

# Universitat de Barcelona

Departament de Didàctica i Organització Educativa

Programa de Doctorat  
Innovació Educativa i Formació del Professorat

Bienni 1990-1992

*Anàlisi del tractament de la geometria al currículum de  
l'educació primària. Una proposta didàctica i un estudi de cas  
sobre les transformacions geomètriques*

Per optar al títol de doctor en  
Filosofia i Ciències de l'Educació

Doctorant: Jordi Quintana Albalat

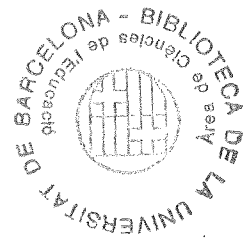
Director: Dr. Claudi Alsina Català

Tutora: Dra. Juana María Sancho Gil

Barcelona, 1996

- 44 -

0555-25760



TD

369



***Per l'Imma Bo,  
la meva dama d'ulls de nit  
i ment de lluna plena.***

*"Qui ets tu? (...)*

*Doncs jo..., en aquest moment, senyor, no ho sé ben bé...,  
sé qui era aquest matí quan m'he llevat, però em penso que des de llavors  
m'he transformat unes quantes vegades."*

Lewis Carroll

*Alicia al país de les meravelles, 1865.*

## Agraïments

En primer lloc voldria manifestar el meu agraïment al Dr. Claudi Alsina, director d'aquesta tesi, per la confiança dipositada en mi, i per les orientacions, suggeriments i guiatge que m'ha donat al llarg del seu procés d'elaboració, sense les quals no hagués estat possible la seva elaboració.

També voldria agrair a la Dra. Joana Maria Sancho l'acurada tutorització que n'ha fet, la qual ha permès donar-li l'adequada solidesa i coherència. Els seus oportuns suggeriments sobre la primera versió han estat d'un gran ajut.

I voldria expressar, i de manera molt especial, el meu agraïment a la Maria Antònia Canals, pel seu mestratge, i pel neguit i l'interès que m'ha anat desvetllant per la didàctica de les matemàtiques, i de manera més concreta per l'ensenyament i l'aprenentatge de la geometria.

Així mateix, voldria deixar testimoni de l'ajut que m'ha donat en Saül Dalmau tant per fer-me tocar de peus a terra, com pels múltiples suggeriments, i per permetre'm compartir les seves classes.

D'altra banda, vull fer explícit l'agraïment als nois i noies de la classe de 6è de primària del C. P. Pau Casals - Gràcia de Barcelona, que em van donar la possibilitat de treballar amb ells; i als companys i companyes del Grup Almosta amb els quals he pogut compartir les experiències.

I a l'Imma Bo, per la companyia constant, i per les reflexions i les múltiples revisions d'aquestes pàgines.

I perquè no, a la intangible però sensible companyia de Bach, Balanescu, Bryars, Nyman, Purcell i Sakamoto, i als mates tèbis d'Enaco.

---

**SUMARI**

<b>Sumari</b>	11
<b>Presentació</b>	15
<b>1 Un marc obligatori de referència</b>	25
1.1 Algunes aportacions a la formació de conceptes en l'aprenentatge de les matemàtiques	27
1.2 El Constructivisme	40
1.3 Perspectives constructivistes en l'aprenentatge i l'ensenyament de les matemàtiques	53
<b>2 Anàlisi de currículums, propostes i estudis</b>	67
2.1 Les transformacions geomètriques en els currículums	70
2.1.1 Currículums de l'Estat Espanyol	70
2.1.1.1 Catalunya: Departament d'Ensenyament	70
2.1.1.1.1 Ordres i decrets	70
2.1.1.1.2 Evolució del tractament de la geometria als currículums de Catalunya, des de la perspectiva de les isometries	79
2.1.1.2 Ministeri d'Educació i Ciència	84
2.1.1.2.1 Ordres i decrets	84
2.1.1.2.2 Evolució del tractament de la geometria als currículums del MEC, des de la perspectiva de les isometries	90
2.1.1.2.3 Propostes de seqüències de matemàtiques	92
2.1.1.3 Andalusia	97
2.1.1.4 Euskadi	100
2.1.1.5 Galícia	102
2.1.1.6 País Valencià	104

2.2.1.7 Comparances i comentaris entre les Comunitats Autònomes	107
2.1.2 El tractament de les isometries a altres països	110
2.1.2.1 Anglaterra	110
2.1.2.2 França	112
2.1.2.3 Itàlia	116
2.1.2.4 Estat Units d'Amèrica: el National Council of Teachers of Mathematics	118
2.1.2.5 Comparances i comentaris sobre el tractament de les isometries als currículums de primària d'Anglaterra, França i Itàlia, i als estàndards del NCTM dels EUA	119
2.2 Propostes sobre les isometries	120
2.2.1 Proposta de Z. P. Dienes	120
2.2.2 Proposta de M. A. Canals	125
2.2.3 Proposta de C. Burgués	128
2.2.4 Proposta d'A. Jaime i A. Gutiérrez	129
2.3 Referències a les isometries en alguns estudis	134
2.3.1 Avaluació dels ensenyament mínims del cicle mitjà d'EGB	134
2.3.2 L'Informe Cockcroft	134
2.3.3 La International Commission on Mathematical Instruction	135
2.3.4 La International Association of Educational Achievement	136
<b>3 Investigacions, propostes i experiències sobre l'aprenentatge de les isometries</b>	<b>141</b>
3.1 Investigacions sobre l'aprenentatge de les isometries	144
3.1.1 Investigacions específiques sobre el tema	144
3.1.2 Comparances entre les investigacions analitzades	163
3.1.3 Altres investigacions a referenciar	165
3.2 Propostes d'innovació en l'ensenyament de les isometries	174
3.3 Experiències escolars sobre les isometries	179
<b>4 La Unitat de Programació</b>	<b>183</b>
4.1 Proposta de continguts de les isometries al llarg de l'Educació Primària, en la qual s'emmarca la Unitat de Programació	186

