iniciales de comunicacion y razonamiento con transformaciones, para los dos grupos de participantes de la investigacion.

Grados de conocimientos sobre comunicación y razonamiento con transformaciones	FE-UP N=14	FFP-UB N=13
A. Aporta una justificación-argumentación correcta con una simbolización adecuada, usando reglas y propiedades explicitas y apoyándola en otras proposiciones conocidas.	- – 0%	_ - 0%
B. Comprueba la proposición con al menso un ejemplo, sin errores significativos, alguna justificación correcta.	2 - 14%	2 - 15%
C. Solo hay visualización del fenómeno sin explicitación justificativa, falta de compresión de la tarea planteada.	112– 86%	11 – 85%

Tabla 6.18. Comparación sobre la comunicación y el razonamiento con transformaciones

A partir de los datos y respuestas observadas podemos concluir el siguiente resultado.

Resultado 6.3.13. *Ninguno de los estudiantes de la FEUP ni UB no consigue el grado alto de capacidades de aportar justificaciones correctas y argumentaciones basados en simbolizaciones adecuadas, apoyándolas en otras proposiciones conocidas. Algunos estudiantes de ambos grupos consiguen dar argumentos para establecer conexiones. Dominan las argumentaciones de tipo figural.*

Veamos a continuación como se usan distintos tipos de argumentos. Algunos estudiantes muestran la capacidad de establecer conexiones entre distintas formas de representar ideas geométricas. Así, Ad establece razonadamente de forma gráfica (figura 6.11) comparación de simetría con el espejo

> "*en el segundo paso, se ha hecho una transformación cual mejor lo veríamos si imaginamos un espejo puesto en la columna del punto A".*
>
> (Ad, p12:-5)

Con su argumentación ella nos convence de que se trata del producto de dos transformaciones que transforma la figura A en la Figura B. La primera transformación la justifica estableciendo conexión entre representación grafica del proceso:

> "*el desplazamiento del punto A, y durante el movimiento del punto A el punto B y el punto C cogen posición presentado en la figura…*"
>
> (Ad, p12;7)

y la segunda transformación se justifica poniendo conexión entre la simetría y el espejo; finalmente la respuesta está justificada utilizando una simbólica correctamente – nombrando vértices del triangulo, dibujando la imagen del primer transformación etc.

En el grupo de UB observamos razonamientos adecuados en algunos momentos. Uno de los problemas que ofrecen buenos argumentos es el de las puertas.

> "*Esta puerta giratoria tiene un eje de rotación central por lo tanto la "hoja" de la puerta se desplaza a lo largo de la circunferencia. Esta está formada por el radio de la hoja de la puerta. El número de particiones dependerá del ángulo descrito en cada momento."*
>
> *(Mc, p2:6)*

En su explicacion se ve que la puerta funciona haciendo la rotación respecto al eje que está en el centro, describiendo una circunferencia con el radio igual a la "hoja" de la puerta, y esta rotación se realiza en diferentes angulos en cada momento. El funcionamento de la puerta está justificado con la utilizacion de conceptos geometricos: rotación, circunferencia, radio, ángulo, etc. Mc establece la comparacion entre el funcionamiento de la puerta y la rotación espacial correctamente.

En algunas respuestas, se muestran tentativas de generalización adecuadas. La justificación y argumentación correcta que "la traslacion es producto de dos simetrias" (problema 8) la encontramos en la respuesta de Jo. En este caso ella utiliza sólo representacion simbólica y gráfica de su razonamiento, dibujando un ejemplo de transformacion de un triangulo ***a*** en el triangulo ***a'*** con "simetria I" y luego transformacion del triangulo ***a'*** en el triangulo ***a''*** con la "simetria II" las cuales junatos presentan una "traslacion" que ya hemos comentado. En este caso Jo quiere generalizar la propiedad de traslacion como producto de dos simetrias (con los ejes paralelos) a partir del ejemplo dibujado. Lo unico que falta es la demostracion deductiva de la afirmacion.

Resultado 6.3.14. *En algunos casos se muestran las dificultades en expresar verbalmente razonamientos deductivos sobre la transformación como proceso.*

Así, Ad nos presenta que con una rotación y una simetría se transforma la figura A en la figura B, Ar consigue convencernos que dicha transformación de la figura A en la figura B es posible realizar con dos simetrías. Ar establece una argumentación basada en la representación grafica dibujando el eje de la primera simetría que es una simetría con el eje que pasa por el vértice del triángulo en la figura A, así que están presentadas las imágenes de otros dos vértices (figura 6.11-Ar).

Resultado 6.3.15. *En general en ambos grupos se da un nivel bajo de capacidades de futuro profesor para razonar, justificar, argumentar, comunicar y expresar el proceso de transformación geométrica.*

Ilustraremos este resultado con algunos ejemplos: Antes del problema 5, Fi no consigue identificar la parte generadora del bordado pero intenta responder a la segunda parte de la pregunta "cómo se llaman las transformaciones que conservan forma y tamaño..." diciendo que son "*desplazamientos"*. Según las esquemas de Viner (capitulo 3), Fi intenta construir la imagen del concepto de "transformacion que conserva la forma y el tamaño pero cambia la posicion" a base de deducción formal. El razonamiento deductivo de Fi demuestra la verdad de su respuesta como derivación *necesaria* de su premisa que en este caso es "cambio de posición". Fi no es capaz de destacar la dificultad que se suma en la geometría y que es: interjuego entre lo particular de las representaciones y lo general de los conceptos. Esta relación entre la experiencia visual y el razonamiento lógico resulta imprecisa para los estudiantes de modo que llegan a pensar que tal experiencia es equivalente a la demostración. Él está convencido que "desplazamiento" es igual que "rotación" y "traslación", respondiendo en la misma pregunta en el otro problema 6 (del mosaico) diciendo:

> *"y en este caso tenemos tambien desplazamiento, donde a traves de desplazamientos se obtiene todo la figura".*
>
> (Fi, p6; 5)

Así, consideramos que estudiantes como Fi son capaces de visualizar el fenómeno y hacer una descripción no siempre correcta del fenómeno.

> "*y movimiento que es un cambio de posicion del objeto, es en una manera transformacion*"
>
> (Fi, p9: 3)

En algunos pocos casos, se identifica la rotación a base de la intuición de obtener la imagen del bordado que determina el hecho de girar la parte generadora, y luego se vuelve a recordar que esto es rotación.

> *"...en una hoja dibujaran la parte de la figura la cual la giraran para que se obtiene la imagen entera. Asi se verá la rotación".*
>
> (Vj, p5: 4-5)

Según Vinner, no se da deducción formal porque por ejemplo no se muestra el centro de rotación y del ángulo de rotación como características. Aunque se vea una imagen tridimensional en el cuadro del problema 6, se alude a la repetición sin características específicas

> *"...es sólo una parte que se repite (ha dibujado una cara del cubo) pero en todo el mosaico aquello se ha rotado en 3 direcciones..."*.
>
> (Ad, p6;5)

En el problema 4 para evaluar el conocimiento de sentido de la rotación, Dr elije el ejemplo de "*la obertura de la ventana o de la puerta*" sin justificar que elementos de rotación se valoran y sin justificar por qué este ejemplo es un buen ejemplo. En otro caso, se da sólo la visualizacion del fenómeno sin dar la explicaciones necesarias y justificar los hechos. Así, para justificar la rotación se dice:

> "*como parte que se repite es el interior, la hoja y el cuadrado*".
>
> (Xh, p5; 4)

En el caso de UB, también encontramos grado bajo de capacidad de razonar y falta de justificaciones en la mayoria de los problemas. Así, en el problema 6 donde se pide encontrar y marcar la parte que se repite, y utilizando el papel transparente mostrar traslacion, Li responde: "...*la parte que se repite es el cuadrado*" sin marcarla o describir de qué cuadrado se trata, sin justificar de que con este cuadrado se puede obtener todo el mosaico.

En el problema 8 donde se pide explicar la traslación como producto de dos simetrias, Al justifica que esto "*se puede explicar con un dibujo simple:*" dibujando la figura 6.19, donde se presenta un ciículo mediante dos semicírculos que es una rotación, pero en ningun caso la traslación.

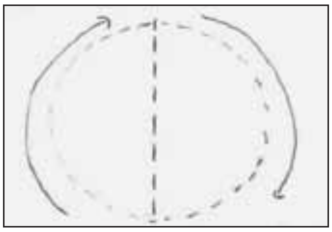


Figura 6.19 Al justifica que el producto de dos simetrías axiales es traslación

El mismo grado se presenta en la respuesta de Al al problema 12 poniendo que: "*los lados del triangulo han cambiado dado a que la posicion es diferente*" sin justificar el cambio, sin explicar como esta hecho este cambio, en que se afectua este cambio, etc.

6.3.5. Sobre los elementos culturales e históricos

En este apartado analizaremos las respuestas de la Prueba Inicial de los futuros profesores de Primaria sobre el uso del contexto en la construcción del significado de transformación geométrica en los diferentes grupos (la de Kosova y Catalunya) y de alumnos diversos. Buscamos reconocer qué prácticas matemáticas piensan los participantes que puedan traer desde su experiencia personal a partir de las cuales se puede construir un conocimiento eficaz sobre transformación geométrica.

Agrupamos las producciones de los participantes de la Prueba inicial según los grados siguientes:

Grado A. Identifica y usa contextos relacionados con transformación geométrica. Aprovecha lo histórico – cultural para integrar la comprensión, razonamiento y estructuración de transformación geométrica.

Grado B. Reconoce algún contexto o elementos histórico-culturales asociados a significados de la transformación geométrica. Hay indicios de contextualización mediante ejemplos, propiedades o significados.

Grado C. Usa términos matematices adecuados a los elementos culturales pero sin ejercer una contextualización completa. No relaciona significados culturales para las concepciones sobre transformación geométrica.

Grado O – Sin respuestas o respuestas sin significación.

A continuación presentamos los resultados de clasificación de las respuestas de los participantes de FEUP según grados de utilización y realización de elementos culturales en la construcción de significado de transformación geométrica, en la tabla 6.19, y posteriormente, presentamos los resultados del grupo FFPUB en la tabla 6.20.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	C	B	B	B	C	B	C	O	C	B	B	B
2	B	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C	C
3	C	C	C	C	C	C	B	C	C	B	C	C	B	C
4	B	B	C	B	B	C	B	B	B	B	B	B	B	B
5	B	C	C	B	B	C	C	C	C	C	C	B	B	C
6	B	C	C	C	B	C	C	B	B	B	C	B	B	C
7	B	C	B	A	B	C	C	B	B	B	C	C	C	C
10	O	B	O	C	O	C	C	B	O	O	O	A	B	B
11	C	B	C	B	B	B	C	C	O	O	C	C	O	O
13	O	O	O	O	O	O	O	O	O	C	O	O	O	O
Resumen	B	B	C	B	B	C	C	B	C	B	C	B	B	C

Tabla 6.19. Resultados de los participantes de FEUP sobre los elementos culturales-históricos en transformaciones

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
2	B	B	C	B	B	C	B	B	C	C	B	B	C
3	C	O	O	O	B	C	B	C	O	O	B	O	O
4	C	C	C	C	C	C	O	O	B	O	C	C	C
5	C	B	C	O	B	C	B	B	O	B	B	C	C
6	C	B	O	B	B	C	B	C	B	B	C	C	C
7	B	B	C	B	B	B	B	B	B	B	C	B	O
10	C	B	B	B	C	C	B	O	B	C	B	B	C
11	C	C	O	O	B	C	O	O	B	O	C	B	O
13	C	O	C	O	C	O	O	O	C	O	C	C	0
Resumen	C	B	C	B	B	C	B	B	B	B	C	B	C

Tabla 6.20. Resultados de los participantes de FFPUB sobre los elementos culturales-históricos en transformaciones geométricas

En forma de tabla 6.21 presentamos los resultados comparativos en porcentaje sobre reconocimiento de elementos culturales en la comprensión del significado de transformacion geometrica en dos facultades.

Grados de uso del contexto y elementos culturales en la construcción del significado de transformación geométrica	FE-UP N=14	FFP-UB N=13
A. Identifica y usa contextos relacionados con transformación geométrica. Aprovecha lo histórico – cultural para integrar la comprensión, razonamiento y estructuración de transformación geométrica.	- – 0%	_ - 0%
B. Reconoce algún contexto o elementos histórico-culturales asociados a significados de la transformación geométrica. Hay indicios de contextualización mediante ejemplos, propiedades o significados.	8 - 57%	8 - 62%
C. Usa términos matematices adecuados a los elementos culturales pero sin ejercer una contextualización completa. No relaciona significados culturales para las concepciones sobre transformación geométrica.	6 – 43%	5 – 38%

Tabla 6.21. Comparación sobre los elementos culturales en las transformaciones

Según la tabla 6.21 y el análisis de las respuestas de los participantes de ambos grupos, sacamos la conclusión de que los estudiantes de FFPUB muestran un grado más alto que los de FEUP en el uso de contexto y elementos culturales en el reconocimiento del significado de transformación geométrica.

Desde el punto de vista cualitativo, en base a los datos analizados, podemos constatar el resultado siguiente.

Resultado 6.3.16. *No encontramos un grado alto de aprovechamiento de los elementos culturales e históricos en el conocimiento y la explicación de significado de transformación. No llega a la mitad los estudiantes que reconocen la importancia del contexto en la comprensión de transformaciones geométricas, usan términos matemáticos adecuados a los elementos culturales pero no ejercen una contextualización completa*.

Vemos que se identifica la idea de transformación como cambio o relación en expresiones como "*obtener…a partir de*" o reconocer la relación entre.

En FEUP el contexto se usa en las explicaciones de los estudiantes en los procesos de transformación geométrica.

> *"...los alumnos verán cómo se obtienen diferentes figuras geométricas a partir de diferentes cuerpos, por ejemplo, el cuadrado, el rectángulo, círculo. La intersección de un cilindro con un plano paralelo con la base del cilindro es un círculo..."*
>
> (Vj, p1:9)

Nuestros participantes identifican estas propiedades en los ejemplos de un contexto de la vida cotidiana que relacionan rápidamente con conocimiento geométrico. En la respuesta de Da, además esto, reconoce y "*la relación entre figuras planas y espaciales*", mientras Vj identifica el proceso de "*obtener el cilindro a partir de una superficie plana"*.

Resultado 6.3.17. *No se usan en general las propiedades de las transformaciones a partir del contexto.*

Algunos estudiantes, identifican propiedades a partir de los ejemplos. Tal es el caso de la rotación.

> "*...de manera muy concreta se puede explicar a los alumnos muchas propiedades de la transformación matemática, la rotación, la simetría, la conservación del perímetro donde se abre la puerta...."*
>
> (Sh, p2:7)

y en otro momento

> *"la puerta funciona rotándose sobre un eje. Matemáticamente tenemos un giro completo de 360^0. Este movimiento es rotación en espacio respecto al eje*"
>
> (Sh ,p2:9)

Respondiendo en el problema 4, casi todos participantes eligen ejemplos de diferentes contextos para evaluar el sentido de rotación.

En el problemas 5 donde se pide encontrar el elemento generador de un bordado kosovar, todos los participantes de FEUP consiguen identificar diferentes elementos generadores del bordado (figura 6.22), y afirman que la repetición es como proceso de obtener todo el bordado.

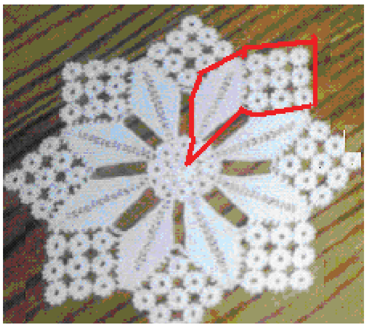


Figura 6.22. Identificación de elemento generador del bordado

Sólo la mitad consiguen identificar la transformación (rotación como proceso de obtener todo el bordado) y algunas de sus propiedades aludiendo al hecho que el bordado se considera como una figura geométrica:

> "(el bordado) *tiene tres partes que se repiten 8 veces. Para obtener todo el bordado, dibujaría en una hoja estas partes y lo giraría hasta que obtengo toda la figura…*"
>
> (Ad p5, 5-6)

Al reconocer el elemento generador de una transformación domina la percepción figural de los dibujos planos en los estudiantes de bajo nivel, sin evidenciar cómo se produce el proceso de generación en el contexto. Para unos es un cubo (tridimensional), y para otros es una figura plana (un polígono como se ve en la figura 6.22., o un cuadrilátero).

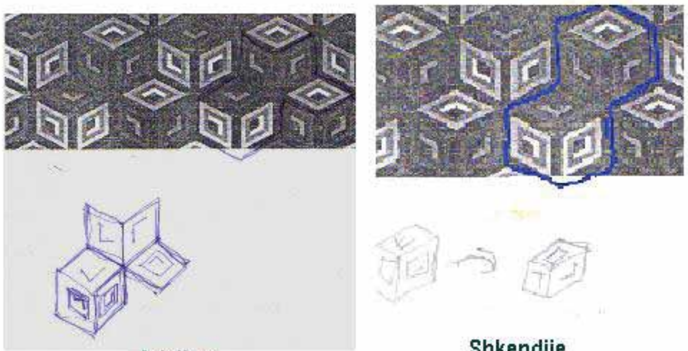


Figura 6.23. Identificación del elemento generador del mosaico por Ad y Sh

Para presentar ejemplos de simetría y semejanza (problema 7), la mayoría de los participantes (8 de total 14) de la Prueba elijen ejemplos contextualizados. Otros 6 participantes (Ar, Fit, Pe, Sh, Vj y Xh) elijen figuras geométricas como objetos de explicación del sentido de simetría y semejanza. Entre ejemplos contextualizados elegidos son: casas, pelotas, libros y libretas, partes del cuerpo humano, y las letras del alfabeto.

En el problema 10 tenemos la identificación de la sombra como transformación del cuerpo humano por parte de mayoría de participantes de la prueba. Además esto, Fit identifique y la propiedad importante de proyección, el fenómeno de cambio de la sombra según posición de la fuente de la luz:

> *"La sombra es transformación de la persona y la sombra se proyecta diferente dependiendo de la luz".*
>
> *(Fit, p10:7)*

Las imágenes de edificios y figuras arquitectónicos nos muestran que no sirven para nuestros participantes de UP en la explicación de propiedades relevantes de transformaciones geométricas.

En el caso de FFPUB analizando las respuestas del problema 1, se ve que todos participantes aprovechan de la realidad que nos rodea para la comprensión y descripción de las figuras planas y espaciales, la relación entre estos. Unos consiguen interpretar el proceso de rotación como desplazamiento, deslizamiento o movimiento, y en el caso de Li tenemos la proyección de cuerpos en el plano.

Algunos estudiantes valoran la necesidad de observar representaciones de objetos reales del entorno

> "*Trabajaríamos los polígonos iguales llamados bases situadas en planos paralelos, la geometría. Se quieren evaluar las formas geométricas y asociarlas con la realidad que nos rodea.*
> *Para que se acostumbre a observar figuras, medir, comparar e ir haciendo sus conjeturas y todo esto trabajando en el espacio geométrico*".
>
> (Jo,p 14:7)

En la tabla siguiente (6.24) mostramos los significados asociados al proceso de rotación como movimiento o desplazamiento

Mo	*Mc*	*Jo*
*"La propiedad de **deslizamiento** utilizando objetos redondos, cilíndricos, sin lados planos para que rote mejor y sea más fácil deslizarse."*	*"La capacidad de rotación de los cuerpos cilíndricos. Como se puede **desplazar** un objeto cilíndrico. Los cuerpos cilíndricos con una fuerza externa se desplazan con facilidad cambiando de lugar. Se desplazan sobre sí mismos, rodeando".*	*"La propiedad que se utiliza es la rotación, ya que los objetos que se mueven tienen forma cilíndrica lo que permite que rueden sobre su propio eje".*

Tabla 6.24. Diferentes interpretaciones de rotación en base del contexto

Algunos estudiantes identifican el proceso (transformación) de obtener una figura a partir de un cuerpo

> *"...se quiere enseñar que formas geométricas planas constituyen las bases de los cuerpos en volumen que se muestran*"
>
> (La, p5:6)

Mientras que otros estudiantes identifican el proceso inverso, la conversación de la figura plana en la espacial:

> "*La relación existente entre figuras planas y volúmenes. Cómo podemos hacer para convertir una figura plana en un volumen... El saber reconocer los planos inscritos en volúmenes, conocer la forma que presentan los diferentes volúmenes al ser colocados sobre una superficie plana."*
>
> *(Mc, p5:7)*

En ocasiones se reconoce el uso de recursos reales materiales para identificar en ellos las transformaciones.

> *"Las fotos y las imágenes permiten ver cuál es el ángulo de giro de las puertas. En la fotografía se aprecia el espacio útil que tiene la persona para entrar o salir. Los dibujos son más técnicos y por tanto están más relacionados con las matemáticas, en ellos observamos cómo nos indican el centro de la puerta y las medidas indicadas con letras"*.
>
> (Ol, p2:7)

Pocos alumnos identifican mediante representaciones las características de las isometrías. El caso que más se alude es la rotación y su sentido.

> *"El movimiento de la puerta representa una isometría que se puede entender como movimiento rígido... Se podría representar por ejemplo..."*
>
> *(Ol, p4:9)*

En el problemas 5 donde se pide encontrar el elemento generador de un bordado kosovar, la mayoría (excepto dos de total 13) de los participantes de FFPUB consiguen identificar diferentes elementos generadores del bordado. Tenemos dos formas de identificación del elemento generador: uno es como parte del bordado, y otro es considerando el bordado como figura geométrica (figura 6.22). Seis participantes consideran elemento del bordado, y cinco consideran elemento de la figura geométrica.

Resultado 6.3.17. *En pocos casos se usa el contexto en el reconocimiento de procesos constructivos sobre transformaciones.*

En algunos casos la cultura sirve para vehicular procesos constructivos

> "*Calcas la parte que se repite en el papel transparente. Después vas moviendo el papel por sobre el bordado y los niños se dan cuenta que las otras partes caben dentro de la línea dibujada (el papel transparente)….*"
>
> (Na, p5:7)

Para presentar ejemplos de simetría y semejanza (problema 7), todos los participantes de la FFPUB eligen ejemplos contextualizados. Entre ejemplos contextualizados elegidos son: mandarinas, partes del cuerpo humano, arboles, zapatos, casas o monumentos, pelotas, libros y libretas, mariposa, retroproyector, los planetas y las letras del alfabeto. En el caso de las proyecciones, las sombras son el ejemplo más evocado.

> "*…las sombras crecen cuando un foco de luz incide sobre un cuerpo y éste se proyecta en un fondo opaco. Si no tuviéramos un foco de luz ni un fondo opaco, no tendríamos sombra. Dependería también desde donde nos incidiera el foco, ya que si lo hiciere perpendicularmente a nuestra cabeza, es decir, en el eje de la cabeza no proyectaría ninguna sombra".*
>
> (Di ,p7:9)

Otros identifican el fenómeno de la sombra, pero no son capaces de dar alguna descripción o explicación de alguna propiedad de proyección.

En diversos casos, las formas estéticas del mundo del arte no se identifican como transformaciones.

6.4. Conocimientos iníciales sobre componente estratégico en la formación de profesores

Hemos visto en el capítulo 3, que diferentes investigaciones han tenido como objetivo caracterizar cuáles son las componentes del conocimiento de los profesores. En el estudio de las componentes de los conocimientos en Matemáticas encontramos propuestas específicas como las de Bromme (1994), Ernest (1989), Fennema y altr.(1989). En la mayoría de estas propuestas encontramos, las concepciones que los individuos tienen sobre la Matemática y su enseñanza-aprendizaje como referencia del conocimiento de los profesores.

Estas propuestas siguen los modelos que toman como base a Shulman (1986). Así en ellas se consideran como componentes del conocimiento de Matemáticas: el conocimiento que surge desde las Matemáticas, conocimientos de enseñanza-aprendizaje de esta materia y el conocimiento curricular, así como otros conocimientos de índole general de carácter didáctico o pedagógico.

Para Bromme (1988) en el conocimiento didáctico del contenido, que es considerado como una parte esencial del conocimiento del profesor, se parte de las concepciones de los profesores sobre *para qué* enseñar un contenido. Fundamentalmente consiste en buscar la representación más adecuada del conocimiento de la materia que se quiere enseñar, elegir el método más oportuno y adaptarlo al nivel de los alumnos.

Las distintas orientaciones teóricas tienen en la base de sus estudios el convencimiento que la actuación posterior de los profesores "*depende notablemente de cómo interpretan su entorno escolar, qué metas persiguen y cómo aprovechan y califican las informaciones que se ponen a su disposición.*" (Bromme, 1988, 22).

El modelo de Ernest (1989) es un modelo analítico en el que se delimitan los conocimientos, creencias y actitudes de los profesores sobre las matemáticas que condicionan toda su actividad profesional. Este autor considera la creencia como la información que una persona acepta como verdadera, y las actitudes como los sentimientos generales hacia algo, ya sea positivo o negativo. De esta forma las creencias influyen en las actitudes y las dos influyen en la conducta del profesor (Koballa y Crawley, 1985; Ernest, 1989).

Fennema y altr. (1989) aportan una alternativa distinta al considerar las componentes del conocimiento de los profesores de una forma integrada. Es decir, no se pueden separar las concepciones y el conocimiento, éstos están situados dentro de un contexto que da forma a las componentes del conocimiento. Para estos autores el reconocimiento del carácter dinámico del conocimiento tiene claras implicaciones metodológicas que nos previenen contra la utilización de medidas estáticas del mismo.

Las consideraciones que se hacen en este apartado son necesarias para poder valorar y estudiar cuáles son los conocimientos sobre aspectos didactico-estrategico más significativos que tienen los estudiantes sobre la enseñanza de las transformaciones que recibieron en su escolarización anterior, y cómo ha influido dicha enseñanza en sus concepciones sobre la forma de enseñarlas. Nos interesará conocer también si los conocimientos y concepciones sobre la enseñanza - aprendizaje de las transformaciones geométricas en un contexto son acordes o contrarios a las concepciones en el otro contexto – teniendo en cuenta el contexto de Catalunya y la de Kosova.

Para ello, hacemos un análisis descriptivo y un estudio interpretativo de los conocimientos a base de las respuestas escritas de la Prueba Inicial desarrollada en ambos lugares, teniendo en cuenta las categorías y subcategorias establecidas en el capítulo 4. Este análisis de la Prueba Inicial inferirá una serie de resultados sobre los conocimientos de los estudiantes sobre aprendizaje de transformaciones, sobre instrucción, sobre la assumpcion de la actividad profesional y sobre las actitudes críticas y reflexivas.

Estos resultados son los que se toman como base para comparación con los resultados obtenidos en la Prueba Final realizada después del desarrollo de la unidad didáctica sobre aprender a enseñar las transformaciones en Educación Primaria, para que luego podemos establecer aportaciones con el fin de mejorar la formación de los profesores sobre transformaciones geométricas.

6.4.1. Sobre el aprendizaje de transformaciones.

Hacemos el análisis de los conocimientos iníciales de futuros profesores de Educación Primaria en dos lugares diferentes, que participaron en la Prueba Inicial, sobre la capacidad del futuro profesor en tener en cuenta o evocar el hecho de tratar noción de transformación geométrica (CEa1), sobre apertura y confianza para negociación docente (CEa2), y sobre la capacidad de adaptación critica y acomodación del conocimiento práctico (CEa3). Teniendo en cuenta que las capacidades de los participantes son diferentes, hemos establecido tres grados de estas capacidades: A – nivel alto, B – nivel intermedio, y C – nivel bajo.

En forma de tabla 6.25, presentamos los resultados de clasificación de las respuestas de los participantes de ambos facultados, según diferentes niveles.

Niveles de la capacidad sobre aprendizaje de transformaciones	Estudiantes FEUP	Estudiantes FFPUB
A- Utilización de esquemas relacionados de transformación geométrica y organización adecuada a las dificultades de aprendizaje de transformación, Proponiendo de situaciones de análisis/síntesis de conocimiento sobre transformación	-	Mc
B- Identificación de los procesos significativos de transformación geométrica. Atención superficial a las dificultades en aprendizaje de transformación geométrica Explicitación del progreso que quiere que hagan los alumnos	Ad Dr Fit Sh Vj	Al, Di Es, Jo Li Mo Ol
C- Identificación superficial de relaciones, dificultades y propiedades Explicitación superficial de estrategias para posibilitar el reconocimiento de diferentes razonamiento de los alumnos	Ar As Da Em Fi Pe, Re Se Xh	La Ma, Na So Yo

Tabla 6.25. Clasificación de las respuestas sobre aprendizaje de transformaciones

A partir del análisis de las respuestas sobre aprendizaje de las transformaciones por parte de los participantes de FEUP, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 6.4.1:

A base de análisis de las respuestas de los participantes de la FEUP encontramos 5 participantes (de total 14 o 36%) con un nivel intermedio de la capacidad de tratamiento de noción de transformación geométrica y adaptación del conocimiento práctico. Otros participantes (9 de total 14 o 65%) muestran la identificación superficial de relaciones, la atención superficial a las dificultades en aprendizaje de transformación geométrica, y no muestra intención de organización de actividad adecuada a las dificultades.

En el caso de FFPUB, un participante muestra alto grado de tratamiento de transformación geométrica. Siete de un total de 13 (54%) muestran la capacidad de identificar los procesos significativos de transformación geométrica, una atención a las dificultades en aprendizaje de transformación geométrica y explicitación del progreso que quiere que hagan los alumnos. Otros 5 participantes en mayoría de observaciones muestran un grado bajo de capacidad sobre tratamiento de aprendizaje de transformaciones geométricas.

Este resultado intentamos ilustrar con los ejemplos significativos encontrados en las respuestas de los participantes.

Analizando la respuesta del problema 1 de la Prueba Inicial, en el caso de Ad (FEUP):

> *"Me imagino que se ha pensado valorar que si los alumnos saben que la base de un trapezoide (cuadro) es siempre un cuadrilatero; es decir el cuadro esta construido por cuadrilateros doblados uno encima del otro. Tambien pienso que se ha pensado valorar el paralelismo."*
>
> *(Ad, p1:3)*

Podemos decir que ella tiene en cuenta el tratamiento de transformacion geometrica en las imagenes presentado en la Prueba, identificando el proceso de doblar y la propiedad de paralelismo. En este caso ella no hace una valoracion sobre grados de difiicultad de los alumnos en el aprendizaje de transformacion geometrico sino que expresa un atencion superficial. Por esto la clasificamos con el gradol intermedio. El mismo nivel de capacidades muestran Dr, Fit, Sh y Vj. Vj intenta hacer una organización de las actividades que se pueden desarrollarse con las imagenes presentadas describiendo los contenidos correspondientes:

> "*En las primeras figuras los alumnos veran cómo se obtienen diferentes figuras geometricas de diferentes cosas, como por ejemplo el cuadrado, el rectangulo, el curculo. En las figuras de mós abajo veran cómo se ha obtenido el cuerpo geometrico (el cilindro -.xh.th) de una superfucie plana. En la tercera figura se ve la intersección de un cilindro con un plano paralelo con la base, y la misma se ve en la ultima imagen".*
>
> (Vj,p1:7)

Otros participantes muestran una identificacion superficial de conceptos y relaciones sobre transformaciones geometricas y tampoco cuentan en las dificultades de alumnos en el aprendizaje de las mismas.

En el caso de FFPUB, encontramos intentos de Mc, Ma y Li en la organización de la actividad con las imagenes presentados en el problema 1, presentando los contenidos relevantes, y explicitando el progreso que quieren que hagan los alumnos, como por ejemplo Li:

> "*Primero, si saben diferenciar las diferentes figuras geométricas que hay. Después, tiene que tener claro cómo se forman estas figuras, y distinguirlas en la vida real*".
>
> (Li, p1:8)

Por otra parte, Mc con su respuesta muestra que tiene en cuenta el tratamiento de transformación geometrica en las imagenes presentado en la Prueba, identificando el proceso de rotación (rodear) y la propiedad de desplazamiento:

> "*La relación que tienen las formas y los volúmenes con los objetos de la vida cotidiana, la relación existente entre figuras planas y volúmenes. ¿Cómo podemos hacer para convertir una figura plana en un volumen? El saber reconocer los planos inscritos en volúmenes. Conocer la forma que presentan los diferentes volúmenes al ser colocados sobre una superficie plana. Se explica la capacidad de rotación de los cuerpos cilíndricos. Cómo se puede desplazar un objeto cilíndrico. Los cuerpos cilíndricos con una fuerza externa se desplazan con facilidad cambiando de lugar. Se desplazan sobre sí mismos, rodando".*
>
> (Mc, p1:11)

En este caso ella no hace una valoracion sobre grados de difiicultad de los alumnos en el aprendizaje de transformacion geometrico sino expresa un atencion superficial. Por esto clasificamso con el nivel intermedio. El mismo nivel de capacidades muestran y Al, Di, Es, Jo, Ma, Mo y Ol.

En el problema 2, la respuesta significativa sobre aprendizaje de transformación geométrica es la de Sh (FEUP):

> "*Estas imágenes pueden servirnos muy bien en la clase de matemáticas, porque de manera muy concreta se puede explicar a los alumnos muchas propiedades de las transformaciones matematicas. Se puede explicar muy bien la rotación, la simetría, la conservación del perímetro donde se abre la puerta, su superficie, y otros diferentes movimientos".*
>
> (Sh, p2:13)

Con esta respuesta podemos concluir que Sh muestra un grado alto de tratamiento de transformación geométrica, utilizando el esquema de la funcionamiento d ela puerta dentro del concepto de transformacion. Tambien ella encuentra este esquema adecuado y "muy concreto" en relación a las dificultades de los alumnos en el proceso de aprender la transformacion. Esta respuesta de Sh muestra un grado alto en capacidad de adaptacion critica y acomodacion del conocimiento practico. Un grado B de la capacidad de tratamiento de aprendizaje de transformacion geometrica muestran Ad, Ar, As, Dr, Em, y Vj. Otros participantes tiene el grado bajo.

En el caso de FFPUB, no encontramos el grado alto de capacitad sobre aprendizaje de transformaciones. Joahana, Mc, Ma, Ol, y Yo muestran un grado intermedio de capacidades. Ilustramos con el ejemplo de Ma:

> *"Estas fotografías se han puesto para demostrar cómo giran las puertas. Teniendo los dibujos de abajo se puede observar el giro de la puerta y los ejes simétricos. Con estas figuras se estudian los ejes de simetría en la clase de matemáticas".*
>
> *(Ma, p2:2)*

El problema 7 de la Prueba Inicial, trata directamente el tratamiento de aprendizaje de transformación geométrica. Sorprendentemente, encontramos un nivel bastante bajo de las capacidades de los participantes en identificar los procesos significativos de transformacion, en utilización de esquemas relacionadas de transformación y en la organización del aprendizaje de transformacion adecuadamente. Unicamente Fit en el grupo FEUP y La, Jo y Mo del grupo FFPUB muestran unos elementos de *tener en cuenta tratamiento de aprendizaje* de transformacion geometrica. Presentamos estas respuestas en forma de tabla comparativa:

Fit (FEUP)	La (FFPUB)	Mo (FFPUB)
“*Como ejemplo de la simetria podemos coger plegado del papel donde se destaca el eje de la simetria como el lado del plegado. Cogemos un corazon lo dibujamos en hoja y encontramos el eje de la simetria, podemos coger tambien la letra B y plegamos la hoja y tambien notamos que las dos partes coinciden...* *Como ejemplo para la semejanza podemos coger: dos triangulos parecidos con dimensiones diferentes...)”.*	*“Se pueden observar figuras simétricas, geométricas (estrella, cuadrado, rectángulo…)* *También se podría hacer una actividad de manualidades en la que se dibujan unas formas sobre una cartulina negra, se recortaran, y se pegaran de nuevo en una cartulina blanca de forma simétrica. Por ejemplo:*  se pueden tener figuras en cartulinas y que los niños/as las doblen para buscar ejes de simetría.	Simetría: Dibujar una recta. Dibuja ahora la figura geométrica que quieres calcula la figura simétrica de la anterior con respecto a la recta Dibuja un cuadrado. Sus ejes de simetría y alineados, Homotecia: Dibujar un triángulo ahora dibujar otro la mitad de grande, pero igual dibuja una tela de araña

Analizando esta respuesta se ve la capacidad de Fit, La, Mo y Jo en la explicación de la estrategia para posibilitar el reconocimiento de la simetría y así posibilita el desarrollo de diferentes tipos de razonamiento de los alumnos.

En las respuestas del problema 10 de la prueba, encontramos un nivel bajo de tratamiento de aprendizaje de transformación geométrica en todas las respuestas. En concreto no se establece ningún esquema relacionado con transformación proyectiva, no hay identificación de los procesos significativos de proyección en sentido de aprendizaje, y se utilizan las propiedades de proyección de manera superficial.

La Prueba Inicial se realiza y desarrolla individualmente para cada participante así que no podemos mostrar directamente la apertura y confianza para la negociación docente. Únicamente es posible valorar la explicitación del valor de conocimientos previos sobre transformaciones.

6.4.2. Sobre la instrucción de transformaciones

El análisis de las respuestas de los participantes de ambas facultades de la Prueba Inicial nos da poca posibilidad de sacar resultados favorables sobre la instrucción de transformaciones geométricas. Esto es por razón de que la prueba Inicial consiste en planteamiento de problemas y los participantes tienen posibilidad limitada de mostrar prácticamente los elementos funcionales y estilos instruccionales sobre instrucción de transformación geométrica. El análisis de las respuestas de los participantes se hace sobre la identificación de elementos de metodología y diseño de aprendizaje (CEi1), consideración de los elementos curriculares (CEi2), reconocimiento de registros y formas instruccionales (CEi3) y sobre reconocimiento de los elementos funcionales de tareas educativas y diversos estilos de instrucción (CEi4).

Teniendo en cuenta la diversidad de capacidades de los estudiantes sobre instrucción, identificamos tres niveles de las capacidades sobre instrucción de transformación geométrica: Nivel alto - A, nivel intermedio - B, y nivel bajo - C.

En forma de tabla 6.26, presentamos los resultados de clasificación de las respuestas de los participantes de ambas facultades, según diferentes niveles de capacidades sobre la instrucción de transformación geométrica.

Niveles de la capacidad sobre la instrucción de transformaciones	FEUP	FFPUB
A- Identifica los procesos importantes en la construcción de la idea de transformación. Identifica los elementos claves en la secuencia del contenido sobre la transformación. Propone análisis del proceso de aprendizaje de transformación. Propone las tareas complejas.	-	-
B- Explicación de herramientas de motivación. Muestra coherencia entre actividad y el contenido de transformación. Explicita el papel de tarea. Identifica las posiciones relevantes para justificar intervenciones. Utiliza materiales y recursos didácticos conscientemente para asociar al significado de la transformación. Identifica elementos de contenido como parte de organización del currículo.	Ad Dr Em Fit Sh Ar Da Vj	Di Jo Li Mc Mo Ol La So
C- Muestra que es imprescindible utilizar recursos para mejor aprendizaje Reconoce objetivos y finalidades de las actividades. Identifica y ejemplifica sobre lo cotidiano. Identifica el marco referencial del entorno.	As , Fi Pe, Re Se Xh	Al, Es, Ma, Na Yo

Tabla 6.26. Clasificación de las respuestas sobre instrucción de transformaciones geométricas

A partir de los resultados mostrados en la tabla 6.26, y el análisis de las respuestas de los participantes de ambos grupos, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 6.4.2. *A partir de la Tabla 6. 26 y del análisis de todas las respuestas de los participantes de la prueba, encontramos que ningún participante en los dos grupos no muestra una nivel altor de la capacidad de instrucción de transformación geométrica. Los resultados muestran una situación semejante en FEUP como en FFPUB en porcentaje: 57% en la FEUP y 61% en la FFPUB muestran un nivel intermedio de la capacidad de instrucción de transformación, y el resto 43% en la FEUP y 39% en la FFPUB muestran bajo nivel de la capacidad de instrucción de transformación. Pero, la diferencia entre FEUP y de FFPUB consiste en que un número de participantes de FEUP poseen conocimiento matemático sobre transformación y ausencia de capacidad de instrucción, mientras que un número de participantes de FFPUB muestran ausencia de la capacidad de instrucción por falta de conocimiento matemático sobre transformación.*

Buscamos los elementos de la instrucción en las producciones de los participantes de la Prueba Inicial, conscientemente que no todos elementos los podemos encontrar. Por ejemplo, no podemos elaborar la consideración de los tipos de la clase, comparación y análisis de los modelos del trabajo, justificación de las decisiones instruccionales tomados o las herramientas de motivación, etc. Por esta razón, nuestro análisis se hace sobre los indicadores presentados en la tabla 6.26.

Sobre los elementos de metodología y de diseño del aprendizaje, analizando las respuestas del primer problema de la Prueba, encontramos que, en caso de FEUP, pocos participantes identifican procesos importantes en la construcción de la idea de transformación. Entre los que lo hacen, podemos considerar el caso de Ad cuando identifica el proceso de *doblado de cuadriláteros uno encima otro* hasta que *se construye la caja* (trapezoide rectangular) y la instrucción de este proceso que es *paralelismo*. Ar identifica otros procesos importantes en la construcción de la idea de proyección cuándo explica el proceso de *obtener figuras planas* (el cuadrilátero y circunferencia) *dibujando con la ayuda del vaso y de la caja* y esto da posibilidad que *los alumnos entienden bien esas figuras*, y que nosotros pensamos que los alumnos pueden entender también bien y la proyección. Ar identifica el proceso de intersección de figuras tridimensionales con el plano, igual como Fit, Se, Em, Sh, y Xh; pero ninguno de estos no identifican estos procesos en el sentido de la idea de transformación sino en la idea de diversidad de figuras geométricas. Intentando identificar estos procesos, los participantes hacen un análisis del proceso de aprender la diversidad de figuras geométricas y de relaciones entre sí, pero esto no se considera que hagan un análisis del proceso de aprender la transformación geométrica. Como consecuencia consideramos que ninguno de los participantes de la FEUP muestra un nivel intermedio en la capacidad sobre la instrucción de transformación geométrica en el problema 1.

En el caso de FFPUB, encontramos la respuesta de Ol que nos muestra la capacidad de identificar la propiedad importante de isometría – *figuras iguales,* pero no se ve claro si ella ha identificado que el proceso de obtener figuras iguales es el proceso de transformación geométrica. La justificación que ella hace:

> "*es decir que si dibujo un círculo con un vaso y uso este mismo vaso para dibujar nuevos círculos, obtendremos figuras con la misma base*"

es matemáticamente incorrecta, primero cuando nos habla de figuras (planas) con la misma base, y luego el fenómeno físico no se asocia correctamente a la transformación geométrica. Pensamos que si Ol tuviese un conocimiento más alto sobre el concepto de transformación podría proponer e identificar los procesos importantes de aprendizaje de transformación. Otros participantes, Jo, La, Mc y Mo, identifican sólo la relación entre figuras geométricas. Esto quiere decir que ellos relacionan y valoran representaciones e identifican ejemplos de la vida cotidiana con las geometrías (figuras geométricas sobre cuales tienen un conocimiento) y no consiguen relacionar con la transformación porque no poseen un grado deseable sobre transformación geométrica (ver la situación de conocimientos iníciales sobre aspecto matemático de transformaciones en el apartado 6.3). Como ilustración ponemos la respuesta de Mc:

> *"Trabajaríamos los polígonos iguales llamados bases situadas en planos paralelos, la geometría.*
>
> *Se quieren evaluar las formas geométricas y asociarlas con la realidad que nos rodea.*
>
> *Para que se acostumbre a observar figuras, medir, comparar e ir haciendo sus conjeturas y todo esto trabajando en el espacio geométrico".*

El problema 3 de la Prueba Inicial, pide directamente explicar matemáticamente el funcionamiento de la puerta como transformación. Aparentemente, las respuestas tienen que tratar los procesos de transformación. Pero, ¿cómo es posible identificar y explicar para otros los procesos de la construcción de la idea de transformación geométrica un fenómeno de la vida real, si el sujeto mismo no posee el conocimiento necesario sobre transformación? Vamos a ver qué tenemos escrito en las respuestas.

En el caso de FEUP ninguno de los participantes no muestra un grado alto de conocimiento sobre la noción y el proceso de transformación. Esto es una razón importante que las explicaciones de los procesos importantes en la construcción de la idea de transformación son no completas para unos y confundidas para la mayoría. Entre los ejemplos de explicación no completa está el caso de Fit:

> "*Durante la rotación de la puerta, su esquina forma un circulo el centro del cual es el punto de intersección de los rectángulos en medio".*
>
> (Fi, p2:3)

Está la identificación de la terminología, la identificación de figuras geométricas, y parcialmente los elementos de rotación – el centro de rotación, aunque no lo relaciona con la transformación de rotación.

Entre los ejemplos de explicación confundida está el caso de As:

> "*Aquí se puede aprender sobre el rectángulo donde todos se mueven a la vez porque están conjuntos"*
>
> (As, p2:3)

En el caso de FFPUB, casi la mitad de los participantes prefieren no contestar, convencidos que no son capaces de explicar los procesos de la construcción de la idea de transformación. Entre otros que responden, identificamos la respuesta de Ol, que parece que tiene clara la idea de transformación cuando explica los procesos importantes de rotación, el centro, el ángulo y lo más importante la invariancia del centro de rotación: " *…para que esto se ocurre el giro debe mantener el centro en una posición…".*

Otros participantes presentan incapacidad de explicar los procesos importantes en la construcción de la idea de rotación. Un ejemplo ilustrativo es la respuesta de Li antes del problema de la actividad 2:

> *"mediante la fuerza del empuje de una persona se produce la transformación del estado inmóvil al móvil"*

El análisis de las respuestas de los problemas 5 y 6, muestra que un número considerable de participantes de la FFPUB muestran coherencia entre actividad - de *identificar la parte que se repite en un bordado kosovar,* y el contenido de transformación - *explicar cómo se utiliza un papel transparente para mostrar la rotación como transformación que conserva tamaño*. Mientras en el FEUP encontramos menos participantes que muestran coherencia entre esta actividad y el contenido de transformación, o el análisis del proceso de aprendizaje de transformación. Lo que podemos decir es que todos reconocen que el objetivo de la actividad es el aprendizaje/enseñanza de transformación geométrica. Un ejemplo ilustrativo del nivel B de capacidades de instrucción de transformación en identificación de las posiciones relevantes para justificar intervenciones eventuales y la coherencia entre la actividad y el contenido de transformación, es el caso de N acunado explica el problema de la actividad 5:

> "*Calcas la parte que se repite en el papel transparente. Después vas moviendo el papel por sobre el bordado y los niños se dan cuenta que las otras partes caben dentro de la línea dibujada (el papel transparente). De esta manera se enseña que la transformación rodándola conserva el tamaño"*

Las respuestas del problema 7 nos muestran otra vez que no es posible la identificación correcta de metodología y diseño del aprendizaje, de reconocimiento de registros y formas instruccionales sin la posesión anterior de un conocimiento necesario sobre transformación geométrica. La repuesta de Jo sobre el problema de la actividad 7, muestra la mejor ilustración posible de este hecho:

> *"Simetría: En una hoja, plegada por la mitad haría que los alumnos dibujen, en una de las caras, con temperos. Luego, haría que plegue*

> *la hoja y que observen que en la otra mitad queda dibujada la imagen simétrica. Escribiría una frase más de forma inversa: (ONAM=MANO) en un folio y luego con un espejo haría que los alumnos adivinen el significado y comparen la posición de las letras. Les presentaría distintas imágenes simétricas para que analicen y observen sus características.*
> *No conozco las propiedades de homotecia".*

La respuesta de Sh del grupo de FEUP, muestra la posesión del conocimiento necesario sobre transformación, pero la ausencia de la capacidad de elementos metodológicos y de diseño del aprendizaje de transformación. Ante el problema de presentar tres ejemplos de explicación de simetría y homotecia, elige la presentación de buenos dibujos, pero no es capaz de identificar posiciones de intervención y sus justificaciones relevantes.

6.4.3. Sobre contenido profesional en el comportamiento actitudinal

En la Prueba Inicial de conocimiento sobre aprender a enseñar las transformaciones en educación primaria no hemos planteado hacer una prueba de la actividad profesional de participantes. Por esta razón esta parte de análisis se hace en el proceso de aprender a enseñar las transformaciones durante cuatro sesiones y en la Prueba Final de conocimientos.

Partimos de la idea que hay un cierto convencimiento en los centros de formación de profesores de que el conocimiento enseñado en dichos centros prepara a los estudiantes para su tarea en el aula (Blanco y Borralho, 1999). Estos autores confirman que, dicho conocimiento sólo se puede orientar de forma muy limitada en la práctica sugiriendo reglas de actuación para contextos muy específicos y comunes de la vida de la escuela. Añaden estos autores que:

> *"Este aspecto puede ser confirmado por la frustración de profesores que se enfrentan a los problemas educativos con un bagaje de conocimientos, estrategias y técnicas que les parecen inútiles en los primeros días de su actividad como profesores."*
>
> (Blanco y Borralho, 1999, 143).

Así, las propias vivencias causan un profundo choque en su conocimiento de, concepciones acerca de, y actitudes hacia las matemáticas, los estudiantes, y la enseñanza. Coinciden estos autores en que los años transcurridos como alumnos en clase de geometría les proporcionan imágenes y modelos, consciente e inconscientemente, de lo que significa enseñar y aprender transformaciones geométricas.

Nosotros pensamos que la preparación en los centros de formación, influye en sus propias observaciones y actuaciones en las prácticas de enseñanza. Luego con la experiencia, una vez que comienzan a trabajar, la influencia de otros factores como la cultura escolar o de los otros profesores de su entorno es evidente.

Nosotros estamos de acuerdo con la confirmación que, los estudiantes en sus clases de prácticas de aula prefieren los métodos que les gustaban como alumnos, enseñando de la misma forma en que fueron enseñados, mostrando unas concepciones e imágenes pedagógicas muy estables y resistentes al cambio, fruto de su largo periodo de escolaridad, es decir, están influidos por la enseñanza que han visto y experimentado (Mellado, Ruiz y Blanco, 1997; NCTM, 1991). Así pues:

> *"Todas estas experiencias transmiten mensajes sobre que constituye una apropiada enseñanza-aprendizaje. Tales poderosas influencias necesitan ser dirigidas ayudando a los profesores a aprender a enseñar de nuevas formas."*
>
> (NCTM, 1991, 124).

Otro problema en la formación de maestros, que no es indicado por los estudiantes en los trabajos citados anteriormente, pero que es observado por los formadores en los centros de educación, es la falta de formación matemática que tienen los estudiantes cuando llegan a dichos centros como muestra el estudio de Hernández, et.alt., (2001). A este respecto, Flores (2000) considera que para el desarrollo profesional de los estudiantes debemos tener en cuenta los contenidos y el momento profesional en que se sitúan los estudiantes. Señala que para medir el alcance de estos contenidos debemos de tener en cuenta los dominios y destrezas de los estudiantes sobre las matemáticas en general y nosotros añadimos transformaciones geométricas en particular. Nuestro análisis de las respuestas de los participantes de La Prueba Inicial sobre transformaciones geométricas nos ha mostrado que nuestros participantes como futuros profesores de Educación primaria poseen un grado bajo de conocimientos, mientras que sobre la implicación profesional ante el trabajo de transformaciones tomamos en consideración afirmaciones de los investigadores mencionados más arriba.

Capítulo 7.

Análisis y resultados en el proceso de implementación

7.1. Introducción

En este capítulo presentamos los resultados del análisis del desarrollo de la práctica diseñada sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas (capitulo 5) en la FEUP y FFPUB.

El análisis de la implementación de la práctica de formación sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria, se hace a partir de las producciones de los participantes en ambos países, fichas de trabajo y transcripciones de las videograbaciones de las sesiones de la práctica de formación. A partir de ese análisis, presentamos la descripción de los procesos y avances eventuales, en aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Educación Primaria que consiste en la comprensión de aspecto matemático de transformación y capacitación para enseñarlas. Esto quiere decir que se hace el análisis sobre el aspecto matemático de transformación geométrica: el proceso de comprensión de la transformación geométrica como característica estática, el uso de terminología y los diferentes tipos de transformaciones (7.2.1, hasta 7.2.3), el proceso de comprender las relaciones y jerarquías en la noción de transformación (7.2.4), el proceso de comprensión de transformación como proceso o cambio (7.2.5), el razonamiento y la comunicación con transformaciones geométricas (7.2.6), y la identificación de los aspectos sociales y culturales en sentido de la capacidad de contextualizar la construcción del significado de transformación geométrica (7.2.7). De esta manera intentamos promover la educación que revalorice los conocimientos y los saberes construidos en las realidades diferentes - Catalunya y de Kosova.

De acuerdo con el objetivo principal de mejorar la capacitación del futuro profesor en la enseñanza de las transformaciones en la Educación Primaria, consideramos los aspectos didácticos (7.3) en el proceso de aprender a enseñar transformaciones geométricas. Analizamos el componente estratégico en la formación de profesores que incluye el componente estratégico sobre el aprendizaje de la transformación geométrica (7.3.1) y el componente estratégico sobre la instrucción de transformación geométrica (7.3.2).

El análisis del contenido profesional en el comportamiento actitudinal (7.4) no se ha podido efectuar en profundidad en esta fase de la investigación, porque no hemos planteado la realización de las prácticas escolares por parte de los participantes de la investigación. Se consideran algunos elementos identificados durante el desarrollo de las actividades de la práctica de formación docente.

El análisis se hace identificando los momentos del desarrollo de las actividades de la práctica de formación cuando el estudiante avance el grado de conocimiento sobre transformación, establece un conocimiento estable sobre el concepto de transformación geométrica, o muestra algunas dificultades que no permiten reconocer y avanzar el grado de conocimiento sobre el concepto en el proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas. Puede verse esquemáticamente el desarrollo del capítulo en el esquema siguiente:

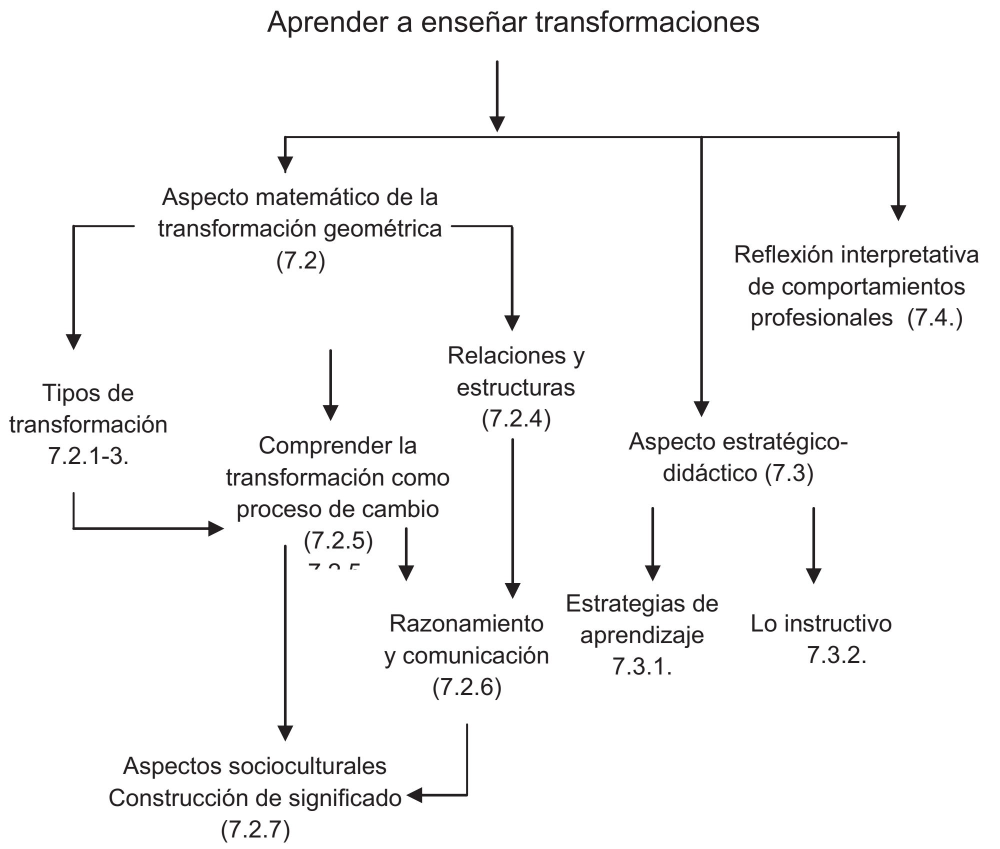


Figura 7.1. El desarrollo del capítulo siete

7.2. El futuro profesor y las transformaciones geométricas

En este apartado analizaremos como el futuro profesor consigue reconocer a lo largo del proceso de una práctica de aprendizaje, el concepto de transformación geométrica, el uso de terminología, los tipos de transformaciones y distinguirlas, las relaciones y jerarquías entre diferentes transformaciones y las propiedades, razonar con las transformaciones y comunicarlas resultados y procesos y la incorporación de la cultura y contextos en la construcción del concepto de transformación geométrica.

