UNIVERSITAT DE BARCELONA

APRENDER A ENSEÑAR TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN PRIMARIA DESDE UNA PERSPECTIVA CULTURAL

-Tesis Doctoral-

Presentada por:

Xhevdet THAQI

Realizada bajo dirección de:

Nuria ROSICH y Joaquim GIMENEZ

Barcelona, Marzo de 2009

PARTE III

CONCLUSIONES, IMPLICACIONES, ANEXOS Y BIBLIOGRAFIA

Capítulo 9.

Sumario, conclusiones e implicaciones del estudio

9.1. Introducción

En este estudio se han analizado los elementos del proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en la Educación Primaria: los conocimientos del contenido matemático y del contenido didáctico. A partir del estudio del conocimiento del contenido matemático hemos podido conocer el significado del concepto de transformación, así como relaciones y jerarquías, el concepto de transformación como proceso o cambio y cómo los futuros profesores comunican y razonan sus ideas sobre este concepto. El estudio del conocimiento didáctico nos ha permitido conocer los conocimientos de los estudiantes sobre la enseñanza - aprendizaje de las transformaciones geométricas durante el mismo proceso, para investigar las capacidades de los futuros profesores sobre enseñanza - aprendizaje de transformaciones en Primaria.

En este último capítulo presentamos las conclusiones del estudio: primero hacemos un sumario del conjunto de resultados obtenidos en diversos capítulos dedicados a los aspectos socioculturales de ambos países, luego ponemos los resultados del análisis del tratamiento de la transformación geométrica en la práctica de formación de profesores y al final la síntesis de las conclusiones fundamentales del trabajo sobre el proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas.

9.2. Sumario general de los resultados sobre aspectos socioculturales de la educación en Kosova y Catalunya

A partir del análisis de los elementos curriculares en la formación de los futuros profesores de primaria en Catalunya y Kosova en el ámbito geométrico, y especialmente en el tratamiento de las transformaciones geométricas (capítulo 2), hemos identificado los aspectos socioculturales que intervienen en la formación de futuros profesores de Primaria en ambos países. También hemos analizado el contexto de la investigación sobre los factores que determinan el proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria, asimismo hemos estudiado los elementos de la educación, como es el sistema educativo en ambos países, Kosova y Catalunya, los currículos, los libros de texto y cuál es la formación de profesores de primaria.

9.2.1. Sobre los elementos curriculares de la educación

Sobre este aspecto podemos concluir que se ha encontrado:

A. Tanto en Catalunya como en Kosova, en ***el sistema educativo*** actual está planteada la educación obligatoria elemental, dentro de la cual se encuentra la Educación Primaria.

Mientras que en Kosova la duración de la Educación Primaria va de los 6 años hasta 11 años, en Catalunya va desde los 6 hasta 12. Para este nivel de escolarización, los maestros se forman en las Facultades de Formación de Profesores (Catalunya) y en la Facultad de Educación (Kosova).

Antes, los maestros se formaban en las Escuelas Normales en ambos países, aunque en diferentes momentos estos centros de formación de profesores se transformaron en Facultades de Universidad: las Escuelas Normales se convirtieron en las Escuelas Universitarias en el año 1983 en Catalunya, y en el año 1974 en Kosova, y éstas se transforman en las Facultades de Formación de Profesores (o en las Facultades de las Ciencias de Educación) en el año 1990 en Catalunya, y en Kosova en la Facultad de Educación en el año 2002 (figura 9.1).

Duración	Catalunya		Kosova	
Educación Primaria	Hasta el año 1991	5 años	Hasta el año 2002	4 años
	A partir de 1991	6 años	A partir de 2002	5 años
Centros de formación de profesores de Primaria	Hasta 1983	Escuela Normal	Hasta 1974	Escuela Normal
	1983-1990	Escuela Universitaria de Formación de Profesores	1974-2002	Escuela Universitaria Pedagógica
	Desde 1990	Facultad de Formación de Profesores	Desde 2002	Facultad de Educación

Figura 9.1. Escolarización Primaria y formación de profesores

A partir de los años ’90 en la ***educación matemática*** en Catalunya/España aparecen las tendencias de globalización de los currículos, donde se puede ver la valorización de la construcción sociocultural, la representación y los recursos tecnológicos en la construcción de conocimientos, considerando la idea del análisis didáctico y del aprendizaje como proceso. Mientras que a partir del año 2002 en la educación matemática de Primaria en Kosova se plantea la incorporación de experiencias internacionales en la educación matemática tradicional del país, se valora el desarrollo personal, las relaciones interpersonales, la espiritualidad (religioso, étnico, filosófico), los valores sociales y culturales y los recursos tecnológicos; considerando las diferencias en las maneras de comprensión de conocimiento matemático.

La finalidad de ***la educación Primaria*** se describe de forma parecida en ambos países en el momento de la investigación: En Catalunya se considera que la Educación Primaria *hace posible la adquisición de los elementos básicos culturales de escritura y el cálculo, además de otros conocimientos, así como una progresiva autonomía de la acción en su entorno.* En Kosova la Educación Primaria *permite que los alumnos conozcan mejor su entorno y contempla la formación de ciudadanos con capacidades, actitudes y valores para aplicarlos en la sociedad*.

En el ***currículo escolar de Primaria*** en Catalunya *la enseñanza de las matemáticas se considera que contribuye a la adquisición de un conjunto de instrumentos para explorar la realidad.* En Kosova, *la enseñanza de las matemáticas hace más énfasis en el desarrollo de las capacidades, como* *clasificar, organizar y procesar características del mundo para adquirir el nivel abstracto de utilización de los símbolos y operaciones matemáticas*.

Los **contenidos geométricos** en general en los currículos escolares de la educación Primaria tienen un lugar importante dentro del área *matemática*. Mientras que en Catalunya el aprendizaje de las matemáticas en general y de la geometría en particular se consideran los nociones básicas, más intuitivas sobre el aprendizaje constructivo de los alumnos, en Kosova se considera que un maestro bien cualificado es capaz de desarrollar el aprendizaje geométrico con toda su complejidad. Dentro del contenido geométrico están planteadas las transformaciones geométricas. La enseñanza/aprendizaje de transformaciones geométricas en los currículos escolares de Catalunya y Kosova plantea lo siguiente:

- La idea estática de transformación geométrica identificando diferentes tipos de isometrías (en Kosova y Catalunya) y proyecciones (sólo en Catalunya),
- Las relaciones entre isometrías y propiedades identificando, reconociendo y estableciendo la relación (transformación) entre dos figuras dadas, construyendo la figura congruente con la figura dada en relación de una isometría (Kosova), composición y descomposición de figuras(Catalunya),
- La transformación como una operación, realizando transformaciones de figuras de forma manipulativa (Catalunya), construyendo, describiendo y clasificando diferentes cambios de posiciones (Kosova), y reconocimiento del objeto que ha generado una sombra determinada (Catalunya)
- El razonamiento en el proceso de creación del concepto de transformación geométrica, demostrando la verdad de las conclusiones como las regularidades de las figuras a partir de las simetrías (Kosova) o del reconocimiento de los giros y de las simetrías complejas (Catalunya)
- El uso del contexto en la construcción del significado de transformación, utilizando modelos y situaciones del entorno (en ambos países).

La enseñanza de proyecciones se plantea en el currículo Catalán, mientras que no se plantea en el currículo central (España) y en el currículo Kosovar. Como consecuencia de esto, podemos explicar el hecho de que los participantes de la investigación del grupo FEUP muestran un grado más alto de conocimientos iníciales sobre proyecciones que los del grupo FEUP.

Las actividades sobre las transformaciones geométricas aparecen en los ***libros de texto*** de Primaria en ambos países. La idea del objeto de simetría es la transformación más aludida en los libros de texto de primaria en ambos países aunque en los libros de texto de primer ciclo nunca se alude a la simetría explícitamente como transformación. Se introduce un poco y la rotación y la traslación. En Catalunya se considera también la perspectiva.

La principal diferencia entre estos dos países es que en los libros de texto del primer ciclo catalán se inicia el trabajo con el uso de un recurso manipulativo mientras en los libros de texto kosovares, se acentúa el hecho de "*construir el simétrico*". Parece pues que se desea distinguir entre construir y transformar.

En los libros del segundo ciclo de ambos países se habla de transformar. Las tareas suelen ser más auto explicativas en Catalunya. Mientras en Catalunya se acentúan los procesos de visualización, en Kosovo se acentúa el uso de términos matemáticos. En los materiales kosovares se analizan inmediatamente propiedades, y en cambió en los catalanes se reconocen procesos.

En los libros de texto de tercer ciclo se muestra un tratamiento de las propiedades de la transformación con representación en coordenadas cartesianas (Kosova) con formato cuadriculado, mientras en los de Catalunya con la visualización. Por otro lado, las actividades de tercer ciclo en el caso de Kosova son más ricas de contenido que en Catalunya.

En ambos casos se alude al papel cuadriculado como forma más simple de ejecución. Se privilegia los contextos de acción por encima de la observación de lo real-social. Los contextos reales están más presentes en la publicación catalana, que utiliza un lenguaje más coloquial en muchas actividades. La búsqueda de ejes de simetría es el elemento común más evidente. En el texto catalán se pone un mayor énfasis en aspectos que relacionan el contenido con la realidad.

En general podemos concluir que las actividades que plantean los libros de texto de matemáticas para la educación primaria no dan la posibilidad que los alumnos comprendan y tengan claro el concepto de transformación geométrica. Para que sea posible esto, es necesario un conocimiento profesional del maestro de primaria, que no siempre se consigue.

El nivel bajo de conocimientos sobre transformaciones geométricas en la Prueba Inicial muestra el hecho que a los participantes de la investigación les faltan conocimientos sobre transformaciones desde la educación primaria.

En forma de tabla 9.2., mostramos las diferencias y semejanzas de los aspectos socioculturales que intervienen en la formación de futuros profesores de primaria en Catalunya y Kosova.

	Catalunya	Kosova
La educación matemática	- Tendencias de globalización de los currículos, - Valorización de construcción sociocultural, - La representación y recursos tecnológicos en la construcción de conocimientos - Considerando la idea de análisis didáctico y aprendizaje como proceso;	- La incorporación de experiencias internacionales - Valorización del desarrollo personal, relaciones interpersonales, la espiritualidad (religioso, étnico, filosófico), - Incorporación de valores sociales y culturales y los recursos tecnológicos; - Consideración de las diferencias en las maneras de comprensión de conocimiento matemático.
La educación Primaria	- Hace posible la adquisición de los elementos básicos culturales de escritura y calculo, - Posibilita una progresiva autonomía de la acción en su entorno	- Permite que los alumnos conozcan mejor su entorno - Formación de ciudadanos con capacidades, actitudes y valores de aplicar las conocimientos en la sociedad.
El currículo escolar de Primaria	- la enseñanza de matemáticas se considera que contribuye a la adquisición de un conjunto de instrumentos para explorar la realidad.	- la enseñanza de matemáticas hace énfasis en el desarrollo de las capacidades de clasificar, organizar y procesar características del mundo para adquirir el nivel abstracto símbolos y operaciones matemáticas.

<table>
<tr><td rowspan="10">Los contenidos geométricos y las transformaciones geométricas</td><td colspan="2">- Los contenidos geométricos están dentro del área matemática</td></tr>
<tr><td>- Se consideran los nociones básicas, mas intuitivas sobre el aprendizaje constructivo de los alumnos</td><td>- Un maestro bien cualificado es capaz de desarrollar el aprendizaje geométrico con todo su complejidad</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Idea estática de transformación geométrica
- Identificación de diferentes tipos de isometrías</td></tr>
<tr><td>- Proyecciones, sombras</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Relación entre dos figuras dados</td></tr>
<tr><td>- Composición y descomposición de una isometría</td><td>- Construir la figura dada en relación de una isometría</td></tr>
<tr><td>- Transformación como operación manipulativa</td><td>- Transformación como un cambio de posición</td></tr>
<tr><td>- Reconocimiento de isometrías complejas</td><td>- Demostración con las regularidades</td></tr>
<tr><td colspan="2">- El uso de contexto en la construcción del significado de transformación, utilizando modelos y situaciones del entorno</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="9">Libros de textos de Primaria</td><td colspan="2">- Simetría, Propiedad simétrica, Traslación, Rotación</td></tr>
<tr><td>- perspectiva</td><td>-</td></tr>
<tr><td>- Se inicia con el uso del recurso manipulativo (I ciclo)</td><td>- Se inicia construyendo lo simétrico (I ciclo)</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Introduce el concepto de transformar (II Ciclo)</td></tr>
<tr><td>- Reconocimiento del proceso
- Uso de visualización</td><td>- Análisis de las propiedades
- Uso de los términos matemáticos</td></tr>
<tr><td>- El tratamiento de propiedades de transformación con visualización</td><td>- El tratamiento de propiedades de transformación en coordenadas cartesianas</td></tr>
<tr><td colspan="2">- El papel cuadriculado como forma de ejecución
- Privilegio de los contexto de acción</td></tr>
<tr><td>- Relación del contenido con la realidad</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 9.2.Resumen de los aspectos socioculturales de la educación en Catalunya y Kosova

9.2.2. Tratamiento del contenido matemático en la formación de profesores de primaria y en el diseño

En el ámbito de la ***formación de profesores***, en Catalunya tenemos las Facultades de Formación de profesores de Primaria (o Facultades de Educación) y en Kosova la Facultad de Educación. El curriculum de formación de maestros que se da en estas facultades (Catalunya) está compuesto por seis semestres mientras que en Kosova por ocho.

El programa de formación matemática de profesores de Primaria en Catalunya corresponde a las dos asignaturas de Didáctica de las Matemáticas I y II o bien una asignatura para la especialidad de Educación Física y Lengua Extranjera, mientras que el programa de formación matemática de profesores de Primaria en Kosova corresponde a las cinco asignaturas de Matemática elemental I y II, Matemática I y II y la asignatura Metodología de formación de conceptos matemáticos.

9.3. Tratamiento de la transformación geométrica en la formación de profesores de primaria

Para responder al objetivo 2 de la investigación hemos elaborado el tratamiento del contenido matemático de transformación geométrica en la formación de los futuros profesores de primaria. Referido al del caso de Kosova hemos considerado el programa de la Facultad de Educación de la Universidad de Prishtina y sobre el caso de Catalunya/España al programa presentado dentro del proyecto EDUMAT *Matemáticas y su Didáctica para maestros* planteada como material para estudiantes de Formación de Profesores de Primaria en dos semestres académicos (Godino y Ruiz, 2003).

El programa de geometría en FEUP, trata por la enseñanza *formativa,* y plantea los contenidos como un conjunto de conocimientos y procedimientos. Asimismo, se procura que se resalten los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento geométrico, y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final.

El estudio de la geometría en este programa tiene por fin el conocimiento matemático, que según la postura calificada como *formalista* se puede entender como "*las reglas por las cuales de unas cuantas afirmaciones se siguen lógicamente otras*" (Guzmán 1998). La metodología planteada en el programa FEUP no está pensando en la posibilidad de adaptar los conocimientos a la enseñanza de primaria, no consiste en lograr el transporte de muchos conocimientos de un nivel a niveles más bajos y aún incluir en los contenidos novedades que se vayan creando en la escuela.

En el programa de EDUMAT el objetivo principal de la enseñanza de las transformaciones geometría es el saber ***informativo.*** La importancia de las transformaciones se basa en la idea que una geometría inmóvil ha producido una limitación en cuanto a la generación de imágenes mentales, y es necesario cambiar esta perspectiva e introducir conceptos, esquemas, material, etc., que potencien una visión de la geometría más dinámica donde las figuras y las formas en el espacio se muevan y se transformen. La formalización y la estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no ha de ser el punto de partida, sino más bien la meta de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales que permitan interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad. Las actividades sobre transformaciones geométricas hacen repensar el contenido matemático.

En general se prefiere diseñar actividades en las que se aprecie la presencia de la simetría en la naturaleza así como sus elementos de identificación conceptual y procedimental; diseñar entornos interactivos y dinámicos de aprendizaje de las transformaciones mediante programas de dibujo por ordenador; relacionar las producciones correspondientes con diversos materiales manipulativos, descomponer y componer, buscar regularidades, pegar y dibujar.

Comparando dichos programas, podemos decir que en el programa de EDUMAT el objetivo principal de la enseñanza de las transformaciones geometría es el saber **informativo,** mientras que el programa de geometría en el FEUP (Kosova), apuesta por la enseñanza **formativa**, destinado a cultivar y practicar el razonamiento lógico. La tradición formal de estudiar la geometría desde un punto de vista euclidiano (con algunas observaciones no euclidianas) en los países del Este de Europa, donde está Kosova, hace que la geometría en Kosova tenga una relevancia mayor en cuanto al contenido matemático a ser tratado por los maestros.

Nosotros consideramos que ninguno de los dos extremos es bueno para una formación equilibrada entre pensamiento y acción, o entre el saber culto y el saber práctico. Una buena enseñanza debe balancear adecuadamente las dos formas de la matemática, pura y aplicada. En ambos centros de formación de futuros profesores no se plantea un tratamiento realista del papel que juegan las proyecciones, sombras, y deformaciones.

Este fue un punto de partida ante el diseño de la práctica de formación sobre aprender a enseñar las transformaciones en nuestra investigación.

En la formación de profesores en Kosova domina la preocupación por la matemática por encima de lo didáctico-profesional. Las dificultades en apropiarse los conocimientos matemáticas en general y de la geometría en particular son múltiples y diversas. Los análisis que se realizan en ambos países coinciden con el bajo nivel matemático de los estudiantes que entran en la Facultad, y coinciden también en el hecho de que la actitud ante la geometría no mejora.

9.3.1. Situación inicial del profesorado. Implicación para el diseño

En la respuesta de la segunda parte del objetivo 2, buscamos identificar la situación inicial de conocimientos de futuros profesores sobre el aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria. Por esto, a partir de lo observado de la Prueba Inicial se presentan los resultados según los componentes del proceso de aprender a enseñar las transformaciones: el contenido matemático y lo didáctico.

9.3.1.1. Situación inicial sobre el contenido matemático

Mostramos los resultados sobre: objeto transformación, terminología y tipos; relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica; proceso de transformación; y razonamiento y comunicación con transformación geométrica.

I. **Sobre el objeto transformación, terminología y tipos**. Al principio del proceso de la formación profesional de los futuros profesores sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en primaria, encontramos los estudiantes con un grado bajo del 46% en el FEUP y 64% en el FFPUB; y con un grado medio de 64% en el FEUP y 46% en el FFPUB de conocimiento sobre el objeto transformación, terminología y tipos. En ambos grupos no encontramos estudiantes con un alto grado de estos conocimientos. En general, la mayoría de los estudiantes no muestran una imagen conceptual completa de la transformación geométrica.

El significado de transformación para los participantes de la FEUP se identifica como *repetición o movimiento* que presenta la relación entre dos conjuntos de puntos o otros elementos en cuestión; mientras para los participantes de la FFPUB la transformación significa el sentido común de la palabra presentando como relación entre dos conjuntos *el objeto y su estado* con *el cambio* de alguna característica.

Una parte importante de los estudiantes en ambos grupos alude a la repetición como fenómeno. Encontramos estudiantes que muestran confusiones terminológicas. Pocos estudiantes reconocen explícitamente los elementos que caracterizan (propiedades) cada tipo de isometría.

En muchos casos, en ambos países, se reconocen ejemplos asociados a las semejanzas, sin que se muestren todas sus características. Y sólo alguno evoca la semejanza como aplicación de puntos del plano. La semejanza se interpreta en FEUP como diferencia de tamaño, conservando la forma. No es así en FFPUB, donde la semejanza fundamentalmente se reduce a lo parecido.

Buena parte de los estudiantes no reconocen las características de la proyección como transformación. Las representaciones y visualizaciones de las transformaciones no isométricas no parecen ser suficientes para reconocer dichas transformaciones por los estudiantes de FEUP, mientras encontramos respuestas más consolidadas en FFPUB.

Mediante la tabla, mostramos las diferencias encontradas entre ambos grupos:

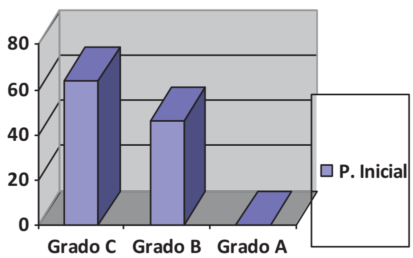
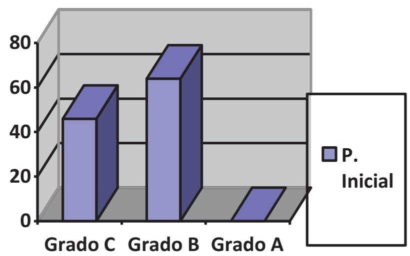
	Catalunya	Kosova
El grado de conocimiento		
El significado de transformacion	○ El sentido comun de la palabra o cambio de alguna caracteristica ○ Relacion entre el objeto y su estado.	○ Repeticion o movimiento ○ Relacion entre dos conjuntos de puntos
Las propiedades	○ Pocos reconocen explicitamente las propiedades de cada tipo de isometria	
Semejanza (homotecia)	○ Semejanza=parecido	○ Un cambio de tamaño conservando la forma
proyeciones	○ Reconocimiento de proyecciones con visualizacion	○ Ni visualizacion ni representacion no ayuda a reconocer la proyecion

Tabla 9.3. Situacion inicial sobre el objeto transformacion, terminologia y tipos

<u>II. Sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación.</u> En principio no identificamos ninguno de los participantes de la investigación en ambos grupos con el grado alto de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación. Sólo un 21% en la FEUP y 38% en la FFPUB muestran un grado medio de conocimientos sobre las relaciones y jerarquías en

la noción de transformación, otros muestran un grado bajo de conocimientos. En general se da un grado bajo de conocimientos reflejando en:

- no asociación a las distintas transformaciones de las propiedades correspondientes como características que las distinguen y relacionan,
- no muestran bases suficientes para reconocer la estructura de grupo de las isometrías que dejan invariante una figura, y
- no perciben buenas relaciones entre transformaciones distintas como jerarquía conceptual.

III. Sobre transformación como proceso. Los resultados de la Prueba Inicial muestran que no hay estudiantes con un grado alto de conocimiento sobre los procesos dinámicos de transformación. El caso más explicitado en ambos grupos es la rotación.

En las explicaciones correspondientes identificamos que los rasgos descriptivos son predominantes.

Identificamos que las explicaciones del grupo de Kosovo de grado intermedio, son más precisas matemáticamente que las correspondientes del grupo de Barcelona. Para los estudiantes de Kosova transformar significa un cambio no bien definido o un desplazamiento sin explicación adecuada. Otros identifican la rotación y la traslación como desplazamiento, pero no como una transformación del conjunto de puntos. La isometría se comprende como cambio de posición, son capaces de realizar traslaciones y rotaciones con materiales concretos, mientras realicen transformación simétrica de figuras utilizando el proceso de plegado o doblado.

Los estudiantes de grado medio del grupo FFPUB interpretan el proceso de transformación diferente del movimiento. Esta interpretación de la diferencia entre el movimiento y la transformación nos ayuda a entender que la transformación es un proceso más amplio que el movimiento. No es posible interpretar como movimiento las transformaciones isoperimétricas de un rectángulo en otro con el mismo perímetro (cuando es posible no “mover” todo el rectángulo sino una parte), o homotecias y proyecciones,.

IV. Sobre razonamiento con transformaciones. La situación inicial de los conocimientos sobre razonamiento es que ninguno de los estudiantes de la

FEUP ni de la FFPUB no consigue un grado alto de capacidades de aportar justificaciones correctas y argumentaciones basadas en simbolizaciones adecuadas, apoyándolas en otras proposiciones conocidas. Algunos estudiantes de ambos grupos consiguen dar argumentos para establecer conexiones. Dominan las argumentaciones de tipo figural.

En general en ambos grupos se da un nivel bajo de capacidades del futuro profesor para razonar, justificar, argumentar, comunicar y expresar el proceso de transformación geométrica. Algunos estudiantes muestran dificultades en expresar verbalmente razonamientos deductivos sobre la transformación como proceso.

9.3.1.2. Situación inicial sobre el contenido didáctico-estratégico

Varios autores confirman que, aunque los estudiantes antes no hayan realizado cursos de formación para docentes, ellos comparten unos conocimientos intuitivos sobre contenido didáctico basado en el hecho de que ellos han sido estudiantes en fases anteriores de su educación.

Las capacidades de los participantes sobre el tratamiento de aprendizaje como elemento del componente estratégico en ambos grupos es de nivel bajo en la mayoría de los casos. Ellos muestran la identificación superficial de relaciones, la atención superficial a las dificultades en el aprendizaje de la transformación geométrica y la falta de organización de actividad la adecuada a las dificultades en aprendizaje.

Otra parte de los participantes muestra un grado medio de capacidad de identificar los procesos significativos de transformación geométrica, una atención a las dificultades en aprendizaje de transformación y explicitación del progreso que quiere que hagan los alumnos.

La mejor situación se muestra y sobre otro elemento del componente estratégico en la instrucción de transformación geométrica. Un poco más de la mitad de los participantes muestran un grado medio de capacidad de utilizar materiales y recursos didácticos conscientemente para asociar al significado de la transformación mostrando coherencia entre actividad y el contenido de transformación. Otros participantes muestran un grado bajo de esa capacidad.

En esta fase hemos identificado el obstáculo de ausencia de capacidad de instrucción por parte de los participantes de la FEUP que poseen conocimiento del contenido matemático pero les falta conocimiento didáctico, y el obstáculo de ausencia de capacidad de instrucción por parte de los participantes de la FFPUB por falta de conocimiento del contenido matemático de transformación.

9.3.2. Sobre el diseño de una propuesta de formacion de profesores

Respecto al objetivo 3 de la investigacion, se cumplió en el diseño y la realización de la práctica de formación de profesores de Primaria para aprender a enseñar las transformaciones. La explicacion con detalle de esta práctica está en el capitulo 5 de acuerdo con la propuesta de metodologia de la investigacion.

En forma de tabla 9.4. mostramos los elementos culturales de la propuesta de formacion docente.

	Kosova	Catalunya
Comprension de elementos de la otra cultura	Presentacion de un proyecto europeo	
	Imagenes de cultura islamica - mosaicos	Imagenes de la cultura kosovar
	Imagenes de los bordados kosovares	
	Secuencias de una clase de Catalunya	Secuencias de una clase de Kosova
	Imagenes de isometrias en arquitectura de Catalunya	Imagenes de simetrias en bordados kosovares
Cultura europea	Reconocer elementos de la historia cultural europea cientifica perpsectiva, arte(Dürer,Escher, Pitagora, Thales)	
	Juegos, espejos, pantografo, papel, natuleza	

Tabla 9.4. Valores interculturales de la practica de formacion

Estos elementos de cultura general, europea, catalana y kosovar, las hemos incluido en las actividades planteadas en la Prueba Inicial, en la práctica de formacion docente como en la Prueba Final.

9.3.3. Resumen de los resultados obtenidos sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en primaria

Respecto el objetivo 4 de la investigación, hacemos una sintesis de los resultados del análisis de los elementos de las construcciones de significados personales de los futuros profesores de ambos grupos (la de FEUP y de la FFPUB) sobre las transformaciones geométricas en el proceso del desarrollo de la práctica de la formación de los futuros profesores mostrando las trayectorias para los participantes con diferentes grados de conocimientos en ambos grupos. Al mismo tiempo identificamos las peculiaridades de los estudiantes para comprender, relacionar y organizar contenidos, términos y propiedades geométricas asociadas a las transformaciones caracterizando elementos del desarrollo profesional de los futuros profesores implicados.

9.3.3.1. Resumen de los resultados obtenidos sobre el desarrollo del contenido matemático de transformación geométrica

Los resultados sobre el desarrollo del contenido matemático de transformación geométrica durante todo el proceso de formación profesional, a partir de lo observado en el desarrollo de las actividades de la práctica de formación hasta la prueba final, se presentan según sus componentes: el objeto transformación, terminología y tipos; relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica; el proceso de transformación; y razonamiento y comunicación con transformación geométrica.

- Sobre el objeto transformación, terminología y tipos.

Durante el desarrollo de las actividades de la práctica de formacion profesional para aprender a enseñar las transformaciones identificamos un avance de los conocimientos del contendido matemático de transformación.

El perfil inicial de la trayectoria de los estudiantes de nivel medio alto se caracteriza por el hecho de conseguir hablar de la simetría como característica común de las figuras formadas por repetición con una regla. De esta forma se mejora la imagen de la definición de isometría, separándola de la simetría como caso particular. En general podemos concluir que los estudiantes del grado medio-alto reconocen la transformación por repetición con una regla pero no llegan aún a establecer relaciones estructurales con imágenes conceptuales bien definidas respecto a la simetría como generador de las transformaciones isométricas. Tampoco construyen la idea de isometría como conjunto de transformaciones que, en el plano pueden ser traslaciones, giros o simetrías. Pero comienzan a basar la definición en la organización de ejemplos y contraejemplos. Consiguen distinguir la rotación, traslación y simetría como tipos diferentes de isometría. Su nivel no es alto, aunque su visualización es buena. Distinguen entre hacer un simétrico como "*acción*" y figura simétrica como "*situación o un momento*". Un estudiante es capaz de identificar fenómenos mediante transformaciones de figuras distinguiéndolo de lo que sería reconocer formas e identificar propiedades.

En general, podemos concluir que los estudiantes de nivel medio-alto reconocen la transformación isométrica como desplazamiento físico. La isometría se asocia a la transformación por repetición con una regla, pero no llegan aún a establecer relaciones estructurales con imágenes conceptuales bien definidas respecto a la simetría como generador de las transformaciones. Tampoco construyen la idea de isometría como conjunto de transformaciones que, en el plano pueden ser traslaciones, giros o simetrías. Pero comienzan a basar la definición en la organización de ejemplos y contraejemplos. Consiguen distinguir la rotación, traslación y simetría como tipos diferentes de isometría.

Los estudiantes de nivel medio bajo, tienen una concepción claramente figural basada en la repetición. Ellos expresan habitualmente su convención de que la repetición de un módulo (parte) es la propiedad característica sólo de simetría (la repetición es la propiedad de isometrías). En general generalizan estructuras y propiedades a partir de los distintos ejemplos de isometrías.

Los estudiantes de nivel bajo les cuesta reconocer las propiedades características de las isometrías. Su concepción es figural (Fischbein, 1996). Identifican características de las transformaciones como el eje de simetría y la equivalencia entre imágenes simétricas. Asocian simetría a transformación por *coincidencia*, pero no establecen imágenes conceptuales bien definidas respecto a las transformaciones donde no se puede utilizar el doblado o espejo que, en el plano pueden ser traslaciones o giros.

Mostramos a continuación el progreso de conocimiento como resultado de la construcción personal del futuro profesor enfrentado a tareas problemáticas planteadas en las actividades de la práctica. La serie de estados producidos en la realización del proceso de aprender a enseñar las transformaciones, produce una trayectoria del proceso de construcción personal de futuro profesor sobre la imagen conceptual de transformación geométrica. Dentro de esta serie de estados, mostramos los momentos M_0, como estado inicial que le corresponde a la Prueba Inicial, M_1, M_2, M_3 en la práctica y M_4 que le corresponde a la Prueba Final.

A continuación mostramos las trayectorias del progreso de un estudiante de grado alto, uno de grado medio y uno de grado medio-bajo de ambos grupos de los participantes de la investigación.

En forma grafica (Figura 9.5) mostramos la trayectoria del estudiante que en el momento M_0 ha mostrado un grado bajo de conocimientos.