4.2	Continguts de la Unitat de Programació	189
4.2.1	Procediments	189
4.2.2	Conceptes	191
4.2.3	Actituds	191
4.3	Objectius Didàctics de la Unitat de Programació	192
4.4	Activitats d'ensenyament i d'aprenentatge de la Unitat de Programació	194
4.4.1	Les Proves Inicials	194
4.4.2	Les activitats de la Unitat de Programació	197
4.4.2.1	Índex de continguts de la Unitat de Programació	197
4.4.2.2	Les activitats una a una	200
4.4.3	Les Proves Finals	208
4.5	Recursos utilitzats	209
4.5.1	Recursos materials estàndards	209
4.5.2	Recursos materials propis	209
4.5.3	Recursos informàtics	210
4.5.4	Recursos videogràfics	210
	Apèndix a l'apartat 4: Principals conceptes matemàtics de les isometries	211
<b>5</b>	<b>Programa i desenvolupament de la intervenció</b>	<b>221</b>
5.1	Etapes i calendari del disseny, intervenció, seguiment i valoració	227
5.1.1	Etapes del disseny, intervenció, seguiment i valoració	227
5.1.2	Calendari de concreció de les etapes	229
5.2	La Unitat de Programació a la pràctica	232
<b>6</b>	<b>Buidat de les proves i comentaris: anàlisi i interpretació dels exercicis</b>	<b>235</b>
6.1	Proves Inicials	238
6.1.1	Prova Inicial 1	238
6.1.2	Prova Inicial 2	246
6.1.3	Prova Inicial 3	276

6.2 Proves Finals	285
6.2.1 Prova Final 1	285
6.2.2 Prova Final 2	302
<b>7 Resum final i conclusions</b>	<b>317</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>329</b>
<b>Annexos</b>	<b>377</b>
Annex 1: Proves Inicials	379
Annex 2: La Unitat de Programació	387
Les transformacions	389
Les isometries: els girs	392
Les isometries: les simetries	419
Les isometries: les translacions	445
Materials de la Unitat de Programació	457
Annex 3: Proves Finals	463
Annex 4: El vídeo <i>Alicia al país de les transformacions geomètriques</i>	469
Buidat dels qüestionaris postvídeo	486
Annex 5: Diari i observacions de les sessions	493



# Presentació

## PRESENTACIÓ

En les darreres dècades, i com a confluència de corrents i interessos comuns entre la Didàctica de les Matemàtiques, la Pedagogia i la Psicologia Educativa, les principals preocupacions en el camp de la recerca en Didàctica de les Matemàtiques han estat les relacionades amb el com s'aprèn i com es construeixen els coneixements matemàtics, i el com es pot millorar l'ensenyament per facilitar i guiar aquest aprenentatge i construcció.

Ara bé, en l'àmbit més concret de la pràctica de l'educació matemàtica a nivell escolar, aquests interessos i preocupacions van estar força allunyats, tant dels programes i currículums de les administracions, com de la formació inicial del professorat, com dels llibres de text.

Ens preocupava des de feia molt temps el tema de l'ensenyament de la geometria a l'educació primària i en concret l'apartat de les transformacions geomètriques, donat que l'estudi d'aquestes i dels invariants que generen, pot esdevenir l'eix vertebrador de l'aprenentatge escolar de la geometria.

Si mirem l'evolució a Catalunya d'aquesta temàtica durant el segle XX trobem: èpoques on ha predominat un enfocament "escolàstic" que ha primat la presentació euclidiana i la formulació de caire axiomàtic, moments de total desaparició de la geometria a mans d'enfocaments algebraics de vocació estructuralista (matemàtica moderna), moments d'eclecticisme de presentació i treball..., i també moments d'especial innovació, malauradament restringits a àmbits experimentals minoritaris.

En els darrers anys, i d'acord amb els canvis que a nivell curricular s'estan donant arreu del món, el tema geomètric ha ressorgit amb força demanant una

nova manera de fer geometria a l'escola. Fer geometria a l'escola vol dir educar en el pla i en l'espai, en el moviment i en la representació. Els reptes que això suposa estan molt clars, però les solucions no sempre.

Ara bé, els currículums escolars actuals:

- Integren aquesta nova visió de la geometria?
- Incorporen l'enfocament globalitzador i dinàmic de F. Klein<sup>1</sup>?
- Pot esdevenir aquest enfocament un eix vertebrador i organitzador de la geometria escolar?
- Poden els seus continguts associats, ser objecte d'aprenentatge escolar?
- Què vol dir ensenyar i aprendre les isometries en un marc constructivista?

Aquestes preocupacions han estat sempre al darrera del present treball, en el qual, sintetitzem tant recerques fetes en grups classe de primària, com la nostra experiència en formació del professorat i en l'elaboració de materials curriculars.

Així, l'informe que presentem té com a objectiu analitzar:

1. Quin ha estat el nivell d'incorporació i el tractament de la geometria en els currículums de matemàtiques de l'educació primària, a partir dels

---

<sup>1</sup> Ens referim als plantejaments unificadors que Fèlix Klein va fer en l'anomenat programa d'Erlangen de 1872, en el qual, a partir d'un nou punt de vista sobre la naturalesa i l'objecte de la geometria, va proposar un enfocament orgànic i organitzat de les geometries -l'euclidiana, la projectiva de Desargues i Pascal, i la no euclidiana de Gauss, Lobatchevsky, Bolyai i Riemann-, en el qual la geometria s'entenia com l'estudi de les propietats de les figures que romanen invariants en aplicar-les-hi un grup específic de transformacions (Callejo i Lebrón, 1986; Kline, 1992; Pérez, 1994).

anys setanta, i de forma més específica degut a l'inici de les reformes educatives, al llarg de la dècada dels noranta.