Como se hizo con la prueba inicial, analizaremos el grado de conocimientos que posee el futuro profesor en el caso de análisis de la implementación de la practica de formacion. El objetivo es identificar características del proceso de adquisición de conocimiento matemático y didáctico por parte de futuro profesor, según se proponía en el capítulo de metodología (IV), en base a responder al objetivo O_4 de nuestro estudio. No es menos esencial el hecho de que los estudiantes recuerden sobre la verificación y su propio control y que ellos puedan reconocer las situaciones donde han pasado antes cometiendo un error y que ellos entiendan su esencia.

Para identificar el desarrollo del proceso de aprender a enseñar transformaciones, decidimos analizar diversas producciones en tres momentos M1, M2, y M3, ***de tres estudiantes en cada país, uno considerado de un grado bajo, uno de grado medio-bajo y uno de nivel medio***, según describimos en los resultados de la prueba inicial, donde no hemos identificado estudiantes con un grado alto de conocimientos. El momento M1 comprende con sesión 2 (SI) el M2 sesión S3 (SR) y S4 (SP) y el momento M3 sesión M5 (SA). Llamaremos a los tres estudiantes de FEUP:

- Ad (grado medio),
- Em (grado medio-bajo) y
- Fi (grado bajo)

Los tres estudiantes de FFPUB:

- Jo (grado medio),
- Mc (grado medio-bajo) y
- Al (grado bajo),

Estos estudiantes se prestaron a ser observados en el proceso. En la tabla de la figura 7.2., se muestra la metodología que hemos usado, contemplando en cada uno de los momentos.

Registros-datos	Elaboración de datos	Evidencias	Trayectorias de aprendizaje
Diálogos Mi, i=1,2,3 Videos M1 (en Kosova)	Reconocimiento de características conceptuales	Resultados distinguidos de los estudiantes Ad, Em, Fi en M1	Rasgos de desarrollo matemático en M1
Diálogos Mi, i=1,2,3 Videos Mi, i=1,2,3 (en Catalunya)		Resultados distinguidos de los estudiantes Jo, Mc, Al en M1	
Diálogos Mi, i=1,2,3 Videos Mi, i=1,2,3 (en Kosovo)	Reconocimiento de características en lo didáctico	Resultados distinguidos de los estudiantes Ad, Em, Fi en M2	Rasgos de desarrollo didáctico en la secuencia
Diálogos Mi, i=1,2,3 Videos Mi, i=1,2,3 (en Catalunya)		Resultados distinguidos de los estudiantes Jo, Mc, Al en M2.	

Figura 7.2. Explicitación del tratamiento de datos

En la prueba inicial, la mayoría de los estudiantes de la FFPUB mostraron un bajo grado de conocimientos sobre el concepto de transformación como característica estática, uso de terminología adecuada e identificación de tipos de transformaciones. El estudiante Al, en las producciones de la Prueba Inicial ha mostrado en mayoría de los casos un grado medio de conocimientos en los aspectos del contenido matemático de transformación. En misma manera hemos decidido elaborar los casos de Ad (FEUP). Los conocimientos en la prueba inicial de los estudiantes Em (FEUP) y Mc (FFPUB) variaron entre un grado medio y un grado bajo, que es un razón más de tratar su trayectoria de construcción del conocimiento durante las sesiones de la práctica de formación docente. Los estudiantes Fi (FEUP) y Al (FFPUB) mostraron un grado bajo en la prueba inicial.

7.2.1. El proceso de aprender el concepto de transformación, terminología y tipos. Momento 1

Presentamos a continuación el análisis de los momentos del proceso del avance o dificultad del estudiante para futuro profesor de Primaria, en el proceso de construir la idea de transformación geométrica como característica estática que una figura A transforma en la figura B sin explicar la realización de esa transformación, el uso de la terminología adecuada en cada caso y identificación de diferentes tipos de transformaciones.

Este momento inicial se corresponde con las actividades 1 y 2 sobre Isometrías. Le pedimos a un estudiante de nivel considerado bajo, hacer un resumen de una experiencia de una clase sobre la enseñanza de geometría en Educación Primaria, tomada en el libro MATEMARTICA (ver Capitulo 5). Y posteriormente, con todos, se estudian los ejes de simetría de las figuras planas. Ante las dificultades iniciales en el grupo de Kosovo (FEUP), el docente decide revivir los ejes de simetría de las figuras regulares, y distinguirlos de las no regulares, evocando conocimientos pasados. Sólo después de ese análisis, recuerdan que el cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, el pentágono regular tiene cinco ejes y el irregular tiene menos de cinco ejes de simetría y el? decágono regular (de la imagen del mosaico) tiene diez ejes de simetría.

La actividad que pretende que se observe la distinción entre la imagen especular en un lago, y la que se obtiene mediante un espejo de la foto del lago parece que ha hecho pensar a los participantes. El docente aclara que no se trataba de imágenes, sino de los fenómenos que presentan las imágenes en la pantalla: la reflexión de la montaña en el agua del lago quieto y claro; y en el segundo fenómeno es una fotografía de la montaña con un espejo perpendicular.

En el grupo de Catalunya, los estudiantes Mc y Al hacen la presentación de la sesión (SIP) utilizando el mismo material como en el caso de FEUP. La presentación se centra en la identificación de la belleza de los edificios, mosaicos y otros monumentos reales con las figuras geométricas. Los estudiantes como los presentadores no muestran la atención a las cuestiones específicas como es la identificación de tipos de transformaciones o elementos como el eje de simetría, ángulo de rotación etc. Pero se organiza un powerpoint inicial con características del trabajo.

A continuación se analiza las trayectorias de aprendizaje de cada uno de los estudiantes de los dos grupos en ese momento inicial en cuanto domino términos y objetos matemáticos.

La trayectoria de Fi en M1.

En esa presentación, el estudiante de grado bajo inicial - Fi, no ha logrado identificar las transformaciones en la descripción respecto al proyecto sobre mosaicos. Indica frases como:

> *"todo el mosaico está formado por cosas geométricas"*
>
> [Fi, SIP, párrafo 4]

Fi muestra dificultades comunicativos iníciales en la identificación de la simetría que se observa en las figuras del mosaico. Asimismo le cuesta caracterizar las rotaciones asociadas a la figura. Esto se ve en el diálogo

> Docente: *"¿qué tiene que ver esta actividad con la simetría?*"
>
> Fi: "*estas rectas (enseña la los ejes de simetría del pentágono, estrellas, etc., de la figura) significan los ejes de simetría para estas figuras*"
>
> [SIP, Párrafo 8,9]

El estudiante tiene problemas en la visualización porque cuenta cada eje dos veces, y atribuye al cuadrado 8 ejes de simetría. Después de un recordatorio, casi todos los estudiantes de nivel bajo consiguen identificar los ejes de simetría de figuras regulares e identifican la equidistancia respecto al eje de simetría. Ante situaciones simples como la simetría de las manos o la simetría de la boca, no hay problemas.

> "*En la primera figura existen diferencias entre la mano derecha y de la mano derecha en el "espejo", pero son pequeñas…"*
>
> [Fi, SIA2, párrafo 7]

Estas observaciones nos llevan al siguiente resultado:

Resultado 7.2.1. *La situación del estudiante F considerado de nivel bajo inicial se corresponde con un dominio débil de los términos y objetos matemáticos asociados a transformaciones isométricas.*

La trayectoria de Em en M1.

El Em, que en la prueba Inicial ha mostrado un grado medio-bajo de conocimientos (ver 6.3.1), muestra la capacidad de identificar la secuencialidad de la construcción del mosaico por la repetición de las figuras (Figura 7.3).

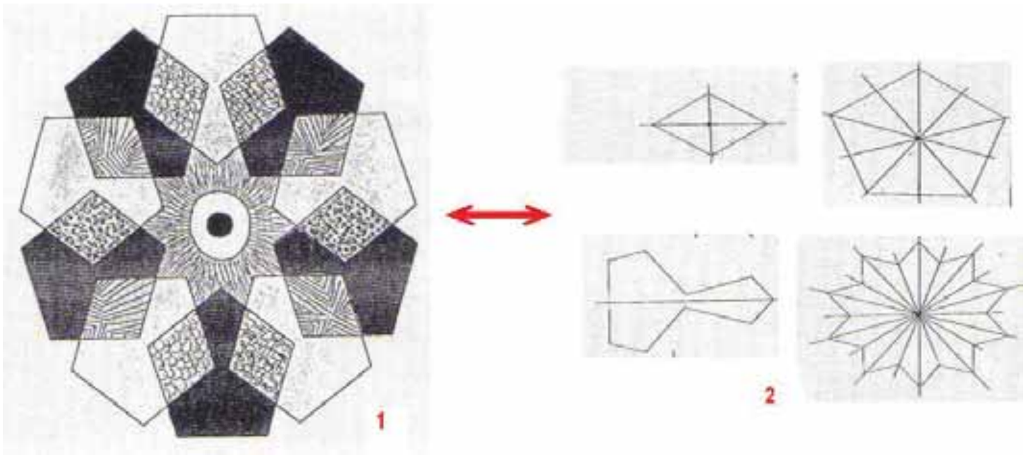


Figura 7.3. Em explica la composición de una figura a partir de la repetición de otras

Em incorpora la idea de la composición y la repetición como características visuales de transformación isométrica aunque no sabemos si habla de rotación o simetría:

> *"Fue una explicación muy clara y muy convencida después de que todos los estudiantes han tenido claro la composición de la imagen"*
>
> (SIP, parágrafo 14)

Em no percibe la metáfora que estamos usando al hablar de la simetría de una figura y la propiedad simétrica de una figura. Considera inicialmente que los dos fenómenos de figura simétrica y simétrica de una figura son lo mismo:

> *"Es lo mismo si supongamos que la mesa es un lago. La mesa hace lo simétrico"*
>
> [Em*:* SIA2, párrafo 17]

El docente debe introducir la diferencia matemática, constatando la relación de perpendicularidad respecto al horizonte parece que se conserve, pero mostrando como es diferente a la que se percibe en la foto, en donde se observa más bien las distancias iguales al eje.

Todos estos comentarios nos llevan al siguiente resultado:

Resultado 7.2.2. La situación del estudiante E considerado de nivel inicial medio bajo se corresponde con un dominio débil de los términos asociados a transformaciones isométricas. *Identifica correctamente la transformación simétrica por repetición utilizando doblado y espejo, distinguiendo la imagen conceptual de transformación simétrica entre dos imágenes. Identifica características como el eje de simetría y la equivalencia entre imágenes simétricas.* Reconoce la composición de simetrías en la construcción del mosaico (Figura 7.1).*Asocia simetría a transformación por coincidencia, pero no establece imágenes conceptuales bien definidas respecto a las transformaciones donde no se puede utilizar el doblado o espejo que, en el plano pueden ser traslaciones o giros.*

La trayectoria de Ad en M1.

En la prueba inicial, Ad había mostrado un grado medio en la mayoría de tareas y en algunas un grado alto de conocimientos (ver 6.3.1.) sólo evidenciando en algunas tareas dificultades en la expresión y descripción de la conceptualización de la isometría como correspondencia y/o aplicación.

Suelen intervenir en diversas ocasiones para constatar el fenómeno de la simetría, con ayuda de un espejo y usando el libro de la otra actividad (figura 7.4). Así, la acción dialogada en la discusión de la tarea, permite el desarrollo de conocimiento.

Figura 7.4. La reproducción del fenómeno de SIA1 con otro material

En algunos casos, como el que acabamos de mostrar, visualizando el fenómeno del espejo, ayuda a otros estudiantes como Ad pare que sea capaz de identificar la diferencia entre estos dos fenómenos: por fin, en este momento ella descubre que el fenómeno del lago no es posible “hacerla”. El segundo fenómeno es posible hacerlo en cualquier momento cuando tenemos el espejo.

Es el caso en que - sin conceptualizar matemáticamente de forma precisa- identifica el prisma como figura que se obtiene al considerar un cuadrado con una traslación en el espacio, mediante la acción de "superposición" Es decir, la traslación se identifica para construir el prisma.

> "*...si los alumnos saben que la base de un paralelepípedo es siempre un cuadrado, luego podemos saber que la caja está construido por cuadriláteros "doblados*[1]*" (o apilados) uno encima del otro....*";
>
> [Ad PI1, párrafo 1]

Ad es consecuente con lo observado en la prueba inicial en diversas actividades iniciales, pues identifica fenómenos de repetición como es el caso de rotación. Y en otra, Ad había construido la imagen conceptual de la proyección identificando correctamente sus características (el centro, los rayos de proyección y el objeto transformado). Asimismo reconocía la idea de desplazamiento como transformación donde con éxito utiliza la idea de aplicación punto a punto para construir la transformación del triangulo.

> "*Primero se hace el desplazamiento del punto A y durante este movimiento los puntos B y C cogen posición presentado como en la figura...*"
>
> [Ad, PI7, párrafo 1]

Respecto al actividad SIA1, donde se pide explicar la diferencia entre el fenómeno del lago y el fenómeno del espejo y la imagen, Ad intenta responder directamente a las preguntas, reconociendo las diferencias entre las imágenes, haciendo referencia a que la diferencia entre estos dos fenómenos está en la posición, el tamaño aparentemente igual....:

> "*tampoco son iguales porque las fotos no están hechas desde la misma posición*"
>
> [Ad, SIA1, párrafo 2]

Identifica la simetría aparente indicando diferencias observadas entre partes aparentemente simétricas de la imagen (del lago), destacando los detalles como:

> "*son más oscuros en "el agua" que en la parte superior, que no se "ve" lo mismo en la imagen (b). Esto quiere decir que la imagen (a) parece que es simétrico pero no lo es exactamente; a diferencia, la imagen (b) es simétrica.*"
>
> [Ad, SIA1, párrafo 4]

[1] Usa la palabra "paluar" que se traduce aquí por doblar, en el sentido castellano de superposición de objetos iguales o equivalentes como apilamiento.

Ad entiende que la diferencia fundamental entre dos fenómenos no es sólo el hecho práctico sino la diferencia de significado: Lo primero es el concepto de la propiedad de simetría (porque uno ve el objeto A y su imagen A') y el segundo fenómeno evoca el concepto de simetría como transformación (al poner el espejo junto A, aparece A'):

> "*en la base que hemos hablado, la diferencia entre la imagen del lago (*izquierda) *y la imagen del espejo (*derecha) *con la foto del lago, pienso que es: en la imagen de la izquierda (*el lago*) ya existe la simetría y en la imagen de derecha (*espejo*) hemos hecho lo simétrico con la mitad de la figura - la mitad de arriba*".
>
> [Ad, SIA1, párrafo 5]

Esta estudiante de nivel medio alto incorpora con cierta precisión en la actividad SIA2 la idea de propiedad simétrica y el concepto de transformación simétrica:

> "*en la figura a) parece que es simétrico*" mientras que "*en la figura (b) está hecho simétrico*"
>
> [Ad, SIA2, párrafo 2]

Observando su expresión lingüística podemos conjeturar que el significado de transformación para Ad es una "acción" o "actuación" (esta hecho) y el significado de la propiedad simétrica es una "*situación o un momento*" (es simétrico).

A partir de todo esto, sobre el proceso de aprender el concepto de transformación por parte de Ad, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 7.2.3. *La situación de la estudiante Ad considerado de nivel inicial medio alto se corresponde con un dominio medio de los términos y objetos matemáticos asociados a transformaciones isométricas. Su nivel no es alto, aunque su visualización es buena. Distingue entre hacer un simétrico como "acción" y figura simétrica como "situación o un momento". Ad es capaz de identificar fenómenos mediante transformaciones de figuras distinguiéndolo de lo que sería reconocer formas e identificar propiedades.*

A lo largo de las actividades del momento inicial, se muestran evidencias de construcción colectiva de conocimiento, como se prueba en las siguientes intervenciones sobre los fenómenos de la actividad SiA2 y siguientes al buscar la repetición en la imagen de la boca, Xhe y Fi consiguen identificar las partes iguales de la boca sin la mosca, y no iguales con la mosca en un lado de la boca. Por ejemplo,

> *"La imagen es simétrico sin la mosca. Una parte (la de derecha) es igual que la de izquierda pero sin la mosca…"*
>
> [Xhe, SIA3, parágrafo 13]

Mientras que Sh identifica la transformación simétrica en dos momentos diferentes:

> *"…se trata de dos momentos diferentes: con la mosca -no simétrico y sin la mosca- simétrico…"*
>
> [Sh, SIA3, parágrafo 16]

Sabemos que la mayoría de los estudiantes del grupo FFPUB, son capaces de identificar la transformación de la figura y alguna propiedad, pero no son capaces de explicar la transformación de elementos de la figura, lo que quiere decir que la imagen conceptual del concepto de transformación no está completa.

A continuación mostramos las trayectorias de los estudiantes del grupo de FFPUB (Catalunya) y cómo evoluciona la situación inicial.

<u>**Trayectoria de Al en el momento M1.**</u>

La estudiante Al (grupo de FFPUB) en la prueba inicial ha mostrado un grado bajo en la mayoría de las tareas. En la actividad SIA1 no está claro si Joanna ha conseguido diferenciar la simetría como propiedad y simetría como operación (transformación). Parece que el docente anota esta ausencia cuando interviene:

> Docente: *"una cosa es la imagen de la izquierda (se refiere a la imagen de la montaña y su reflexión en el lago) y otra cosa es lo que estoy haciendo lo simétrico en la derecha (refiere a la imagen con espejo). Lo que quiero mostrar aquí es la simetría como propiedad y la simetría como transformación….*"
> Al: *"¿Cómo?..."*
>
> (Al, SIA1, párrafo *23C)*

Es la actividad SIA2 que lo ayude al estudiante Al profundizar un poco más la idea de simetría como transformación y como propiedad.

> Docente: *(presentando el problema SIA2) de todas maneras vamos a preguntar casi lo mismo….los manos (izquierda y derecha) y la mano izquierda y su imagen en el espejo.*
>
> Al: *La simetría tiene que estar debajo la mano y espejo.*
>
> Docente: *¿si todo el mundo tiene claro?....*

> Docente: *¿…si…?*
> Al: *Yo diría que uno es natural (refiere a las dos manos) y la otra es artificial (refiere la mano y su reflejo en el espejo)….”*
>
> (Al, SIA2, párrafo 18C)

La estudiante Al identifica las dos partes que se repiten sin mostrar elementos constituyentes como es el eje de simetría. A base de esto, sobre el aprendizaje de estudiante Al de grado bajo, identificamos:

Resultado 7.2.4: *Ella no tenía claro que la distancias entre elementos correspondientes respecto al eje de simetría tienen que ser iguales, que causa el “cambio del orden de los dedos” en nuestro caso.*

Trayectoria de Jo y Mc en M1.

Identificamos en el momento inicial el caso de Jo que en la actividad SIA1, intentando responder a las preguntas, dice:

> “*en un primer momento parece que son iguales, ….porque el lago es lo mismo que espejo…solo que el lago (agua) está en movimiento…la diferencia es que el agua se mueve un poco o mucho, y la imagen estará un poco movida, en movimiento”*
>
> (Jo, SIA1, párrafo 5)

Reconociendo las diferencias entre las imágenes, haciendo referencia a que la diferencia entre estos dos fenómenos simétricos aparentemente existe en la posición, el tamaño etc., destacando los detalles como:

> “*las dos fotos están tomadas desde diferentes lados….en la primera (izquierda) la montaña esta a la derecha, y en la otra en el lado izquierdo…”*
>
> [Jo, SIA1, párrafo 8]

El docente continúa insistiendo en la búsqueda de diferencias entre las imágenes. Es un paso importante que Joanna hace en este momento: empieza comparar las partes simétricos de la misma imagen:

> “*Si comparamos la imagen A y B es una cosa y si comparamos la parte A1* (refiere a la parte arriba del imagen de izquierda A) *y A2* (refiere a la parte abajo del imagen de izquierda A) *es otra cosa. Si ponemos la imagen del espejo y la giramos es completamente la misma, en cambio, en la otra (*refiere al imagen de izquierda) *vemos que hay diferencias…*(figura 7.5).”
>
> (Jo, SIA1, párrafo 14)

Figura 7.5. Estudiante Jo explicando reflexión de la imagen en el espejo

La imagen conceptual de Jo sobre la simetría como un concepto conocido, se basa en un conjunto de representaciones visuales, impresiones o experiencias de su memoria. La imagen del concepto de simetría para Jo está compuesta por una serie de figuras que se obtienen colocando el espejo(s) en diferentes posiciones sobre un modelo dado. La acción de "girar la imagen" para que se coincida, es una conjetura correcta por parte de Joanna intentando justificar la equivalencia entre imágenes correspondientes que es la propiedad importante de simetría. Respondiendo en las preguntas del docente:

> Docente: *El ejemplo que voy a poner: la televisió*n (aparato en el aula), *¿es simétrico?*
>
> Jo: S*í*
>
> Docente: *¿porque me dices que es simétrico?*
>
> Jo: P*orque una mitad es igual que otra mitad*.
>
> Docente: *La pizarra es simétrica*
>
> Jo (y otros): *si*
>
> Docente: E*l retroproyector es simétrico?*
>
> Unos estudiantes: *Si*
>
> Jo: *Yo creo que no, porque son los dos lados diferentes, si doblamos la parte de derecha y de izquierda no son iguales (*enseñando con las manos*).*
>
> Docente: *la silla ¿es simétrica?*
>
> Mc: *Respecto a ¿qué es simétrica?*
>
> Docente: *A, a, a … venga , ¡di!*
>
> Mc*: Respecto a un dibujo, un foto,….*
>
> Jo*: No tienes que tener algo otro.*
>
> Mc: *Algo para compararlo y predecir que es simétrico.*
>
> Docente: *(coge la silla) ¿Esa silla es simétrica?*
>
> Jo: *Si es, porque si la divido por la mitad y lo hago así (junta las manos) tengo la simetría.*
>
> (SIA1, párrafo 13-28)

A base de esto identificamos lo siguiente:

Resultado 7.2.5: *La Jo ha sido capaz de construir imagen conceptual completa sobre la simetría, conteniendo una amplia variedad de ejemplos y todas las propiedades importantes (igualdad, doblando – equivalencia, eje de simetría – que divide la silla en dos partes iguales). Los ejemplos concretos tienen ahora un papel complementario para dar ideas, verificar conjeturas, etc. que después se corroboran o formalizan al usar las propiedades simétricas.*

Además de las buenas evidencias de Mc, acudimos al dialogo de arriba entre Jo y Mc, a partir de lo cual identificamos el resultado siguiente:

Resultado 7.2.6: *Estudiante Mc comprende la simetría como una operación geométrica que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada (la silla), pero no es capaz de aplicar la transformación simétrica con el fin de distinguir la simetría como propiedad de figuras.*

7.2.2. El proceso de aprender el concepto de transformación, terminología y tipos. Momento 2

La actividad SIA4, nos ayuda a comprender mejor los conocimientos y su avance en los diferentes tipos de isometrías. En efecto, se trata de explicar las características de tres bordados Kosovares (figura 7.6), y *cuáles son las diferencias existentes entre ambos.* En el primero se identifica la simetría con la idea más general de isometría, basada en el concepto de repetición. En el segundo bordado, se proponía identificar los ejes de simetría de una flor compuesta por cuatro partes idénticas colocadas en la posición opuesta respecto a la parte adjunta.

Figura 7.6. Tres diferentes bordados Kosovares

Sabemos que existen tres posibilidades de explicar el fenómeno de la imagen de este bordado: como simetría - doblando cualquiera de la mitad del bordado, doblando la cuarta parte del bordado y como rotación de cualquier mitad del bordado por un ángulo de 180º alrededor del centro del cuadrado. Esto significa que el bordado tiene dos simetrías y una rotación.

El tercer bordado es un ejemplo del concepto de traslación. El bordado presenta una flor repitiéndose consecutivamente y cambiando dos colores - azul y rojo. Consideramos la importancia del color en distinguir las flores, pero si alguien no cuenta en colores, consideramos también correcto en el sentido de transformación matemática.

Continuamos observando la actividad didáctica sobre isometrías (SID) cuando se presenta una videograbación de una clase de Primaria en Gjilani-Kosova, en la que el maestro introduce la definición de la simetría axial. En ese momento, pretendemos notar cuál es la comprensión matemática asociada, por si se dan cuenta que el docente no hace un uso adecuado de la idea, y confunde al alumnado con su intervención particular del fenómeno.

Trayectoria del estudiante Fi en el momento 2.

No hay prácticamente intervenciones de los estudiantes de nivel bajo en esta parte. Por ello, nos permitimos conjeturar que:

Resultado 7.2.7: *A los estudiantes de nivel bajo les cuesta participar en las discusiones sobre las propiedades características de las isometrías.*

En las fichas de trabajo, ellos muestran que para ellos el significado de transformación como objeto matemático es como repetición, desplazamiento o movimiento.

Trayectoria del estudiante Em en fases del momento 2.

En efecto, en un momento el maestro observado en el video concluye la definición de figuras simétricas diciendo que: *"Una figura es simétrica si se puede partir por una recta en dos partes iguales de forma y tamaño".* El docente para la videograbación, pide los comentarios sobre este enunciado por parte de los futuros profesores. La mayoría de ellos no dudan de que el maestro ha dicho algo correcto, pero el docente pide un acercamiento crítico sobre la definición anunciada por parte del maestro:

> Docente: "*Por si a caso si podéis encontrar alguna figura que se puede dividir en dos partes iguales por la forma y tamaño pero que no es simétrico* (en sentido de simetría axial)"
>
> (SID, párrafo 11K)

Para muchos estudiantes es imposible que un maestro cometa errores, y por esto domina un silencio, hasta que precisamente Em intenta defender la confirmación del maestro, pero no pone en duda la definición del maestro observado:

> Em: *Yo pregunto: ¿Si una figura es simétrica es posible dividir en dos partes iguales por la forma y tamaño?,*
>
> Docente: *Si, claro…*
>
> Em: *entonces, es imposible encontrar una figura con estas condiciones…con dos partes iguales… que no es simétrica.*
>
> Docente: *Entonces tú estás de acuerdo con la definición del maestro.*
>
> Em: *Si*
>
> (SID, párrafo 16K)

Sólo más adelante, se da cuenta de que tener una condición - propiedad, no es lo mismo que caracterizar mediante dicha propiedad. Y parece propio de estudiantes de este nivel medio-bajo el que les cueste modificar sus concepciones.

> Docente: *Muy bien. Para demostrar que una figura es simétrica, tu utilizas el doblado* (dirige a Ad)…. *o el espejo* (se dirige a Xhevahire*)….¿Qué piensas tu Em?*
>
> Em: *pero los partes de la letra N son iguales, y partes de la otra figura son iguales, ¿es así?*
>
> Docente: *si, son iguales.*
>
> Em: …*entonces las figuras son simétricas,*
>
> Docente*: ¿cómo son simétricas?*
>
> Em: *porque una parte podemos girar y colocar sobre la otra….tú dices que son iguales… ¿o no?*
>
> (SID, párrafo, 22K)

En base de estas producciones y las de actividades anteriores de Em, podemos constatar que:

Resultado 7.2.8: *Los estudiantes de nivel medio bajo, expresan habitualmente su convicción de que la repetición de un modulo (parte) es la propiedad característica sólo de simetría (la repetición es la propiedad de isometrías), independiente del la manera de hacer esta repetición. Aquí vemos que en las actividades anteriores en general no generalizan a partir de los ejemplos diferentes de isometrías.*

Trayectoria de la estudiante Ad en el momento 2.

Desde el punto de vista formal matemático, Ad pone la confirmación correcta, teniendo en cuenta que toda la isometría está compuesta por simetrías. Pero, su convicción no es esto. Ella expresa un razonamiento erróneo, basado en la regla: *como la simetría es repetición entonces toda la repetición es simetría*. Por lo tanto, no distingue con precisión el concepto de simetría axial, rotación y traslación como distinción. En efecto, inicialmente, Ad responde con prisa que:

> *"los tres bordados son simétricos…"*
>
> [Ad, SIA4, párrafo 1]

Ante su respuesta, el docente interviene, y entonces percibimos como Ad identifica la transformación de repetición, rápido nota la situación e identifica que se trata de la repetición de un tipo distinto:

> Docente: "*Pero cuidado, porque la flor de derecha y la flor de la izquierda…tienen diferentes orientaciones (*se refiere al primer bordado)."
>
> Ad: *"se ve que (*la flor respecto al otro*) está al revés".*
>
> [SI4, párrafo 7]

Sólo a partir del diálogo, es posible que incluso estudiantes de nivel medio alto reconozcan las distinciones entre transformaciones, cuando se trata de identificar precisamente la transformación como modelo común con su jerarquía conceptual.

En este momento, parece que tampoco identifica el fenómeno como transformación puesto que no indica el módulo que genera la forma. En realidad las flores parecen iguales por la forma y su diferencia entre sí es la posición que tienen en el bordado (primer bordado). Para que Ad identifique conceptualmente la transformación de una flor a otra es necesario hacer más preguntas, como: "*¿cómo es posible hacer la flor de la izquierda a partir de la flor de derecha?"* Es esta pregunta la que hace posible aclarar la transformación de una flor en otra, que en este caso para Ad es la rotación:

> Ad: *"para hacer la reproducción de una a partir de la otra tenemos que girar la flor…"*
>
> Shkendije: *"Eso es simetría central, porque el giro se hace respecto a un punto que es el centro del bordado y centro de la simetría central"*
>
> [SIA4, párrafo 9]

Con todo, es una característica del nivel alto, el hecho de que a partir de requerimientos del docente, el alumno sea capaz de identificar con precisión la transformación, evidenciando que conoce los objetos matemáticos correspondientes. En efecto, en su ficha de trabajo, parece que Ad identifica correctamente el concepto de rotación que se caracteriza mediante su ángulo y su centro. Shkendije representa los elementos correspondientes respecto a la simetría central. De todos modos, no es explícita la propiedad de invariancia en base a la descripción de la repetición de la/una misma flor.

Algunos estudiantes perciben (como Ad) la multiplicidad de posibles respuestas de la construcción de los bordados. Para Ad no está claro inicialmente si el bordado tiene 2 o 4 ejes de simetría. Después de un análisis del bordado ella nota que para tener 4 ejes de simetría (diagonales y simetrices del cuadrado central), la octava parte del bordado tiene que ser idéntica (mismo tamaño y misma forma - la propiedad isométrica) y que no lo es, por tanto, en seguida concluye que el bordado tiene dos ejes de simetría (las diagonales del cuadrado central). Pero, Ad no explicita razones de por qué el bordado no tiene 4 ejes de simetría. En la ficha de trabajo, ella ha puesto correctamente dibujando los ejes como en la figura 7.7.

> Ad: "*como tenemos 4 flores dos a dos simétricas entre sí, tenemos dos ejes de simetrías*". [SIA4, párrafo 12]

Figura 7.7.- Ad identifica los ejes de simetría del bordado

En la siguiente conversación, podemos ver la importancia de los elementos gestuales en la consideración de las propiedades de las isometrías. Percibimos también como se producen mejoras sustanciales en la descripción lingüística.

> Ad: *En el segundo bordado tenemos dos simetrías (*piensa en dos ejes de simetrías*)*
>
> Docente: *¿Qué simetrías?*
>
> Ad: *Simetrías axiales.*
>
> Docente: *¿Cuántas simetrías axiales tenemos en este bordado?*
>
> Ad: *Tenemos cuatro simetrías axiales… (*Unos estudiantes dicen "dos". Después, Ad enseñando con la mano y observando el bordado continua) *"no, no… tenemos dos simetrías axiales"*
>
> Docente*: Y ¿por qué no tenemos cuatro simetrías axiales?*
>
> Ad*: Porque... no hay...*
>
> *(S1A4, párrafo 13-21k)*

Analizando el discurso de Ad podemos ver que su conocimiento crece hasta constatar que:

Resultado 7.2.9: La imagen conceptual de transformación geométrica para Ad, empieza desde el nivel de tipo visual (como el cuadrado tiene 4 ejes de simetría, para estudiantes de nivel medio alto es razón de pensar que el bordado tiene también 4 ejes de simetría). La construcción del concepto de simetría, en estos casos, continúa bajo presión del concepto de equivalencia y del concepto de superposición. La idea de usar la equivalencia entre partes simétricas se basa en su experiencia, pero no es suficiente para determinar exactamente las propiedades asociadas al concepto de simetría.

En este caso, el papel clave juega la idea de superponer que ayuda a Ad a destacar que dos ejes (diagonales del cuadrado central) no dejen superponer las partes simétricas del bordado – la condición necesaria para que al final del proceso de construcción del concepto de transformación simétrica ayudara a Ad llegar a conclusión de que el bordado tiene dos ejes de simetría. Como es un concepto recién formado en esta manera, Ad tiene dificultad en explicar por qué otros dos ejes (diagonales del cuadrado) no cumplen condición de ser ejes de simetría.

Otro estudiante de nivel medio bajo explicó con mayor detalle que la razón de no tener cuatro ejes de simetrías es la posición de las flores:

> *"Porque las flores están colocadas de tal manera que cuando colocamos los ejes, ellas no se parten en dos partes iguales"*
>
> [As, SIA4, parágrafo 15]

Esta explicación nos dice que estos estudiantes son capaces de construir el concepto de simetría de una manera diferente de la de Ad, a base de la propiedad simétrica de la figura – dos partes simétricas respecto a una recta (figura 7.8a).

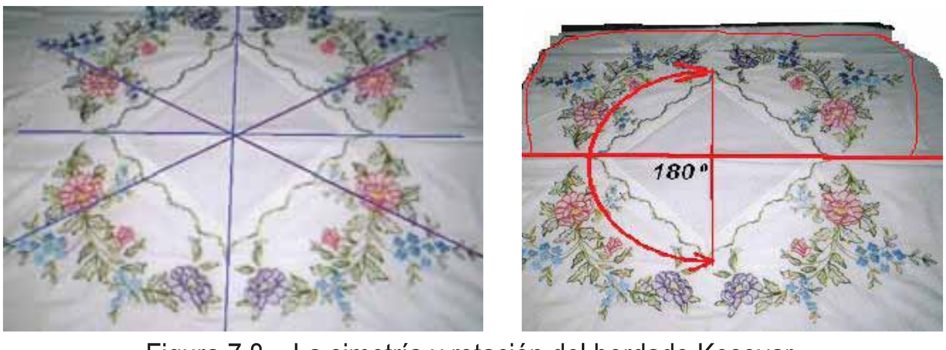


Figura 7.8 – La simetría y rotación del bordado Kosovar.

Ad no identifica la elaboración de este bordado a base de rotación. Otros estudiantes (por ejemplo Sh) explican y identifican que el bordado se obtiene rotando la mitad alrededor del centro por 180º (figura 7.8 b).

La pregunta planteada *¿cuáles son las características del bordado…*? Fue insuficiente para conocer los pensamientos de los estudiantes, y nos dimos cuenta de que se requiere plantear cuestiones más concretas por parte del docente, como: *¿que tenemos aquí* (refiere al tercer bordado)*?,* que produjeron las explicaciones siguientes:

> Ad y Sh*: Repetición…* (Pensando en la figura presentada en el tercer bordado)
> Docente: *¿Qué significa esta repetición?*
> Sh: *Traslación*
> Ad, Em*: Desplazamiento.*

[SIA4, parágrafo 31]

Ad construye el concepto de traslación utilizando la idea de repetición y desplazamiento. La repetición de una parte (en caso de Ad el conjunto de dos flores con diferentes colores) le asegura que se trata de la transformación que conserva el tamaño y la forma.

Como conclusión podemos decir que:

Resultado 7.2.10*: Los estudiantes de nivel medio-alto reconocen la transformación isométrica como desplazamiento físico. La isometría se asocia a transformación por repetición con una regla, pero no llegan aún a establecer relaciones estructurales con imágenes conceptuales bien definidas respecto a la simetría como generador de las transformaciones. Tampoco construyen la idea de isometría como conjunto de transformaciones que, en el plano pueden ser traslaciones, giros o simetrías. Pero comienza a basar la definición en la organización de ejemplos y contraejemplos. Consiguen distinguir la rotación, traslación y simetría como tipos diferentes de isometría.*

Desde una perspectiva figural, la representación del concepto isometría de Ad, es la de una transformación que conserva las figuras, y reproduce un módulo mediante cierta propiedad o regla. Ella consigue distinguir con cierta precisión fenómenos asociados a diversos tipos de transformaciones aisladamente, usando figuras y formas diversas, pero no le es fácil reconocer la estructura del concepto en relación con su clasificación. Del mismo modo, vemos que frente a cada transformación la imagen de repetición pasa “por encima” de las propiedades especificas.

En efecto, ante el fenómeno de la montaña, Ad distingue con claridad el hecho de igualdad o no de las partes supuestamente simétricas, pero no explicita la necesidad de ver otras características de la simetría (distancia igual al eje, orientación opuesta). Sólo en el caso de rotación, la imagen parece bien constituida, apoyada en el centro y el ángulo de giro.

El diálogo permite ver en la actividad de observación de clase, que sólo estudiantes de nivel medio alto reconocen el papel de los contraejemplos en la construcción de definiciones.

> Docente: *Y vosotros, ¿qué pensáis (*se dirige a otros estudiantes*)?*
>
> Unos: *Sí, estamos de acuerdo (*con el maestro*). Pero otros no responden.*
>
> Docente: *Hay alguien ¿que piense diferente del maestro?*
>
> Ad: *Estoy buscando un contraejemplo….pero no puedo…*
>
> Docente: *Supongamos que afirmación del maestro no fuera exacta, buscamos todos un contraejemplo… Digamos que es posible…. (*Domina un silencio… El docente dibuja en la pizarra la letra N - figura 7.9. a).).

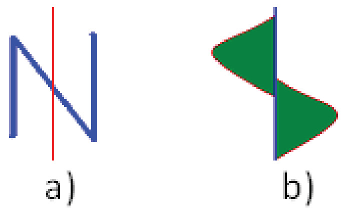


Figura 7. 9

> Docente: *La parte derecha de la letra N es totalmente igual de la forma y tamaño de la izquierda,… ¿es así? …. miramos otro ejemplo* (el docente dibuja otra figura 7.9-b).
>
> Ad: *La letra N no es simétrica porque si la doblamos sus partes no coinciden* (enseña con los manos).
>
> Xhevahire: *Si colocamos el espejo en lugar de la recta, no se ve la letra completa* (pensando en la letra N completa)

A partir de las observaciones, mostramos:

***Resultado 7.2.11**. Estudiantes de nivel medio alto, consiguen hablar de la simetría como característica común de las figuras formadas por repetición, mejorando la imagen de la definición de isometría, separándola de la simetría como caso particular.*

Continuamos el análisis de los estudiantes del grupo FFPUB.

<u>Trayectoria de Al en el momento 2</u>.

Las explicaciones de los estudiantes de nivel bajo, se desarrollan en el ámbito del grupo gracias a los comentarios de los colegas. Así, la explicación de otro estudiante (Jo) ayuda al estudiante Al a comprender y aclarar el concepto de transformación simétrica,

"Claro, al doblar se ve que no son simétricos…"

(Al, *SIA4 , párrafo 5* C)

o identificar correctamente la rotación:

"Si, si, porque la flor esta girado de posición…."

(Al, SIA4, párrafo 19C)

Estamos convencidos de que todos los estudiantes tienen claro que el (primer) bordado presenta la rotación. Los estudiantes tienen claro que una flor tiene que girarse para que se sitúe en la posición de otra. No sabemos el centro de rotación y el ángulo de rotación. En la pregunta directa *¿cuál es el ángulo de giro?,* los estudiantes de grado bajo no responden correctamente, intentando responder con los manos, pero con ciertas dificultades a formular claramente el centro y ángulo de rotación. Esto indica que los estudiantes no tienen la imagen conceptual completa sobre rotación, y la mayoría todavía reconocen la rotación como desplazamiento físico de la figura que conserva forma y tamaño pero no saben determinar el centro y ángulo. Lo mismo ocurre en el tercer bordado, cuando identifica la orientación (hacia la derecha) pero no y el vector de traslación:

"el bordado se obtiene con la repetición de la flor hacia la derecha"

(Al, SIA4, párrafo 43C)

En el desarrollo de la actividad SID, el Al está de acuerdo con la afirmación de que si una figura se puede dividir en dos partes iguales es simétrica.

A base de esto podemos identificar:

Resultado 7.2.12: *Las actividades del momento 2, son buenas actividades para poder construir la imagen conceptual de isometrías para los estudiantes del grado bajo. También posibilitan la distinción de diferentes tipos de isometrías. La imagen conceptual del estudiante de grado bajo, sobre simetría sigue basado en el doblado y equivalencia. Esto indica que no tienen la imagen conceptual completa sobre rotación, y reconoce la rotación como* *desplazamiento físico de la figura que conserva forma y tamaño pero no sabe determinar el centro y ángulo.*

<u>**Trayectoria del estudiante Mc**</u>

La actividad SIA4 implica diferentes acciones y pensamiento de los estudiantes.

Identificamos el caso de Mc que el concepto de transformación simétrica basa en los elementos constituyentes de simetría como el eje de simetría, la distancia igual respecto el eje. La consideración de estos elementos parece que es suficiente para Mc de identificar la simetría en varias situaciones. En la situación presentada en el primer bordado de la actividad SIA4, Mc identifica el eje de simetría ("*uno vertical y otro horizontal*") pero tiene dificultad de establecer la distancia igual de elementos del bordado respecto al eje:

"*No, no hay simetría, porque la flor esta girado de posición*"
(Mc, SIA4, párrafo 21C)

Sobre el primer bordado parece que el estudiante tiene claro que una flor tiene que girarse para que se sitúe en la posición de otra. Pero qué piensa sobre el centro y ángulo de rotación. En la pregunta directa *¿cuál es el ángulo de giro?,* para el estudiante Mc no es difícil identificar el centro de rotación (como ya ha identificado los ejes horizontales y verticales) que será "*…en el medio…",* pero la identificación del ángulo de rotación todavía es difícil de reconocer.

En el secundo bordado, se muestra la capacidad de identificar el bordado como una figura simétrica. La confusión de existencia de dos o más ejes de simetría se desaparece cuando se identifiquen los elementos constituyentes de simetría.

"*el dibujo es simétrico de derecha a izquierda y de arriba abajo…pero no por diagonales*" [Mc, SIA4, párrafo 47c]

En el tercer bordado MC reconoce los elementos visuales de traslación como desplazamiento en dos direcciones (a la derecha y a la izquierda) de un par de flores (con diferentes colores) para obtener todo el bordado, pero no se ve claro si reconoce el vector de traslación (desplazamiento):

"*aquí tenemos desplazamiento de dos flores hacia la derecha y hacia la izquierda*" [Mc, SIA4, párrafo 72]

Como resumen podemos identificar lo siguiente:

Resultado 7.2.13: *Los estudiantes del grado medio-bajo eran capaces de identificar correctamente la simetría, la rotación y traslación en el* *bordado. La imagen conceptual de simetría, rotación y traslación se basa en algunas propiedades relevantes (doblado, equivalencia, eje de simetría, giro alrededor de un punto, desplazamiento). Ellos* no son capaces de distinguir la simetría axial y simetría central, el ángulo de rotación y el vector de traslación.

Trayectoria del estudiante Jo en el momento 2.

La situación presentada en el primer bordado de la actividad SIA4, es un ejemplo que no cumple todos elementos para que identifiquemos la simetría, por esto, Jo, al contrario de Al y Na, afirma:

> *"No, porque para ser simetría, tenía que subir la pequeña (*refiere a la parte pequeña del flor en el bordado*), la más corta tendría que estar en este lado (*enseña la posición abajo*).*
>
> (Jo, SIA4, párrafo 9.)

Los estudiantes de nivel medio alto de Catalunya son capaces de mostrar las características de la simetría a partir de la existencia de un conjunto de elementos constituyentes de las mismas: el eje de simetría, la distancia igual respecto el eje, la posición opuesta y la perpendicularidad respecto el eje. Si consideramos todos estos elementos no es difícil identificar la simetría en cualquier situación.

Esta explicación de Joanna le ayuda, y también a otros estudiantes (Al, Di, Mc, So), a comprender y aclarar el concepto de transformación simétrica, o identificar correctamente la rotación. Pero, los estudiantes además de identificar la rotación, deben reconocer el ángulo y el centro de rotación. En la pregunta directa *¿cuál es el ángulo de giro?,* obtenemos esta respuesta de Jo:

> "el flor se gira cuatro veces…el giro es de un ángulo recto"
>
> (Jo, SIA4, 31C)

Esto indica que el estudiante Jo tiene la imagen conceptual completa sobre rotación, y reconoce la rotación como desplazamiento físico (giro) según un ángulo determinado alrededor un punto (centro).

El proceso de obtener el tercer bordado a partir de un modulo muestra que Jo, reconoce además los elementos visuales de traslación y el vector de desplazamiento:

> "el bordado se obtiene cuando un (o un par si se considera el color) flor según un determinado distancia en dos direcciones"
>
> (Jo, SIA4, 75c)

El desarrollo de la actividad SID, muestra que Jo no distingue la simetría axial y simetría central. En principio está de acuerdo que dos partes iguales forman una figura simétrica, pero cuando se presentan contraejemplos, se consigue construir la imagen completa de simetría axial con el doblado o establecimiento de correspondencia mediante espejo y da cuenta además de la igualdad y al otro elemento de simetría que es equivalencia de distancia respecto al eje de simetría.

A base de todo este, identificamos:

Resultado 7.2.14: *Las actividades SIA1, SIA2 faciliten completar la imagen conceptual de simetría que se ha demostrado en la actividad SIA4 cuando identificaron correctamente la simetría en el bordado. La actividad SIA4 posibilita construir la imagen conceptual de rotación y traslación, y también en la distinción de diferentes tipos de isometrías. La imagen conceptual de simetría se basa en una amplia variedad de ejemplos y todas las propiedades importantes (igualdad, doblado, equivalencia, eje de simetría). La imagen conceptual de rotaciones se establece en el reconocimiento de ángulo y el centro de rotación, mientras que la imagen de traslación en el reconocimiento del vector de traslación. Los ejemplos concretos tienen ahora un papel complementario para dar ideas, verificar conjeturas, etc. que después se corroboran o formalizan al usar las propiedades simétricas.*

7.2.3. El proceso de aprender el concepto de transformación, terminología y tipos. Momento 3. Transformaciones no isométricas.

Analizaremos ahora que ocurre con conocimientos sobre otras transformaciones. Por esto analizaremos la actividad SPP. Se presenta la Videograbación de una clase con los niños de primaria en Catalunya, donde la maestra sale al patio junto con los niños, un alumno se coloca al frente de los otros y se pone de espalda al sol. Delante de él aparece la sombra del alumno. El objetivo es que se identifique la relación entre la sombra, el objeto (un alumno) y la iluminación del sol (Figura 7.10)

Figura 7.10 Observación de sombras en una clase de Primaria

<u>Trayectoria de alumnado de nivel medio alto Ad en el momento 3</u>.

La transformación proyectiva para Ad es un proceso de cambio, a diferencia de la isometría que es la repetición de un módulo. Este cambio se hace convirtiendo el objeto en una sombra.

Ad	Dr	Re	Se	Sh
La sombra es la transformación del objeto en un plano".	*Pienso que la sombra es aplicación del objeto en el plano mediante la luz.*	*Pienso que la sombra es la parte de la luz que se "ocupa" por el objeto.*	*La sombra es algo que se ocurre por causa de la luz.*	*La sombra es una proyección del cuerpo del espacio en una figura semejante al plano.*

Comparamos las explicaciones sobre el significado de la sombra que se da por parte de Ad, Dr, Re, y Se que no han respondido en la Prueba Inicial y de Sh que en la Prueba Inicial ha interpretado la sombra como proyección del cuerpo en el plano. Ahora, Dr y Sh también interpretan la sombra como proyección del cuerpo en el plano, y esta proyección se produce en una figura "semejante" (Sh), mientras que Re usa un término especial: *"sombra es la parte de la luz que ocupa el objeto*".

La interpretación de los estudiantes de nivel medio alto como Re se puede considerar un acercamiento formal del significado de transformación proyectiva. Es evidente que los estudiantes no tienen capacidad de expresar correctamente regularidades y propiedades de la proyección. Las actividades de la sesión SP los ofrece la posibilidad de que los estudiantes identifiquen correctamente los elementos de transformación proyectiva;

> "*La sombra es una representación de un objeto en un lugar cuando hay fuente del luz…*".
>
> *(*Ad, *SPP, párrafo 35)*

Y la dependencia funcional entre estos elementos:

> "*Si el lugar donde cae la sombra está inclinado la sombra del mismo objeto y mismo foco de la luz, es más larga que en el caso cuando el lugar es un plano horizontal…"*
>
> *[*Se: *SPA2, párrafo 22]*

Pero no todos los estudiantes logran distinguir claramente la proyección central de la proyección afín:

> "*Yo pienso que las sombras en este caso (*se refiere a las sombras de dos columnas paralelas) *son paralelas porque el sol es muy lejos y la luz coge las dos columnas en el mismo ángulo*"
>
> [Vj, SPA9, párrafo 43]
>
> *"Cuando se trata del sol como fuente de la luz - puede ser que yo no entiendo bien, pero en global, la lámpara o el sol, es lo mismo, son fuente de la luz y pueden considerarse como punto desde donde salen los rayos de la luz. Para mí son iguales…"*
>
> [Em, SPA9, párrafo 45]

Ellos eran capaces de identificar el patrón de repetición con alguna propiedad importante y en identificar la mayoría de los tipos de transformaciones. La transformación proyectiva se identifica con el fenómeno de la sombra.

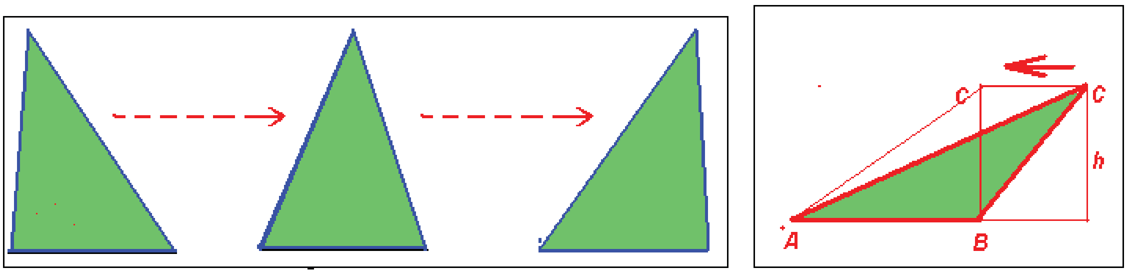
La estudiante Ad reconoce la proyección como dependencia funcional entre elementos de proyección:

> *"en mismo momento,...mismo luz, el mismo objeto (la mano) puede producir dos diferentes sombras..."*
>
> (Ad, SPA4, párrafo 49)

A partir de las observaciones y el análisis de las producciones de los estudiantes, podemos identificar el resultado siguiente:

Resultado 7.2.15: Las *actividades de la sesión SP facilitan que los estudiantes de nivel medio alto interpreten la transformación proyectiva como un proceso de cambio, a diferencia de la isometría como la repetición de un modulo. En general, casi todos los estudiantes de nivel medio Identifican los elementos de proyección (la fuente de la luz, objeto y su imagen-la sombra)*

Observamos ahora las producciones sobre deformaciones. La actividad SAA5 se muestra la transformación dinámica de un triangulo - dos vértices estables y el tercero se desplaza horizontalmente dentro de un segmento (figura 7.11a). Los estudiantes tienen que explicar *la propiedad que se observa en esta transformación.*



a) b)

Figura 7.11. Transformación dinámica del triangulo

Se trata de la transformación con la propiedad de invariancia de la superficie y del cambio de ángulos y los lados del triángulo. Nos interesa que los estudiantes primero identifiquen estas propiedades y luego justifiquen el resultado enunciado. Hemos identificado que Ad identifica correctamente los elementos del triangulo que cambian y los que no cambian. Identifica el cambio de la forma, del perímetro, de la posición, y lo que no cambia es la superficie, el base del triangulo y la altura del triángulo. Como ilustración presentamos la parte del dialogo con Ad, que hace una justificación correcta de que la superficie del triangulo no cambia utilizando la simbolización correcta (la fórmula del cálculo del triangulo) a base de la definición de la superficie del triangulo como producto de la base y altura (Figura 7.11b):

> Ad: *El triangulo se convierte en un triangulo rectángulo…..*
> Docente: *¿Que cambia en este proceso? ¿Que no cambia?*
> Ad: *La altura del triangulo cambia.*
> Docente: *¿Que otros cambios tenemos?*
> Ad: *Cambian los ángulos y los lados y no cambia la superficie y altura.*
> Docente: *Como podes argumentar que no cambia la superficie.*
> Ad: *La superficie del triangulo es una función de la base y de la altura* $S = b \circ \frac{h}{2}$. *Como la base no cambia, y la altura no cambia,…entonces la superficie es constante independiente de la posición del vértice de arriba.*

A partir del desarrollo de esta y de la actividad SAA4 identificamos:

Resultado 7.2.16: *La presentación dinámica de un deformación hace posible que los estudiantes logran reconocer y identificar los elementos de la deformación como transformación constituido por los invariantes (elementos que se conservan) y los variables (los elementos que cambian).*

Como resumen, a base de los resultados y el análisis del desarrollo de la construcción del concepto de transformación geométrica del estudiante Ad, en los momentos M_1, M_2 y M_3 incluyendo y la Prueba Inicial (M_0), mostramos su trayectoria con la figura 7.12.

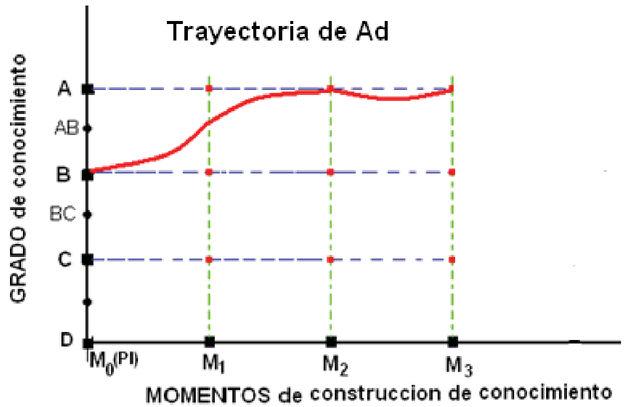


Figura 7.12. Trayectoria del estudiante Ad en la construcción del concepto de transformación

Trayectoria del estudiante Em

En toda la actividad SPP, el Em muestra que la transformación proyectiva es un proceso de cambio diferente de la isometría. El producto de la proyección del objeto es una sombra. Em interpretan *la transformación del objeto en un plano* como un cambio bajo condiciones de existencia del foco de la luz, del objeto que se proyecta y el lugar donde se aparece su sombra. Durante este proceso identifican posibilidades de diferentes cambios de la sombra: cuando es más grande o más pequeña, en función de diferentes posiciones del objeto y el foco de la luz. En la respuesta de Em en la pregunta del docente:

> *¿Cómo y bajo cuales condiciones cambia la sombra de un objeto?*
>
> *(SPA4, párrafo 42)*

Em reconoce la posición del foco de la luz dando mayor prioridad.

> ”la sombra del objeto será más grande o más pequeña según la posición del foco de la luz…si el foco de la luz es más cerca del objeto la sombra será más grande …. ”
>
> (Em, SPA4, párrafo 54)

A base de análisis de las producciones de Em, identificamos:

Resultado 7.2.17: *Como todos los estudiantes del grado medio-bajo interpretan la proyección como un proceso de cambio, identifican los elementos de proyección. Hay una tendencia de reconocer la dependencia funcional entre los elementos de proyección, pero aun no se consigue y se queda en prioridades no correctas de algún elemento respecto otros.*

Como resumen del análisis del proceso de construcción de conocimiento del estudiante Em sobre el concepto de transformación, terminología y tipos mostramos gráficamente su trayectoria en la figura 7. 13.

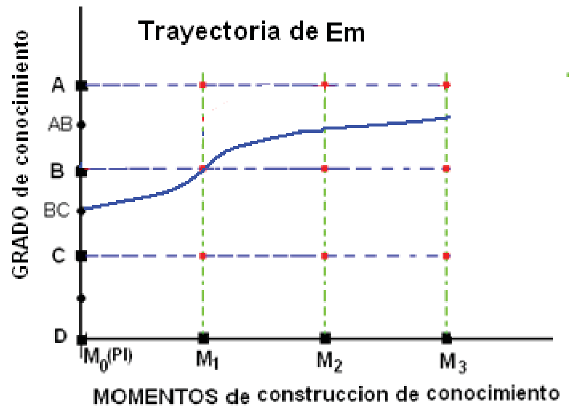


Figura 7.13. Trayectoria de Em sobre el objeto transformación, terminología y tipos.

Trayectoria de estudiante Fi.

El estudiante con un grado bajo de conocimientos en la prueba inicial, el concepto de proyección interpreta como un fenómeno que ocurre como consecuencia del fuente de la luz. Su acercamiento al concepto de proyección es informal, sin reconocimiento de regularidades y propiedades de la proyección.

Pero el desarrollo de las actividades de la sesión SP facilitan que Fi identifique los elementos relevantes de proyección (la fuente de la luz, objeto y su imagen-la sombra), y la tendencia de reconocer la dependencia funcional entre elementos de proyección.