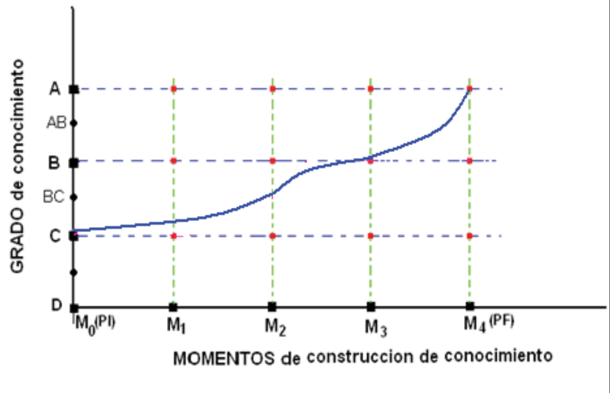
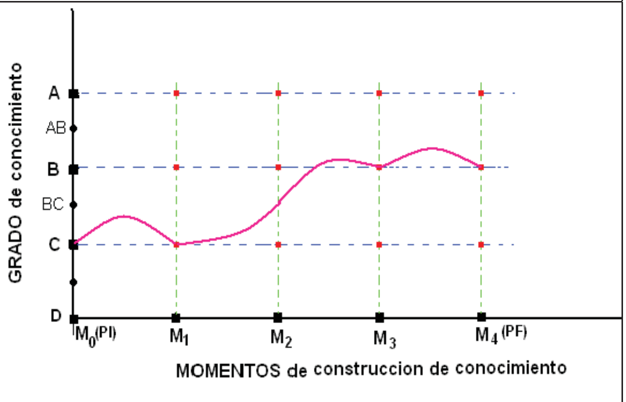
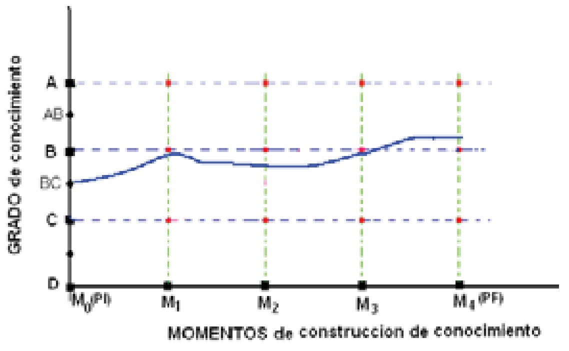
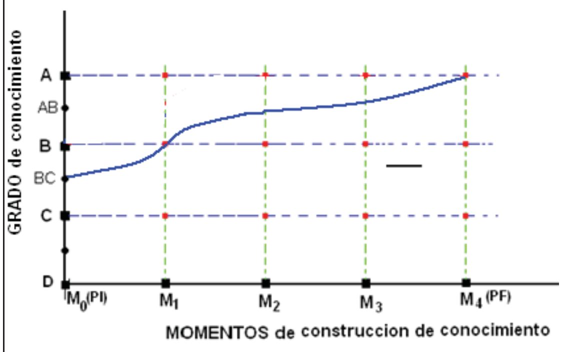
<table>
<tr><th>FFPUB (Catalunya)</th><th>FEUP (Kosova)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 9.5. La trayectoria del estudiante con el grado bajo de conocimientos sobre el objeto transformación terminología y tipos.

Como podemos ver en el gráfico, el progreso de conocimiento del futuro profesor (el estudiante Fi del grupo FEUP y el Al del grupo FFPUB) de grado bajo de conocimiento sobre el significado de transformación, ha crecido con la realización de las actividades de la práctica de formación.

En el caso del grupo de FFPUB, se muestra que los estudiantes con el grado bajo de conocimientos puedan lograr el grado alto de conocimientos si realizan una cierta serie de actividades. Las actividades del momento M_3 hacen que se incrementen los conocimientos de los estudiantes.

En la figura 9.6, mostramos el gráfico de la trayectoria de los estudiantes (el estudiante Em del grupo FEUP y el Mc del FFPUB) con el grado medio-bajo de conocimientos sobre transformación, en ambos países.

<table>
<tr><th>FFPUB (Catalunya)</th><th>FEUP (Kosova)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

.Figura 9.6. La trayectoria del estudiante con el grado medio- bajo de conocimientos sobre el objeto transformación terminología y tipos.

Para los estudiantes del grado medio-bajo, las actividades del momento M_1 influyeron al crecimiento de conocimientos y así conseguir un grado medio. En los momentos M2, y M2 notamos un estado estable del estudiante Mc (FFPUB), mientras un crecimiento ligero del estudiante Em (FEUP). El estudiante Em, en las actividades de la prueba final muestra un grado alto de conocimientos.

Como no tenemos el caso de grado alto, en la tabla de la Figura 9.7, mostramos la trayectoria personal de un estudiante con el grado medio de conocimientos en la situación inicial (PI) que al final del proceso ha logrado un grado alto de conocimientos sobre significado de transformación. Esto es el caso de Ad del grupo FEUP y el estudiante Jo del grupo FFPUB.

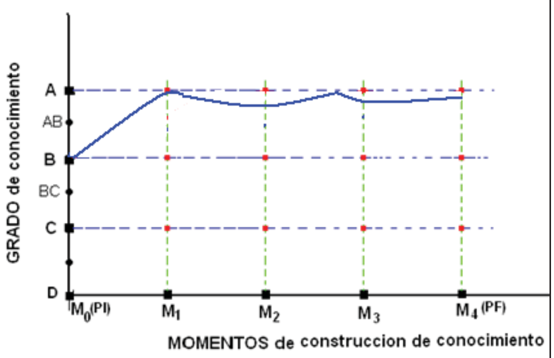
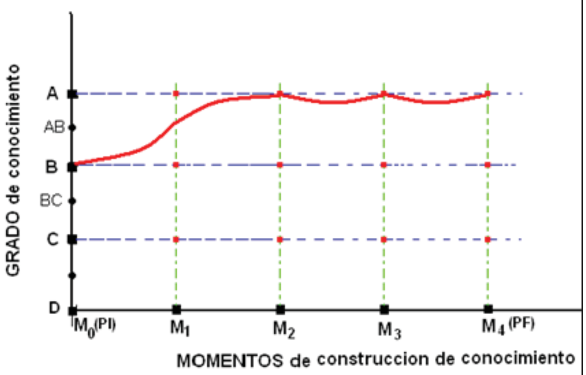
<table>
<tr><th>FFPUB (Catalunya)</th><th>FEUP (Kosova)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 9.7. La trayectoria del estudiante con el grado medio de conocimientos sobre el objeto transformación terminología y tipos.

Como podemos ver, los estudiantes con el grado medio, aumentan su grado de conocimiento a partir del primer momento (M_1), que podemos ver en la figura 9.7, lo que no ocurre con los estudiantes con el grado bajo. La mayoría de los estudiantes que en la prueba inicial han mostrado un grado medio, al final del proceso de formación han llegado a tener el grado alto de conocimientos sobre objeto transformación, terminología y tipos.

- <u>**Sobre relaciones y jerarquias en la nocion de transformacion**</u>.

Los participantes de la investigación, en las tareas de la práctica de formación profesional sobre aprender a enseñar transformaciones, establecen relaciones estructurales respecto a la simetría como generador de las isometrías. Pero, las actividades de la práctica, no han facilitado la producción de una conjetura sobre la relación entre diferentes isometrías y la construcción de su prueba. En general, hemos identificado intenciones de producción de las conjeturas, identificando regularidades, y también las condiciones bajo las cuales ocurren tales regularidades. También hemos identificado la ausencia de formulación del enunciado que expresa la relación entre simetría, rotación y traslación.

Las actividades de experimentación con los espejos hace posible que los participantes de la investigación obtengan fácilmente la imagen de la composición de varias simetrías con diferentes posiciones del eje. Hemos identificado que los estudiantes no expresan su conjetura producida sin que construyan su prueba - con esto queremos decir que <u>el proceso de producción de una conjetura y la construcción de su prueba es un componente integrado y no es posible realizarla por separado.</u> Después de la realización de estos tipos de actividades, no fue difícil que los estudiantes lleguen a conclusiones sobre las relaciones entre varias isometrías en función de sus propiedades.

La realización de las actividades de la práctica de formación ha cambiado la situación respecto la situación en la prueba inicial. En ambos grupos (la de FEUP y de FFPUB) notamos un crecimiento de la capacidad de los participantes a la hora de establecer el sistema conceptual identificando las jerarquías sobre transformación geométrica a partir de sus propiedades. Pero, sólo un 21% (3 de 14) en FEUP, y un 15% (2 de 13) en la FFPUB, reconocen la multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y establecen correctamente relaciones entre diferentes transformaciones y sus propiedades.

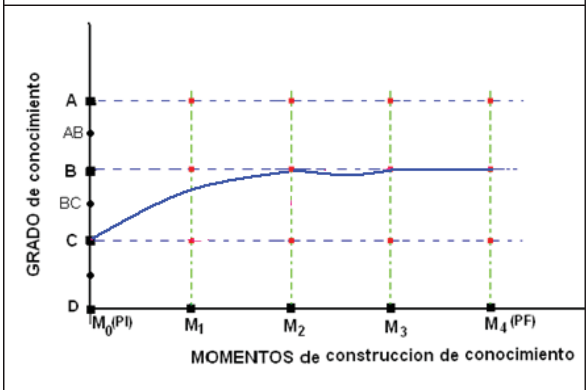
Otra parte (79% en FEUP y 85% de la FFPUB) llegan a identificar algunas transformaciones y las propiedades relevantes sin lograr de establecer la relación adecuada entre diferentes transformaciones y sus propiedades.

Aunque la mayoría de los estudiantes (en ambos grupos) reconocen que el resultado de dos simetrías es la traslación (en el caso de ejes paralelas) y rotación (en el caso de ejes concurrentes), sólo un par de estudiantes del grupo de FEUP y ninguno de los de FFPUB, son capaces de establecer completamente la relación entre simetría y traslación y simetría y rotación, identificando los elementos y propiedades relevantes, identificando el vector de traslación, el centro y ángulo de rotación.

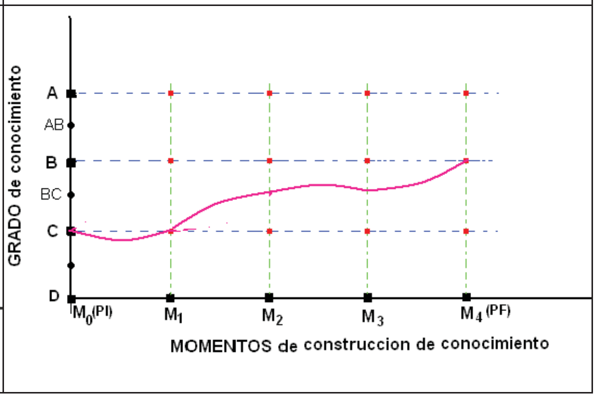
Todos los estudiantes son capaces de identificar la transformación proyectiva con el fenómeno de la sombra, las relaciones entre elementos de proyección y la relación entre objeto (espacial o plano) y su imagen proyectiva que es siempre plano. Y en este caso, la imaginación de experimentación de dichas relaciones juega un papel importante en la producción de conjetura.

La trayectoria del estudiante con el grado bajo de conocimientos mostrados en la Prueba Inicial (el estudiante Fi en el grupo FEUP y el Al en el FFPUB, como representantes) siguen mostrando un grado bajo en el momento M_1, en el momento M_2 el del grupo FFPUB consigue un grado medio, mientras que el estudiante del grupo FEUP consigue un grado medio solo al final – momento M_4 (ver la figura 9.8), identificando la relación entre la repetición y simetrías, rotación y traslación. Ellos no consiguen reconocer la relación entre simetría axial y transformación isométrica.

FFPUB (Catalunya)

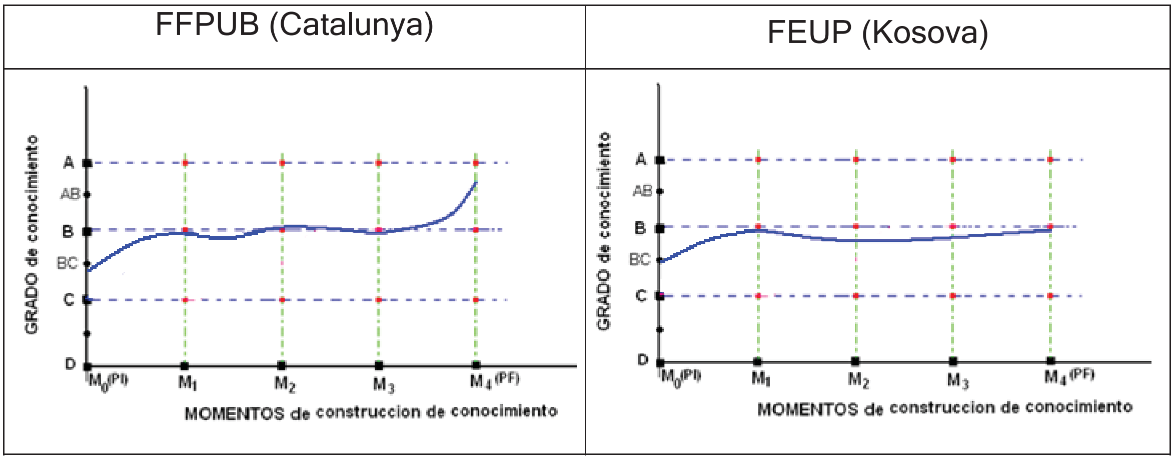


FEUP (Kosova)



.Figura 9.8. La trayectoria del estudiante con el grado bajo de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en transformaciones.

La trayectoria del estudiante de nivel medio-bajo, (figura 9.9) en ambos grupos de participantes de la investigación, muestra un crecimiento de capacidad a partir del primer momento M_1, respecto a la situación en la Prueba Inicial (momento M_0) como se puede ver en los gráficos de la figura 9.9. A veces, estos estudiantes consiguen lograr un grado alto de conocimiento, como es el caso del estudiante Al (el grupo FFPUB), pero lo más habitual es conseguir el grado medio o medio-alto (como es el caso de estudiante Em del grupo FEUP).



.Figura 9.9. La trayectoria del estudiante con el grado medio- bajo de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación.

Con los imágenes de la figura 9.10, mostramos las trayectorias de dos estudiantes con el grado medio (en la Prueba Inicial) de ambos grupos de participantes de la investigación. Como mayoría de los estudiantes con el grado medio de conocimientos, y los estudiantes Jo (del grupo FFPUB) y Ad (del grupo FEUP) participando en el desarrollo de las actividades de la práctica de formación, consiguen aumentar sus conocimientos hasta un grado alto en la mayoría de las actividades.

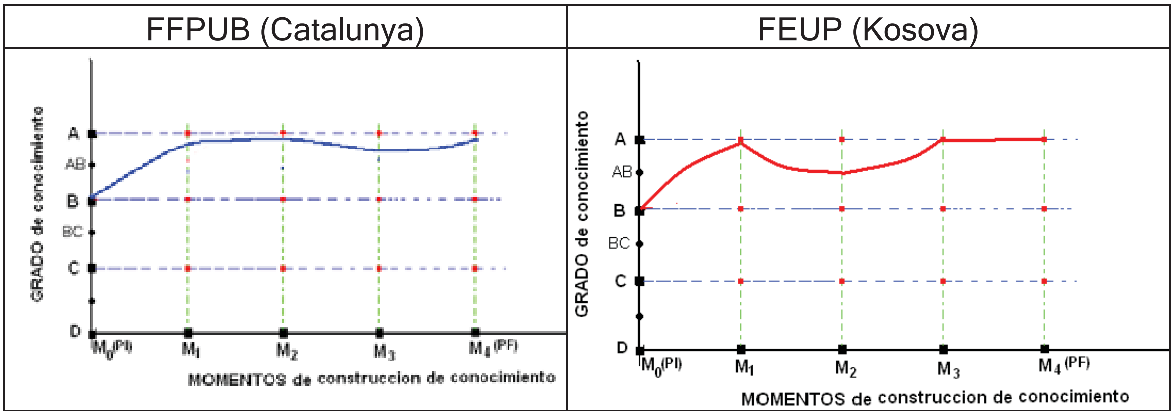


Figura 9.10. La trayectoria del estudiante con el grado medio de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación.

Estos estudiantes muestran la capacidad de producir conjeturas correctas sobre las relaciones entre diferentes transformaciones isométricas (en el caso del grupo FFPUB se muestra el nivel más bajo del grupo FEUP), realizando su prueba a menudo *no* en forma deductiva pero *si* con utilización de diferentes materiales didácticos. Lo que no se consigue es el hecho de formulación del enunciado, que consideramos que es como consecuencia de su escolarización anterior.

La mayoría de los estudiantes que en la prueba inicial (M_o) han mostrado un grado medio, al final del proceso (M4) de formación han llegado tener el grado alto de conocimientos sobre relaciones y jerarquías en la noción de transformación geométrica.

- **Sobre transformación como proceso.**

En el análisis de las producciones y actuaciones de los estudiantes sobre el proceso de transformación durante la realización de las actividades de la práctica de formación, vemos como los estudiantes con el grado bajo de conocimientos, aprendían el proceso de transformación primero como movimiento de figura intuitivamente utilizando el espejo (en la mayoría de los casos), luego como aplicación punto por punto utilizando el papel cuadriculado, papel con trama de puntos y la propiedad de puntos alineados.

Los estudiantes con el grado medio de conocimientos utilizaron el concepto de paralelismo, el concepto de perpendicularidad y el concepto de equivalencia (medir los lados para que sean iguales) como herramientas para hacer reproducción de la figura en otro lugar. El significado de reproducción para estos estudiantes es una regla (aplicación) basada en equivalencia de los segmentos (isometría), equivalencia de los ángulos (ángulos rectos en ángulos rectos) y paralelismo (dirección de vector). Todos estos elementos son características de una traslación.

Las actividades realizadas de la práctica, contribuyeron a que la mayoría de los estudiantes consiguiesen identificar la proyección como una transformación y como un cambio. Identificaron los tres elementos de proyección: la fuente de la luz, el objeto y el lugar donde se produce la proyección. Identificaron la dependencia funcional entre estos tres elementos de proyección. A partir del análisis de las producciones no hemos identificado algún caso de comprensión de la idea o hipótesis de proyección puntual.

Al final del proceso de formación, a partir de los resultados de la Prueba Final encontramos que la mayoría de los estudiantes de la FEUP (10 de total 14 o 72%) muestran un grado medio de conocimientos sobre la transformación como cambio o proceso. Otra parte (4 de 14 o 28%) muestran un grado alto en mayoría de las actividades de la PF. En el grupo de FFPUB, notamos un nivel más bajo de conocimientos sobre el proceso de transformación geométrica, debido a que ni un estudiante no muestra grado alto de conocimientos en la mayoría de las actividades de la PF, mientras que con el grado medio de conocimientos sobre el proceso de transformación es habitual casi en todo el grupo (12 de total 13 o 92%). Solo un estudiante de FFPUB ha mostrado conocimiento débil del proceso de transformación en mayoría de las actividades de la PF.

El análisis del desarrollo de las actividades de la práctica sobre la construcción de conocimiento sobre transformación, nos lleva a concluir:

Para los estudiantes que reconocen la transformación como un proceso de aplicación de puntos (mayoritariamente el grupo FEUP), resulta fácil identificar la dependencia funcional entre posiciones, las propiedades importantes de la transformación como son el eje de simetría, vector de traslación, centro y ángulo de rotación, etc., consiguiendo establecer la imagen conceptual completa sobre transformación. Los estudiantes que consideran la transformación como un plegado, cambio de posición o repetición de un objeto o una figura (mayoritariamente el grupo FFPUB), resulta difícil establecer los elementos importantes del proceso de transformación.

En otras palabras, los que asumen la idea de transformación como correspondencia entre conjuntos de puntos no les resulta difícil tener la imagen conceptual completa sobre transformación, tanto isometrías como deformaciones, identificando correctamente las propiedades y elementos de dicha transformación como la orientación de la imagen, el eje de simetría, el ángulo de rotación, el vector de traslación, la invariante de deformación etc. Mientras que a los que asumen la idea de transformación como correspondencia figural les resulta difícil identificar correctamente las propiedades y elementos de transformación: no identifican el ángulo de rotación, el vector de traslación y no reconocen las propiedades de deformaciones.

Esto lo ilustramos con las trayectorias de la construcción de aprendizaje para tres estudiantes de diferentes grados de conocimientos en ambos grupos de participantes de la investigación.

Gráficamente con la figura 9.11 mostramos la trayectoria del estudiante con el grado bajo en el momento M_0 (prueba Inicial), en el proceso de construcción de su aprendizaje del concepto de transformación como cambio o proceso.

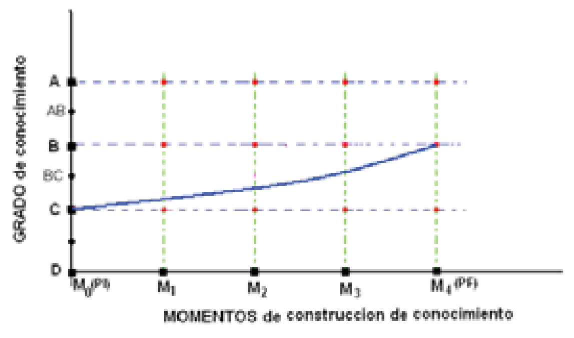
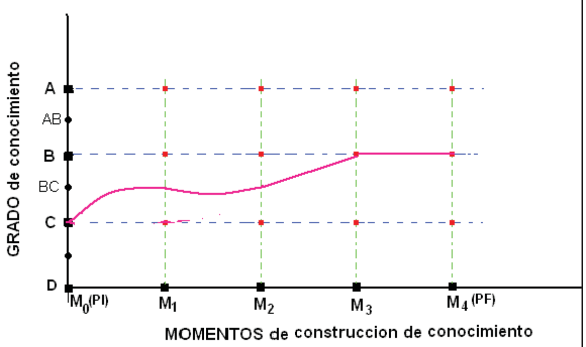
FFPUB (Catalunya)	FEUP (Kosova)
	

Figura 9.11. La trayectoria del estudiante con el grado bajo de conocimientos sobre el proceso o cambio de transformación.

Como se muestra en el grafico (9.11), en ambos grupos de participantes, los estudiantes con el grado bajo, les cuesta crecer el grado de conocimientos sobre el proceso de transformación, y este crecimiento se poco a poco con el desarrollo de las actividades de la practica. Esto significa que los estudiantes con el grado bajo, necesitan realizar más actividades que otros estudiantes con el grado más alto de conocimientos. .

En la figura 9.12., mostramos la trayectoria del estudiante con el grado medio-bajo, en ambos grupos. Como muestra el grafico, el estudiante del grupo FFPUB, ha conseguido mejorar su comprensión sobre el cambio o proceso de transformación, aunque se notan las tendencias de crecimiento más alto en los momentos del desarrollo de las actividades. El caso del FEUP, muestra un crecimiento bastante alto.

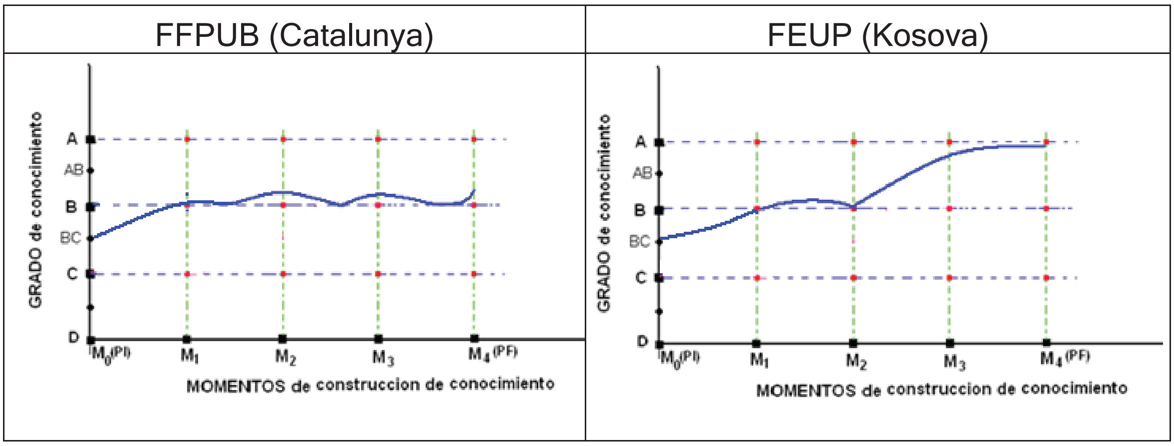


Figura 9.12. La trayectoria del estudiante con el grado medio bajo de conocimientos sobre el proceso o cambio de transformación.

Que los estudiantes del grupo FFPUB, no consigan tener la imagen completa de transformación, es debido a que su conocimiento sobre el proceso de transformación está basado en la idea que la transformación es un actuación de cambiar el sitio (desplazamiento) o cambiar alguna propiedad (deformaciones). En contrario, el conocimiento de los estudiantes del grupo FEUP, se basa en la construcción del significado de transformación como correspondencia punto a punto que ha ayudado a crecer el grado.

Continuamos con el grado medio de conocimiento.

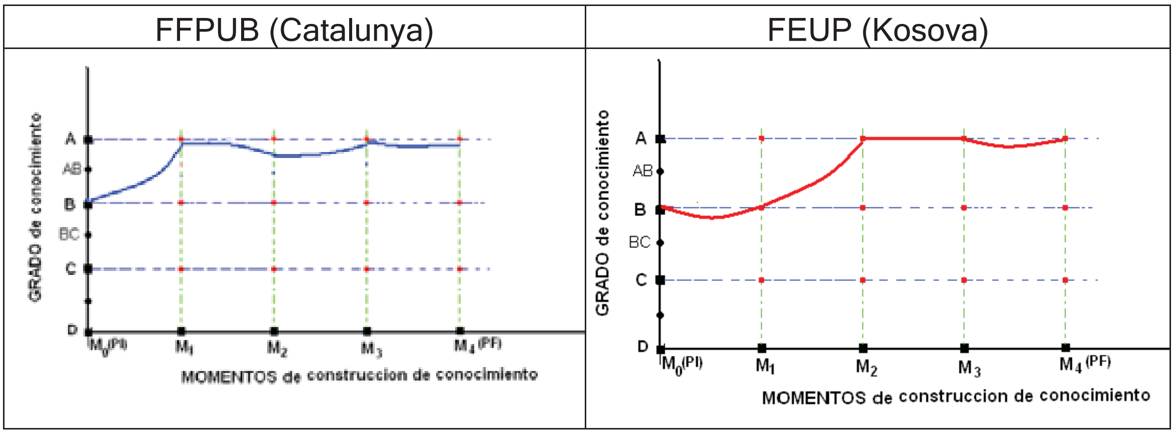


Figura 9.13. La trayectoria del estudiante con el grado medio de conocimientos sobre el proceso o cambio de transformación

Los estudiantes que en la prueba inicial (M_o) han mostrado un grado medio, al final del proceso (M_4) de formación han llegado tener el grado alto de conocimientos sobre el proceso de transformación. En momentos determinados, se nota una inestabilidad del estudiante del grupo FFPUB, y esta inestabilidad se recupera en momentos seguidos. Esto nos lleva a conclusión de la necesidad de realizar más actividades sobre el tema. La situación es parecida en el caso de los estudiantes con el grado medio alta.

- <u>Sobre el razonamiento con transformaciones</u>.

Las actividades de la práctica de formación ofrecieron la posibilidad de mejorar la situación sobre la justificación y la argumentación de las conjeturas producidas por los participantes. Como conclusión podemos identificar que se ha desarrollado la capacidad de:

A- la producción de una conjetura y la construcción de su prueba que implica conseguir conocimientos sobre multitud de ejemplos diferentes de isometrías relacionando con la identificación de mayoría de las propiedades y la identificación de las diferencias entre las mismas.

B- la presentación dinámica de transformación, hace posible la justificación y argumentación de las propiedades de transformación utilizando la demostración deductiva apoyándose en las proposiciones conocidas anteriormente.

Como consecuencia de las actividades de la práctica de formación profesional de futuros profesores tenemos un avance importante de la capacidad de razonar en ambos grupos de participantes de la investigación: la mayoría de los estudiantes de la FEUP (9 de total 14 o 65%) y todos de la FFPUB son capaces de comprobar alguna proposición o conjetura sin errores significativas justificando correctamente. Sólo tres estudiantes de la FEUP aportan una justificación correcta con una simbolización adecuada usando reglas y propiedades explicitas y apoyándola en las proposiciones conocidas anteriormente. Encontramos dos estudiantes de la FEUP que muestran la falta de comprensión de la tarea de argumentación y justificación de conjetura producida.

Como resumen podemos mencionar aquellos momentos en que se produjeron avances en algún aspecto del razonamiento de los estudiantes. La situación problemática de explicar las características de tres bordados funciona suavemente, considerando el fenómeno de una continuidad posible entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba que implica conseguir conocimientos sobre <u>multitud de ejemplos diferentes de isometrías</u>

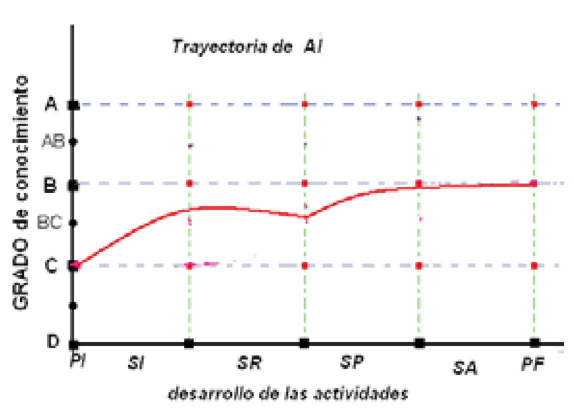
relacionando con la identificación de mayoría de las propiedades y la identificación de las diferencias entre las mismas. También, la presentación dinámica de transformación, hace posible que un gran número de estudiantes logren justificar y argumentar las propiedades de transformación (invariancia del superficie) utilizando la demostración deductiva (la fórmula del cálculo de superficie del paralelogramo y del triangulo) apoyándose en las proposiciones conocidas anteriormente. La conjetura de asignación correcta de la posición del eje de simetría (el espejo) se basa en *la regla* de la propiedad simétrica de la figura, identificando así el eje con el espejo. Luego, se identifican los argumentos para sostener la conjetura aplazada estableciendo correspondencia entre una parte (simétrica) de la figura y la parte del modelo. Como unas figuras tienen más de un eje de simetrías, y ninguna parte simétrica no es igual a una parte del modelo, los participantes justifican la conjetura basando en los conocimientos de la composición de dos simetrías. Como resultado vemos un pensamiento lógico-concreto, haciendo un análisis deductivo, en el que partiendo de una hipótesis se ha de verificar el resultado.

Con el fin de obtener la generalización de obtener la figura a partir de un modelo con el espejo, los estudiantes descompusieron la estructura global en elementos primitivos visuales, y entonces aplicaron una síntesis cuantitativa abstracta en la que combinaron las unidades visuales y el número de piezas que aparecen. Esta aproximación a la solución es analítica en el sentido de que una totalidad es construida desde la descomposición en pequeñas unidades reconocibles y contables, y recompuesta (reconstruida) a partir de ellas. El resultado final del proceso de obtención y el razonamiento involucrado es visual a partir de análisis (descomposición en unidades) y síntesis.

Pocos estudiantes de FEUP y menos del FFPUB consiguen identificar los elementos estructurales de traslación y rotación basados en simbolización adecuados, mientras que la mayoría de ellos domina la argumentación figural identificando las propiedades de cambio y de conservación.

Continuamos la ilustración de este avance de conocimiento presentando las trayectorias de mismos participantes como hemos presentado anteriormente sobre otros aspectos del contenido matemático de transformación geométrica.

FFPUB (Catalunya)	FEUP (Kosova)



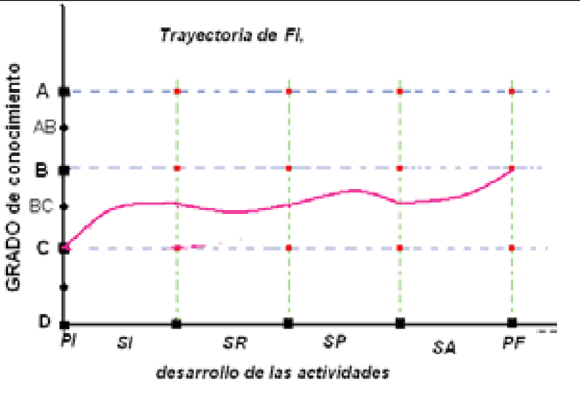
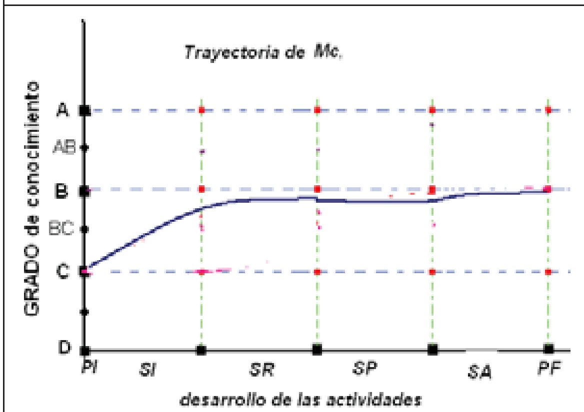


Figura 9.14. La trayectoria del estudiante con el grado bajo de razonamiento sobre transformación geométrica

Como podemos ver en el gráfico de la figura 9.14, en ambos grupos los estudiantes con el grado bajo, después de la realización de actividades de la práctica de formación, consiguen colocarse en el nivel de estudiantes de grado medio de conocimiento. Esto quiere decir que al final, estos estudiantes son capaces de justificar correctamente la proposición, habitualmente con un ejemplo y sin errores significativos.