2. Si els currículums escolars de matemàtiques, quan a la geometria, segueixen la tendència kleiniana de no posar tant l'èmfasi en les formes geomètriques sinó en les propietats que romanen invariables després de l'aplicació d'algun tipus de transformació.
3. Quines són les preconcepcions i els coneixements previs bé informals, bé formals socials i escolars, dels nois i noies del cicle superior d'educació primària, en relació a les isometries, i com aquests ajusten tant la selecció i organització de continguts, com la intervenció educativa.
4. Com, en un marc constructivista, els continguts procedimentals, conceptuals i actitudinals de les isometries es poden incorporar al currículum de matemàtiques d'un centre de primària, i com els alumnes els fan seus a partir de l'atribució de significats.

En el primer apartat del present informe, i a tall d'introducció es fa una revisió a les principals aportacions a la Didàctica de les Matemàtiques, ressaltant de manera molt especial les de caire constructivista, en les quals es fonamenta tant la Unitat de Programació elaborada, com la seva implementació i intervenció educativa que l'envolta i concreta.

En el segon apartat es mostra un recull de currículums de matemàtiques per a l'educació primària de diversos països, ressaltant d'una manera especial els aspectes relatius a les isometries. Així mateix es fa un estudi general del tractament de la geometria, i en particular de les isometries en els currículums de Catalunya i del Ministeri d'Educació i Ciència.

També s'inclou una anàlisi de diverses propostes curriculars sobre el tractament de les isometries, així com un recull d'estudis sobre l'educació matemàtica, alguns dels quals inclouen referències a elles.

L'apartat tercer, mostra una àmplia recopilació d'investigacions sobre l'ensenyament i l'aprenentatge de les isometries, realitzades arreu del món des de 1978, a partir de l'anàlisi de les quals s'extreuen elements a tenir en compte en qualsevol intervenció educativa i elaboració de materials.

Aquest apartat es complementa amb un ressenya d'investigacions més genèriques o d'altres àmbits, que mantenen relacions importants amb les isometries, així com una descripció d'un conjunt d'experiències innovadores sobre el seu ensenyament, i un recull d'experiències escolars sobre el tema.

En el quart apartat es presenta una proposta de continguts de les isometries al llarg de l'educació primària, en la qual s'emmarca la Unitat de Programació recollida a l'annex 2, amb el detall dels seus continguts i objectius didàctics, i l'especificació de totes les activitats d'ensenyament i d'aprenentatge amb els corresponents objectius i continguts propis, acompanyats d'un índex general de continguts.

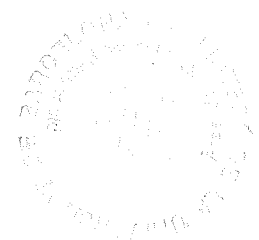
També s'hi inclouen els objectius, els continguts i la descripció dels exercicis o proves inicials i finals, recollides als annexos 1 i 3 respectivament, així com una referència als materials i recursos informàtics i videogràfics utilitzats.

En el cinquè apartat, prèvia especificació de l'enfocament d'investigació emprat, així com de la metodologia i instruments aplicats, s'especifica el programa de la intervenció educativa, així com del seu seguiment i valoració, tot concretant el seu desenvolupament en la pràctica.

A l'apartat sisè es presenten els resultat del buidat, anàlisi i interpretació dels exercicis inicials i finals, tant de manera individual, com en relació entre ells mateixos, i entre els exercicis de la Unitat de Programació. Així mateix es fan diversos contrastos amb les principal conclusions de les investigacions recollides a l'apartat 3.

La present memòria acaba a l'apartat setè, on es presenta un resum final i les conclusions generals relatives a les qüestions esmentades al principi d'aquestes ratlles.

Com a complement s'adjunten diversos annexos que concreten i amplien la informació utilitzada.



1

## Un marc obligatori de referència



## 1 UN MARC OBLIGATORI DE REFERÈNCIA

Tot projecte, investigació, memòria o proposta, ha de tenir, gairebé obligatòriament, un marc de referència teòric i experiencial que li doni fonament i alhora s'enriqueixi amb les noves aportacions. En aquest apartat es fa un recorregut per algunes de les principals aportacions en Didàctica de les Matemàtiques, pel que fa a la formació de conceptes matemàtics i, després d'explicitar els fonaments i principis més importants del Constructivisme, es ressalten de manera molt especial les aportacions en Didàctica de les Matemàtiques de caire constructivista, donat que és en elles on es fonamenta tant la Unitat de Programació elaborada, com la implementació i intervenció educativa que l'envolta.

No pretenem fer una descripció exhaustiva de la qüestió, que, entre d'altres, es pot trobar a Davis, Maher i Noddings (1990), Nesher i Kilpatrick (1990), Orton (1990), Resnick i Ford (1990) i Schoenfeld (1987), sinó una visió més general focalitzada, però, en la temàtica i direcció d'aquest informe.