A partir de los análisis de las producciones del estudiante Fi en todos los momentos observados a partir de la prueba inicial (M0), presentamos gráficamente su trayectoria en la tabla 7.14

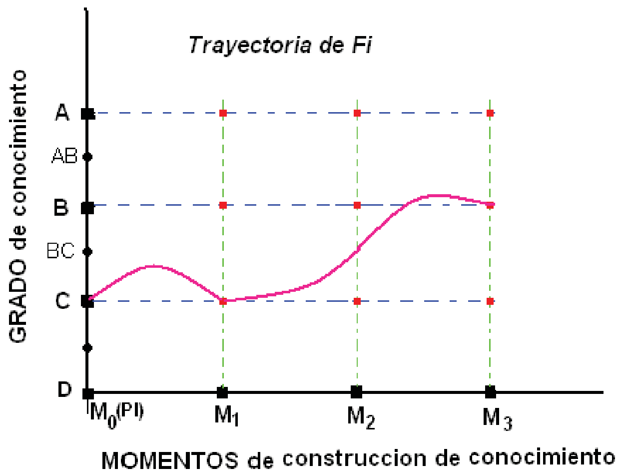


Figura 7.14. Trayectoria de Fi sobre el objeto transformación, terminología y tipos

A continuación hablamos de las trayectorias de las estudiantes del grupo de FFPUB (Catalunya).

Trayectoria de estudiante Al.

La imagen conceptual de la transformación proyectiva se identifica con el fenómeno de la sombra. La interpretación del Al es acercamiento intuitivo del significado de transformación proyectiva. Reconoce los elementos de proyección pero no la dependencia funcional entre los elementos de proyección.

Como resumen, presentamos gráficamente la trayectoria del estudiante Al en la tabla 7.15, mostrando en todos los momentos observados incluido la prueba inicial como M_0.

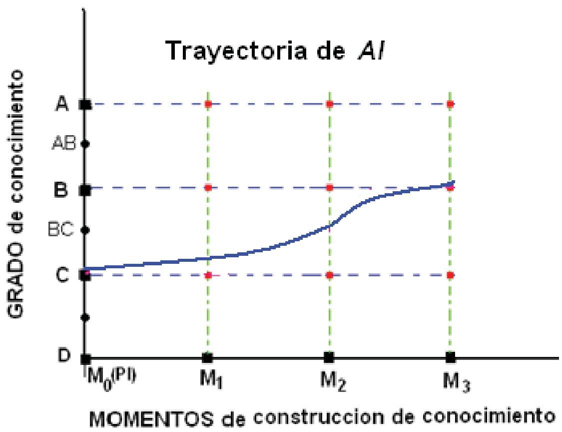


Figura 7.15. Trayectoria de Al sobre el objeto transformación, terminología y tipos

Trayectoria de Mc

El Mc, considera que las proyecciones son manifestaciones de la vida cotidiana y deben ser comprendidas para los estudiantes. La manifestación de proyección es la sombra, que se interpreta como un cambio como una transformación diferente a la isometría:

> "Al estudiar el fenómeno de la sombra, se ven claros las diferencias entre simetría que conserva la forma y la proyección que no lo conserva"
>
> (Mc, SPP, párrafo 39)

El estudiante Mc, identifica los elementos de proyección y hay una tendencia a reconocer las regularidades y propiedades relevantes de la proyección como el orden entre la fuente de la luz, objeto y su sombra:

> "La sombra se tiene que poner en el otro lado de la fuente de la luz. El sol proyecta sobre el objeto y la sombra se forma al otro lado..."

(Mc, SPP, 44C)

Identificamos el resultado siguiente:

Resultado: 7.2.18: *Las actividades de la sesión SP facilitan la interpretación de transformación proyectiva como un proceso de cambio a diferencia de la isometría como la repetición de un modulo. Se reconocen los elementos de proyección pero no hay reconocimiento de la dependencia funcional entre los elementos de proyección por parte del estudiante con un grado medio-bajo.*

A partir de los resultados de análisis de las producciones del estudiante Mc, presentamos gráficamente (figura 7.16) su trayectoria entre los momentos observados, sobre la construcción de conocimiento sobre el objeto transformación, terminología y tipos.

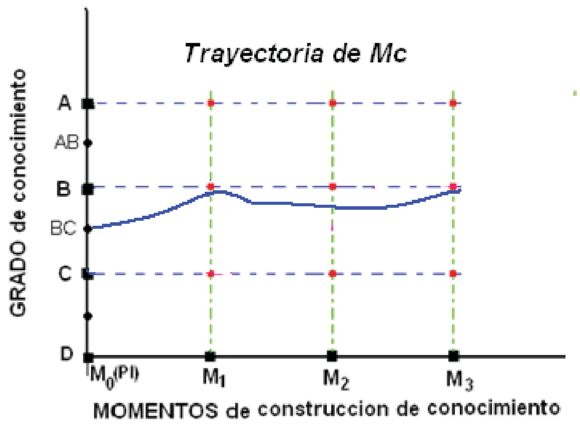


Figura 7.16. Trayectoria de Al sobre el objeto transformación, terminología y tipos

<u>**Trayectoria de estudiante Jo.**</u>

El estudiante con un grado medio de conocimientos en el momento M_0 (PI) como mayoría de otros estudiantes, identifica el fenómeno de la sombra con el concepto de transformación proyectiva. Identifica los elementos de proyección (la fuente de la luz, el objeto y su sombra) y reconoce la dependencia funcional entre los elementos de proyección.

Además de esto, Jo, reconoce las propiedades importantes de la proyección, como son la orden entre elementos de proyección, la proporcionalidad entre magnitudes del objeto y su sombra, la continuidad entre el objeto u su sombra, que desde otro punto de vista muestran la presentación funcional de proyección.

> *"La sombra tiene que poner en el otro lado del objeto respecto el sol. El sol proyecta sobre el objeto y la sombra se forma al otro lado. ….Las sombras están guardan una proporción adecuada. Un objeto pequeño tiene una sombra más pequeña que un objeto grande que ha de tener una sombra más grande. ….. La sombra se forma a continuación enganchada a los objetos…"*
>
> (Jo, SPA9, párrafo 48-50 C)

A pesar de la tendencia de reconocer la dependencia funcional entre los elementos de proyección, Jo no muestra capacidad de distinguir la diferencia entre proyección central y afín.

A base de este y los análisis de los momentos anteriores, mostramos gráficamente la trayectoria de Jo en la figura 7. 17.

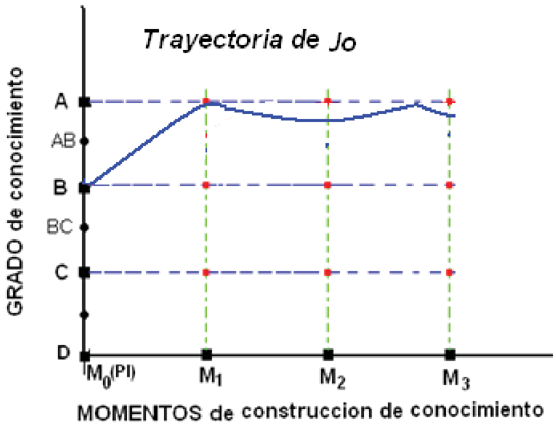


Figura 7.17. Trayectoria de Jo sobre el objeto transformación, terminología y tipos

7.2.4. El proceso de aprender relaciones y estructuras sobre transformación.

En la prueba inicial (5.3.2) habíamos visto que sólo el 22% de los futuros profesores del grupo FEUP y 38% del grupo FFPUB, dan un resultado de buen conocimiento de relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica. Observamos a continuación las producciones de los participantes de la práctica de formación docente, sobre este aspecto del contendido matemático de la transformación geométrica.

Empezamos tratar las trayectorias de los estudiantes de ambos grupos.

Trayectorias de los estudiantes en el momento M1.

El desarrollo de las actividades del momento M1, se ha diseñado principalmente para el desarrollo de la idea conceptual de transformación geométrica. Esto es la razón de que las producciones de los participantes de la investigación sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica son poco notables. El tratamiento de este observamos en al desarrollo de las actividades del momento M2 y del momento M3.

Continuamos el análisis de las producciones de los estudiantes en los momentos M2 y M3.

Trayectoria del estudiante Fi (grado bajo FEUP) en M2.

En el apartado 7.2.1 hemos visto que los estudiantes hablan de *repetición* como característica común de los bordados cuando explican *las características de cada uno de los tres bordados* y *cuáles son las diferencias entre los bordados,* dentro de la actividad SIA4. Los bordados de SIA4 representan respectivamente una simetría, rotación y traslación que son posibles de expresar mediante uno, dos o tres simetrías axiales; pero, no hemos notado que los estudiantes de bajo grado, como es el caso de Fi, expresan la capacidad de identificación de esta relación entre simetría y rotación y entre la simetría y traslación. Es evidente que los estudiantes tienen dificultades en la identificación de esta proposición.

Trayectoria del estudiante Al (grado bajo FFPUB) en el momento M2.

Tampoco en FFPUB, según los resultados de la Prueba Inicial (PI) no eran capaces de identificar las relaciones entre simetría y traslación o rotación, las relaciones entre propiedades de una transformación y tampoco de establecer la jerarquía entre propiedades dentro de una transformación, o dentro diferentes transformaciones. Los estudiantes de la FFPUB reconocen que la repetición de un módulo es la característica común de los bordados cuando explican *las características de cada una de tres bordados* y *cuáles son las diferencias entre los bordados,* dentro de la actividad SIA4.

Resultado 7.2.19. *En el caso del alumno de nivel bajo de conocimientos, tanto en el grupo FEUP como en el grupo FFPUB, sobre transformaciones geométricas, encontramos que conoce débilmente la simetría axial y la rotación sin capacidad de identificar las relaciones de composición entre simetrías. Asimismo, no identifican las propiedades de cierta transformación.*

Trayectoria del estudiante Em (grado medio bajo FEUP) en el momento M2

Los alumnos de nivel medio-bajo llegan a la conclusión de que el producto de dos simetrías axiales con los ejes paralelos es una traslación (Em, Sh, etc.) y el producto de dos simetrías axiales con los ejes cruzados es una rotación con el centro en la intersección de los ejes. Los detalles no se desarrollan con la misma facilidad. Es decir, no es fácil identificar como cambia en cada caso el vector de traslación, el ángulo de rotación, la orientación, etc., así como ver la influencia de las posiciones relativas de los ejes de simetría.

La discusión durante el desarrollo de la actividad con los bordados hace posible que los estudiantes mejoren su conocimiento sobre la distinción de las diferentes transformaciones isométricas y sobre la estructura de las transformaciones identificando los elementos de cada una de transformaciones isométricas. Las relaciones entre simetría axial y traslaciones y rotaciones se reconoce empleando sólo los recursos (papel cuadriculado, y los espejos) en la sesión SR.

<u>**Trayectoria del estudiante Ad (grado medio FEUP) en el momento M2**</u>

La estudiante Ad reconoce que *repetición* es la característica común de los bordados cuando expliquen *las características de cada una de tres bordados,* dentro de la actividad SIA4. Tres diferentes bordados presentan cada una el caso de simetría, rotación y traslación. Desde el punto de vista matemático, toda transformación isométrica es posible expresar mediante uno, dos o tres simetrías axiales; pero, como podemos ver en las producciones posteriores, los estudiantes tienen dificultades con la identificación de esta proposición.

Una mediación apropiada por parte del docente es necesaria para todos estos aspectos del proceso de formulación de enunciados y la identificación de relaciones y jerarquías en la noción de transformación. Ilustramos como con el proceso de establecer las relaciones entre conjetura, regularidades y condiciones (propiedades) se consigue construir el conocimiento correcto sobre cierta transformación.

Después de que los estudiantes enuncian que "*los tres bordados* (SIA4) *son simétricas*", el docente interviene pidiendo "*¿cómo explicamos esto*?". Sigue el proceso de pensamiento de los estudiantes en la búsqueda de condiciones:

> *"El* (primer) *bordado es regular. Digamos que para hacer la flor tenemos que girar....las flores son iguales cuando giramos y comparamos"*
>
> [Ar, SIA4, párrafo 17]
>
> *"En el segundo bordado tenemos dos simetrías*
>
> [Ad, SIA4, párrafo 29]
>
> "(En el tercer bordado) *tenemos la repetición que se hace por desplazamiento…"*
>
> [Em, SIA4, párrafo 43]

Esto significa que la actividad con los bordados hace posible establecer las relaciones entre la repetición y las isometrías.

La cuestión de establecer relaciones estructurales respecto a la simetría como generador de las isometrías, se trata en las actividades como en SRA8 y SRA10 donde se presenta la traslación como producto de dos simetrías con ejes paralelos, y en la actividad SRA7 y SRA9 donde se presenta la rotación como producto de simetrías con los ejes cruzados.

Figura 7.18. Relaciones entre simetría, rotaciones y traslaciones

La actividad SRA9 trata de obtener de manera directa y creativa la imagen compuesta por 8 muñecas a partir de una. Los estudiantes identifican rápidamente la relación entre las posiciones de los espejos y la imagen inicial, experimentando la misma actividad con otros objetos (figura 7.18.a)).

Las relaciones entre las posiciones de los espejos y las rotaciones de la imagen inicial fueron experimentadas con éxito por todos los estudiantes. La diferencia consiste que no todos eran capaces de interpretar el fenómeno. En la pregunta del docente "*¿qué comentario tenéis sobre este fenómeno*?" obtenemos diferentes interpretaciones:

> *"siempre se producen un numero de imágenes del objeto cuando los espejos están más cerca al objeto"*
>
> (Fi, SRA9, párrafo 26)
>
> *"el numero de los imágenes es más grande si el ángulo entre espejos es más pequeño…"*
>
> (Em, SRA9, párrafo 28)
>
> *"el numero de los imágenes es en función del ángulo entre los espejos…si queremos tener 4 imágenes el ángulo entre espejos es la cuarta parte del ángulo de 360 0)*
>
> (Ad, SRA9, párrafo 35)

Lo mismo ocurrió con la traslación como producto de las simetrías con los ejes paralelos (figura 7.18b).

Trayectoria del estudiante Mc y Jo (grado medio-bajo y medio alto del FFPUB) en el momento M2.

La actividad con los bordados hace posible establecer las relaciones entre la repetición y las isometrías.

> "(En el tercer bordado) *tenemos la repetición que se hace desplazando una parte…"*
>
> (Mc, SIA4, párrafo 41c]

Analizando el desarrollo de la actividad SIA4, vemos que en principio los estudiantes de FFPUB no identifican los bordados según diferentes tipos de isometrías, y no establecen relaciones entre ellas. Eso se ve en el diálogo siguiente:

> Docente: *"¿Qué diferencias hay entre el uno, el dos y el tres? ¿Qué diferencias importantes veis*?
>
> Jo: "*la diferencia entre los bordados consiste en las diferentes posiciones*"
>
> Docente: *"¿si, los dibujos son diferentes, pero a ver, lo de primero ¿es simétrico*?".
>
> [SIA4, párrafo 5-9]

Sigue el proceso de pensamiento de los estudiantes en la búsqueda de las condiciones para que un "dibujo" sea simétrico o no.

> Mc: "*no"*
>
> Al: "*si*"
>
> Mc: "*no son simétricos porque en el primer bordado la flor es como al revés del segundo* (gestiona refiriendo el doblado)"
>
> Al (y otros): "*Si, si, así es*"
>
> [SIA4, párrafo 10-15c]

En el caso de la UB vemos que Mc establece la relación entre simetría y el doblado.

Resultado 7.2.20. *Principalmente los estudiantes identifican la relación entre repetición y simetría, repetición y rotación; la relación entre repetición y traslación, pero no muestran la capacidad de identificar la relación entre simetría axial y rotación y traslación. Primero, las actividades no han facilitado la producción de una conjetura sobre la relación entre diferentes isometrías y la construcción de su prueba. Esto es posible si hacemos una selección de situaciones problemáticas apropiadas donde este proceso funcionara* *suavemente. Hemos identificado intenciones de producción de la conjetura (todos los bordados son simétricas) identificación de regularidades (los bordados se forman por repetición de una parte), identificación de condiciones bajo cuales tales regularidades ocurren (rotando/traslado/doblando la parte que se repite) y ausencia de formulación del enunciado que expresa la relación entre simetría, rotación y traslación.*

La mayoría de los estudiantes de la FFPUB, a diferencia de los de la FEUP llegan a la conclusión que el producto de dos simetrías axiales con los ejes paralelos es una traslación, y el producto de dos simetrías axiales con los ejes cruzados es una rotación con el centro en la intersección de los ejes. No todos los estudiantes consiguen elaborar en detalle las otras relaciones, p.e., el vector de traslación, el ángulo de rotación, la orientación, etc. Analizando el desarrollo de las actividades SRA8 y SRA10 donde se presenta la traslación como producto de dos simetrías con ejes paralelas, vemos que un número de estudiantes de nivel medio-alto logran reconocer y establecer la relación respecto a la simetría como generador de las isometrías.

Igualmente, el desarrollo de las actividades SRA7 y SRA9 donde se presenta la rotación como producto de simetrías con los ejes cruzados muestra el reconocimiento de la relación entre simetrías y rotaciones.

Resultado 7.2.21: *Los estudiantes de nivel medio bajo, tienen dificultades en reconocer relaciones estructurales.*

Veamos a continuación la observación de las producciones de los estudiantes en el momento M3.

<u>Trayectoria del Fi, Em y Ad (FEUP) en M3.</u>

Identificamos a continuación la capacidad de reconocer la relación entre elementos de transformación proyectiva por parte de los estudiantes en las actividades de la sesión de transformación proyectiva (SP).

Con el fin de aclarar la relación entre la fuente de la luz, el objeto y su sombra el docente continúa preguntando: *¿Cómo y bajo cuáles condiciones cambia la sombra de un objeto?*

> *"depende del lugar donde se "cae" la sombra…si el lugar es plano o no es plano, o es inclinado o no"*

(Fi, SPP, párrafo 43k).

El estudiante Fi reconoce una relación entre la sombra y el lugar donde aparece la sombra. Pero, él no llega a identificar las relaciones entre otros elementos de proyección. ¿Si consideramos que el lugar es siempre plano, significa que no tenemos cambios de la sombra? Según la interpretación de Fi, en este caso (si el lugar es siempre plano, no hay cambio de la sombra.

Considerando las observaciones en todos los momentos, mostramos el grafico de trayectoria del Fi con la figura 7.19.

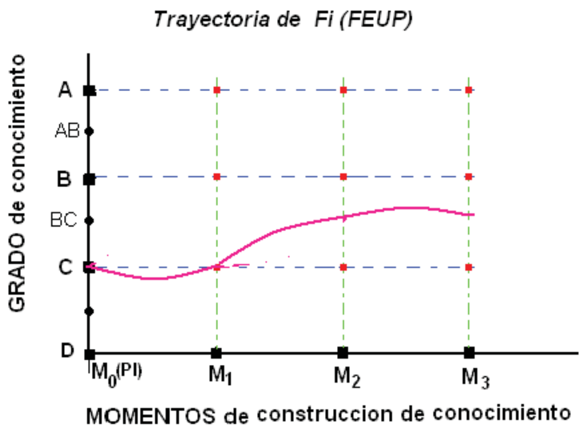


Fig. 7.19. Trayectorias de Fi sobre el aprendizaje de relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica

En la misma pregunta de interpretar los cambios de la sombra de un objeto, el estudiante Em responde:

> *"La sombra es más grande cuando la fuente de la luz es más debajo o más cerca del objeto* (enseña con el lápiz en la mesa,- figura 7.20). *Si la luz esta bajo (un poco encima de la mesa) la sombra del lápiz será grande hasta el plafón…"* (Em, SPP, párrafo 43k).

Figura 7.20. La interpretación del cambio de la sombra por Em

El cambio de la sombra en función de la posición de la fuente de la luz por parte de Em, no es la explicación suficiente y no es correcto en todos los casos. Esto es porque el cambio de la sombra de un objeto es una función (dependencia) de más variables y no se trata de una dependencia de solo un variable. Basta considerar el caso cuando tenemos el cambio de posición de la fuente de la luz y en mismo tiempo el cambio (determinado) de posición del plano de la sombra, obtenemos siempre la misma sombra, o no efectuamos ningún cambio de la sombra. Todo esto nos lleva a constatar que Em, no ha conseguido reconocer completamente relaciones entre elementos de la transformación proyectiva.

Considerando el análisis de las producciones de Em en todos los momentos, mostramos gráficamente su trayectoria de reconocimiento de relaciones y jerarquías en la noción de transformación, con la figura 7.21.

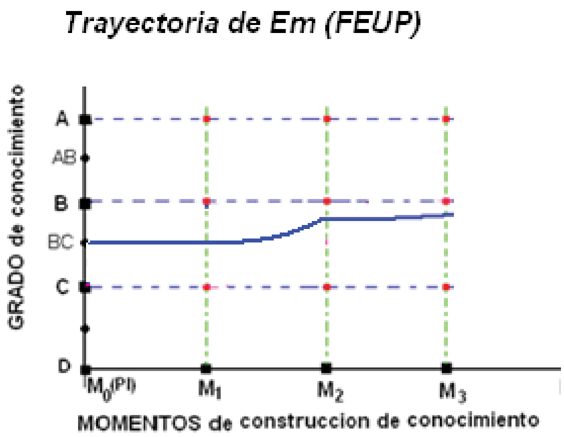


Fig. 7.21. Trayectoria de Em sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación

La interpretación de las relaciones entre elementos de proyección por parte de Ad, es más completo. En el problema de explicar el fenómeno del cambio de la sombra de un objeto, ella responde:

> *"Yo pienso que la sombra de un objeto cambia si cambia la posición de la fuente de la luz o la posición del objeto* (enseña dos posiciones de la mano Figura 7.22)*, en mismo momento,...misma luz, el mismo objeto (la mano) puede producir dos diferentes sombras"*
>
> (Ad, SPP, párrafo 49)

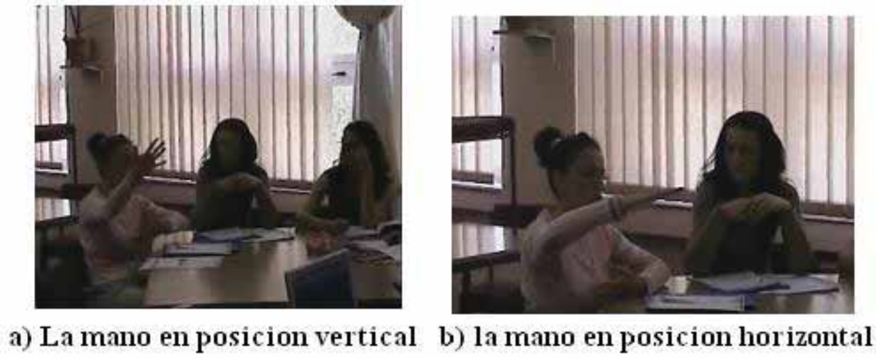


Figura 7.22. Explicacion de Ad sobre la relacion entre posicion del objeto y su sombra

Para explicar el cambio de la sombra, Ad identifica dos condiciones - el cambio de la posición del foco de la luz y el cambio de la posición del objeto. La relación entre elementos de proyección en el caso de Adelina es una función de dos variables. La sombra por sí misma no tiene sentido sin el objeto y el foco de la luz. Ella muestra la capacidad de identificar la relación entre posición del objeto y su producción - la sombra (figura 7.22), enseñando dos posiciones de su mano en la posición horizontal y vertical, confirmando que el mismo objeto puede producir diferentes sombras cuando cambia posición.

En la figura 7.23, mostramos la trayectoria de Ad.

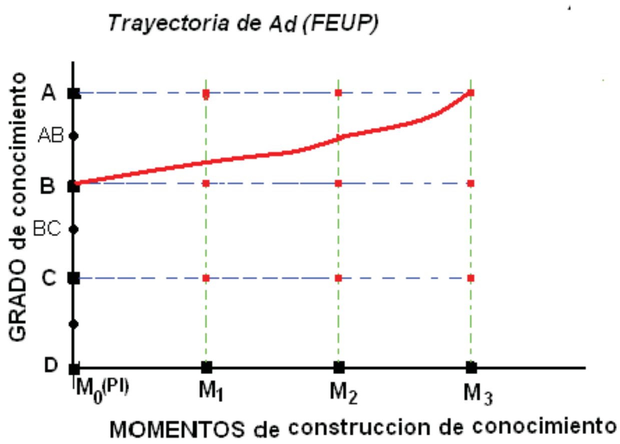


Figura 7.23. La trayectoria de Ad sobre las relaciones y jerarquías

Es evidente constatar que "*la sombra es la proyección del objeto*", que "*para tener la sombra es necesario la fuente de la luz, el objeto y el lugar donde aparece la sombra*", y que "*la sombra es diferente del objeto…*". A base de esto podemos identificar:

Resultado 7.2.22: *Las actividades de la sesión SP muestran que los estudiantes son capaces de identificar la transformación proyectiva con el fenómeno de la sombra, las relaciones entre elementos de proyección y la relación entre objeto (espacial o plano) y su imagen proyectiva que es siempre plano*. Los resultados son análogos en ambos grupos.

A continuación presentamos las trayectorias de los participantes del grupo FFPUB.

<u>Trayectorias de Al, Mc, y Jo (FFPUB) en M3</u>.

Como hemos constatado antes (7.2.3), el estudiante Al, con un grado bajo de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en PI, reconoce los elementos de proyección pero no la dependencia funcional entre los elementos de proyección.

Como resumen, presentamos gráficamente la trayectoria del estudiante Al en la figura 7.24, considerando sus producciones en todos los momentos observados incluido la prueba inicial M_0.

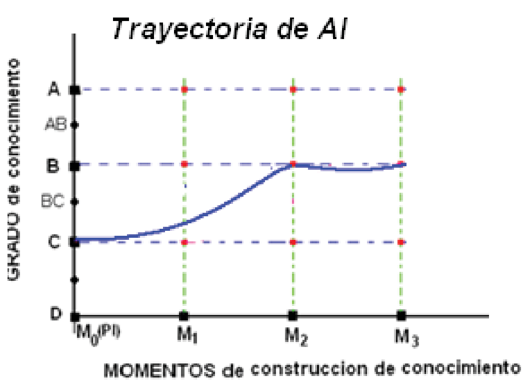


Figura 7.24. Trayectoria de Al sobre las relaciones y jerarquías en la transformación

El estudiante Mc con un grado medio-bajo de conocimientos, identifica los elementos de proyección y hay una tendencia de reconocer las regularidades y propiedades relevantes de la proyección como el orden entre la fuente de la luz, objeto y su sombra:

> "La sombra se tiene que poner en el otro lado de la fuente de la luz. El sol proyecta sobre el objeto y la sombra se forma al otro lado..."
>
> (Mc, SPP, 44C)

Identificamos el resultado siguiente:

Resultado: 7.2.23: *Las actividades de la sesión SP facilitan reconocimiento de los elementos de proyección pero no hay reconocimiento de la dependencia funcional entre los elementos de proyección por parte del estudiante con un grado medio-bajo.*

A base de los resultados de análisis de las producciones del estudiante Mc, presentamos gráficamente (figura 7.25) su trayectoria entre los momentos observados, sobre la construcción de conocimiento de relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica.

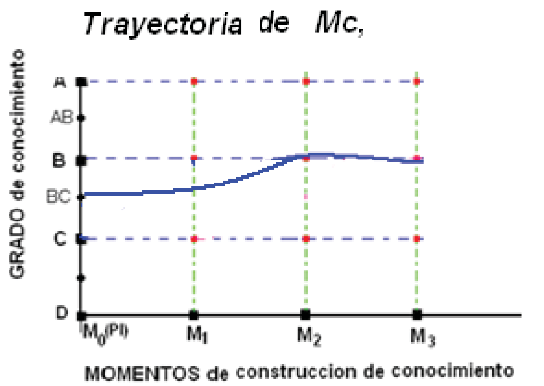


Figura 7.25. Trayectoria de Mc sobre relaciones y jerarquías en transformaciones

El estudiante Jo, con un grado medio de conocimientos en el momento PI, como la mayoría de otros estudiantes, identifica el fenómeno de la sombra con el concepto de transformación proyectiva. Identifica los elementos de proyección (la fuente de la luz, el objeto y su sombra) y reconoce la dependencia funcional entre los elementos de proyección.

Además de esto, Jo, reconoce las propiedades importantes de la proyección, como son la orden entre elementos de proyección, la proporcionalidad entre magnitudes del objeto y su sombra, la continuidad entre el objeto u su sombra, que desde otro punto de vista muestran la presentación funcional de proyección.

> *"La sombra tiene que poner en el otro lado del objeto respecto el sol. El sol proyecta sobre el objeto y la sombra se forma al otro lado. .... Las sombras conservan una proporción adecuada. Un objeto pequeño tiene una sombra más pequeña que un objeto grande que ha de tener una sombra más grande. ..... La sombra se forma a continuación enganchada a los objetos..."*
>
> (Jo, SPA9, párrafo 48-50 C)

A base de este y los análisis de los momentos anteriores, mostramos gráficamente la trayectoria de Jo en la figura 7. 26.

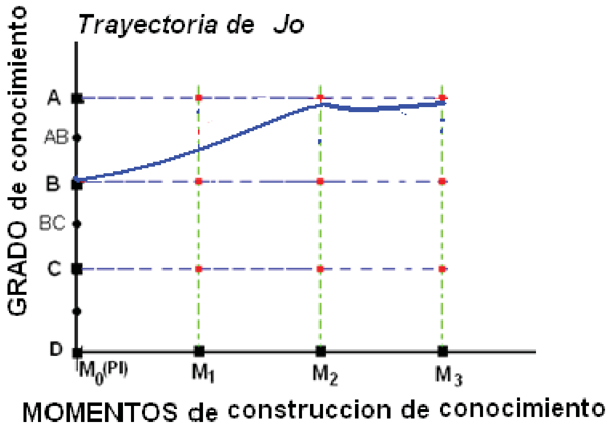


Figura 7.26. Trayectoria de Jo sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación

Es evidente constatar que "*la sombra es la proyección del objeto*", que "*para tener la sombra es necesario la fuente de la luz, objeto y lugar donde aparece la sombra*", y que "*la sombra es diferente del objeto...*". A base de esto podemos identificar:

Resultado 7.2.24: *Las actividades de la sesión SP muestran que los estudiantes son capaces de identificar la transformación proyectiva con el fenómeno de la sombra, las relaciones entre elementos de proyección y la relación entre objeto (espacial o plano) y su imagen proyectiva que es siempre plano*. Los resultados son análogos en ambos grupos.

7.2.5. Comprensión instrumental de transformación. La transformación como proceso o cambio

El aspecto importante del significado de transformación geométrica es el conocimiento sobre el proceso de transformación. Es simetría un *objeto o una transformación.* Aunque no una transformación cualquiera: una simetría de un objeto es una transformación que deja su aspecto *aparentemente igual.* Decimos "aparentemente" porque, aunque después de la transformación la forma general del objeto es la misma de antes, el objeto se ha movido. Por ejemplo, supongamos que existe una forma ideal del cuerpo humano en la que el lado izquierdo es exactamente igual que el lado derecho. ¿Exactamente? Bueno, si tuviéramos la mano izquierda *exactamente igual que* la mano derecha, necesitaríamos dos guantes de la mano derecha y no importaría qué guantenos pusiéramos en cada mano. Ciertamente, los dos lados no son exactamente iguales: coinciden si se superponen las dos mitades una encima de la otra. Por eso, cuando un ser humano se mira en un espejo, aparece en éste la imagen de un ser humano. En los seres humanos reales existen sutiles diferencias entre ambos lados: por ejemplo, el corazón de la imagen de una persona en un espejo no está en el lado en que debería estar. Básicamente se trata de una *receta* para realizar movimientos de objetos.

A cada posible objeto, la transformación le asocia un segundo objeto: *su imagen*. Supongamos, por ejemplo, la transformación de una semirrecta *Oa*, respecto simetría con el eje ortogonal. Consideramos también la transformación de los objetos - los números, y que la transformación es "*asociar a cada numeró su opuesto (negativo)*". Así, la imagen de un número, digamos el 7, sería su opuesto, -7. Obsérvese que hemos dicho que una transformación es una *receta*:, se trata de *un proceso* para determinar la imagen, no de la imagen misma. Este proceso en concreto se puede expresar algebraicamente como la orden "*multiplicar por -1*" y esto es lo que determina la transformación. Para captar mejor la idea, es conveniente pensar que una transformación simétrica es un movimiento: tómese el objeto, cámbiese su posición y colóquese de nuevo "sobre él mismo", es decir, en el mismo lugar en que estaba al principio. Es costumbre pensar en los números como si estuvieran dispuestos a lo largo de una línea recta, estando situados los negativos en la parte izquierda y los positivos a la derecha. La definición algebraica de la transformación anteriormente mencionada era "*multiplicar por -1*". La definición geométrica de la transformación por simetría es reflexión de la semirrecta. Esto intercambia los lugares de los números negativos y positivos, es decir, intercambia las mitades izquierda y derecha de la recta numérica: dicho geométricamente, se trata de una reflexión. A veces se prefiere pensar que es una rotación: basta con hacer girar la línea recta mediante un ángulo de 180ª en torno a su punto central - lo que es una relación en la noción de transformación tratado en el 7.2.4.

Hay algo aún más importante que debemos entender en relación con este tipo de imágenes: la única información que tiene importancia es *la correspondencia* entre los puntos iniciales y sus imágenes mediante este "movimiento".

Desde el análisis de la prueba inicial sabemos que los participantes de las sesiones de la práctica de formación docente, no poseen un grado alto de conocimientos sobre los procesos de transformación. A continuación observamos los desarrollos de las actividades y las consecuencias en el ámbito de conocimientos sobre los procesos de transformaciones.

Momento 1. Análisis y resultados

Todas las actividades directamente o indirectamente tratan el significado de transformación geométrica como proceso, operador, dependencia funcional o un cambio determinado.

Trayectoria de Fi en M1.

En el desarrollo de las actividades, Fi muestra dificultades en la identificación de la simetría en las figuras del mosaico, y el concepto de simetría resulta esencial para conferirle sentido al problema de caracterizar en una figura asignada las isometrías respecto de las cuales está unida. Esto se ve, cuando el docente plantea a Fidan la pregunta directa siguiente: *"¿qué tiene que ver esta actividad con la simetría?*" y Fidan responde:

> "*estas rectas (enseña las rectas de la figura 7.1-2) significan los ejes de simetría para este figura*"
>
> [Fi, SIP, Párrafo 8]

Fidan enseña los ejes de simetría de la figura.

Observando las producciones de Fi, podemos conjeturar que el significado de transformación para Fi es una “acción” o “actuación” que se materializa con el doblado o el espejo. En la actividad SIA2, Fi está pensando en reconocer las diferencias entre las imágenes:

> “*En la primera figura existen diferencias entre la mano derecha y la imagen de la mano derecha en el “espejo”, pero son pequeñas…”*
>
> [Fi, SIA2, párrafo 7]

Desarrollando la actividad SIA3, buscando la repetición en la imagen de la boca, Fi consigue identificar las partes iguales de la boca sin la mosca, y no iguales con la mosca en un lado de la boca. Por ejemplo,

> *“La imagen es simétrica sin la mosca. Una parte (la de derecha) es igual que la de izquierda pero sin la mosca…”*
>
> [Fi, SIA3, parágrafo 13]

Hasta el momento, podemos decir que Fi, ha conseguido identificar los ejes de simetría y reconocer la equidistancia respecto al eje de simetría que es el grado intermedio – y es un avance respecto los conocimientos iníciales para Fi.

Trayectoria de Em en M1.

En las actividades SIA1 se trataban los fenómenos que presentan las imágenes en la pantalla: el primer fenómeno es el reflejo de la montaña en el agua del lago quieto y claro; y en el segundo es una fotografía de la montaña con un espejo perpendicular. La actividad parece que ha levantado el pensamiento/ ha hecho pensar a los participantes, así que para constatar el fenómeno, Em (fig.7.27) interviene reproduciendo el fenómeno de la segunda imagen con ayuda de un espejo.

La intervención de Emrush, visualizando el fenómeno del espejo, ayuda a otros estudiantes pare que sean capaces de identificar la diferencia entre estos dos fenómenos: por fin, en este momento ellos descubren que el fenómeno del lago no es posible “hacerlo”. El segundo fenómeno es posible hacerlo en cualquier momento cuando tenemos el espejo. La intervención de Em es una demostración en la clase.

Figura 7.27. La reproducción del fenómeno de SIA1

Em considera que los dos fenómenos son lo mismo:

> *"Es lo mismo si supongamos que la mesa es un lago. La mesa hace lo simétrico"*
>
> [Em, SIA2, párrafo 17]

La interpretación de Em sobre el proceso de transformación simétrica se hace con el fenómeno de doblado por coincidencia de las imágenes, por ejemplo la interpretación de Em en la actividad SIA3:

> *"es buen ejemplo sólo si pintamos los labios con el rojo y "besamos" el papel donde quedan los labios marcadas, entonces podemos experimentar la simetría con los alumnos de primaria, doblando el papel y mostrar asi la coincidencia"*
>
> [Em, SIA3, parágrafo 18]

A partir de estos resultados podemos identificar la constatación que:

Resultado 7.2.25. *Em identifica correctamente la transformación simétrica utilizando doblado y espejo, estableciendo la imagen conceptual de transformación simétrica entre dos imágenes e identificando el eje de simetría y demostrando la equivalencia entre imágenes simétricas. Desde el punto de vista de la imagen que posee, para Emrush, simetría se asocia a transformación por coincidencia, pero no establece una interpretación respecto a los procesos dentro las transformaciones donde no se puede utilizar el doblado o espejo que, en el plano pueden ser traslaciones o giros.*

Trayectoria de Ad en M1.

A diferencia de otros estudiantes que muestran dificultades, Ad en seguida anota la diferencia fundamental entre el fenómeno de la montaña en el agua del lago quieto y claro y el fenómeno de una fotografía de la montaña con un espejo perpendicular del lago. Esta diferencia consiste en la identificación de transformación simétrica como proceso (hacer lo simétrico) y la simetría como la propiedad:

> "*en la base que hemos hablado, la diferencia entre la imagen del lago (*izquierda) *y la imagen del espejo (*derecha) *con la foto del lago, pienso que es: en la imagen de la izquierda (*el lago*) ya existe la simetría y en la imagen de derecha (*espejo*) hemos hecho lo simétrico con la mitad de la figura - la mitad de arriba*".
>
> [Ad, SIA1, párrafo 5]

A pesar de que Ad es un estudiante de grado medio, nos interesa que con más precisión identifica la diferencia entre simetría como propiedad y como transformación. Esta distinción se confirma en la actividad SIA2 cuando explica de manera más precisa la diferencia entre la simetría como propiedad y la transformación simétrica como proceso:

> "*en la figura a) parece que es simétrico*" mientras que "*en la figura (b) está hecho simétrico*"
>
> [Ad, SIA2, párrafo 2]

Observando las producciones de Ad podemos conjeturar:

Resultado 7.2.26: *Para los estudiantes del grado medio en la PI, el significado del proceso de transformación igual que para Adelina es una "acción" o "actuación" (este hecho) y el significado de la propiedad simétrica es una "situación o un momento" (es simétrico).*

Mostramos a continuación las producciones de los estudiantes del grupo FFPUB

Trayectoria de Al en M1

La estudiante Al (grupo de FFPUB) en la prueba inicial ha mostrado un grado bajo de conocimientos sobre el proceso de transformación en casi todas las tareas de PI. El desarrollo de la actividad SIA1 no hace posible que Jo consiga diferenciar la simetría como propiedad y simetría como operación (transformación). Esto ocurre cuando el docente anota esta ausencia e interviene:

> Docente: *"una cosa es la imagen de la izquierda (se refiere a la imagen de la montaña y su reflexión en el lago) y otra cosa es lo que estoy haciendo lo simétrico en la derecha (refiere a la imagen con espejo). Lo que quiero mostrar aquí es la simetría como propiedad y la simetría como transformación...."*
> Al: *"¿Cómo?..."*
>
> (Al, SIA1, párrafo *23C)*

Es la actividad SIA2 la que lo ayuda al estudiante Al profundizar un poco más la idea de simetría como transformación y como propiedad.

> Docente: *(presentando el problema SIA2) de todas maneras vamos a preguntar casi lo mismo....los manos (izquierda y derecha) y la mano izquierda y su imagen en el espejo.*
>
> Al: *La simetría tiene que estar debajo la mano y espejo.*
>
> Docente: *¿si todo el mundo tiene claro?....*
>
> Docente: *¿...si...?*
>
> Al: *Yo diría que uno es natural (refiere a las dos manos) y la otra es artificial (refiere la mano y su reflejo en el espejo)...."*
>
> (SIA2, párrafo 18-20C)

La estudiante Al identifica como una *acción artificial* una *actuación* y se refiere a transformación. Esta acción se hace a base de repetición.

<u>**Trayectoria de Jo y Mc en M1.**</u>

En un principio del desarrollo de la actividad SIA1, la estudiante Jo, no reconoce la transformación simétrica como un proceso:

> "*las dos fotos están tomadas desde diferentes lados....en la primera (izquierda) la montaña esta a la derecha, y en la otra en el lado izquierdo..."*
>
> [Jo, SIA1, párrafo 8]

El docente continúa insistiendo en la búsqueda de diferencias entre las imágenes. Es un paso importante que Joanna hace en este momento: empieza comparar las partes simétricos de la misma imagen:

> "*Si comparamos la imagen A y B es una cosa y si comparamos la parte A1* (refiere a la parte arriba del imagen de izquierda A) *y A2* (refiere a la parte abajo del imagen de izquierda A) *es otra cosa. Si ponemos la imagen del espejo y la giramos es completamente la misma, en cambio, en la otra (*refiere al imagen de izquierda) *vemos que hay diferencias* "
>
> (Jo, SIA1, párrafo 14)

La imagen del concepto de simetría para Jo está compuesta por una serie de figuras que se obtienen colocando el espejo(s) en diferentes posiciones sobre un modelo dado. La acción de "*girar la imagen*" para que coincida, es una conjetura correcta por parte de Joanna intentando justificar *la equivalencia* entre imágenes correspondientes que es la propiedad importante de simetría. Respondiendo en las preguntas del docente, ella consigue reconocer la simetría como un proceso de doblado basado en equivalencia y en coincidencia:

> Docente: *El ejemplo que voy a poner: la televisió*n (aparato en el aula), *¿es simétrico?*
>
> Jo: S*í*
>
> Docente: *¿por qué me dices que es simétrico?*
>
> Jo: P*orque una mitad es igual que otra mitad*.
>
> Docente: *La pizarra es simétrica*
>
> Jo (y otros): *sí*
>
> Docente: ¿E*l retroproyector es simétrico?*
>
> Unos estudiantes: *Sí*
>
> Jo: *Yo creo que no, porque son los dos lados diferentes, si doblamos la parte de derecha y de izquierda no son iguales (*enseñando con las manos*).*
>
> Docente: *la silla ¿es simétrica?*
>
> Mc: *Respecto a ¿qué es simétrica?*
>
> Docente: *A, a, a … venga , ¡di!*
>
> Mc*: Respecto a un dibujo, un foto,….*
>
> Jo*: No tienes que tener algo otro.*
>
> Mc: *Algo para compararlo y predecir que es simétrico.*
>
> Docente: *(coge la silla) ¿Esa silla es simétrica?*
>
> Jo: *Si es, porque si la divido por la mitad y lo hago así (junta las manos) tengo la simetría.*
>
> (SIA1, párrafo 13-28)

A partir de esto identificamos;

Resultado 7.2.27: *Jo ha sido capaz de reconocer la transformación simétrica como un proceso basado en la igualdad, doblando – equivalencia, el eje de simetría – que divide la silla en dos partes iguales). Los ejemplos concretos tienen ahora un papel complementario para dar ideas, verificar conjeturas, etc. que después se corroboran o formalizan al usar las propiedades simétricas.*

Resultado del diálogo de arriba apuntamos el resultado siguiente sobre el estudiante Mc con conocimientos iniciales sobre el proceso de transformación.

Resultado 7.2.28: *El estudiante Mc comprende la simetría como una operación geométrica que permite deducir una nueva figura a partir de la primitivamente dada (la silla), pero no es capaz de aplicar la transformación simétrica con el fin de distinguir la simetría como propiedad de las figuras.*

Continuamos la observación en el momento siguiente.

Momento 2. Análisis y resultados

Como en los apartados anteriores, analizaremos las producciones de los estudiantes sobre los bordados kosovares (SIA4), donde mostraremos el proceso de obtener todo el bordado a partir de una parte que se repite.

Trayectoria de Fi en M2

La imagen presentada en la actividad SIA4 muestra las flores que parecen iguales por la forma y su diferencia entre sí radica en la posición que tienen en el bordado (primer bordado). Para que Fi identifique "el proceso" de la transformación de una flor en otra es necesario hacer más preguntas, como: "*¿cómo es posible hacer la flor de la izquierda a partir de la flor de derecha?"* Es esta pregunta la que hace posible aclarar la transformación de una flor en otra, y que para Fi es el doblado:

> *"para hacer la reproducción de una a partir de la otra tenemos que doblar y luego dibujar la flor…"*
>
> [Fi, SIA4, párrafo 4]

En efecto, en su ficha de trabajo, Fi identifica correctamente el eje de simetría que coincide con la posición de doblado.

En el segundo bordado donde aparece una flor compuesta por cuatro partes idénticas colocadas en la posición opuesta respecto a la parte adjunta , proponía identificar la manera de obtener todo el bordado a partir de una parte.

Sabemos que existen tres posibles explicaciones del fenómeno de la imagen de este bordado: como simetría - doblando cualquier mitad del bordado, doblando la cuarta parte del bordado y como rotación de cualquier mitad del bordado por un ángulo de 180º alrededor del centro del cuadrado. Esto significa que el bordado tiene dos simetrías y una rotación.

A continuación presentamos la parte del diálogo entre el docente y Fi acerca del segundo bordado:

> Fi: El segundo bordado podemos doblarlo en dos maneras *(*piensa en dos ejes de simetrías*)*
> Docente: *¿Qué maneras?*
> Fi: *Rotando la mitad alrededor de la recta del medio verticalmente y horizontalmente por 180º* (explicando con las manos) *obtendremos todo el bordado.*
>
> (Fi, S1A4, párrafo 13)

Esto implica constatar que Fi explica la transformación simétrica mediante el doblado basado en la coincidencia - el bordado se obtiene rotando la mitad alrededor de la recta del medio por 180º.

Trayectoria de Em (conocimientos de grado medio bajo) en M2.

En el caso de Em, vemos que a él le parece interesante el reconocimiento de que la reflexión de la imagen con el espejo es una transformación simétrica igual como el doblado:

> *Si, si, pero parece interesante comprobar con el espejo….porque hay diferentes maneras, podemos también mirar con el doblado de papel si coinciden la figura y su imagen simétrico.*
>
> *(Em, SRA3, párrafo 36)*

Esto se nota en varias actividades de momento M2.

Como constatación podemos identificar:

Resultado 7.2.29*: A partir del análisis de las producciones y las actuaciones de los estudiantes sobre el proceso de transformación identificamos que los estudiantes con un grado bajo de conocimientos aprendían el proceso de transformación primero como movimiento de la figura intuitivamente utilizando el espejo (en la mayoría de los casos), luego como aplicación punto a punto utilizando el papel cuadriculado, papel con trama de puntos y la propiedad de puntos alineados.*

Trayectoria de Ad en M2.

El desarrollo de la actividad muestra la necesitad de la actuación del docente en la descripción del proceso. Así, para que los estudiantes identifiquen el proceso de la transformación de una flor en otra es necesario hacer más preguntas, como: "*¿cómo es posible hacer la flor de la izquierda a partir de la flor de derecha?*"

Es esta pregunta la que hace posible aclarar la transformación de una flor en otra (SIA4 primer bordado), que en este caso es:

> "*para hacer la reproducción de una a partir de la otra tenemos* ***que girar*** *la flor…*"
>
> [Ad, SIA4, párrafo 7]
>
> "*Cuando* ***giramos*** *una flor podemos obtener la otra*"
>
> [Ar, SIA4, párrafo 17]
>
> "*Eso es simetría central, porque el giro se hace* ***respecto a un punto*** *que es el centro del bordado y centro de la simetría central*"
>
> [Sh, SIA4, párrafo 21]

En un principio, unos estudiantes confundían el proceso de obtener el bordado con la transformación de simetría axial, y luego, la mayoría estaban convencidos de que el proceso de obtención del bordado es la transformación de rotación con el ángulo de 180º (Figura 7.28.b). Identificamos el caso de Sh que el mismo proceso lo identifica como la correspondencia punto a punto entre partes correspondientes del bordado respecto la simetría central (Figura 7.28.a).

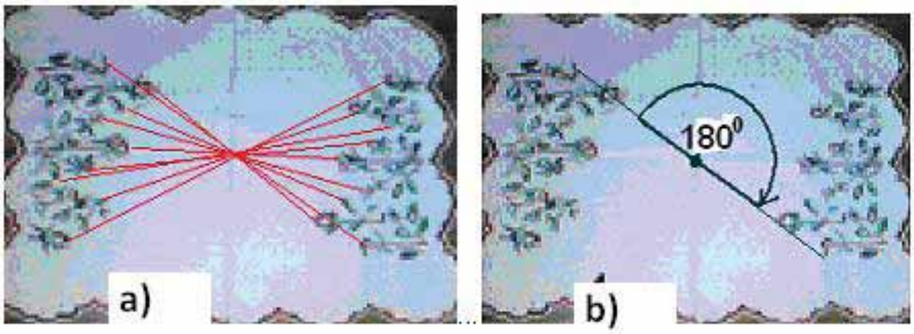


Figura 7.28. Dos diferentes procesos de obtener el bordado

En su ficha de trabajo, Ad, Ar, Xh, Em, etc., dibujan en sus hojas una recta que representa el ángulo de 180º y una flecha que indica el recorrido de giro con el proceso de girar la flor. Parece que ellos identifican correctamente el concepto de rotación que se caracteriza mediante su ángulo y su centro. De todos modos, no se explicita la propiedad de invariancia en base a la descripción de la repetición de la misma flor.

En el segundo bordado (SIA4), se proponía identificar la composición de una flor compuesta por cuatro partes idénticas colocadas en la posición opuesta respecto a la parte adjunta (figura 7.29). Recordamos que existen tres posibilidades de explicar el proceso para obtener el bordado: doblando dos veces cualquier mitad del bordado según dos ejes -perpendiculares entre sí, que pasan por vértices del cuadrado en el centro; doblando cuatro veces la cuarta parte del bordado; y rotando cualquier mitad del bordado por un ángulo de 180º alrededor del centro de rotación - centro del cuadrado. Esto significa que el bordado tiene dos ejes de simetría, y un centro de rotación.

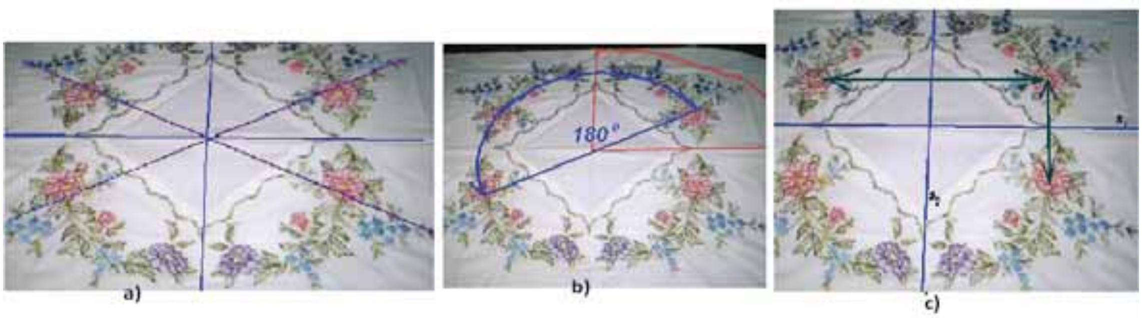


Figura 7.29. Diferentes procesos de obtener el bordado

En este caso identificamos los intentos de obtener el bordado con la simetría axial por parte de As (figura 7.29 a) y Ad (Figura 7.29c) y con la rotación de un ángulo de 180º (figura 7.29. b) por parte de Sh y Da.

La tarea promueve que los estudiantes se enfrenten a esa multiplicidad de posibles interpretaciones del proceso de transformación. Por ello, a primera vista, para Ad no está claro si el bordado tiene 2 o 4 ejes de simetrías. Después de un análisis del bordado ella nota que para tener 4 ejes de simetría (diagonales y simetrices del cuadrado central), la octava parte del bordado tiene que ser idéntica (mismo tamaño y misma forma - la propiedad isométrica) y que no lo es, por tanto, en seguida concluye que el bordado tiene dos ejes de simetría (las diagonales del cuadrado central). En la ficha de trabajo, ella lo ha indicado correctamente dibujando los ejes como en la figura 7.29 c).

Analizando el discurso de Ad identificamos el proceso del avance en la construcción de la imagen conceptual sobre el proceso de obtener el bordado que es reconocer el proceso de reflexión. En un principio podemos comentar que el conocimiento inicial de transformación simétrica empieza desde el nivel de tipo visual - como el cuadrado tiene 4 ejes de simetría, para Ad es razón de pensar que el bordado tiene también 4 ejes de simetría. La construcción del concepto del proceso de simetría de Ad, en este caso, continúa bajo la presión del concepto de *equivalencia* y del concepto de *superponer*. La idea de usar la equivalencia entre partes simétricas del bordado está claro para Ad a partir de su experiencia, pero no es suficiente para determinar exactamente el concepto de simetría. En este caso, el papel clave lo juega la idea de superponer que le ayuda a Ad a destacar que dos ejes (diagonales del cuadrado central) no dejan superponer las partes simétricas del bordado – la condición necesaria para que al final del proceso de construcción del concepto de transformación simétrica ayudara a Ad a llegar a conclusión de que el bordado se obtiene con la reflexión de una flor respecto a dos ejes de simetría. Como es un concepto recién formado de esta manera, Ad tiene dificultades para explicar por qué otros dos ejes (diagonales del cuadrado) no cumplen la condición de ser ejes de simetría.

Otros estudiantes (por ejemplo Sh) explican e identifican que el bordado se obtiene rotando la mitad alrededor del centro por 180º (figura 7.24.b). No está claro si Ad y otros estudiantes son capaces de reconocer la relación entre las transformaciones de simetría y la rotación.

El tercer bordado se trata del otro proceso para obtener el bordado - la de desplazamiento. El bordado presenta una flor repitiéndose consecutivamente cambiando dos colores – azul y rojo, que para Ad significa el proceso de repetición y desplazamiento. La repetición de una parte (en caso de Ad el conjunto de dos flores con diferentes colores) le asegura que se trata de la transformación que conserva el tamaño y la forma; mientras que la idea de desplazamiento le ayuda a Ad a determinar otros elementos de traslación como son el vector de traslación y el sentido de traslación (Figura 7.30).

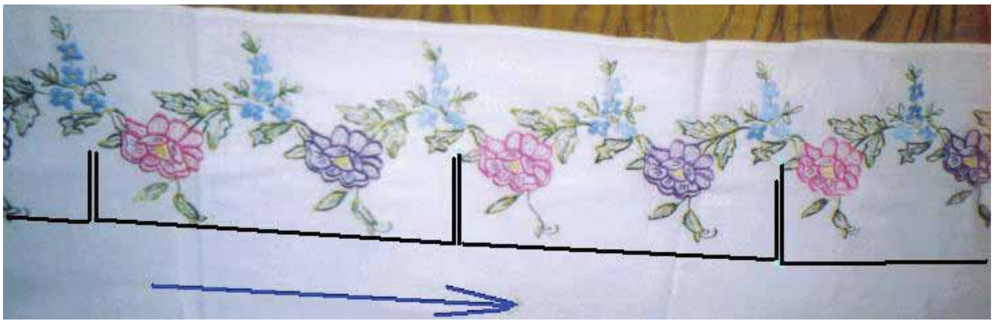


Figura 7.30 – El proceso de desplazamiento de la flor del bordado.

Las actividades que acabamos de elaborar tratan de identificar y reconocer *qué "operador" o "actuación" (transformación*) se necesita para pasar de un estado particular a otro estado dado. En estas actividades analizaremos el proceso de desarrollo del pensamiento del estudiante destacando los momentos y las causas que juegan el papel importante en el pensamiento del estudiante.

A continuación elaboramos las actividades donde el estudiante se enfrenta a los problemas cuando se pide saber *a qué estado* se llega cuando un cierto "operador" (transformación) dado, actúa sobre un cierto estado. El discurso del futuro profesor que describe y explica la transformación que actúa sobre un estado (figura inicial-original) obteniendo otro estado (figura final - figura transformada) nos permite reconocer qué significado tiene para el futuro profesor, el proceso de transformación. Por este fin, analizamos las actividades SR2, SR3.

El docente presenta el problema en la pantalla como la figura 7.31, explicando la actividad de reproducir la figura dada en el papel blanco.