FFPUB (Catalunya)	FEUP (Kosova)



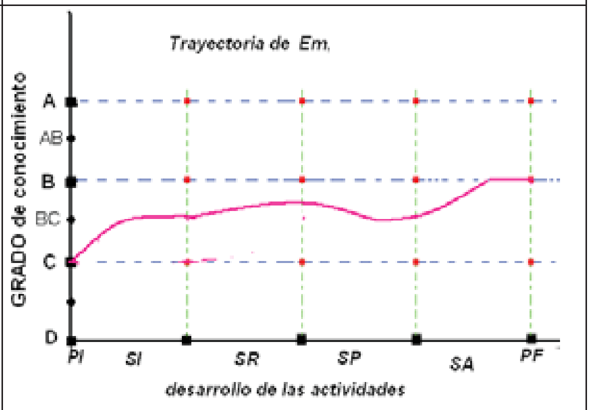


Figura 9.15. La trayectoria del estudiante con el grado medio-bajo de razonamiento sobre transformación geométrica

Los estudiantes que en la Prueba Inicial (M_o) han mostrado un grado bajo, y a veces un grado medio de capacidad de razonamiento sobre transformación geométrica, realizando las actividades de la práctica (los momentos M_1, M_2 y M_3) consiguen esforzar su conocimiento del grado medio (figura 9.15). Esto quiere decir que su capacidad se limita a poner ejemplos como comprobación de su proposición y no cometen errores significativos.

Los estudiantes con el grado medio en el principio de la realización de la practica (momento M0), desde un primer momento (M1), realizando las actividades de la practica consiguen aportar justificaciones argumentativas de las proposiciones, usando reglas y propiedades explicitas (el caso del grupo FFPUB), utilizando una simbolización adecuada y basando su argumentación en otras proposiciones conocidas anteriormente (el caso de FEUP). La trayectoria de estos dos estudiantes se presenta en la figura 9.16.

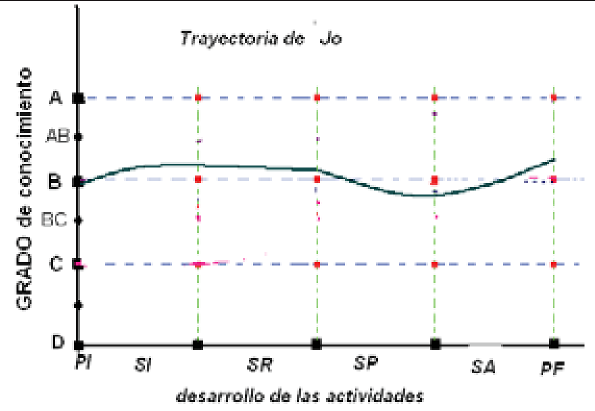
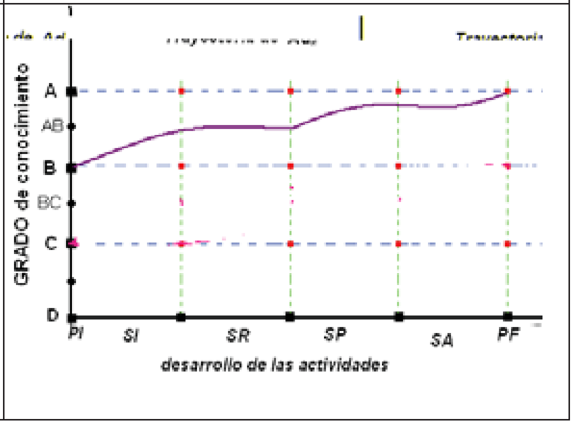
<table>
<tr><th>FFPUB (Catalunya)</th><th>FEUP (Kosova)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 9.16. La trayectoria del estudiante con el grado medio de razonamiento sobre transformación geométrica

9.3.3.2. Resumen de los resultados obtenidos sobre el desarrollo del conocimiento del contenido didáctico

El desarrollo de las actividades de la práctica de formación sobre aprender a enseñar las transformaciones hace posible que gran número de participantes consigan el grado medio de capacidad en la identificación de elementos de metodología y del diseño del aprendizaje de transformaciones geométricas, mientras que un número más pequeño consiguen relacionar la secuencia del contenido con el diseño de aprendizaje de transformación geométrica.

También hemos identificado el aumento de la capacidad de los participantes en la consideración de la coherencia entre actividad y el contenido de transformación geométrica, en la identificación de los elementos claves en la secuencia del contendido sobre las transformaciones y en la identificación de la adaptación de los materiales y recursos didácticos a la actividad.

A partir de los análisis de las producciones de los participantes podemos concluir que el desarrollo de las actividades de la práctica de formación ha mostrado que la mayoría de los estudiantes identifican el marco referencial del entono, saben hacer la comparación entre diferentes modelos del trabajo, dialogan, imaginan y justifican gestiones asociados a la enseñanza de las transformaciones.

Es evidente que a partir de los análisis del desarrollo de las actividades de la práctica de formación, no hemos podido conocer si los futuros profesores son capaces de proponer el análisis del proceso de aprender la transformación geométrica por parte de los alumnos. De esta manera se puede saber analizando los diseños de la clase que es parte de la prueba final.

El análisis de los resultados mostrados en la Prueba Final muestra un avance significativo en ambos grupos de los participantes. Pero, todavía la mayoría de los participantes de ambos grupos (57% del FEUP, y 54% del FFPUB) muestran el grado medio de capacidad de explicar y organizar el aprendizaje de transformaciones geométricas en primaria. Otra parte de participantes en ambos grupos muestra un grado alto de comprender y explicar el aprendizaje de transformaciones geométricas.

La conclusión general sobre el proceso de aprendizaje de transformación simétrica visto por la mayoría de los participantes de ambos grupos al final del proceso consiste en:

> *i - identificar y distinguir la propiedad simétrica en un conjunto de objetos (imágenes o figuras) conocidas por los alumnos,*
> *ii - identificar y encontrar el eje (o ejes) de simetría y justificar la propiedad simétrica con el doblado, espejo u otro instrumento de justificación,*
> *iii - construir la imagen simétrica respecto a la imagen dada.*

La conclusión general sobre la instrucción de transformación geométrica formada por la mayoría de los participantes de la investigación consiste en:

La introducción debe consistir en actividades basadas en un contexto conocido para los alumnos, para pasar luego a las actividades principales que darán más posibilidades de construir detalladamente el concepto de transformación y sus propiedades, y dejar para el final las actividades semejantes con las actividades desarrolladas y que servirán para la verificación y profundización de conocimientos sobre transformación. La diferencia entre el grupo de FEUP y de FFPUB consiste en el hecho de que los futuros maestros de FEUP plantean un *papel destacado del maestro en la clase y los alumnos pueden hacer actividades semejantes después de que el maestro las haya hecho, mientras que a los de FFPUB les dan más libertad a los alumnos para que hagan actividades ellos mismos.*

9.3.4. Resumen de los resultados obtenidos sobre el componente cultural en el aprender a enseñar las transformaciones

No encontramos un grado alto de aprovechamiento de los elementos culturales e históricos en el conocimiento y la explicación del significado de transformación. No llega a la mitad de los estudiantes los que reconocen la importancia del contexto en la comprensión de transformaciones geométricas, usan términos matemáticos adecuados a los elementos culturales pero no ejercen una contextualización completa.

A partir de los resultados de la prueba inicial sacamos la siguiente conclusión:

Los participantes de FFPUB usan las imágenes de contextos cotidianos en la construcción del conocimiento sobre las figuras geométricas, la propiedad simétrica y el concepto de transformación simétrica mucho mejor que los participantes de la FEUP.

Que la utilización de las imágenes de contextos cotidianos y conocidos por parte de los estudiantes son buenos ejemplos de asociación a las transformaciones geométricas lo muestra el tratamiento de las imágenes de los bordados kosovares. En este caso, todos los participantes de FEUP consiguen identificar diferentes elementos generadores del bordado, e identifican *la repetición* como proceso de obtener todo el bordado.

La importancia de utilizar los contextos conocidos por parte de los estudiantes, lo demuestra el hecho de que la mayoría de los participantes de FFPUB consiguen identificar diferentes elementos generadores del bordado Kosovar, mientras que solo la mitad de los participantes de la FFPUB identifican elementos generadores.

En ambos casos se nota que *pocos participantes usan el contexto en el reconocimiento de procesos constructivos sobre transformaciones.*

La consecuencia de la tradición kosovar de no utilizar los mosaicos en la escolarización anterior de los participantes, aunque ellos afirman el deseo de utilizar los mosaicos en la clase, en un aprendizaje geométrico, hace que ellos no utilicen en las actividades este recurso, aunque si muestran el deseo de incorporarla. Ellos ven el mosaico como una figura geométrica y no conocían sus observaciones del mundo real con el geométrico porque no forma parte de su cultura.

Las imágenes de la vida cotidiana como contextos de experiencia (como por ejemplo de SIA1, SIA2 y SIA3) sirven mejor para la construcción del conocimiento sobre la propiedad simétrica y el concepto de transformación simétrica.

Las técnicas empleadas en ciertos contextos pueden servir en la construcción de conocimiento sobre el significado de transformación - como muestra la actividad SIA4. Esto es un buen ejemplo del proceso de transformación-convertir los elementos de un contexto en elementos de transformación geométrica. La integración de elementos del proceso de hacer bordado ayuda significativamente en la construcción de los conocimientos sobre la transformación geométrica, en los estudiantes que poseen la experiencia de hacer bordado, identificando correctamente el modulo de repetición, el eje de simetría, el tipo de isometrías, y transformación isométrica como aplicación punto a punto.

Consideramos que el desarrollo de la actividades parecidas al actividad SIA4 está asumida como un potencial para el desarrollo de las capacidades de *diversidad individual,* referida a las características particulares de cada individuo. Esto quiere decir que la actividad propuesta responde a las experiencias diferentes, promoviendo el desarrollo de capacidades y de intereses diversos y apoyando, de manera específica, a aquellas personas que tienen experiencias especiales, sabiendo que en Kosova todas las chicas (y sólo las chicas) desde los primeros años aprenden y hacen bordados. Que el proceso de hacer bordados es un contexto de experiencia de chicas, se justifica con el hecho de que en el discurso del desarrollo de la actividad SIA4, la participación de las chicas es absolutamente mayor que de los chicos. También identificamos una observación principalmente matemática sobre las transformaciones aparecidas en los bordados que una observación a base de hacer prácticamente el bordado, por parte de los chicos.

Durante la realización de las actividades de la práctica de formación se muestra que la utilización de varios materiales como espejos, ayuda a los estudiantes de grado bajo de conocimientos a obtener la imagen de transformación, mientras que los estudiantes que tienen un grado alto de conocimientos, no sienten la necesidad del uso del espejo o lo utilizan sólo como demostración de la validez de su producción. Las actividades SRA6, SRA8, SRA9, SRA10 y SRA11 principalmente se basan en el uso de espejos, lo que hace posible comprender la transformación geométrica *de figura a otra figura*. Mientras que las actividades SIA6, SRA1, SRA2, SRA3, SRA4, SRA6 y SRA8 desarrollan las capacidades de comprender la transformación geométrica como aplicación *punto a punto*. En las actividades SRA6 y SRA8 se trabaja en los papeles cuadriculados y papeles con trama de puntos, apoyándose con los espejos. Los resultados de las producciones de los participantes en estas actividades nos hace posible concluir lo siguiente:

La utilización de espejos es característica de los estudiantes que perciben el concepto de transformación figural (figura -> figura); mientras que la utilización de papeles cuadriculados y con la trama de puntos, es característica de comprensión de transformación como aplicación punto a punto.

Los resultados de la prueba final nos sirven como confirmación del avance en la incorporación de los elementos culturales por parte de los futuros profesores en el proceso de enseñanza/aprendizaje de transformación geométrica. En realidad, los resultados de la prueba final muestran que los participantes de la investigación, además de reconocer algún contexto cultural asociado a significados de la transformación geométrica y su importancia en la comprensión de transformación geométrica, la mayoría de ellos consiguen aprovechar de los contextos y elementos culturales en el conocimiento y la explicación del significado de transformación. En este proceso, hemos identificado las características culturales diferentes entre el grupo de FEUP y el de FFPUB:

Como característica cultural del grupo de FEUP sobre el discurso de justificación y acercamiento a la concepción de transformación geométrica identificamos la transformación geométrica como aplicación punto a punto (transformación puntual). Este acercamiento a la transformación geométrica hace posible reconocer diferentes tipos de transformaciones, sus propiedades y características correctamente. La característica del grupo FFPUB es la transformación como desplazamiento o reflexión de la figura en la otra figura (transformación figural) que como consecuencia muestra la dificultad de reconocer correctamente las deformaciones y los elementos de traslación y rotación.

Nos parece importante el hecho de que todos los participantes de la investigación (del grupo FEUP y del FFPUB) muestran un grado medio o alto de incorporación del contexto o de los elementos culturales en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las transformaciones en la Educación Primaria. En otras palabras, reconocen contextos o elementos culturales asociados a significados de la transformación geométrica, contextualizando y usando con el fin de integrar la comprensión y el razonamiento de transformación geométrica. Que el desarrollo de las actividades de la práctica de formación es importante para futuros profesores, confirma el hecho de que, los participantes de la investigación como futuros profesores de Primaria, en las decisiones de incorporar contextos socio-culturales y recursos didácticos en sus clases de enseñanza, aprovechan de su experiencia durante su formación. Mediante la tabla 9.17, mostramos los elementos principales de las escrituras culturales de los futuros profesores de ambos grupos de la investigación:

Escritura cultural del estudiante de FEUP	**Escritura cultural del estudiante de FFPUB**
Formación universitaria de profesores de primaria	
La transformación como un proceso de aplicación de puntos	La transformación como un plegado, cambio de posición o repetición de un objeto o una figura
Identificación de las propiedades relevantes de transformación,	*Identificación de propiedades visuales de transformación.*
Reconocimiento de la composición de dos simetrías - identificación de elementos.	
Ausencia de conocimientos sobre la definición conceptual de proyección.	Proyección – el fenómeno de la sombra

Utilizar los instrumentos de dibujo es habitual en la clase de geometría, mientras que otro material (espejos, …) sirve como material segundario (verificación, curiosidad, atractividad…).	Utilización y manejo de diferentes materiales didácticos es habitual (espejo, y otro material). No se nota importancia de los instrumentos del dibujo (regla, compas,…).
Influencia de las experiencias de formación en los diseños de las clases en primaria.	
Atención superficial a las dificultades de los alumnos ante las actividades en primaria	Ante las actividades en Primaria propone situaciones según dificultades de los alumnos
Trabajo individual es preferible.	Trabajo en grupo es habitual.
En el trabajo de primaria: "primero maestro luego alumno".	En la clase de Primaria: "primero alumno y luego alumno".
El aprendizaje de transformación: – contexto conocido, identificación del eje, construcción de la imagen de transformación.	
La introducción de transformación en la clase de primaria: identificación de propiedades (en un contexto conocido), construcción del concepto (actividad principal), verificación y profundización de conocimiento (actividad final).	

Tabla 9.17. Los elementos de las escrituras culturales

9.4. Limitaciones e implicaciones para los procesos de formación de profesores

Igual que cualquier otra posible alternativa, el diseño elegido no carece de limitaciones inherentes a sus propios rasgos definitorios. Las videograbaciones, en sí misma y como instrumento de recogida de datos, asimismo la propia elección de las tareas puede haber influido en las respuestas obtenidas. En nuestra opinión, la opción que tomamos de presentar la mayor variedad posible de tareas era la mejor estrategia para despertar la mayor variedad posible de respuestas y reacciones de futuros profesores de primaria. No obstante, siempre quedará la duda sobre cómo habrían reaccionado los futuros profesores ante tareas diferentes. En este sentido, los resultados están ligados al material que hemos utilizado, que puede ser consultado en los Anexos 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Igualmente la temporalización de la recogida de datos introduce particularidades limitantes innegables, como, por ejemplo, la decisión de realizar las actividades en momentos convenientes a las agendas particulares de los programas de FEUP y de FFPUB.

Los resultados están ligados a un contexto cultural y lingüístico específico. En otras palabras, casi resulta obvio decir que esperaríamos resultados diferentes en los dos contextos socioculturales y lingüísticos diferentes - por la propia lengua y por la propia tradición escolar. La indagación de la misma temática (aprender a enseñar las transformaciones geométricas en la educación primaria) habría exigido en otro contexto un diseño de instrumentos notablemente distinto, que diera cuenta de las peculiaridades de la situación.

La selección de individuos, en tercer lugar, comporta también condicionantes a la interpretación de los resultados. A esto, podemos contestar que se trataba en nuestro caso de querer analizar los cambios en el desarrollo a lo largo de realización de una practica profesional sobre transformaciones en futuro profesor de primaria, precisamente, de la recopilación de la mayor diversidad posible.

En cuanto a la posibilidad de realizar indagaciones futuras, consideramos que las propuestas deberían centrarse fundamentalmente en cuatro ámbitos: el *objeto de estudio*, los *sujetos estudiados*, la *metodología* de investigación y el *contexto de estudio*. En referencia al primer punto, consideramos interesante la posibilidad de realizar un estudio similar que incluya otros ámbitos matemáticos.

Incluso consideramos interesante la exploración de otras áreas de contenido claramente contrastadas entre sí, a fin de comparar los resultados con el área de transformaciones geometricas: ¿Cómo conciben los futuros profesores otras tareas?, ¿en qué se parecen y en qué se diferencian los resultados que hemos podido documentar en el presente estudio referente al área de transformaciones geometricas?

El interés del contraste de los resultaods de los participantes respecto a las distintas áreas curriculares responde a la importancia de la habilidad de aprender a enseñar como bjetivo de centros de formacion de profesores y de su uso como metodología didáctica y evaluativa general y transversal.

La metodología distinta permitiría asimismo el seguimiento de los futuros profesores durante un tiempo más prolongado. Este seguimiento, obviamente, no se refiere únicamente a un criterio temporal, sino también al tipo de datos que se pudiesen recoger de la práctica de formacion de profesores mediante una opción observacional, complementaria y contrastiva.

Debido a la dificultad de la amplitud del trabajo realizado, no se han podido establecer resultados con profundidad respecto al contenido actitudinal, porque los futuros profesores no han podido poner en práctica la unidad diseñada en la escuela.

El estudio realizado se podría complementar también con un análisis sociocultural, que permitiría reconocer las normas y técnicas en las interacciones del proceso de implementación de la práctica escolar. Aunque este aspecto ha sido poco desarrollado ya que el énfasis del estudio se centró en los aspectos culturales y de su formación.

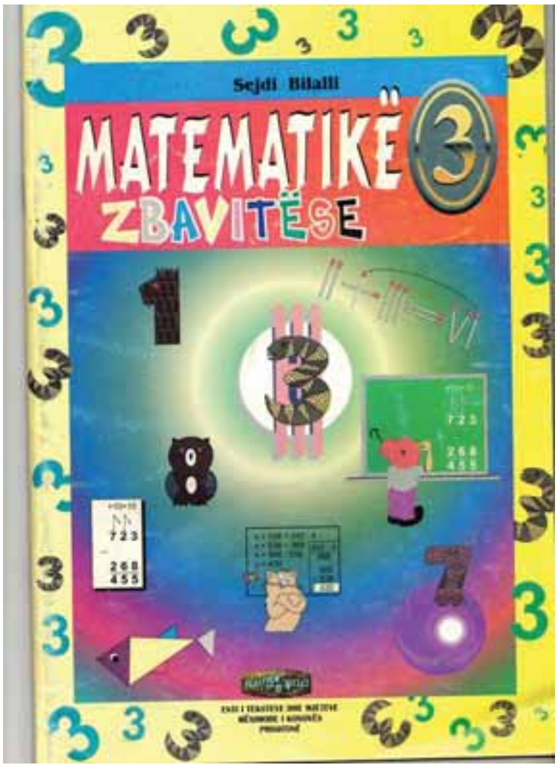
En un futuro próximo creemos que se podrán aportar datos interesantes, que no fueron planteados en este estudio.

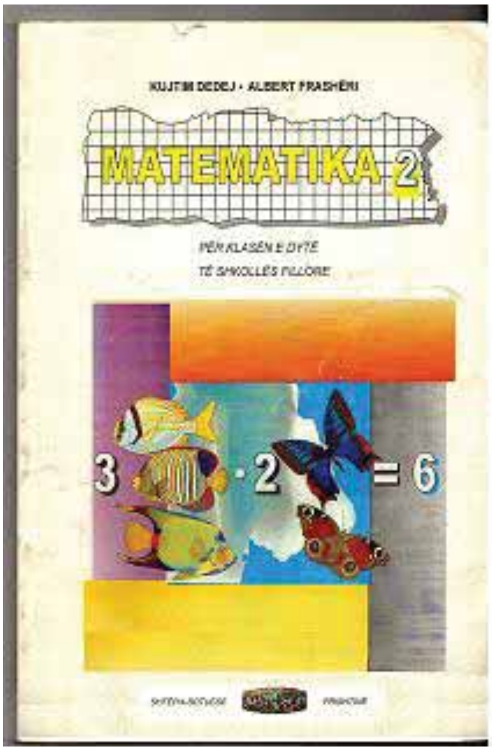
Por último, quisiéramos añadir unas reflexiones sobre las implicaciones de nuestro estudio desde una perspectiva de intervención educativa, en lo que concierne a la formación del profesorado. Nuestro interés en la temática surge y se desarrolla tras diversos años dedicados a la formación de futuros maestros en la Universidad de Prishtina y un en la Universidad de Barcelona. Todavía es largo el camino por recorrer en la modificación de las prácticas del profesorado en la dirección que desde hace ya muchos años se viene indicando desde la literatura académica. En nuestra opinión, es en la formación inicial del profesorado donde se debe empezar a combatir y nivelar este desfase.

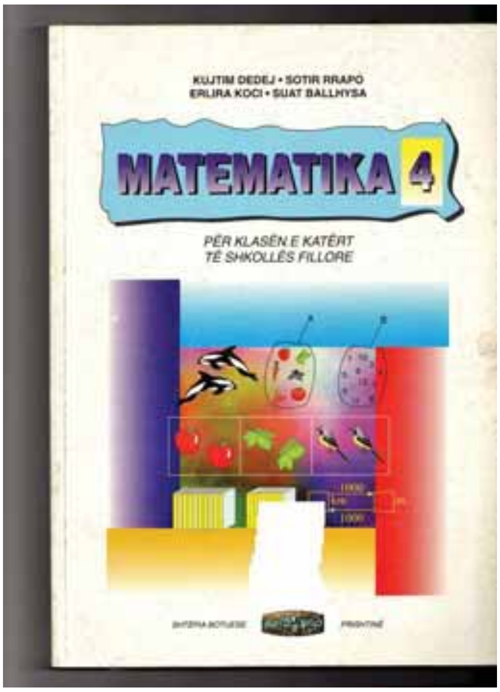
Los resultados de nuestra investigación, aportan evidencias de que este propósito no es sencillo. El conocimiento que tenemos de la diversidad y el nivel de conocimienteos sobre enseñanza de transformaciones geométricas, tras este trabajo constituye un sustrato de partida para el diseño de programas de formación del profesorado, tanto en formación inicial como continua, que sean más efectivos en la formacion de profesores.

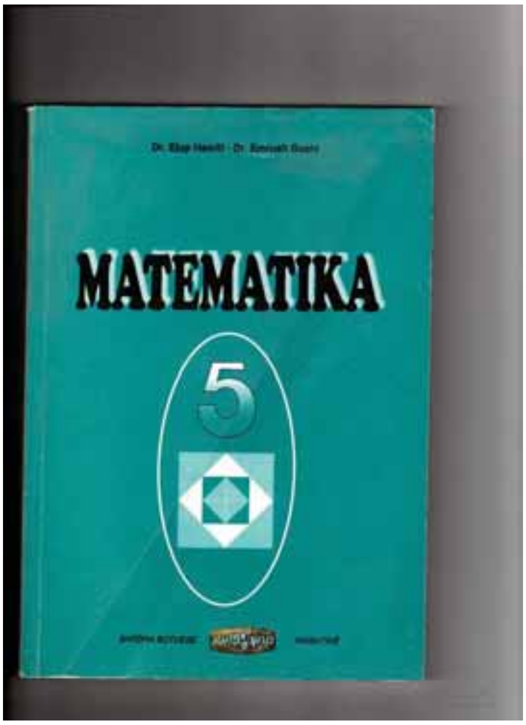
ANEXOS

ANEXO 1. Libros de textos de Primaria - Kosova

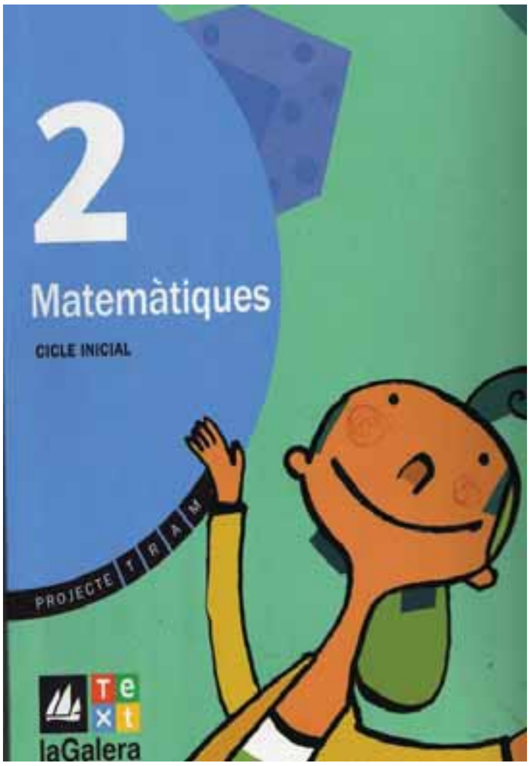


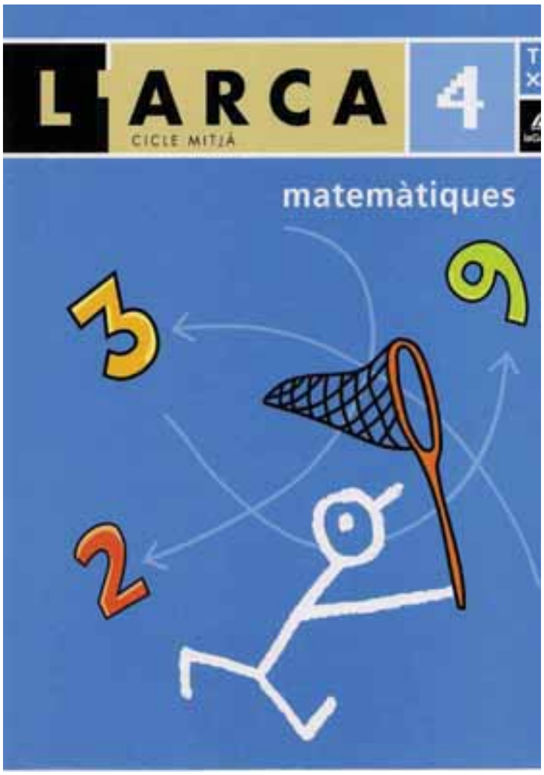


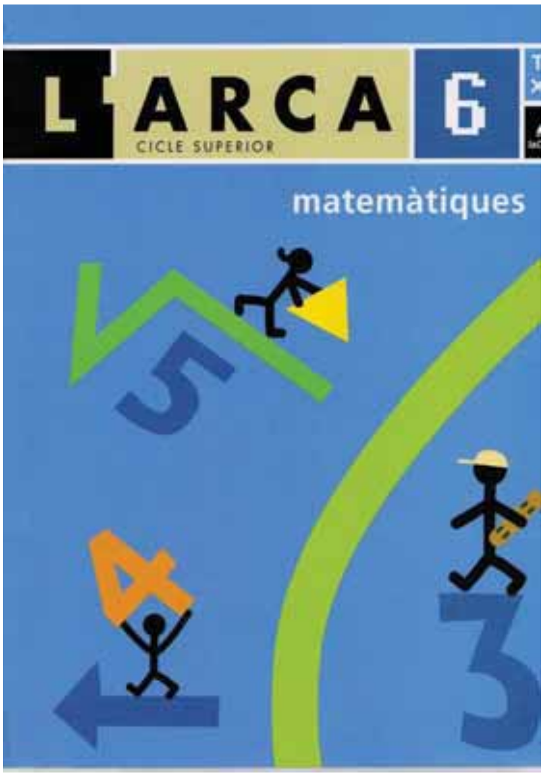




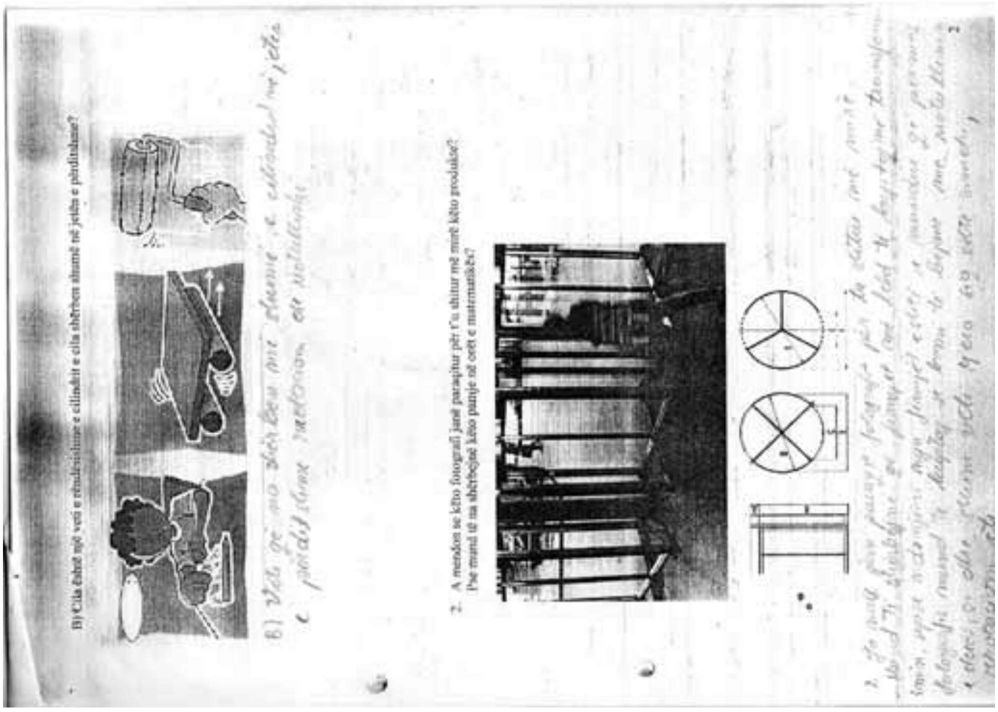
ANEXO 2. Libros de textos de Primaria - Catalunya