Així, primerament cal recordar que en el camp de l'educació matemàtica, tradicionalment s'ha utilitzat una metodologia molt centrada en la transmissió d'informació i en les tecnologies educatives "milloradores" de l'ensenyament, tant per motius de reproducció de models rebuts pel propi professorat, com per teories i intencions reproduccionistes (Apple, 1986; Kemmis, 1988), com per fonaments psicològics de caire connexionista, associacionista o conductista sostinguts entre d'altres per R. M. Gagné, B. F. Skinner, P. Suppes i E. L. Thorndike (Baroody, 1988; Dienes, 1975; Orton, 1990 i Resnick i Ford, 1990).



A partir dels anys cinquanta hi va haver una important difusió de corrents i propostes alternatives, moltes d'elles iniciades a principis de segle, així com l'aparició de nous corrents i aportacions com:

- La puixança de la psicologia estructuralista i la cognitivista iniciades per J. S. Bruner i J. Piaget, així com l'inici del cognitivisme amb L. S. Vigotsky.
- La revalorització de la didàctica de les matemàtiques amb, i entre d'altres, E. Castelnuovo, Z. P. Dienes, T. J. Fletcher, C. Gattegno, G. Papy, G. Polya, P. Puig Adam.
- La consolidació dels corrents d'"activisme" i de renovació pedagògica representats per O. Decroly, J. Dewey, C. Freinet, M. Montessori, entre d'altres.

A partir d'aquests fets, l'educació matemàtica va anar agafant un enfocament més centrat en la formació de conceptes i en els processos d'aprenentatge, que juntament amb la reflexió sobre el paper del professorat, amplià i obrí el concepte de educació matemàtica.

Tots aquests elements van posar les bases de l'estatut epistemològic de la didàctica de les matemàtiques (Armendáriz, Azcárate i Deulofeu, 1993; Bielher, et al., 1994; Gómez-Granell i Fraile, 1993; Gutiérrez, 1991; Howson, Keitel i Kilpatrick, 1981; Kilpatrick, Rico i Sierra, 1994; Nesher i Kilpatrick, 1990; Resnick i Ford, 1990; Schoenfeld, 1987).

## 1.1 Algunes aportacions a la formació de conceptes en l'aprenentatge de les matemàtiques

En aquest punt es mostra un recull de les principals aportacions sobre els temes apuntats més amunt, així com una comparança entre els passos o etapes de la formació de conceptes, aplicada al camp de les matemàtiques.

Com es costum en els informes de didàctica de les matemàtiques, les entrades s'han organitzat per autors, ordenats per la data principal d'edició o difusió dels seus plantejaments i propostes.

### *Jerome Bruner*

Bruner (1972), recolzant-se en idees de Piaget, va estudiar els processos cognitius propis del pensament i de l'aprenentatge, centrant-se en com els infants es representen mentalment les experiències interactives amb el seu entorn, cosa que constitueix una importantíssima base per a l'aprenentatge.

A partir d'aquests estudis va descriure els següents modes de representació, que es relacionen entre si de manera evolutiva:

1. L'enactiu: correspon a les nocions i conceptes que difícilment poden ensenyar-se per mitjà de símbols o diagrames i necessiten de l'acció, de l'acció física i directa de qui aprèn, bé sigui de tipus manipulatiu, bé de tipus motriu. Aquest mode també rep el nom de perceptiu o promulgatiu.
2. L'icònic: depèn bàsicament de l'organització perceptiva o visual de qui aprèn, el qual s'imagina l'acció física realitzada o per realitzar,

podent utilitzar representacions visuals (dibuixos, imatges, diagrames, llibres de text, fixes...) para recolzar-la. Es recupera a la memòria com una imatge mental figurativa.

3. El simbòlic: correspon a l'ús de símbols abstractes que pertanyen al llenguatge matemàtic.

Dickson, Brown y Gibson (1991, 385) diuen que *"en la secuencia de etapas de Bruner, fase de abordaje (acción) → fase icónica (imagen) → fase simbólica (símbolos), la tendencia ha sido dedicar a las dos primeras fases un tiempo demasiado escaso para algunos niños"*.

A propòsit d'aquestes etapes de Bruner, Dienes (1975, 46) diu que aquest *"formuló en su momento una teoría del crecimiento en la que sostiene que el pensamiento atraviesa esencialmente tres etapas. Denomina a una etapa activa, en la que el niño debe ejecutar sus conocimientos con su cuerpo; denomina a la siguiente etapa representativa, en la que el niño ya no necesita mover su cuerpo, pero aún debe manejar imágenes concretas. Esta corresponde probablemente a lo que Piaget llama «etapa» concreta operacional, pero ambas subdivisiones se superponen. La última etapa que el niño alcanza es la etapa simbólica"*.

### **Zoltan Paul Dienes**

Dienes, partint de la consideració que allò que veritablement és important en matemàtiques és l'estructura, i que per tant els continguts han de passar a un segon terme, va realitzar diversos estudis amb la intenció de mostrar el camí pel qual es pot accedir a les estructures simbòliques de les matemàtiques.

A partir d'aquests estudis Dienes (1970, 1975 y 1981) presenta sis etapes en l'aprenentatge de les matemàtiques, tot entenent aquest com un procés de modificació del comportament en relació a un entorn concret, que "*refleja un proceso de abstracción progresiva por el cual el aprendiz abstrae de un entorno dado un concepto o una relación, que, posteriormente se convertirá en elemento de un nuevo proceso de abstracción de un nuevo concepto más general pasando previamente por un proceso de representación*" (Llinares, 1994, 194).

O com diu el mateix Dienes (1981) "*los predicados se convierten en sujetos de otros predicados y el proceso se repite indefinidamente*".