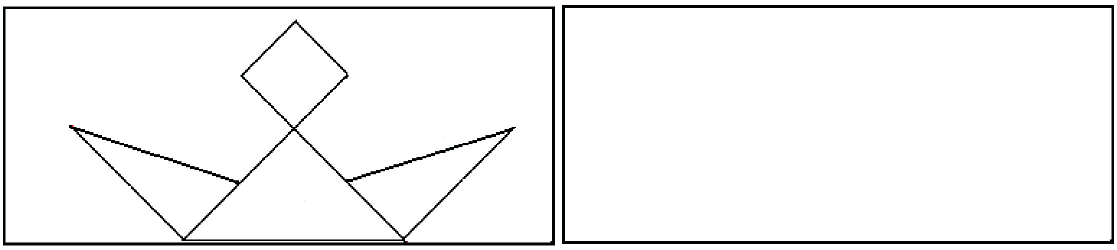


Figura 7.31. Reproducir la figura en el papel blanco

Los estudiantes tienen que reproducir (reconstruir) la figura compuesta por tres triángulos rectángulos y un cuadrado en otra posición. Esta reproducción de la figura en realidad es una transformación de traslación. Sin especificar que se trata de traslación, el docente explica y pide que los estudiantes describan los pasos de la reconstrucción de la figura. A continuación presentamos la parte del diálogo entre Ad y el docente:

> Ad: *Primero construimos el triangulo grande en el centro*.
> Docente: *¿Como lo hacemos?*
> Ad: *Midiendo los lados….y construimos iguales…*
> Docente:..¿Luego?
> Ad: *…construimos otros dos triángulos (*de izquierda y de derecha*)… en misma manera…midiendo los lados…*
> Docente: ¿Como y donde exactamente los construimos?
> Ad (interviene y otro estudiante - Se): *En el vértice superior* (enseña el vértice superior del triangulo central de la figura) *tenemos ángulo recto…es el ángulo formado por los catetas…*
> Docente: (enseña el vértice en la pantalla buscando confirmación por parte de Ad)
> Ad: *Si, si… y luego trazamos la perpendicular a la hipotenusa del triangulo que pasa por ese vértice.*
> Docente: *¿Por qué?,*
> Ad: *para construir el otro vértice del cuadrado (*se refiere al vértice superior del cuadrado*) y luego construimos las rectas paralelas* (las rectas (1) y (2) en la figura 7.25-Ad*) con los catetes (*de los triángulos en ambos lados del triangulo central) *y sus intersecciones determinan otros dos vértices del cuadrado.*
>
> (SRA2, párrafo 18-28K)

Analizando el diálogo, podemos constatar que:

Resultado 7.2.30. *El concepto de paralelismo, el concepto de perpendicularidad y el concepto de equivalencia (medir los lados para que sean iguales) fueron las herramientas para hacer la reproducción de la figura en otro lugar por parte de los estudiantes de nivel medio alto. El significado de reproducción para estos estudiantes es una regla (aplicación) basada en la equivalencia de los segmentos (isometría), la equivalencia de los ángulos (ángulos rectos en ángulos rectos) y el paralelismo (dirección de vector). Todos estos elementos son característicos de una traslación.*

La intensidad del vector del desplazamiento no está identificada exclusivamente por parte de Ad, pero está determinado por el problema planteado (el cuadro de dibujo añadido a la figura 7.32 Adelina)). En este caso podemos decir que Ad ha utilizado la deducción formal del concepto de traslación. Esto es porque Ad muestra la verdad de su reconstrucción de la figura como derivación *necesaria* de sus premisas - equivalencia, paralelismo, perpendicularidad. Cada paso de su reconstrucción de la figura es una proposición verdadera.

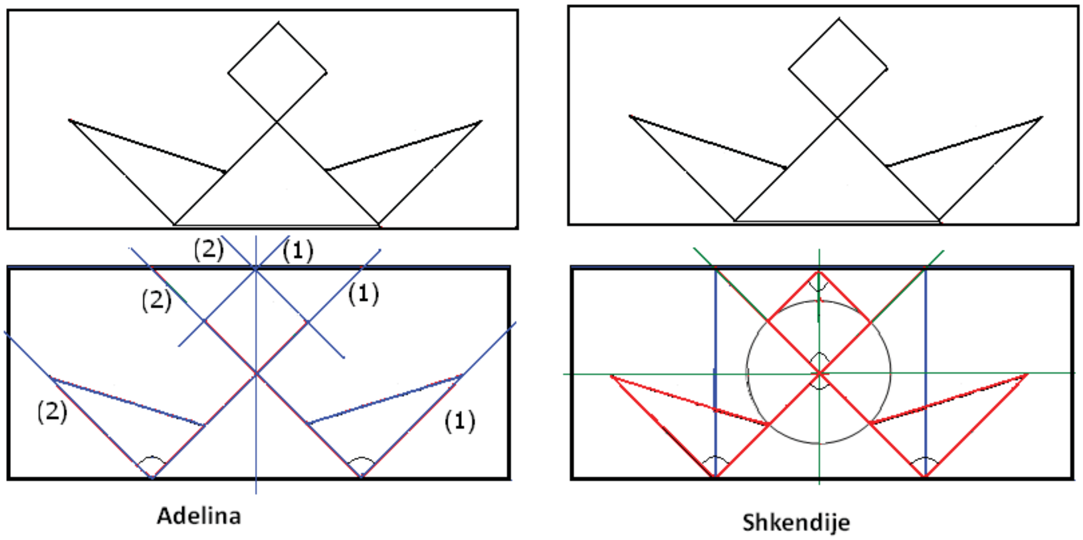


Figura 7.32. El proceso de reproducción de la figura por Ad y Sh

Otro estudiante (Sh) utiliza otro proceso de reproducción de la figura dada (ver la Figura 7.32 Shkendije). Sh ha intervenido en el diálogo con Ad confirmando que para este problema hay otra solución. Luego, en la ficha de trabajo de Shkendije se ve claro que se trata de una solución interesante basada en las propiedades de las figuras geométricas. Dentro de un rectángulo se construye un cuadrado. En el triángulo superior formado por diagonales del cuadrado central se construye otro cuadrado con un vértice en la intersección de los diagonales y otro vértice opuesto en el lado superior del cuadrado (cuadrado con color rojo en la figura 7.32 Shkendije). La intersección entre el cuadrado rojo y las diagonales del cuadrado azul, determina los puntos y el radio de la circunferencia. La intersección de la circunferencia con diagonales en la parte inferior determina los vértices de los triángulos al lado. Otros vértices de los triángulos se determinan con los diámetros de la circunferencia. Los vértices del triángulo central se encuentran en el centro del cuadrado y otros dos coinciden con los vértices inferiores del cuadrado (azul).

El procedimiento de reproducción de la figura, utilizado por Sh, nos ayuda a comprender que:

Resultado 7.2.31: *El proceso de traslación de una figura geométrica se hace a base de las propiedades geométricas de las ciertas figuras. Las propiedades geométricas que se utilizan por parte de Sh son las afirmaciones formales de geometría euclidiana - como existencia de un segmento equivalente al segmento dado, ángulo equivalente al ángulo dado, existencia de las rectas paralelas etc.*

Continuaremos elaborando el proceso de transformación en otro momento. Se trata de la actividad SRA3. En esta actividad se pide dibujar la imagen simétrica de la figura, tomando como eje de simetría la recta trazada (actividad SRA3). Los estudiantes tienen los espejos como recurso didáctico para su actividad.

No hemos notado en las observaciones que alguno de los estudiantes no haya conseguido reproducir la figura simétrica respecto a la figura dada. En la videograbación que tenemos nos parece importante describir el proceso de reproducción por parte de algunos estudiantes.

Ad antes de empezar a hacer la construcción de la figura simétrica expresa el comentario:

> Docente: "*Podéis explicar el proceso de construcción de la figura simétrica…*"
>
> Ad: "*Dibujo una figura cualquiera en una parte de la trama de puntos. Luego dibujo una recta en la manera que toque un vértice de la figura dada. A continuación, cuento que la recta tiene que ser el eje de simetría. ¿Es así?*"
>
> Docente: "S*í, si,…*"
>
> Ad: "*Yo sé que las distancias de los puntos tiene que ser iguales respeto al eje. Esto quiere decir que hago una aplicación de cada vértice de la figura contando cuadraditos en otro lado del eje…*"
>
> (SRA3, párrafo 19-22K)

Ad hace *lo simétrico* utilizando las propiedades de la simetría: el eje, las distancias iguales respecto al eje y el proceso de aplicación *punto a punto*. No hace falta determinar cada punto de la figura, ella encuentra los vértices de la figura y luego, utiliza la propiedad de puntos alineados: puntos alineados se transforman en puntos alineados (figura 7.33. a).

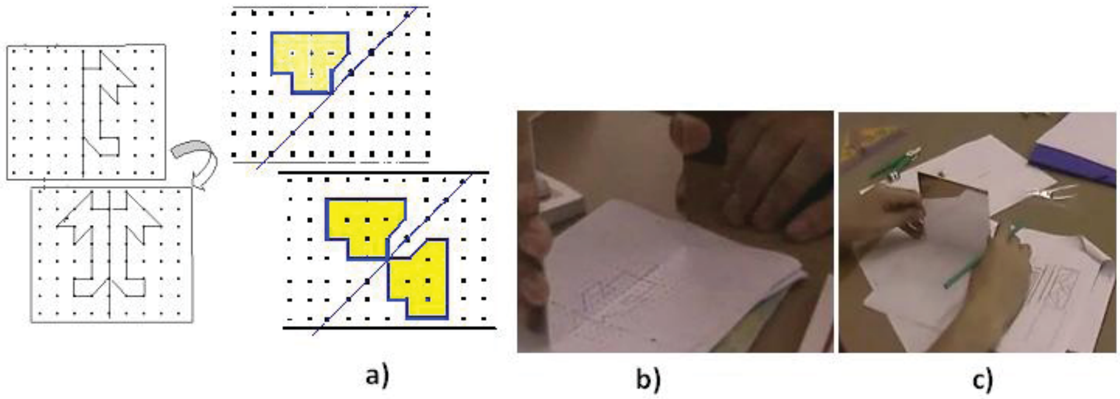


Figura 7.33. El proceso de obtener lo simétrico

Dado que los estudiantes poseen los espejos, el docente les enseña que el resultado de la construcción puede verificarse con el espejo (figura 7.33 b).. Es interesante la reacción de Ad:

> "*Yo pienso que no hace falta espejo para verificar si he construido correctamente la figura simétrica...yo "cuento" cuadraditos y con esto constató si está bien o no...luego adjunto los puntos correspondientes y logro la imagen simétrica"*
>
> *(Ad, SRA3, párrafo 12)*

Resultado 7.2.32. *El estudiante de grado alto reconoce la transformación si reconoce los elementos relevantes (de simetría: el eje, distancias iguales respecto al eje; de rotación: centro y ángulo; de traslación: vector y sentido de vector), el proceso de aplicación punto a punto, y la propiedad de puntos alineados: puntos alineados se transforman en puntos alineados.*

Continuamos presentando las producciones de los estudiantes del grupo FFPUB.

Trayectoria de Al en el momento 2.

El desarrollo de las actividades del momento M2 en grupo, facilita que los estudiantes de grado bajo aprendan en el ámbito del grupo gracias a los comentarios de los colegas. Así, la explicación de otro estudiante ayuda al estudiante Al a comprender el proceso de transformación simétrica a partir del doblado:

"Claro, al doblar se ve que no son simétricos…"

(Al, *SIA4 , párrafo 5* C)

o el proceso de rotación a partir del giro según un ángulo determinado:

"Si, si, porque la flor está girado de posición…."

(Al, SIA4, párrafo 19C)

Los estudiantes tienen claro que una flor tiene que girarse para que se sitúe en la posición de otra, pero aun no reconocen el centro y el ángulo de rotación. Ellos no responden correctamente, intentando ayudarse con los manos pero con ciertas dificultades para formular claramente el centro y el ángulo de rotación*.* Esto indica que los estudiantes reconocen la rotación como desplazamiento físico de la figura que conserva la forma y el tamaño pero no dan cuenta al centro y ángulo de rotación.

En el desarrollo de la actividad SIA4, en el caso de otros bordados y la actividad SID, Al consigue reconocer el proceso de transformación isométrica como un desplazamiento de la figura.

A base de análisis de las producciones identificamos::

Resultado 7.2.33: *El proceso de transformación isométrica para los estudiantes de grado bajo se reconoce como un desplazamiento figural basado en el doblado (caso de simetría) y equivalencia.*

Trayectoria del estudiante Mc

La consideración de los elementos de simetría (eje de simetría y distancia igual respecto el eje) parece que es suficiente para Mc identificar la simetría en varias situaciones. En la situación presentada en el primer bordado de la actividad SIA4, Mc identifica el eje de simetría ("*uno vertical y otro horizontal"*) pero tiene dificultad para establecer la distancia igual de elementos del bordado respecto al eje:

"*No, no hay simetría, porque la flor esta girado de posición"*

(Mc, SIA4, párrafo 21C)

En el primer bordado parece que el estudiante tiene claro que una flor tiene que *girarse* para que se sitúe en la posición de otra. Esto es suficiente para Mc para reconocer que se trata de rotación.

En el secundo bordado, se muestra la capacidad de identificar el bordado como una figura simétrica. La confusión por la existencia de dos o más ejes de simetría desaparece cuando se identifican los elementos constituyentes de simetría.

> "*el dibujo es simétrico de derecha a izquierda y de arriba abajo…pero no por diagonales*"
>
> [Mc, SIA4, párrafo 47c]

En el tercer bordado MC reconoce los elementos visuales de traslación como *desplazamiento* en dos direcciones (a la derecha y a la izquierda) de un par de flores (con diferentes colores) para obtener todo el bordado, pero no se ve claro si reconoce el vector de traslación (desplazamiento):

> "*aquí tenemos desplazamiento de dos flores hacia la derecha y hacia la izquierda*"
>
> [Mc, SIA4, párrafo 72]

Como resumen podemos identificar:

Resultado 7.2.34: *Los estudiantes del grado medio-bajo eran capaces de identificar correctamente la simetría a partir del doblado según el eje de simetría, la rotación a base de giro y la traslación a base de desplazamiento en el bordado.*

Trayectoria del estudiante Jo en el momento 2.

Los estudiantes de nivel medio alto de Catalunya son capaces de reconocer el proceso de la simetría a partir de la identificación de un conjunto de elementos constituyentes de la misma: el eje de simetría, la distancia igual respecto el eje, la posición opuesta y la perpendicularidad respecto el eje. Si consideramos todos estos elementos no es difícil identificar la simetría en cualquier situación.

Esta explicación de Joanna le ayuda y a otros estudiantes a comprender y aclarar la transformación simétrica como proceso de coincidencia entre las partes simetricas de la figura *con el doblado*. Analógicamente, la rotación como proceso de desplazamiento (cambio de posición) *rodando según un ángulo determinado alrededor de un punto* también determinada:

> "*el flor se gira cuatro veces…el giro es de un ángulo recto*"
>
> (Jo, SIA4, 31C)

El proceso de obtener el tercer bordado a partir de un modulo muestra que Jo, reconoce además los elementos visuales de traslación y el vector de desplazamiento:

> "*el bordado se obtiene cuando un* (o un par si se considera el color) flor según un determinado distancia en dos direcciones"
>
> (Jo, SIA4, 75c)

Resultado 7.2.35: *Los estudiantes de grado medio reconocen el proceso de transformación simétrica a partir de las propiedades importantes (igualdad, doblado, equivalencia, eje de simetría). El proceso de rotación a partir del reconocimiento del ángulo y el centro de rotación, y el proceso de traslación a partir del reconocimiento del vector de traslación.*

Momento 3. Análisis y resultados.

Analizaremos ahora que ocurre con los conocimientos sobre el proceso de transformación proyectiva. Nos parece importante presentar el desarrollo de la actividad SPP. Se presenta la Videograbación de la parte de la clase con los niños de primaria de Catalunya, donde la maestra junto con los niños en el patio de la escuela, coloca un alumno al frente de los otros y lo pone de espaldas al sol; delante de él aparece la sombra del alumno. El objetivo de la maestra es que primero se identifique la posición de la sombra, objeto (un alumno-Jasmin) y la iluminación del sol. Después la maestra le dice al alumno que camine hacia delante, a los lados y hacia atrás, de manera que se vea que la sombra también se desplaza hacia delante, a los lados y hacia atrás, pidiendo a los alumnos que vean este proceso las siguientes preguntas: "*¿qué pasará con la sombra de Jasmin si camina hacia delante?"* etc. Después la maestra pide que se verifique que la sombra del objeto no cambia aunque el objeto cambie de lugar. Para esto ella mide la sombra del alumno en dos posiciones diferentes (ver Figura 7.10, pp 349).

En toda esta actividad contribuyen de manera activa todos los alumnos.

Trayectoria de estudiante Fi.

La sombra para el estudiante con un grado bajo de conocimientos en la prueba inicial es producto del proceso de transformación proyectiva que ocurre como consecuencia de la fuente de la luz. Su acercamiento al concepto de proyección es informal, sin reconocimiento de regularidades y propiedades de la proyección.

El desarrollo de las actividades de la sesión SP facilita que Fi consiga un grado medio de conocimientos sobre transformación proyectiva como proceso o cambio. Él identifica los elementos relevantes de proyección (la fuente de la luz, objeto y su imagen-la sombra), y se nota la tendencia por reconocer la dependencia funcional entre elementos de proyección.

A *partir* de los análisis de las producciones del estudiante Fi en todos los momentos observados desde la prueba inicial (M0), presentamos gráficamente su trayectoria en la tabla 7.34

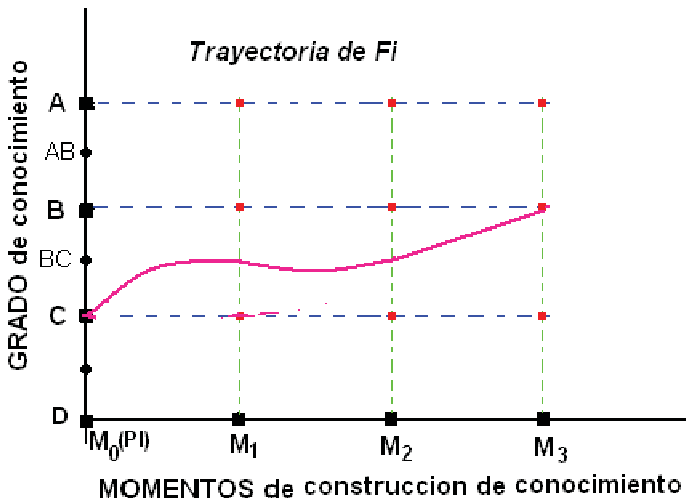


Figura 7.34. Trayectoria de Fi sobre el proceso de transformación

Trayectoria del estudiante Em

Analizando las producciones de Em en el desarrollo de las actividades SP, vemos que para Em, la transformación proyectiva es un proceso de cambio diferente de la isometría. El producto de la proyección del objeto es una sombra. Em interpreta *la transformación del objeto en un plano* como un cambio bajo condiciones de existencia del foco de la luz, del objeto que se proyecta y el lugar donde aparece su sombra. Durante este proceso identifican posibilidades de diferentes cambios de la sombra: cuando es más grande o más pequeña, en función de diferentes posiciones del objeto y el foco de la luz. En la respuesta de Em a la pregunta del docente:

> *¿Cómo y bajo cuales condiciones cambia la sombra de un objeto?*
>
> *(SPA4, párrafo 42)*

Em reconoce la posición del foco de la luz dando mayor prioridad.

> ”la sombra del objeto será más grande o más pequeña según la posición del foco de la luz…si el foco de la luz es más cerca del objeto la sombra será más grande …. *”*
>
> (Em, SPA4, párrafo 54)

Como resumen del análisis del proceso de construcción del conocimiento del estudiante Em sobre la transformación como proceso o cambio mostramos gráficamente su trayectoria en la figura 7. 35.

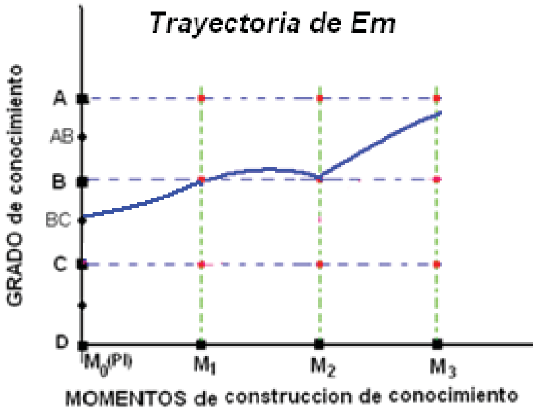


Figura 7.35. Trayectoria de Em sobre el proceso de transformación.

<u>Trayectoria de Ad en M3.</u>

La transformación proyectiva para el alumnado de nivel medio alto es un proceso de cambio, a diferencia de la isometría que es la repetición de un módulo. Este cambio se hace convirtiendo el objeto en una sombra. La sombra pasa independiente si el objeto es plano o espacial.

> “*la sombra es la transformación del objeto en un plano*”
>
> (Ad SPP, párrafo 17),

Todos los estudiantes de nivel medio (alto y bajo) interpretan *la transformación del objeto en un plano* como un cambio bajo condiciones de existencia del foco de la luz, del objeto que se proyecta y el lugar donde se aparece su sombra.

Durante este proceso identifican posibilidades de diferentes cambios de la sombra: cuando es más grande o más pequeña, en función de diferentes posiciones del objeto y el foco de la luz. Con el fin de aclarar la relación entre la fuente de la luz, objeto y su sombra, el docente continúa preguntando:

> *¿Cómo y bajo cuáles condiciones cambia la sombra de un objeto?*
>
> (Ad, SPA4, párrafo 42)

La relación entre el foco de la luz, el objeto y su sombra Ad explica de manera práctica con la mano enseñando dos posiciones de su mano en la posición horizontal y vertical, confirmando que:

> "*en mismo momento,…mismo luz, el mismo objeto (la mano) puede producir dos diferentes sombras…*"
>
> (Ad, SPA4, párrafo 49)

Como conclusión podemos decir que participando en las actividades:

Resultado 7.2.36: La m*ayoría de los estudiantes consiguen identificar la proyección como una transformación y como un cambio. Identifiquen los tres elementos de proyección: la fuente de la luz, el objeto y el lugar donde se produce la proyección. Identifica la dependencia funcional entre estos tres elementos de proyección. A base de análisis de las producciones no hemos identificado algún caso de comprensión de la idea o hipótesis de proyección puntual.*

A base de todo análisis de las producciones de Ad en los momentos M1, M2 y M3 incluido la prueba inicial M0, mostramos gráficamente la trayectoria de construcción de conocimiento sobre el proceso de transformación:

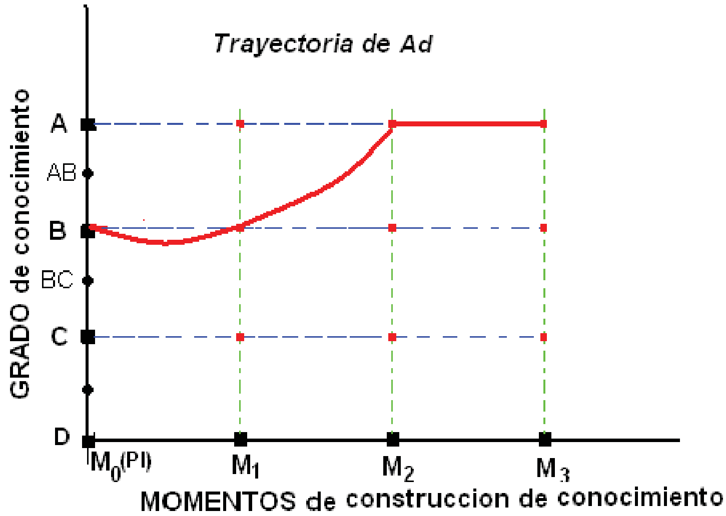


Figura 7.35. Trayectoria de Ad sobre el proceso de transformación.

Trayectoria de estudiante AI (FFPUB).

La interpretación del AI sobre el proceso de proyección es un acercamiento intuitivo. Reconoce los elementos de proyección pero no la dependencia funcional entre los elementos de proyección. Reconoce que la sombra como producto del proceso de proyección de un objeto en un plano pero, no muestra conocimiento sobre la dependencia y propiedades de este proceso.

Como resumen de análisis de las producciones de AI en todos los momentos incluido y la prueba Inicial, presentamos gráficamente su trayectoria de aprendizaje sobre transformación como proceso o cambio, en la figura 7.36.

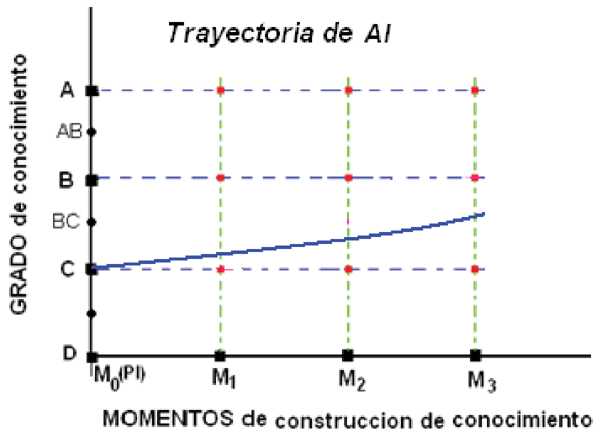


Figura 7.36. Trayectoria de AI sobre el proceso de transformación

Trayectoria de estudiante Mc

El proceso de transformación proyectiva para Mc es una manifestación de la vida cotidiana. La manifestación de proyección es la sombra, que se interpreta como un cambio y una transformación diferente a la isometría:

> "Al estudiar el fenómeno de la sombra, se ven claros las diferencias entre simetría que conserva la forma y la proyección que no lo conserva"
>
> (Mc, SPP, párrafo 39)

El estudiante Mc, identifica los elementos de proyección y hay una tendencia a reconocer las regularidades y propiedades relevantes de la proyección como el orden entre la fuente de la luz, objeto y su sombra:

> "*La sombra se tiene que poner en el otro lado de la fuente de la luz. El sol proyecta sobre el objeto y la sombra se forma al otro lado...*"
>
> (Mc, SPP, 44C)

Identificamos el resultado siguiente:

Resultado: 7.2.37: *Las actividades de la sesión SP facilitan la interpretación de transformación proyectiva como un proceso de cambio a diferencia de la isometría como la repetición de un modulo. Se reconocen los elementos de proyección pero no hay reconocimiento de la dependencia funcional entre los elementos de proyección por parte del estudiante con un grado medio-bajo.*

A base de los resultados de análisis de las producciones del estudiante Mc, presentamos gráficamente (figura 7.37) su trayectoria entre los momentos observados, sobre el proceso de transformación.

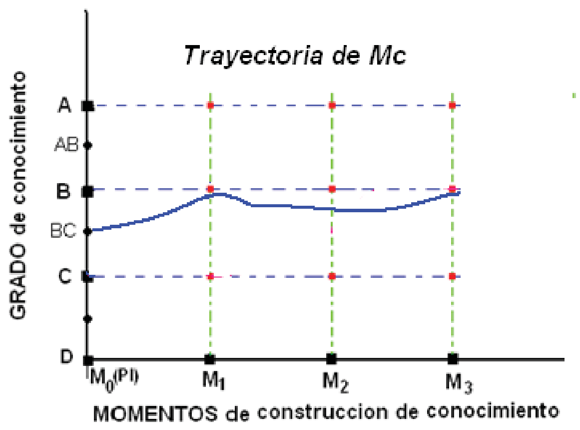


Figura 7.37. Trayectoria de Mc sobre el proceso de transformación

<u>Trayectoria de estudiante Jo</u>.

Como la mayoría de los estudiantes y Jo, identifica el fenómeno de la sombra como resultado del proceso de proyección. También, identifica los elementos de proyección (la fuente de la luz, el objeto y su sombra) y reconoce la dependencia funcional entre los elementos de proyección.

Además de esto, Jo, reconoce las propiedades importantes de la proyección, como son la orden entre elementos de proyección, la proporcionalidad entre magnitudes del objeto y su sombra, la continuidad entre el objeto o su sombra, que desde otro punto de vista muestran la presentación funcional de proyección.

> *"La sombra tiene que poner en el otro lado del objeto respecto el sol. El sol proyecta sobre el objeto y la sombra se forma al otro lado. ….Las sombras están guardan una proporción adecuada. Un objeto pequeño tiene una sombra más pequeña que un objeto grande que ha de tener una sombra más grande. ….. La sombra se forma a continuación enganchada a los objetos…"*
>
> (Jo, SPA9, párrafo 48-50 C)

A pesar de la tendencia de reconocer la dependencia funcional entre los elementos de proyección, Jo no muestra capacidad de distinguir la diferencia entre proyección central y afín.

A base de éste y los análisis de los momentos anteriores, mostramos gráficamente la trayectoria de Jo en la figura 7. 38.

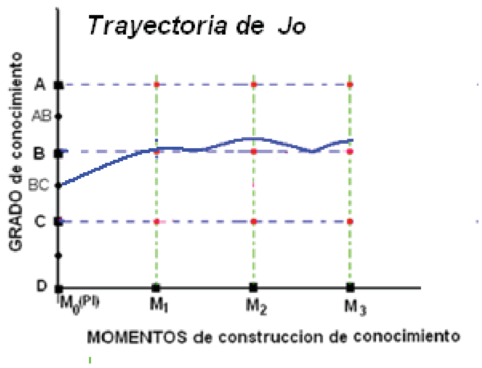


Figura 7.38. Trayectoria de Jo sobre el proceso de transformación

7.2.6. Comunicación y razonamiento con transformaciones geométricas

En este apartado nos interesa elaborar el discurso de los futuros profesores de primaria desde punto de vista de comunicación, razonamiento y argumentación en relación con las transformaciones geométricas. En concreto nos interesa analizar cómo se desarrolla el razonamiento de los futuros profesores ante una situación problemática; como se justifican sus proposiciones y cuál es su capacidad de argumentación; cuales son las actividades que posibilitan un desarrollo de esta capacidad y cuáles son las dificultades que afrentan. En todas las actividades de la unidad desarrollada se encuentran momentos de comunicación, razonamiento y argumentación de hechos, pero nosotros limitamos a presentar la elaboración de los ejemplos significativos.

El fenómeno de una continuidad posible entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba (véase Garuti et alt., 1996) debe ser considerada, con el propósito de poder seleccionar situaciones problemáticas apropiadas donde esta continuidad funcione suavemente. Cuando se trata del rol de la argumentación en las actividades matemáticas que conciernen enunciados, debemos considerar varios aspectos de esas actividades. Estamos de acuerdo con Boero (1999) cuando se refiere a aquellos aspectos como fases en las actividades de producción de conocimientos y construcción de pruebas matemáticas que ellas no pueden separarse y ordenarse sucesivamente.

Desde principio (SIP) identificamos momentos de diferentes grados de razonamiento sobre transformación geométrica. La intervención del docente poniendo ejemplos de polígonos regulares e irregulares (cuadrado, cuadrilátero, pentágono, decágono) y el numero de ejes de simetrías de estos polígonos, implica expresiones de diferentes razonamientos de los estudiantes. Un gran número (Fi, As, Re, Se, etc.) muestran sólo la visualización del eje de simetría de un polígono sin poder explicar y justificar la proposición enunciada:

> Docente: (primero dibuja un cuadrado) *¿Cuántas ejes de simetría tiene el cuadrado?*
> Fi: (sin responder, dibuja dos ejes de simetría – uno horizontal y otro vertical)
> Docente: *¿Qué significado tienen estas rectas?*
> Fi: No contesta
> Da: *"dividen el cuadrado en partes iguales"*
>
> *[SIP, párrafo 26-30K]*

Otros estudiantes (Ad y Da) comprueban la proposición de que "*si el cuadrado tiene 4 ejes de simetrías, el pentágono regular tiene 5 ejes de simetría*" entonces y "*decágono regular tiene 10 ejes de simetría*".

Una situación parecida ocurre en el caso de los estudiantes de FFPUB. El estudiante Al, en cuanto ejes de simetría de polígonos, les da prioridad al eje vertical y al eje horizontal, sin poder reconocer los ejes inclinadas. Pero en los dos casos (tanto en FEUP como en el FFPUB), estos estudiantes aceptan el razonamiento y argumentación de otros y mejoran su grado de razonamiento.

En el caso de la actividad SIA4, identificamos el caso de Ad que está en las primeras dos fases (Boero) que quiere decir: Producción de una conjetura (todos los bordados son simétricos, incluyendo exploración de la situación problemática) identificación de "regularidades" (los bordados se forman por repetición de una parte de figura), identificación de condiciones bajo las cuales tales regularidades ocurren (rotando la parte, trasladado, reflejado), identificación de argumentos para la plausibilidad de la conjetura producida, y formulación del enunciado (todo el bordado se obtiene por rotación/simetría axial/traslación de la parte generadora).

Lo mismo es el caso de Sh que justifica la repetición utilizando en vez de la rotación la simetría central.

En el caso de FFPUB, encontramos el caso de Jo que muestra capacidad de producir una conjetura y argumentarla. Lo mismo ocurre y con el caso de Ol (FFPUB) que identifica correctamente los argumentos de su conjetura.

Una mediación apropiada por parte del docente es necesaria para todos aquellos aspectos en los cuales hay una ruptura significativa con la forma de los enunciados. Ilustramos con el ejemplo de las producciones en la SIA4 cuando se pide explicar las características de tres bordados kosovares:

> Sh: "*el primer bordado es simétrico*"
> Ad y unos: "*los tres bordados son simétricos*"
> Docente: "*Pero cuidado, porque la flor de derecha y la flor de la izquierda…tienen diferentes orientaciones* (se refiere al primer bordado)."
>
> [SI4, párrafo 4-8]

El Sh hace una justificación de su enunciado que (el primer bordado) es simétrico identificando el centro de simetría central, y presentando con el dibujo apoyándola en la aplicación punto a punto (figura 7.23.a), que nos otros consideramos un logro de alto grado de razonamiento. Ad tiene que defender su enunciado con análisis internos (Boero) de la situación problemática, con cuestionamientos de la validez y el significado de la regularidad descubierta, con refinamientos de hipótesis, con discusiones de posibles formulaciones. Como ya ha producido una formulación, ahora discute su aceptabilidad de acuerdo con requerimientos sobre su naturaleza (las flores del primer bordado son orientadas contrarios por ejemplo), y encontrar posibles vínculos que lleven de uno al otro. Ella encuentra analogías entre estos ejemplos que les son suficientes para estar segura de la validez del enunciado que es:

> *"para hacer la reproducción de una a partir de la otra tenemos que girar la flor…"*
>
> [Ad, SIA4, párrafo 11]

La flor del primer bordado es la parte generadora de la figura (vea apartado 7.2.1.) que Ad ha identificado correctamente. Igualmente en otros dos bordados, ella explica la repetición como la propiedad de simetría (segundo bordado) y como la propiedad de traslación (en tercer bordado), de la parte generadora de la figura, ya identificada correctamente. Las tres maneras diferentes de repetición les permiten obtener todo el bordado a partir de la parte generadora. Ad hace la exploración del contenido (y los límites de validez) de la conjetura; elaboraciones heurísticas, semánticas (y aún formales) acerca de las relaciones entre hipótesis y tesis; identifica argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia, y ponderación de relaciones posibles entre ellos. Esta fase suele pertenecer a la tercera según Boero.

La situación análoga en el grupo FFPUB, ocurre cuando Mc afirma (sobre el primer bordado de SIA4):

> "la imagen es simétrico de derecha a izquierda y de arriba abajo…pero no por diagonales" (Mc, SIA4, parrafo 47)

Se nota el razonamiento visual del proceso de transformación simétrica. Mc consigue producir una conjetura, pero no consigue identificar las condiciones y argumentaciones que justifican el hecho de existencia de dos ejes de simetría y no las que pasan a través de diagonales.

Está claro que las tres diferentes transformaciones tienen la propiedad común, identificado por Ad (FEUP), Jo (FFPUB), en principio de la actividad y que es *la repetición* en diferentes maneras, (reflejo, rotando, traslado) de una parte de la figura. Cada una de estas maneras de hacer repetición, describe una determinado tipo de isometrías: simetría, rotación y traslación.

Como conclusión podemos decir que:

Resultado 7.2.38: *La situación problemática de explicar las características de tres bordados funciona suavemente, considerando el fenómeno de una continuidad posible entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba que implica conseguir conocimientos sobre multitud de ejemplos diferentes de isometrías relacionando con la identificación de mayoría de las propiedades y la identificación de las diferencias entre las mismas.*

Continuamos con el análisis del desarrollo de la actividad SAA3. En esta actividad se pide que un cuadrado dado con el lado c, tenemos que dividir en dos cuadrados iguales con el lado a, quiere decir que $c^2=2a^2$ (Figura 7.39 a).

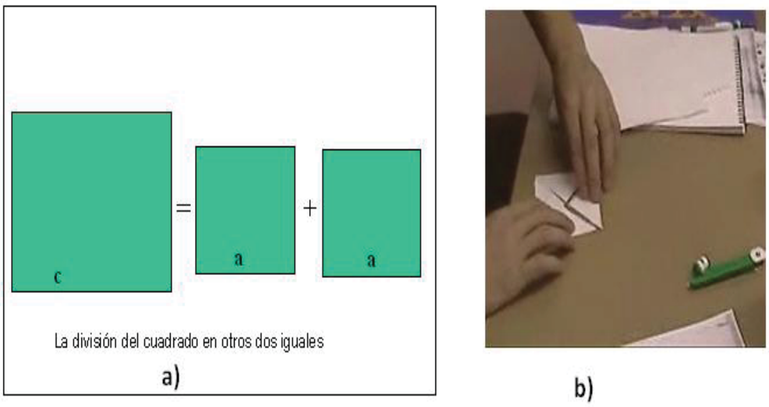


Figura 7.39 La división del cuadrado en otros dos iguales

Los estudiantes intentan resolver el problema utilizando el papel y tijeras para cortarla. Ellos empiezan cortar el papel del cuadrado grande en diferentes maneras, y se ve que ellos tienen la dificultad de obtener otros dos cuadrados iguales, a partir de las piezas del cuadrado grande. En un momento los estudiantes - Sh (FEUP), Ol, y Jo (FFPUB) han conseguido resolver problema en la manera inversa: Sh y Ol empiezan a partir de dos cuadrados pequeños cortando por los diagonales y colocándola en la posición adecuada obtienen un cuadrado (figura 7.39b). En su ficha de trabajo, Sh hace una explicación del proceso de construir el cuadrado a partir de otros dos (figura 7.40) mostrando una comprobación empírica con un ejemplo particular del problema.

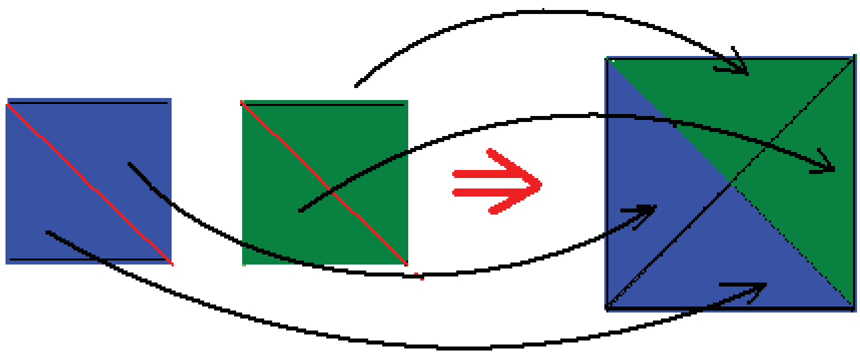


Figura 7.40. Construcción de un cuadrado a partir de otros dos

El razonamiento de Sh se basa en el hecho de que el área de una figura geométrica no varía, cuando sobre la figura realizamos acciones tales como cortar y pegar. Gracias a esta propiedad ella hace una composición de las partes de dos cuadrados pequeños. Ella sabe que si a una figura le quitamos una porción de área conocida, entonces el área de la figura resultante será el área de la figura inicial menos el área de la porción quitada. Así conociendo el área de un triángulo y la de un rectángulo, podemos calcular el área de un trapecio. La propiedad anterior también se verifica, si en vez de quitar una porción se la añades. Así si a una figura de área conocida, le añades una porción de área también conocida, el área de la figura resultante será la suma de las áreas, en este caso $c^2=a^2+a^2$.

El razonamiento de Ad es diferente:

> Ad: "*El lado del cuadrado grande es igual a la diagonal del cuadrado pequeño*".
> El docente: "*¿cómo puedes argumentar esto?*
> Ad: "*A base de teorema de Pitágoras, si el lado del cuadrado pequeño es a, su diagonal tiene que ser $d^2 = 2a^2$. Como es la condición del nuestro*

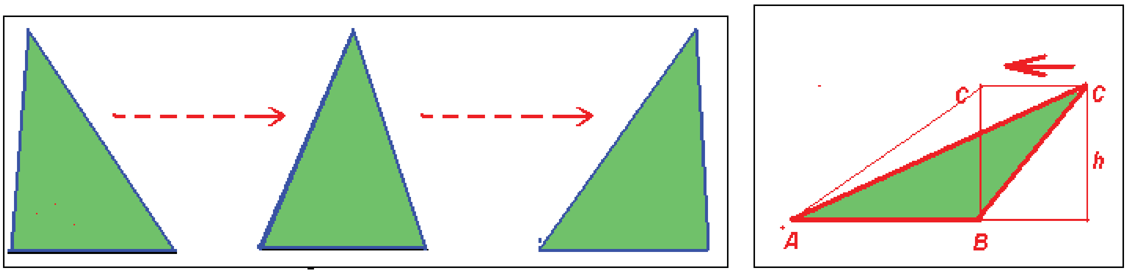
problema $c^2=2a^2$, esto quiere decir que el lado del cuadrado grande es igual al diagonal del cuadrado pequeño".

(SAA3, párrafo 14)

Ad sabe lo que es una diagonal de un polígono, sabe que diagonales del cuadrado son iguales, sabe el teorema de Pitágoras. Ad es capaz de razonar casi independiente del dibujo geométrico. Su pensamiento es lógico-concreto, haciendo un análisis deductivo, en el que partiendo de una hipótesis se ha de verificar el resultado. Es decir que ella entiende la argumentación como un proceso deductivo, con capacidad de generalizar, de razonar de acuerdo con definiciones, etc.

El caso de Jo (FFPUB) es muy parecida al razonamiento de Ad. La argumentación de Jo es de tipo experimental justificando el proceso a base de equivalencia de aéreas.

La actividad SAA5 muestra la transformación dinámica de un triangulo - dos vértices estables y el tercero se desplaza horizontalmente dentro de un segmento (figura 7.41a). Los estudiantes tienen que explicar *la propiedad que se observa en esta transformación.*



a) b)

Figura 7.41. Transformación dinámica del triangulo

Se trata de la transformación con la propiedad de invariancia del superficie y del cambio de ángulos y los lados del triángulo. Nos interesa que los estudiantes primero identifiquen estas propiedades y luego justifiquen el resultado enunciado. Hemos identificado que Fi, Sh, Ad, Em (del grupo FEUP) y Jo, Na, Yo, y Ol (del grupo FFPUB) correctamente identifican los elementos del triangulo que cambian y los que no cambian. Ellos identifican que cambia la forma, el perímetro, la posición, y lo que no cambia es la superficie, la base del triangulo y la altura del triángulo. Como ilustración presentamos la parte del dialogo con Ad, que hace una justificación correcta de que la superficie del triangulo no cambia utilizando la simbolización correcta (la fórmula del cálculo del triangulo) a partir de la definición de la superficie del triangulo como producto de la base y altura (Figura 7.41b):

> Ad: *El triangulo se convierte en un triangulo rectángulo…..*
>
> El docente: *¿Que cambia en este proceso? ¿Que no cambia?*
>
> Ad: *La altura del triangulo cambia.*
>
> El docente: *¿Que otros cambios tenemos?*
>
> Ad: *Cambian los ángulos y los lados y no cambia la superficie y altura.*
>
> El docente: *Como podes argumentar que no cambia la superficie.*
>
> Ad: *La superficie del triangulo es una función de la base y de la altura* $S = b \circ \frac{h}{2}$*. Como la base no cambia, y la altura no cambia,…entonces la superficie es constante independiente de la posición del vértice de arriba.*

La justificación por parte de los estudiantes de la FFPUB es diferente. En su justificación domina la visualización, comprobando prácticamente con el papel y produciendo justificaciones utilizando la correspondencia figural entre figuras. A base del desarrollo de ésta y de la actividad SAA4 identificamos:

Resultado 7.2.39: *La presentación dinámica de transformación hace posible que un gran número de estudiantes logran justificar y argumentar las propiedades de transformación (invariancia del área) utilizando la demostración deductiva (la fórmula del cálculo de superficie del paralelogramo y del triangulo en el caso de FEUP – comprobación practica usando la correspondencia figural en el caso de FFPUB) apoyando en las proposiciones conocidas anteriormente.*

La actividad SAA6 también exige un grado alto de razonamiento sobre transformaciones rígidas de composición presentando en manera dinámica la demostración del teorema de Pitágoras (Figura 7.42).

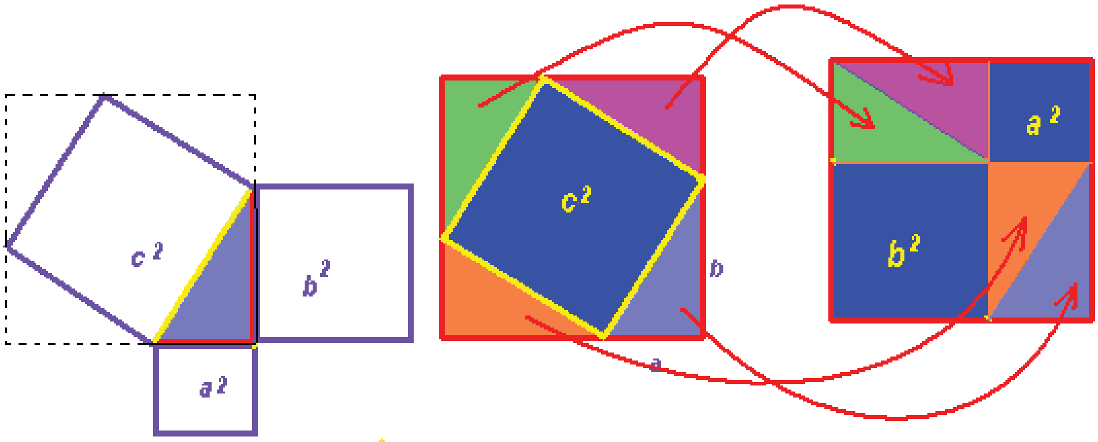


Figura 7.42. La demostración del teorema de Pitágoras

Esta actividad nos va a permitir adentrarnos en las características de los conocimientos científicos, más concretamente, matemáticos, que implican una manera de razonar, argumentar y demostrar muy específica y determinada, muy peculiar, la que se recoge de manera implícita con el nombre de "teorema". Hemos notado que solo presentación dinámica de demostración no ha podido dar buenas resultados, así que los estudiantes pidieron utilización del papel para que recorten y colocan las piezas de los dos cuadrados adecuadamente, y así consiguen observar la veracidad de esta propiedad. La intervención de docente consistía en la interpretación simbólica de la justificación de esta propiedad. Solo Sh, Ad y Vj (del FEUP) y Al, Di, Jo, Mc y Ol (del grupo FFPUB) pudieron interpretar la demostración de teorema de Pitágoras.

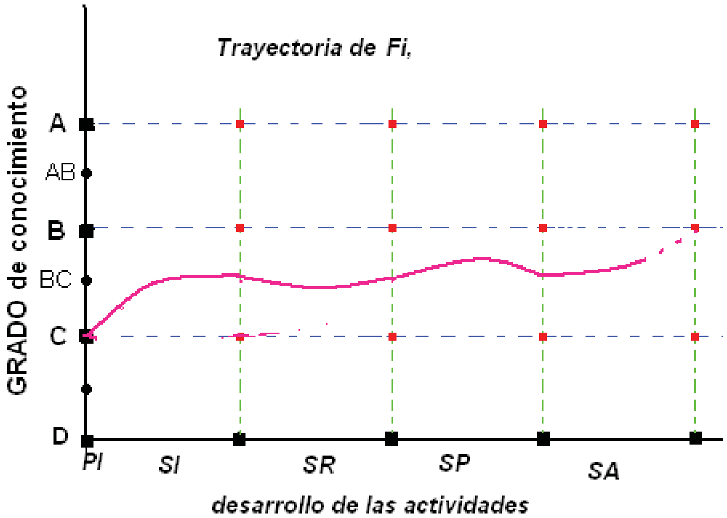
La justificación consistía en el hecho de que los dos cuadrados expuestos en la figura tienen las mismas dimensiones $(a+b)\times(a+b)$ así que también tienen la misma área $(a+b)^2$. Si a estos dos cuadrados les quitamos la misma porción de área, las figuras resultantes también tendrán la misma área. Así en el primer cuadrado hemos sombreado la parte que le vamos a quitar, que son cuatro triángulos iguales, y se ve claramente que el área resultante es c^2, ya que la figura que nos ha quedado es un cuadrado de lado c. Para el segundo cuadrado también hemos quitado los cuatro triángulos iguales, ahora los hemos quitado en una distribución distinta, y nos han quedado dos cuadrados, uno de lado a y otro de lado b, así que el área de la figura resultante es a^2+b^2. Ahora haciendo uso de la segunda propiedad de las áreas, tenemos que $c^2=a^2+b^2$.

Como resumen del análisis de las actividades de la práctica de formación docente, podemos constatar que:

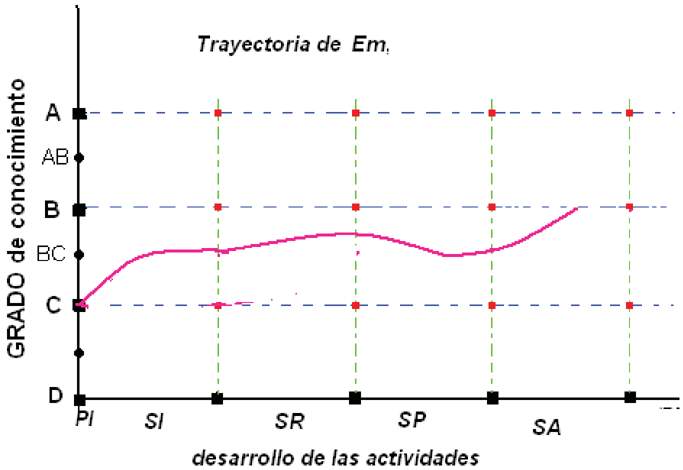
Resultado 7.2.40: *Solo Ad y Sh del grupo FEUP han conseguido aportar una justificación-argumentación utilizando la simbolización adecuada, reglas y propiedades explicitas basadas en otras proposiciones. Un grado medio-alto de razonamiento muestran los estudiantes Em, Dr y Da (grupo FEUP) y Di, Es, Jo, Mc y Ol (del grupo FFPUB) comprobando algún ejemplo sin errores significativos mostrando justificación correcta.*

A continuación presentamos gráficamente las trayectorias de los estudiantes a base de observaciones de las producciones en los momentos mostrados.

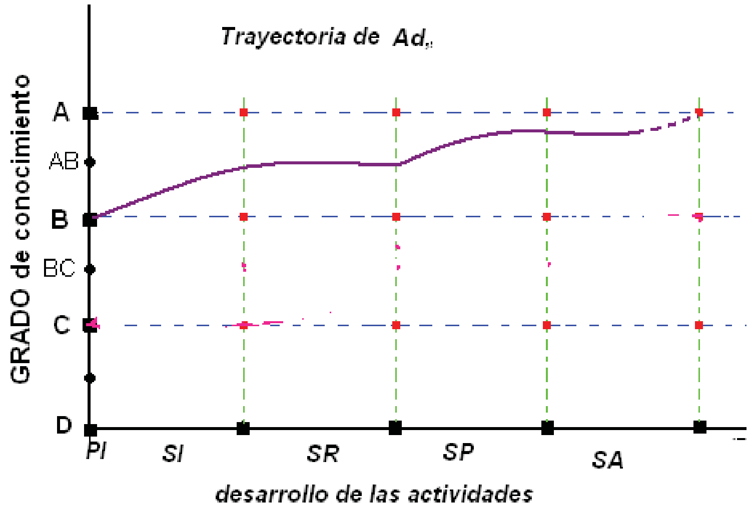
Trayectoria de Fi (FEUP)



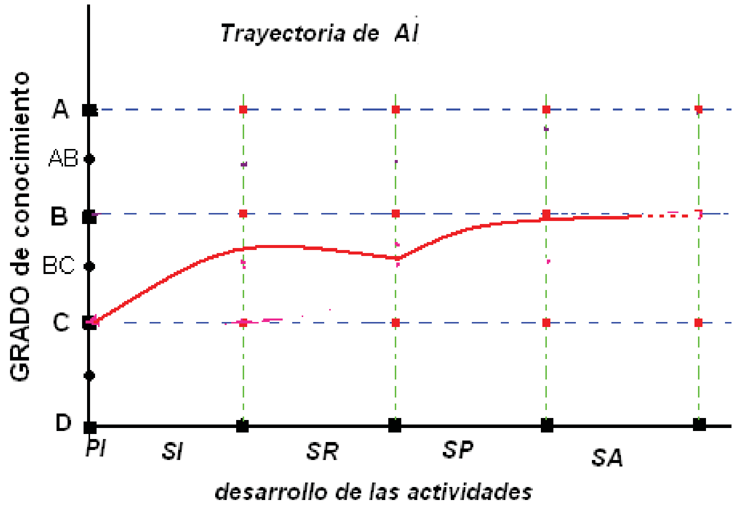
Trayectoria de Em (FEUP)



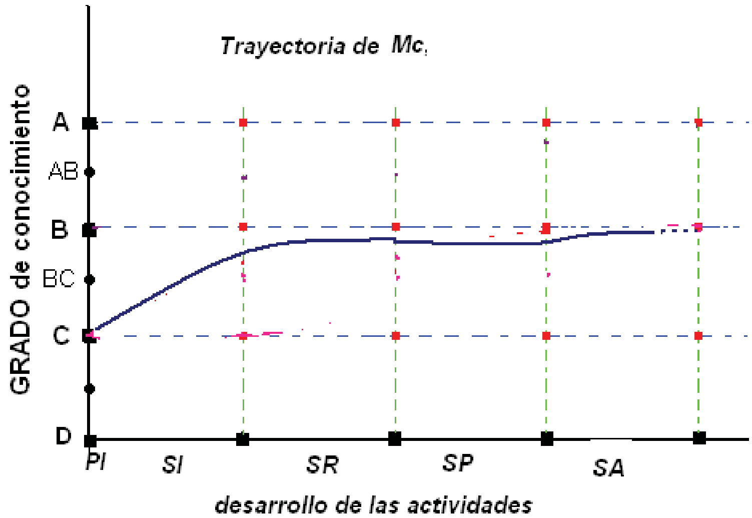
Trayectoria de Ad



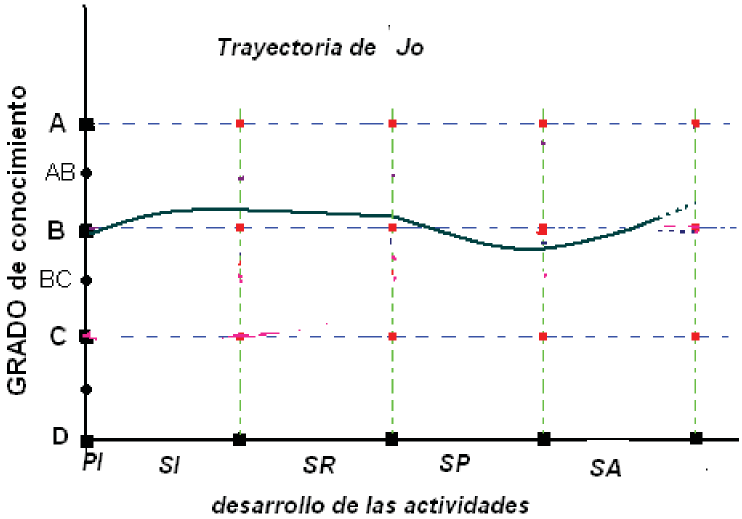
Trayectoria de Al (FFPUB)



Trayectoria de Mc (FFPUB)



Trayectoria de Jo (FFPUB)



7.2.7. Elementos culturales incorporados como contextualización en transformaciones geométricas

Para el análisis de los aspectos culturales en el proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Educación Primaria tenemos en cuenta que el futuro docente debe saber contextualizar y mostrar escrituras culturales a la hora de valorar la construcción matemática del concepto de transformación geométrica a partir de la realidad próxima. En esta manera mostramos que queremos comunicar un cierto significado de la matemática en nuestro posicionamiento de formación. Por ello, valoramos la necesidad de usar contextos significativos y el uso del contexto como práctica social en la construcción del concepto de transformación geométrica a partir de elementos culturales de los estudiantes para futuros profesores de Primaria.