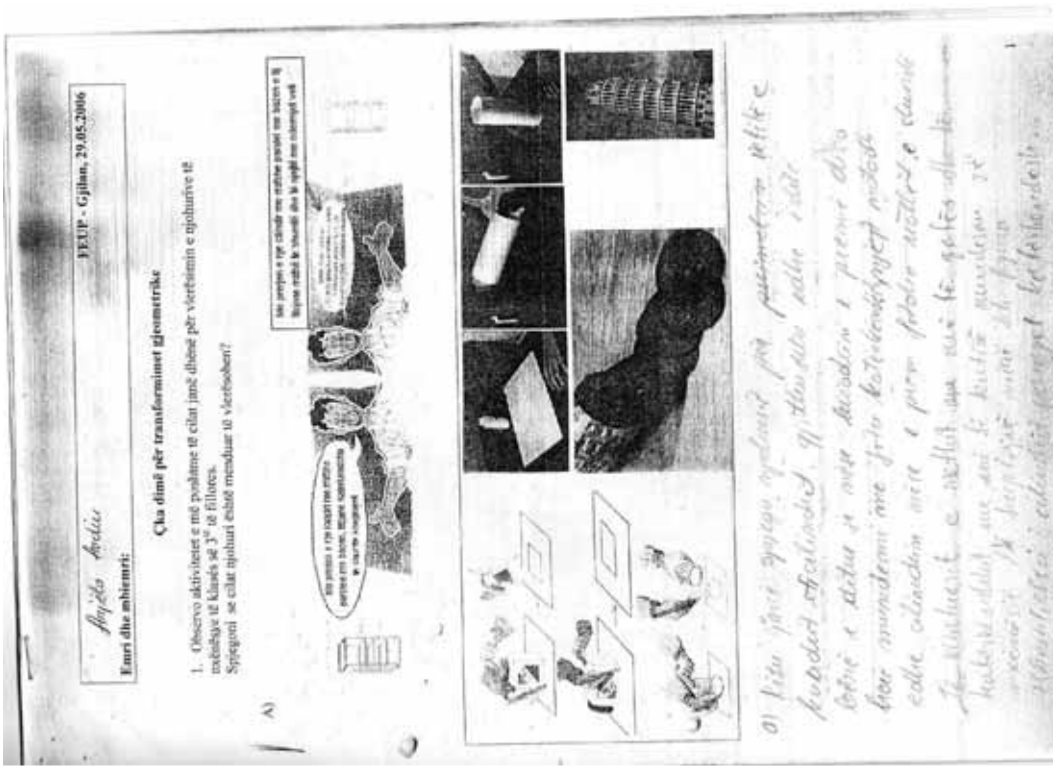


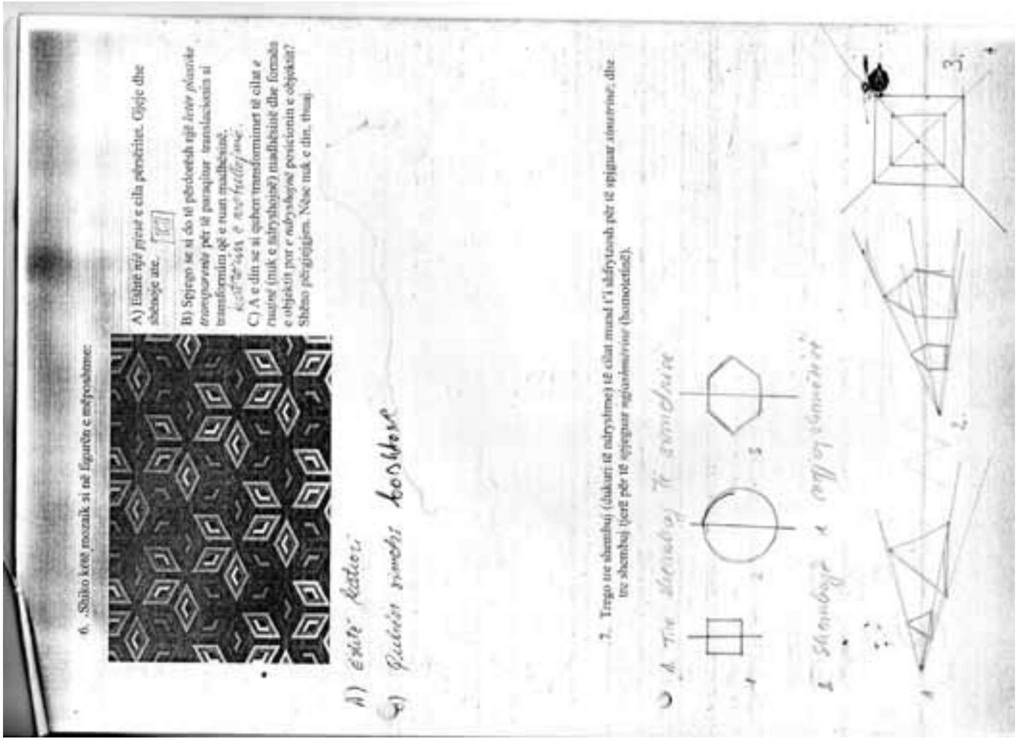




ANEXO 3 - Prueba inicial- une ejemplo del caso de FEUP





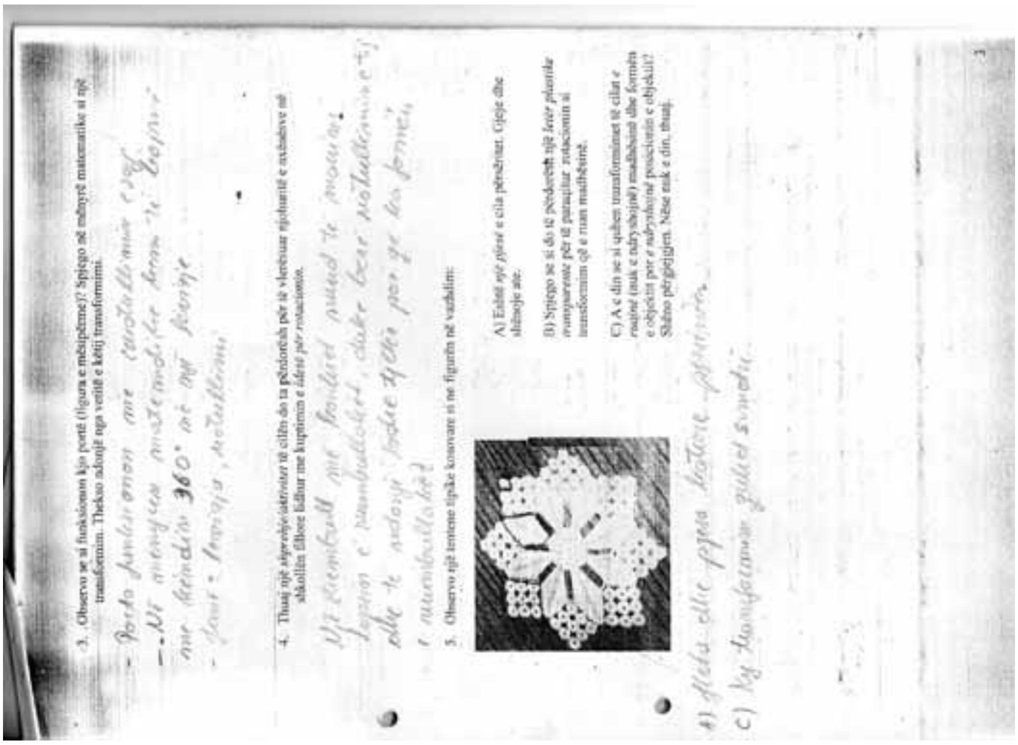

6. Shiko këtë mozaik si në figurën e mëposhtme:

A) Eshtë një pjesë e cila përsëritet. Gjeje dhe shënoje ate.

B) Spjego se si do të përdorësh një letër plastike transparente për të paraqitur translacionin si transformim që e ruan madhësinë.

C) A e din se si quhen transformimet të cilat e ruajnë (nuk e ndryshojnë) madhësinë dhe formën e objektit por e ndryshojnë posicionin e objektit? Shëno përgjegjjen. Nëse nuk e din, thuaj.

7. Trego tre shembuj (dukuri të ndryshme) të cilat mund t'i shfrytzosh për të spjeguar simetrinë; dhe tre shembuj tjerë për të spjeguar ngjashmërinë (homotetinë).


3. Observo se si funksionon kjo portë (figura e mësipërme)? Spjego në mënyrë matematike si një transformim. Thekso ndonjë nga vetitë e këtij transformimi.

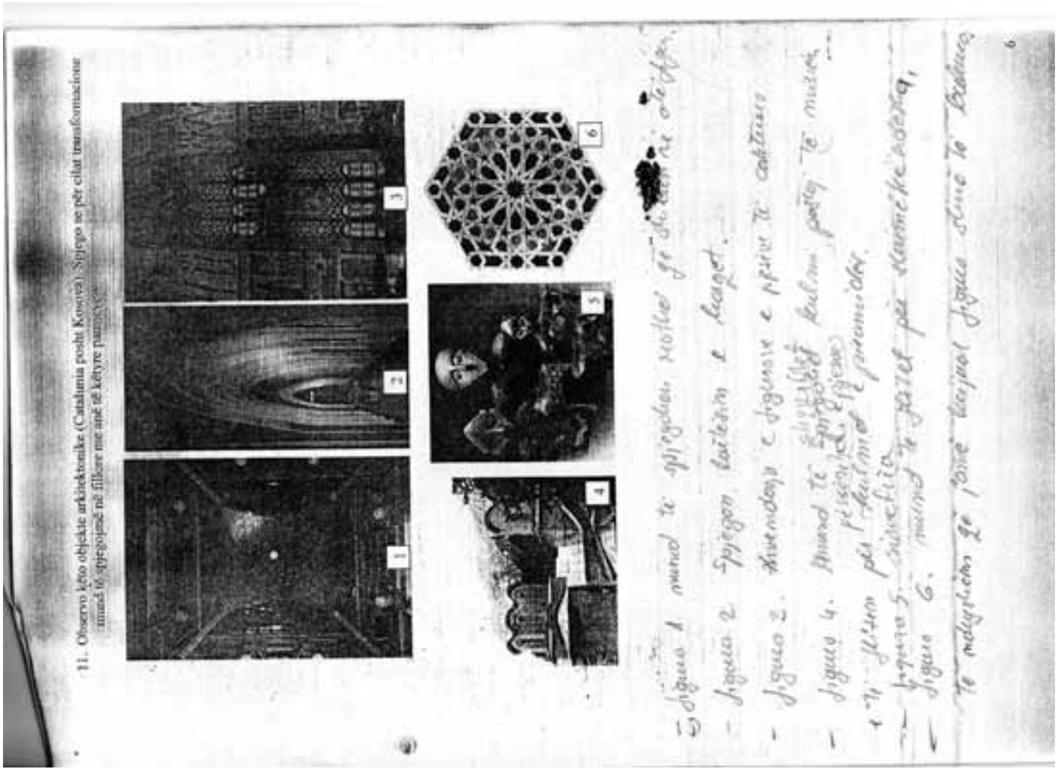
4. Thuaj një shprehje/aktivitet të cilën do ta përdorësh për të vlerësuar njohuritë e nxënësve në shkollën fillore lidhur me kuptimin e idesë për rotacionin.

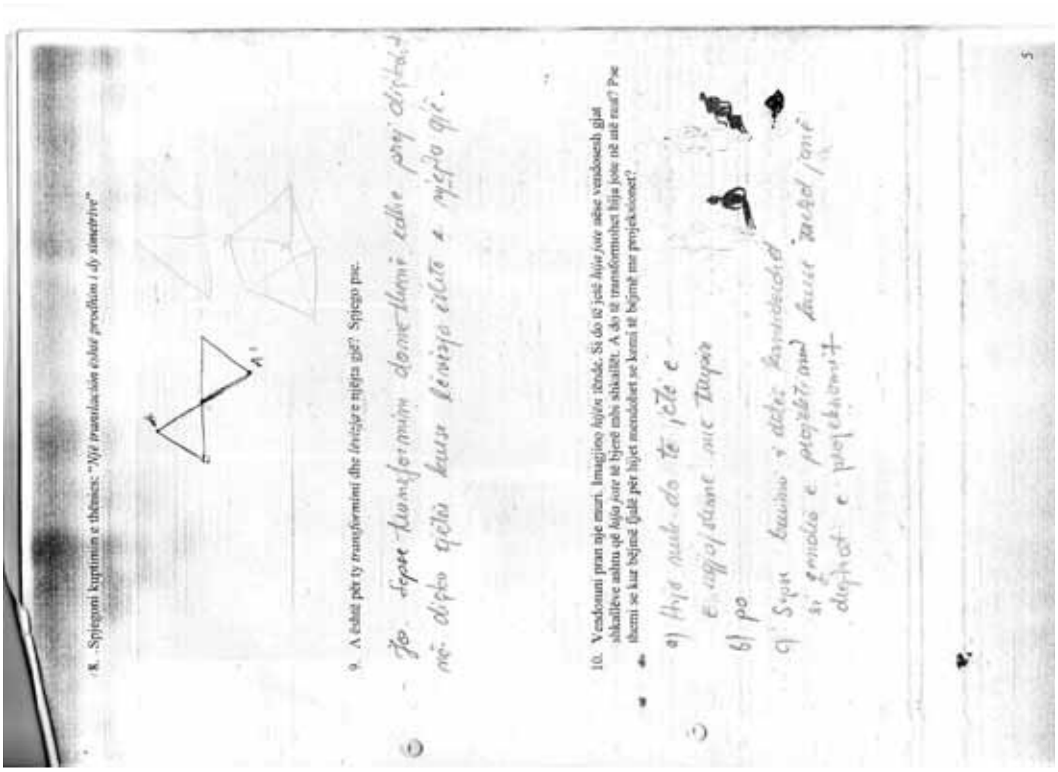
5. Observo një tentene tipike kosovare si ne figurën në vazhdim:

A) Eshtë një pjesë e cila përsëritet. Gjeje dhe shënoje ate.

B) Spjego se si do të përdorësh një letër plastike transparente për të paraqitur rotacionin si transformim që e ruan madhësinë.

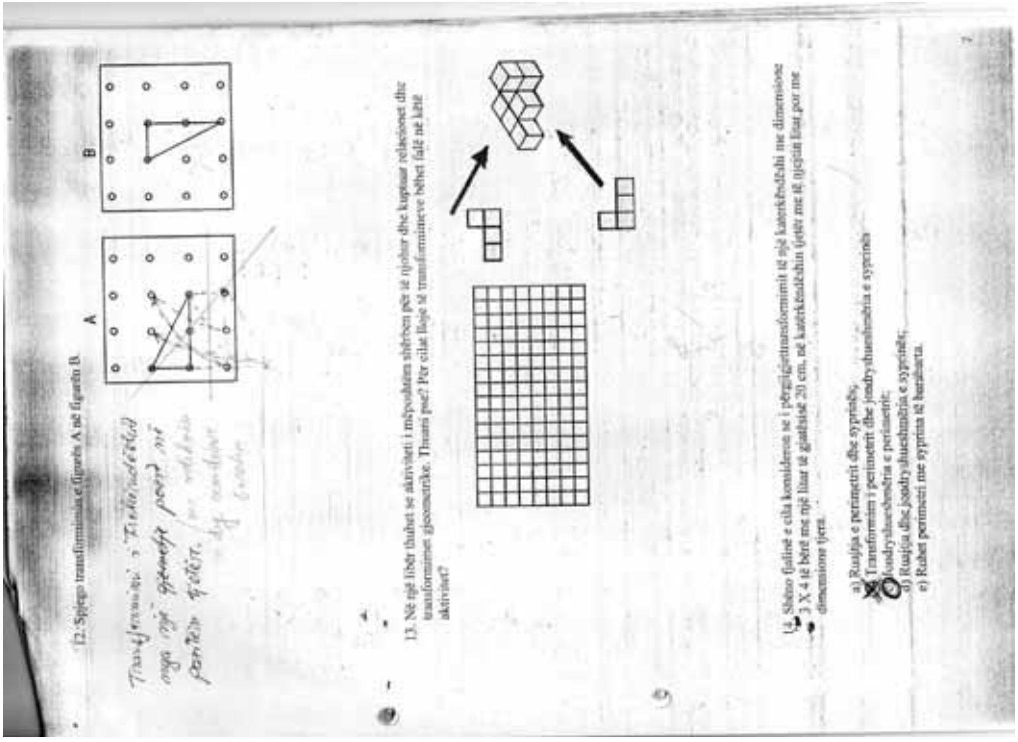
C) A e din se si quhen transformimet të cilat e ruajnë (nuk e ndryshojnë) madhësinë dhe formën e objektit por e ndryshojnë posicionin e objektit? Shëno përgjegjjen. Nëse nuk e din, thuaj.


11. Observo këto objekte arkitektonike (Catalunia posht Kosova). Spjego se për cilat transformacione mund të spjegojmë në fillore me anë të këtyre pamjeve.


8. Spjegoni kuptimin e thënies: "*Një translación është prodhim i dy simetrive*"

9. A është për ty *transformimi* dhe *lëvizja* e njëjta gjë? Spjego pse.

10. Vendosuni pran nje muri. Imagjino *hijen* tënde. Si do të jetë *hija jote* nëse vendosesh gjat shkallëve ashtu që *hija jote* të bjerë mbi shkallët. A do të transformohet hija jote në atë rast? Pse themi se kur bëjmë fjalë për hijet mendohet se kemi të bëjmë me projeksionet?



12. Spjego transformimin e figurës A në figurën B.

Transformimi i Trekëndëshit nga një gjeometri pozitë në pozitën tjetër.

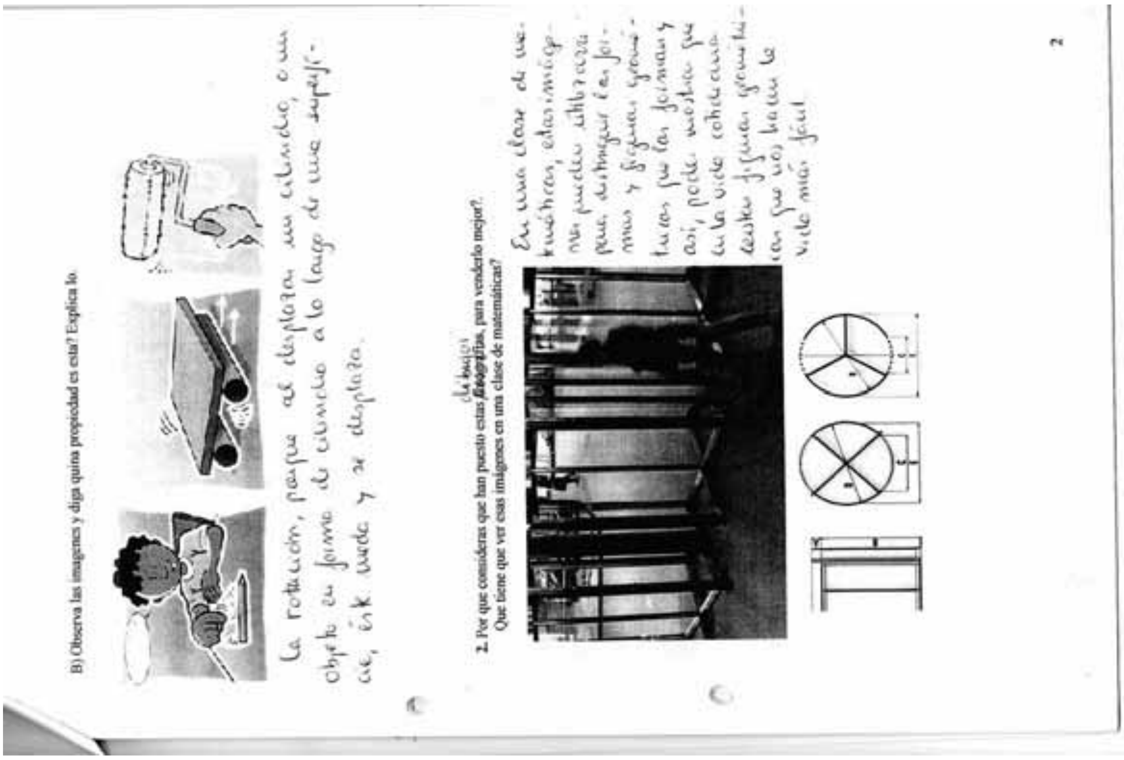
13. Në një libër thuhet se aktiviteti i mëposhtëm shërben për të njohur dhe kuptuar relacionet dhe transformimet gjeometrike. Thuani pse? Për cilat lloje të transformimeve bëhet falë në këtë aktivitet?

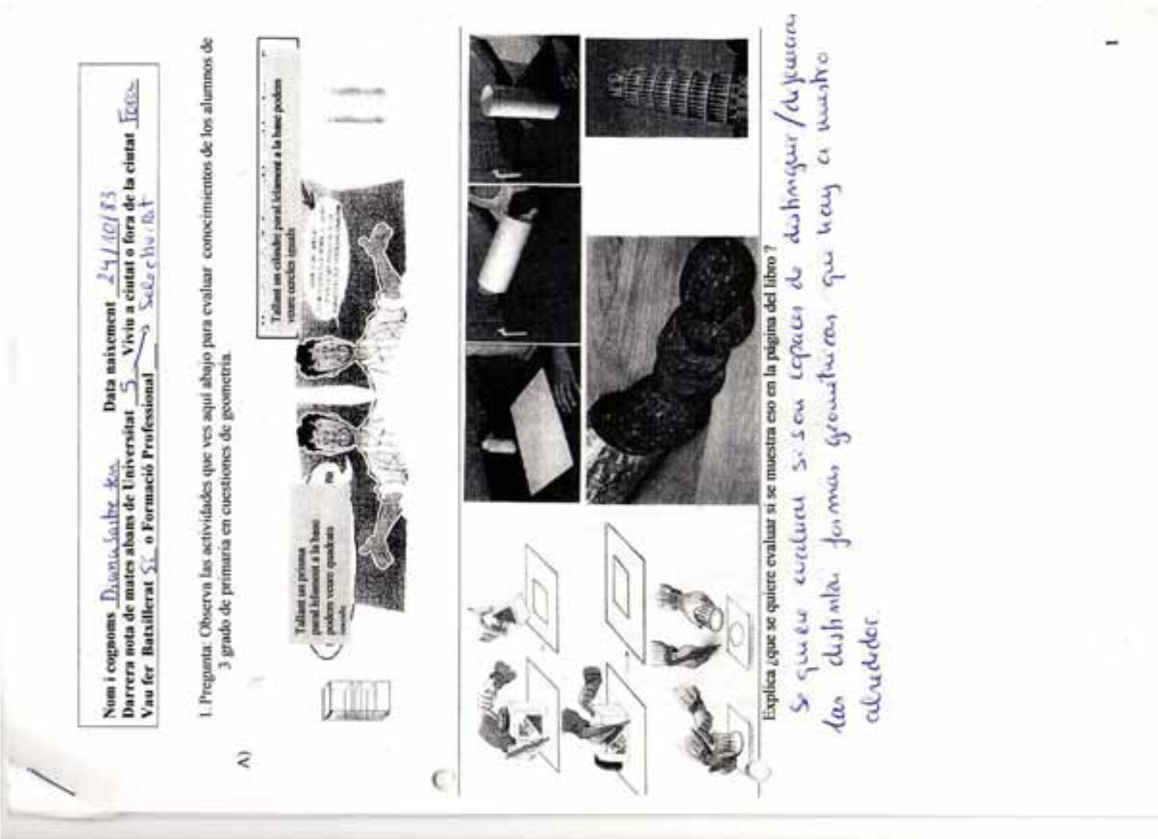
14. Shëno fjalinë e cila konsideron se i përgjigjettransformimit të një katërkëndëshi me dimensione 3 X 4 të bërë me një litar të gjatësisë 20 cm, në katërkëndëshin tjetër me të njejtin litar por me dimensione tjera.

a) Ruajtja e perimetrit dhe syprinës;
b) Transformim i perimetrit dhe jondryshueshmëria e syprinës
c) Jondryshueshmëria e perimetrit;
d) Ruajtja dhe jondryshueshmëria e syprinës;
e) Ruhet perimetri me syprina të barabarta.

7

Anexo 4: Prueba inicial- une ejemplo del caso de FFPUB



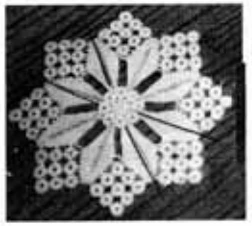


3. Observa como funciona esta puerta. Explícalo matemáticamente como una transformación. Indica alguna propiedad de esta transformación.

4. Indica un enunciado/actividad que haces para evaluar el conocimiento del sentido de la rotacion en la primaria.

- El movimiento de los cuartos de hora en un giro reloj que no sea digital.

5. Observa un bordado típico kosovar como en la figura.



A) Hay una parte que se repite. Encuéntralo y márcalo en el dibujo.

B) Explica como vas a utilizar un papel transparente para mostrar rotación como transformación que conserva tamaño.

C) como se llaman transformaciones ~~cuyos~~ que conservan (no cambian) tamaño y forma del objeto pero cambian la posición del objeto.

A) La parte marcada es lo que se repite

B) Pondría el papel transparente encima del bordado y marcaría con un lápiz la parte que se repite, entonces iría desplazando hacia un lado el papel transparente de modo que lo marcado hecho con lápiz, coincidiera que el siguiente trozo de bordado. Así vería que al desplazar/rotar el papel, se conserva el tamaño

c) Rotación

3

6. Observa ese mosaico en la figura siguiente:

Se repite

A) Hay una parte que se repite. Encuéntralo y márcalo.

B) Explica como vas a utilizar un papel transparente para mostrar la translación como transformación que conserva tamaño.

C) Como se llaman las transformaciones que conservan (no cambian) el tamaño y la forma del objeto pero cambian la posición del objeto.

A) La parte marcada es lo que se repite

B) En el papel transparente dibujaría la parte que se repite e iría transparentándolo de un cubo a otro para corroborar que conserva el tamaño.

C) Rotación

7. Presenta tres ejemplos (actividades) que puedes utilizar en la explicación de la simetria; y tres ejemplos para explicar la semejanza (homotecia)

3 ejemplos de simetría
- El reflejo de una imagen u objeto en un lago.
- La imagen que refleja un ~~es~~ espejo de un objeto.
- La fotocopia de una imagen en una parte/mitad de una hoja con la misma imagen en la otra mitad.

Homotecia
- dibujar círculos con objetos redondos creando círculos de diferentes tamaños.
- Las figuras de las muñecas rusas en las que de una más grande sale una pequeña.
- Una caja de llaves "allen" porque todas son iguales pero de distinto tamaño

4

8. Explica el sentido de enunciado: "La translación es producto de dos simetrías"

9. Es para ti la transformación y movimiento lo mismo? Explica porque.

No, porque el movimiento no tiene porque suponer una transformación. Podemos mover dos figuras semejantes o iguales sin que haya transformación.

10. Colócate al lado de una escalera en el primer escalón. Imagina tu sombra. a) Como será tu sombra si la persona sube tres escalones? b) Puede ser que haya transformación? c) Porque decimos que cuando se trabaja con las sombras se trabajan proyecciones?

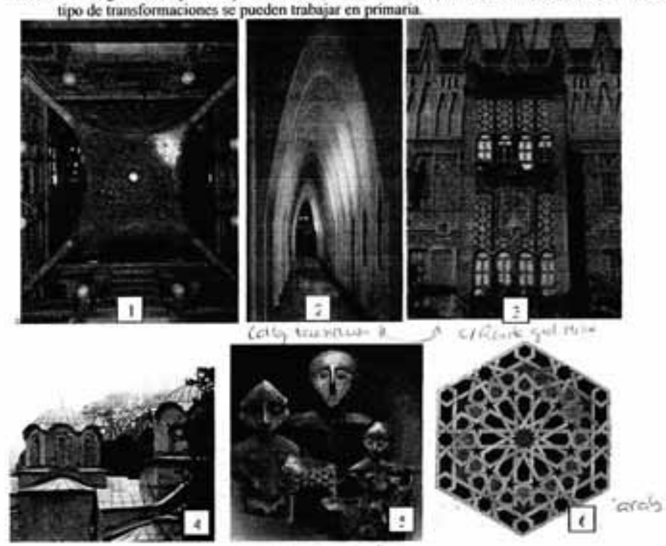
a) tu sombra será más alargada y deformada.

b) Sí

c) Porque las sombras aparecen cuando un foco de luz incide sobre un cuerpo y éste se proyecta en un fondo opaco. Si no tuviéramos un foco de luz ni un fondo opaco, no tendríamos sombra. Dependería también desde dónde nos incidiera el foco, ya que si lo hiciera perpendicularmente a nuestra cabeza, es decir, en el eje de la cabeza, no proyectaría ninguna sombra.

5

11. Mira los siguientes objetos arquitectónicos (arriba de Catalunya, abajo de Kosova). Explica que tipo de transformaciones se pueden trabajar en primaria.

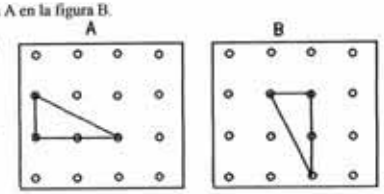


1- Simetría
2- Homotecia
3-
4-
5-
6- Simetría

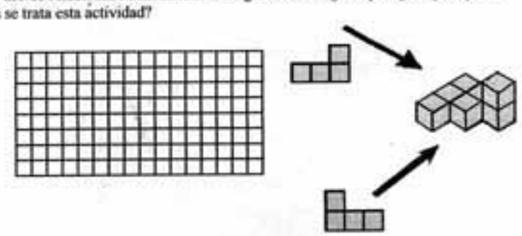
6

12. Explica la transformación de la figura A en la figura B.

Se trata de una rotación
porque la forma y el ta-
maño de la figura no
cambia pero la posición
del objeto sí.



13. En un libro de texto se dice que la siguiente actividad tiene como objetivo reconocer el aprendizaje en el uso de relaciones i transformaciones geométricas. ¿Por que? ¿De que tipo de transformaciones se trata esta actividad?