Les sis etapes de l'aprenentatge en matemàtiques segons Zoltan Paul Dienes (1981)<sup>1</sup>, que en alguna ocasió ell mateix ha definit com a etapes "del

---

<sup>1</sup> Encara que presentem **les sis etapes de l'aprenentatge en matemàtiques** -i precisament així es diu el llibre que Dienes va publicar al 1973-, Dienes va partir de les tres etapes següents, "insinuades" per Piaget en relació la formació de conceptes (Dienes, 1970, 23-27):

1. Jocs preliminars psicomotrius i manipulacions
2. Expressió oral i gràfica
3. Expressió escrita i simbòlica

Per aquest motiu inicialment el mateix Dienes va proposar també tres etapes en l'aprenentatge de les matemàtiques (Orton, 1990, 178):

- I. Etapa de joc i d'activitat no estructurada
- II. Etapa de l'estructura
- III. Etapa de la pràctica, dels exercicis que poden esdevenir activitats de joc per a altres conceptes.

És important destacar el paral·lelisme entre les etapes de Piaget, les de Bruner i aquestes primeres de Dienes:

<b>Bruner</b>	<b>Piaget</b>	<b>Dienes</b>
Enactiva	Joc i activitat	Joc i activitat
Icònica	Oral i gràfica	Estructura
Simbòlica	Escrita i simbòlica	Pràctica

procés d'abstracció", del pas d'allò concret a allò abstracte (Dienes, 1987), són les següents:

1. **Activitats d'exploració preliminars, de manipulació d'una nova situació. Joc lliure**, lúdic, bàsicament de caràcter psicomotriu i vivencial, o amb materials d'ús corrent, quotidians o contables.
2. **La descoberta de regularitats inherents a la situació, i a la imposició de noves regles, noves restriccions en activitats estructurades. Jocs estructurats** per mitjà de materials estructurats o creats "ad hoc".
3. La discriminació estructural i posterior **classificació de les activitats estructurades** precedents, passant d'"aquesta activitat" a "aquest tipus d'activitat", des del moment que activitats del mateix gènere són classificades juntes. Consciència de l'estructura comú dels jocs estructurats.
4. **La representació diagramàtica, gràfica o esquemàtica** de tota una classe d'activitats, associant els diversos diagrames a les diverses classes i el mateix diagrama a totes les activitats de la mateixa classe. Posteriorment Dienes (1986) va concretar més aquesta etapa anomenant-la **representació d'una classe de jocs isomorfs**, referint-se a la representació de l'estructura comú.
5. **Descripció simbòlica** de les representacions construïdes, d'allò que s'ha fet, utilitzant el llenguatge simbòlic. Estudi de las propietats de la representació.

### 6. Formalització de les descripcions en un sistema formal. Ús de definicions, propietats, teoremes, axiomes, regles, etc.

La concreció pràctica de les teories piagetianes, realitzada per mitjà de propostes psicopedagògiques, didàctiques i metodològiques, molt sovint ha presentat greus inconvenients com el pretendre ensenyar estructures generals de pensament i operacions de caràcter lògic (conservació, classificació, seriació, reversibilitat, etc.).

Un altre problema ha estat proposar la realització d'activitats, experiències i situacions que per mitjà de processos de descoberta autònoms permetin a l'alumnat construir el seu propi coneixement.

Així mateix, la concreció pràctica dels estudis de Dienes també presenta greus errors i inconvenients psicopedagògics, didàctics, metodològics i epistemològics.

L'error més generalitzat, observable fins i tot en llibres de text i unitats de programació, ha consistit en traduir o transposar les sis etapes de l'aprenentatge de les matemàtiques de Dienes en sis passos graduats d'intervenció educativa, o en sis activitats jerarquitzades o fitxes progressives.

En aquest sentit Gómez-Granell i Fraile (1993, 105) opinen que és precisament *"la tendencia de psicólogos y didactas a «adaptar» o «trasponer» a la enseñanza principios de teorías psicológicas, lo que conlleva que muchos de dichos principios teóricos se trivialicen y deformen:*

- *La teoría de los estadios [de Piaget] pasa a ser una teoría de «las edades»: ¿a que edad los niños poseen las estructuras necesarias para entender la suma? [2]*
- *En las aulas se enseñan ejercicios de conservación, seriación, clasificación, en vez de enseñar a sumar y a restar. [3]*
- *La teoría del «descubrimiento» se lleva a límites que hacen prácticamente «desaparecer» al maestro, pretendiéndose incluso que el alumno «descubra» conocimientos culturales tan convencionales como las letras o la notación numérica.*
- *El concepto de «génesis» piagetiano se deforma, planteándose como una jerarquía genética rígida en la que todos los alumnos han de pasar necesariamente por los mismos pasos para descubrir la noción.*
- *La teoría de los modos de representación -enactiva, icónica y simbólica- de Bruner<sup>[4]</sup> se tradujo a prácticas rígidas y esquemáticas: cualquier noción u operación matemática debía ser introducida*

---

<sup>2</sup> Vegeu a Orton (1990, 88) allò que ell mateix anomena diagrama de les etapes de Piaget per als que no comparteixen la seva teoria de les etapes .

<sup>3</sup> Francesco Tonucci (1989), (Fratto) ha inclòs alguns acudits crítics i enginyosos al seu llibre *Amb ulls de nen*, relatius a aquestes pràctiques errònies. A tall d'exemple: Una mestra agafa un tros de plastilina i davant dels infants el parteix en dues parts ben iguals amb la mateixa forma. "On n'hi ha més?", pregunta la mestra, i la resposta més general és que "són iguals". Tot seguit la mestra agafa una de les meitats, en fa cinc trossos més petits i torna a preguntar als infants: "On n'hi ha més?". En aquest cas la resposta majoritària és en grup de cinc. Llavors la mestra inicia les seves explicacions. Un dels infants torna a casa i la seva mare li pregunta què han fet a classe, i l'infant respon: "Res, que la senyoreta s'ha encaparrat en ensenyar-nos que ú és igual a cinc". Sense comentaris.