Sabemos que la mayoría de los estudiantes de la FEUP pertenecen a la religión musulmana, y los mosaicos son el fenómeno notable a la cultura islámica. Analizando la presentación SIP, vemos que los mosaicos no posibilitan la construcción del conocimiento sobre transformaciones geométricas de manera notable en los estudiantes.

Aunque, Da y Xh afirman que "*es mucho mejor poner ejemplos de mosaicos*" en la clase, ellos no muestran que exactamente los mosaicos ayuden a la construcción de conocimientos de transformación geométrica. Esto se muestra cuando el docente pone la pregunta directa "

> Docente: *¿que aprendiza los alumnos…?*
> Fi: (responde) "*han aprendido algo…*" o
> Em: "*…figuras geométricas,…, la composición de la imagen…*".

La explicación de Em sobre la composición de la figura a partir de otras más simples, muestra que él ve el mosaico como una figura geométrica y su observación no está contextualizada con los mosaicos, sino en la búsqueda de relaciones entre figuras "simples" y el mosaico.

Las imágenes presentadas en las actividades SIA1, SIA2 y SIA3 parece que son buenos contextos de experiencia y sirven mejor para la construcción del conocimiento sobre la propiedad simétrica y el concepto de transformación simétrica.

Que son contextos de experiencia nos lo muestran las descripciones iníciales por parte de Ad, Shkendije, Da y Fi - buscando las diferencias entre las imágenes de poco importancia sobre la transformación de simetría, poniendo tamaño diferente, lado diferente, etc. Luego, se muestra la evolución del contexto interno de Em a través del contexto presentado. En la realidad se muestra que, el conocimiento sobre transformación simétrica - hacer simétrico con el espejo, construido como una "herramienta" en su experiencia, se transforma en un objeto geométrico *transformación de simetría,* por parte de Em (Figura 7.4. pp 332), y por parte de Sh en la otra actividad con las manos:

> "*el ejemplo con las manos es mejor porque el alumno de primaria puede ver y hacer prácticamente lo simétrico*"
>
> (Sh, SIA2, parrafo 9)

En el ejemplo con la imagen de la boca:

> "*es buen ejemplo si pintamos los labios con el rojo y "besamos" el papel donde quedan los labios marcados. Entonces podemos experimentar la simetría con el doblado del papel…*".
>
> (Em, SIA3, parrafo 5)

A partir de lo observado, identificamos lo siguiente:

Resultado 7.2.41: *Las imágenes de contextos cotidianos y conocidos por parte de los estudiantes son buenos ejemplos de asociación a las transformaciones geométricas y ayuden a mejorar la construcción del conocimiento sobre la propiedad simétrica y el concepto de transformación simétrica.*

La actividad SIA4, es un buen ejemplo que muestra el proceso de transformación (convertir-conversión) de los elementos de un contexto en elementos de transformación geométrica.

Se muestra que los estudiantes usan los bordados para construir los conocimientos sobre los significados diferentes de transformación geométrica (el concepto, terminología y el proceso de transformación), empleando mayoritariamente términos adecuados a los elementos del bordado en la integración de razonamientos en las transformaciones.

El desarrollo de la actividad SIA4 esta asumida como un potencial para el desarrollo de las capacidades de *diversidad individual,* referida a las características particulares de cada individuo. Esto quiere decir que la actividad propuesta, responde a las experiencias diferentes, promoviendo el desarrollo de capacidades y de intereses diversos y apoyando, de manera específica, a aquellas personas que tienen experiencias especiales. Se trata de la experiencia de hacer bordado. La sociedad kosovar es caracterizado que todas las chicas (y solo las chicas) desde primeros años (aproximadamente 7 años) aprenden y hacen bordados.

Que el proceso de hacer bordado es un contexto de experiencia de chicas en Kosova, se justifica con el hecho de que en el discurso del desarrollo de la actividad SIA4, la participación de las chicas es absolutamente mayor que de los chicos. También identificamos una observación principalmente matemática sobre las transformaciones aparecidas en los bordados que una observación a base de realizar en la práctica el bordado, por parte de los chicos.

La construcción del conocimiento sobre la transformación geométrica a partir de la experiencia de hacer bordado, ilustramos con el ejemplo de Da:

> "(primero explica el hecho de hacer los bordados mismo como sus amigas)*…mira, yo pienso como podría hacerlo* (el bordado) *si tengo sólo la parte que se repite, que nosotros llamamos* ***el modelo,*** *que es en este caso la cuarta parte de bordado.*
>
> *Yo hacia el bordado así: primero (1) tengo que hacer lo simétrico respecto al cualquier sentido: por abajo - horizontal o por el lado-vertical. Esto quiere decir que tengo que imaginar la dirección (*recta s_1 o s_2, figura 7.43*) supongamos el horizontal (s_1).*
>
> *En esta manera yo voy a hacer otra cuartad (2) del bordado* ***contando los "nudos"*** *para que tenga* ***el número igual*** *respecto al "eje" horizontal (s_1). Luego, una vez obtenido la mitad del bordado, continuaré haciendo otra vez el modelo contando los nudos considerando otra dirección (eje de simetría s_2). Contaré los "nudos" para tener el mismo número de "nudos" en ambos lados de la dirección.*
>
> *Por fin, otra vez (3) continuare en misma manera respecto la dirección horizontal y tendré todo el bordado".*
>
> (Da:SIA4, párrafo 36)

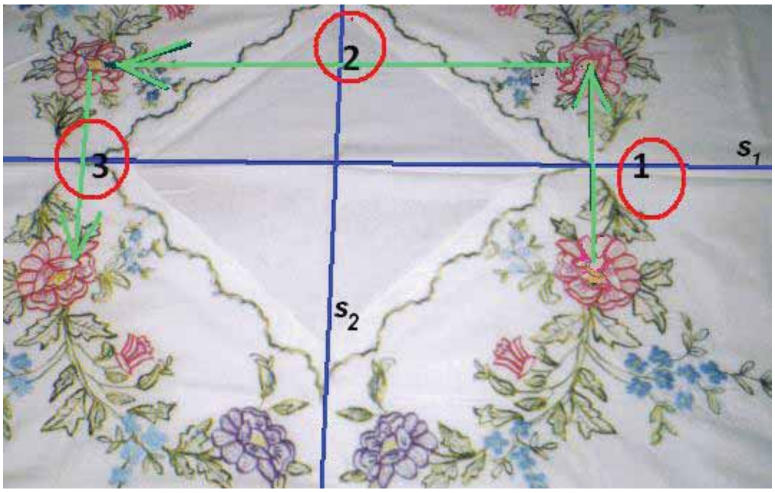


Figura 7.43. La descripción del proceso de hacer el bordado por Da

La descripción del proceso de hacer bordado por parte de Da, muestra la identificación de los ejes de simetría (direcciones horizontales y verticales) y la principal propiedad de simetría – la equidistancia (contar nudos para tener el mismo número de "nudos" en ambos lados de la dirección). La descripción del proceso en la clase por parte de Da implica que otros estudiantes comprenden el proceso de reproducir el "modelo" del bordado. Este fenómeno se muestra en caso de Sh, Vj y Xh, los cuales interpretan correctamente la traslación e identifican el vector de traslación con el proceso de reproducir el *modelo*. Mientras que Ad, Em, Se etc., continúan observar los bordados como figuras geométricas.

Resultado 7.2.42: *La integración de elementos del proceso de hacer bordado ayude significativamente en la construcción de conocimientos sobre transformación geométrica, en los estudiantes que poseen la experiencia de hacer bordado, identificando correctamente el modulo de repetición, el eje de simetría, el tipo de isometrías, y transformación isométrica como aplicación punto a punto. Los estudiantes que conocen el proceso de hacer bordado (las chicas) usen con éxito términos matemáticos adecuados a los elementos culturales de hacer bordado.*

Las actividades SRA6, SRA8, SRA9, SRA10 y SRA11 principalmente se basan en el uso de espejos, y hace posible comprender la transformación geométrica de figura a otra figura. Mientras que las actividades SIA6, SRA1, SRA2, SRA3, SRA4, SRA6 y SRA8 desarrollan las capacidades de comprender la transformación geométrica como aplicación punto a punto. En las actividades SRA6 y SRA8 se trabaja en los papeles cuadriculados y papeles con trama de puntos, apoyando con los espejos. La utilización de espejos ayude a los estudiantes de grado bajo de conocimientos para obtener la imagen de transformación, mientras que los estudiantes que tienen un grado alto de conocimientos, no sienten la necesidad del uso del espejo o lo utilizan sólo como demostración de la validez de su producción:

> "*Yo no necesito el espejo,…yo compruebo contando los cuadraditos*"
>
> [Ad, SRA6, párrafo 10]

Resultado 7.2.43: *La utilización de espejos es característica de los estudiantes que perciben el concepto de transformación figural (figura -> figura); mientras que la utilización de papeles cuadriculados y con la trama de puntos, es característica de comprensión de transformación como aplicación punto a punto*.

La actividad SRA5, muestra la importancia del uso del pantógrafo en la concretización del concepto de homotecia. Esta concretización (materialización) consiste en la identificación del centro de homotecia y la identificación de las propiedades de homotecia (Figura 7. 44). Identificamos que resulta difícil comprender la razón de la homotecia limitando en el uso de pantógrafo.

Figura 7. 44. Reproducción de la figura homotética con el pantógrafo

El fenómeno de la sombra es crucial en la comprensión del concepto de proyección, sus elementos y relaciones. El cambio de la sombra hace posible reconocer la dependencia funcional entre elementos de proyección. Ilustramos el ejemplo de Em que muestra un fenómeno (de su experiencia vivida – figura 7.45), explicando la dependencia funcional entre objeto, centro de proyección y el plano donde se proyecta el objeto:

> "*En el caso de la luz de vela, tenemos la sombra de la caja en la pared tan grande si la caja está más cerca al velo, o si es posible alargar la pared, tendremos la sombra más pequeña.*"
>
> [Em, SPA2, párrafo 12]

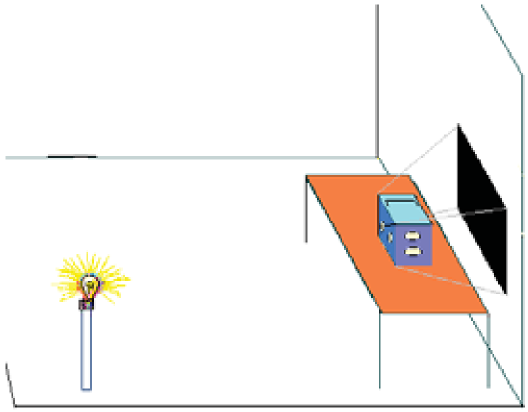


Figura 7.45. Em representa la dependencia entre elementos de transformación proyectiva

Identificamos la dificultad mostrado en los desarrollos de las actividades sobre la proyección en la comprensión de la diferencia entre proyección central y proyección afín. Los estudiantes están más familiarizados con la proyección afín (la luz del sol) que con la proyección central (la luz de una lámpara).

.

7.3. Componente estratégico-didáctico

En este apartado nos planteamos confrontar y analizar las producciones de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades de la práctica de formación a base de videograbaciones de las actividades, y de las fichas de trabajos de los estudiantes sobre el contenido del conocimiento estratégico - didáctico de los profesores.

Como un rasgo importante del contenido profesional el componente *estratégico-didáctico,* verificamos una implicación y discusión de los profesores en planteamientos propios y contribuciones en el planteamiento de los compañeros.

En este ámbito destacamos el aprendizaje de transformaciones geométricas y la instrucción de transformaciones geométricas.

7.3.1. Sobre las estrategias de aprendizaje de transformaciones

Dentro del aprendizaje de transformaciones geométricas analizamos cómo los estudiantes para futuros profesores de Primaria cuentan y evocan el tratamiento de la transformación geométrica, la negociación docente sobre aprendizaje de transformaciones y sobre adaptaciones críticas del conocimiento práctico de las transformaciones geométricas.

El análisis del proceso de aprender a enseñar las transformaciones sobre el aspecto estratégico-didáctico de formación de profesores lo hacemos por separado según componentes CEa1 - tener en cuenta tratamiento de las transformaciones geométricas), CEA2 - apertura y confianza para negociación docente, y CEa3 - adaptación critica del conocimiento práctico sobre las transformaciones geométricas.

El futuro profesor tiene en cuenta o evoca el hecho de tratar nociones de transformación geométrica (CEa1). Desde el principio del desarrollo de la práctica de formación sobre aprender a enseñar las transformaciones, el docente ha notado un interés y consideración de nivel alto por parte de los participantes de la FEUP. Esto se verifica con la participación regular en las sesiones, la participación activa durante la realización de actividades y disponibilidad positiva ante los requerimientos del docente acerca de la realización de la investigación (la infraestructura de la FEUP no disponía recursos suficientes para realización de las sesiones, y en ese sentido el apoyo y disponibilidad de los participantes para conseguir apoyo técnico fue imprescindible). Todo esto interpretamos entre otras y como interés sobre aprendizaje de las transformaciones geométricas.

El docente elabora reflexiona individualmente y propone la tarea para la primera sesión (SI)-Isometrías y la vida cotidiana, considerando importante hacer una presentación de la tarea por parte de algún estudiante. Cualquier estudiante estaba dispuesto a hacer la presentación. Espontáneamente, el docente elige que Fi prepara la presentación (SIP), que consistía en la elaboración de una experiencia sobre la enseñanza de transformaciones en Educación Primaria dentro de un proyecto Europeo. Para obtener la información sobre dicha experiencia, Fi utilizo el libro "Matemartica" que trataba esta experiencia de la enseñanza de matemáticas en las escuelas que participaron en el proyecto.

Elaborando la presentación del Fi, podemos interpretar que él muestra un bajo grado sobre tratamiento de las transformaciones en la descripción de la experiencia mencionada antes, describiendo y justificando el tema de los mosaicos de manera superficial:

> "*El objetivo de este proyecto fue mostrar la conexión que existe entre las matemáticas y el arte islámico... Todo el mosaico está formado por cosas geométricas-matemáticas,...*" [Fi: SIP, párrafo, 4]

Pero, hubo incrementos cognitivos y asociación de ideas sobre las transformaciones en las intervenciones por parte de otros estudiantes. Consideramos que fue una interacción positiva porque el docente ha provocado reacciones por otros participantes: "*Bueno, pero pensáis que los alumnos han aprendido algo de matemáticas con estas actividades?*

> *"Sí, claro que han aprendido algo"* [Fi, SIP, párrafo 14]

La intervención de Em muestra que reconoce los procesos significativos de transformación geométrica - *la composición y repetición de las figuras*, que muestra la atención a las dificultades de aprendizaje - *las actividades han mostrado un desarrollo en el principio simple hacia el más complicado,* y que muestra conexiones interdisciplinarias - *integración de conocimientos matemáticas con el arte.*

> "*El profesor pregunta que han aprendido los alumnos.*
>
> *Primero, han aprendido: que esta figura (Figura 7.1-1, pag.7) es una **composición** de otras figuras; sobre **la repetición** de las figuras; que las actividades han mostrado un desarrollo en el principio simple **hacia el más complicado** – figura 2 es simple, figura 1 es complicada.*
>
> *Segundo: Nosotros seremos profesores que tendremos que enseñar no solo matemáticas sino que y **otras asignaturas** también, como por ejemplo el arte. Estas actividades son un ejemplo donde el profesor de primaria puede integrar los conocimientos con la intención que los alumnos aprenden con más facilidad las matemáticas"*
>
> *[Em, SIP, párrafo 16]*

Todas estas características muestran que Em posee un grado medio de capacidad en el tratamiento de aprendizaje de transformaciones geométricas. De momento no sabemos si Em es capaz de utilizar y organizar las esquemas de transformación geométrica según grados de dificultades y adecuadas al contenido.

Resultado 7.3.1. *El momento de modificación del conocimiento inicial de Fi **es** la intervención de Em mostrando un grado más alto de capacitadas de tratamiento de las transformaciones. La intervención de Em, hace posible que Fi tiene en cuenta la noción de transformación reconociendo la propiedad simétrica del mosaico afirmando "estas rectas son ejes de simetría", y que luego constato que los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría cuanto el numero de los lados. La consecuencias de la intervención de Em son afectivas y para otros estudiantes que posen un grado alto de capacitad de tratar la noción de transformación, como es el caso de Ad, Sh y Em, que en este caso logran conseguir la esquema de las invariantes de simetría afirmando que "el n - tagono regular tiene n - ejes de simetrías".*

<u>Apertura y confianza para negociación docente (Cea2).</u> Durante el desarrollo de las actividades hemos identificado diferentes momentos de negociación de significados de transformación geométrica por parte de futuros profesores. En la actividad SIA3, Em propone tareas, ejemplifica y plantea dudas reflexionando sobre el proceso de razonamiento de los alumnos a partir de lo personal:

> "*Yo pienso que el ejemplo anterior (*refiere a SIA2*) con las manos es mejor que este ejemplo porque el alumno de primaria en el ejemplo anterior puede ver y hacer prácticamente lo simétrico. En cambio este ejemplo no es tan fácil para los alumnos de primaria.*
>
> ***Es buen ejemplo solo si** pintamos los labios con el rojo y "besamos" el papel donde quedan los labios marcados. Entonces podemos experimentar (dobla los manos, pensando en doblar el papel) la simetría con los alumnos de primaria.*"
>
> [Em, SIA3, párrafo 17 y 18]

Como consecuencia de una discusión sobre la definición de simetría en la actividad SID, Da propone integración curricular, presentando rasgos de incorporaciones en el contenido de su conocimiento al razonar sobre planteamientos de otros participantes y del formador:

> *"**Como yo entiendo**, nosotros como maestros tenemos que decirles a los alumnos que la figura que se puede dividir en dos partes idénticas no es siempre simétrica. Por esto **tenemos que poner ejemplos diferentes** cuando son simétricos y ejemplos cuando no son simétricos"*
>
> [Da, SID, párrafo 46]

A partir del análisis del desarrollo de las actividades de la práctica de formación docente, podemos constatar lo siguiente:

Resultado 7.3.2: *Las intervenciones de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades hacen posible pasar desde la explicitación del valor de los conocimientos previos al grado alto de proponer tareas, ejemplificar y plantear dudas y presentar rasgos de incorporación en el contenido de su conocimiento (Caso de Da). El desarrollo de las actividades muestra el aumento del grado de apertura y confianza para negociación docente sobre el aprendizaje/enseñanza de las transformaciones en la Educación Primaria.*

Adaptación crítica y acomodación del conocimiento práctico (CEa3). Identificamos que los estudiantes proponen diferentes estrategias para posibilitar el reconocimiento de los tipos diferentes de razonamientos de los alumnos de Primaria.

En el SIP, Xh nos convence que el trabajo con mosaicos es buen ejemplo:

> Xh: "*Es mucho mejor poner en las clases ejemplos como mosaicos que poner solo definiciones y formulas…*"
>
> [Xh, SIP, párrafo 8]

En la SIA3, Arjeta afirma que los ejemplos provocativos ayuden en el proceso de aprender la transformación simétrica:

> "*es un ejemplo provocativo con la mosca… Así que los alumnos ven y piensan dos situaciones: uno con la mosca y segunda situación sin la mosca*"
>
> [Ar, SIA3, 15]

Desarrollando la actividad SRA1, Shkendije muestra que ha logrado un grado medio de capacidad de adaptación crítica de conocimiento práctico sobre construcción de la imagen isométrico:

> "*utilizar escuadra y cartabón para construcción de las rectas paralelas....para que la reproducción de la figura sea exacta… Pienso que los alumnos tienen que dominar estas destrezas hasta el cuarto grado. Para que después no tengan problemas con otros ejercicios.*
>
> [sh, SRA1, parágrafo 17]

También el desarrollo de la actividad SRA2 nos muestra explícitamente que mayoría de los estudiantes poseen un grado medio de capacidad de adaptación crítica de los conocimientos prácticos sobre el progreso de los alumnos de Primaria en el aprendizaje transformaciones geométricas:

> "*Los alumnos en el papel cuadriculado dibujan con más facilidad las figuras, porque en el papel blanco no tienen nada determinado y tienen más dificultades...*"
>
> [Ad, SRA2, párrafo 4]
>
> "*Pero depende del grado del niño. En principio ellos no saben nada y es mejor utilizar el papel cuadriculado y después cuando puedan utilizar la imaginación es bueno utilizar el papel blanco y los instrumentos de dibujo…*".
>
> [SRA2, párrafo 12]

Resumiendo los resultados de análisis de las producciones de los futuros profesores, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 7.3.3.: *Las actividades de la práctica de formación planteada, muestran que los futuros profesores han logrado el grado medio de capacidad de adaptación crítica del conocimiento práctico sobre aprendizaje de transformaciones en primaria, pero no hay elementos para constatar si algún futuro profesor es capaz de proponer situaciones de análisis/síntesis de conocimiento sobre las transformaciones geométricas.*

7.3.2. Sobre los componentes estratégicas de instrucción de transformaciones

El análisis de los producciones de futuros profesores de Primaria durante la realización de la práctica de formación en el ámbito de la instrucción de transformaciones geométricas, se hace sobre el proceso de identificación de elementos metodológicos y del diseño por parte de futuros profesores, el grado de consideración de los elementos curriculares, el reconocimiento de registros y formas instruccionales, y el reconocimiento de los elementos funcionales de tareas educativas sobre diversos estilos instruccionales de las transformaciones geométricas. Mayoría de las actividades de la práctica de formación no tratan directamente la cuestión de la instrucción de las transformaciones en una clase de Primaria, así que los resultados identificados están dentro de esta limitación.

Identifica elementos de metodología y del diseño de aprendizaje (CEi1): Empezando desde la actividad SIP, en el caso del grupo FEUP veamos que las producciones de Da, Xh, Ad y Em destacan la importancia de elementos de metodología y del diseño de la clase en Educación Primaria sobre aprendizaje de las transformaciones geométricas. Ilustramos con la intervención de Da que ha identificado el trabajo práctico, en grupo y utilización de la cultura como elementos de metodología:

> "*Yo pienso que esta presentación me ha convencido que en las clases de matemáticas estaría mejor explicar geometría (y las transformaciones) con esta metodología,…haciendo prácticamente los mosaicos,…* "
>
> [Da, SIP, párrafo 6]

En la actividad SIA3, Xh identifica la utilización de los ejemplos provocativos como elemento del diseño de la clase sobre el concepto de simetría como transformación y como la propiedad; mientras que en la actividad SID, Da identifica la utilización de los contraejemplos como elementos de la metodología de la clase sobre la definición de la simetría en Primaria:

> "*Como yo entiendo, nosotros como maestros tenemos que decirles a los alumnos que la figura que se puede dividir en dos partes idénticas no es siempre simétrica. Por esto tenemos que poner ejemplos diferentes cuando son simétricos y ejemplos cuando no son simétricos".*
>
> [Da, SID, párrafo 24]

Las producciones de futuros profesores durante el desarrollo de las actividades SR1, SR2, SR3, SR4 muestran que es imprescindible utilizar recursos (instrumentos de construcción, el papel cuadriculado, el papel con trama de puntos, los espejos, el pantógrafo, etc.) para mejorar el aprendizaje de transformaciones geométricas en Educación Primaria. Por ejemplo:

> "*En el papel cuadriculado podemos utilizar los cuadraditos como unidades de medida que es diferente del papel blanco".*
>
> [Em, SRA2, párrafo 7]

Identificamos que Fi, Fie y Da consiguen establecer la relación entre secuencia del contenido de transformación isométrica con el diseño de su aprendizaje:

> "*Pienso que primero los niños tienen que utilizar el papel cuadriculado porque el papel blanco es más difícil utilizarlo; y nosotros en este caso tenemos aun dificultades utilizar el papel blanco. El papel cuadriculado es más fácil utilizarlo porque ayuda en orientarse. Es normal que después, para desarrollar la imaginación de los niños es bueno utilizar papel blanco y instrumentos de dibujo geométrico*".
>
> [Fi, SRA2, párrafo 20]

Como resumen podemos formular el resultado siguiente:

Resultado 7.3.4: *Durante el desarrollo de las actividades de la práctica de formación de la FEUP consiguen el grado medio de capacidad en la identificación de elementos de metodología y del diseño del aprendizaje de transformaciones geométricas, mientras que un número más pequeño consigue relacionar la secuencia del contenido con el diseño de aprendizaje de transformación geométrica. Pero el desarrollo de las actividades, no muestra si los futuros profesores son capaces de proponer el análisis del proceso de aprender la transformación geométrica por parte de los alumnos.*

Continuamos la elaboración de las producciones sobre otro elemento de la instrucción de las transformaciones geométricas.

***Consideración de los elementos del propio currículo* (CEi2).** Hemos identificado la diversidad de los estudiantes de la FEUP sobre la consideración de los elementos del propio currículo. Entre los seis estudiantes que han mostrado un grado bajo de capacidad sobre la instrucción de transformaciones geométricas en la prueba inicial (ver 6.4.2), identificamos que Fi, Re y Xh consiguen aumentar sus capacidades hasta conseguir identificar elementos claves en la secuencia del contenido sobre transformación proyectiva (las sombras). Ilustramos esto con el diálogo siguiente durante la actividad SPP:

> Fi: "*Eso es un argumento muy fuerte que es mejor desarrollar las actividades con la participación de los niños, que las actividades donde la maestra hace y habla sobre fenómenos y los niños solo escuchan. Aquí, es muy bien que los niños desarrollan la actividad - como por ejemplo, medir la sombra, cambian posición, etc.*"
>
> Em: "*Fi dice que es mejor que el niño ha salido para medir la longitud de la sombra; pero ha salido un niño como objeto de la sombra y otro niño ha salido para medir la sombra - que hemos visto en la grabación, son dos niños que han medido la sombra. Pero, sería mejor que la actividad repite y con otro niño más pequeño y otro más grande (en el sentido de tamaño) para que, primero - ver la diferencia de la magnitud del objeto y de las sombras, y segundo - que los niños que han servido como objeto puedan medir la sombra de otro niño*".
>
> Fi: "*Bueno, yo pensaba en la participación de los niños en la actividad, claro que y yo estoy de acuerdo que es mejor repetir la actividad con la participación de más alumnos*".
>
> *Ad: Yo pienso que sería mejor que la actividad se haga en diferentes lugares - en el caso de la grabación, el lugar fue plano, así que sería mejor mirar el lugar deformado, vertical, etc. Otra cosa, que yo pienso es importante, no sé si ha hecho la profesora - en la grabación no lo hemos visto - hacer comparación entre la medida de objeto (el niño) y de su sombra, para que sea permitido una discusión ¿porque es más grande el objeto que su sombra? o ¿porque es más pequeño?, ¿cuándo puede ser más grande? etc.*" [SPP, párrafo 50-53]

En general, para mayoría de los estudiantes, no hemos encontrado datos suficientes para que podemos concluir si han conseguido la capacidad del grado alto en hacer el análisis de adaptación y creación de materiales y recursos didácticos adecuados a las transformaciones geométricas.

Lo único que podemos resumir es que la mayoría de los estudiantes son capaces de identificar la adaptación e importancia de los materiales y recursos didácticos utilizados en las actividades.

Resultado 7.3.5: *Hemos identificado el aumento de la capacidad de los estudiantes en la consideración de los elementos del propio currículo. Este avance se nota en la consideración de la coherencia entre actividad y el contenido de transformación geométrica, en la* *identificación de los elementos claves en la secuencia del contendido sobre las transformaciones y en la identificación de la adaptación de los materiales y recursos didácticos.*

Reconocimiento de registros o formas instruccionales (CEi3): A partir del análisis en distintos momentos comunicativos y observando el conjunto de las intervenciones de los futuros profesores reconocemos las características que se ven a continuación.

Conocer y elaborar las experiencias diferentes incluso de otros países como forma instruccional, está identificado claramente por todos los estudiantes de la FEUP. Además, este elemento se considera importante y la mayoría están convencidos de que lo aplicarán en su futura profesión. La mayoría procuran argumentar y fundamentar esta decisión justificando por "*mejor metodología*", porque se muestra que "*la matemática sirve en la vida diaria*", que "*reconocer otras experiencias rompemos la metodología tradicional de instrucción del contenido*", que "*mostrando otras experiencias hace posible plantear nuevas ideas por parte de los alumnos y por parte de los profesores*", etc.

Otro elemento del registro y forma instruccional reconocido por parte de los participantes de la FEUP fue la presentación de videograbaciones de las clases en Educación Primaria. Esto ocurre durante la actividad SID cuando presentamos la videograbación de una clase de Primaria sobre la simetría en Kosova y la actividad SPP. Cuando presentamos la videograbación de una clase de Primaria sobre las sombras en Catalunya. En las producciones de los participantes veamos que todos están de acuerdo presentar videograbaciones de los momentos claves de las clases de Primaria, justificando que el empleo de estas formas instruccionales posibilitan el desarrollo de diálogos, imaginaciones e ideas que mejoran la enseñanza de las transformaciones geométricas en Primaria.

El empleo de diferentes materiales y recursos didácticos en las actividades de las sesiones desarrolladas ha implicado una motivación de alto grado a la hora de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Educación Primaria. Utilización de papel blanco, papel cuadriculado, papel con trama de puntos, espejos y pantógrafo ha abierto la discusión rica entre los participantes en la elaboración de los rasgos de la enseñanza/aprendizaje de las transformaciones en Primaria. Se muestra una dedicación más profunda en el problema del aprendizaje de las transformaciones por parte de los alumnos de Primaria, como nos confirma Sh, por ejemplo:

> "*Pienso que es mejor utilizar el papel cuadriculado en principio y luego utilizar el papel blanco para las clases de las transformaciones geométricas porque el trabajo en el papel blanco desarrolla habilidades de los niños en las diferentes construcciones geométricas, cuales no es posible desarrollar en el papel cuadriculado".* [Sh, SRA2, párrafo 11]

La realización de las actividades de la práctica de formación sobre las transformaciones geométricas muestra un gran éxito en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes en el reconocimiento de registros y formas instruccionales. Este gran éxito lo explicamos por el hecho de que los estudiantes de la FEUP por primera vez[2] tienen la posibilidad de mirar las experiencias de otros países, hacer presentaciones de videograbaciones de las clases en Educación Primaria y conocer diferentes materiales y recursos didácticas en las clases de formación.

Resultado 7.3.6: *El análisis de las producciones de los estudiantes, muestra que el desarrollo de las actividades ofrece la posibilidad de que la mayoría identifique el marco referencial del entono, sepan hacer la comparación entre diferentes modelos del trabajo, dialoguen, imaginen y justifiquen gestiones asociadas a la enseñanza de las transformaciones.*

[2] A partir de mi experiencia como formador en la FEUP y de las declaraciones de los estudiantes

Capítulo 8.

Análisis y resultados de la prueba final

8.1 Introducción

En este capítulo se explica el diseño de la prueba final de conocimientos sobre el aprender a enseñar las transformaciones geométricas en primaria, se justifica y describe cada una de las actividades de la Prueba, y se muestra el análisis de las producciones de los participantes sobre las actividades de la prueba. La base para la construcción de la prueba final son los conocimientos y resultados de investigación que hemos obtenido sobre el proceso de aprendizaje y enseñanza de las transformaciones geométricas en la Educación Primaria que se ha mostrado en el capítulo 7. Para que en ello se analizan los diferentes aspectos relativos al desarrollo de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria.

La elaboración de la prueba final daría lugar a que se cumpliera el último objetivo de este estudio y que es:

"*caracterizar elementos del desarrollo profesional de los docentes implicados y con ello, reconocer las dificultades de los estudiantes para comprender, relacionar y organizar contenidos, términos y propiedades geométricas asociadas a las transformaciones geométricas*".

Para el análisis se asumen descripciones comunes a las empleadas en la prueba inicial y el desarrollo de la práctica de formación docente. Esto nos posibilita poder hacer la comparación con los datos de la prueba inicial y para que identifiquemos los elementos característicos del progreso eventual de los futuros profesores para aprender a enseñar las transformaciones geométricas en la Educación Primaria.

8.2. Diseño de la prueba final sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas

Igual que en la prueba Inicial, hemos considerado que la prueba final debe contemplar los contenidos siguientes:

- Sobre los conocimientos:
  - El concepto de transformación como característica estática,
  - El concepto de transformación geométrica como proceso,
  - El conocimiento de diferentes transformaciones, las relaciones entre transformaciones isométricas y jerarquía conceptual,
- Mostrar las capacidades:
  - El razonamiento sobre el fenómeno de la transformación,
  - La integración de los elementos culturales asociados al significado de transformación,
  - Tener en cuenta aspectos sobre el aprendizaje de transformación,
- Respecto a la enseñanza
  - Sobre qué y cómo piensan los estudiantes en sus futuras aulas sobre las formas, estilos y los elementos curriculares, respecto a las transformaciones,
  - Las actitudes hacia aprendizaje y enseñanza de transformaciones geométricas.

La presentación de las actividades de la Prueba Final a los participantes se hace de la misma manera como en el caso de la Prueba Inicial. El docente ha planteado las actividades por escrito, mediante fichas preparadas para cada uno de los alumnos.

La prueba está adaptada a la mayoría de los estudiantes considerando que todos ellos han participado en la Prueba Inicial y en el desarrollo de las sesiones de la práctica de formación docente propuesta. La prueba se realizó en las aulas normales de trabajo de las facultades correspondientes de FEUP y de FFPUB.

En el desarrollo de la prueba final, los estudiantes utilizaron materiales y recursos necesarios como papel, regla, escuadra, compás, espejos.

Una actividad contempla diferentes tareas que se analizarán posteriormente según categorías establecidas en la metodología de la investigación. En la Tabla 8.1 presentamos las tareas de los ítems asociando los elementos a analizar respecto a las categorías sobre el aspecto matemático de transformación geométrica y a las categorías sobre conocimiento didáctico-estratégico de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en la educación primaria.

Tipo	Aspecto	Actividades que se construyen
CM	La Imagen conceptual, Terminología. Tipos.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
	Propiedades. Relaciones y jerarquías	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10.
	Transformación como proceso o cambio	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10.
	Comunicación y razonamiento	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.
CC	Elementos culturales e históricos	1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
CE	Elementos de aprendizaje	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11.
	Elementos de instrucción	1, 3, 5, 8, 9, 10, 11.
CA	Asúnción de la actividad profesional	3, 8, 9, 10. 11
	Las actitudes críticas y reflexivas	3, 8, 9, 10, 11.

Tabla 8.1. Los elementos a analizar las actividades de la prueba Final

8.2.1. Descripción de los ítems de la prueba final

Las actividades de la Prueba Final (PF) constan de diferentes tipos de ítems. La PF consta de once actividades dentro de las cuales hay la actividad 11 de diseño de una clase sobre enseñanza de transformaciones en la educación primaria.

Un primer tipo va acompañado de resolver el problema haciendo la construcción de la imagen de la transformación. Estas actividades son 1, 4, 6 y 7. En el primero tienen que construir la recta paralela y la recta perpendicular, en la cuarta la imagen simétrica, en la sexta deben construir la imagen simétrica de triangulo y del cuadrado respecto a las simetrías con los ejes paralelos e identificar el resultado de la transformación producida; en la actividad 7 tenemos la composición de dos simetrías con los ejes cruzados.

Otro tipo de actividades es interpretar los fenómenos diferentes mediante el significado de transformaciones. La actividad 2 trata de interpretar el fenómeno de la serie de las imágenes producidas con los espejos colocados opuestos entre sí.

La actividad 3 trata la cuestión de la invariancia de las transformaciones que no son siempre la distancia, o forma, sino que pueden ser otras propiedades como la superficie.

La actividad 4 trata la cuestión de la propiedad simétrica de las figuras dadas, destacando así la multitud de las producciones de transformación simétrica en la función de la posición del eje de simetría.

En la actividad 5 tratamos la relación entre dos figuras que son simétricas o no simétricas, tratando de destacar las propiedades de la transformación simétrica.

La actividad 8 trata la relación entre elementos de la transformación proyectiva, donde los estudiantes tienen que identificar las relaciones correctas o incorrectas entre el objeto, la fuente de la luz y su producción que es la sombra.

La actividad 10 trata la relación entre la simetría y otras transformaciones isométricas. Los estudiantes explican el proceso de obtener el bordado manejando los espejos y las posiciones del espejo.

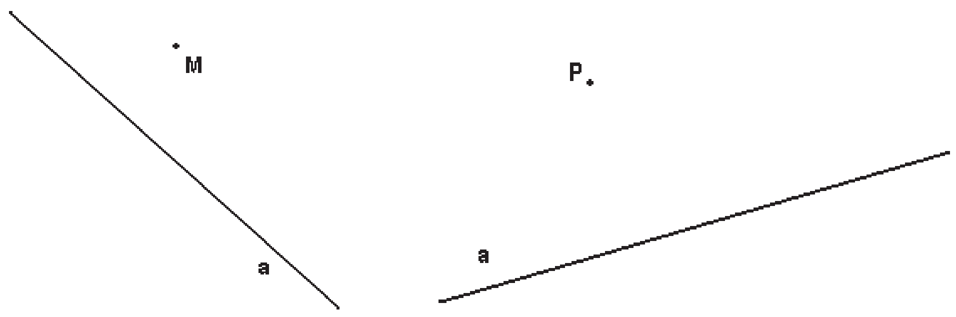
Al final – actividad 11, hemos puesto el problema de planificación de una clase sobre enseñanza de transformaciones geométricas que los estudiantes como futuros profesores de Primaria, van a desarrollar.

Con respecto a la ordenación, los ítems de la Prueba Final no están ordenados por categorías y subcategorias, como hemos explicado y se muestra a continuación. Sin embargo, antes de aplicarlo a los estudiantes se realizó un cambio de orden, de manera que se entremezclaron los ítems de las distintas categorías. Nuestro objetivo era que los estudiantes no establecieran ninguna asociación y respondieran cada ítem con independencia de la respuesta dada en un ítem de la misma categoría.

Los nuevos resultados nos servirán de base para compararlos con los de la Prueba Inicial (PI) y validar o no las conocimientos de los estudiantes sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Educación Primaria.

La población de estudiantes (14 de la FEUP y 13 de la FFPUB) a la que se le aplicó la Prueba Final es la misma de la población de la Prueba Inicial. Es decir eran los mismos estudiantes de la especialidad de Educación Primaria que participaron en la Prueba Inicial y en las sesiones de práctica de formación docente. Recordemos que la Prueba Final se les aplicó a los estudiantes al final del curso.

A continuación presentamos los ítems de la Prueba Final y los elementos a analizar los resultados.
Las actividades 1 y 2 se basan en las propuestas que da Giménez en su propuesta "mirar y ser" (1988).

Actividad 1	**Elementos a analizar**
1. a) Dibuja donde debes poner un espejo de forma que veamos (en el espejo) una paralela a la recta ra dibujada que pase por donde está el punto M.  ***a)*** ***b)*** **b)** Marca donde debes poner el espejo, de forma que veamos (en el espejo) una perpendicular a la recta a, que pase por donde está el punto P.	CMt2 CMt3 CMj2 CMj3 CPc2 CPc3 CPr1 CPr3 CC3 CEa1 CEi4

El objetivo de esta actividad es: reconocer donde está el eje de simetría para conseguir una imagen paralela (a) y una imagen perpendicular (b) respecto la recta dada a, explicar el modo cómo se hace, la comparación de la idea de bisectriz con el eje de simetría y reconocer el nivel de razonamiento independiente de la experimentación con el espejo.

Resultados de la actividad:

a) Como la recta y su imagen son paralelos cuando la recta es paralelo con el eje de simetría, los estudiantes tienen que colocar el espejo en la posición paralela con la recta dada. En todos los otros casos no se puede obtener la recta paralela. De esta manera los estudiantes pueden ver que hay un número infinito de rectas con esta propiedad, y no será difícil construir una que pasa por el punto M y demostrar que esa recta se obtiene si colocamos el espejo verticalmente en el medio entre el punto M y la recta a.

a) Los estudiantes pueden experimentar con el espejo colocándolo en diferentes posiciones hasta que obtienen la imagen de la recta perpendicular a la misma. Aunque parece un actividad semejante a la anterior, aquí se trata de utilizar una propiedad diferente al problema: la propiedad que la simetría no cambia la magnitud de los ángulos – ángulo es invariante de simetría (como en todas isometrías). Así que, para obtener la recta perpendicular, tienen que formar el ángulo recto (90^0), y por esto es más fácil cuando un lado del ángulo será la posición del espejo y otro la recta dada a.

Como imagen del ángulo formado va a ser igual, el ángulo formado tiene que ser la mitad del ángulo recto – (comparación de la idea de bisectriz con el eje de simetría) entonces, el espejo y la recta a debe formar el ángulo de 45^0. Luego no será difícil otra parte del problema – que la perpendicular pase por el punto dado P.

La solución del problema con el espejo es muy diferente a la solución mediante el compás y la regla, aunque el resultado es lo mismo.

Continuamos con la presentación de la actividad 2.

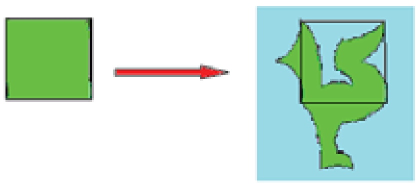
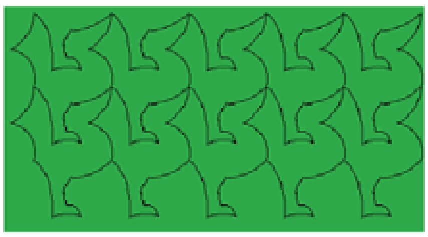
Como habíamos dicho, el objetivo de la actividad 2 es saber si los estudiantes reconocen la traslación como producto de simetrías y como elemento básico de la estructura del significado de las isometrías.

2. n algunas barberías se ve una escena como la del dibujo! Explica matemáticamente cómo se ha producido la transformación o transformaciones que muestra el fenómeno real correspondiente.	CMt2 CMt4 CMj2 CMj4 CPc2 CPc4 CPr2 CPr4

	CC2 CC4 CEa1 CEi4

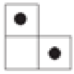
Es un ejemplo que afirma el teorema de composición de dos simetrías es un traslación (producto de dos simetrías con ejes paralelas). Lo importante es que los estudiantes reconocen este resultado (que el producto de dos simetrías con los ejes paralelos es una traslación), y que sepan determinar los elementos de tal traslación (el vector de traslación, la dirección y el sentido) en función de las simetrías dadas.

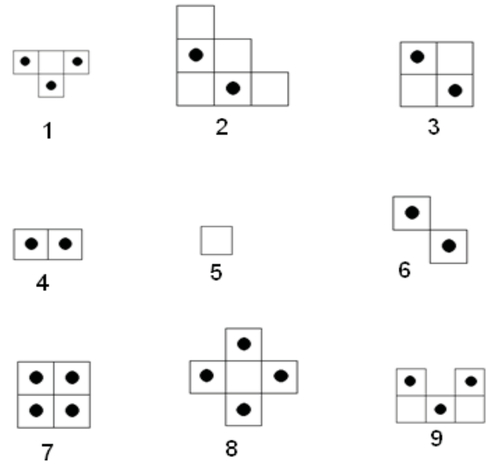
La actividad 3 tiene por objetivo reconocer la existencia de otro tipo de transformaciones que no conservan la forma y magnitud que es la transformación que conserva el área.

3. Explica razonadamente qué se conserva y qué cambia en la transformación que modifica una trama cuadrada en otra que tiene los animales.  	CMt1 CMt6 CPc1 CPc6 CPr1 CPr6 CC6 CEa1 CEa2

La característica importante de las transformaciones es el invariante. Como ejemplo de transformación no isométrica, es importante que los estudiantes identifiquen lo invariante en este caso de transformación: Descubrir la manera de formación de trama dada, y analizar situaciones límites en figuras y cuerpos.

El objetivo de la actividad 4, es evaluar la capacidad de los estudiantes a la hora de utilizar la simetría, la imaginación de las figuras que tienen la propiedad simétrica, la relación entre la figura original y su imagen, la relación entre dos simetrías con ejes perpendiculares, explicitar todas las posibilidades de simetrizar una figura, y encontrar todas los elementos de simetría de una figura.

4. Dado el modelo:  , debes dibujar en cada caso donde deberías poner el espejo para que se vea cada una de las figuras indicadas. Si no se puede debes explicar por qué.



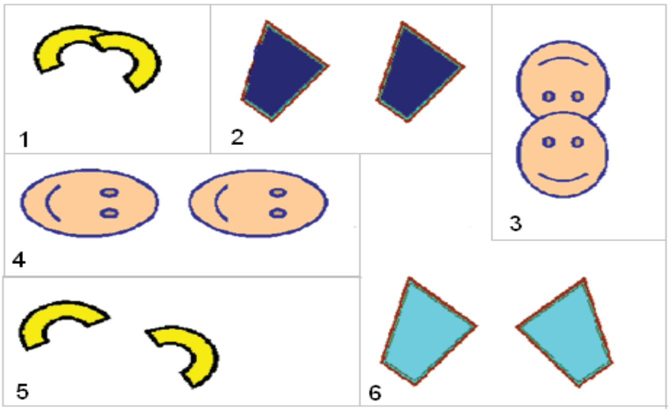
CMt2
CMt3
CMj2
CMj3
CPc2
CPc3
CPr1
CPr3
CC3
CEa1
CEi3
CEi4
CAa2
CAr2

Todas las figuras se pueden obtener con el espejo(s) y el modelo dado si se coloca en la posición adecuada el espejo. Algunas figuras se obtienen utilizando un espejo, y algunas utilizando dos espejos. Un hecho importante es que los estudiantes utilizan la estrategia de comprobación utilizando el espejo (s) para “obtener” sus “imágenes” del modelo.

Continuamos con la presentación de la actividad 5. Este tipo de situaciones es semejante a los que han usado por Gutiérrez-Jaime (1996).

El objetivo del actividad 5 es la explicación y justificación cuando hay simetría y cuando no hay simetría.

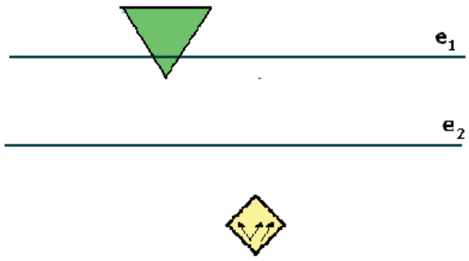
Tenemos seis pares de figuras idénticas en el mismo papel en posiciones distintas. Como sabemos que tres puntos no alineados determinan la posición de una figura plana (sistema axiomático de geometría euclidiana) entonces si dibujamos dos figuras que son exactamente iguales, será suficiente escoger tres puntos no alineados de una figura sobre otra haciendo coincidir estos puntos con los correspondientes de la otra figura.

5. Dados algunos pares de figuras, identifica los pares que corresponden a dos figuras simetricas. En cada situacion, dibuja el eje de simetria o justifica por que las figuras no son simetricas.  	CMt2 CMt3 CMj2 CMj3 CPr1 CPr3 CEa1 CEa2 CEi3 CEi4

Se verá que todo punto de una de las figuras está exactamente sobre el correspondiente de la otra. Para encontrar la simetría que nos hará pasar de la primera figura a la segunda, debemos señalar tres puntos, por ejemplo A, B, y C en la primera figura y los correspondientes A', B', y C' en la segunda figura. Lo que tenemos que hacer es construir los mediatrices de los segmentos AA', BB' y CC' así que los tres mediatrices coinciden en una recta que es el eje de simetría que transforma la primera figura en la segunda. Si dos de estas mediatrices no coinciden decimos que las figuras no son simétricas. En este caso no se pide construir traslación como composición de simetrías.

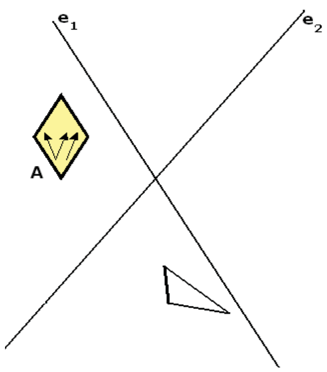
Las actividades 6 y 7 están adaptadas a base de la investigación de Jaime (1996). La actividad 6 tiene por objetivo la explicitación de la traslación como producto de dos simetrías con ejes paralelas. Eso incluye identificar el sentido de traslación e identificar el vector de traslación.

6. Dados dos figuras (triangulo y cuadrilátero) y dos rectas paralelas (ejes de simetrías) e_1 y e_2. Aplica a las figuras dados primero la simetría S_1 y llama T' el triangulo imagen obtenido. Llama C' al cuadrado imagen obtenido. Aplica a las figuras T' y C' la simetría S2. Llama alas figuras T'' y C''. ¿Como llamas al movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial T hasta la ultima imagen obtenida T''?	CMt2 CMt3,4 CMj2 CMj3,4 CPc2 CPc3,4 CPr1 CPr3,4 CC3,4

 Indica como se llama dicho movimiento directo y qué características tiene. ¿Que conserva y qué cambia?	CEa1

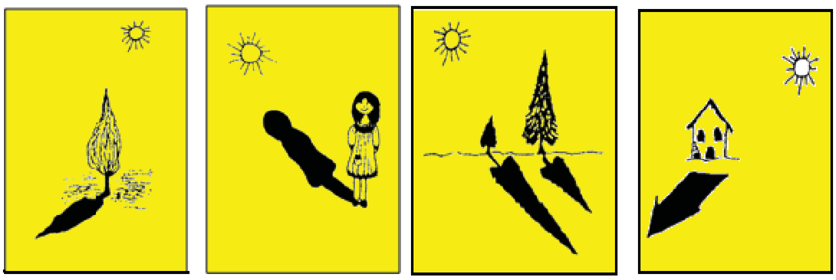
Los estudiantes tienen que descubrir por sus propios medio el resultado de cada caso y la relación existente entre las simetrías que intervienen en la composición y el movimiento resultante - la traslación. El significado de esta actividad es el teorema: Sean dos simetrías S_1 y S_2 respecto a los ejes de simetría s_1 y s_2 que son paralelos. S1 aplica X en Y, y S2 aplica Y en Z. Sea d la distancia que separa a las rectas s_1 y s_2. La distancia XZ resulta ser XZ=2d y el movimiento resultante es la traslación.

Continuamos con la actividad 7. Igual que en la actividad anterior, el objetivo de actividad 7 es construir la imagen de la rotación de una figura construyendo las imágenes simetricas respecto los dos ejes cruzados. Se pide explicitar la rotación como producto de dos simetrías con ejes concurrentes, identificar el centro de rotación y identificar el ángulo de rotación.

7. Dada una figura A y dos ejes de simetrías que se cortan, e_1 y e_2. Aplica a la figura la simetría de eje e1 - S_1 y a su imagen A' la simetría S_2. Determinar el movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la última imagen obtenida al final A''. Indica las características que llevan desde A a A'' directamente. ¿Es una simetría? ¿Cómo se llama?  ¿Cómo se escribe de forma general el resultado obtenido? Es decir, ¿Qué dirías qué pasa si tomamos otra figura B y hacemos B' y B'' con las dos simetrías anteriores?	CMt2 CMt3, CMt5 CMj2 CMj3 CMj5 CPc2 CPc3, CPc5 CPr1 CPr3 CPr5 CC3 CC5 CEa1

Descubriéndole resultado de transformación compuesto por dos simetrías con los ejes concurrentes, los estudiantes reconocen la relación entre rotación y simetrías o que la rotación es el producto de dos simetrías con ejes que cortan. La conclusión de esta pregunta a que se puede llegar es la equivalencia de dos simetrías sucesivas con una rotación resultante a partir de los ángulos formados por los ejes de simetría utilizadas. (Teorema: Sean dos simetrías S_1 y S_2 respecto a dos ejes de simetría s_1 y s_2. Supongamos que s_1 y s_2 se cortan en un punto O. Si el punto X se aplica en Y mediante S_1, e Y se aplica en Z mediante S_2, resulta que X se aplica en Z mediante una rotación de centro O, cuya amplitud es exactamente el doble del ángulo formado por s_1 y s_2.)

Las figuras presentadas en la actividad 8 son equivalentes a las propuestas por Boero (2000). El objetivo de la actividad 8 es reconocer el razonamiento de los estudiantes sobre proyección.

8. En algunos diseños hay unos errores. Si es correcto escribe bajo diseño o explica que error esta cometido.  Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4	CMt7 CMj7 CPc7 CPr7 CEa1, 2 CEa3,4 CAa2,4 CAr2

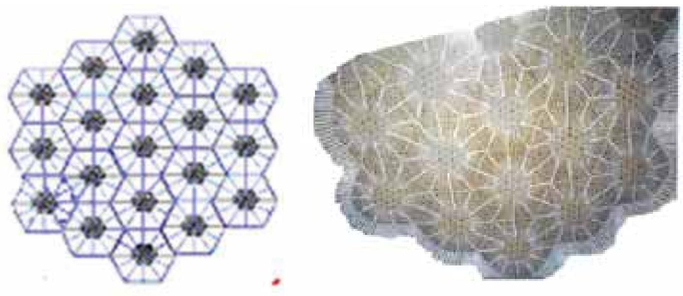
La tarea 8 se propone identificar como se reconocen las características de la proyección en una situación que se realizo en las tareas de clase de formación.

Nos interesa saber qué piensan los estudiantes sobre los ejemplos puestos en el sentido de mostrar las propiedades de la transformación proyectiva. Los estudiantes tienen que identificar en cada ejemplo que propiedad se trata de destacar.

9. Escribe brevemente por qué piensas que es importante trabajar no solo con isometrías, sino también con proyecciones en Primaria.	CEa CEi CAa CAr

El objetivo del actividad 9 es la identificación de posiciones relevantes de futuros profesores sobre el valor y importancia de la enseñanza de las transformaciones proyectivas en la educación primaria.

A partir de la problemática de la enseñanza de las proyecciones en la educación primaria, los futuros docentes identifican la presencia de los componentes del contenido del conocimiento profesional, expresan distintas influencias para el cambio en el conocimiento profesional a partir de las actividades desarrolladas anteriormente.

10. Vamos a tratar de ver un MODULO de la figura. Es lo que se repite. Usa los espejos para ver donde los pones para ver si se repite. - Pinta lo que piensas que podría ser un modulo mínimo de la figura que permite repetir este bordado. - Dibuja donde crees que deberías colocar dos espejos para ver la figura entera. 	CMj2 CPr2, 3 CC2,3 CEa1,3 CEi1 CEi3 CEi4 CAa2 CAr2

Con la actividad 10 planteamos:

- Valorar ¿qué piensan los estudiantes sobre la implicación de los bordados como realidad de la cultura kosovar/catalán en las propuestas de tareas de los estudiantes para las transformaciones?

Conocer la relación entre proceso de hacer los bordados y el uso de las transformaciones geométricas como contenido matemático asociado; conocer la capacidad de identificar las transformaciones utilizando su propia experiencia de hacer bordados; y saber la diferencia entre participantes en utilizar la experiencia de hacer bordados en distintos contextos.

En esta tarea, la complejidad se encuentra en el hecho que la estructura hexagonal se corresponde visualmente al bordado.

Aunque la simetría se considera preferiblemente como una transformación, el hecho de que ciertas transformaciones pueden realizarse sobre algunas figuras sin cambiarlas, es una propiedad de esas figuras. Estas propiedades, es decir, la existencia de ejes de simetría, pueden descubrirse con una inspección de las figuras. En esta actividad, los futuros profesores tienen la oportunidad de practicar en el arte de descubrir simetrías.

11. Diseñar una planificación de la clase en primaria sobre transformaciones geométricas.	CMt1, CMj1, CPr1, CC1, CEa1, CEa2, CEa3, CEi1, CEi2, CEi3, CEi4 CAa1, CAa2, CAa3, CAa4 CAr1, CAr2, CAr3

El objetivo de la tarea 11, es reconocer la capacidad de enseñar las transformaciones geométricas en la Educación Primaria. Para esta tarea se dijó los que los estudiantes tuvieran tiempo extra clase para desarrollar la tarea 11.

La capacidad de planificación de una clase sobre enseñanza de las transformaciones en educación primaria nos permite conocer el grado de conocimientos matemático y didáctico sobre la enseñanza de transformaciones.

En el siguiente apartado, presentamos el estudio y análisis de los ítems englobados en sus categorías y acompañado del estudio descriptivo correspondiente, en el que se muestra una tabla estadística de las tendencias. Paralelamente vamos haciendo las comparaciones bidimensionales: uno - entre los resultados obtenidos en los dos contextos la de Kosova y Catalunya, y segundo – entre los resultados obtenidos en la Prueba Inicial y las de la Prueba Final. Esto se corresponde con el objetivo O4 de la tesis.

8.3. Conocimientos sobre contenido matemático de la transformación geométrica en la prueba final

Como ya hemos dicho antes, el análisis va acompañado del estudio descriptivo y se hace siguiendo el orden de categorías ya establecidas y empleadas en las etapas anteriores de la investigación, sobre los conocimientos matemáticos de los estudiantes, refiriendo en los resultados de las comparaciones entre los dos países.