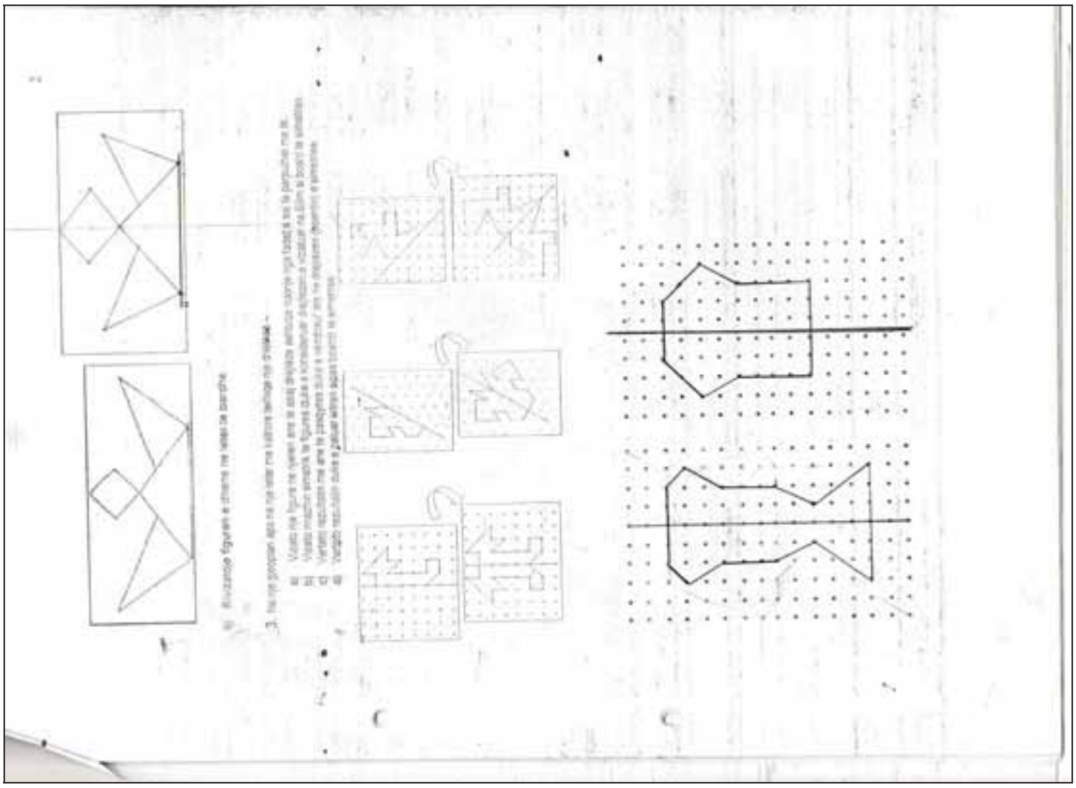


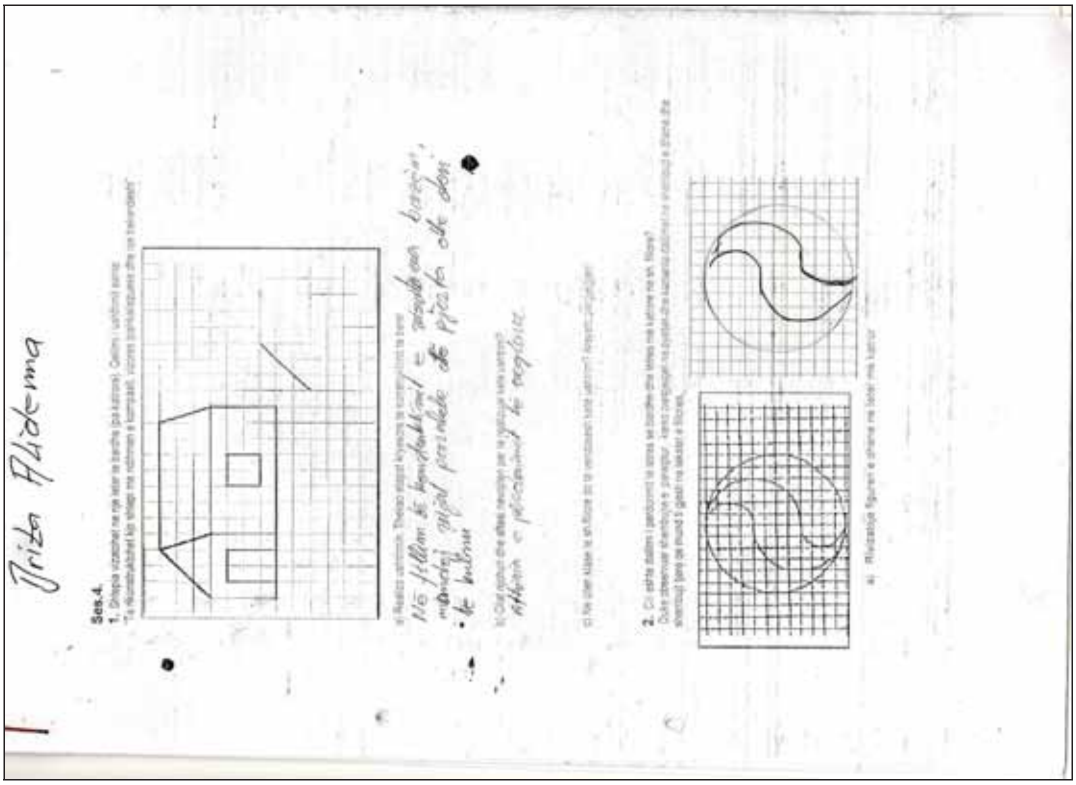
14. Marca las frases que consideras que ajustan la que tiene una transformación que convierte un rectángulo de 3x7cm hecho con na cuerda de 20cm en otro rectángulo diferente con la misma cuerda que tiene medidas diferentes

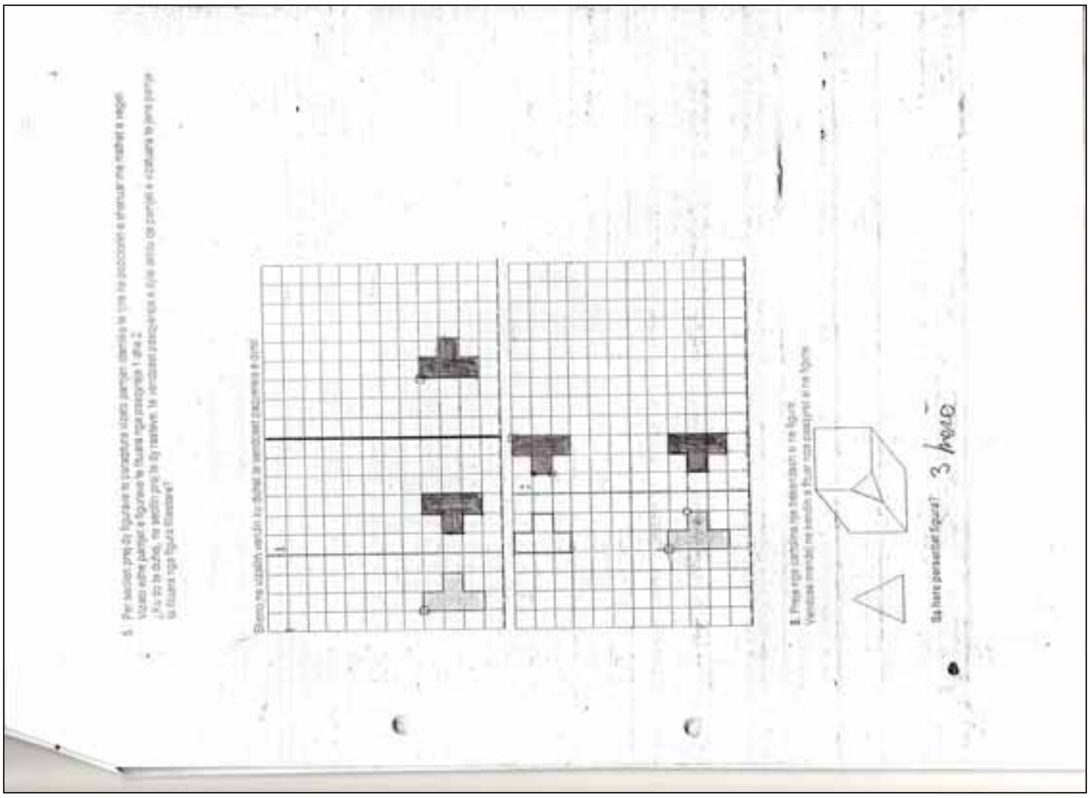
a. conservación de perímetro y área
b. transformación de perímetro e invariable de área
c. Invariaría de perímetro
d. Conservación y invariancia de área
e. Mantenimiento de perímetro con igualdad de área

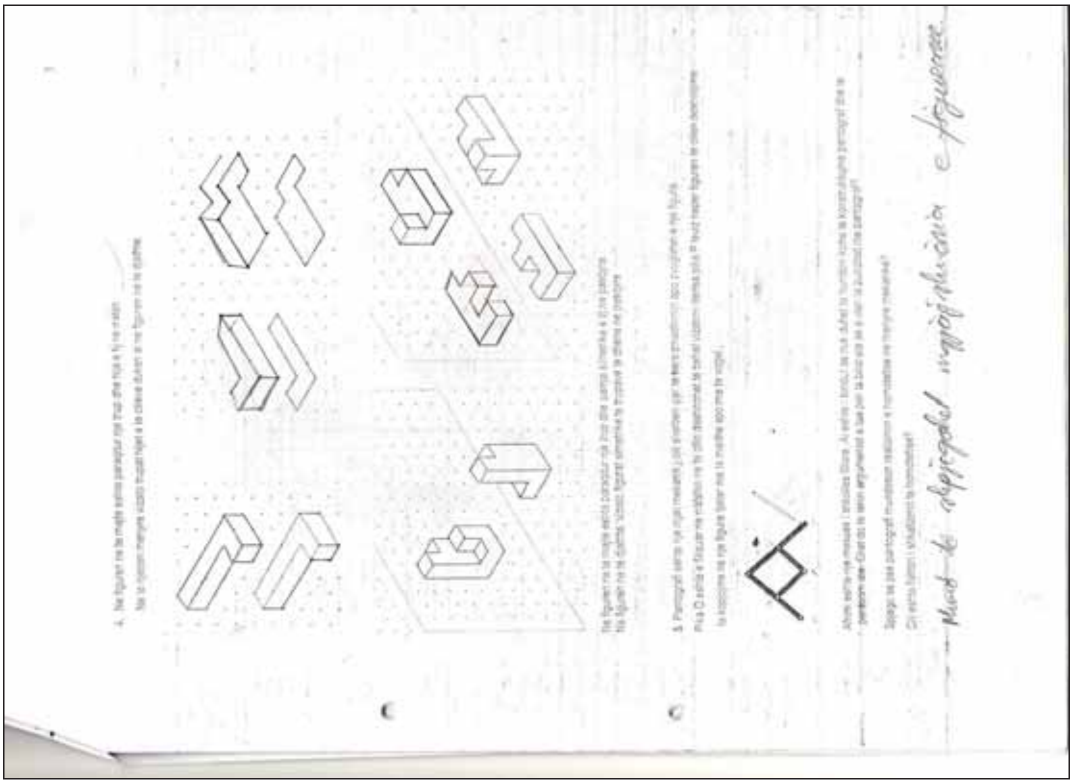
7

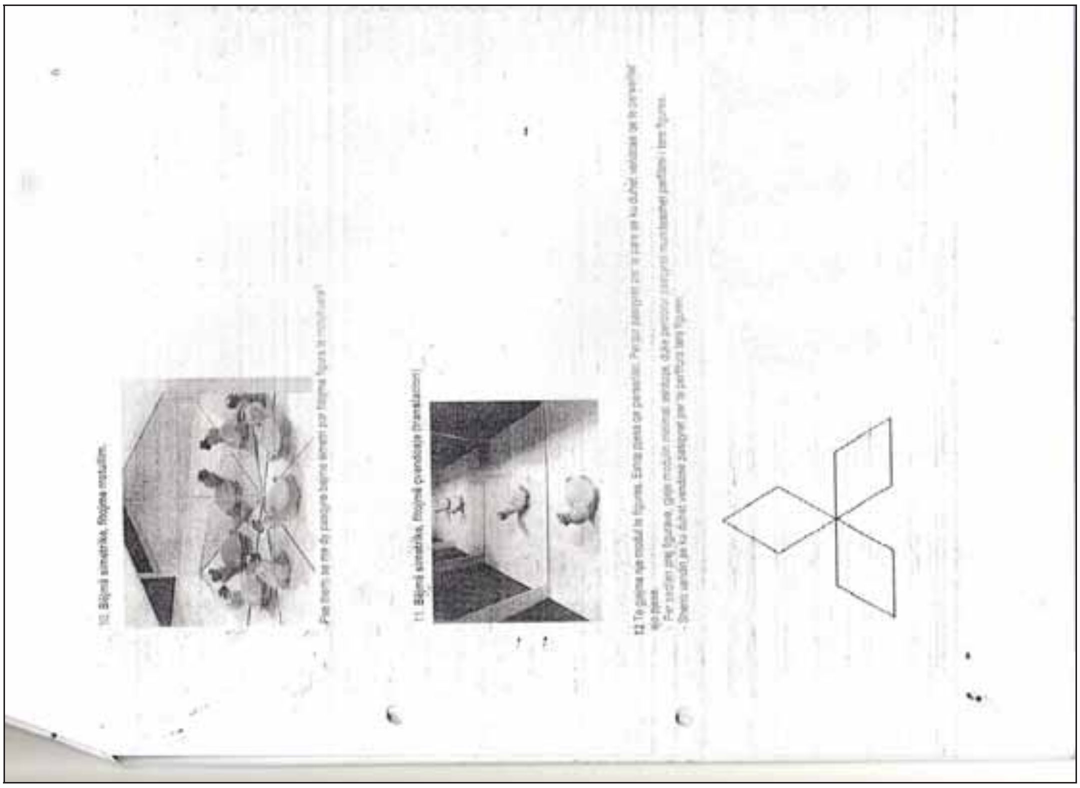
ANEXO 5: Sesion de la práctica - ejemplo del caso FEUP

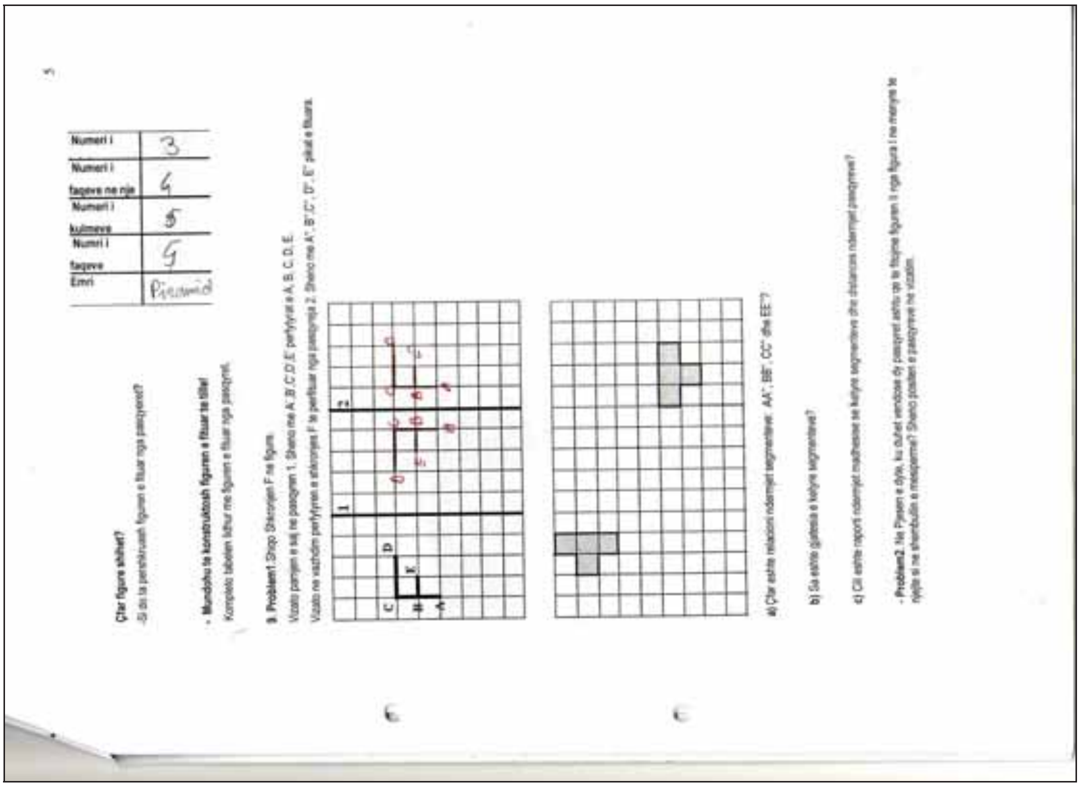




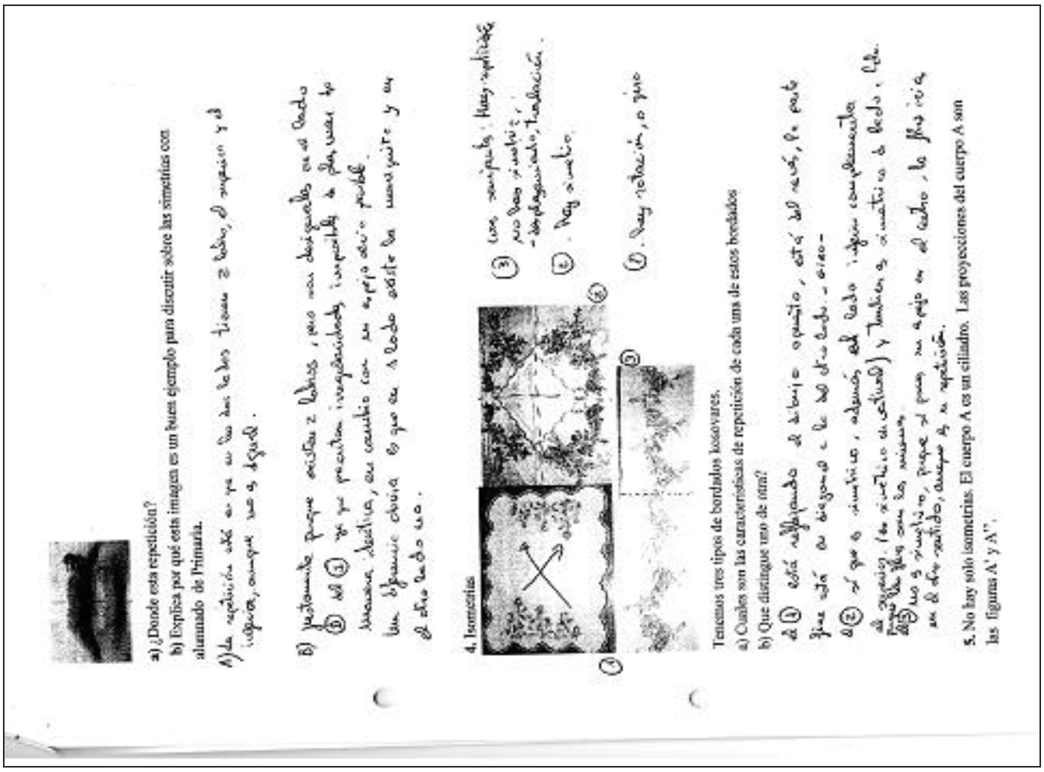








ANEXO 6: Sesion de la práctica - ejemplo del caso FFPUB



a) ¿Donde esta repetición?

b) Explica por qué esta imagen es un buen ejemplo para discutir sobre las simetrias con alumnado de Primaria.

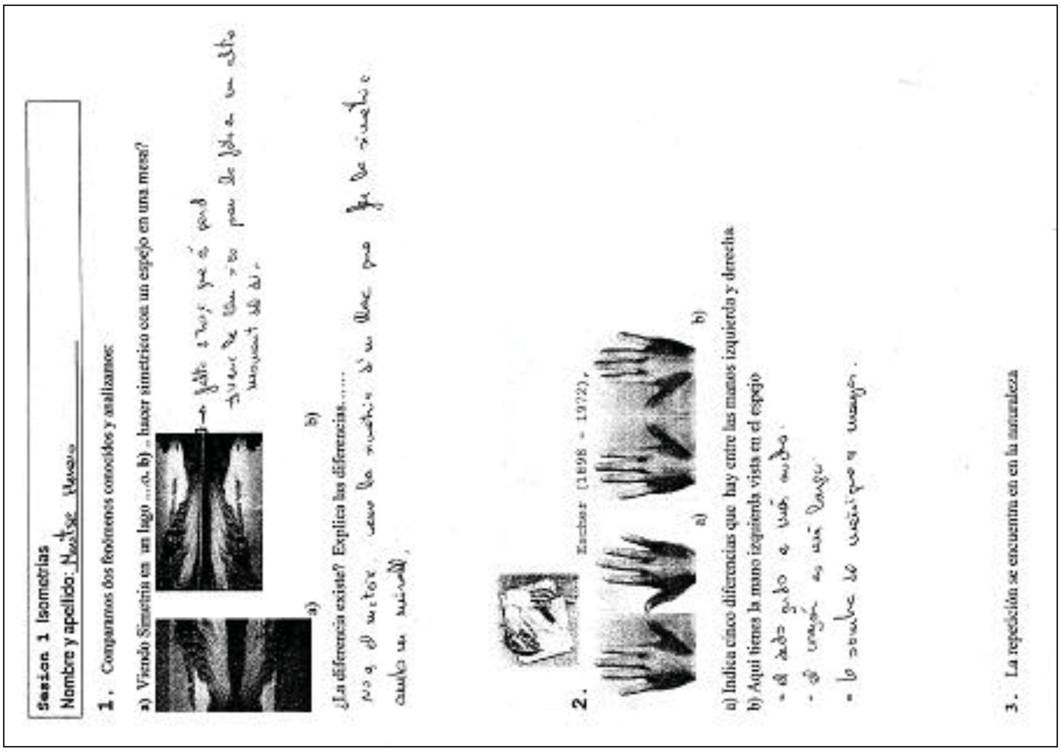
4. Isometrias

Tenemos tres tipos de bordados kosovares.

a) Cuales son las características de repetición de cada una de estos bordados

b) Que distingue uno de otra?

5. No hay solo isometrias. El cuerpo A es un cilindro. Las proyecciones del cuerpo A son las figuras A' y A''.



Sesion 1 Isometrias

Nombre y apellido:

1. Comparamos dos fenómenos conocidos y analizamos:

a) Viendo Simetria en un lago ....o. b) .. hacer simetrico con un espejo en una mesa?

a) b)

¿La diferencia existe? Explica las diferencias......

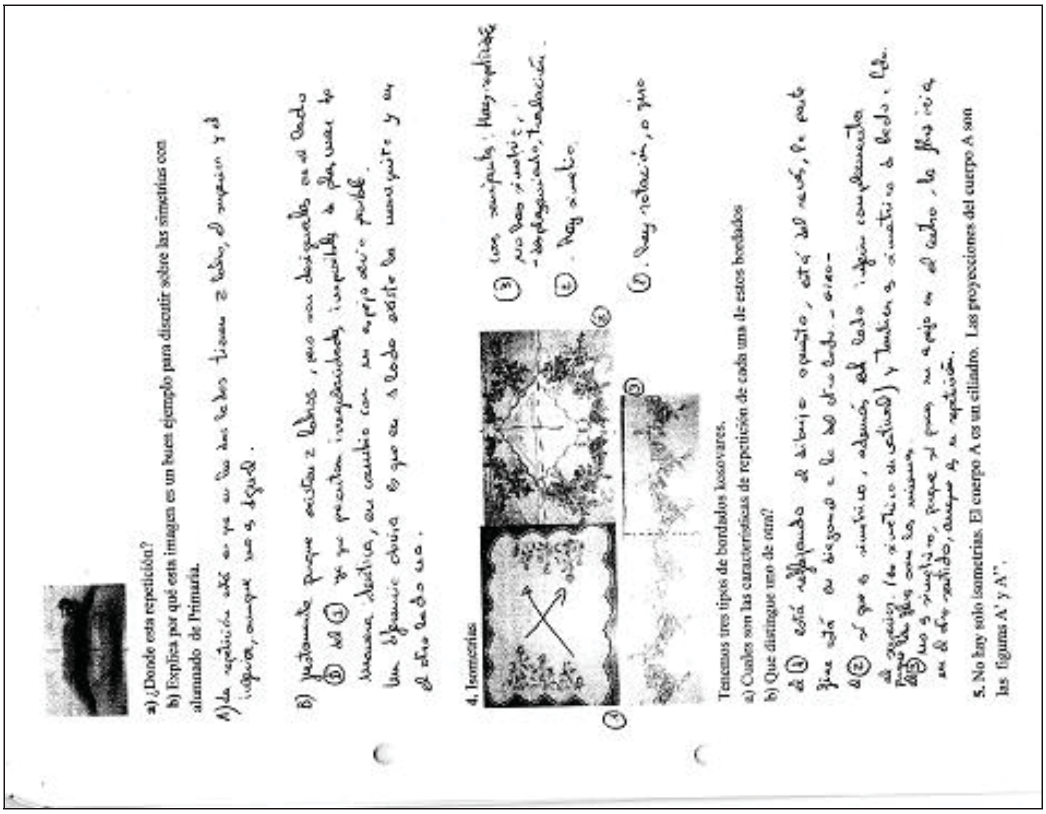
2. Escher (1898 - 1972),

a) b)

a) Indica cinco diferencias que hay entre las manos izquierda y derecha

b) Aqui tienes la mano izquierda vista en el espejo

3. La repetición se encuentra en en la naturaleza



a) ¿Donde esta repetición?

b) Explica por qué esta imagen es un buen ejemplo para discutir sobre las simetrías con alumnado de Primaria.

A) La repetición está en que en los dos lados tiene 2 lobos, el superior y el inferior, aunque no es igual.

B) justamente porque existen 2 lobos, pero son desiguales en el lado [illegible] ya que presentan irregularidades, imposible de plasmar de manera idéntica, en cambio con un espejo sería posible. Una diferencia obvia es que en 1 lado existe la [illegible] y en el otro lado no.

4. Isometrias

1 2 3

3. con conjunto: Hay repetición, no hay simetría, - desplazamiento, traslación.

2. Hay simetría.

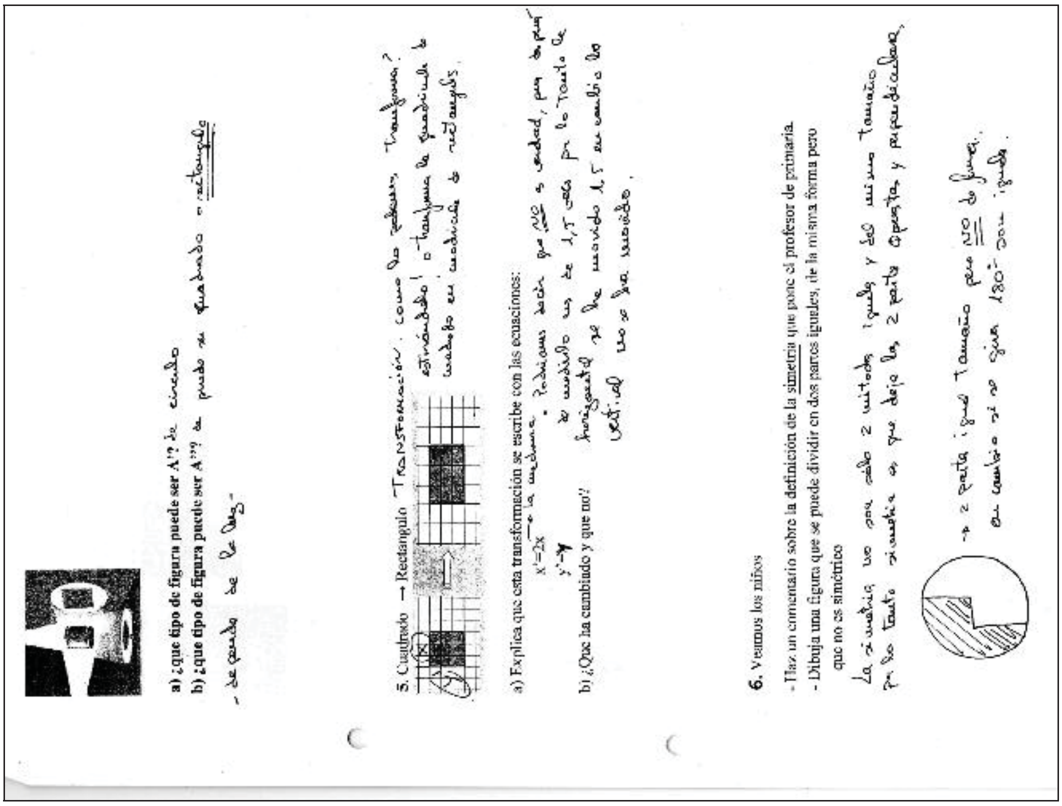
1. Hay rotación, o giro

Tenemos tres tipos de bordados kosovares.

a) Cuales son las características de repetición de cada una de estos bordados

b) Que distingue uno de otra?

5. No hay solo isometrias. El cuerpo A es un cilindro. Las proyecciones del cuerpo A son las figuras A' y A''.



a) ¿que tipo de figura puede ser A'? de círculo

b) ¿que tipo de figura puede ser A''? se puede ser cuadrado o rectangulo

- depende de la luz -

5. Cuadrado → Rectangulo TRANSFORMACIÓN. como lo sabemos transforma? estirándolo! o transforma la cuadrícula de cuadrados en cuadrícula de rectángulos.

a) Explica que esta transformación se escribe con las ecuaciones:

$x'=2x$

$y'=y$

b) ¿Que ha cambiado y que no?

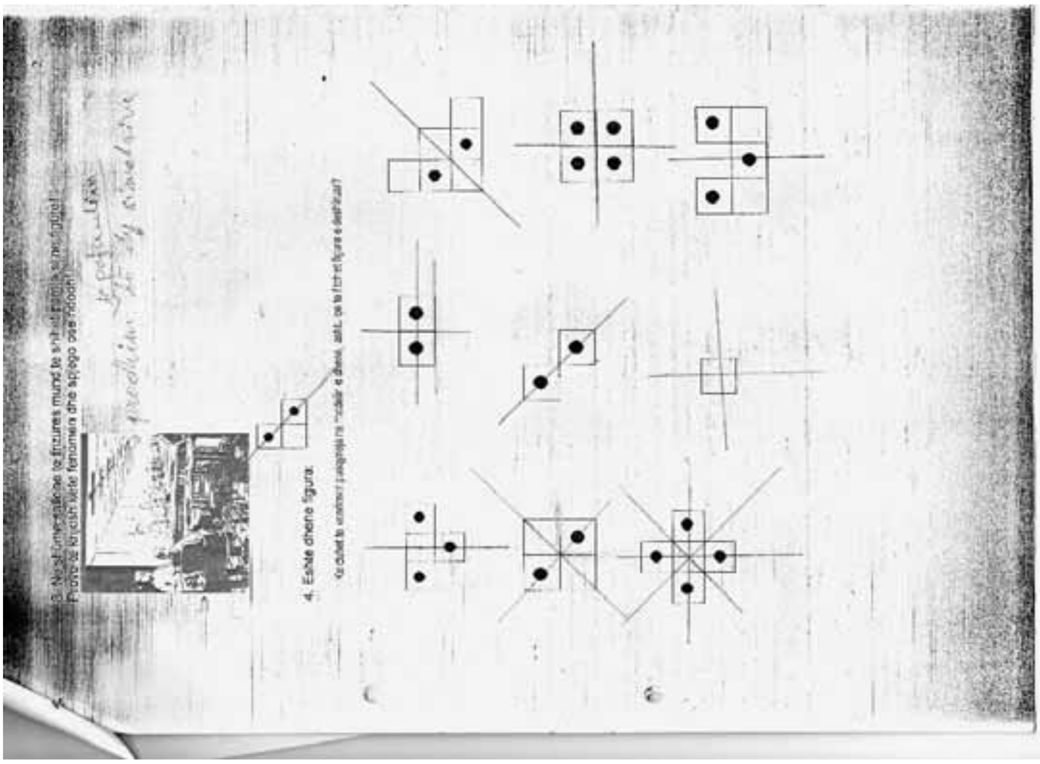
6. Veamos los niños

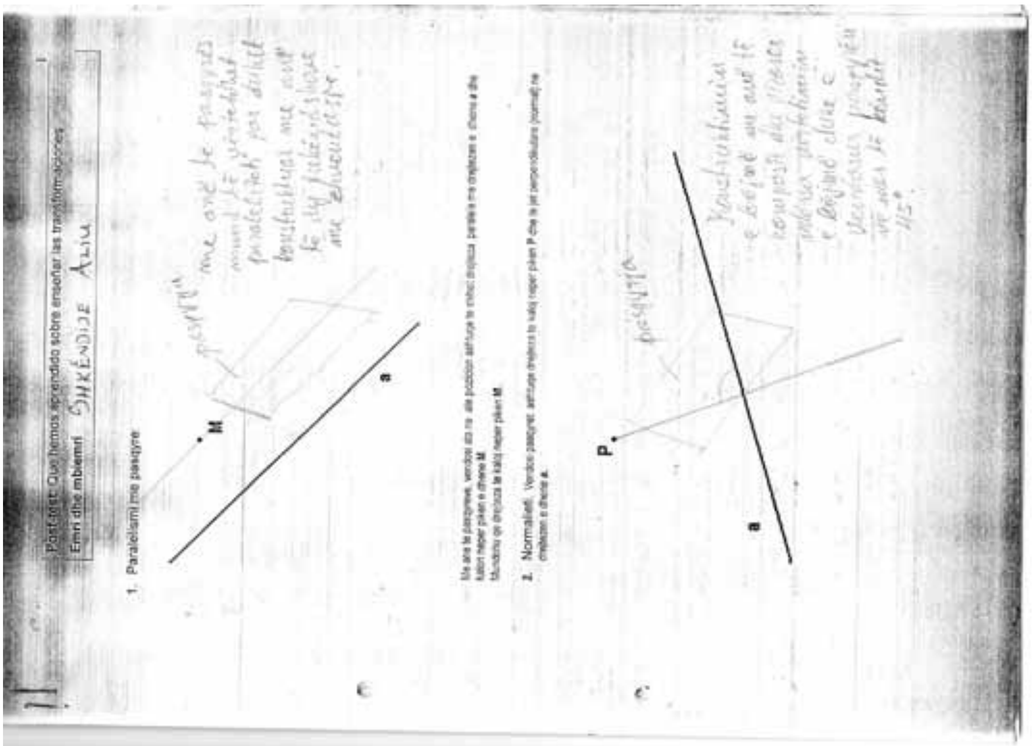
- Haz un comentario sobre la definición de la simetria que pone el profesor de primaria.
- Dibuja una figura que se puede dividir en dos partes iguales, de la misma forma pero que no es simétrico

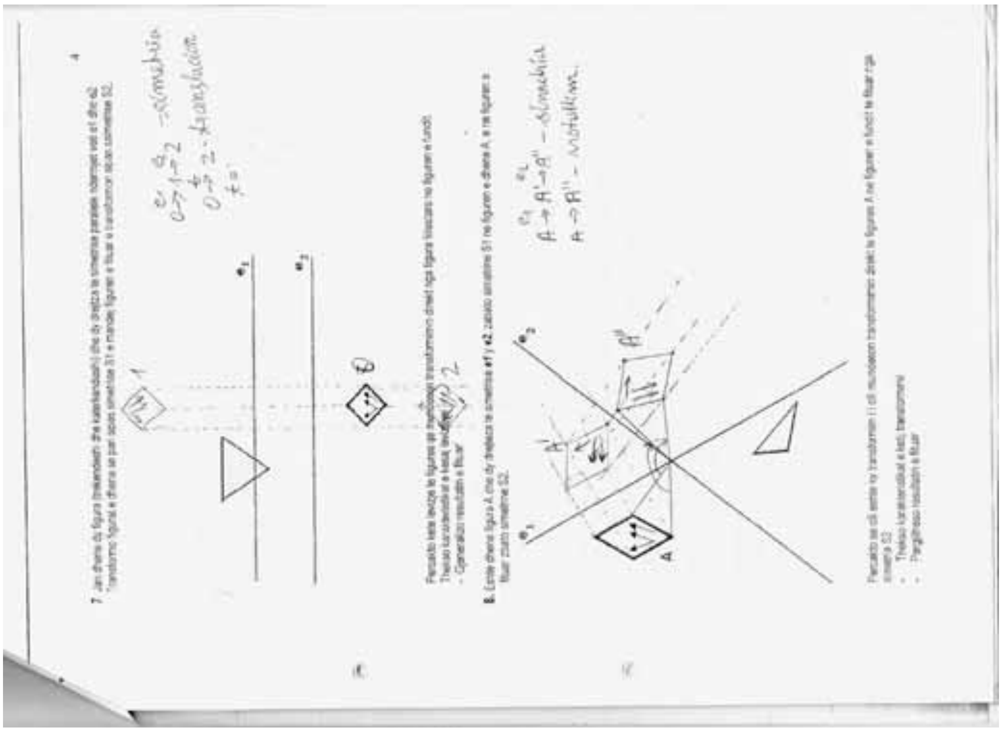
La simetría no son sólo 2 mitades iguales y del mismo tamaño por lo tanto simetría es que deja las 2 partes opuestas y perpendiculares,

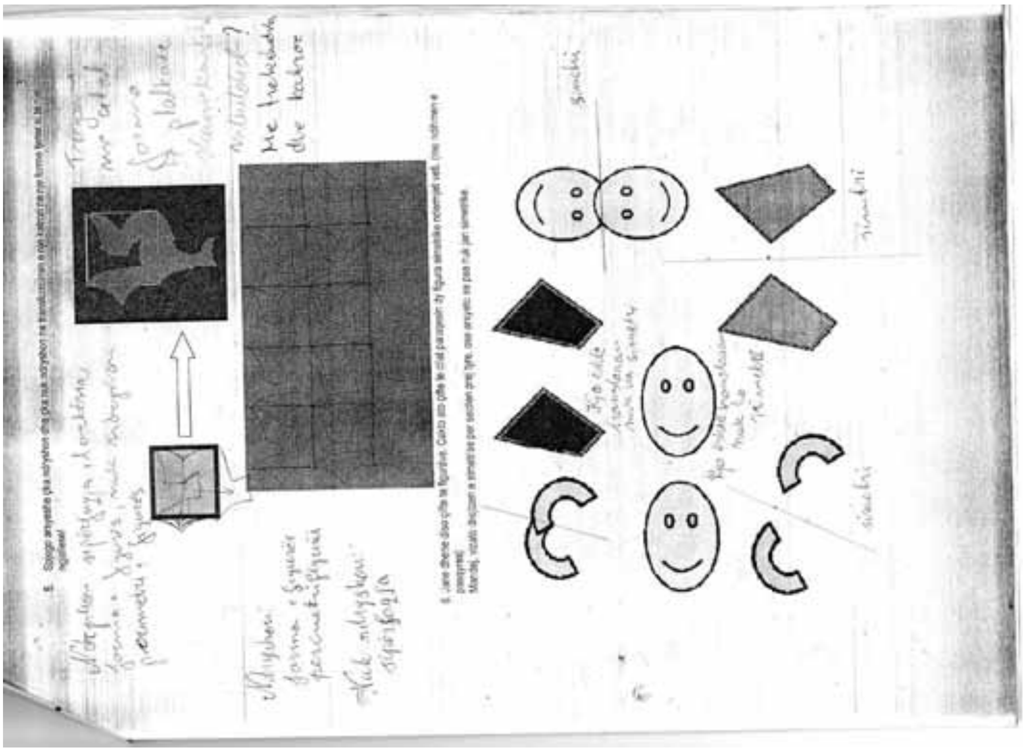
→ 2 partes iguales tamaño pero NO de forma. en cambio si se gira 180° son iguales.