<sup>4</sup> Quelcom semblant va passar amb les sis etapes de Dienes comentades en els paràgrafs anteriors.

*siguiendo la secuencia «acción-manipulación, dibujo-esquema, símbolo, etcétera»".*

### **Gastón Mialaret**

Mialaret (1984, 26-31) proposa també sis etapes per les quals els infants han de passar per assegurar la construcció sòlida de les bases matemàtiques.

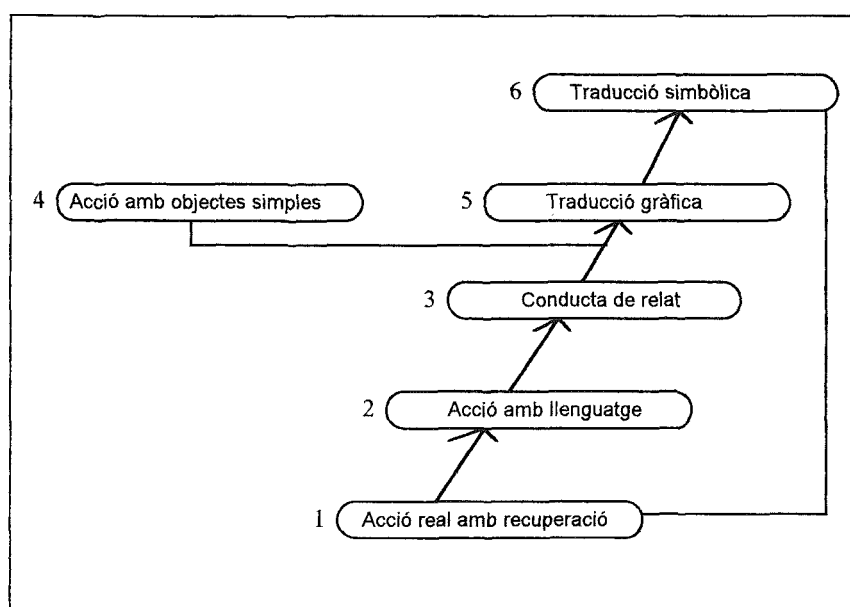
1. **L'acció mateixa:** generalment de tipus manipulatiu, ja que segons l'autor l'operació manual ha de precedir sempre a l'operació aritmètica.
2. **L'acció acompanyada del llenguatge:** quan l'acció i el llenguatge es recolzen mútuament, es força la relació entre l'acció concreta i l'expressió lingüística concreta.
3. **La conducta del relat:** associant una acció real i una expressió verbal de manera simultània, que tradueix l'acció.
4. **L'acció amb materials no figuratius** o objectes simples i quotidians: la realitat és representada de manera esquemàtica, cosa que permet un primer inici d'abstracció possibilitat per la traducció allunyada de la realitat.
5. **La traducció gràfica de les situacions** viscudes (accions): la realització de dibuixos, gràfics, esquemes, etc., implica un canvi de llenguatge. En esta etapa l'autor afirma que els processos han de tenir un doble sentit, anar de l'operació concreta a la traducció pel dibuix, però també baixar altre cop de la traducció simplificada i



esquematzada fins a l'operació concreta. Aquesta dialèctica és la que permet anar agafant cos a la reversibilitat piagetiana.

6. La **traducció simbòlica**: generalment en relació a les operacions i relacions, fent servir els codis, els signes, els termes i el vocabulari matemàtic.

El mateix autor representa aquest procés per mitjà del gràfic que es presenta a continuació:



De tota manera, i com bé diu el mateix Mialaret, el procés no acaba aquí, ja que només "*por medio de numerosos ejercicios «ascendentes» y «descendentes» [es posible] establecer una relación particular entre la acción y el conjunto gráfico  $3+2=5$ ; dada una operación concreta y simple, el niño debe ser capaz de traducirla a términos de operación matemática. Inversamente, ante  $3+2=5$ , el niño debe ser capaz de indicar una acción concreta y simple que responda a esta fórmula matemática*".

***Pierre Maria Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof***

Els Van Hiele presenten els següents cinc nivells de raonament o formes diferents de concebre els conceptes matemàtics, que són de tipus seqüencial però continu (Corberán, et al., 1989; Crowley, 1987; Denis, 1994; Fuys, Geddes i Tischler, 1988; Geddes, 1992; Jaime i Gutiérrez, 1990; Jaime i Gutiérrez, 1994), que s'exposen tot seguit:

**Nivell 1: Visualització o Reconeixement.** Percepció global dels conceptes.

Nocions holístiques i identificacions relacionades amb l'experiència i amb la realització d'accions concretes en objectes i materials. Primeres descripcions d'atributs i de propietats generalment de tipus físiques.

**Nivell 2: Anàlisi.** Identificació de parts o elements dels conceptes amb inici a la generalització de propietats, sense el reconeixement de relacions.

**Nivell 3: Classificació o Deducció informal.** Identificació de relacions entre propietats.

**Nivell 4: Deducció formal.** Etapa de raonament formal que inclou tant l'abstracció com la comprensió dels raonaments lògics i de les demostracions.

**Nivell 5: Rigor.** Comprensió i ús d'estructures axiomàtiques.

Aquests dos autors proposen també cinc fases seqüencials d'aprenentatge, que no estan associades a cap nivell determinat, sinó que, segons proposen, a cada nivell la instrucció ha de començar amb la primera fase, seguir amb

les altres i en finalitzar la cinquena s'ha d'aconseguir el següent nivell de raonament.