8.3.1. Conocimientos sobre el objeto transformación, terminología y tipos en la PF

Consideramos importante reconocer los conocimientos de los estudiantes sobre diferentes tipos de transformaciones, isometrías, deformaciones, y proyecciones; sobre la idea de transformación como objeto matemático que transforma los conjuntos de puntos o los objetos; sobre terminología usada, si es adecuada o no.

Como en los análisis anteriores, sobre esta categoría definimos cuatro grados de construcción de conocimientos A-alto, B-medio, C-bajo, 0- muy bajo. Asignamos el grado O a las respuestas en blanco o con respuestas no significativas a nuestros propósitos.

A continuación mostramos los resultados en forma de tabla 8.2 de los estudiantes de la FEUP y en forma de tabla 8.3 de los estudiantes de la FFPUB. Las respuestas dadas por cada uno de los participantes de la investigación se han asignado dichas categorías para poder proporcionarnos tablas 8.2 y 8.3, que recogen los resultados correspondientes a cada uno de los grupos estudiados.

Estudiantes de FEUP / Actividades	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	A	B	C	B	A	A	B	B	B	B	C	A	B	B
2	B	B	O	B	A	A	B	B	B	B	C	A	C	B
3	A	A	B	A	B	A	B	A	A	A	A	A	B	A
4	B	B	C	B	A	B	B	B	B	B	B	B	B	A
5	A	A	B	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	A
6,	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	A	B
7.	A	A	C	A	B	B	A	B	B	C	A	A	B	B
8	A	A	B	A	B	A	B	B	B	B	B	A	B	B
Resumen	A	A	B	A	A	A	B	B	B	B	B	A	B	B

Tabla 8.2 Respuestas de los estudiantes de FEUP sobre terminología y tipos al final del proceso

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	B	B	B	B	B	B	A	B	B	A	A	A
2	B	A	B	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A
3	A	A	C	B	C	B	C	A	C	B	B	B	A
4	A	A	A	A	A	A	B	A	C	A	B	B	B
5	A	A	A	A	A	A	C	B	B	B	B	A	A
6,	A	A	A	A	A	A	B	A	B	B	A	A	A
7.	A	A	A	A	A	A	A	A	C	C	C	C	A
8	A	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A
Resume	A	A	B	A	A	A	B	A	B	B	A	A	A

Tabla 8.3. Respuestas de los estudiantes de FFPUB sobre terminología y tipos al final del proceso.

En primer lugar, se nota que los resultados de la Prueba Final muestran un grado alto de adquisición de conocimientos por parte de los participantes de la investigación sobre la idea de transformación geométrica, el uso de terminología y la distinción de diversos tipos de transformaciones.

Presentamos el primer resultado identificado a base de análisis de las producciones de los estudiantes en el desarrollo de las actividades de la PF.

Resultado 8.3.1. *La mayoría de los participantes de la FEUP (8 de un total de 14 o 57%) muestra un grado medio de conocimientos sobre la idea de transformación, terminología y tipos. Otra parte (6 o 43%) muestran un grado alto de conocimientos sobre la idea de transformación como aplicación de los conjuntos de puntos en los conjuntos de puntos, representando las propiedades relevantes, usan adecuadamente la terminología y distinguen diferentes tipos de transformaciones.*

En el grupo de FFPUB, la mayoría (9 de total 13 o 70%) muestran un grado alto de la idea de transformación como aplicación de la figura en la figura. Otros participantes (el 30%) muestran un grado medio sobre la idea de transformación identificando el patrón de repetición con algunas propiedades.

A continuación ilustramos el resultado identificado mediante un análisis cualitativo de respuestas paradigmáticas.

Analizando el primer actividad de la PF, veamos que el dibujo de una recta paralela a la recta dada que pase por el punto M, se hace utilizando cartabón y escuadra. Esto significa que el dibujo de la recta paralela se considera como una aplicación biunívoca de los puntos de la recta r en el conjunto de los puntos de la recta paralela r' (figura 8.4. a), y aplica un procedimiento usado por los estudiantes en años anteriores

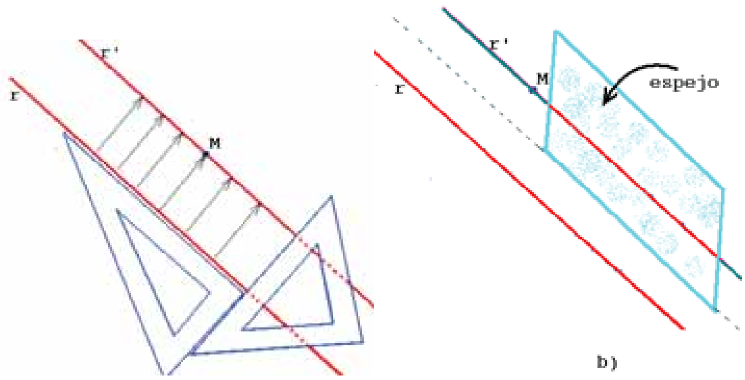


Figura 8.4. La construcción de la recta paralela con los instrumentos de dibujo a), y la verificación del paralelismo con el espejo b)

La consideración del desplazamiento como aplicación de conjuntos de puntos en conjuntos de puntos, se muestra en el caso de Ad, Ar, Da, Em, Fit, Re y Sh (ver la tabla 8.5)

Ar	Da	Em	Re	Sh
La construcción de la paralela se hace con los instrumentos de dibujo. Luego, si colocamos el espejo en el medio se puede ver la imagen de la recta r que es una recta paralela.	*La recta paralela con una recta dada se puede construir con el carbón y escuadra con el desplazamiento. Con el espejo solo se ve si son paralelas.*	*No es posible dibujar en el papel la imagen que aparece en el espejo. Es una cosa que se debe construir.*	*La construcción (de la recta paralela) se hace con dos escuadras.*	*Primero se construye la recta paralela y después con el espejo se demuestra el paralelismo de las rectas.*

Tabla 8.5. Las maneras de obtener la recta paralela por los estudiantes de FEUP.

Es diferente en el caso de los participantes de la FFPUB.

Sólo un participante ha identificado la necesidad de utilizar la escuadra:

> *"Coloco el espejo en el medio de la distancia entre el punto y la recta, para ello, utilizo la escuadra, hago una perpendicular y después busco el punto*

media de la perpendicular entre la línea que va del punto a la recta. Este punto medio es el lugar por donde pongo el espejo" (PF, Mc, 1)

Otro participante nos describe el proceso de encontrar el lugar donde se pone el espejo, identificando ese lugar como eje de simetría:

Para que la paralela que se refleja en el espejo pase por el punto M, tenemos que poner el espejo justo en el centro de las dos líneas. El espejo estaría colocado en la línea de puntos y mirando hacia la izquierda que es donde se encuentra la recta r. La línea M será simétrica respecto a r u el eje de simetría es justo en el centro, donde coloco el espejo" (PF, Ol, párrafo 1)

En la misma manera como Ol, los estudiantes de la FFPUB "buscan" el lugar por donde colocan el espejo que hace la aplicación de la recta r en su imagen.

La idea de transformación como aplicación de conjunto de puntos en conjunto de puntos, se muestra también y en las respuestas de los estudiantes de la FEUP sobre la actividad 1b de la PF. Ad, Ar, Da, Em, y Sh, encuentran el lugar del espejo construyendo la bisectriz de un segmento. Esto se basa en la propiedad de igual de distancia y ángulos iguales, se construye el conjunto de puntos igual de distancia desde dos puntos, como podemos ver en la descripción de Da:

"para encontrar la recta perpendicular respecto una recta dada, primero determinamos con el compas cualquiera dos puntos igual de distancia al punto P, luego construyimos la bisectriz del segmento formado por estos dos puntos. La bisectriz es la recta perpendicular a la recta r y pasa por el punto P. ..."

(PF, Da, 2)

En esta manera mayoría de los estudiantes de la FEUP han conseguido construir en sus fichas de trabajo la recta perpendicular como conjunto de puntos igual de distancia respecto a dos puntos de la recta dada. Ellos utilizaron el espejo para verificar la perpendicularidad entre la recta dada y la recta construida.

Sobre la actividad 1b, entre los estudiantes de la FFPUB veamos otra vez la idea de transformación como aplicación de la figura en la figura. Ellos han "investigado" la posibilidad de obtener la imagen de la recta r que sea en la posición perpendicular y han marcado correctamente el lugar donde se pone el espejo que es la bisectriz del ángulo recto.

La idea de transformación como aplicación de conjuntos de puntos en conjunto de puntos dominante en el grupo de FEUP se muestra en las producciones de los estudiantes sobre la actividad 3, 4, 6 y 7. Los estudiantes que poseen la imagen conceptual de transformación como aplicación de conjuntos de puntos, no tienen dificultades en identificar diferentes figuras formadas por los puntos como elemento base de la figura y de la transformación (figura 8.6). En esta manera ellos han identificado las cortes del cuadrado como figuras que cambian la posición y en esta manera cambia la forma del cuadrado. Una explicación típica de deformación es de Da:

> *En este caso tenemos la transformacion del cuadrado en una figura bonita de tal manera que las partes 1 y 2 (*ver la figura 8.6*) se han desplazado de determinada manera.Con el desplazamiento de las partes 1 y 2, la superficie no cambia, por que se trata de la misma superficie. Cambian la forma, el perimetro, etc.*
>
> *(PF, Da, 3)*

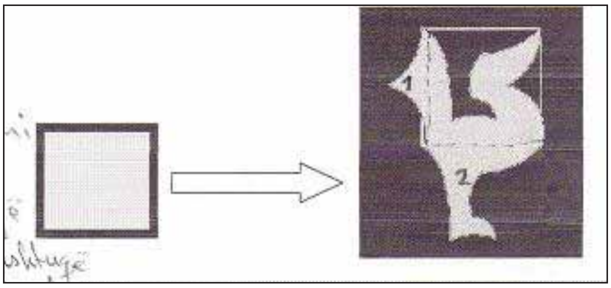


Figura 8.6. La deformación del cuadrado según Da, Ad, etc.

No hemos encontrado ni un caso de no clasificar este "cambio" como transformación deformación. No todos han conseguido identificar la superficie como invariante de este tipo de deformaciones.

Como mayoría de los estudiantes del grupo de FFPUB tiene la imagen conceptual de transformación como una aplicación de la figura en la figura (objeto -> objeto), la identificación de los elementos que se conservan y que cambian será más difícil. Es evidente que para los estudiantes de FFPUB el elemento base de transformación es la figura (en este caso el cuadrado) y la figura transformada (la figura de animal) tiene elementos muy diferente del cuadrado, que produce la confusión en la búsqueda de elementos que se conservan y que se cambian. Como ilustración presentamos en forma de tabal 8.7, algunas respuestas del grupo FFPUB:

Jo	Ma	Ol	Al	Li
Primeramente, lo que ***se conserva*** (entre el cuadrado y la de animal) *es la longitud de la base, mientras que la altura cambia debido al corte que se ha hecho. También c****ambia la forma*** *del modulo: en el primero es un cuadrado y en el segundo es la forma del animal*	*Se* ***conserva*** *el espacio, cambia el lugar porque efectuamos una traslación y* ***cambia*** *la figura*	*En esta transformación hemos* ***conservado*** *la medida de los cuadros iníciales, es decir, tanto el ancho como el alto de la imagen de los pájaros tiene la misma medida que los cuadrados iníciales. Pero hemos* ***cambiado*** *la forma del cuadrado, al realizar el dibujo de los pájaros y en el supuesto quedaría muy claro que la forma cambia.*	*Es evidente que hay* ***un cambio****, una transformación del cuadrado.* *Como consecuencia del dibujo el cuadrado ha perdido su cualidad dividiendo en las partes dibujados.* *El tamaño esta* ***conservado,*** *pero la forma se ha cambiado porque hemos transformado con los dibujos.*	*Se* ***conserva*** *el hecho de mantener la misma imagen pero* ***cambia la forma.*** *Hay unas figuras horizontales, igual que a la plantilla cuadrada hay 5 cuadrados horizontales. Se ha recortado la parte vertical en 3 para conservar la altura pero no la amplitud (no ha cambiado).*

Tabla 8.7. La idea sobre la deformación entre estudiantes de FFPUB

A base de los resultados de los estudiantes de la FFPUB podemos decir que todos están de acuerdo que se trata de un ***cambio de la forma*** del cuadrado.

La ventaja de la imagen conceptual de transformación como aplicación de la figura en la figura (*figural transformation*) es la facilidad de resolver problemas parecidas a la actividad 4 de la PF. En estos tipos de problemas como elemento base de transformación es la figura y por tanto toda la transformación tiene que ver con las “manipulaciones” de la misma figura. En realidad que ocurre con los que tienen la imagen conceptual de transformación como aplicación de puntos en puntos. Mostramos los resultados de los dos grupos de nuestra investigación.

Los estudiantes de la FFPUB consiguen encontrar correctamente la posición donde colocar el espejo en un modelo dado para poder ver la figura determinada. La mayoría (8 de total 13) encuentran correctamente el lugar y en el caso de no poder obtener la figura expliquen razonadamente causas por qué no se puede.

En las soluciones de algún estudiante (figura 8.8) en un lado de la línea dibujada encuentra la parte del modulo y se representa el espejo. Otros dan la respuesta sin trazos de su razonamiento .

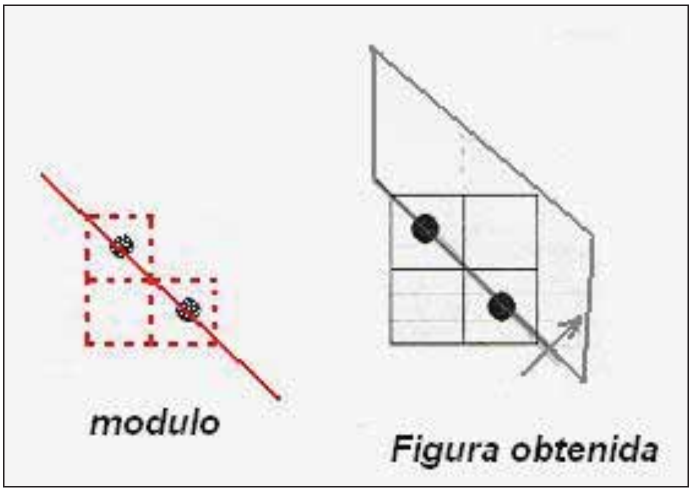


Figura 8.8. Obtener figura poniendo el espejo en el modelo

Los estudiantes de la FEUP, que muestran la imagen conceptual de transformación geométrica como aplicación de conjuntos de puntos, muestran un resultado más bajo que los de FFPUB. Solo tres estudiantes del grupo FEUP han conseguido resolver correctamente todas las figuras del actividad 4, mientras que 10 de total 13 estudiantes del grupo FFPUB han conseguido obtener todas las figuras de la actividad 4 de la PF. A base de esto podemos sacar la conclusión que para los estudiantes con la idea de transformación figura a figura será más fácil de resolver los problemas parecidos al 4, que para los estudiantes con la idea de transformación punto a punto.

Las actividades 6 y 7 nos sirven como buenos ejemplos de confirmación sobre la imagen conceptual que poseen los estudiantes de los dos grupos acerca el concepto de transformación geométrica.

En el grupo de FEUP, 8 estudiantes muestran la imagen conceptual de simetría, traslación y rotación como aplicación de conjuntos de puntos, mientras que otros 6 representan dichas transformaciones como aplicación de las figuras. En el grupo FFPUB no encontramos la muestra de transformación como aplicación de puntos, es decir, todos muestran la idea de transformación como aplicación de figuras. La mejor ilustración de esto son los dibujos de Ad del grupo FEUP (que hace aplicación de conjuntos de puntos) y de OI del grupo

FFPUB (que muestra la aplicación de la figura en su totalidad sin expresar la composición punto a punto) que presentamos en la figura 8.9.

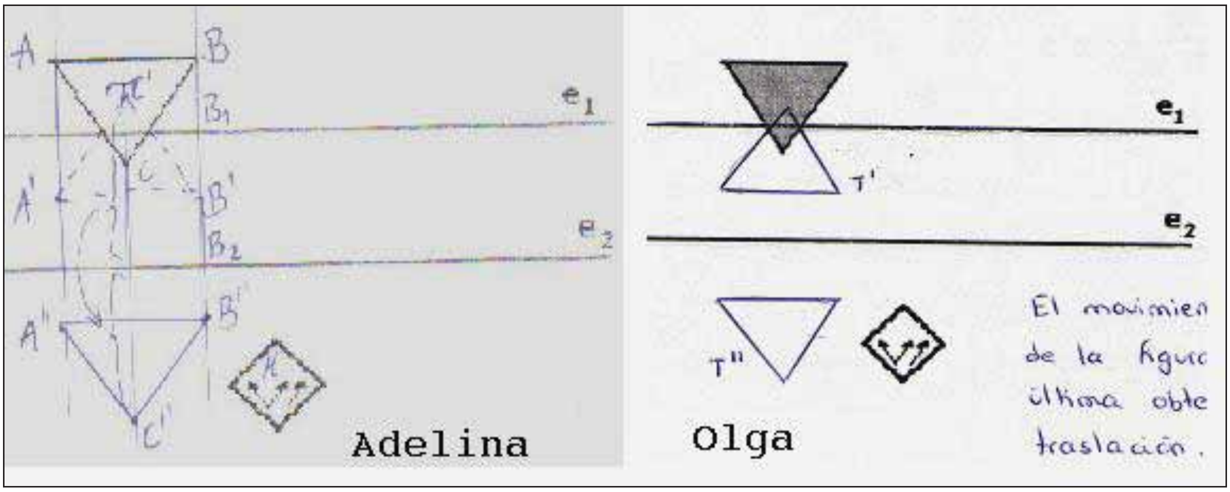


Figura 8.9. Presentacion de la transformacion como aplicación de puntos (Ad) y como aplicación de figuras (Ol)

A continuación nos parece importante presentar las diferencias entre conocimientos entre ambos grupos de los participantes de la investigación en las dos pruebas - la de la Prueba Inicial y de la prueba Final. Estas diferencias se muestran en la tabla 8.10.

Grados de conocimientos sobre **objeto transformación, terminología y tipos**	Pruebas	FE-UP n=14	FFP-UB N=13
A. Estudiantes capaces de construir imágenes conceptuales completas utilizando una terminología y afirmaciones correctas.	Prueba Final	6 - 43%	9 – 70%
	Prueba Inicial	- 0%	- 0%
B. Identifica la transformación de la figura sin explicar la transformación de sus elementos e identifica alguna propiedad relevante de la transformación.	Prueba Final	8 – 57%	4 – 30%
	Prueba Inicial	9- 64%	6 - 46%
C. Estudiantes con las imágenes conceptuales más pobres, formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual.	Prueba Final	- 0%	- 0%
	Prueba Inicial	6 - 36%	7 - 54%

Tabla 8.10. Las comparaciones entre grupos y las resultados de las pruebas sobre el concepto de transformación

A base de los datos de la tabla 8.10., podemos ver que hay un avance en los conocimientos de los estudiantes sobre la idea de transformación como objeto, el uso de terminología y distinción de diferentes tipos de transformación. Este avance se refiere comparando los conocimientos mostrados en la Prueba Inicial y los conocimientos mostrados en la Prueba Final.

Los resultados de la comparación entre ambos grupos y entre la PI y la PF, los mostramos en forma de grafico 8.11. Como podemos ver en el grafico 8.11, de color oscuro, muestra los conocimientos de la Prueba Final en ambos grupos se ha crecido en el grado B y en el grado A.

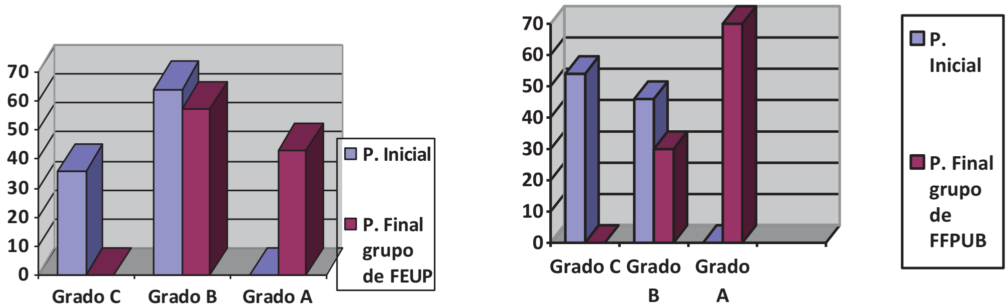


Grafico 8.11. Gráficos de comparación sobre el concepto de transformación, terminología y tipos entre la PI y de la PF.

8.3.2. Conocimiento sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación en la PF

En este apartado presentamos los resultados de análisis de las respuestas de los estudiantes de ambos grupos sobre la capacidad de identificar y establecer el sistema conceptual de transformación geométrica y la capacidad de distinguir entre isometrías y otras transformaciones el “mapa jerárquico” supuesto sobre las transformaciones geométricas. Los resultados hemos asignado según grados de conocimientos establecidos en el capítulo de metodología y presentamos en forma de tabla 8.12 para el grupo de FEUP y en tabla 8.13 para el grupo de FFPUB.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	A	A	C	B	B	B	C	C	B	B	C	A	B	C
2	B	B	C	B	B	B	B	B	B	B	C	A	C	B
3	A	A	B	A	B	B	A	A	A	A	B	A	B	B
5	A	A	B	B	A	A	B	A	B	B	B	A	A	B
6	A	B	B	B	A	B	B	A	B	B	C	A	B	B
7,	B	B	B	A	A	A	B	B	B	B	B	A	B	B
8.	A	A	B	A	B	A	B	B	B	B	B	B	B	B
Resume	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	A	B	B

Tabla 8.12. Resultados de los estudiantes de FEUP sobre relaciones y jerarquías en la PF

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	B	B	B	B	B	A	B	B	B	A	B	B
2	A	B	B	A	A	A	A	A	C	A	B	B	B
3	B	A	B	A	C¡	B	C	C	C	B	B¡	A	B
5	A	A	A	A	A	A	A	A	B¡	B	A	A	A
6,	B	B	B	B	B	B	B	B	C	B	B	B	B
7.	B	B	B	B	B	B	B	B	C	C	B	B	B
8	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
Resume	B	B	B	A	B	B	A	B	C	B	B	B	B

Tabla 8.13. Resultados de los estudiantes de FFPUB sobre relaciones y jerarquías en la PF

Las observaciones realizadas sobre las respuestas analizadas de los estudiantes identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.3.2. *En ambos grupos (la de FEUP y de FFPUB) notamos un crecimiento de capacidad de los participantes (ver 6.3.2) en ámbito de establecer el sistema conceptual identificando las jerarquías sobre transformación geométrica a partir de sus propiedades. Pero, solo un 21% (3 de total 14) en FEUP, y un 15% (2 de total 13) en la FFPUB reconocen la multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y establecen correctamente relaciones entre diferentes transformaciones y sus propiedades. Otra parte (79% en FEUP y 85% de la FFPUB) llegan a identificar algunas transformaciones y las propiedades relevantes sin lograr de establecer la relación adecuada entre diferentes transformaciones y sus propiedades.*

A continuación elaboramos en detalle el resultado mostrando más arriba, ilustrando con las producciones de los participantes en las actividades de la Prueba Final.

En la resolución del problema 1a de la PF, en el caso de la FEUP, vemos que los estudiantes consideran la simetría como desplazamiento (desplazando la escuadra según una línea-cartabón ver la Figura 8.4) hasta obtener su imagen que es la recta buscada que pase por el punto M. Esto se ocurre en la mayoría de los estudiantes (9 de total 14). Luego, sólo tres estudiantes, Ad, Ar y Sh, consiguen establecer la relación entre la recta r y su imagen r', identificando el eje de simetría en el lugar correcto:

> "*La construcción de la recta paralela se hace con la escuadra y cartabón… el espejo debe colocar en el medio entre el punto M y la recta r".*
>
> (Ad, PF, 1ª)

También en el caso de la actividad 1b, la mayoría de los estudiantes de la FEUP, establecen la relación entre la propiedad perpendicular y la bisectriz del segmento, pero no todos ellos consiguen establecer la relación entre la bisectriz del ángulo y la transformación simétrica. Unos estudiantes, como por ejemplo Pe, Dr y Vj, consiguen establecer la relación entre la bisectriz del ángulo y simetría (colocando el espejo en la posición del ángulo de 45º con la recta r), pero no entre la perpendicularidad y la bisectriz del segmento.

En el caso de FFPUB, solo Mc y Jo muestran un grado alto. Estos dos estudiantes saben que el lugar donde se pone el espejo es el eje de simetría que transforma la recta r en la recta que pas por el punto M, saben que la distancia entre imágenes correspondientes tiene que ser igual (la invariante de simetría como transformación isométrica es distancia):

> *"Para que la paralela que se refleja en el espejo pase por el punto M, tenemos que poner el espejo justo en el centro de las dos líneas. El espejo estaría colocado en la línea de puntos y mirando hacia la izquierda que es donde se encuentra la recta r. La línea M será simétrica respecto a r u el eje de simetría es justo en el centro, donde coloco el espejo"*
>
> *(Jo, PF párrafo 1)*

Otros estudiantes de la FFPUB, supuestamente consiguen encontrar el lugar de poner el espejo entre la recta r y el punto M, a base de manipulaciones experimentales con el espejo, pero no se muestra la capacidad de establecer claramente las relaciones entre propiedades de la transformación simétrica.

En el actividad 2 de la PF, entre los estudiantes de la FEUP, sólo un estudiante – Sh – identifica el significado matemático de la composición de un número par de simetrías y de un número no-par de simetrías. Cuando tenemos la composición de un número par de simetrías, la imagen es la traslación del original, y cuando tenemos un número no-par de simetrías, la imagen es simétrica respecto al original.

> *"Aquí tenemos la composición infinito de simetrías. Hay imágenes de traslación y de simetría según el numero donde nos interesa mostrar la imagen"*
>
> (Sh, PF, pr 2)

La mayoría de otros estudiantes de la FEUP identifican la repetición de simetrías utilizando los términos diferentes como "*la composición*", "*la aplicación consecutiva", "la imagen de la otra imagen",* etc.

Entre los estudiantes de la FFPUB, encontramos que la mayoría (7 de los 13), consiguen establecer relaciones entre transformación simétrica y traslación a partir de las propiedades relevantes de simetría y de traslación. Ilustramos esto con el ejemplo de Jo:

> "*Lo que se ha producido es una simetría de una simetría. Detrás de las personas de la imagen hay otro espejo, lo cual permite que se produzca este*

efecto, asimismo, se puede decir que si tomamos grupos de 3 imágenes la 1 y la 2 son simétricas, la 2 y la 3 también son simétricas. Entre la 1 y la 3 se produce una traslación"

(Jo, PF, pr 2)

Analizando las respuestas del problema 3, vemos que un gran numero (9 de los 14) de los estudiantes de la FEUP consiguen identificar la deformación como transformación de la figura y la invariante de deformación – la superficie, mencionando las propiedades de poder cubrir mismo el espacio y reconociendo los cambios relevantes.

En el caso de la FFPUB, solo tres estudiantes consiguen reconocer la invariancia de superficie como característica de deformación. Veamos la respuesta de Di (FFPUB):

"*El que ha cambiado es que ha pasado de ser el cuadrado a una forma de animal. Por tanto el cortado (*de las piezas*) de la cuadrada han cambiado la forma y hemos transformado en otro producto de forma bastante diferente. En este caso se conserva la misma imagen (*superficie- área Xh.Th.) *de una en otra, aunque tienen dos formas diferentes*."

(Di, PF, pr. 3)

Otros estudiantes se han limitado a reconocer el cambio de la forma como característica de la deformación presentado en la actividad 3 de la PF, poniendo alguna propiedad incorrecta de transformación. Ilustramos esto con el ejemplo de Na (FFPUB):

"*En esta transformación, cambia la forma y el tamaño de la figura. Además también cambia el lugar porque se ha desplazado*."

(Na, PF, pr 3)

En las respuestas del actividad 4, vemos que la mitad de los estudiantes de la FEUP reconocen además la simetría como transformación de una figura en la otra y la traslación y rotación explicando justificando a partir de sus propiedades. Otra parte se limitan en la identificación de simetría sin dar las explicaciones sobre los casos cuando no hay simetría.

En el caso de la FFPUB, la situación se cambia, la mayoría (11 de 13) identifican todos los tipos de isometría y sus explicaciones son correctas y basadas en las propiedades de cada una.

Las actividades 6 y 7 nos dan más la posibilidad de reconocer la capacidad de futuros profesores sobre relaciones entre simetrías y traslaciones y rotaciones. En efecto, tienen que reconocer la traslación como producto de dos simetrías con ejes paralelos identificando los elementos de traslación como son sentido y el vector de traslación (el actividad 6), y, la rotación como producto de dos simetrías con ejes concurrentes identificando el centro y el ángulo de rotación.

A partir de los resultados analizados, vemos que sólo cuatros estudiantes consiguen establecer la relación completa entre simetrías y traslación y rotación. Esto ocurre en el grupo de FEUP, mientras que en el grupo de FFPUB no hemos identificado ni un estudiante que es capaz de establecer jerarquía conceptual de isometría a partir de simetría.

Presentamos a continuación el resultado de la Dr que ha conseguido en ambos casos establecer el concepto de traslación y rotación identificando el vector de traslación, el centro del ángulo de rotación.

Como se puede ver en la figura 8.14, en el actividad 6, Dr (FEUP), construye las imágenes de la figura (triangulo y cuadrado) respecto dos ejes (e1 y e2) a base de aplicación puntual, construyendo los vértices de las figuras y luego construye la imagen de la figura F.

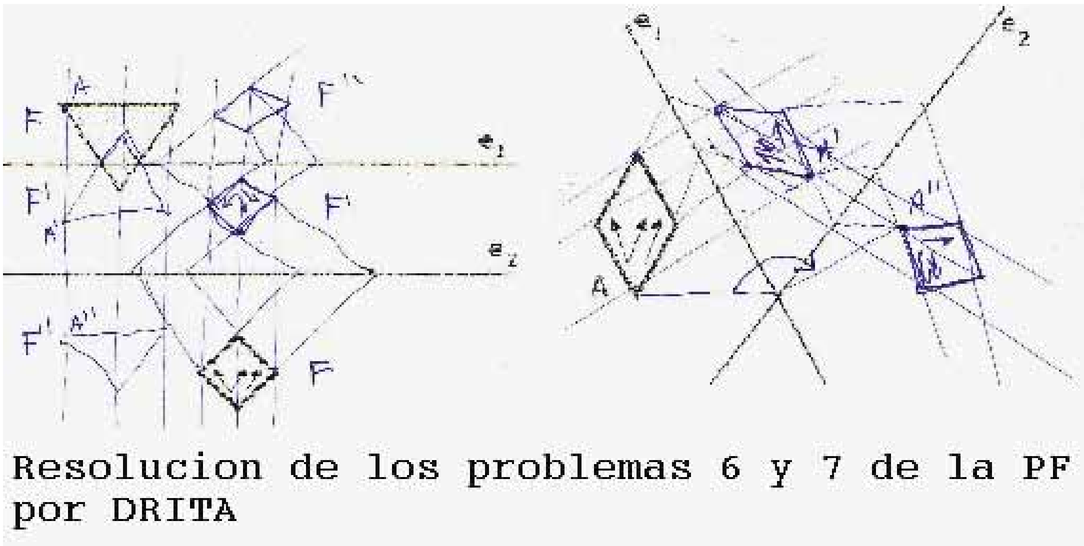


Figura 8.14. Las soluciones de los problemas 6 y 7 de Dr

La transformación que transforma la figura inicial F en la figura F'' se llama traslación, que es *un desplazamiento por un segmento AA''*. Explícitamente es el segmento AA'' el vector de traslación. En el actividad 7, Dr define la rotación como producto de dos simetrías con ejes que se cortan, determinando el centro de rotación el punto de intersección de los ejes y el ángulo de rotación formando por los segmentos que unen dos puntos correspondientes y el centro de rotación (ver figura 8.14). En el caso de Sh, veamos que ella expresa el vector de traslación como “distancia entre dos ejes”, mientras que sobre el centro y ángulo de rotación no hay expresión sino se ve en el dibujo? La otra estudiante, Ad consigue identificar el vector de traslación en el actividad 6, pero no vemos claro el centro y ángulo de rotación, aunque ha hecho la construcción correcta de los imágenes. Es interesante que Da y Em, no consiguen identificar el vector de traslación en el actividad 6, pero sí que identifiquen el centro y ángulo de rotación.

Como resultado podemos asignar:

Resultado 8.3.3 *Solo un par de estudiantes del grupo de FEUP son capaces de establecer completamente la relación entre simetría y traslación y simetría y rotación, identificando los elementos y propiedades relevantes. La mayoría de los estudiantes reconocen que el resultado de dos simetrías es traslación (en el caso de ejes paralelas) y rotación (en el caso de ejes concurrentes), pero no son capaces de identificar el vector de traslación, el centro y ángulo de rotación.*

En el grupo de FFPUB, no encontramos ni un estudiante que haya identificado el vector de traslación en el actividad 6, y el centro y ángulo de rotación en el actividad 7. En la realidad, Mc (FFPUB), identifica que el producto de dos simetrías es una rotación con un ángulo determinado:

> *“Simetría de rotación conserva las dimensiones y forma de la figura pero cambia su orientación y posición en el espacio la figura va rotando cambiando de posición según el ángulo del eje.*
>
> *(Mc , PF, 7)*

Pero ella no consigue determinar la magnitud del ángulo, y no identifica explícitamente el centro de rotación. Todos los participantes reconocen que el producto de dos simetrías puede ser traslación o rotación, y reconocen que el producto de dos simetrías conserva la forma y el tamaño. A partir de todo esto, asignamos el resultado siguiente:

Resultado 8.3.4. *Los participantes de la FFPUB reconocen que el producto de dos simetrías es traslación (cuando los ejes son paralelos) y rotación (cuando los ejes se cruzan), recuerden las propiedades de isometría,* *pero no son capaces de determinar el vector de traslación, el centro y ángulo de rotación a partir de la composición de dos simetrías.*

La mayoría de los estudiantes identifica la equivalencia entre la figura y su imagen respecto a la composición de simetrías, confirman las propiedades relevantes de isometría, e identifiquen el resultado general de composición de dos simetrías: por ejemplo:

> "*El movimiento que se produce es la traslación que se da cuando hay 2 espejos paralelos que conserva la forma y el tamaño de la imagen y cambia la posición de la misma, ….. La figura inicial mediante las simétricas que se van produciendo con las figuras en forma perpendicular va desplazando hasta llegar a la figura A``….*
>
> *De forma general podemos decir:*
>
> | | |
> |---|---|
> | **ejes paralelos* | ** ejes no paralelos* |
> | *B y B` = simetría* | *B y B` = simetría* |
> | *B` y B`` = simetría* | *B` y B`` = simetría* |
> | *B y B`` = traslación* | *B y B`` = traslación* |
>
> (Jo, PF, 6 y 7)

A continuación, en la tabla 8.15., presentamos los resultados de comparaciones entre los conocimientos de la Prueba Inicial (PI) y de la Prueba Final (PF) entre ambos grupos de participantes de la investigación, las de FEUP y las de FFPUB.

Grados de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación	Pruebas	FE-UP n=14	FFP-UB N=13
Reconocer multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y establece relaciones entre diferentes isometrías o isometrías y otras transformaciones.	Prueba Inicial	- o%	- o%
	Prueba Final	3 o 21%	2 o 15%
B. Identifica correctamente alguna transformación y las propiedades relevantes de la transformación pero no establece la relación adecuada entre diferentes transformaciones y sus propiedades.	Prueba Inicial	3 o 21%	5 o 38%
	Prueba Final	11 o 79%	10 o 77%
C. Conocimiento débil de transformaciones. No identifique las propiedades relevantes sobre la transformación y tampoco relaciones entre diferentes transformaciones.	Prueba Inicial	11 o 79%	8 o 62%
	Prueba Final	- 0%	1 o 8%

Tabla 8.15. La comparación de los conocimientos sobre relaciones y jerarquía entre las pruebas y entre los grupos de estudiantes

Como podemos ver en la tabla 8.15., tenemos un avance importante de los conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica en ambos grupos de los participantes de la investigación.

La comparación anterior la ilustramos en forma de grafico 8.16, donde las columnas del color azul representan los conocimientos de la Prueba Inicial y las de color rojo los conocimientos de la Prueba Final.

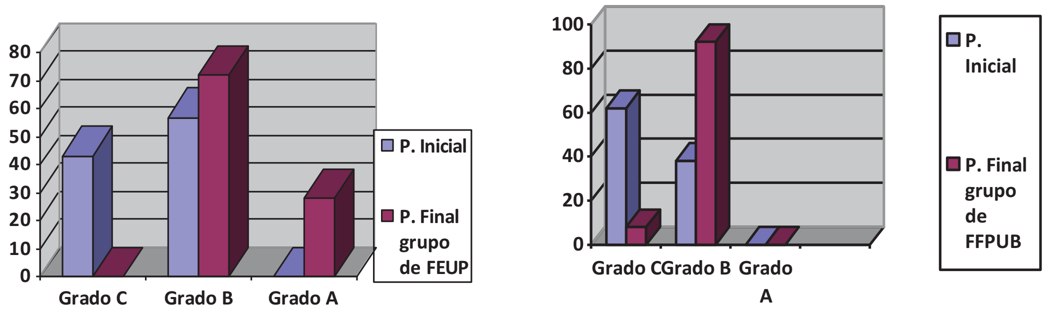


Grafico 8.16. Gráficos de comparación sobre las relaciones y jerarquías en la noción de transformación entre la PI y de la PF en ambos grupos de participantes.

8.3.3. Conocimientos en la PF sobre transformación como proceso o cambio

En este apartado analizaremos que conocimientos tienen al final los participantes de la investigación sobre el aspecto dinámico de la transformación en cuanto a cambio.

Mantengamos los mismos criterios de análisis y de clasificación de las respuestas, como en la Prueba inicial y del desarrollo de la unidad didáctica. Analizaremos los actividades 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, y 10 de la Prueba Final, considerando que las producciones de los estudiantes sobre estas actividades nos muestran mejor el grado de conocimientos sobre la idea de transformación geométrica como un proceso, respecto el aspecto dinámico de la idea de transformación geométrica.

En otras palabras, queremos saber la capacidad de los estudiantes en determinar *la manera de obtener la imagen* del objeto transformado y no de tratar la imagen misma. Esta *manera de obtener la imagen* del objeto transformado es *el proceso de transformación* que los estudiantes identifican y les dan significados diferentes.

Presentamos con la tabla 8.17 los resultados de los estudiantes de la FEUP y con la tabla 8.18 los resultados de los estudiantes de la FFPUB.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	C	B	A	B	C	C	B	C	C	A	C	C
2	A	B	C	B	A	B	B	B	B	B	C	A	B	B
3	A	A	B	A	B	A	B	B	A	B	B	B	C	B
4	A	B	C	A	A	A	B	A	A	B	B	A	B	A
6	A	B	C	B	A	B	B	A	B	B	B	A	B	B
7,	B	B+	B	B	A	A	B	B	B	B	B	A	B	B
8	A	B	B	B	B	A	B	B	B	B	B	A	B	B
10.	B	A	B	A	B	A	C	B	C	C	C	A	B	B
Resume	A	B	B	B	A	A	B	B	B	B	B	A	B	B

Tabla 8.17. Resultados de los estudiantes de FEUP sobre proceso de la transformación proceso en la PF

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	B	B	A	B	C	A	B	B	C	A	B	B
2	C	B	B	B	B	B	B	B	C	B	B	B	A
3	B	B	B	B	C	C	B	C	C	C	B	B	C
4	A	A	A	A	A	A	B	A	B	A	A	A*	A
6	B	B	B*	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
7,	B	B	B	B	B	B	B	B	C	C*	C	B	B
8	A	A	A	A	A	B	A	A	A	B	A	A	B
10.	B	A	A	A	B	A	B	A	A	C	A	B	B
Resume	B	B	B	A	B	B	B	B	B	C	B	B	B

Tabla 8.18. Resultados de los estudiantes de FFPUB sobre la transformación como proceso en PF

Con la tabla 8.19 presentamos la comparación entre el grado de conocimientos sobre el proceso de transformación entre la FEUP y FFPUB en la Prueba Inicial y la Prueba Final.

Grados de conocimientos sobre el proceso de transformación	Pruebas	FE-UP n=14	FFP-UB N=13
A. Reconoce transformación como concepto matemático – evidencia de dependencia funcional, de propiedades importantes e identificación de propiedades relevantes del proceso de transformación.	Prueba Final	4 o 28%	1 o 8o%
	Prueba Inicial	- o%	- 0%
B. Conocimiento correcto del proceso de transformación, como cambio o desplazamiento sin evidencia de propiedades importantes.	Prueba Final	10 o 72%	11 o 842%
	Prueba Inicial	8 o 57%	5 o 38%
C. Conocimiento débil o incorrecta del proceso de transformación. Transformar significa un cambio no bien definido.	Prueba Final	- 0%	1 o 8%
	Prueba Inicial	6 o 43%	8 o 62%

Tabla 8.19. Comparación de conocimientos sobre el proceso de transformación entre la PI y la de PF en ambos grupos

A partir de los resultados mostrados en la tabla 8.19., vemos que hay un avance en los conocimientos sobre el proceso de transformación en ambos grupos de la investigación respecto a los conocimientos mostrados en la Prueba Inicial. Como podemos ver también en el gráfico 8.20, el color rojo que muestra los conocimientos de la Prueba Final en ambos grupos ha crecido en el grado B y en el grado A.

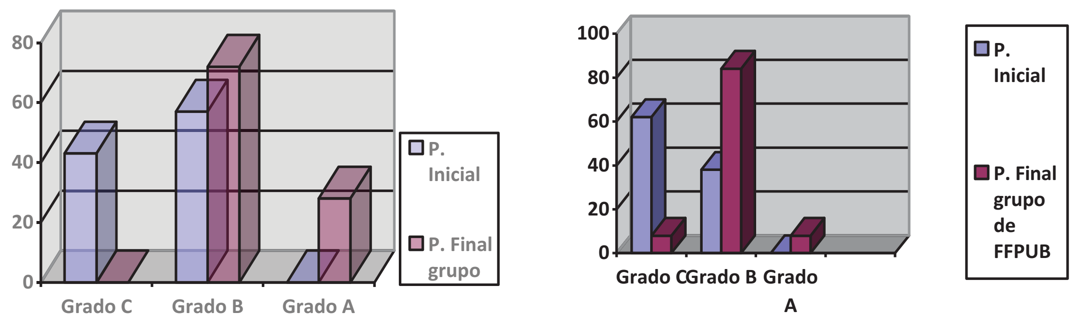


Gráfico 8.20. Gráficos de comparación sobre el proceso de transformación entre la PI y de la PF.

A base de todo esto, podemos identificar el siguiente resultado:

Resultado 8.3.5: *Según las respuestas de los estudiantes de la FEUP, la mayoría (10 de total 14 o 72%) muestran un grado medio de conocimientos sobre la transformación como cambio o proceso. Otra parte (4 de 14 o 28%) muestran un grado alto en mayoría de las actividades de la PF. En el grupo de FFPUB, notamos un nivel más bajo de conocimientos sobre el proceso de transformación geométrica, debido a que solo un estudiante muestra un grado alto de conocimientos en la mayoría de las actividades de la PF, mientras que con el grado medio de conocimientos sobre el proceso de transformación es habitual casi en todo el grupo (11 de total 13 o 84%). Solo un estudiante de FFPUB ha mostrado conocimiento débil del proceso de transformación en la mayoría de las actividades de la Prueba Final.*

A continuación ilustramos el resultado citado arriba con la descripción detallada sobre diferentes significados de transformación geométrica como proceso, que le dan los participantes de la investigación.

Empezamos con la actividad 1 de la PF. En este actividad se pide identificar la posición del eje de simetría estableciendo la correspondencia figural entre la recta dada y su imagen - la recta paralela. Sólo dos estudiantes del FEUP muestran la capacidad de identificar el proceso de obtener la recta paralela con la recta dada, identificando este proceso como desplazamiento bajo condición de conservar la equidistancia entre la recta y su imagen respecto la posición del espejo (el eje de simetría) como podemos ver en la figura 8.21.

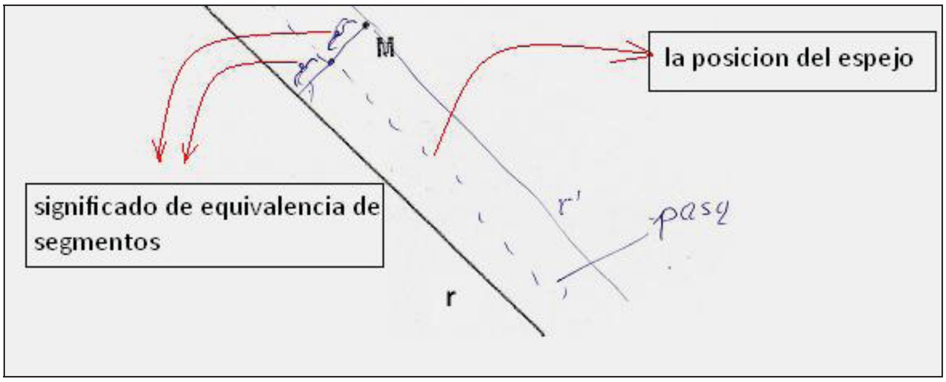


Figura 8.21. El proceso de transformación de la recta según Dr

Lo mismo vemos en el caso de Sh, mientras que en 5 casos (Ad, Da Em, Pe y Ar), el proceso de obtener la recta paralela con la recta dada pasando por el punto dado M, entienden como un desplazamiento que se hace bajo la condición de conservar la propiedad de paralelismo entre las rectas construyendo la recta r' con el carbón cartabón y la escuadra. La diferencia es que estos estudiantes no perciben ese desplazamiento como una transformación sino como un procedimiento. Veamos por ejemplo el enunciado de Da:

> *"La recta paralela con una recta dada se puede construir con el carbón y escuadra desplazándola hasta el lugar deseado. Con el espejo no sé cómo se construye."*
>
> (Da, PF, 1)

O el caso de Em:

> *"No es posible dibujar la imagen que parece en el espejo. Es una cosa que se muestra y se hace prácticamente. La construcción de la recta paralela se hace con la regla y escuadra…"*
>
> (Em, PF, 1)

En el caso de FFPUB, encontramos otra interpretación y comprensión del proceso de obtener la recta paralela con la recta dada. En la realidad, la mayoría de los estudiantes este proceso reconocen como reflexión o movimiento de la recta intuitivamente utilizando el espejo. La diferencia entre Ol, Mc (de grado alto) y otros estudiantes es que estas identifican elementos abstractos de la simetría - el eje de simetría, y la propiedad de equidistancia respecto este eje, mientras que otros participantes no muestran el reconocimiento de estos elementos de transformación. Como ilustración veremos las explicaciones de Mc y de Ol sobre este proceso:

> *"Coloco el espejo en el medio de la distancia entre el punto y la recta, para ello utilizo la escuadra, hago una perpendicular y después busco el punto*

> *media de la perpendicular entre la línea que va del punto a la recta. Este punto medio es el lugar por donde pongo el espejo".*
>
> (Mc , PF,1)
>
> Ol: "*Para que la paralela que se refleja en el espejo pase por el punto M, tenemos que poner el espejo justo en el centro de las dos líneas. El espejo estaría colocado en la línea de puntos y mirando hacia la izquierda que es donde se encuentra la recta r. La línea M será simétrica respecto a r u el eje de simetría es justo en el centro, donde coloco el espejo.*"
>
> (Ol, PF, 1)

Otros estudiantes del grupo FFPUB, muestran la posición donde se coloca el espejo, a veces en la posición incorrecta (Al, Li y Na) pero no hay indicios de que muestren reconocimiento completo de las propiedades del proceso de simetría.

La actividad 2 de la prueba Final pide una descripción del fenómeno real de repetición de las imágenes en una barbería. Los estudiantes del grupo FEUP lo interpretan de diferentes maneras. Tres estudiantes Ad, Dr, y Sh, perciben la idea de que la repetición de mismos objetos en manera consecutiva es la composición o producto de al menos dos simetrías consecutivamente.

Ad	Dr	Sh
Si colocamos dos espejos se obtiene esta situacion. Tenemos la imagen del otro imagen y asi continuando.	Aqui tenemos la aplicacion (reflexion) consecutiva del objeto segun dos espejos. La imagen del objeto en un espejo se reflecta en otro y asi se continua.	Tenemos komposicion infinito de dos simetrias. Hay imagenes de traslacion y de simetria segun el numero de repeticiones donde nos interesa mostrar.

Otros estudiantes consideran que el fenómeno es un producto de simetrías con el resultado de traslación. No sabemos si este producto (composición) es una aplicación, una repetición, un desplazamiento o una reproducción. Como ilustración, veremos la respuesta de Ma:

> "*En esta escena hay espejos tanto delante del cliente y el barbero como detrás de ellos. Esto hace que haya un fenómeno de simetrías y traslaciones debido a que la imagen se va multiplicando (*por el reflejo de los espejos)*."*
>
> (Ma: PF,2)

En todas las respuestas falta la descripción y la explicación de las propiedades del proceso de transformación, también la identificación del vector de traslación, el sentido de la simetría, etc.

Como buena muestra de la diferencia entre el grupo FEUP y FFPUB nos sirve el resultado del actividad 3. Aquí vemos que todos los estudiantes de la FEUP, reconocen que el proceso de transformación de un cuadrado en la forma de un animal es una deformación, que no ocurre en el caso de FFPUB: Yo identifica un "…*cambio de lugar…*", Na: "*es desplazamiento…*", Mo: "…*hay un traslación, se conserva la distancia entre uno dibujo y otro,…y cambia la forma*", La: *"…se trata pues de una traslación*". Otros estudiantes logran identificar este proceso correctamente como una deformación, pero en el grupo de FFPUB no encontramos ni un estudiante que sea capaz de identificar correctamente las condiciones bajo cuales se hace este proceso de deformación.

En el grupo de FEUP, encontramos 5 estudiantes mostrando la capacidad de identificar todos los elementos necesarios del proceso de deformación del cuadrado en la figura de animal. La mejor ilustración es el caso de Ad (Figura 8.22), pero es lo mismo la elaboración de Da (ver la figura 8.6 pp. 445), Dr, etc.:

> *"Aqui tenemos el desplazamiento de las partes 1 y 2 (figura 8.22)... Yo pineso que en este caso no cambia el ...la superficie del cuadrado porque la misma superficie esta cubierta por las figuras obtenidas del cuadrado, pero tenemos el cambio de la forma..."*
>
> *(Ad, PF, 3)*

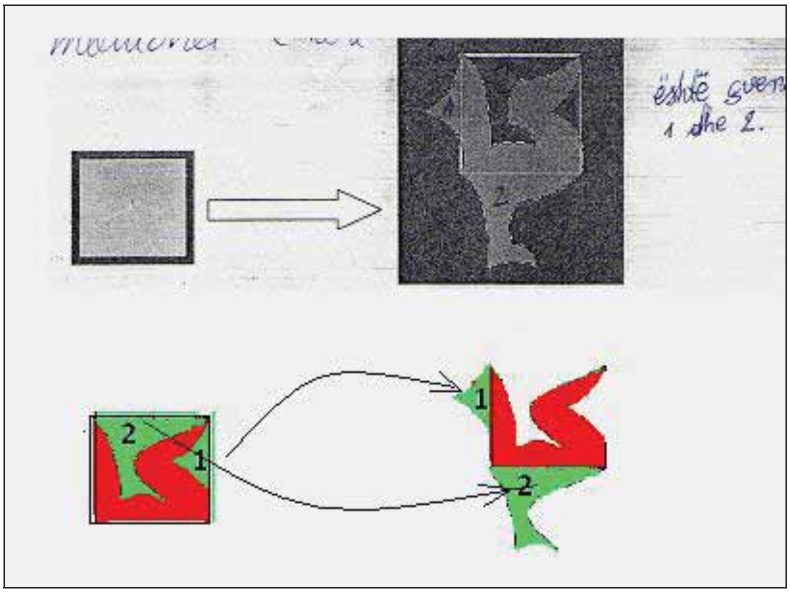


Figura 8.22. La explicaciones de Ad sobre el proceso de deformacion

En la realidad, estos estudiantes consiguen identificar las propiedades del proceso de deformación gracias a la consideración del cuadrado y la figura de animal como conjunto de puntos. Las piezas asignados con el numero 1 y 2, también se consideran como subconjunto de puntos, y una vez considerando las figuras como conjuntos de puntos se establece la correspondencia de aplicación de una a otra figura. La identificación de este proceso como aplicación del conjunto de puntos resulta fácil de identificar las propiedades relevantes del proceso: cubrimiento de la superficie como invariante y cambio de forma. Otros estudiantes del grupo FEUP, identifiquen este proceso como una deformación que conserva la superficie, sin explicación de cómo se realice este proceso.

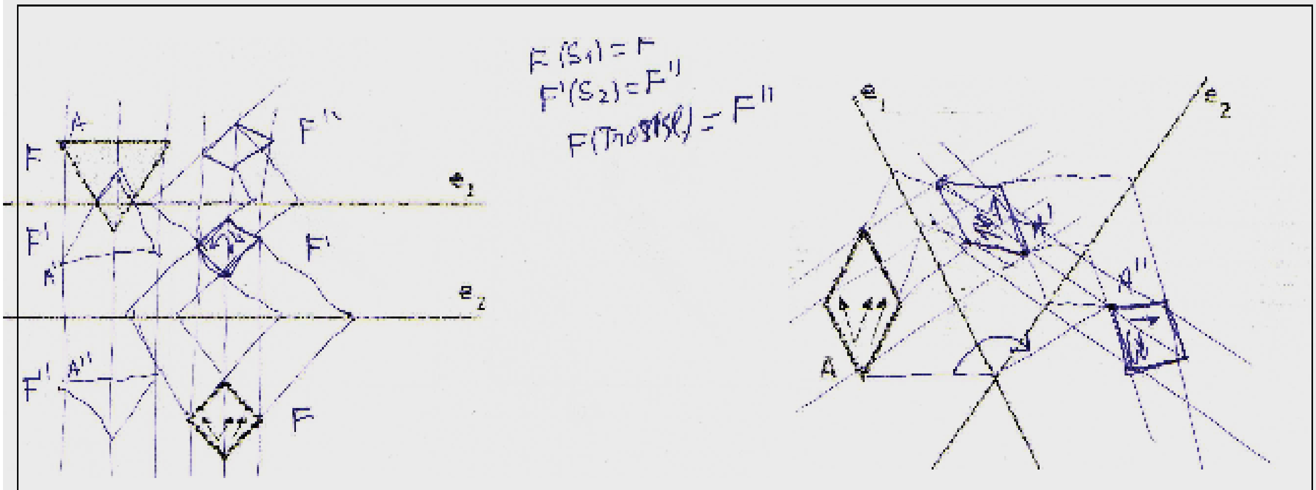
La situación semejante se muestra en las respuestas de los estudiantes en el actividad 4. En esta actividad tenemos un modelo y la figura formada por una parte del modelo integrado con su imagen simétrico. Los estudiantes tienen que determinar la posición del eje de simetría que es el lugar donde se pone el espejo para que se vea la figura indicada. La determinación de la posición del espejo requiere reconocimiento de las propiedades de la simetría. Esto se consigue con más facilidad si se reconoce la correspondencia entre elementos (en este caso estos elementos pueden ser cuadrados, semi-cuadrados, triángulos) como parte del modelo. Entonces se trata de la correspondencia entre figuras respecto al eje de simetría.

A base de las respuestas de los estudiantes notamos que los estudiantes del grupo FFPUB han mostrado mejores resultados que los de FEUP. Esto significa que a los estudiantes de la FFPUB les resulta más fácil establecer y reconocer la correspondencia entre figuras equivalentes, mientras que a los estudiantes de la FEUP les resulta más fácil establecer y reconocer la correspondencia entre conjuntos de puntos bajo una regula determinada. Como ilustración puede servirnos el resultado de que entre un total de 13 estudiantes del grupo de FFPUB, 11 de ellos consiguen identificar correctamente la posición del eje de simetría en todas las figuras indicadas, mientras que en el grupo de la FEUP, sólo 8 del total 14 lo hacen correctamente.

La situación cambia en las respuestas de las actividades 6 y 7 de la Prueba Final. En estas actividades se pide determinar el movimiento de la figura como resultado de dos simetrías con ejes paralelas (actividad 6) y con ejes cruzados (actividad 7).

Los estudiantes de la FEUP, reconocen este movimiento como un proceso de diferentes significados. La mayoría identifican que el resultado de dos simetrías con ejes paralelas es una traslación, y resultado de dos simetrías con ejes cruzadas es una rotación. La diferencia persiste en el hecho de que el resultado de este proceso no está bien definido - quiero decir no está bien definido el vector de traslación y el centro y ángulo de rotación. Solo 4 de ellos consiguen identificar la traslación como un proceso de aplicación de puntos según un vector determinado, y sólo 3 estudiantes identifican el resultado de la actividad 7 como un proceso de rotación según un ángulo y centro determinado.

Para estos estudiantes es evidente el reconocimiento de dependencia funcional entre los posiciones de los vértices de las figuras. Como ilustración podemos mostrar la respuesta de Dr en la figura 8.23.