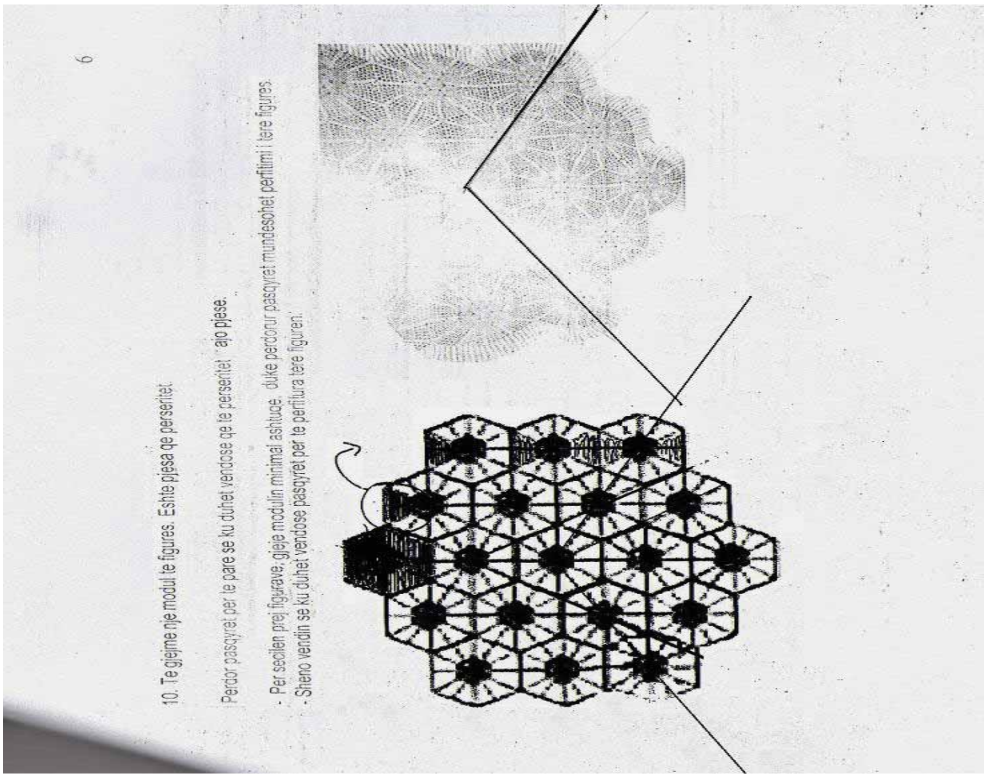
ANEXO 7: Prueba Final – un ejemplo del caso FEUP

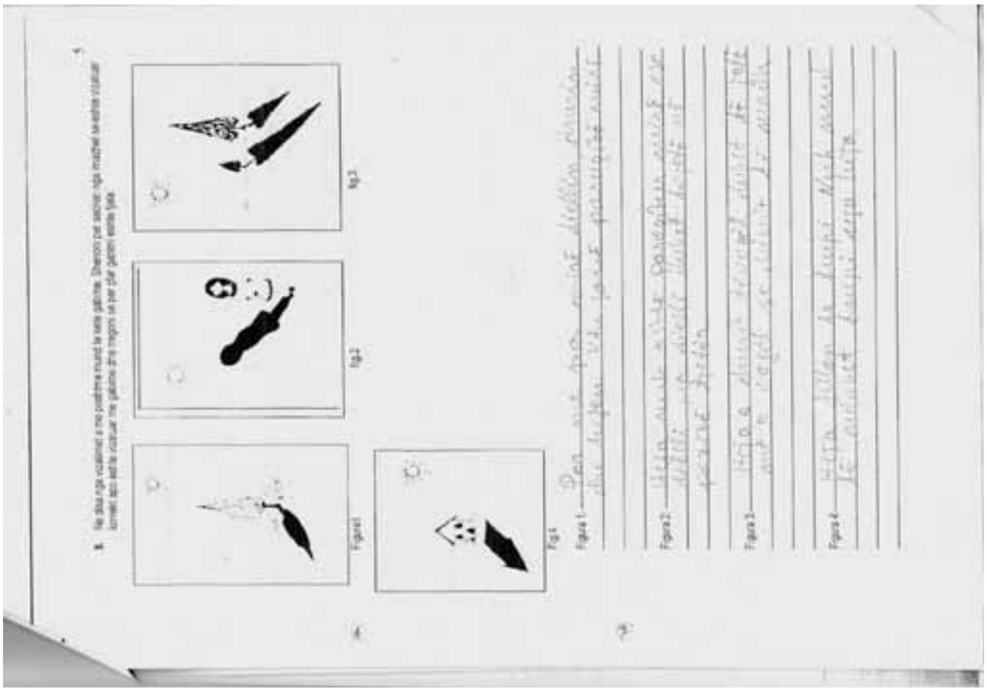




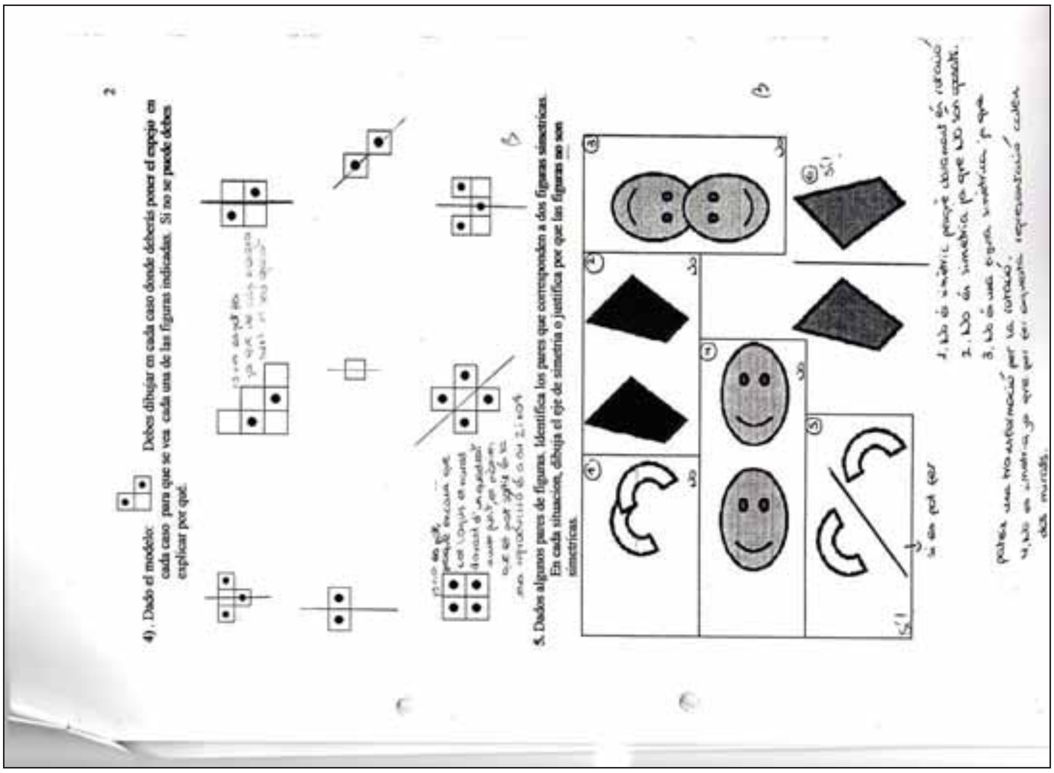


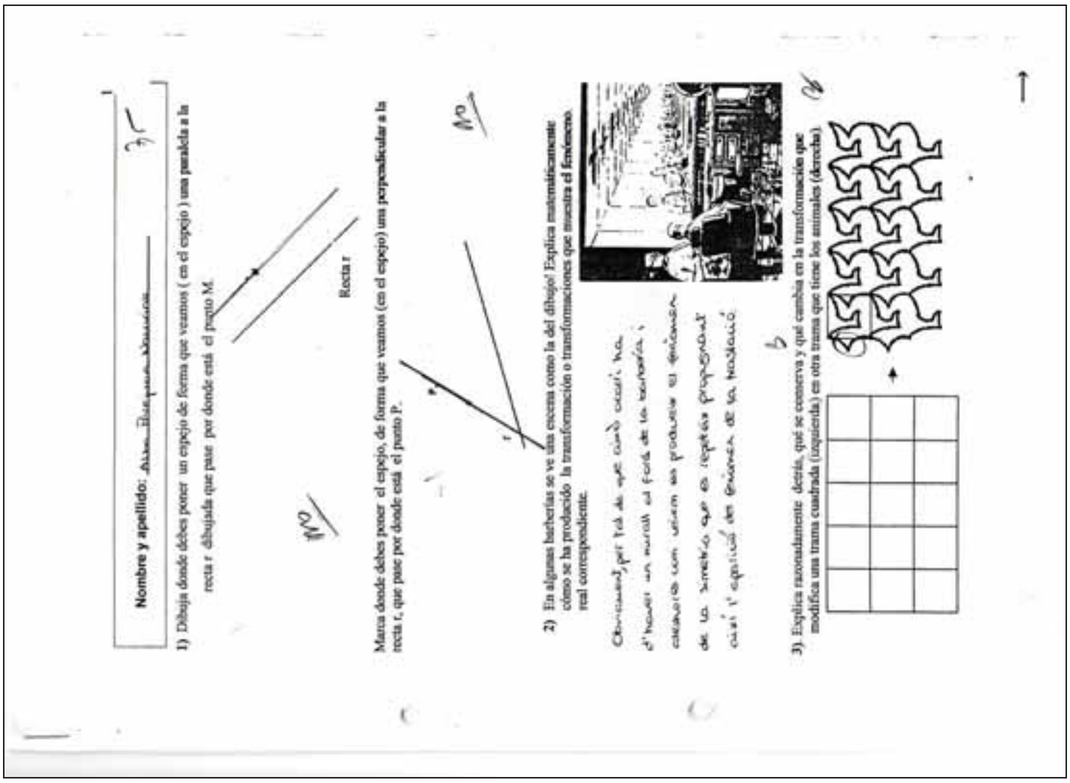


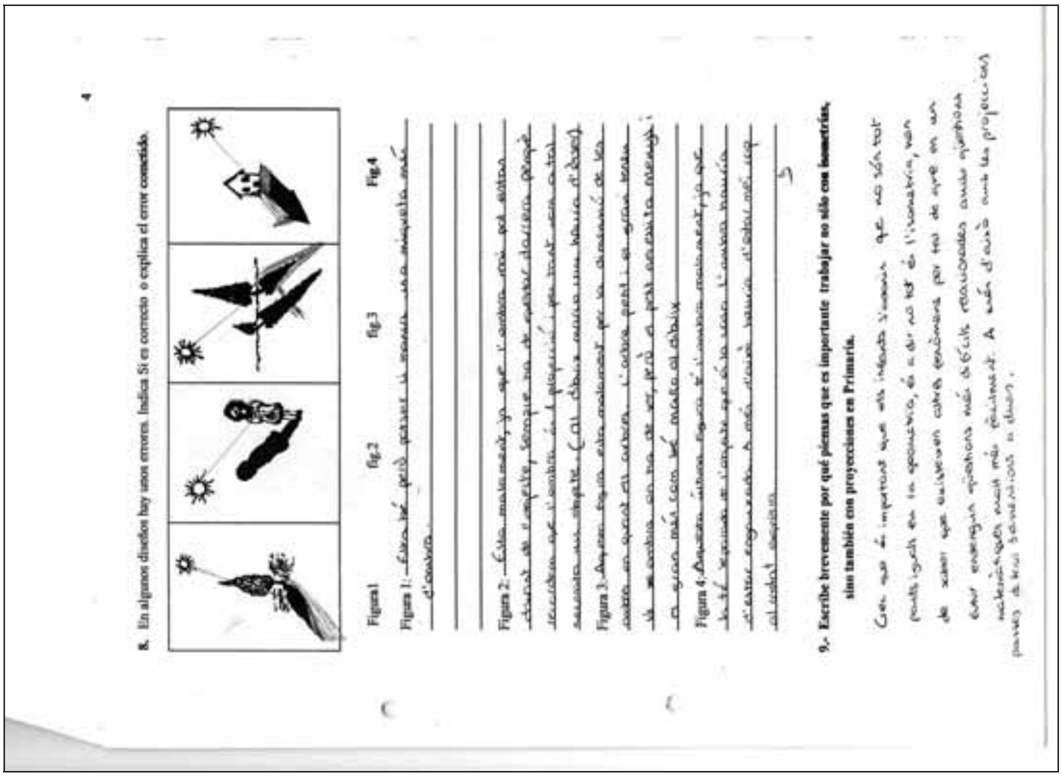

6
10. Te gjejme nje modul te figures. Eshte pjesa qe perseritet.
Perdor pasqyret per te pare se ku duhet vendose qe te perseritet "ajo pjese".
- Per secilen prej figurave, gjeje modulin minimal ashtuqe, duke perdorur pasqyret mundesohet perfilimi i tere figures.
- Sheno vendin se ku duhet vendose pasqyret per te perfitura tere figuren.



ANEXO 8: Prueba Final - un ejemplo del caso FFPUB







4

8. En algunos diseños hay unos errores. Indica Si es correcto o explica el error cometido.

Figura1 fig.2 fig.3 Fig.4

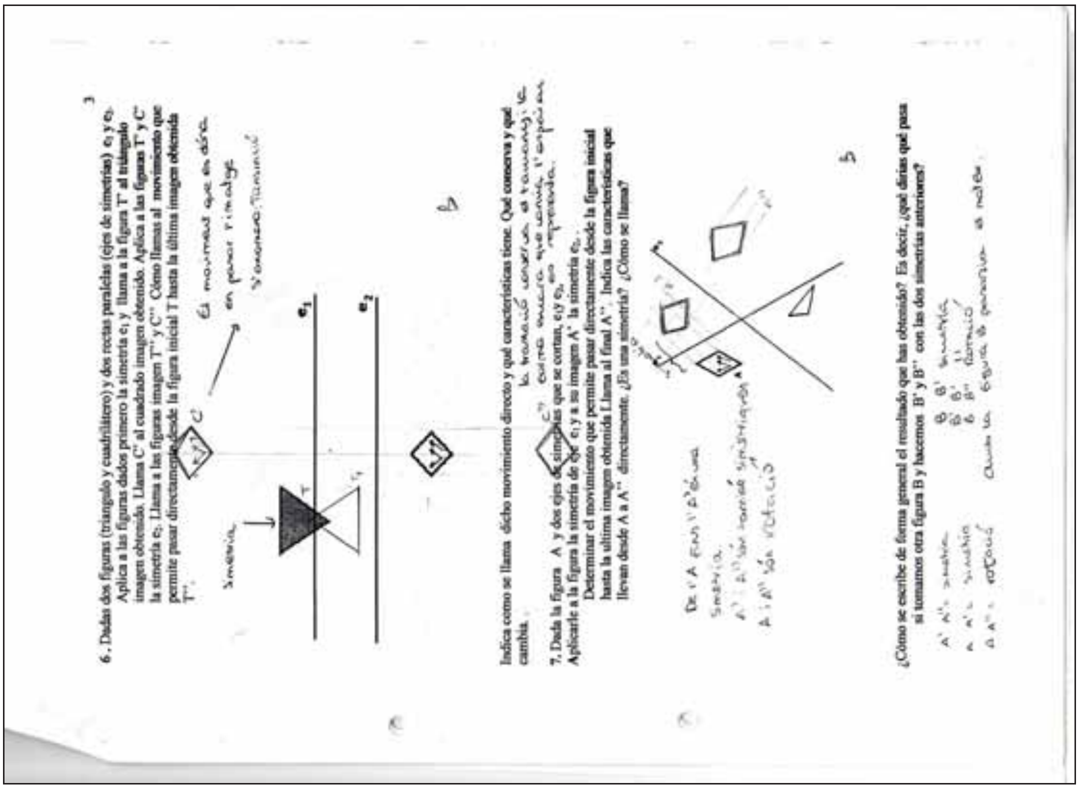
Figura 1:

Figura 2:

Figura 3:

Figura 4:

9.- Escribe brevemente por qué piensas que es importante trabajar no sólo con isometrías, sino también con proyecciones en Primaria.



3

6. Dadas dos figuras (triangulo y cuadrilátero) y dos rectas paralelas (ejes de simetrías) e_1 y e_2. Aplica a las figuras dados primero la simetria e_1 y llama a la figura T' al triángulo imagen obtenido. Llama C' al cuadrado imagen obtenido. Aplica a las figuras T' y C' la simetria e_2. Llama a las figuras imagen T'' y C'' Cómo llamas al movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial T hasta la última imagen obtenida T''.

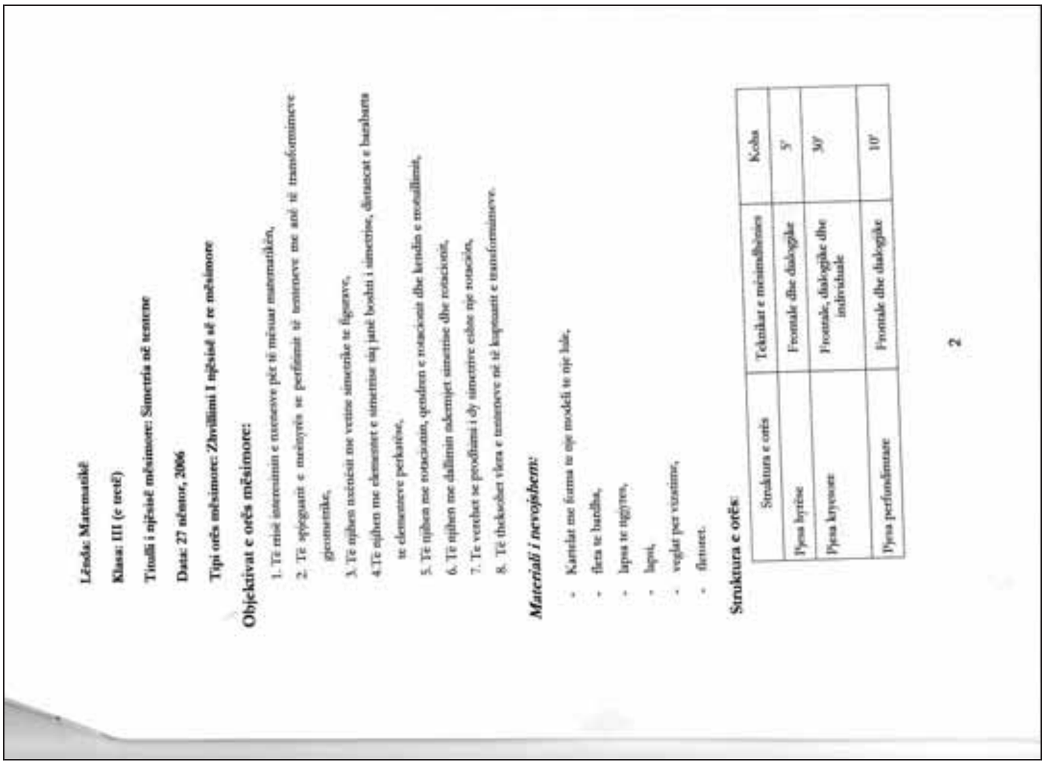
Indica como se llama dicho movimiento directo y qué características tiene. Qué conserva y qué cambia.

7. Dada la figura A y dos ejes de simetrías que se cortan, e_1 y e_2. Aplicarle a la figura la simetria de eje e_1 y a su imagen A' la simetria e_2.

Determinar el movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la ultima imagen obtenida Llama al final A''. Indica las características que llevan desde A a A'' directamente. ¿Es una simetria? ¿Cómo se llama?

¿Cómo se escribe de forma general el resultado que has obtenido? Es decir, ¿qué dirías qué pasa si tomamos otra figura B y hacemos B' y B'' con las dos simetrías anteriores?

ANEXO 9: La planificación de una clase - un ejemplo de FEUP



Lënda: Matematikë

Klasa: III (e tretë)

Titulli i njësisë mësimore: Simetria në tentene

Data: 27 nëntor, 2006

Tipi orës mësimore: Zhvillimi I njësisë së re mësimore

Objektivat e orës mësimore:

1. Të rrisë interesimin e nxenesve për të mësuar matematikën,
2. Të spjeguarit e mënyrës se perfitimit të tenteneve me anë të transformimeve gjeometrike,
3. Të njihen nxënësit me vetine simetrike te figurave,
4. Të njihen me elementet e simetrise siq janë boshti i simetrise, distancat e barabarta te elementeve perkatëse,
5. Të njihen me rotacionin, qendren e rotacionit dhe kendin e rrotullimit,
6. Të njihen me dallimin ndermjet simetrise dhe rotacionit,
7. Te verehet se prodhimi i dy simetrive eshte nje rotacion,
8. Të theksohet vlera e tenteneve në të kuptuarit e transformimeve.

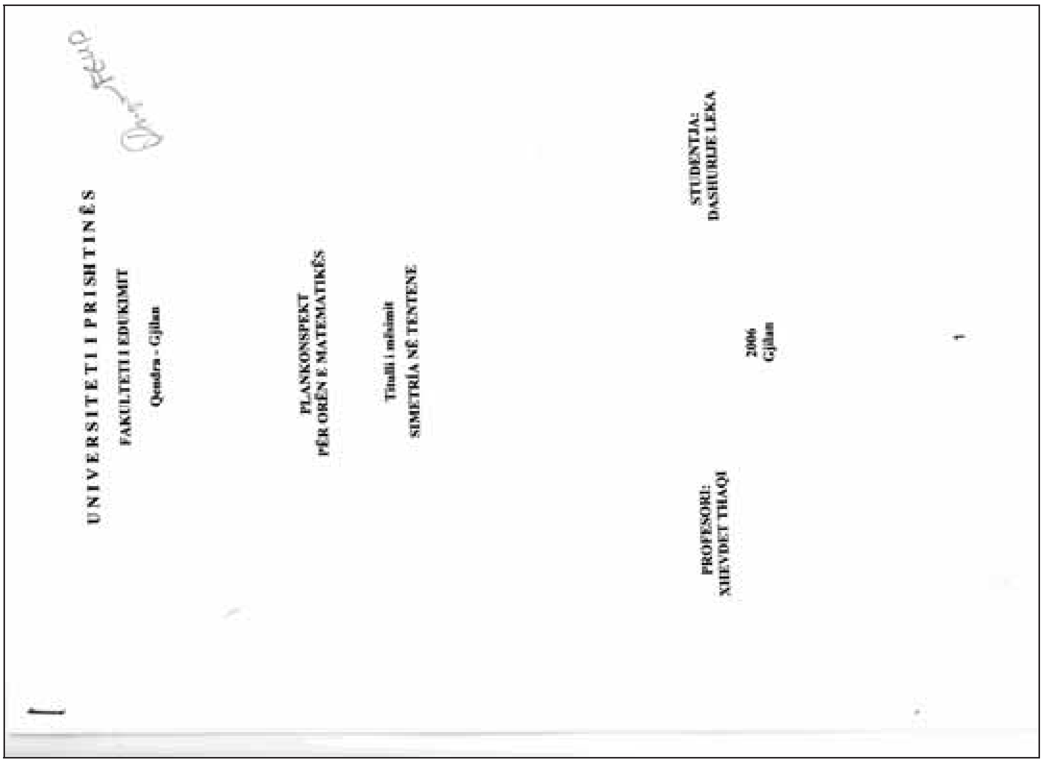
Materiali i nevojshem:

- Kartelat me forma te nje modeli te nje lule,
- fleta te bardha,
- lapsa te ngjyres,
- lapsi,
- veglat per vizatime,
- fletoret.

Struktura e orës:

Struktura e orës	Teknikat e mësimdhënies	Koha
Pjesa hyrëse	Frontale dhe dialogjike	5'
Pjesa kryesore	Frontale, dialogjike dhe individuale	30'
Pjesa perfundimtare	Frontale dhe dialogjike	10'

2



UNIVERSITETI I PRISHTINËS

FAKULTETI I EDUKIMIT

Qendra - Gjilan

Drg-FEUP

PLANKONSPEKT
PËR ORËN E MATEMATIKËS

Titulli i mësimit
SIMETRÍA NË TENTENE

PROFESORI:
XHEVDET THAQI

STUDENTJA:
DASHURIJE LEKA

2006
Gjilan

1

Pjesa hyrëse e orës

- Do të filloj oren duke hapur diskutimin lidhur me rrethin ton nga jeta e përditshme me theks në zbukurimet e ndryshme sidomos të tenteneve te cilat e zbukurojne gjera të ndryshme (si p.sh. tavolinat, vitrinat ne doma, duke i menduar ato se sa me keq do të dukeshin kur nuk do të stolisheshin pa tentetene). Ne ketë menyre une do të arrij ne qellimin se tentenet jan gjera të mira dhe të nevojshme per rrethin ton.
- Do të pyes nese dikush nga nxenesit din të qendise tentene – sepse edhe une ne moshen e tyre kam ditur të qendise tentene. Mandej, varesisht nga pergjigjet e nxeneve, do të vazhdoj me diskutuar lidhur me menyren se si qendiset. Me ketë deshiroj qe të rris interesimin per të qendisur tentene.
- Pas bisedes qe e zhvillojne nxenesit lidhur me qendisjen e tenteneve, mendoj se eshtë moment i pershtatshem të filloj pjesen kryesore të ores, duke theksuar se tentetenet dhe matematica kan diçka të perbashket. Keshtu do të arrij qe lendes se matematikes t'i jap kuptim real dhe kjo do të rris deshiren per të mesuara matematiken.

Pjesa kryesore e ores

- Do të shkruaj titullin e ores ne derrasen e zeze: Simetrija në tentene.

Aktiviteti 1.

- Do t'ju ndaj të gjithe nxeneve nga nje fletë të bardhe ne të cilen jane të vizatuara dy drejtza normale ne njera tjetren me laps, ne menyre qe të mund të fshihen me von me gome. Po ashtu do të shperndaj per çdo nxenes nga nje carton të prere ne forme të nje luleje të dy faqet e të cilit jane të ngjyrosura, njera me të kuqe e tjetra me të kalter (shihe vizatimin 1).

Vizatimi 1

3

- Pastaj, do të komentoj nje tregim se si nje vajze i ka pelqyer kjo lule dhe ka dashur qe të beje nje tentene me ketë lule. Ajo ka provuar disa menyra, por une po kerkoj nga ju qe ne ketë ore të mesimit të mundohemi t'i ndihmojme asaj të beje nje tentene të bukur duke perdorur njohurit nga matematika. .
- Do të vizatoj dy drejtza normale ne njera tjetren dhe do të vendose modelin (kartonin me lule) nga faqja e kuqe dhe do të vizatoj formen e modelit ne derase të zeze. Do të kerkoj qe edhe nxenesit të veprojne njesoj me modelin ne fletat e bardha qe i kan para vetit. Vendi ne të cilin duhet të vendoset kartëla eshtë i shenjuar me nje vije ashtu qe me von të mund të fshihet me gome.
- Nxenesit do të fitojne vizatimin ne fletat e tyre të bardha, të ngjashem si ne figuren 2.