Aquestes fases d'aprenentatge són:

**Fase 1: Informació.** El professorat detecta els coneixements previs de l'alumnat, li dona informació i comença la instrucció tot introduint el vocabulari específic.

**Fase 2: Orientació dirigida.** L'alumnat explora el camp d'estudi per mitjà de materials i d'activitats seqüenciades que portin directament als resultat que es volen aconseguir.

**Fase 3: Explicitació.** L'alumnat expressa i intercanvia opinions, observacions, experiències, regularitats... , tot utilitzant el llenguatge de manera correcta.

**Fase 4: Orientació lliure.** Fase de consolidació dels aprenentatges realitzats, per mitjà de la resolució de problemes més complexos i de la seva aplicació a altres entorns

**Fase 5: Integració.** Fase de síntesi i organització d'allò après, per aconseguir una visió global del tema i de les seves relacions.

Un error important que s'ha comès amb els plantejaments dels Van Hiele, és el d'associar les fases d'aprenentatge a passos o sèries de cinc activitats d'ensenyament , de manera semblant al que va passar amb les propostes de Dienes (Gómez-Granell i Fraile, 1993).

***Celia Hoyles y Richard Noss***

Hoyles i Noss (1988) tot i que les aportacions generalment estan relacionades amb l'aprenentatge de les matemàtics en l'entorn informàtic del llenguatge Logo, a partir de les seves recerques i observacions, han anat dissenyant un model general d'aprenentatge de les matemàtiques, de tipus actiu, que anomenen UDGS, i que està estructurat a través d'activitats d'anticipació, de verificació d'hipòtesi i de correcció d'errors, i graduat en quatre estadis progressius.

Aquests estadis són:

1. Utilització de les matemàtiques: el seu ús com a instrument funcional per aconseguir determinats resultats, realitzar diverses tasques i per resoldre problemes (U).
2. Discriminació de la funció dels components: la descomposició de procediments, el reconeixement de les diferents parts d'un tot, la seva funció, etc. (D).
3. Generalització de relacions: el "tornar a escriure en forma explícita allò que era implícit", una generalització conscient d'un domini d'aplicació d'un concepte ja donat (G).
4. Síntesi de diferents contextos d'aplicació: utilització, discriminació i generalització d'un concepte, aplicació en altres contextos (S).

*Joachim Lompscher*

Lompscher (1994), en el marc de l'aprenentatge sociocultural (Cubero, 1994; Del Rio, 1991; Rivière, 1984 i 1987; Vygotsky, 1979; Wertch, 1988), presenta la següent estratègia instruccional dirigida a l'adquisició de conceptes matemàtics:

1. Formular de manera explícita les **característiques necessàries per a l'assignació**, tot donant-les als estudiants com a base de la seva activitat.
2. **Preparar tasques de diferents nivells** de dificultat, la solució de les quals requereixi l'aplicació de les característiques abans esmentades, en un ordre concret.
3. **Organitzar la resolució d'aquestes tasques en diferents nivells** d'activitat:
  - a) Com a **activitat material sobre l'objecte** o com a activitat materialitzada sobre una base escrita d'orientació.
  - b) Com una **activitat verbalitzadora "per a altres"**, que contingui tots els passos i característiques segons la base d'orientació.
  - c) Com una **activitat verbalitzadora "per a un/a mateix/a"**, que només verbalitzi alguns punts crítics.
  - d) Com una **activitat no verbal o mental** que progressivament es redueixi i automatitzi.
4. Fer la translació als nivells més alts d'interiorització segons el grau de domini de l'activitat en el nivell respectiu, i **recórrer els nivells previs** per a superar els errors o dificultats.

**Breu resum dels autors ressenyats**

Com a resum d'aquestes diferents propostes d'etapes o passos en la formació de conceptes en l'aprenentatge de les matemàtiques, presentem la següent taula resum que permet comparar de manera gràfica les aportacions dels diferents autors, conjuntament amb les que Piaget va insinuar (vegeu nota 1).

PIAGET	BRUNER	DIENES	MIALARET	VAN HIELE	HOYLES-NOSS	LOMPSCHER
Joc antropomòrfic i manipulatiu	Etapas enactiva	Joc lliure i manipulació	Acció i manipulació	Visualització i reconeixement	Utilització	Activitat material sobre l'objecte
		Joc estructurat i materials				
		Jocs mateixa estructura				
Expressió oral i gràfica	Etapas icònica	Representació gràfica	Acció i llenguatge	Anàlisi	Discriminació	Activitat verbalitzadora
		Descripció	Conducta narrativa			
			Ús de material no figuratiu			
			Traducció gràfica			
Expressió escrita i simbòlica	Etapas simbòlica	Descripció formal	Traducció simbòlica	Deducció formal	Generalització	Activitat no verbal o mental
				Rigor	Síntesi	

## 1.2 El Constructivisme

Un corrent actual d'ampliconens entre didactes, docents, pedagogs i pedagogues, i psicòlegs i psicòlogues de l'educació, que en el cas de l'Estat Espanyol i de Catalunya està reforçat pel marc de referència teòric del nou sistema educatiu i de la nova ordenació curricular, és el del constructivisme, o més exactament el de la concepció constructivista de l'ensenyament i de l'aprenentatge, i en el cas que ens ocupa de l'aprenentatge constructivista de les matemàtiques.