Resolucion de los problemas 6 y 7 por parte de Drita

Figura 8.23. La evidencia de dependencia funcional entre las posiciones de los vértices

Para los estudiantes que consideraron este proceso no como un aplicación entre puntos correspondientes sino como una equivalencia, superponiendo o doblado, resultaba difícil determinar exactamente el proceso de movimiento como resultado de dos simetrías. En esta situación encontramos la mayoría (9 de 14) de los estudiantes de FEUP, y caso todos los estudiantes del FFPUB. Estos estudiantes consideran el resultado de dos simetrías como un movimiento de la figura en la otra posición utilizando la superposición de la figura en la otra, o “doblando” según el eje de simetría con el fin de encontrar la imagen de la figura. Como ilustración presentamos en la figura 8.24., ejemplos de Ar y Em del grupo FEUP, y de Di del grupo FFPUB.

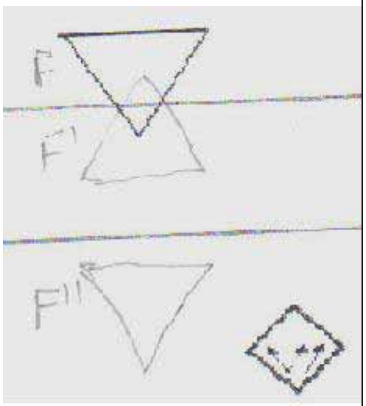
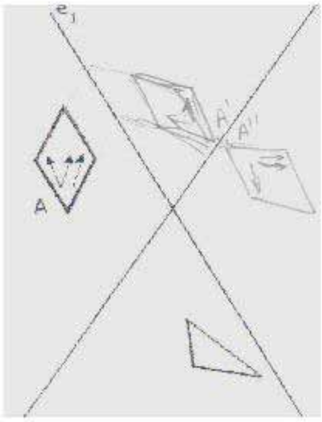
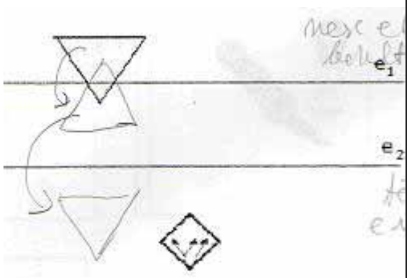
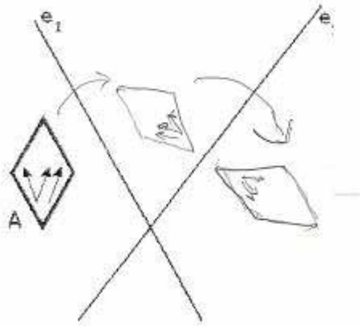
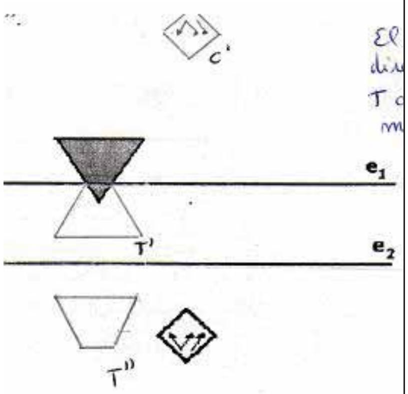
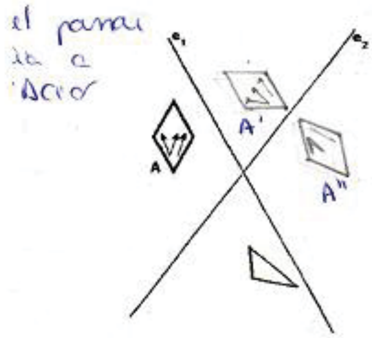
Ar	Em	Di
 	 	 

Figura 8.24. La composición de dos simetrías según Ar, Em y Di

A partir de las respuestas de los actividades 6, 7, 4 y 1, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.3.6: *Para los estudiantes que reconocen la transformación como un proceso de aplicación de puntos, resulta fácil identificar la dependencia funcional entre posiciones, las propiedades importantes del transformación como son el eje de simetría, vector de traslación, centro y ángulo de rotación, etc. Los estudiantes que consideran la transformación como un plegado, cambio de posición o repetición de un objeto o una figura, resulta difícil establecer los elementos importantes del proceso de transformación.*

El análisis de las respuestas del actividad 8, muestran que los estudiantes de ambos grupos reconocen el proceso de proyección a partir de relaciones entre el objeto, la fuente de la luz y la producción de la proyección (en nuestro caso la producción de la proyección es la sombra). Pero los estudiantes de FFPUB, muestran un grado más alto de reconocimiento del proceso de proyección a partir de las propiedades como son, "*la dirección de la luz*", "…*el otro lado…",* "*la sombra debe ser en la proporción del tamaño…* ", "*una sombra que le corresponde*…", "…*orientada hacia*…". Estas expresiones no las encontramos en las respuestas de los estudiantes de FEUP.

8.3.4. Conocimiento en la PF sobre comunicación y razonamiento con transformaciones

En este apartado tratamos la capacidad del futuro profesor para entender y explicar un problema o fenómeno sobre transformación geométrica. Hemos procurado que los problemas planteados en la Prueba Final den la libertad de generar conjeturas experimentalmente, conjeturas distintas sobre la misma situación y la variedad de argumentos para tratar de convencer. Manteniendo los mismos criterios de clasificación de las producciones de los estudiantes como en las etapas anteriores, clasificamos los argumentos utilizados según su poder de convicción. El análisis de las producciones de los estudiantes se hace sobre todas las actividades de la Prueba Final, excepto en la actividad 9. En la tabla 8.25 presentamos los resultados de la asignación correspondiente para los estudiantes de la FEUP, y en la tabla 8.26 los correspondientes resultados de los de FFPUB.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	C	B	<u>A</u>	B	C	C	B	B	B	A	B	C
2	B	B	C	B	<u>A</u>	B	B	B	B	B	C	A	B	B
3	A	B	B	A	<u>A</u>	A	B	B	B	B	B	B	B	B
4	A	B	C	A	<u>A</u>	A	B	A	A	B	B	A	B	A
5	B	B	C	B	<u>B</u>	B	C	B	B	C	C	B	B	B
6	A	B	B	B	<u>A</u>	B	B	A	B	B	C	A	B	B
7,	B	B	B	A	<u>A</u>	A	B	B	B	B	B	A	B	B
8	A	B	C	B	B	B	B	C	C	C	C	B	C	C
10.	A	B	C	A	A	C	C	B	B	B	C	A	B	B
Resume	A	B	C	B	A	B	B	B	B	B	C	A	B	B

Tabla 8.25. Resultados de los estudiantes de FEUP sobre comunicación y razonamiento en la Prueba Final

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	B	B	B	B	C	A	B	B	C	A	B	B
2	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B
3	B	B	B	B	C	C	B	C	C	C	B	B	C
4	B	B	B	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B
5	B	B	C	B	B	B	A	A	A	B	A	B	B
6	B	B	B	B	B	B	B	B	C	B	B	B	B
7,	B	B	B	B	B	B	A	B	C	C	B	B	B
8	B	A	A	B	B	A	B	A	A	C	A	B	B
10.	B	A	A	B	B	A	B	A	A	C	A	B	B
Resume	B	B	B	A	B	B	B	B	B	C	B	B	B

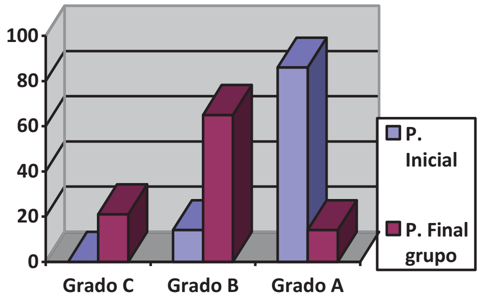
Tabla 8.26. Resultados de los estudiantes de FFPUB sobre comunicación y razonamiento en la Prueba Final

La comparación entre el grado de conocimientos sobre comunicación y razonamiento entre los estudiantes de la FEUP y de la FFPUB en la Prueba Inicial y la Prueba Final, las presentamos en la tabla 8.27.

Grados de conocimientos sobre comunicación y razonamiento con transformaciones geométricas	Pruebas	FE-UP n=14	FFP-UB N=13
A. Aporta una justificación-argumentación correcta con una simbolización adecuada, usando reglas y propiedades explicitas y apoyándola en otras proposiciones conocidas.	Prueba Final	3 – 21%	- 0 %
	Prueba Inicial	- 0%	- 0%
B. Comprueba la proposición con al menos un ejemplo, sin errores significativas y hay muestra alguna justificación correcta	Prueba Final	9 – 65%	13 – 100%
	Prueba Inicial	2 - 14%	2 - 15%
C. Solo hay visualización del fenómeno sin explicación justificativa o falta de comprensión de la tarea planteada	Prueba Final	2 – 14%	- 0%
	Prueba Inicial	12 - 86%	11 - 85%

Tabla 8.27. Comparación de conocimientos sobre comunicación y razonamiento entre la PI y la de PF en ambos grupos

Las diferencias entre los resultados de la prueba inicial y los de la Prueba Final las mostramos con el gráfico 8. 28, donde las columnas de color azul presentan los resultados de la PI y las de color rojo los de la PF:



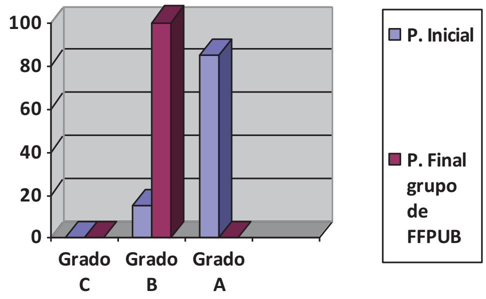


Grafico 8.28. Gráficos de comparación sobre el proceso de transformación entre la PI y de la PF.

El primer resultado de análisis de las producciones de los participantes de la investigación en la Prueba Final es el siguiente:

Resultado 8.3.7: *A pesar de un crecimiento de los capacidades sobre comunicación y razonamiento con transformaciones geométricas respecto a los resultados de la PI en ambos grupos de investigación, la mayoría de los estudiantes de la FEUP (9 de total 14 o 65%) y todos los de la FFPUB son capaces de comprobar alguna proposición o conjetura sin errores significativos justificándolo correctamente. Sólo tres estudiantes de la FEUP aportan una justificación correcta con una simbolización adecuada usando reglas y propiedades explicitas y apoyándola en las proposiciones conocidas anteriormente. Encontramos dos estudiantes de la FEUP que muestran la falta de comprensión de la tarea de argumentación y justificación de la conjetura producida.*

A continuación presentamos la descripción detallada del análisis de las respuestas de los estudiantes de ambos grupos.

En la actividad 1 de la PF, ya hemos confirmado antes que la mayoría de los estudiantes de la FEUP construyen la recta paralela con escuadra y cartabón. Es una técnica de construcción geométrica que ellos conocen desde la escolarización anterior. Pero, en base de los escritos que dispongamos, solo Dr y Sh justifican el paralelismo de las rectas construidas en esta manera. Se trata de la aplicación del siguiente teorema: "*todas las rectas paralelas en una recta son paralelas entre sí*". De hecho, ellas producen la conjetura de que la recta paralela que pasa por el punto M es la imagen simétrica de la recta r, como es la imagen simétrica, las distancias respecto al eje tienen que ser iguales (ver figura 8.29).

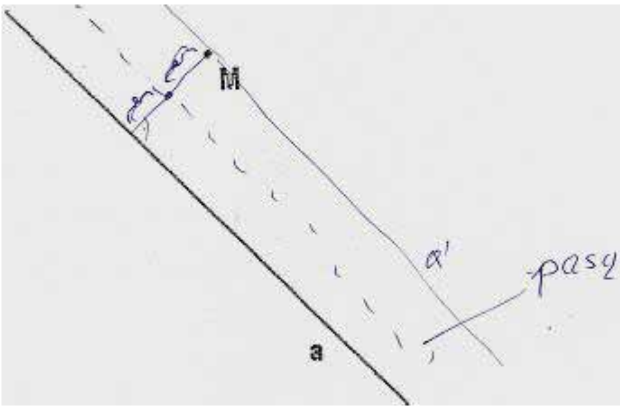


Figura 8.29. Presentación de las distancias iguales respecto al eje por Dr

Sobre la recta perpendicular, identifican la necesidad de aplicación de la propiedad de perpendicularidad de la bisectriz del segmento. Esta es la razón de determinar un segmento cualquiera con los extremos igual de distantes respecto del punto M, y luego construir la bisectriz de dicho segmento, que es la recta perpendicular buscada.

Otros estudiantes de la FEUP (Ad, Ar, Da, Em, Pe, Re y Se) identifican el paralelismo de la recta r' con la recta dada r, y justifican prácticamente utilizando el espejo poniendo en el medio de la distancia entre la r y r' (para las rectas paralelas) o en la bisectriz del ángulo recto (en el caso de la recta perpendicular).

> Ar: *La construccion de la recta paralela se hace con la cartabón y escuadra. Si colocamos el espejo en el punto M puede ver la imagen r' de la recta dada r que son paralelos entre si*.
>
> (Ar, PF, 1a)

Cuatro estudiantes (As, Fi, Fit, y Xh) del grupo FEUP, parece que no son capaces de explicar ni de justificar el proceso de obtención de la recta paralela, limitados en el dibujo del lugar donde se coloca el espejo y una recta paralela (y en el segunda actividad - perpendicular).

En el grupo de FFPUB, sólo dos estudiantes (Mc y Ol) justifican el proceso de obtener la recta paralela y perpendicular a la recta dada. Mientras Ol describe el proceso de encontrar el lugar donde se debe colocar el espejo sin justificar por qué exactamente es paralelo:

> "*para que la paralela que se refleja en el espejo pase por el punto M, tenemos que pasar el espejo justo en el centro de las dos líneas...*"
>
> (Ol, PF, 1ª)

Mc identifica la regla para que las rectas sean paralelas:

> *"Coloco el espejo en el medio de la distancia entre el punto M y la recta r, y para ello utilizo la escuadra bajo una perpendicular y después busco el punto medio de la perpendicular entre la línea que va del punto a la recta. Este punto medio es el lugar por donde pongo el espejo"*
>
> (Mc , PF, 1ª)

En realidad, Mc buscando la solución del problema, utiliza las propiedades geométricas de perpendicularidad y paralelismo, la propiedad de congruencia de las distancias como invariante de transformación simétrica, y al final, las comprueba prácticamente con el espejo.

Otros estudiantes lo hacen en manera diferente, apoyándose en la experimentación con el espejo y limitados al asignar la posición del espejo. Es evidente de que en la mayoría de los estudiantes de la FFPUB identificamos un procedimiento por manipulaciones visuales de la estructura global de la simetría. Este razonamiento visual es mucho más que un soporte intuitivo de un razonamiento de más alto nivel de una prueba rigurosa.

El fenómeno de la actividad 2, resulta difícil de justificar e interpretar razonadamente por parte de los estudiantes de la FEUP. Identificamos sólo a Sh que nos muestra una argumentación e interpretación del fenómeno a la luz del producto de simetrías.

> "*Tenemos composición infinita de dos simetrías. Hay imágenes de traslación y de simetría según el número de repeticiones donde nos interesa mostrar"*
>
> (Sh, PF, 2)

En realidad, tenemos dos espejos colocados paralelamente entre sí. Matemáticamente tenemos el producto de simetrías: $s_1 \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot s_2 \ldots$ Esto ocurre porque tenemos los planos de simetría (mientras en el plano tenemos ejes de simetría) colocados en una posición paralela entre sí. El mismo fenómeno, ocurrió con dos espejos colocados en posición de formar un ángulo (por ejemplo 30^0,) obtendríamos un "círculo" de imágenes del objeto encontrado entre los espejos (ver actividad SRA9, capitulo 7). En este caso, Sh identifica que el producto de un número par de simetrías (con ejes paralelos) es una traslación, mientras que el producto de un número impar de simetrías es igual que una simetría.

Otros estudiantes de FEUP hacen una descripción visual del fenómeno diciendo "*la imagen del objeto en un espejo se refleja en otro y así se continúa.*" (Em, y otros).

Algo parecido ocurre en el grupo de FFPUB. En todas las respuestas falta la descripción y explicación de las propiedades del proceso de transformación, falta la identificación de una regla sobre cuando hay traslación y cuando hay simetría, asimismo faltan argumentaciones para mostrar la conjetura producida. Como ilustración pondremos el ejemplo de Na, Yo y Jo:

Na	Yo	Jo
Esta escena se ha producido a causa de que hay dos espejos delante de los hombres y otro detrás. El primero hace la simetría de la realidad y el segundo la simetría del primero, y así sucesivamente. Es decir: simetría x simetría = traslación.	*En esta barbería hay dos espejos delante y detrás, es decir, la persona que se esta pelando tiene un espejo delante de él pero, a su vez tiene otro detrás donde se refleja su parte de atrás que a su vez cuando refleja en el espejo de delante se ve repetidamente.*	*Lo que se ha producido es una simetría de una simetría. Detrás de las personas de la imagen hay otro espejo, lo cual permite que se produzca este efecto, asimismo, se puede decir que si tomamos grupos de 3 imágenes la 1 y la 2son simétricas, la 2 y la 3 también son simétricas. Entre la 1 y la 3 se produce una traslación.*

Solo Jo identifica la regla de productos de las simetrías, limitando en cualquier producto de tres simetrías, pero no consigue generalizar el resultado. Se queda entre una procesión figural no generalizada.

Analizando la actividad 3, vemos que todos los estudiantes de la FEUP identifican la propiedad de deformación, pero sólo 4 de ellos son capaces de producir una conjetura correcta identificando la regla y condiciones necesarias. Ninguno de ellos no es capaz de identificar y comunicar completamente los argumentos para sostener la conjetura producida.

Los cuatro estudiantes de la FEUP identifican la propiedad de deformación del cuadrado poniendo que las figuras obtenidas (formadas) por las piezas del cuadrado tienen la misma área (superficie), y ésta es la justificación de invariancia de este tipo de deformaciones. Otros estudiantes de la FEUP plantean la conjetura correcta de que se trata de una transformación que cambia la forma del cuadrado y no cambia el área (superficie) del cuadrado sin justificar la idea de conservación del área (superficie).

> "*En esta transformacion cambia la forma.... La magnitud de area no cambia porque la figura transformada se obtiene a partir de las piezas de la forma inicial.*"
>
> (Dr, PF, 3)

En el grupo de FFPUB, en las respuestas del actividad 3, no encontramos la justificación o argumentación de las propiedades de transformación del cuadrado en la forma de una animal. Se nota el razonamiento visual del proceso de deformación como afirmaciones no completas y equivocadas como de Yo: "*…cambio de lugar…*", Na "*es desplazamiento…*", Mo "*…hay un traslación, se conserva la distancia entre uno dibujo y otro,…y cambia la forma*", La: *"…se trata pues de una traslación*". Otros estudiantes consiguen producir conjeturas correctas pero no consiguen identificar condiciones y argumentaciones que justifiquen una regula relevante de deformación del cuadrado que conserva el área y cambia la forma. La ilustración típica es la respuesta de Jo:

> "*Primeramente, lo que se conserva entre la figura 1 y la 2 (*refiere 1- cuadrado, 2- figura de animal) *es la longitud de la base mientras que la altura cambia debido al corte que se ha hecho. También cambia la forma del modulo. En el primero es un* <u>*cuadrado*</u> *y en el segundo es la forma del animal".*
>
> *(*Jo, PF,4)

En el actividad 4 hay nueve figuras diferentes y una figura como modulo. Pide dibujar la posición del espejo en el modulo para que se vea cada una de las figuras dadas. Entre nueve figuras, hay dos de ellas que no se pueden ver sólo con un espejo. Lo que se pide es explicar los casos de figuras que no se pueden ver con un espejo.

A nosotros nos interesa el razonamiento, la argumentación, la comprobación y la comunicación de las afirmaciones y conjeturas producidas. Esta es la razón por la que en este caso nos interesa analizar las explicaciones de los estudiantes de por qué una figura no se puede ver con el modulo y un espejo.

La conjetura producida por los estudiantes de la FEUP, es asignación correcta de la posición del espejo. Esta conjetura está basada en *la regla* de la propiedad simétrica de cada una de las nueve figuras. Primero han dibujado los ejes de simetría de la figura identificando así el eje con el espejo (ver la figura 8.30).

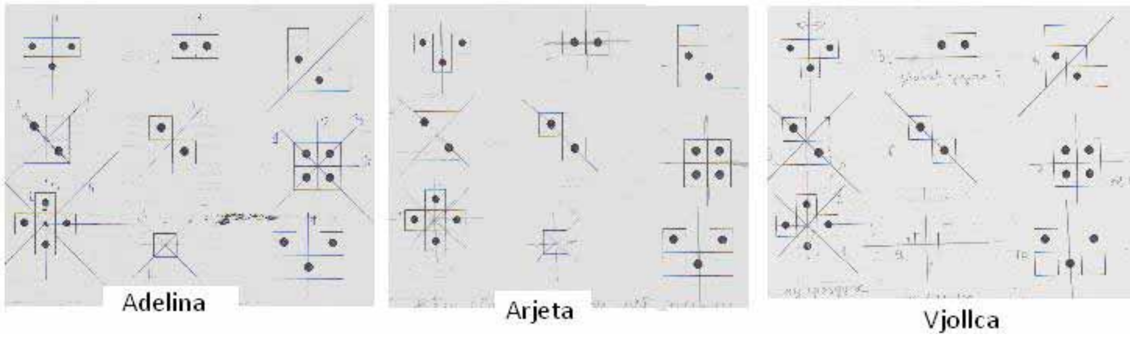


Figura 8.30. Los ejes de simetría de las figuras de la actividad 4 de PF en FEUP

Luego, trataron de identificar los argumentos para sostener la conjetura estableciendo la correspondencia entre una parte (simétrica) de la figura y la parte del modelo. Como unas figuras tienen más de un eje de simetrías, y ninguna parte simétrica no es igual a una parte del modelo (por ejemplo la figura 7 de la actividad 4 de la PF), ocho estudiantes de FEUP justifican conjetura basando en los conocimientos de la composición de dos simetrías afirmando que *para que se vea la figura 7 es necesario poner dos espejos*. Entonces, podemos concluir que en el caso de la actividad 4 de la PF, vemos un pensamiento lógico-concreto, haciendo un análisis deductivo, en el que partiendo de una hipótesis se ha de verificar el resultado.

En el caso de los estudiantes de FFPUB, domina la visualización del fenómeno, comprobando prácticamente con el espejo y produciendo la justificación usando la correspondencia figural entre *cuadrados* (del modelo) (ver Figura 8.31).

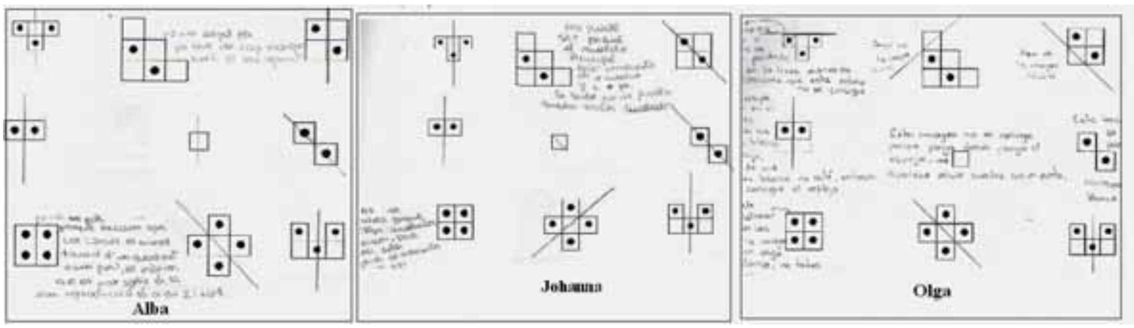


Figura 8.31. Los ejes de simetría de las figuras del actividad 4 de PF en FFPUB

Intentamos ilustrar con los ejemplos. En la justificación de Al sobre la imposibilidad de ver la figura 7 con el espejo vemos que ella comprobando prácticamente con el espejo no ha podido establecer la correspondencia entre el modelo (o la parte del modelo) y la figura 2 de la actividad 4 de la PF:

"N*o se puede porque aun que coloques el espejo delante de un cuadrado con punto, el máximo que te puede salir es su reproducción, es decir 2 y no 4"*

(Al. PF, 4f)

O el caso de Jo que busca establecer la correspondencia entre cuadrados y puntos, donde con punto identifique cuadrados con el circulito negro en el centro:

"no puede ser porque el modelo principal está compuesto de 1 cuadrado y 2 puntos por lo tanto no se pueden quedar todos cuadrados"

(Jo, PF, 4b)

O de la conjetura de Ol que no recuerda la posibilidad de identificar los ejes del cuadrado:

"*Esta imagen* (refiere e la figura número 5 que es un cuadrado blanco, Xh.Th) *no se consigue porque ponga donde ponga el espejo, me aparece algún cuando con un punto*"

(Ol, PF, 4e)

A base de estos resultados identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.3.8: *En el caso de los estudiantes de la FEUP, la conjetura de asignación correcta de la posición del eje de simetría (el espejo) se basa en la regla de la propiedad simétrica de la figura, identificando así el eje con el espejo. Luego, se identifican los argumentos para sostener la conjetura aplazada estableciendo correspondencia entre una parte (simétrica) de la figura y la parte del modelo. Como unas figuras tienen más de un eje de simetrías, y ninguna parte simétrica no es igual a una parte del modelo (por ejemplo la figura 7), ocho estudiantes de FEUP justifican la conjetura basándose en los conocimientos de la composición de dos simetrías. Como resultado vemos un pensamiento lógico-concreto, haciendo un análisis deductivo, en el que partiendo de una hipótesis se ha de verificar el resultado.*

Con el fin de obtener la generalización de obtener la figura a partir de un modelo con el espejo, los estudiantes de la FFPUB descompusieron la estructura global en elementos primitivos visuales, y entonces aplicaron una síntesis cuantitativa abstracta en la que combinaron las unidades visuales y el número de piezas que aparecen. Esta aproximación a la solución es analítica en el sentido de que una totalidad es construida desde la descomposición en pequeñas unidades reconocibles y contables, y recompuesta (reconstruida) a partir de ellas. El resultado *final del proceso de obtención y el razonamiento involucrado es visual que consistió de análisis (descomposición en unidades) y síntesis.*

Queremos recordar que el razonamiento visual es mucho más que un soporte intuitivo de un razonamiento de más alto nivel, es la columna vertebral de una prueba rigurosa. El proceso visual incluye: 1) una nueva manera de ver la situación con el fin de sugerir una generalización, 2) su prueba y verificación en un proceso, y 3) una explicación del `porqué´ se sostiene la generalización (Hanna, 2000).

Resultados parecidos los identificamos en las respuestas de la actividad 5 y 10 de la PF. Mientras que los estudiantes de la FFPUB justifican la razón de porque dos figuras dadas no son simétricas utilizando "*porque al doblar la hoja, las imágenes no coinciden…*" (Mc, Mo), "*porque no son opuestas*" (Mc, So, Ma), "(la segunda figura) *está desplazado sobre la primera*" (Na) y "*porque es una traslación (rotación)…*" (otros); la mayoría de los estudiantes de FEUP ponen "*es una traslación (o rotación)*", Fit pone: "*porque al doblar no coinciden…*", Ar, Ad y Sh: "*porque es una desplazamiento*" considerando el desplazamiento una transformación no simétrica, Pe "*porque tienen la misma orientación (sentido)*" y las imágenes simétricas deben tener sentidos opuestos.

A continuación elaboramos las producciones de los estudiantes sobre las actividades 6 y 7 de la PF que consideramos significativas sobre el razonamiento y la comunicación de transformación geométrica.

No era difícil para los estudiantes de ambos grupos de identificar la traslación (en la FEUP 12 estudiantes asignan *traslación* y otros dos *movimiento;* en el grupo FFPUB todos ponen la *traslación*) como producto de dos simetrías con los ejes paralelos y la rotación (r*otación*, *giro* y *desplazamiento circular* en el FEUP; r*otación* y *simetría de rotación* en el FFPUB) como producto de dos simetrías con los ejes cruzados.

En el razonamiento geométrico es importante la producción correcta de la conjetura como primer paso, que en nuestro caso es un buen resultado de los participantes. Ellos también recuerdan las propiedades de la traslación (y rotación): conserva la forma y tamaño y cambia la posición. Pero, también es importante argumentar esta conjetura. En este segundo paso del razonamiento, hay diferencias entre los participantes de la FEUP y de la FFPUB.

En el grupo FEUP, encontramos tres estudiantes (Ad, Dr y Sh) que explícitamente elaboraron y argumentaron la estructura de traslación poniendo el vector y la orientación de traslación, y la estructura de rotación identificando y definiendo el centro y el ángulo de rotación. Ad aporta la simbolización adecuada: es la única que asigna los puntos correspondientes en los ejes de simetrías B1 y B2 (ver la figura 8.32), que cumplen la condición $BB_1=B_1B'$, y $B'B_2=B_2B''$, luego $s_1(A)=A'$, $s_2(A')=A''$, $s_1{\cdot}s_2(A)=T_{AA'}$' que es la presentación simbólica del vector de traslación $AA''=2B_1B_2$, y el ángulo de rotación expresado como ángulo formado por las rectas e_1 y e_2: $s_1{\cdot}s_2=R\angle(e_1,e_2)$.

Sh expresa de otra manera: $O \xrightarrow{e1} 1 \xrightarrow{e2} 2$ *dos veces simetría es* $O \xrightarrow{t} 2$ *es traslación donde t = distancia entre los ejes*, minetras que el ángulo de rotación se presenta dibujando el *arco del ángulo* entre dos puntos correspondientes y el vértice en la intersección de los ejes.

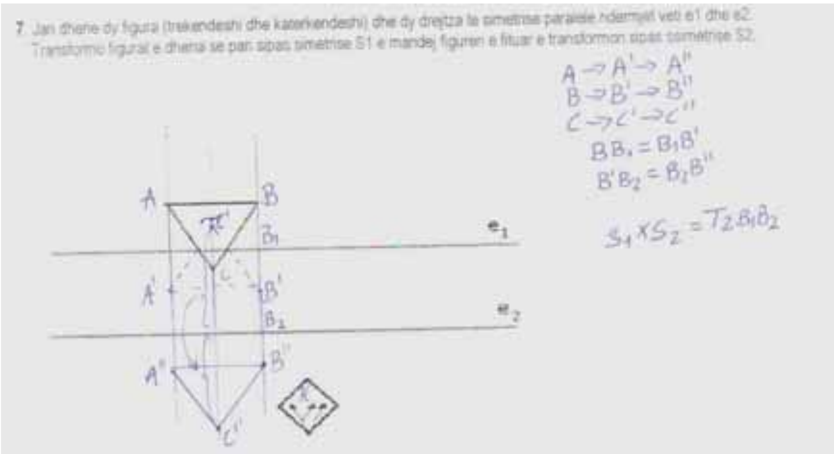


Figura 8.32. La definición del vector de traslacin por Ad en ela actividad 6 de PF

En el grupo de FFPUB, sólo Mc le asocia a la rotación el vector AA'' en la manera implícita escribiendo: *de T a T' = simetría, de T' a T''= simetría, de T a T''= Traslación*, a base de que podemos entender que el vector de traslación es el segmento AA''; en el caso de rotación también vemos que Mc identifica implícitamente el ángulo de rotación: "*la figura va rotando cambiando su posición según el ángulo de los ejes*".

Otros estudiantes consiguen explicar la composición de dos simetrías como transformación de traslación (rotación) limitando en las propiedades de conservar la forma y la magnitud y el cambio de lugar.

Por fin identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.3.9: *La situación problemática de construir la imagen de producto de dos simetrías no es la mejor manera para establecer el fenómeno de una continuidad posible entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba que implica conseguir la estructura de ejemplos diferentes de isometrías relacionando con la identificación de mayoría de las propiedades y la identificación de las diferencias entre las mismas. Pocos estudiantes de FEUP y menos del FFPUB consiguen identificar los elementos estructurales de traslación y rotación basados en simbolización adecuados, mientras que a la mayoría de ellos domina la argumentación figural identificando las propiedades de cambio y de conservación.*

8.3.5 La incorporación de los elementos culturales e históricos en transformaciones geométricas en las producciones de la PF

De acuerdo con la hipótesis de que el uso del contexto no escolar en la clase de matemáticas aumenta la capacidad para solucionar problemas y el desarrollo de procesos cognitivos, empezando por la Prueba Inicial hemos planteado diferentes situaciones “reales” con el fin de conocer cuál es el tipo de integración de los elementos culturales al significado de transformación. Luego, en el proceso del desarrollo de las actividades de la unidad didáctica, hemos practicado diferentes posibilidades de la incorporación de situaciones de diferentes contextos en aprendizaje y enseñanza de transformaciones geométricas. Ahora, es importante saber, primero: 1) cuál es el grado de incorporación de los elementos culturales al concepto de transformación geométrica resolviendo problemas planteados en la Prueba Final y qué elementos culturales o contextos incorporan en el diseño de una clase que piensan que son mejores aplicar en la enseñanza de las transformaciones geométricas en la Educación Primaria, y 2) considerando el discurso de justificación y acercamiento a la concepción y el proceso de transformación geométrica como cultura (Boero, 1999) nos interesa identificar las características de estos discursos (culturas) de los participantes de la investigación.

En base a los mismos indicadores de grados de incorporación de elementos culturales e históricos en el aprendizaje y la enseñanza de las transformaciones, establecidos en el capítulo de metodología, presentamos a continuación los resultados del análisis de las soluciones y producciones de los participantes de la investigación sobre las actividades de la Prueba Final que consideramos importantes sobre el tratamiento del aspecto cultural y que son las actividades 1, 2, 5, 8, 10, y 11.

En la Tabla 8.33 presentamos los resultados de los participantes del grupo FEUP, y en la tabla 8.34 los resultados de los participantes de la FFPUB.

Estudiantes de FEUP / Preguntas	Ad	Ar	As	Da	Dr	Em	Fi	Fit	Pe	Re	Se	Sh	Vj	Xh
1	B	B	B	A	A	A	B	C	B	B	C	A	B	B
2	A	B	C	A	A	A	A	A	B	A	B	A	B	B
3	A	A	B	A	A	A	B	A	A	A	B	A	B	A
4	A	A	B	A	A	B	B	B	A	B	A	A	A	A
6	A	B	B	B	A	B	B	A	B	B	B	B	B	B
7	A	B	B	B	A	A	A	B	B	C	B	A	B	B
8	A	B	B	A	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
10	A	B	C	A	A	B	C	A	B	B	B	A	B	B
11	A	A	B	A	A	A	A	A	B	B	B	A	A	A
Resume	A	B	B	A	A	A	B	A	B	B	B	A	B	B

Tabla 8.33. Resultados de los estudiantes de FEUP sobre incorporación de los elementos culturales e históricos en la Prueba Final

Estudiantes de FFPUB / Preguntas	Al	Di	Es	Jo	La	Li	Mc	Ma	Mo	Na	Ol	So	Yo
1	C	B	B	B	B	B	A	A	A	B	A	B	B
2	A	A	B	A	A	A	A	A	B	A	A	A	A
3	A	B	B	B	B	B	B	C	C	B	B	B	B
4	B	A	A	B	A	A	B	B	B	A	B	A	B
6	B	B	B	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B
7	B	B	B	B	B	B	A	B	B	B	B	B	B
8	B	A	A	B	B	A	B	A	A	C	A	B	B
10,	B	A	A	B	B	A	B	B	B	C	A	B	B
11	B	A	A	B	B	A	A	A	B	B	B	A	B
Resume	B	A	B	B	B	A	A	B	B	B	B	B	B

Tabla 8.34. Resultados de los estudiantes de FFPUB sobre incorporación de los elementos culturales e históricos en la Prueba Final

La comparación de la incorporación de la cultura en el aprender a enseñar las transformaciones geométricas entre los estudiantes de la FEUP y de la FFPUB en la Prueba Inicial y la Prueba Final, los presentamos en la tabla 8.35.

Grados de uso del contexto y elementos culturales en la construcción del significado de transformación geométrica.	Pruebas	FE-UP n=14	FFP-UB N=13
A. Identifica y usa contextos relacionados con transformación geométrica. Aprovecha lo histórico – cultural para integrar la comprensión, razonamiento y estructuración de transformación geométrica.	Prueba Final	6 - 43%	3 - 23 %
	Prueba Inicial	- 0%	- 0%
B. Reconoce algún contexto o elementos histórico-culturales asociados a significados de la transformación geométrica. Hay indicios de contextualización mediante ejemplos, propiedades o significados.	Prueba Final	8 – 57%	10 – 77%
	Prueba Inicial	8 - 57%	8 - 61%
C. Usa términos matematices adecuados a los elementos culturales pero sin ejercer una contextualización completa. No relaciona significados culturales para las concepciones sobre transformación geométrica.	Prueba Final	– 0%	- 0%
	Prueba Inicial	6 - 43%	5 - 39%

Tabla 8.35.. Comparación de capacidades sobre incorporación de la cultura entre la PI y la de PF en ambos grupos

Presentamos los resultados de la comparación entre la Prueba Inicial y la Prueba Final con el gráfico 8.36, donde las columnas de color azul muestran los resultados de la prueba Inicial y las de color rojo presenta los resultados de la prueba Final.

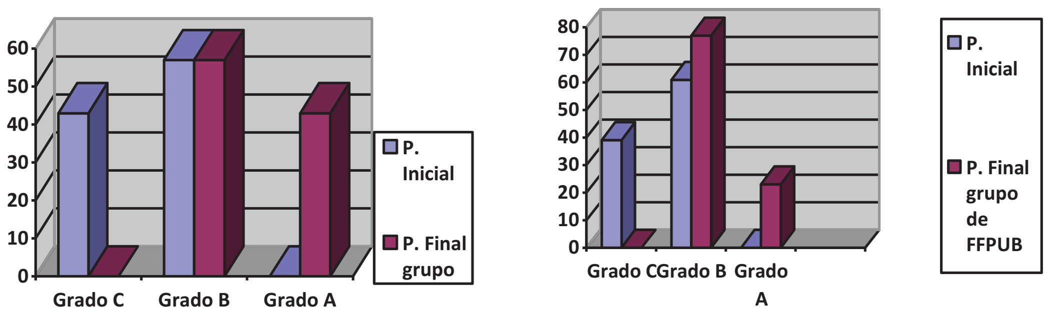


Grafico 8.36. Gráficos de comparación sobre la incorporación de la cultura al concepto de transformación geométrica entre la PI y de la PF.

A base de los resultados mostrados en las tablas y gráficos, identificamos:

Resultado 8.3.10: *Mientras que en la Prueba Inicial, la mayoría de los participantes de la investigación en las dos Facultades, reconocen algún contexto histórico-cultural asociados a significados de la transformación geométrica o reconocen la importancia del contexto en la comprensión de transformaciones geométricas usando términos matemáticos adecuados a los elementos culturales pero sin ejercer una contextualización completa; en la Prueba Final, la mayoría de los* *participantes consiguen además de reconocer algún contexto asociados a significados de la transformación geométrica, identificar y usar contextos para integrar la comprensión, el razonamiento y la estructuración de transformación geométrica. En otras palabras, la mayoría de los participantes se aprovechan de los contextos y elementos culturales en el conocimiento y la explicación del significado de transformación.*

Este resultado lo justificamos a continuación analizando las respuestas de los estudiantes de ambas facultades.

En el problema de construcción de la recta paralela y perpendicular respecto a una recta dada y que pase por un punto determinado, vemos que los participantes de la FEUP utilizan los instrumentos de dibujo, mientras que los de FFPUB utilizan los espejos. Los participantes de la FEUP, utilizando los instrumentos de dibujo (cartabón, regla, compás…) solucionan el problema apoyandose en el significado de traslación (desplazamiento según un vector – la posición de cartabón o regla - de determinado dirección y intensidad) figura 8.4.a. Luego, los espejos les sirven para reforzar el resultado. En realidad, justifican la relación entre traslación de punto y simetría axial del punto que simbólicamente podemos escribir:

Si M' es la traslación del punto M: $\tau(M)=M'$ por el vector MM', entonces: $\sigma(M)_s=M'$, donde ***s*** es la recta perpendicular al MM' y pase por el punto medio M_0 del segmento MM' (ver Figura 8.37).

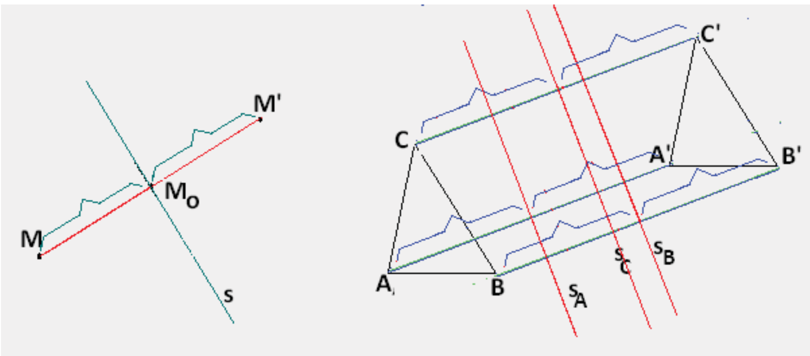


Figura 8.37. Traslación y simetría de un punto

La recta (el eje de simetría) ***s*** cambia posición para cada otro par de puntos correspondientes a la traslación τ. Por ejemplo la traslación de un triángulo ABC será el otro A'B'C' y para cada par de puntos AA', BB' y CC' los posiciones del eje serán s_A, s_B, s_C. Este discurso de justificación y acercamiento a la concepción de transformación geométrica se basa en la consideración de transformación geométrica como transformación de la figura geométrica como conjuntos de puntos (transformación puntual). La consideración de transformación como transformación de puntos por parte de los estudiantes de la FEUP es evidente y en las actividades 3, 4, 6 y 7 de la Prueba Final.

Como característica del discurso de justificación y acercamiento a la concepción de transformación geométrica por parte de los estudiantes de la FFPUB es la consideración de transformación como aplicación (correspondencia) de la figura en la figura (correspondencia o transformación figural). Este acercamiento a la transformación se muestra en las respuestas de los problemas de la PF. Presentamos a continuación estas características culturales diferentes en la FEUP y FFPUB y algunas consecuencias identificadas:

<u>La consideración de transformación puntual tiene como ventaja de reconocer e identificar las propiedades de deformaciones de la naturaleza de la actividad 3 de PF, mientras que la consideración de transformación figural no lo hace posible.</u> En realidad, la mayoría de los estudiantes de la FEUP identifican y reconocen la deformación (actividad 3 de la PF) con sus elementos y propiedades, mientras que los estudiantes de la FFPUB tienen dificultades de reconocer las características y propiedades de dicha deformación. Los estudiantes que consideran la transformación como aplicación punto a punto con más facilidad identifican los elementos de isometrías como son el vector de traslación, el eje de simetría o el ángulo de rotación (actividades 6 y 7 de la PF), mientras que los que consideran transformación de la figura, no consiguen identificar los elementos de isometrías excepto la identificación del tipo de isometrías.

A base de esto, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.3.11: *Como característica cultural del grupo de FEUP sobre el discurso de justificación y acercamiento a la concepción de transformación geométrica identificamos la transformación geométrica como aplicación punto a punto (transformación puntual). Este acercamiento a la transformación geométrica hace posible reconocer diferentes tipos de transformaciones, sus propiedades y características correctamente. La característica del grupo FFPUB es la* *transformación como desplazamiento o reflexión de la figura en la otra figura, que como consecuencia muestra la dificultad de reconocer correctamente deformaciones (el caso de la actividad 3 de la PF) y los elementos de isometrías como es el vector de traslación o el ángulo y el centro de rotación (como es el caso de las actividades 6 y 7 de la PF).*

La confirmación del Resultado 8.3.11, como características del discurso de justificación y acercamiento a la concepción de transformación geométrica de los grupos FEUP y FFPUB respectivamente, se muestra en las observaciones y el análisis en los apartados 8.3.1, 8.3.2, 8.3.3, y especialmente en el 8.3.4.

Analizando la actividad 10 de la Prueba Final, encontramos el hecho de que la mayoría de los participantes en ambos grupos identifican el bordado como figura geométrica y sólo 5 participantes de la FEUP y 4 de la FFPUB interpretan la repetición a base de la experiencia de hacer el bordado en la manera tradicional. El proceso de hacer el bordado en la práctica es identificar un módulo, que no es siempre “mínimo”, como parte del bordado y seguir repitiendo lo mismo hasta que se logra el bordado entero. Desde el punto de visto geométrico, en este caso se pueden identificar varios módulos cuya repetición hace posible obtener el bordado. Los participantes de la PF han identificado como modulo mínimo el “triángulo1” (figura 8.38.a)), “el triángulo2” (figura 8.38.b)) o el hexágono (figura 8.38.c). Este resultado salió como respuesta en el problema de encontrar “*un modulo mínimo de la figura que permite repetir este bordado”.* Desde punto de vista geométrico el modulo “triángulo1” es el modulo mínimo, pero a base de la experiencia práctica de hacer bordado, el modulo mínimo es el hexágono. Ninguno de los participantes no explica el proceso de obtener todo el bordado a partir del modulo elegido. Sólo Da (del grupo FEUP) nos da la explicación y descripción de este proceso y que es una integración de la tradición kosovar de hacer el bordado:

> “*Si me gustaría el bordado, para hacerla lo mismo (o más grande) necesito mirar hasta que hago lo mismo sólo la parte colorada (*refiere al hexágono*) y luego continuaría haciendo otros “hexágonos” hasta obtener el bordado igual, más largo, más ancho o más pequeño…”*
>
> (PF, 10 Da)

En la tabla 8.38 presentamos los estudiantes que identifican dichos módulos del bordado en ambos grupos.

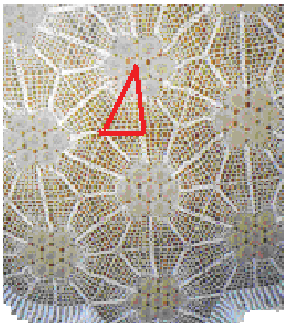
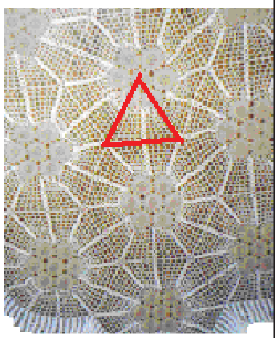
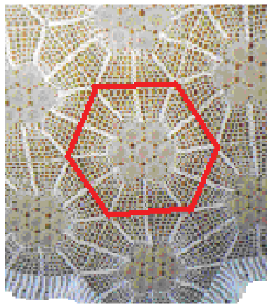
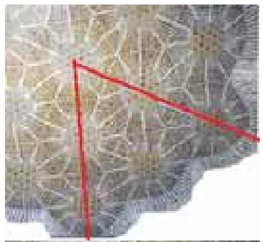
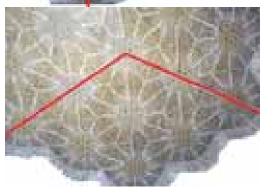
Los. de FEUP	Ar, Sh, Pe, Em	Re, Fi	Ad, Da, Dr, Vj, Fit, Xh	Ar, As, Em, Fi, Se,
Los de FFPUB	Na, Ma, Es, Di, Yo, Jo	Li,	Ol, Es, Di, Al	So, Ma, Ol, Mc , Mo, Li, La, Jo, Es, Di, Al, Yo
Módulos identificados				 

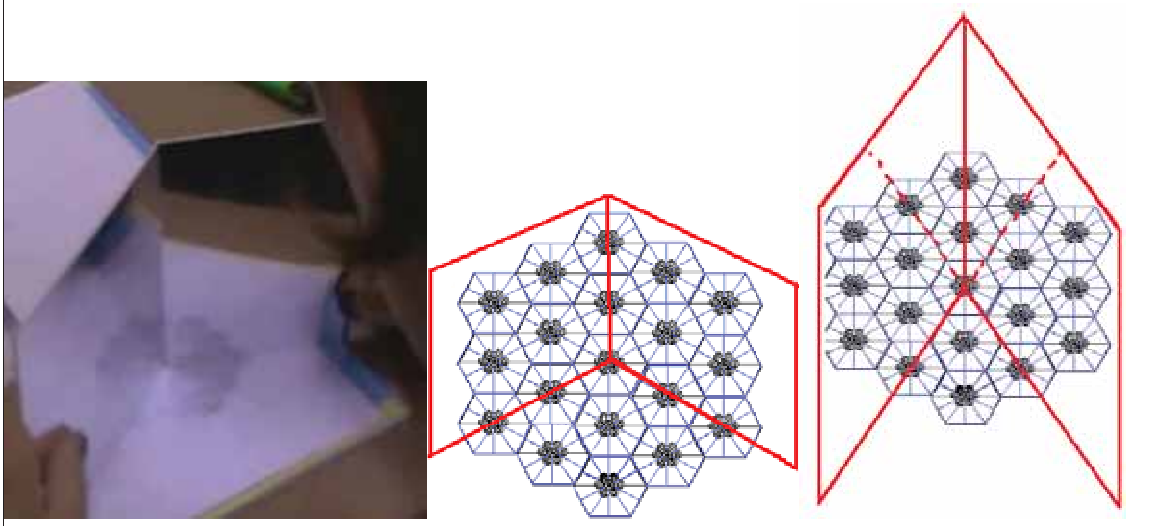
Tabla 8.38. La identificación del modulo mínimo del bordado kosovar

Respecto a la segunda parte de la actividad que es "*¿dónde deberías colocar dos espejos para ver la figura entera?*" los participantes de la investigación no cuentan los módulos identificados anteriormente, sino en los ángulos formados por los espejos. En la realidad es evidente que la capacidad de utilizar los espejos para que se ve todo la figura del bordado muestra la diferencia entre los grupos. Mientras que mayoría de los estudiantes de la FFPUB utilizan los espejos y determinan la posición correcta, sólo 6 del total de los14 del grupo de FEUP consiguen obtener la figura entera del bordado con dos espejos.

Los estudiantes tenían la oportunidad de practicar en el arte de descubrir simetrías. El bordado presentado puede muy bien servir para practicar utilizando espejos; podemos unir dos espejos con unas visaras de manera que estén frente a frente, y podemos colocarlas verticalmente sobre la imagen del bordado horizontal. Se elige una figura (parte o modulo) entre los dos espejos, pudiendo variar el ángulo que forman ambos. Si el ángulo que forman los espejos es recto, tendremos, contando la figura real, cuatro figuras visibles.

Los estudiantes tenían la experiencia del desarrollo de las actividades de la práctica docente en cuanto imaginar que un espejo puede a su vez reflejarse en otro espejo y así producir un cierto número de imágenes, puesto que cada reflexión puede volver a reflejarse en otro espejo reflejado. Se pueden producir instantemente tres partes del bordado de cual 2 son visibles y uno es la imagen real, colocando los espejos formando un ángulo de 120 grados (el caso de Ar, Ad, Em, Sh) tal como se propone en la Figura 8.39.

Otros estudiantes (Fit, Fi y la mayoría de los estudiantes de la FFPUB) colocan los espejos formando un ángulo de 60 grados y se ven 6 figuras visibles contando la figura real entre los espejos. Los estudiantes han comprobado si la imagen en los espejos es idéntica a la imagen real del bordado.



Realización práctica   Angulo de 120^0 entre los espejos   Angulo de 60^0entre los espejos

Figura 8.39. La reproducción del bordado utilizando los espejos

Resulta interesante el hecho de que si empezamos con *n* ejes de simetría, y una vez “eliminados” algunos, nos quedan *m* ejes, *m* debe ser divisor de *n*. Por ejemplo, el bordado del actividad 10 de la PF tiene 6 ejes de simetría. Esto tiene relación con el hecho de que el número de elementos de un subgrupo es siempre divisor del número de elementos del grupo del cual el subgrupo forma parte (ver figura 8.40). Los participantes de la investigación han conseguido identificar los ángulos de 30^0 (360:12 o ***6*** ejes de simetría, como es el caso de Mo (FFPUB) y Sh (FEUP)), de 60^0 (360:6, o de ***3*** ejes de simetría como es el caso de Al, La, Mc (FFPUB), Ad, Ar (FEUP)) y de 90^0 (360:4 o ***2*** ejes de simetría, como es el caso de Jo (FFPUB) y Em (FEUP)). Los que identifican el ángulo de 120^0 (como es el caso de Ma, So, Yo) colocando los espejos en la posición que la parte del bordado que se refleja entre los espejos tiene su propio eje de simetría a lo largo de la bisectriz del ángulo formado por los espejos que produce el caso del ángulo de 60º o de 3 ejes de simetría. Como consecuencia podemos decir que la imagen del ese bordado podemos conseguir colocando dos espejos reduciendo los ejes del “hexágono” del bordado a 6, 3 y 2, añadiendo partes a la figura inicial (figura 8. 40).

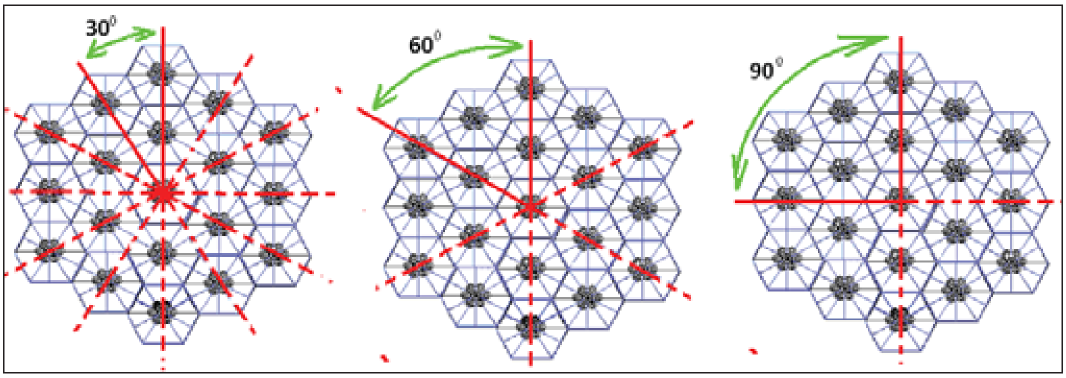


Figura 8.40. Varios ángulos entre dos espejos producen la misma imagen

La incorporación de elementos culturales al concepto de transformación geométrica se muestra de manera especial en el problema 11 de planificación y diseño de una clase sobre transformaciones geométricas en la Educación Primaria.

A base del análisis de las planificaciones de una clase sobre transformaciones en Educación Primaria (actividad 11 de la PF), identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.3.12: *En las decisiones de incorporar contextos socio-culturales y recursos didácticos en sus clases de enseñanza, los futuros profesores de Primaria aprovechan de su experiencia durante su formación como futuros profesores de Primaria.*

A partir del análisis de las planificaciones de las clases (actividad 11 de la PF) hechas por los participantes de investigación, vemos que mientras la mayoría del grupo FFPUB propone los contextos relacionados con lo cultural y social, en los del grupo FEUP ocurre en un menor número de casos. El hecho de que el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica sobre transformaciones ha tenido consecuencias en la formación de futuros profesores, muestra el caso de Em, que elige el tema de relación entre las letras (del alfabeto) y transformaciones geométricas sobre el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica. Este efecto se nota y en los estudiantes de la FFPUB como es el caso de La, y Mc. Otra consecuencia de las fases anteriores de la investigación es el planteamiento de la utilización de diferentes recursos didácticos en las actividades sobre transformaciones en la Educación Primaria.

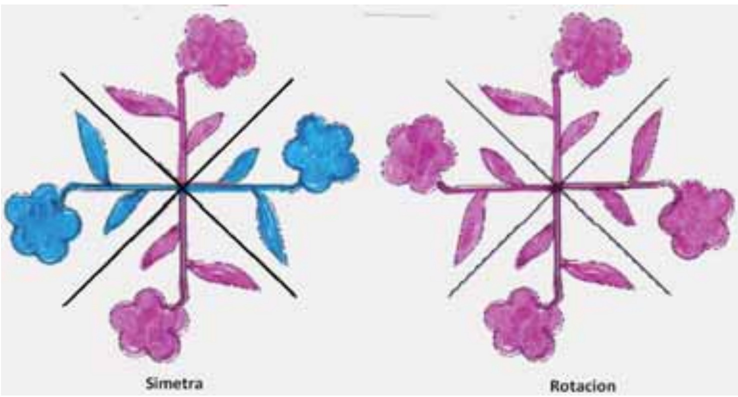


Figura 8.41, La distinción entre simetría y rotación con los flores en el bordado

Sobre la incorporación de la cultura en las actividades de la enseñanza de transformaciones, destacamos el caso de Da (figura 8.41) que trata el problema de la comprensión de transformación geométrica mediante las imágenes de las flores y la experiencia de hacer bordados diferentes. Ella plantea una clase con el objetivo de reconocer las características fundamentales de la simetría y la rotación y especialmente la diferencia entre la simetría y la rotación. Recordamos que antes, Da (y no solo ella) tenía problemas para distinguir la rotación de la simetría. En este caso ella utiliza el proceso de doblar como instrumento de justificar la simetría y desplazamiento (rodar) como instrumento de justificar la rotación.