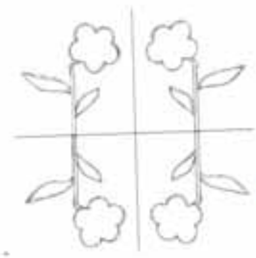
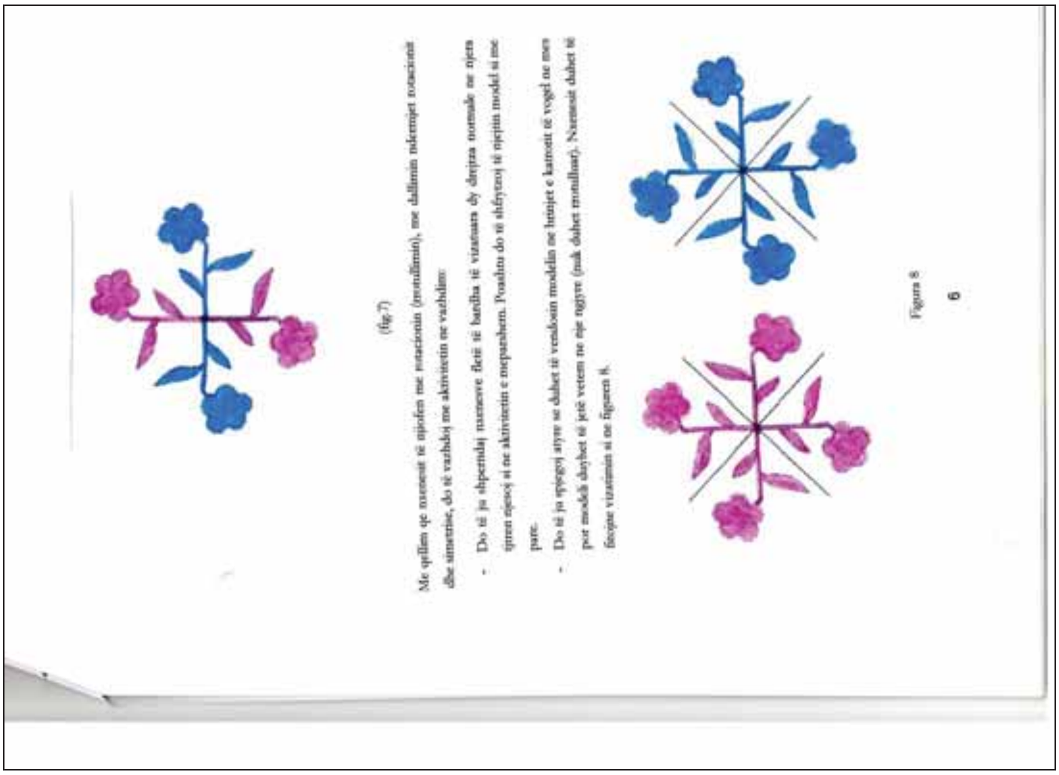


Figura.2

Figura 3

- Pasi qe kan fituar vizatimin si ne figuren 2, do të kerkoj qe të ngjyrosin lulet me ngjyren e modelit të cilen e kan perdore gjat të vizatuarit. Keshtu nese gjat të vizatuarit e kan perdore faqen e kuqe atë pjese duhet ngjyrosur me të kuqe . Ne ketë menyre do të fitohet vizatimi si ne figuren 3.
- Me qellim qe vizatimi të shifet sa me bukur, kerkoj nga nxenesit qe të fshin me gome të gjitha drejtzat, dhe vizatimi do të duket më i bukur.
- Kur të shoh se të gjithe nxenesit kan arritur të kryejne vizatimin , të ngjyrosin ate dhe të fitojne ne menyre korrekte figuren 4, atëhere do të kerkoj nga ta qe të vertetojne me ate

4



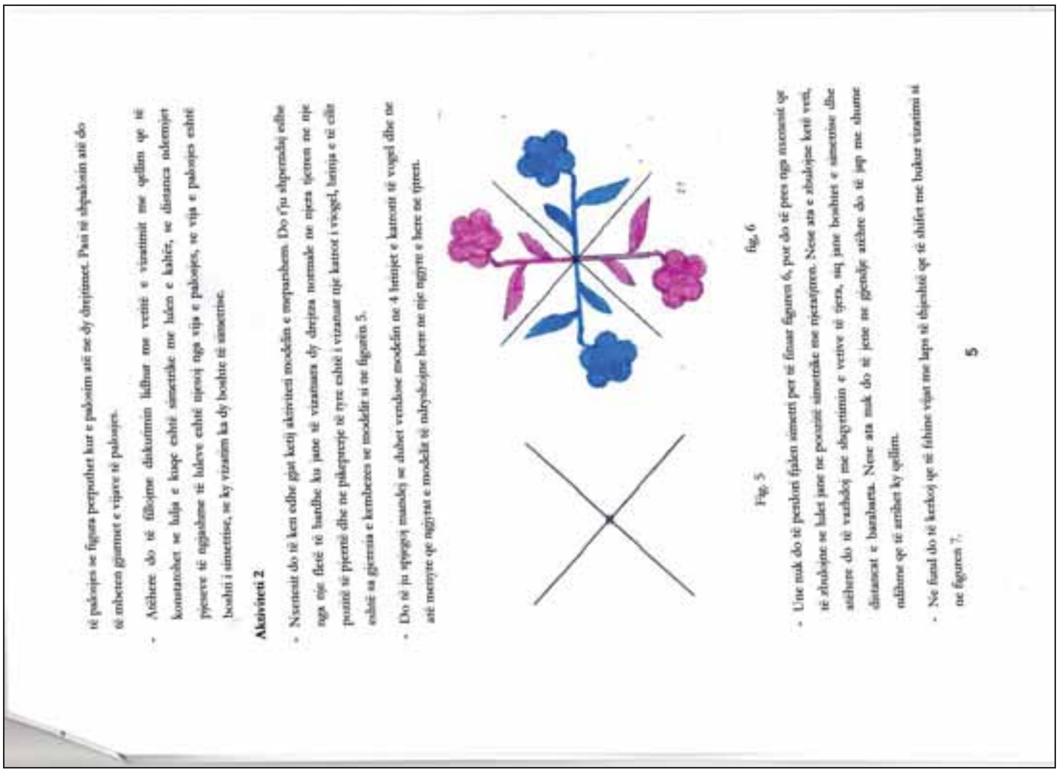
(fig.7)

Me qellim qe nxenesit të njiofen me rotacionin (rrotullimin), me dallimin ndermjet rotacionit dhe simetrise, do të vazhdoj me aktivitetin ne vazhdim:

- Do të ju shperndaj nxeneseve fletë të bardha të vizatuara dy drejtza normale ne njera tjtren njesoj si ne aktivitetin e meparshem. Poashtu do të shfrytzoj të njejtin model si me pare.
- Do të ju spjegoj atyre se duhet të vendosin modelin ne brinjet e katroeit të vogel ne mes por modeli duyhet të jetë vetem ne nje ngjyre (nuk duhet rrotulluar). Nxenesit duhet të fiecijne vizatimin si ne figuren 8.

Figura 8

6



të palosjes se figura perputhet kur e palosim atë ne dy drejtimet. Pasi të shpalosin atë do të mbeten gjurmet e vijave të palosjes.

- Atëhere do të fillojme diskutimin lidhur me vetitë e vizatimit me qellim qe të konstatohet se lulja e kuqe eshtë simetrike me lulen e kaltër, se distanca ndermjet pjeseve të ngjashme të luleve eshtë njesoj nga vija e palosjes, se vija e palosjes eshtë boshti i simetrise, se ky vizatim ka dy boshte të simetrise.

Aktiviteti 2

- Nxenesit do të ken edhe gjat ketij aktiviteti modelin e meparshem. Do t'ju shperndaj edhe nga nje fletë të bardhe ku jane të vizatuara dy drejtza normale ne njera tjetren ne nje pozitë të pjerrtë dhe ne pikeprerje të tyre eshtë i vizatuar nje katrot i viogel, brinja e të cilit eshtë sa gjeresia e kembezes se modelit si ne figurën 5.
- Do të ju spjegoj mandej se duhet vendose modelin ne 4 brinjet e katroit të vogel dhe ne atë menyre qe ngjyrat e modelit të ndryshojne here ne nje ngjyre e here ne tjtren.

Fig. 5

fig. 6

- Une nuk do të perdori fjalen simetri per të finaar figuren 6, por do të pees nga nxenesit qe të zbulojne se lulet jane ne pozitë simetrike me njeratjtren. Nese ata e zbulojne ketë veti, atëhere do të vazhdoj me shqyrtimin e vetive të tjera, siq jane boshtet e simetrise dhe distancat e barabarta. Nese ata nuk do të jene ne gjendje atëhre do të jap me shume ndihme qe të arrihet ky qellim.
- Ne fund do të kerkoj qe të fshine vijat me laps të thjeshtë qe të shifet me bukur vizatimi si ne figuren 7.

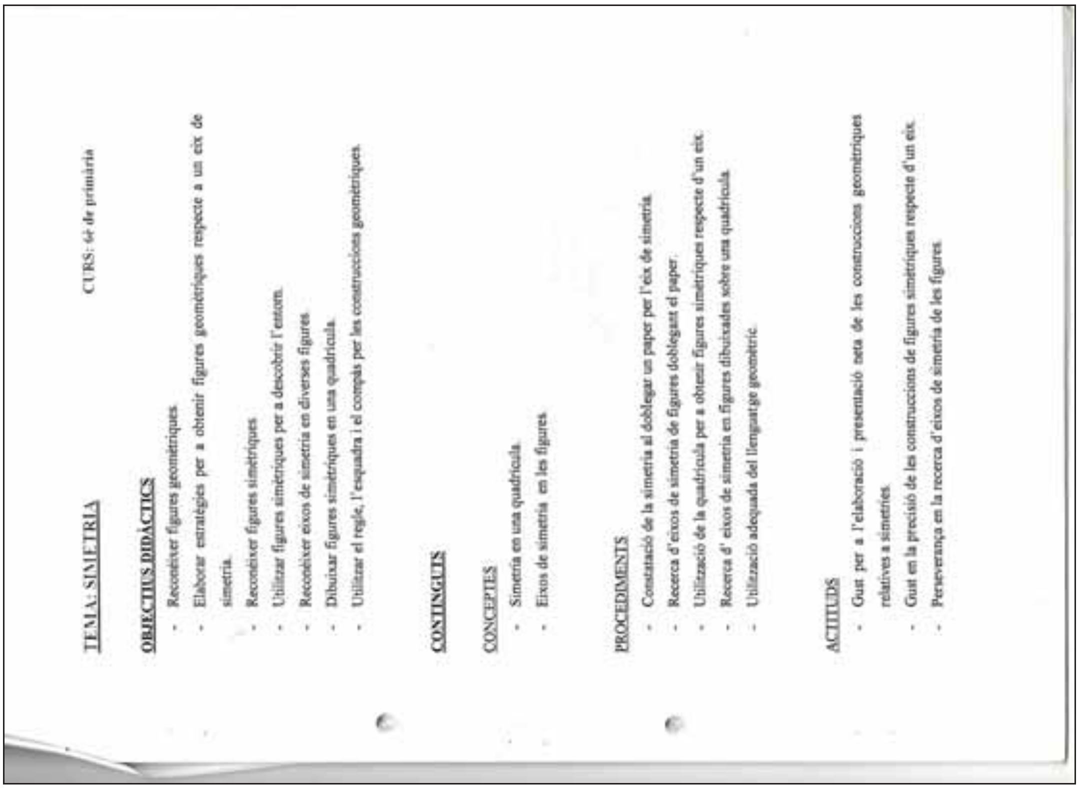
5

- Pasi të bejne vizatimin do të ju them qe duhet ta ngjyrosin atë me ngjyren e modelit qe e kan perdor gjat të vizatuarit. Eshtë e mundur qe disa të ken perdorur ngjyren e kuqe e të tjeret ngjyren e kaltërt.
- Do ta theksoj ketë situatë të fituar, dhe do të tentoj qe ne çdo banke të ketë nje vizatim me ngjyre të kuqe e nje me ngjyre të kaltërt. Ne ketë menyre ata do të mund të pergjigjen ne pyetjen: Çfar diference po vereni ndermejt ketyre dy vizatimeve?
- Do të pres qe ata t epergjigjen se jane të njejta (ngase jan simetrike), do të kerkoj qe të vertëtojne pohimet e tyre, p.sh. duke palosur fletën derisa të konstatojme se vizatimi (ne të dy rastët) nuk eshtë simetrik ne asnje menyre.
- Do të drejtoj diskutimin ashtu qe të arrij të qellimi e qe eshtë të zbulojme rrotullimin-rotacionin.
- Pasi të theksojme se kemi rotacion, do të shqyrtojme qendren e rrotacionit, kendin e rrotacionit dhe vetitë tjera.
- Ne fund, do të krahasojme vizatimin 8- rotacionin, me vizatimin 7- simetria. Eshtë e mundur që nxenesit të identifikojne se dy here simetria eshtë nje rotacion, ose prodhimi i dy simetrive me boshtë normale fitrohet nje rotacion.

Pjesa perfundimtare e ores

- Me qellim qe nxenesit të mbajne ne mend me mire atë qe e kan mesuar gjat ores, do të beje nje perseritje të ores dhe do të rikujtoj pyetjen ne fillim se matematika mund të na sherbej per të dizajnuar tentenet.
- Do të marr disa shembuj të tenteneve te cilat i kam punuar vet ne shtëpi dhe duke iu treguar të gjitheve ne drrasen e zeze do të kerkoj qe dikush nga nxenesit të tregoj vetitë simetrike, boshtet e simetrise apo elemente të rotacionit.
- Varesisht nga aftësia e nxenesve per të shqyrtuar tentetenet une do të vleresoj se sa kan aftësi ata të kuptojne dhe të dine per simetrine dhe rotacionin.

ANEXO 10: La planificación de una clase - un ejemplo de FFPUB



TEMA: SIMETRIA — CURS: 6è de primària

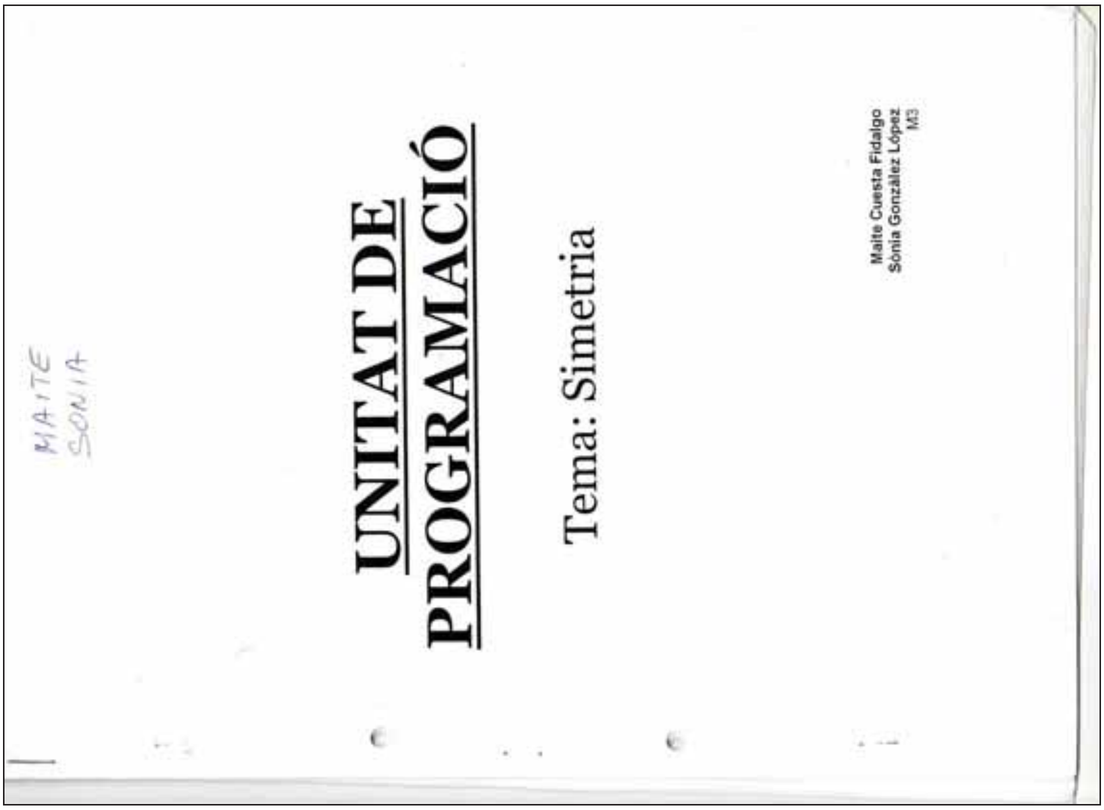
OBJECTIUS DIDÀCTICS
- Reconèixer figures geomètriques.
- Elaborar estratègies per a obtenir figures geomètriques respecte a un eix de simetria.
- Reconèixer figures simètriques.
- Utilitzar figures simètriques per a descobrir l'entorn.
- Reconèixer eixos de simetria en diverses figures.
- Dibuixar figures simètriques en una quadrícula.
- Utilitzar el regle, l'esquadra i el compàs per les construccions geomètriques.

CONTINGUTS

CONCEPTES
- Simetria en una quadrícula.
- Eixos de simetria en les figures.

PROCEDIMENTS
- Constatació de la simetria al doblegar un paper per l'eix de simetria.
- Recerca d'eixos de simetria de figures doblegant el paper.
- Utilització de la quadrícula per a obtenir figures simètriques respecte d'un eix.
- Recerca d' eixos de simetria en figures dibuixades sobre una quadrícula.
- Utilització adequada del llenguatge geomètric.

ACTITUDS
- Gust per a l'elaboració i presentació neta de les construccions geomètriques relatives a simetries.
- Gust en la precisió de les construccions de figures simètriques respecte d'un eix.
- Perseverança en la recerca d'eixos de simetria de les figures.



MAITE
SONIA

UNITAT DE PROGRAMACIÓ

Tema: Simetria

Maite Cuesta Fidalgo
Sònia González López
M3

Què esperem que succeeixi inicialment?

Pensem que els nens diran en un principi que els monuments del Parlament de Londres i La Torre de Belem no són simètrics perquè analitzarien el monument en el seu conjunt sense adonar-se que parcialment si que tenen eixos de simetria.

A més a més, diran que els altres monuments tampoc són simètrics exactament ja que els constructors d'aquests edificis no poden haver-los fet tan perfectament. Per dir això, observaran els edificis atentament i intentaran buscar el centre de la imatge, ja que a cinquè ja han treballat algun aspecte del que és simetria.

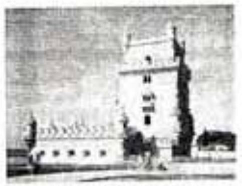
Per altra banda, creiem que als nens els hi fastidiaria no poder tenir la imatge dels edificis al seu abast per poder doblegar-ho i comprobar si són veritablement simètrics. Així doncs, amb aquest exercici els farem entendre que els eixos de simetria no tan sols estan en las figures que surten en paper, sinó que també existeixen en les figures reals. És una manera d'apropar les mates a la realitat i a l'art.

2. ORGANITZACIÓ

EDIFICIS AMB SIMETRIES

Marc treballa com a fotògraf en una agència de viatges. Aquestes són algunes fotografies que ha fet per promocionar alguns viatges.

Parlament de Londres



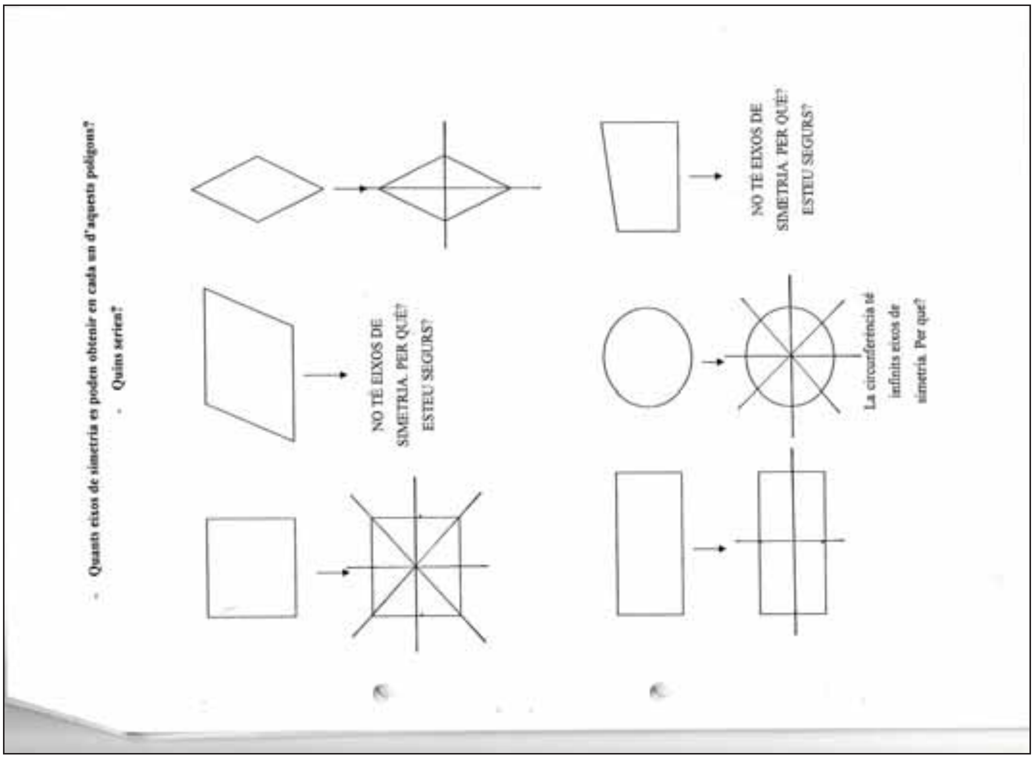
Torre de Belem (Lisboa)

Museu del Prado (Madrid)

Arc de Triomf (Paris)

Preguntes

1. Quin d'aquests monuments no té cap eix de simetria?
2. Quin seria el eix de simetria d l'Arc de Triomf?
3. Quin seria l'eix de simetria de la façana del museo del Prado?
4. Quin seria un eix de simetria de la Torre del Big Ben?

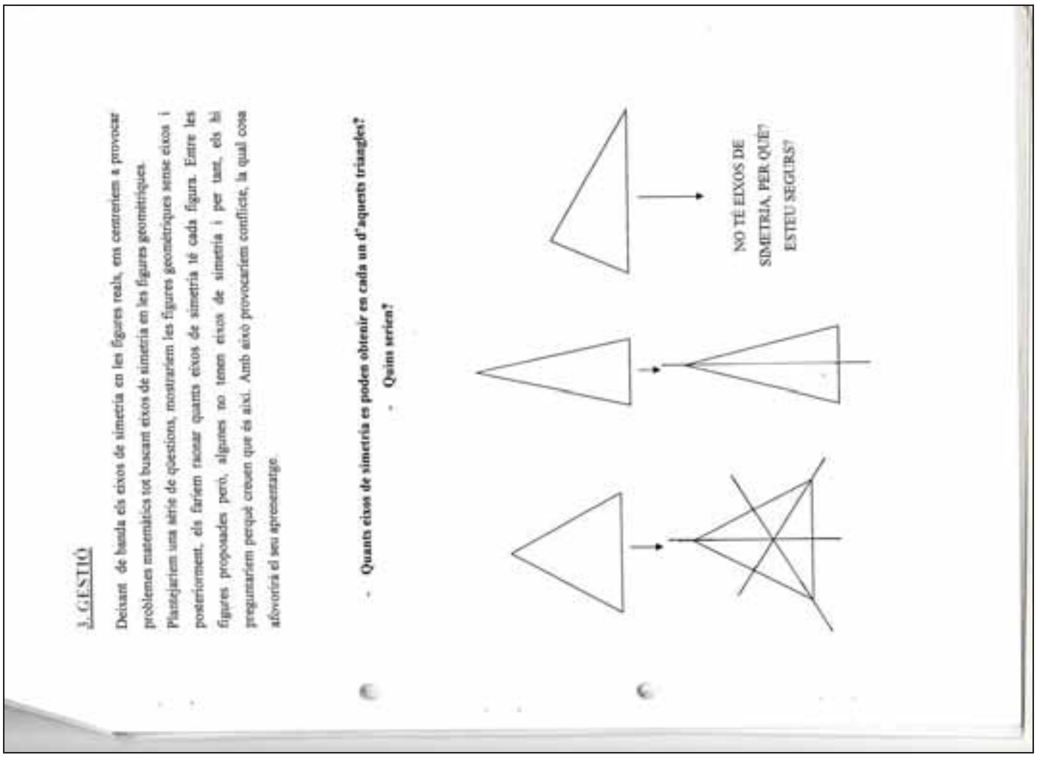


- **Quants eixos de simetria es poden obtenir en cada un d'aquests polígons?**
  - **Quins serien?**

NO TÉ EIXOS DE SIMETRIA. PER QUÈ? ESTEU SEGURS?

La circunferència té infinits eixos de simetria. Per que?

NO TÉ EIXOS DE SIMETRIA. PER QUÈ? ESTEU SEGURS?



3. GESTIÓ

Deixant de banda els eixos de simetria en les figures reals, ens centrerient a provocar problemes matemàtics tot buscant eixos de simetria en les figures geomètriques. Plantejariem una sèrie de qüestions, mostrariem les figures geomètriques sense eixos i posteriorment, els fariem raonar quants eixos de simetria té cada figura. Entre les figures proposades però, algunes no tenen eixos de simetria i per tant, els hi preguntariem perquè creuen que és així. Amb això provocariem conflicte, la qual cosa afovorirà el seu aprenentatge.

- **Quants eixos de simetria es poden obtenir en cada un d'aquests triangles?**
  - **Quins serien?**

NO TÉ EIXOS DE SIMETRIA, PER QUÈ? ESTEU SEGURS?

FITXA DE TREBALL 1

Ha arribat el Nadal. Us proposem decorar la classe amb figures geomètriques típiques del Nadal. Les heu de confeccionar tot doblegant el papel i utilitzant aquest doblec com a eix de simètria.

A continuació us adjuntem les plantilles per realitzar.

4. CRITERIS D'AVALUACIÓ

- Veure si l'alumnat reconeix figures simètriques doblegant el paper segons una recta.
- Avaluar si l'alumnat dedueix i aplica la perpendicularitat en el traçat de polígons simètrics.
- Comprovar que l'alumnat mesura i compara els costats de les figures.
- Veure si l'alumnat dibuixa figures simètriques utilitzant la quadrícula.
- Comprovar si l'alumnat sap buscar els eixos de simetria que pot tenir una figura.

Algunos momentos de investigación

Referencias bibliográficas

- Abraira, C.; Gómez, M.D.; Blanco, L.J. y Martín, M.C. (1997): "*Análisis de los planes de estudio del título de maestro de la especialidad de Educación Primaria*", en Abraira y de Francisco, *II Simposio. El currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de León. 15-24.
- Abreu, G. (2000): "*El papel del contexto en la resolución de problemas matemáticos*" (pp.137-149) en Gorgorio y altr. *Matemáticas y educación,* Grao, Barcelona.
- Abreu, G. (2000): "*Prácticas Sócio-Culturais e Aprendizagem da Matemática: A Necessidade de Estudar as Transicções*", en *Actas Profmat 2000* (pp.23-40). Lisboa: Associação de Professores de Matemática;
- Alsina, C., Burgues, C. y Fortuny, J.M. (1990): *Material para construir la geometría. Editorial Síntesis, Madrid.*
- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. (1987): *Invitación a la Didáctica de la geometría (12) ,* Edit. Síntesis, S.A. Madrid
- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. (1990): *Materiales para construir la geometria ,* Edit. Síntesis, S.A. Madrid
- Alsina, C., Fortuny, J., Gómez, R. (1997): *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO",* Editorial Síntesis, S.A., Madrid
- Alsina, C., Trillas, E., (1984): *Lecciones de Algebraa y Geometria*, Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona
- Astudillo, Mª T., (2006), "*La matemática moderna en España*", Revista Iberoamericana de Educacion Matemática, nr 6, pp.66
- Bairral, M. y Gimenez, J. (2004): *Geometria para 3 e 4 ciclos pela internet*, Editor: Universitad de Rural, Rio do Janeiro.
- Balacheff, N., (1998): "Contraintes informatiques et environnements d'apprentissage de la démosntration en géometrie", *Sciences et Techniques Educatives*, 5(1), pp. 15-45.
- Ball, D.L. (1990); "*Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division*", Journal of Research in Mathematics Education, 21(2), 122-144
- Bartolini Bussi, M. (1996): *'Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School'*, Educational Studies in Mathematics, 31, 11-41
- Bartolini Bussi, M.; Boero, P.; Ferri, F.; Garuti, R. and Mariotti, M.A.:(1997), *'Approaching geometry theorems in contexts*', Proceedings of PME-XXI, Lahti, vol.1, pp. 180-195
- Bartolini, B.M., Marioti M.A. (1996): *"Geometrical Reasoning in the Mathematical Classroom*", in Malara N.A. et al. (eds), *Italian Research in Mathematics Education: 1988-1995*, Litoflash, Roma
- Barton, B. (2001): *"Matemática e Linguagem.Divergência ou Convergência?",* in, *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática*.(pp.104-108) Domite (Ed.) São Paulo: Universidade de S. Paulo;

- Battista, M.T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1997): "*The importance of spatial visualitzation and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teacher*", Journal for Research in Mathematics Education, 13(5), 332-340.
- Bellingeri, P., Dedo, M., Di Sieno, S., (2001): *Il ritmo delle forme*, Mimesis edition en italiano; Translated to French: *Symétries et jeux de miroirs*, Pôle edition (2002); and Portuguese: *O ritmo das formas* Atractor edition, (2003))
- Beltrametti, M.C., Di Rocco, S.,A., Somemese, A.(,2003): "*On generation of jets for vector bundles*". Revista Matemática Complutense, 12 (1): 27-44
- Bishop, A. (1989): "*Review of research on visualization in mathematics education*", en Focus on learning Problems in Mathematics, 11 (1), 7-16
- Bishop, A. (1999): *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós. Barcelona
- Bishop, A. (2000): "*Enseñanza de las matemáticas: ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos*?, en Gorgorió, et altr. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional,* Grao, Barcelona.
- Bishop, A. (2001): ¨*Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas*¨. *UNO*, nº 26, p. 61-72.
- Bishop, A., (1987): "*Quelques obtacles à l'aprendissage de la geometrie" en Estudes sur l'enssignment des mathematiques"*, UNESCO, vol. 7, Paris
- Blanco, L. (1991): *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores.* Serv. Pub. UEx.
- Blanco, L. (1996): "*Aprendiendo cómo enseñar matemáticas.Tipos de conocimiento"* en Gimenez, J., y altr. (eds) (1996): *Convertirse en profesora de primaria. Temas de la ecuación en las matemáticas.*
- Blanco, L., y Borralho, A., (1999): "*Aportaciones a la formación del profesorado desde la investigación en Educación Matemática*", en Contreras, L.C. y Climent, N. (eds.) (1999): *La formación de profesores de Matemáticas. Estado de la cuestión y líneas de actuación*. Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Boaler, J. (1993): "*The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do They Make Mathemathics More "Real?", en:* For *the Learning of Mathemathics*, v13 n2.
- Boero, P., Pedemonte, B. & Robotti, E., (1997): "*Approaching Theoretical Knowledge through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective*", Proc. of PME-XXI, Lahti, vol. 2, pp. 81-88.
- Boero, P.; Chiappini, G.; Garuti, R. & Sibilla, A.: (1995): "*Towards Statements and Proof in Elementary Arithmetic"*, Proceedings of PME-XIX, Recife, vol. 3, pp. 129-136.
- Boero, P.; Garuti, R. and Mariotti, M.A., (1996): "*Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures*", Proceedings of PME-XX, Valencia, vol. 2, pp. 121-128.
- Bromme, R. (1994): "*Beyond Subject matter: A Psycological Typology of Teachers' profesional Knowledge*", en Biehler, R.; Scholz, R.W.; Sträber, R. y Winkelman, B. (Eds): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer.

- Brown, C.A. i Borko, H. (1992): "*Becoming a Mathematics Teacher en Grouws*", en D.A. (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of the NCTM*. New York: MacMillan. 209-239.
- Bruner, J., (1996): *The cultur of education*, Harvard University Press. Ed. En castellano: La eduación, puerta de la cultura, Visor, Madrid, 1997.
- Burger, W.F., y Shaughnessy, J.M.(1986): "*Characterzing the Van Hiele levels of development in geometry*", Journal for Research in Mathematics Education, 17, pp 31-48.
- Burgués, C., (1992): "*Endavant amb la geometria. Exemples d'unitats de programacio 2*", Ed. Primaria, Barcelona
- Callejo, M.L. y Canon, C. (1996): "*Cambios epistemológicos en educación primaria en España desde 1970*", en Gimenez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Granada: Comares.
- Camargo, L.; Samper, C., y Leguizamón, C. (2001): "*Razonamiento en geometría*", en: Revista EMA*, Investigación e innovación en educación matemática*. Vol. 6. No. 2.
- Canals, M. A. (1989) "*La geometría en Preescolar, Ciclo Inicial y Ciclo Medio*", en SAPM Thales. *Actas de las III Jornadas Andaluzas sobre Didáctica de las Matemáticas (Un encuentro con Iberoamérica)*. Huelva: SAPM Thales.
- Canals, M. A.; Dalmau, S.; Quintana, J. (1995): *Llibre del mestre, cicle superior, Actimates, C. S. 2*. Barcelona: Onda.
- Castelnuovo, E. (1981): *La Geometría,* Ketres, Barcelona.
- Chamorro, C. (1991): *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas. M*adrid: Alhambra-Longman.
- Chevellard, Y., Bosch, M., Gascon, J. (1997): "*Estudiar matemáticas"* en *Cuadernos de educación,* I.C.E. Universitad de Barcelona, editorial Horsori.
- Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992): "*Geometry and spatial reasoning*", en Grouws, D.A.(ed) Handbook of research on mathematics teaching and learning, pp. 420-463, Macmillna, New York.
- Clements, K. (1982): "*Visual imagery and school mathematics (2)"*. For the learning of Mathematics, 2(3), 33-38
- Clements, K. (2000): *"Matematicas en la escuela: cuestiones de equidad y justica"* en Gorgorió, N., Deulufeu, J., Bishop *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* Grao, Barcelona.
- Cobb, P. (2000): "*Conducting teaching experiments in collaboration with teachers*", in A. Kelly & A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 307-334). Nahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cobb, P.,(1990): "*The Tension between theories of learning and instruction*", en Lee, V. (ed): *Children's learning in school*. Milton Keynes. The Open University. PP. 137-151
- Codina, R. y altr. (2004): "*Matemàtiques i la seva didactica*", texto docente, UB, Barcelona.

- Coll, C. (1986): *Marco curricular para la enseñanza obligatoria*, Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, Barcelona.
- Consejo Europeo de Estocolmo, (2001): "*Los objetivos de los sistemas educativos"*, marzo de 2001, Estocolmo.
- Contreras, L. C. y Blanco, L. J. (2001): "*¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. XXI*" Revista de Educación nº 3. Universidad de Huelva. 211-220
- Cooney, T.J. (1994): "*On the application of science to teaching and teacher education*", en R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strässer I B. Wilkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 103-116) Dordrecht, Kluwer.
- Coriat, M. (1997): "*Materiales, Recursos y Actividades: Un panorama*", en L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 155-178). Barcelona: Horsori.
- Coxeter, H. S. M. (1988): *Fundamentos de Geometría.* Mexico: Ed. Limusa, S.A., 1988.
- Crowley, M. (1998): "*El modelo Van Hiele de desarrollo de pensamiento geometrico"*, Anuies, Vol.13, no. 1. Mexico.
- D'Ambrosio, U. (1979): "*Metas y objetivos generales de la educación matemática*", en Steiner, H.; Christiansen (eds) *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática.* Vol: IV. Paris: UNESCO.
- D'Ambrosio, U. (1991): "*A Matemática en su entorno socio-cultural*" en Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla
- D'Ambrosio, U. (1994): "*Ethnomathematics, the nature of mathematics and mathematics education"* en P. Ernest(eds), *Mathematics, Education and Philosofy: An internacional Perspectiva,* The Falme Press, London, pp230-241.
- Dalmau, S., Quintana, J., (1998): *Les isometries a l'aula. Una proposta per al Cicle Superior de Primària,* Biaix no 12, pp. 20-27
- Dalmau, S., Quintana, J., (2005): Les isometries a l'aula. Una proposta per al cicle superior. Barcelona: Onda.
- Dehaene, S., (1999): "*What Are Numbers, Really? A Cerebral Basis For Number Sense*". Disponible en: http://www.edge.org/3rd_culture/dehaene/index.html
- Denis, M. (1989): *Image et cognition*. Presses Universite de France, Paris, France
- Desmond, N.S., (1997): *The geometric content knowledge of prospective elementary teachers*. Dissertations Abstgracts International, 58(08), 3050A. (university Microfilms No. AAG98-04715)
- Deulofeu, J., Gorgorio, N., (2000): "*Plantamientos para el cambio*" en Gorgorio, N., et altr. *Matmetaicas y educación*, editorial GRAO, Barcelona
- Díaz, J., Fernández, J.L., Martinón, A y Riera, T. (2000): *Jornadas Matemáticas*. Congreso de los Diputados.
- Dienes, Z.P., Golding, E.W. (1982): "*La geometría a través de las transformaciones. Geometría euclidiana"*, Editorial TEIDE, Barcelona.

- Dixon, J.K., (1995): *Limited English proficiency and spatial visualization in middle school students' construction of the concepts of reflection and rotation*. The Bilingual Research Journal, 19(2), 221.247
- Dörfler, W. (1991): "*Forms and means of generalization in mathematics*", en A.Bishop et al. (Eds): *Mathematical Knowledge: Its through Teaching*. Dordrecht: Kluwer, A.P.
- Dreyfus, T., (1991): "*On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education"*, in the Proceedings of the 15th Conference of the PME, Assisi (Italy). Vol.1.
- Dubinsky, E., (1991): "*Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking"*, en D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp95-126). Netherland: Kluver Academic Publishers.
- Edwards, L.D., (1991): "*Children's learning in a computer microworld for transformation geometry*", Journal for Research in Mathematics Education, 22(2), 122-137.
- Edward, L. y Zazkis, R., (1993):"*Transformation geometry: Naive ideas and formal embodiments"*. Journal of computers in mathematics and science teaching. 12(2), 121-145
- Ernest, P. (1986): "*Computer gaming for the practice of transformation geometry skils",* Educational Studies in Mathematics, 17, 205-207.
- Ernest, P. (1989): "*The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model",* Journal of Education for Teaching, 15, 13-34.[19]
- Ernest, P. (1998): "*A post-modern perspective on research in mathematics education*", en A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 71-85). Dordrecht: Kluwer,
- Ernest, P. (1997,): "*Introduction: Semiotics, mathematics and mathematics education"*, Philosophy of Mathematics Education Journal, nº 10. disponible: http://www.ex.ac.uk/ ~Pernest/pome10/art1.htm.
- Escudero, E., I.(2005): " *Un Análisis del Tratamiento de la Semejanza en los Documentos Oficiales y Textos Escolares de Matemáticas en la Segunda Mitad del Siglo XX*". Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas. Vol. 23. Núm. 3. Pag. 379-392
- Fenema, E. & Franke,M.L., (1992): "*Teacher's knowledge and its impact",* in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.147-164). New York: Macmillan
- Fennema, E., Peterson, P.L.,Carpenter, T.F & Loef, M.,(1989): *Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics cognition and instruction* Nº 6, 1-40
- Fischbein, E. (1993): "*The Theory of figural concepts*", en Educational Studies in Mathematics, 24, pp.139-162
- Flores, P. (2000): "*Actividades de Educación Matemática para la formación de profesores*", en Corral, C. y Zurbano, E. (coords.): *IV Simposio de Propuestas Metodológicas en la Formación Inicial de los Profesores del Àrea de Didáctica de las Matemáticas.* Universidad de Oviedo.
- Font, V. (2003): "*Matemáticas y cosas. Una mirada desde la educación matemática*." Boletin de la Asociación Matemática Venezolana, Vol.X,n.2

- Font, V., y Peraire,R., (2001): "*Objetos, prácticas y ostensivos asociados. el caso de la cisoide*", Educación matemática, 13(2), 55-67
- Fortuny, J. M. (1990): *"Información y control en educación matemática"* en S. Llinares, V. Sánchez (Eds): *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Alfar.
- Fortuny, J..M., Murillo, J., Martin, J.F., Trevijano, D. (1999): "*Aprendizajes sin límites. Un modelo de diseño interactivo como soporte y ampliación instruccional en la enseñanza de la geometria en ESO*", en Pedro, J. & Serrazimo, L. (coord.) *Educaçio Matematica en Portugal, España e Italia*. Secçao de Educaçao matematica de Sociedades portuguesa de Ciencias de Educaçao, pp 153-176.
- Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task,* Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Furinghetti, F. y Paola, D. (2003): "*To Produce Conjectures and to Prove themWithin a Dynamic Geometry Environment: a Case Study*", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th onference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PMENA*, Vol. 2, pp. 397-404. Honolulu, HI, USA: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.
- García Blanco, M. (2000): "*El aprendizaje del estudiante para professor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición: Implicaciones para la formación inicial de maestros",* en Corral, C y Zurbano, E., (Eds) *Propuestas metodológicas y de evaluación en la Formación Inicial de los Profesores el Área de Didáctica de las Matemáticas*. Oviedo, Univ. Oviedo, 55-79.
- García, M. & Llinares, S.: (1999): "*Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño",* Quadrante, vol. 8, nº 1-2, 61-84.
- García, M. (1997): *"Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto del función como objeto de enseñanza-aprendizaje".* GIEM. Universidad de Sevilla (Eds.) Cronos S.A. Sevilla.
- Garuti, R.; Boero, P.; Lemut, E. & Mariotti, M. A. (1996): "*Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems*", Proc. of PME-XX, Valencia, vol. 2, pp. 113-120
- Gaulin, C. (1986): "*Tendencias actuales en la enseñanza de las Matemáticas, I*". en Revista Números, 14, 11-18.[92]
- Geddes, D. y Tischler, R. (1988): "*The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*" (Informe final). Journal for research in Mathematics Education. Mon. n° 3.
- Geddes, D., (1992): *Geometry in the middle grades: Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grades 5.8.* Reston, VA: NCTM.
- Gimenez, J. (1997): *Proyecto docente de Didáctica de la matemática*, Universitad de Barcelona, Barcelona.

- Gimenez, J., (1997): “*Aprendiendo a enseñar la geometría en primaria*”, Revista Electronica de Investigacion e Evaluacion Educativa, Vol 3, No 21.
- Gimenez, J., (2003): *Actividades para una competencia profesional generalista en matematicas*, Universitat de Barcelona.
- Gimenez, J., Trujullo, J. (2006): “*Del mito de Narciso a las transformaciones dalinianas en la escuela*”, revista UNO, nr 40, Barcelona.
- Godino, J. D. (1991): “*Hacia una teoría de la didáctica de las matemáticas”* en Gutierrez, A. (Eds.) *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*, Síntesis, Madrid
- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002): “*Geometría y su didáctica para maestros”* – manual para los estudiantes*,* proyecto EDUMAT- Maestros.
- Godino, J. D.; Recio, A. M.: (1998). “*A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education*”, en: A. Olivier i K. Newstead (eds.): *Proceedings of the 22nd PME Conference,* (Vol 3, pp. 31 a 38). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education.
- Gomes, A. (2003): *Un estudo sobre o conhecimento matematico de futuros professores do 1º Ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em geometria*. Tese de dotorado no publicada. IEC. Universidade do Minho.
- Gomez, J., 2000: “*Aprendre matematiques desevolupa l’espiritu critic de la societat*”, en Ciencia i ambiente.
- Gómez, P., Lupiáñez, J. L. (2007): “*Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria”*. *PNA*, *1*, 2, 79-98
- Gomez-Chacon, I. 1997: “*Una metodologia cualitativa para el studio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas*”, en Enseñanza de las Ciencias, nº 16(3), pp 431-450
- Gomez-Chacon, I. 1998: “*Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas. Una perpsectiva para el profesor*”. Documento disponible en: http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/index.php
- Gonzáles, M. T. (1986): “*Los ciclos de la EGB: una perspectiva organizativo – pedagógica desde la perspectiva de los profesores”.* Actas del I Congreso Internacional sobre pensamiento de los Profesores y Toma de decisiones, pp. 391-405.
- Gravemeijer, K., (2003): *“From a different perspective: building on student´s informal knowledge”*, en R. Lehrer & D. Chazan (Eds), *Designing Learning Environments for Developing Understandings of Geometry and Space*, Lawrence Erlbaum Ass.)
- Gravemijer, K. (2004): “*Creating opportunities for students to reinvent mathematics*”, , Regulars lectures*,* ICME10, Cpenhagen
- Grenier, D.,(1989): “*Construction et etude du funcionnement d’un processus d’enseignement sur la symetrie orthogonale*” en 6e Univ.J.Fourier Grenoble. France.
- Griffin, S., & Case, R. (1997): “*Re thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science*.” *Issues in Education, 3*(1),1-49;
- Grossman, P., (1990): *The making of a Teacher*, Teacher Knowledge and Teacher.

- Gutiérrez, A. (1998): "*Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial*", Revista EMA, Vol.3, No 3, 193-220.
- Gutiérrez, A., (1996): "*Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a fraamework"*. En L.Puig y A. Gutierrez (Eds), *Proceding of the 20th PME Conference*, v.1, (pp.3-19).
- Gutierrez, A., Jaime, A. (1998): "*On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning"*, Focus on Learning Problems in Mathematics, Volum 20, no. 2&3.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1996): "*Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio"*, en Giménez, J; Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (colección "Mathema" n° 8) (Comares: Granada), pp. 143-170.
- Guzman, M., (1998): "*Matematicas y estructuras de la naturaleza*", Ciencias y sociedad, ediciones Nobel Oviedo.
- Hamiti, E., Thaqi, Xh. (2005): "*The contents geometry in the early years of new mathematics curriculum in Kosova",* G7-Geometrical Thinking, CERME4, Sant Feliu de Guixols, Spain.
- Hanna, G., (2000): "*Proof and its Classroom Role: A Survey*", en *Proceing of the Conference at the IX Encontro de Investigaçao en Educaçao Matematica*. Fundao, Portugal.
- Hanna, G., (1996): *"The ongoing value of proof*"", en Puig, L. y Gutierrez, A. (ed.) *Proceding of the 20th International Conference for the Psicology of mathematical Education*, 1(pp.21-34) Valencia, Spain.
- Herbst, P.G. (2000): "*¿A donde va la investigación sobre la prueba?"* En N. Balachef. *Procesos de pruebas en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: una empresa docente / Univ. De Andes.
- Hernandez, J. Palarea, Mª.M. y Socas, M.M. (2001): "*Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro*", en Socas, M. y altr.; (eds.): *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática.* 115-125. Universidad de la Laguna.
- Hershkowitz, R., (1990): "*Vizualizations in geometry. Two sides of the coin*", en Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, pp 61-76
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. & van Dormolen, J.,(1996): "*Space and Shape",* en A.J. Bishop et al. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, pp. 161-204,
- Hiebert, J.; Morris, A.K.; Glass, B. (2003): "*Learning to learn to teach: an "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics*" en *Journal of Mathematics Teacher Education,* no 6 pp. 201-222.
- Hilbert, D. (1973): *Fundamentos de la Geometria*, C.S.I.C., Madrid
- Hoffer, A., (1981): "*Geometry is More than Proof.*", Mathematics Teacher 74 (1981):11-18.
- Howson, G.; Willson, B. (1986): *Las matemáticas en la escuela en los 90,* Cambridge. Universidad de Cambridge / ICMI.
- Hoyles, C. (1992): "*Illumination and reflections – Teachers, methodologies and Mathematics*", En W. Geeslin y K. Graham (eds.) *Proceedings of the sixteenth PME Conference*. Durham, v.3, p.263-286.

- Huerta, M. P. (1999): "*Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: Un análisis comparado, una integración necesaria*".Departamento de Matemática de la Universidad de Valencia. Enseñanza de las Ciencias, (17(2), 291-309)
- Jackson, S. B., (1975): "*Applications of transformations to topics in elementary geometry: Part 1*". Mathematics Teacher, 68, pp 554-562.
- Jaime, A., (1993):"*Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de Razonamiento"*, Tesis Doctoral, Universidad de Valencia
- Jaime, A., Aguilera, F. Gutierrez, A., (1992): "*Definiciones de triangulos y cuadirlateros: errores e inconsistencias en el libros de textos de E.G.B"*., Revista EPSILON, no. 23
- Jaime, A., Gutierrez, A. (1990): "*Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele"* en S. Llineares, M.V. Sanchez (eds), *Teoria y practica en educación matematica,* Aftar, Sevilla
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1994): "*A model of test design to assess the Van Hiele levels*", *Proceedings of the 18th PME Conference* 3, pp. 41-48
- Jones, K. (2000): "*Critical issues in the design of the school geometry curriculum*", en Barton, B. (ed.): *Readings in Mathematics Education*. Auckland, New Zealand, University of Auckland, pp. 75-91
- Kaput, J. (1992): "*Technology and mathematics educations", e*n: D. A. Grouws, (ed.), *Handbook of Research on Mathematics*. (pp. 515-555). Macmillian. New York
- Keitel, C. (1995): "*Different means for common ends? The challenge of different social views and experiences for collaboration in mathematics education*", en W.E. Jenkins (Ed.) *Innovations in Science and Technology,* Volume VI. Paris.
- Keith, V.I., (1970): *"Elementary teachers' knowledge of the geometry appearing in elementary school mathematics textbooks"*. Doctoral dissertation, University of Virginia, Dissertation Abstracts International, 31 (10)
- Kidder, F.R., (1978): "*Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations*", Journal for Research in Mathematics Education, 7(1), 40-52.
- Koballa, T.R. y Crawley, F.E. (1985): "*The influence of attitude on science teaching and learning"*, School Science and Mathematics, 85, pp. 222-232.
- Kosslyn, S.M., (1980): "*Image and mind"*. Londres: Harvard U.P.
- Küchemann, D., (1980):"*Children's difficulties with single reflections and rotations",* Mathematics in School, 9 (2).
- Ladson-Billings, G. (1997): "*Dar sentido a las matemáticas en contexto multiculturales*", en Secada W., Fennema E., Adajian L.: *Equidad y enseñanza de las matemáticas: Nuevas tendencias*. Morata – MEC. Madrid.
- Lampert, M., (1990): "*When the problem in not the question and the solution is not the answer"*, Mathematical knowing and teaching, American Educational Research Journal, Vol. 27, Nº. 1, pp. 29-63.

- Law, C.K (1991): "*A genetic decomposition of geometric transformations*" - Doctoral Dissertation, Purdue University, Dissertation Abstract International, 52 (06)
- Leinhardt, G., Putnan, R.T., Stein, M.K. & Baxter, J., (1991): "*Where subject knowledge matters*", en J. Brophy (ed): *Advances in Research on Teaching*, vol. 2, JAI Press: London, 87-113.
- Leitzel, J.R.C., (1991): "*A call for change: Recommendations for the mathematical preparing of teachers of mathematics*". Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Ma, Liping (1999):"*Knowing and Teaching elementary mathematics-Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*", LEA Publishers, New Jersey, London.
- Llinares, S. (1994): "*The development of prospective elementary teachers' pedagogical knowledge and reasoning. The school matehamtical culture as reference*", En *Proceedings 1st Italian-Spanish Research Symposium in Mathematical Education,* 165-172, Universidad de Módena (Italia).
- Llinares, S. (1998): "*La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional*", Aula-Rev. Ens. Inv.Educativa, Universidad de Salamanca 10, 153-179.
- Llinares, S. (1999): *"Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas: características de una agenda de investigación",* Zetetike – Cempem- Fe/Unicamp – 7 (12), 9-36.
- Llinares, S. (2004): *"Bilding virtual learning communities and learning of mathematics teacher students",* Regulars lectures, ICME10, Cpenhagen
- Llinares, S., y Sanchez, V., (1996): "*Aprender a enseñar, modos de representación y numero racional*", en Gimenez y alt. (Edit) *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática***,** pp. 96-118
- Llinares, S.: (1999): "*Intentando comprender la práctica del profesor de Matemáticas*", En J.P Ponte y L. Serrazina (eds) *Educaçao Matematica em Portugal, Espanha e Italia*. SEM de SPCE: Lisboa, Portugal, 109-132.
- MASHT, (2004): "*Plani dhe programi mësimor per shkollën fillore 1-5*", Prishtinë (Ministerio de Educación, ciencia y tecnología de Kosova – Planos y programas de educación Primaria).
- Mayberry, J.W.,(1983): "*The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers*", Journal for Research in Mathematics Education, 14 (1), pp.58-69
- Mayberry, J. W.,(1981): "*An Investigation in the Van Hiele Levels od Geometry Thought in Undergraduatte Preservice Teachers",* Dissertation, Abstracts International 42.
- Mellado, V.; Ruiz, C. y Blanco, L. (1997): *"Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial de maestros".* Bordon, 49, 275-288 (1997).
- Ministerio de Educacion y Ciencia de España, Eneseñanza obligatoria http://www.mepsyd.es/educa/sistema-educativo/loe/files/educacion-secundaria-obligatoria.pdf

- Ministerio de Educacion y Ciencia de España, Ley Organica de Educacion de Sistema Educativo, en: http://www.mepsyd.es/educa/sistema-educativo/loe/files/loe.pdf
- Ministerio de Educación y Ciencia de Kosova (2002): *El nuevo currículum para la educación primaria*. Príshtina.
- Molina, J., G., y Oktaç, A.(2007): "*Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico*", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(2): 241-273
- Moreira, L. (2002): *"Portuguese immigrant children and Mathematics education"* en http://dlibrary.acu.edu.au/maths_educ/documents/Moreira;%20Portuguese%20immigrant%20children%20and%20mathematics%20education.pdf
- Moyer, R., S, (1978): "*The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children*." Journal of Research in Mathematics Education, 8-9 pp. 83-92.
- Mullis, I., Martin, M., Fierros, E. et al (2000): *Gen der Differences in Achievement. IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: IEA.
- Nasser, L., et altr.(1995): "*Student assessment of an alternative approach to geometry*", proc. PME 20, vol. 4.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991): "*Professional standards for teaching mathematics",* Reston Va. NCTM, Reston, Virginia.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000): "*Principles and standards for school mathematics",* Reston Va. National Council of Teachers of Mathematics.
- Navarro L. J., (2003): "*Los elementos de Euclides*", en Un paseo por la Geometria
- NCK (2002): *El nuevo curriculum de educación de Kosova*, MASHT, Prishtinë.
- NCTM (2000): *Principios y estándares para la Educacion matemática*, Sevilla: Sociedad Andaluca de Educacion matematica, Thales.
- Nevo, D., (1998): "*Evolución del diálogo: una posible contribución para la mejora escolar*" en Prospect, vol. 28, n.1, pp. 78- 89.
- Noss, R. & Hoyles, C. (1996): *Windows on Mathematical Meanings. Learning cultures and computers.* Kluwer Academic Press.
- OCDE/CCNM (2001): *Críticas temáticas sobre las diferentes políticas de la educación.* Kosova.
- OECD (2001): *Thematic Review of National Policies for Education – Kosovo*, 22 June 2001
- Oliveras, Mª L. (1996): *Etnomatematicas. Formacion de profesores e innovación curricular*, ed. COMARES, Granada.
- Padilla D., F., Fernandez R., M. (1988): *Círcunferencia y círculo*. Editorial Síntesis. Madrid.
- Parzysz, B., (1991): "*La geometría en el salón de clase*", en ICMI Study: Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century.
- Pearman, D. (1990): "*Transformation Geometry and youg Children*", Currículum, vol. 1, núm. 1, pp. 16-26.

- Pérez, E. I. (2001): *La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor*, Universidad de Sevilla.
- Piaget, J. (1970): *Introducción a la epistemología genética*. *El pensamiento matemático,* Buenos Aires: Paidos.
- Piaget, J. (1979): *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante 1.* Buenos Aires .Huemul
- *PMME-UNISO, (2001): Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI,* estudio de ICMI
- Pogarelov, V.A., (1975): *"Predavanja iz osnova geometrije",* Prevod na srpskog, Beograd
- Ponte, J. (1998): ¨*Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática*¨. En Ponte, J.P. (org.) et al. *Desenvolvimento Profissional dos professores de Matemática. Que Formação?* Lisboa: SPCE, p. 193-211.
- Ponte, J.P. (1994): ¨*Mathematics Teacher`s Profesional Knowledge*¨. *Proceedings 18th* PME, Lisboa, v.1, p. 195-210.
- Ponte, J.P. et al. (2002): "*Development of pre-service mathematics teachers' professional knowledge and identity in working with information and communication technology*", Journal of Mathematics Teacher Education, 5 (2), pp. 93-115
- Potkonjak, M. N. (1980): *Sistem obrazovanja i vaspitanja u Jugoslaviji,* ZUNS, Beograd.
- Presemeg, N.C. (1986): "*Visualisation in High School Mathematics*" For the learning of mathematics no.6(3), pp. 42-46.
- Presmeg, N., (2006), "*Semiotics and the 'conections' standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics*", Educational Studies in Mathematics, 61, pp. 163-182
- Puig Adam. (1967): *Geometría Métrica I*. Biblioteca Matemática. Madrid
- Puig, L.A., (1997): "*Analisis fenomenológico",* en Rico, L., *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* Horsori, Barcelona
- Resnick, L. B.; Ford, W. W. (1990): "*La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos".* Barcelona: Paidós – MEC*.*
- Rico, L. (2000): "*Formación y desempeño práctico en educación matemática de los profesores de primaria*", Suma, 34, pp. 45-51.
- Rico, L. y Carrillo, J. (1999): "*The training and performance of primary teachers in Mathematics education. The case of Spain",* Ponencia invitada en el Congreso Internacional *The training and performance of primary teachers in Mathematics education*, Madrid.
- Rico, L., (1997)*: Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, Síntesis.
- Rosich, N. (1995): "*Los niveles de pensamiento geométrico y la resolución de problemas geométricos con alumnos sordos y oyentes: imp licaciones pedagógicas*", Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.
- Rosich, N. (2004): "*Matematicas*", en Lleixá, T., Romea, C. *Educación Primaria. Primer ciclo,* PAIDOTRIBO, Barcelona.

- Sanz, A.P. (2008): "*Matematicas en televisión"*, UNO, Revista de didactica de las matemáticas, GRAO, nº48.
- Schön, D., (1992): *La formacion de profesionales reflexivos. Hacia un diseño de la enseñanza y el aprendizaje en los profesores*. Barcelona, Paidós.
- Servat, J. y otros, (2001): *Dosier electronic* "*Bases per a l' ensenyament de les matematiques*", Barcelona, Universitat de Barcelona.
- Servat, J. (1995): "*Modelo de Van Hiele para la adquisición de los teoremas de equidescomposicion, del concepto y calculo del area de figuras geométricas"*, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona.
- Shulman, L. (1986): "*Those who understand: Knowledge growth in teaching",* Educational Resercher, no 15.
- Shulman, L. (1987): "*Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*", Harvard Educational Review, 57 (1), pp. 620-635.
- Shulman, L. S. Foreward en Gess-Newsome, J., Lederman, N. G. (eds.), (1999): *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.,
- Shulman, L.S. (2002): *Making differences: a table of learning* en *The Carnegie Foundation for the Advanced of Teaching.*
- Shulman, L.S. i Grossman, P.L. (1988): "*Knowledge growth in teaching: a final report to the Spencer Foundation"*. Stanford: Stanford University
- Sierpinska, A., (1994): "*Understanding in Mathematics"*, London, England, The Falmer Press
- Sierra, M. y Rico, L. (1996): "*Contexto y evolución histórica de la formación en Matemáticas y su Didáctica de los profesores de primaria".* En J. Giménez, y altr. (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática,* 39-62. Ed. Comares. Granada.
- Simon, M. (1995): "*Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective*". Journal for Research in Mathematics Education, *2*6(2), 114-145.
- Simon, M. (1996): *"Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing"*, Educational Studies in Mathematics, 30, 197-210.
- Skemp, R. (1989): *Mathematics in the primary school*. Penguin Books.
- Skemp, R., (1971): "*Symbolic understanding,*" Mathematics teaching 99, pp 59-61
- Skovmose, O. (1994): *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Soon, Y., P., (1989): *An investigation of Van Hiele-like levels of learning in transformation geometry of secondary school students in Singapore*, Univ. Microfilms, Ann Arbor, USA.
- Sowder, L. (1996): "*Classifying processes of proving*", en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 3, pp. 59- 65. Valencia: Universitat de València.
- Sowell, E.J. (1989): "*Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction*". Journal for Research in Mathematics Education, 20*:* 498–505.

- Steffe, L. P. (2004): "*On the construction of learning trajectories of children: The case of conmensurable fractions*". Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129-162.
- Sternberg, R.(1999): "*The nature of Mathematical reasoning*" en 1999 Yearbook National Council of Teachers of Mathematics, USA.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1997): "*Understanding and improving classroom mathematics instruction*". An overview of the TIMSS Video Study. *Phi Delta Kappan, 79,* 14–21.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1998): *Teaching is a cultural activity, American Educator,* American Federation of Teachers.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999): *The teaching gap,.* New York: Free Press.
- Stipanic, E. (1984)*: "Matematika u opstem i strucnom obrazovanju",* en Vaspitanje I obrazovanje, nº1, Titograd.
- Strong, James H. (2002): "*Qualities of Effective Teachers*". Alexandria: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Tahiri, S., Rudi, S., Hyseni, N., (1986): *Matematika për grupink klasor*, Universitieti i Prishtinës, ETMMK, Prishtinë
- Tall, D. O. & Vinner, S. (1981): "*Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*". *Educational Studies in Mathematics*. Vol 12, pp. 151-169
- Tall, D. O., (1992): "*The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions,Limits",* NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 495-511
- Thaqi, Xh. (2005): "*El desarrollo de la educación en Kosovo. Algunos temas referentes a las matemáticas*" en *La enseñanza de las matemáticas y la construcción europea*, revista UNO, 38, pp15-30, Barcelona.
- Thaqi, Xh., Tahiri, S. (2002): *Metodika e koncepteve fillestare matematike*, Universiteti i Prishtinës, Prishtinë
- Thompson A.G. (1992): "*Teacher´s beliefs and conceptions: A Synthesis of research*" en Grouws, D.A. (ed) *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, MacMillan, pp. 127-146.
- Todd, G., Karen, J. G. (2006): "*Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs*", The Journal of Mathematical Behavior Volume 25, Issue 3, 2006, Pages 196-207
- UNICEF Kosovo (2000): "*UNICEF's View on Lead Agencies"*, Prishtina, September.
- UNMIK (2001): Regulacion 2001/9 Marco Constitucional del gobierno provisional de Kosova.
- Usinskin, Z., (1982): "*Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry*", final report, Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry project. Chicago: Unirsity of Chicago.
- Usiskin, Z., (1972): "*The efects of teaching Euclidian geometry via transformations on student achievement and attitudes in tenth-grade geometry*", Journal for research in Mathematics Education, 3, pp 249-259

- Uy, F.L. (2004): "*Teaching Mathematics Concepts Using a Multicultural Approach",* Los Angeles, http://www.ccd.rpi.edu/Eglash/nasgem/ncsm04/Uy,20Fred%20Teaching%20Concepts.pdf
- Van de Walle, J.A., (2001): *Elementary and midlle school mathematics, teaching developementary*, Addison Wesly.
- Van Hiele, (1986): *Structure and insight*, Academic Press, New York
- Vigotsky, L.S., (1978): *Mind and Society*, *The development of higher psychological processes*, Harvard Universityy Press.
- Vigotsky, L.S., (1987),: *Pensamiento y lenguaje*, Barcelona, Paidos
- Vinner, Bruckheimer, & Hershkowitz, (1987); "*Activities with teachers based on cognitive research*", in M. M. Lindquist & A.P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry,* K-12: 1987 NCTM yearbook, pp.222-235, Reston, VA.
- Vinner, S. (1984): *"On concept formation in geometry"* en Southwell, B. et al. (Eds) *Proceding of the 8th PME*, pp.63-69.
- Vinner, S. (1991): "*The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*", in D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 65-81.
- Vinner, S., (1997): "*The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought process in mathematics learning*", Educational Studies in mathematics, nº34, pp 97-129.
- Von Glaserfeld, E.(1988): *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Reidel,.
- Weyl, H. (1974): "*La simetría*", Ed: Prom. Cultural, S.A., Barcelona
- Williford, (1972): "*A study of transformational geometry instruction in the primary grades"*. Journal for research in Mathematics Education, 3(4), 260-271
- Wilson, S.; Shulman, L. and Richert, A. (1987): "*150 Different Ways of Knowing Representations of Knowledge in Teaching*", en Calderhead, J. (ed.): *Exploring Teachers' Thinking.* London: Cassell Education.
- Wirzup, I., (1976): "*Breakthorings in the Psyshology of Learnig and teaching Geometry* ", in Space and Geometry: Papers from a Research Workshop, edited by J. Martin. Columbus, ohio: ERICK/SMEAC
- Zaskis, R., Campbell, S., (1996): "*Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding",* Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 540-563.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991): "*What is mathematical visualization?"* in W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds), Visualization in Teaching and Learning Mathematics, Mathematica Association of America.

Significado de iníciales:

CA - Categoria sobre el contenido profesional en el comportamiento actitudinal.
CAa - Subcategoria sobre la assumpcion de la actividad profesional.
CAr - Subcategoria sobre las actitudes críticas y reflexivas.
CC - Categoria sobre los elementos culturales e históricos en transformaciones.
CE - Categoria sobre el componente estratégico en la formación de profesores.
CEa - Subcategoria sobre aprendizaje de transformaciones.
CEi - Subcategoria sobre instrucción.
CM - El aspecto conceptual matemático.
CMj - Categoria sobre las relaciones y jerarquía en la noción de transformaciones.
CMt - Categoria sobre el objeto *transformación*, terminología y tipos de transformaciones.
CP - Los procesos y la idea de transformación.
CPc - Categoria sobre las transformaciones como cambios.
CPr - Categoria sobre la comunicación y razonamiento con transformaciones.
FEUP- Facultad de Educación de la Universidad de Prishtina.
FFPUB- Facultad de Formación de Profesores de la Universidad de Barcelona.
MASHT - Ministerio de las ciencias, educación y tecnología de Kosova.
PFD - Práctica de formación profesional de profesores sobre transformaciones geométricas.
PF - Prueba Final de conocimientos sobre transformaciones geométricas.
PI - Prueba Inicial de conoimientos sobre transformaciones geométricas.
SA - La sesión de la PFD: Razonar, argumentar y justificar transformaciones geométricas.
SAA - Actividades de la sesión SA sobre razonar, argumentar y justificar las transformaciones geométricas.
SAP - Presentación del tema en la sesión SA.
SI – La sesión de la PFD: Isometrías y la vida cotidiana.
SIA - Las actividades de la sesión SI sobre transformaciones isométricas.
SID - Actividad didáctica en la sesión SI: Presentación en video de una clase de primaria sobre simetría.
SIP - Presentación de la tema en la sesión SI: "*Una experiencia sobre isometrías*" en la sesión Isometría.
SP - La sesión de la PFD: Proyecciones y sombras.
SPA - Actividades de la sesión SP sobre proyecciones y sombras.
SPP - Presentación en video de una clase de primaria sobre sombras en la sesión SP.
SR - La sesión de la PFD: Recursos para aprender a enseñar las transformaciones geométricas.
SRA - Actividades de la sesión SR sobre recursos didácticos y transformaciones geométricas.
SRP - Presentación en la sesión SR: Articulo científico como recurso