Ad, en su planificación de la clase, elige la propiedad de regularidad de los polígonos en función del número de ejes de simetría con el fin de lograr la conclusión de que los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como lados. Ad piensa que “regularidad” es una propiedad que los alumnos tienen que aceptar como importante no solo para la asignatura de matemáticas. Y este caso podemos considerar como la consecuencia de la sesión SI de la unidad didáctica.

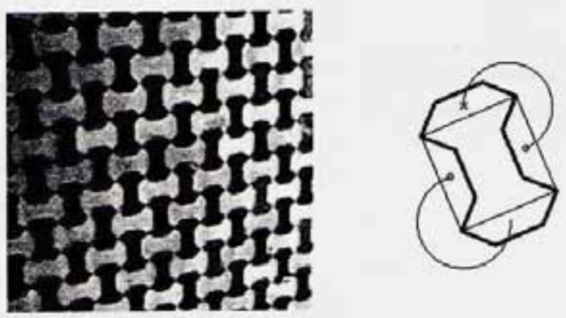
A Em le parece interesante la enseñanza de las isometrías utilizando las letras del alfabeto (mayúsculas). Por esta razón, él relaciona el afecto de querer lo “bonito” en escribir las letras. Comparando las letras escribiendo “mal” con las letras escribido “bonito”, quiere conseguir la conclusión que las letras “bonitas” tienen ejes de simetría y las “malas” no las tienen. De esta manera, Em está convencido de que en los alumnos crecerán el interés sobre las isometrías y al mismo tiempo sobre lo “bonito”.

Los participantes del grupo FEUP, en sus planificaciones de la clase sobre transformaciones geométricas en Educación Primaria, han hecho individualmente – cada estudiante una planificación. Cada uno de ellos, primero presenta los datos de la institución (FEUP), su nombre y el del profesor, el título del tema, el curso a que se dedica la clase, el día, el tipo de clase, los objetivos de la clase, los recursos que se utilizaran, la estructura de la clase y la descripción del desarrollo de la clase. En todos los casos, el desarrollo de la clase está compuesto de tres partes: la ***parte inicial***, ***parte principal*** y ***parte final*** de la clase, que a veces se llaman con diferentes nombres como por ejemplo, Em llama la parte inicial con el nombre "*evocación*", la parte principal "*realización del significado*" y la parte final como "*reflexión*". Principalmente plantean la utilización de recursos didácticos conocidos en las actividades de su formación sobre transformaciones, como son espejos, imágenes de figuras diferentes (flores – bordados, las letras del alfabeto, los polígonos, etc.), lápices de color, hojas blancas, y instrumentos clásicos de dibujo.

Los participantes de la FFPUB, sus planificaciones de una clase lo hacen en grupos. La forma del diseño es diferente al de FEUP. Los estudiantes de la FFPUB, presentan el título de la clase que se diseña, sin o a veces con el nombre del profesor-tutor, sin el nombre de la institución (FFPUB), sin día de realización o de planificación. La descripción del diseño de la clase está compuesta por 4 partes: I- ***contenidos y objetivos***, donde se plantean los contenidos sobre que se desarrollan las actividades que a veces se dividen en los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinal; objetivos que se plantean conseguir; recursos didácticos que se plantea utilizar; II - ***organización***, que se refiere a las actividades principales de la clase; III - ***gestión*** de la clase donde se da la descripción de cada acción del docente durante el desarrollo de la clase, y IV – ***evaluación,*** donde se da una descripción de las características de la clase donde los futuros docentes expliquen qué y por qué evalúan, y qué y por qué piensan que es importante tal evaluación.

Todos los estudiantes de la FFPUB en una u otra manera plantean la incorporación de diferentes contextos en las actividades sobre la enseñanza de transformaciones geométricas. So y Ma, en su diseño de la clase titulada "simetría", empiezan con los fotografías de diferentes edificios "*hechas por un fotógrafo*" durante un viaje. Se presentan las fotos del edificio del Parlamento de Londres, la Torre de Belem en Lisboa, el Museo del Prado en Madrid y el Arco de Triunfo de París. Se plantean una serie de preguntas sobre estas fotografías que el docente presentará a los alumnos de Primaria. A continuación de su planificación, pasa en el tratamiento de figuras geométricas (triángulos y cuadriláteros regulares e irregulares, y el círculo), después pasa en la fiesta de *Nada*l mostrando fichas de trabajo con los dibujos de figuras simétricas típicas para la fiesta de *Nadal*. Dado que está escrito en el diseño de esta clase, no se ve la posibilidad de que los alumnos reconozcan las propiedades relevantes de la simetría – todas las acciones están pensadas para conseguir la capacidad del alumno en distinguir la figura simétrica de la no simétrica.

El grupo de estudiantes con Mc, titula el diseño de la clase como "*Gaudí y la geometría*". Entre otros objetivos que se plantean esta y "*orientación espacial: traslaciones, desplazamientos, simetrías y rotación*", "*construcción de una nueva figura utilizando la traslación de una figura inicial*" y "*construir figuras simétricas respecto un eje de simetría*". En principio presenta las imágenes de la mariposa y utiliza el doblado para justificar y mostrar la propiedad simétrica, definir *el eje de simetría* como "*la recta que la divide en dos mitades iguales y proporcione un plano perpendicular o un ángulo* 90^{0}"; y la definición de figura simétrica: "*si las dos partes a ambos lados de la recta son idénticas y cuando al hacer la acción de doblar sean iguales y perpendiculares*". A continuación del diseño (organización y gestión de la clase) se plantea una visita al parque Güell y el desarrollo de la actividad está presentado con un diálogo que ellas como docentes piensan realizar. En estos "*diálogos*", se quiere mostrar la posibilidad de descubrir figuras geométricas utilizando el arte, el fenómeno de repetición como característica de transformaciones isométricas, y la propiedad simétrica de figuras geométricas descubiertas en el arte de Gaudí.



- Aquesta primera imatge és el mosaic, és a dir, la repetició d'un mateix mòdul.
- Aquesta segona imatge és el mòdul escollit per a realitzar la unitat didàctica, tot i que el mòdul mínim, és la meitat d'aquest os.

Figura 8.42. El mosaico de Alhambra de Granada, en el diseño de Di y otros.

El grupo de Di, Es y Li, plantean una clase para los alumnos de tercer ciclo de primaria sobre mosaicos. Por este razón, el grupo ha elegido "*un fragmento de un pared del conjunto arquitectónico de Alhambra de Granada, un templo musulmán que ha pasado a formar parte indiscutible de nuestra cultura*" (figura 8. 42). A continuación, se da la descripción del desarrollo de la clase en detalle, incluido el tiempo dentro del que se realizarán las actividades. En realidad, esta clase trata las deformaciones, parecidas a la actividad 3 de la PF, que forman parte de un mosaico. La clase trata de estudiar el proceso de obtener una figura (elemento del mosaico) a partir de un rectángulo, empleando las rotaciones de las partes determinadas del rectángulo.

Otro estudiante de la FFPUB, La, trata el problema de mosaicos, como un conjunto de módulos formado por figuras geométricas que cambian la posición y conservan forma y tamaño. A base de todo esto, identificamos:

Resultado 8.3.13: *Todos los participantes de la investigación (del grupo FEUP y del FFPUB) muestran un grado medio o alto de incorporación del contexto o elementos culturales en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las transformaciones en la Educación Primaria. En otras palabras, reconocen contextos o elementos culturales asociados a significados de la transformación geométrica, contextualizando y usando con el fin de integrar la comprensión y razonamiento de transformación geométrica.*

8.4. Sobre el componente didáctico estratégico en la formación de profesores en la PF

En este apartado analizamos los conocimientos, creencias y actitudes de los profesores sobre las transformaciones que condicionan toda su actividad profesional. Las consideraciones que se hacen en este apartado valoran y estudian cuáles son los conocimientos sobre aspectos didáctico-estratégicos más significativos que identificamos en los estudiantes sobre la enseñanza de las transformaciones que recibieron después de la realización de la unidad didáctica sobre el aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria,

El análisis de las producciones de los participantes en la Prueba Final inferirá una serie de resultados sobre aprendizaje de transformaciones y sobre instrucción. En mismo tempo estos resultados comparamos con los resultados obtenidos en la Prueba Inicial, con el fin de establecer alguna aportación en el proceso de formación de profesores sobre transformaciones geométricas.

Hasta el momento, hemos notado que la conciencia sobre la formación de profesores para la enseñanza de transformaciones geométricas, **aspecto matemático CM** (transformación como objeto, terminología, tipos, relaciones y jerarquías, el proceso de transformación, razonamiento y lo cultural en transformaciones), **el componente estratégico en la formación de profesores** CE (tener en cuenta el tratamiento de transformaciones, negociación docente, y adaptación critica del conocimiento práctico; identificación de elementos de metodología de aprendizaje, consideración del propio currículo, registro y formas instruccionales, y estilos instruccionales) y reconocimiento y **actitudes frente al aprendizaje** propio y de los alumnos CA (flexibilidad y implicación, posicionamiento ante la motivación y comprensión de nuevas ideas, el valor dialectico de la acción-realización, reflexión profesional, socio-culturización y colaboración), son componentes del contenido profesional que todavía no se consideran y no se emplean en los instituciones de formación del profesorado en Kosova de manera equilibrada.

El futuro profesor continúa siendo considerado como un elemento externo y receptor pasivo de lo que fue ¨*planteado para él*¨ - normalmente por un experto (matemático) y ajeno a su realidad - y así, suele no involucrarse de manera a promover cambios significativos.

Por otro lado, el componente de contenido matemático CM continúa considerado de poca importancia o se considera aprendido durante escolarización preuniversitaria para los futuros profesores de Catalunya. Así, el futuro profesor será "*equipado bien con los armamientos pero con poca munición*".

Como los conocimientos sobre el contenido matemático CM hemos elaborado en el apartado 8.3, continuamos con el análisis del componente estratégico CE en el apartado 8.4, y el análisis del contenido profesional en el comportamiento actitudinal CA en el apartado 8.5.

8.4.1. Sobre el aprendizaje de transformaciones geométricas en las producciones de la PF

Esperamos mejoras en el aspecto del contenido profesional estratégico-interpretativo en la enseñanza de transformaciones geométricas en la Educación Primaria por parte de los participantes de la investigación.

En este apartado relatamos las producciones de los participantes de la investigación, principalmente sobre el diseño de una clase sobre transformaciones, en las cuales ellos proponen situaciones de clase expresando sus capacidades de:

- tener en cuenta el hecho de tratar las transformaciones(CEa1),
- apertura y confianza para negociación docente (CEa2) y
- capacidades de adaptación crítica y acomodación del conocimiento práctico (CEa3).

Como en las fases anteriores de la investigación, también en la Prueba Final identificamos diferentes capacidades de los participantes sobre el aprendizaje de las transformaciones en la Educación Primaria. Sigamos identificando tres grados de capacidades: A – nivel alto, B - nivel intermedio, y C – nivel bajo.

En primer lugar, en forma de tabla 8.42 presentamos los resultados de clasificación de las producciones de los participantes de ambos grupos de participantes según los grados establecidos en el capítulo 4, y la comparación con los resultados mostrados en la Prueba Inicial sobre el aprendizaje de transformaciones.

Niveles de la capacidad sobre aprendizaje de transformaciones	La Prueba Inicial		La Prueba Final	
	FEUP	FFPUB	FEUP	FFPUB
A- Utilización de esquemas relacionados de transformación geométrica y organización adecuada a las dificultades de aprendizaje de transformación, Reconoce el papel del grupo y del individuo en el proceso de aprendizaje de transformaciones Proponiendo de situaciones de análisis/síntesis de conocimiento sobre transformación	-	Mc	Ad Da Em Sh Vj Ar	Mc La Mo Ol Ma So
B- Identificación de los procesos significativos de transformación	Ad , Dr,	Al, Di, Es,	Dr, Fit ,	Li, Di

geométrica, y muestra conexiones interdisciplinarios. Atención superficial a las dificultades en aprendizaje de transformación geométrica, Explicitación del progreso que quiere que hagan los alumnos	Fit, Sh, Vj	Jo, Li, Mo, Ol	As, Fi, Pe, Re Se, Xh	Es, Al Jo, Na Yo
C- Identificación superficial de relaciones, dificultades y propiedades Explicita el valor de conocimientos previos sobre transformaciones geométricas, Explicitación superficial de estrategias para posibilitar el reconocimiento de diferentes razonamiento de los alumnos,	Ar, As Da, Em Fi, Pe, Re, Se Xh	La Ma, Na So Yo	-	-

Tabla 8.42. Clasificación de las capacidades de los participantes al final de la investigación sobre aprendizaje de transformaciones y la comparación con la Prueba Inicial

Sobre cómo explican el aprendizaje de transformaciones en la Educación Primaria los participantes de la Prueba Final, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.4.1: *Comparando los resultados de la PI con las de la PF se muestra un avance significativo en ambos grupos de los participantes. Pero, la mayoría de los participantes de ambos grupos (57% en el FEUP, y 54% en el FFPUB) muestran el grado medio de capacidad de explicar y organizar el aprendizaje de transformaciones geométricas en primaria. Otra parte de participantes en ambos grupos muestra un grado alto de comprender y explicar el aprendizaje de transformaciones geométricas.*

A continuación elaboramos algunas producciones de los participantes de la Prueba Final como ilustración del resultado mencionado arriba.

No todos los estudiantes utilizan esquemas adecuadas sobre el concepto de transformación geométrica – la mayoría de ellos no tratan el proceso de transformación, el razonamiento y argumentación, relaciones entre propiedades y diferentes transformaciones. Como ejemplos típicos podemos mencionar el caso de Fi (FEUP) que, a pesar de buena idea de utilizar el fenómeno de apertura de las puertas, no explica los elementos relevantes y las propiedades importantes de transformaciones tratadas:

> "*Pondré diferentes puertas explicando diferentes maneras de apertura. Algunas pueden abrir rotando, algunas desplazando. Los alumnos comprenderán giro y traslación*"

(Fi, PF DC)

Fi no muestra el proceso de comprender el centro (eje) de rotación, el ángulo de rotación en el caso de las puertas que se abren rotando. En ningún momento explica el hecho de que se trata de una rotación espacial y no explica la diferencia con la rotación en el plano. De forma análoga él no muestra cómo van a comprender los alumnos el vector de traslación, su sentido y su magnitud.

En el grupo de FFPUB, igualmente la mayoría muestra una atención superficial a las dificultades en aprendizaje de transformación geométrica por parte de los alumnos de primaria y no encontramos situaciones de análisis/síntesis de conocimiento sobre transformación. Como ilustración pondremos el caso de Al y Jo, en su diseño de una clase de Tercer Ciclo de primaria sobre transformaciones:

> "*Una vegada veuen les repeticions, se'ls hi preguntarà si les formes son iguals o no, i ho hauran de justificar. S'ha de potenciar el raonament dels alumnes, i deixar temps per expressar el que pensen. A partir d'aquí, hauran de buscar altres situacions similars que es desenvolupin a l'aula, com per exemple a l'armari, en una taula, la cadira, un llibre obert, o les ulleres d'algun alumne".* Luego, "*Abans de donar la definició* (no explica sobre que definición se trata) *es preguntarà si algú sap el nom d'aquest fenomen. Finalment, si ningú no contesta correctament,* (se da posibilidad de que ¡los alumnos del tercer ciclo no reconocen la simetría!) *o si no s'ha aconseguit arribar a la resposta que el mestre es proposa, se'ls hi dirà que se tracta de la simetria* (pero no está explicado ni escrito sobre que definición de simetría han pensado).

(Al y Jo, PF, DC)

Como ilustración para los estudiantes que muestran un grado alto de la capacidad de expresar el proceso de aprendizaje de transformaciones por parte de los alumnos de primaria, son los Da y Em de la FEUP y Mc, y Ma junto con So de la FFPUB.

Em, en su diseño de una clase sobre transformaciones de primer grado (primer ciclo de primaria), trata las letras mayúsculas del alfabeto, considerando la dificultad de los alumnos en escribirlas, pero teniendo en cuenta el aprendizaje de isometrías. Se introduce el concepto del eje de simetría como la posición del espejo que refleja una mitad de la letra en la otra: "…*una vez encontrado la posición del espejo, dibujare la línea. Continuaré con el dibujo de la letra A en la pizarra y dibujaré el eje de simetría de la letra A. Preguntaré si alguien sabe* *cómo se llama esta línea. Espero que mayoría no recuerden que se llama "eje de simetría*"". Se quiere que en la mente de los alumnos crea la imagen conceptual del eje de simetría compuesta por las diversas figuras (geométricas y diarias) que recuerdan alumnos como ejemplos del concepto "simétrico". Para que los alumnos definan correctamente la imagen del "simétrico" no se ponen ejemplos de las letras que permiten a los alumnos de discriminar la propiedad simétrica entre letras que no tienen esa propiedad. También se plantean las letras que tienen más de un eje de simetría. Em ha diseñado la clase en manera de que primero los alumnos tienen que comprender la propiedad simétrica de las figuras, identificando el eje de simetría y la propiedad de igual de distancia respecto al eje, luego, plantea construir lo simétrico, considerando como un grado más alto de dificultad:

> "*En principio escribiré unas letras (mayúsculas) en la pizarra en la manera que sean deformadas - quiero decir no correctamente en sentido de bonito. En otra fila, escribiré las mismas letras pero esta vez que sean escrito bonito…Con esto, quiero incitar la discusión que debemos escribir bonito, pese que los estudiantes están en la fase cuando todavía tienen dificultades a escribir bonito….Luego, voy a tratar una letra, p.e. la letra T. Pregunto: "¿como sabemos que hemos escrito bonito la letra T?" En esta pregunta espero que los alumnos responden como: "la ala de derecha tiene que ser igual a la ala de izquierda", o que " el lado de derecha debe ser igual al lado de izquierda" etc…estas respuestas explican las propiedades simétricas de la letra T…. yo escribiré estas ideas en un rincón de la pizarra sin comentar hasta la otra parte de la clase donde presentaré que estas ideas tiene su nombre que es simétrico….*
>
> *Con el objetivo que los alumnos entienden con facilidad y mayor la actividad que quiero desarrollar, primero voy a mostrar para todos un ejemplo… A continuación, pido que la misma actividad lo hacen los alumnos con las tArs que ya tienen al frente con las letras A,B,O y N…. después de una cadena de pruebas con las tArs, espejos o letras dibujadas en el papel blanco, los alumnos descubren los ejes de simetría para cada letra….*
>
> *Después, con el objetivo de hacer simétrico, desarrollo la actividad de dibujar la letra cuando esta dibujado una parte. En este caso, destaco la importancia del espejo para que se vea mejor la figura entera que debe dibujar….* "
>
> (Em, PF, DC)

Da en su diseño de una clase para los alumnos de tercer (segundo ciclo) trata la simetría y rotación mediante el proceso de hacer bordado. Ella utiliza perfectamente la facilidad de reproducir las flores, obteniendo así una figura simétrica, y esta simetricidad se justifica utilizando el doblado. El doblado le ayuda a los alumnos a reconocer el eje de simetría y la propiedad de coincidir y de igual distancia al eje de simetría. La introducción de la rotación, utilizando los bordados se hace con la ayuda de la comparación con la simetría, identificando el centro y ángulo de rotación. La esquematización mostrada por Da propone situaciones de análisis y síntesis de conocimientos sobre la simetría y rotación. Utilizando el espejo el doblado para deducir otra mitad del bordado, el futuro profesor introduce el concepto de simetría como una operación. Los alumnos tiene la posibilidad de justificar y comprobar las propiedades simétricas (igual de distancia, orientación opuesta) utilizando espejo, y con diferentes posiciones de los ejes y diferentes figuras.

> "*Dibujo dos rectas en la posición perpendicular en la pizarra…. colocó el modelo en la cara roja y dibujaré su forma. Pido que lo mismo hacen y alumnos en sus hojas del papel que he dado antes…. El lugar donde tienen que colocar el modelo está asignado por un segmento en el papel con el lápiz para que sea posible borrar después. Los alumnos obtendrán una figura igual a la figura 2* (figura 8.43)*, en sus hojas de papel blanco.*
>
> *Una vez dibujado la figura 2, pido que ellos pintan la figura según colores del modelo - si han colocado la cara de azul, pintar con el color azul e igual con el color rojo….*
>
> (Da, PF DC)

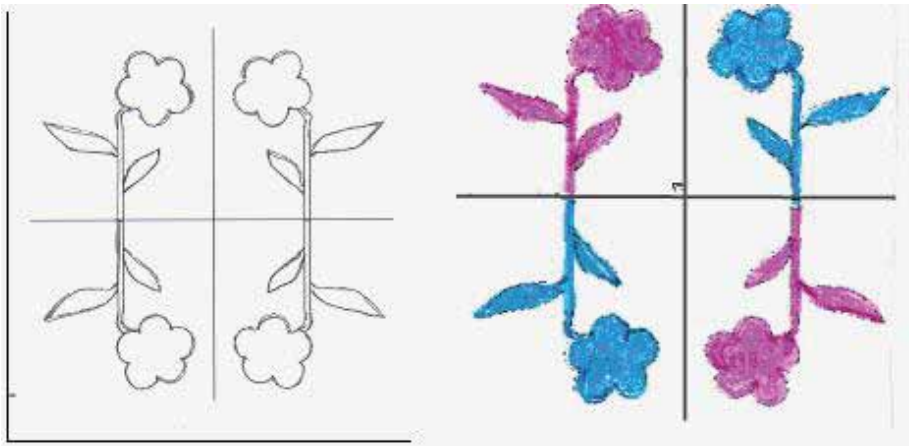


Fig. 8.43. La simetría en el diseño de la clase por Da

Mc en su diseño de una clase sobre transformaciones geométricas trata las isometrías. En principio propone usar imágenes de las mariposas con el fin de:

> "*buscar la simetría en la naturaleza para identificar directamente este fenómeno con algo muy cotidiano y visual como son mariposas*".

Luego utiliza el doblado para observar la coincidencia de dos mitades de la mariposa y sacar la conclusión:

> "*entonces la mariposa es una figura simétrica….simétrica es una figura siempre y cuando al hacer la acción de doblar sean iguales y perpendiculares".*

En el caso del grupo FFPUB, observamos la actividad propuesta por Mc. En este diseño se trata un mosaico del Parque Güell, utilizando diálogos que ella piensa realizar con sus alumnos en la clase, mostrando así el esquema de construir el aprendizaje de isometrías (en este caso de simetría y traslación) por parte de los alumnos de primaria.

Ma y So han diseñado juntas una clase sobre transformaciones geométricas para Tercer Ciclo de primaria. Ellas organizan su clase de acuerdo con las dificultades en el aprendizaje de simetría poniendo en principio identificar los objetos (imágenes de los edificios) simétricos y el eje de simetría, creyendo que:

> "*als nenes els hi fastidiaría no poder tenir la imatge dels edificis al seu abast per poder doblegar-ho i comprovar si son veritablement simètrics. Així doncs, amb aquest exercici els farem entendre que els eixos de simetria no tan sols estan en las figures que surten en paper, sinó que també existeixen en les figures reals….*"

(Ma y So, PF, DC)

A continuación, trata de identificar el eje de simetría de diferentes figures geométricos mostrando la posibilitad de que una figura puede tener más de un eje de simetría y las propiedades relevantes.

A partir de análisis principalmente del diseño de una clase sobre transformaciones geométricas, identificamos las características del esquema de aprendizaje de transformación por parte de los alumnos de primaria, establecida por los participantes de investigación. Este esquema se refiere al aprendizaje de simetrías, como transformación tratado en las mayorías de los diseños de la clase presentadas por los futuros profesores de primaria.

Resultado 8.4.2: *A base de análisis de los diseños de la clase el aprendizaje de transformación simétrica para la mayoría de los estudiantes de la FEUP y algunos del FFPUB, consistía en:*

i - proponer un conjunto de objetos (imágenes o figuras) conocidas por los alumnos de primaria con el fin de identificar y distinguir los que tiene propiedad simétrica y los que no la tienen,

ii - identificar y encontrar el eje (o ejes) de simetría para los objetos que poseen la propiedad simétrica y justificar la propiedad simétrica con el doblado, espejo u otro instrumento de justificación,

iii - construir la imagen simétrica respecto a la imagen dada.

8.4.2. Sobre la instrucción de transformaciones en las producciones de los estudiantes en la PF

Los diseños de una clase sobre transformaciones geométricas en la primaria (actividad 11 de la PF), hechas por los participantes de la investigación en el grupo de la FEUP y en el grupo de la FFPUB, nos da la posibilidad de sacar resultados favorables sobre la instrucción de transformaciones geométricas. Esto es por la razón de que los participantes de la investigación diseñando la clase muestran prácticamente los elementos funcionales y estilos instruccionales sobre instrucción de transformación geométrica en la Educación Primaria. En los resultados identificados sobre lo que y como piensan los participantes-futuros profesores de primaria como maestros en sus futuras aulas introducir la transformación geométrica, también hemos considerado las producciones en las actividades 1, 3, 5, 8, 9 y 10. El análisis de los diseños de la clase presentadas por los participantes se hace sobre la identificación de elementos de metodología y diseño de aprendizaje (CEi1), consideración de los elementos curriculares (CEi2), reconocimiento de registros y formas instruccionales (CEi3) y sobre reconocimiento de los elementos funcionales de tareas educativas y diversos estilos de instrucción (CEi4).

Igual como en las fases anteriores de la investigación, identificamos tres niveles de las capacidades sobre instrucción de transformación geométrica en la Educación Primaria: Nivel alto-A, nivel intermedio-B, y nivel bajo-C.

Los resultados de los participantes de ambos grupos sobre la instrucción de transformación geométrica, los presentamos en la forma de tabla 8.44, incluyendo los resultados de la Prueba Inicial para mostrar la diferencia y la comparación. Como podemos ver, comparando los resultados de la Prueba Final con los de la Prueba Inicial, principalmente como influencia del desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica sobre aprender a enseñar las transformaciones en primaria, hay un avance significativo de los desarrollos de los participantes sobre instrucción de la transformación geométrica.

Niveles de la capacidad sobre aprendizaje de transformaciones	La Prueba Inicial		La Prueba Final	
	FEUP	FFPUB	FEUP	FFPUB
A- Identifica los procesos importantes en la construcción de la idea de transformación. Identifica los elementos claves en la secuencia del contenido sobre la transformación. Propone análisis del proceso de aprendizaje de transformación. Propone las tareas complejas. Establece relaciones instructivas a diversas facetas del concepto de transformación Adapta, y crea materiales y recursos didácticos adecuados	-	-	Ar , Da, Em, Sh	La, Mo, Ol
B- Explicación y justificación de herramientas de motivación. Muestra coherencia entre actividad y el contenido de transformación. Explicita el papel de tarea. Identifica las posiciones relevantes para justificar intervenciones. Utiliza materiales y recursos didácticos conscientemente para asociar al significado de la transformación. Identifica elementos de contenido como parte de organización del currículo.	Ad, Ar, Da, Dr, Em, Fit, Sh, Vj.	Di, Jo, Li, Mc , Mo, Ol, La , So	Ad,, As, Dr, Fit, Fi, Pe, Re, Se, Vj, Xh	Ma, So, Mc, Li, Di, Es, Al, Jo, Na, Yo
C- Muestra que es imprescindible utilizar recursos para mejor aprendizaje Reconoce objetivos y finalidades de las actividades. Reconocimiento superficial de los tipos de actividades Identifica y ejemplifica sobre lo cotidiano. Identifica el marco referencial del entorno.	As Fi Pe, Re Se Xh	Al, Es, Ma, Na Yo	-	-

Tabla 8.44. Clasificación de las capacidades de los participantes al final de la investigación sobre la instrucción de transformaciones y la comparación con la Prueba Inicial

El análisis de las respuestas de la PF y especialmente el análisis de la actividad 11 (el diseño de una clase sobre transformaciones) implica la identificación del resultado siguiente:

Resultado 8.4.3: *La mayoría de los participantes de ambos grupos (71% del FEUP y 77% del FFPUB) muestran un grado medio de capacidad de instrucción de transformación geométrica considerando coherencia entre actividad y el contenido de transformación, explicitando el papel* *de tarea de transformación identificando las posiciones relevantes para justificar intervenciones y utilizando materiales y recursos didácticos conscientemente para asociar al significado de la transformación. Otra parte de los participantes (35 % del FEUP y 23% del FFPUB) muestran un grado alto de capacidad de instrucción de transformación geométrica en la clase de primaria, mostrando la capacidad de identificación de los procesos importantes en la construcción de la idea de transformación, proponiendo el análisis del proceso de aprendizaje de transformación, estableciendo relaciones instructivas a diversas facetas del concepto de transformación y adaptando y creando materiales y recursos didácticos adecuados.*

Todos las producciones de los participantes pueden servirnos como ilustración del resultado identificado, pero nosotros mostramos los casos que consideramos importantes en la clasificación de capacidades sobre la instrucción de transformaciones geométricas en la clase de primaria.

Pensamos que la ilustración mejor de existencia de diferentes grados en capacidades de instrucción de transformación, es mostrar un caso de cada grado en ambos grupos de participantes de la investigación. Por este, presentamos el caso de Da del grado alto, el caso de Ad del grado medio en el grupo de FEUP, mientras que en el grupo de la FFPUB presentamos el caso de Al con el grado medio y el caso de Mo con el grado alto de capacidad de instrucción de transformación geométrica.

Como elemento importante metodológico de aprendizaje de transformación geométrica consideramos planteamiento de objetivos de la clase planteada. Analizando los objetivos que plantean los futuros profesores para una clase sobre transformaciones, como se ve en la tabla a continuación, encontramos el caso de Da (FEUP) que muestra capacidad de identificar los procesos importante en la construcción de de la idea de transformación geométrica (simetría axial y rotación) identificando los objetivos de la clase planteada. Lo mismo ocurre con el caso de Mo que también relaciona las secuencias del contenido con el diseño del aprendizaje.

Mostramos estos aspectos en el caso de los estudiantes Ad y Da del grupo FEUP y en el caso de Al y Mo del grupo FFPUB, en la tabla 8.45.

	FEUP		FFPUB	
	Ad	Da	Al	Mo
Los objetivos de la clase planificada	Distinguir polígonos regulares y irregulares, dibujar los polígonos (simples), Identificar ejes de simetría del polígono, Distinguir los polígonos con un eje de otros con mas ejes de simetría, Clasificar los polígonos según simetrías en regulares y irregulares, Incitar el deseo para aprender geometría, Sostener la voluntad hacia enseñanza de las matemáticas.	Aumentar interés por aprender matemáticas, Explicar la técnica de hacer bordados mediante transformaciones geométricas, Conocer la propiedad simétrica de las figuras, Conocer elementos de simetría como el eje, la igual de distancia entre puntos correspondientes, Conocer la rotación, el centro de rotación y ángulo de rotación. Conocer la diferencia entre simetría y rotación, Descubrir que producto de dos simetrías es una rotación, Destacar el valor de los bordados en transformaciones.	Aprofundir en els aspectos més especifics de la geometría Simetría inclosa en la geometría Saber identificar la simetría en diversos situaciones.	Observar figures geometriques en la realitatt que ens envolta Elaborar estrategias per tal de dibuixar figures traslladades Elaborar las estrategias per tal de construir figures simetriques respecte d'un eix de simetría Reconeixer figures simetriques Dibujar figures simetriques Dibuixarr figures simetriques en una cuadricula o en un paper en el blanc. Debuixar figures traslladades en una quadricula o en un paper en blanc.

Tabla 8.45. Los objetivos planteados en los diseños de las clases

La instrucción de transformación simétrica a partir de polígonos regulares (el caso de Ad) y de aspectos más específicos de geometría (el caso de Al) no nos parece apropiado al proceso de aprender la transformación simétrica y menos la identificación de procesos importantes de transformación simétrica. Por otra parte, la instrucción de simetría a partir de la identificación de las figuras simétricas de las que no poseen esta propiedad, luego pasar en la identificación del eje (ejes) de simetría, hasta las propiedades y construcciones de figuras como resultado de aplicaciones figurales (Da y Mo) muestra la identificación del proceso de construcción de la idea de transformación simétrica, y coherencia entre actividad y el contenido.

La estructura de la clase en todos casos de la FEUP consiste en tres partes denominadas en la manera diferente, poniendo técnicas de enseñanza (Da y

Em) o métodos de trabajo (Ad, Sh, Ar) con el tiempo planeado a dedicar a cada parte de la clase (Tabla 8.46).

En el caso de la FFPUB, la estructura de la clase consiste en las actividades de diferentes tipos, planeadas desarrollarse según objetivos de la clase y las secuencias del contenido (Tabla 8.46).

	FEUP		FFPUB	
	Ad	Da	Al	Mo
Estructura de la clase	**Parte inicial**: método de trabajo - frontal y dialogo, duración 10 minutos **Parte principal**: método de trabajo – dialogo e individual, duración 25 minutos **Parte final**: método de trabajo- fronysal e individual, duración 5 minutos	**Actividad libre**: técnica de enseñanza frontal y dialogo, duración 5 minutos **Actividad orientada**: técnicas de enseñanza frontal, dialogo individual, duración 30 minutos **Actividad final**: técnicas de enseñanza – frontal e individual, duración 10 minutos	Primer el mestre projectarà la foto en qüestió amb un pp. … A continuació es procedirà a analitzar la forma de la imatge…D'aquesta manera es desenvoluparà el raonament heurístic dels alumnes. Per consolidar els coneixement, es proposarà la seguiment **activitat** i així poder desenvolupar el tema en profunditat durant la pròxima sessió….	Començarem treballant amb els mosaics i mitjançant aquesta observació els nens podran observar diferents polígons. Després s'introduirà el concepte de simetria,donant a cada alumne un full de DINA4, que diem que el dobleguin per la meitat… Després els hi proposarem una **activitat** a la qual haurien de completar una figura que li falta la meitat….

Tabla 8.46. La estructura de la clase en los diseños de las clases

Sobre las consideraciones del propio currículo, encontramos que Da (FEUP) y Mo (FFPUB) en sus planificaciones de la clase establecen las relaciones instructivas a diversas facetas del concepto de simetría. Se trata de estimular la memoria del alumno para "*evocar un conjunto de representaciones visuales, imágenes impresiones o experiencias*" relacionando al concepto de la propiedad simétrica (Vinner 1991). Esto no ocurre en el caso de Ad de FEUP o Al del grupo FFPUB (Tabla 8.47).

	FEUP		FFPUB	
	Ad	Da	Al	Mo
Relaciones instructivas a diversos facetas del concepto de transformación	"empezaré enseñando el triangulo… Intentaré sacar la conclusión que el triangulo T3 hay tres ejes de simetrías, T2 hay un eje de simetría y T1 ni un eje de simetría, por parte de los alumnos. Continuaré el mismo proceso con el cuadrilátero… Al final repetimos el proceso con el pentágono regular…Destacando estas afirmaciones intentare que los alumnos concluyen que: *un polígono es regular cuanto el numero de sus lados es igual al número de ejes de simetría que tiene el pentágono.* Aprobamos este enunciado con el ejemplo de hexágono regular.	Empezaré la clase con una discusión sobre diferentes entornos de nuestra vida cotiDi… Preguntaré si ellos, ya han aprendido hacer bordados… Después de los cuentos por parte de los estudiantes sobre las "técnicas" de hacer bordados, identificamos la repetición como técnica, y esta "técnica" nos ayudara para la construcción de la idea de transformación. Este es momento de empezar la actividad orientada de la clase, y repartiré para cada alumno una hoja blanca con el dibujo de dos rectas perpendiculares … y el modelo (de cartón en la forma de un flor) colorado en los dos lados con diferentes colores – una cara rojo otra cara azul…	Primer el mestre projectarà la foto en qüestió amb un pp.con el objetiu que la imatge pugui ser vista per a tots els alumnes … A continuació es procedirà a analitzar la forma de la imatge…D'aquesta manera es desenvoluparà el raonament heurístic dels alumnes. Per consolidar els coneixement, es proposarà la següent activitat i així poder desenvolupar el tema en profunditat durant la pròxima sessió: busqueu en el vostre entorn mes pròxim, a casa, a l'escola, en l'ambient familiar, etc., exemples on hi ha la simetria….	Començarem treballant amb els mosaics i mitjançant aquesta observació els nens podran observar diferents polígons. Ens agradaria que els alumnes poguessin identificar l' imatge com un mosaic, si no ho fan perquè no coneixien aquesta paraula, el professor donarà pistes perquè entre tots els alumnes puguin construir el significat del mosaic. Desprès s'introduirà el concepte de simetria,donant a cada alumne un full de DINA4, que diem que el dobleguin per la meitat… Desprès els hi proposarem una activitat a la qual haurien de completar una figura que li falta la meitat….

Tabla 8.47. Relaciones instructivas en los diseños de las clases

Sobre consideración de los elementos curriculares encontramos que además de Ad, y Da también Em, Ar y Sh (en la FEUP) y mayoría de los participantes de la FFPUB son capaces de elegir, adaptar y crear materiales y recursos didácticos adecuados para realización de la clase (Tabla 8.48):

	FEUP		FFPUB	
	Ad	Da	Al	Mo
Materiales y recursos didácticos	Repartiré a cada alumno las hojas blancas y los espejos (pequeños)… Repartiré cartas con dibujos de polígonos… los espejos y las hojas blancas para cada alumno.	Repartiré para cada alumno una hoja blanca con el dibujo de dos rectas perpendiculares (con el lápiz para que sea posible borrar después) y el modelo (de cartón en la forma de un flor) colorado en los dos lados con diferentes colores –una cara rojo otra cara azul…	Recursos: imatge o foto dels arcs catenàries d'una finestra del col·legi de les Teresianes, dissenyada per Gaudi.	Desprès s'introduirà el concepte de simetria,donant a cada alumne un full de DINA4, que diem que el dobleguin per la meitat… els hi proposarem una activitat a la qual haurien de completar una figura que li falta la meitat (aquest…. S imatges surten en paper quadriculat però nosaltres portaríem amb paper blanc... A continuació els hi donaríem un mirall a cada nen...

Tabla 8.48. Materiales y recursos en los diseños de las clases

En el ámbito de reconocimiento de registros o formas instruccionales veamos que para los participantes de la FEUP será difícil simular diálogos e imaginar posibilidades aludiendo en gestiones o procurar argumentar y fundamentar decisiones que plantean tomar durante el desarrollo de la clase (Tabla 8.49).

Ellos se limitan en relacionar y valorar representaciones, prefieren desarrollar la actividad haciendo varias preguntas a los alumnos. Los alumnos han de desarrollar habilidades lógicas intentando responder en las preguntas. Pueden explicar características visuales de las simetrías (eje horizontal, vertical, dos ejes, ningún eje, etc.), pueden interpretar las clasificaciones de las letras, los polígonos o otras figuras según ejes de simetrías, y aplicación de simetría en otras figuras (árbol, la cruz,…).

En el caso de la FFPUB, encontramos la capacidad de imaginar el posible diálogo entre el maestro y el alumno. La descripción del dialogo, no la encontramos en el caso de Al, pero sí en el caso de Li, Di, Mc, etc.

	FEUP		FFPUB	
	Ad	Da	Al	Mo
Reconocimiento de registros y formas instruccionales	*Pido que dibujan la recta que significa la posición del espejo – ellos tienen que dibujar los triángulos en las hojas blancas y allí dibujar los ejes de simetría. Normalmente, ellos encuentran una posición y piensan que no hay mas; por esto es mejor dibujar la línea de cada posición, y yo añade la pregunta: "¿Cuantas posibilidades hay de colocar el espejo?"*	*Dibujo dos rectas en la posición perpendicular en la pizarra, colocó el modelo en la cara roja y dibujaré su forma. Pido que lo mismo hacen y alumnos en sus hojas del papel que he dado antes. El lugar donde tienen que colocar el modelo esta signado por un segmento en el papel con el lápiz para que sea posible borrar después.* *Los explicaré a los estudiantes que tienen que colocar el modelo con el pie en los cuatro rincones formados por rectas perpendiculares…. en un orden de diferentes colores… así que colores vecinos no sean los mismos.*	*Una vegada veuen les repeticions, se 'les hi preguntarà si les formes son iguals o no, i ho hauran de justificar. S' ha de potenciar el raonament dels alumnes, i deixar temps per expressar el que pensen. A partir d'aquí, hauran de buscar altres situacions similars que es desenvolupin a l'aula, com per exemple a l'armari, en una taula, la cadira, un llibre obert etc.*	*LA sessió continuarà donant a cada alumne un full de DINA4, que diem que el dobleguin per la meitat. Un cop feta aquesta acció els hi preguntem: que observeu al full?…* *Amb aquesta pregunta esperem que els nens vegin que el full s'ha quedat marcat per la meitat. Si ells responen això, els hi direm que a aquesta marca li anomenarem EIX...*

Tabla 8.49. Registros y formas instruccionales en los diseños de la clase

A partir de todo esto y análisis de las producciones de otros participantes de la investigación, identificamos lo siguiente:

Resultado 8.4.4: *La instrucción de transformación geométrica en educación primaria, para los participantes de ambos grupos se caracteriza por la introducción con actividades basadas en un contexto conocido para los alumnos, luego se pase a las actividades principales que darán más posibilidades de construir detalladamente el concepto de transformación y sus propiedades y al final a las actividades semejantes con las actividades desarrolladas y que servirán para verificación y profundización de conocimientos sobre transformación. La diferencia entre el grupo de FEUP y de FFPUB consiste en el hecho de que los futuros maestros de FEUP plantean un papel destacado del maestro en que los alumnos harán cosas según el maestro ha hecho, mientras que los de FFPUB los dan más libertad a los alumnos para que hagan actividades ellos mismos.*

8.5 SOBRE EL CONTENIDO PROFESIONAL EN EL COMPARTAMIENTO ACTITUDINAL EN LA PF

En este apartado presentamos el análisis del contenido profesional en el comportamiento actitudinal de los futuros profesores de primaria que consiste en el análisis de las capacidades sobre asúnción de la actividad profesional y sobre las actitudes críticas y reflexivas en el proceso de enseñanza de las transformaciones en la Educación Primaria.

Este análisis se hace principalmente codificando las categorías correspondientes sobre los diseños de la planificación de la clase, que los participantes de la investigación, como futuros profesores de primaria plantean realizar en su futuro, ante una propuesta común pero abierta..

8.5.1. Futuros profesores y la asúnción de la actividad profesional en la PF

En acuerdo con la expresado en las categorías de análisis que hemos elaborado, identificamos, confirmamos y describimos los componentes de asúnción de la actividad de enseñar las transformaciones geométricas en primaria. Estos componentes los identificamos mediante indicadores como *manifestaciones del futuro profesor con la flexibilidad y implicación en su actividad* como maestro(CAa1)*, identificación de posiciones relevantes y respuestas ante la motivación y comprensión de nuevas ideas de ser maestro de primaria (CAa2), reconocimiento de valor dialectico de la acción-realización (CAa3),* y *implicación reflexiva profesional (CAa4).* Los participantes de la investigación muestran diferentes grados de consideración de la importancia de estos aspectos en su actividad profesional. Identificamos tres grados de capacidad del futuro profesor sobre la asunción de la actividad profesional: A – nivel alto, B - nivel intermedio, y C – nivel bajo.

En forma de tabla 8.50, presentamos los resultados de clasificación de las producciones de los participantes de ambas facultades, según grados de consideración de asunción de la actividad profesional.

Grados de la consideración de asunsión de la actividad profesional	Estud. de FEUP	Estud. de FFPUB
A- Explicita actitudes científicas de la actividad propuesta, reconoce y acepta nuevos conocimientos didácticas, identifica y reconoce el valor de la acción docente, incorpora y presenta experiencias	Em, Ad, Da Dr, Fit, Sh	Ma, So, Mo, Ol, Mc
B- Muestra elementos de ilusión buscando nuevas ideas en su actividad, reconocimiento explicito del protagonismo del alumno, reconocimiento de relaciones entre tareas anteriores y posteriores, y evoca valores de formación no estrictamente matemática.	Ar , As, Fi, Pe, Re, Se, Xh, Vj	Yo, Al, Di, Es, Jo, Li, La, Na
C- Muestra distancia y enfriamiento educativo, está buscando posicionamiento en el discurso educativo, tratando de hacer un discurso de entendimiento y explicita reflexiones simplemente y de manera descriptiva.	-	-

Tabla 8.50. Clasificación de las respuestas sobre asúnción de la actividad profesional

A partir de lo observado, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.5.1: *Seis (o 42%) de los participantes de la FEUP y cinco (o 38%) participantes del grupo FFPUB muestran un grado alto de asúnción de la actividad profesional mostrando actitudes científicas, aceptando nuevas conocimientos didácticos, el valor de la acción docente y incorporando elementos propios y otras experiencias en las actividades propuestas. Ocho (o 58%) de los participantes de la FEUP u ocho (o 62%) del grupo FFPUB se encuentran en el grado medio de asúnción de la actividad profesional, buscando nuevas ideas, reconociendo el protagonismo del alumnado, la relación entre tareas anteriores y posteriores y evocando valores de formación no estrictamente matemática.*

Mostramos a continuación de forma cualitativa elementos ilustrativos del resultado anterior, encontrados durante el análisis de los diseños de la clase sobre transformaciones geométricas en la Educación Primaria, hechas por los participantes de la investigación.

Como ilustración del grado alto de asunción de la actividad profesional en el grupo de FEUP, presentamos el caso de Em. En su diseño de la clase sobre transformaciones geométricas, el valora y reconoce el papel de la acción docente en la clase, poniendo que, *"con el objetivo que la mayoría de los alumnos entienden con facilidad la actividad que quiero desarrollar, primero voy a mostrar un ejemplo para todos."*

(Em, PF, DC)

Em en su diseño de la clase también destaca actitudes científicas en el desarrollo de la actividad, aunque esto lo hace de manera simple, planteado la actividad de identificar el eje de simetría mediante la posición del espejo que refleja una parte de la letra para que se obtenga la entera, sin olvidar la propiedad de igual de distancia respecto el eje:

"*Tomaré una tAr con la letra A (mi tarjeta será más grande que la de los alumnos). Colocaré en la pizarra, empiezo "buscar" la posición donde colocar el espejo para que se vea todo la letra A, siempre dialogando con los alumnos. El espejo lo desplazaré en diferentes posiciones hasta que "obtenga" la letra A entera. Una vez encontrado la posición del espejo, dibujare la línea... Espero que mayoría no recuerden que se llama "eje de simetría". Explicaré que se llama eje de simetría de la letra A. Explicare que es la propiedad simétrica de una figura, explicando que hay distancias iguales respecto al eje."*

(Em, PF, DC)

Em ha incorporado con éxito la experiencia sobre la simetría de las letras tratadas en la sesión SI, reconociendo nuevas conocimientos didácticos sobre la enseñanza de transformaciones en la educación primaria.

Además de Em, y Ad, Da, Dr, Fit, Sh, y Vj del grupo FEUP, muestran un grado alto de asúncion de la actividad profesional sobre la enseñanza de las transformaciones en Primaria. Es importante mencionar la incorporación exitosa de las experiencias sobre bordados - el caso de Da, sobre las puertas - el caso de Fi y sobre las figuras geométricas por parte de Ad.

En el grupo de FFPUB, identificamos el caso de Ma y So como ilustración del grado alto de asunción de la actividad profesional sobre enseñanza de las transformaciones geométricas en la Educación Primaria. El doblado como una experiencia concreta no es suficiente para el desarrollo de la abstracción en la comprensión de la transformación geométrica. Con este fin, Ma y So reconocen nuevos conocimientos didácticos proponiendo situaciones donde se hace posible desarrollar la abstracción como actitud científica de la actividad:

"*... creiem que als nenes els hi fastidiaría no poder tenir la imatge dels edificis al seu abast per poder doblegar-ho i comprovar so son*

> *veritablement simètrics. Així dons, amb aquest exercici els farem entendre que els eixos de simetria no tan sols estan en las figures que surten en paper, sinó que també existeixen en les figures reals. És una manera d'aportar les matemàtiques a la realitat i a l'art*"“
>
> (Ma y So, PF, DC)

Como se puede observar, Ma y So, en su diseño de la clase muestran reconocimiento del valor de la acción docente, explicando momentos cuando se plantea problema, porque se plantea, cuando se hacen las preguntas a los alumnos, justificando que todo esto tiene el fin del aprendizaje de transformación por parte de los alumnos:

> *"Deixant de banda els eixos de simetria en els figures reals, els centraríem a provocar problemes matemàtics tot buscant eixos de simetria en els figures geomètriques. Plantejaríem una sèrie de qüestions, mostraríem les figures geomètriques sense eixos i posteriorment, els faríem raonar quants eixos de simetria té cada figura. Entre les figures proposades peó, algunes no tenen eixos de simetria i per tant, els hi preguntaríem perquè creuen que es així. Amb això provocaríem conflicte, la cual cosa afovarira el seu aprenentatge.... "*
>
> *(Ma y So, PF, DC)*

Ma y So han incorporado sus experiencias de identificación de los ejes de simetría en las figuras geométricas, y les parece como un buen ejemplo plantear figuras que tienen un eje, dos o más y las figuras que no tienen ni un eje de simetría. En ello se introduce la clasificación de las transformaciones.

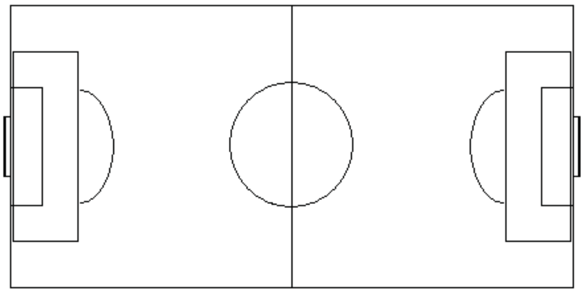
El grado medio alto de asunción de actividad profesional en el grupo de FFPUB lo muestran y Mo, Ol y Mc.

Como ejemplo de grado medio de asunción de la actividad profesional en el grupo de FEUP, mostramos el caso de Fi. En su diseño de la clase, Fi tiene la buena idea de incorporar el fenómeno de apertura de diferentes puertas para enseñar la traslación y rotación, pero él sólo muestra elementos de ilusión buscando nuevas ideas en el proceso de enseñanza de transformaciones:

> *"Mostrare la imagen de una puerta que se abre rotando. Planteare preguntas para que los alumnos entienden que se trata de rotación....Luego mostrare imágenes de la puerta que se abre desplazando. Hare las preguntas a los alumnos con el fin de conseguir que ellos comprenden la traslación..."*
>
> *(Fi, PF, DC)*

No está claro qué preguntas va a dirigir a los alumnos sobre la apertura de las puertas, no está claro en qué consiste la comprensión de traslación o rotación que Fi piensa en su diseño de la clase.

Como ejemplo típico del grupo de FFPUB que muestra el grado medio de asunción de la actividad profesional es el caso de Yo. Ella, proponiendo la actividad titulada "*simetría en la escuela*" propone:

> *"la maestra entrega a cada alumno una hoja con una pista de futbol como la de la imagen*
>
> 
>
> *y les hace una serie de preguntas."*

(Yo, PF, DC)

La estudiante Yo, no muestra la capacidad de explicar sobre qué tipo de preguntas va a dirigir a los alumnos, mostrando la inseguridad de justificar las razones de esa explicación. Ella muestra elementos de ilusión buscando nuevas ideas en su actividad cuando plantea la siguiente acción:

> "*saldremos a la pista del patio y haremos dos equipos. El equipo A estará a un lado de la pista y el equipo B al lado contrario del A, en la pista.* ***Con tizas de colores tendréis que marcar la simetría que hay****. Recordad lo que hemos dicho que es simetría….(la maestra recuerda el concepto a los alumnos brevemente)*"

(Yo, PF, DC)

Pero, ¿cómo es posible marcar la simetría con tizas? A pesar del problema de "*…marcar la simetría que hay…*" en la pista, proponiendo por parte de maestra, vemos que Yo tiene una actitud no tan científica sobre la actividad, y en consecuencia, los alumnos van a tener la dificultad de comprender qué quiere exactamente la maestra: *¿marcar la correspondencia simétrica entre elementos de la pista o marcar el eje de simetrías encontradas en la pista*? Los alumnos marcarán los ejes de simetría que encuentran en la pista y de esta manera confunden el eje de simetría con el concepto de transformación simétrica. Por este razón pensamos que Yo, entonces se encuentra en la fase de búsqueda de nuevas ideas sobre la actividad profesional proponiendo situaciones como es el caso que pone en su diseño, y destaca el protagonismo explicito del alumno en el desarrollo de la actividad.

No hemos identificado ningún caso de grado bajo de asunción de la actividad profesional. Algunos elementos de bajo grado se pueden encontrar en el caso de Al, Es, Li y Di (FFPUB) y en el caso de As, Re y Se (FEUP), que expresan a veces sus reflexiones de manera simple y descriptiva.

Resultado 8.5.2. *Los participantes de los dos grupos utilizan con éxito su experiencia en el planteamiento de su clase sobre transformaciones geométricas. Lo que es característico para el grupo de FEUP es que reconocen y favorecen la acción docente en la clase, mientras el grupo de FFPUB reconocen y dan valor explicito al protagonismo del alumno en la clase de primaria.*

8.5.2. Las actitudes críticas y reflexivas en la PF

El componente del contenido profesional en el comportamiento actitudinal contiene las actitudes críticas y reflexivas. Este componente consideramos que juega un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de transformaciones geométricas en la Educación Primaria.

Las actividades de la Prueba Final incluyendo los diseños de la planificación de la clase no nos ofrecen datos suficientes sobre las actitudes críticas y reflexivas en el contenido profesional docente y en el proceso de desarrollo profesional, debido a que no hemos conseguido obtener los datos de la realización de las clases diseñadas por parte de los participantes de la investigación, y no hemos conseguido hacer una análisis posterior de la realización de las clases realizadas.

Sobre la consideración de las actitudes críticas y reflexivas analizamos y ejemplificamos momentos de esta componente principalmente en los diseños de la clase de los participantes de la PF. El componente de actitudes críticas y reflexivas (CAr) lo identificamos a través de los aspectos: el *papel social de la* *acción de formación (CAr1), juicios hacia la decisión de formación (CAr2)* y *la colaboración y conciencia hacia la orientación teórica (CAr3).*

Identificamos tres grados de consideración de componente sobre las actitudes críticas y reflexivas en su actividad profesional:

A – Los estudiantes que muestran incorporación en su discurso preocupación con la enseñanza en un aspecto más amplio y significativo.

B – Los estudiantes que muestran explicación de elementos de acciones profesionales en su propia práctica.

C – Las estudiantes que incorporan los ideas de otros en la forma general.

En forma de tabla 8.49, presentamos los resultados de clasificación de las consideraciones de los participantes de ambos facultades, según grados de consideración de algunos aspectos sobre las actitudes críticas y reflexivas en su actividad profesional.

Grados de la consideración de los actitudes críticas y reflexivas en la actividad profesional	Estudiantes FEUP	Estudiantes FFPUB
– Muestra incorporar en su discurso preocupación con la enseñanza en un aspecto más amplio que una atención específica solamente por su propia práctica.	Em, Ad, Da, Fit, Sh, Ar	Ma, So, Mo Ol, Mc
– Muestra explicación de elementos de acciones profesionales en su propia práctica.	Pe, Re, Xh, Vj, Dr,	Di, Es, Li La, Na
– Incorporación de los ideas de otros en la forma general	Fi, Se, As	Al, Jo, Yo

Tabla 8.49. Clasificación sobre la consideración de las actitudes críticas y reflexivas en la actividad profesional

A partir del análisis de los diseños de la planificación de una clase, y el análisis del componente estratégico en la formación de profesores, identificamos el resultado siguiente:

Resultado 8.5.3: *La mayoría de los participantes de ambos grupos de las facultades muestra un grado medio alto de preocupación sobre la enseñanza de las transformaciones en un aspecto más amplio que una atención específica solamente por su propia práctica. Pocos participantes (a tres participantes del ambos grupos) muestran soóo incorporación de los ideas de otros en la forma general.*

A partir del análisis de otros componentes del conocimiento didáctico se ve claro que Em, Ad, Da, Fit, Sh y Ar del grupo FEUP, y Ma, So, Mo, Ol y Mc del grupo FFPUB, muestran una preocupación sobre la enseñanza de transformaciones de manera más amplia proponiendo actividades ricas, utilizando materiales y recursos didácticos adecuados y empleando un discurso apropiado a la enseñanza de transformaciones en Primaria.

Los estudiantes Pe, Re, Xh, Vj y Dr del grupo FEUP, y Di, Es, Li, La y Na del grupo FFPUB muestran un grado medio de actitudes críticas y reflexivas. Ellos principalmente dan explicaciones y justificaciones de sus acciones profesionales que plantean en su diseño de la clase, pero no muestran una enseñanza profunda (amplia) de transformaciones geométricas en Primaria.

Otros estudiantes en ambos grupos muestran sólo incorporación de las ideas de otros en forma general sin mostrar las explicaciones y/o justificaciones de sus acciones `planteadas en el diseño de la planificación de la clase.