Com diuen Gómez-Granell i Coll (1994, 8) "*tanto desde la epistemología de las diferentes disciplinas, como desde la psicología cognitiva y las teorías del aprendizaje y la psicología de la instrucción o de la educación, se han abandonado progresivamente las concepciones epistemológicas realistas o empirista y las teorías del aprendizaje asociacionistas.*

*Estudios procedentes de todos estos campos coinciden en afirmar que el conocimiento no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino de un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente que va construyendo progresivamente modelos explicativos cada vez más complejos y potentes".*

És indubtable que el constructivisme és hereu, entre altres autors de Piaget (Coll, 1990a; Davis, Maher i Noddings, 1990; Gómez-Granell y Coll, 1994; Martí, 1991b), a qui de fet podem considerar el primer constructivista ja que defenia una concepció constructiva de l'adquisició del coneixement que podem caracteritzar per:

- La relació activa i dinàmica entre el subjecte i l'objecte de coneixement
- El procés de reestructuració (l'equilibració entre assimilació i acomodació per a l'adaptació) i reconstrucció del coneixement a partir d'allò ja adquirit.
- La naturalesa biològica, constructiva i interaccionista del coneixement.
- El paper del subjecte en la construcció del seu propi coneixement.

Ara bé, els plantejaments de Piaget pateixen d'algunes limitacions importants com ara l'escassa atenció als continguts específics en la construcció d'estructures mentals, i el convenciment que el procés de construcció del coneixement és un procés intern i individual amb poques mediacions i interaccions socials (Martí, 1991b).

*En un marc constructivista podem afirmar que "el conocimiento se adquiere de forma específica en diferentes dominios (lenguaje, notación matemática, biología, física, etc.), que representan características diferenciadas. Lo que el sujeto construye son significados, representaciones mentales relativas a estos contenidos. (...) Todo conocimiento nuevo se construye a partir de otro anterior (...), y se genera en un contexto social y cultural organizado, tal y como señaló Vigotsky hace ya bastantes años"* (Gómez-Granell y Coll, 1994, 9).

O sigui, la informació es transmet, però el coneixement o saber es construeix, fet que implica una integració i transformació de la informació per part de qui la rep, el subjecte, el qual li atribueix significats i la utilitza per a construir el seus propis esquemes cognitius (Coll, 1990b, Quintana i Vivancos, 1992).

És a dir, el coneixement, en qualsevol de les seves categories -conceptual, factual, axiològica, procedimental-, no pot ser simplement transmès pel professorat a l'alumnat durant el procés educatiu.



El coneixement ha de ser induït per mitjà de múltiples situacions d'aprenentatge significatives i riques en recursos i informació, que facilitin la transformació d'aquesta en sabers construïts, esdevenint així coneixement que pot ser aplicat a altres entorns diferents dels que prové, o sigui, que s'utilitza i transfereix a altres contextos, prenent cada vegada més valor, significació i utilitat.

La concepció constructivista de l'aprenentatge i de l'ensenyament s'organitza al voltant de tres eixos d'actuació fonamentals (Coll, 1990a, 1990b, 1992; Coll, et al., 1993; Mauri, Solé, del Carmen y Zabala, 1990; Onrubia, 1991):

1. **La construcció autònoma del coneixement:** *"El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje [ya que] es él quien construye el conocimiento y nadie puede sustituirle en esa tarea"* (Coll, 1990b, 441).
2. **L'aprenentatge significatiu:** *"La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un grado considerable de elaboración"* (Coll, 1990b, 442) i depèn tant dels coneixements previs, com de la seva actitud i disposició favorable, com de la significativitat lògica o estructuració i organització d'allò que es va a aprendre, com de la significativitat psicològica (Coll, 1988).
3. **El professorat com a mediador:** l'existència d'aquests continguts d'aprenentatge preexistents condicionen els nous aprenentatges i el paper del professorat, el qual, a més de *"crear las condiciones óptimas para que el alumno despliegue una actividad mental constructiva, rica y diversa; el profesor ha de intentar además orientar y guiar esta actividad con el fin de que la construcción del alumno se acerque de*

*forma progresiva a lo que significan y representan los contenidos como saberes culturales" (Coll, 1990b, 442).*

Així, en el seu paper de facilitador, orientador i mediador, el professorat ha de ser com un guia, *"un guia un tanto peculiar, ya que su función es «engarzar» los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado" (Coll, 1990b, 443).*

Donat que l'aprenentatge significatiu és l'ingredient essencial de la concepció constructivista de l'aprenentatge escolar (Coll i Solé, 1992), no podem reduir la significativitat dels continguts a la simple connexió entre allò que es va a aprendre i allò que ja se sap, ja que la significativitat també bé donada per altres factors com:

- La connexió amb l'entorn de l'alumnat, entenent per entorn tant el de la vida quotidiana, com el de la família, l'escola, el de les relacions amb companys i companyes, el televisiu, el dels jocs de moda del moment (videojocs, jocs de rol, etc.), els de la música, el dels i de les ídols..., en resum, el de la seva cultura.
- Els interessos que l'alumnat pugui tenir, ja siguin particulars, propis de l'edat o provinents de les modes del moment.
- Els aspectes de novetat, curiositat, interès, necessitat, màgia, aventura, descoberta, investigació, repte, misteri, activitat, manipulació, etc., que envolten allò a aprendre.
- Els aspectes lúdics i d'entreteniment propis dels continguts o que l'envolten o que posa el professorat.
- L'aplicació que d'ells se'n pugui fer a vida personal i quotidiana, i a la resolució de situacions, problemes i conflictes.

- Els mitjans d'accés i mediació, essent d'especial importància les noves tecnologies (vídeo, ordinadors, CDROM, connexions a Internet, etc.).
- Els seus aspectes i resultats:
  - a) **Formatius:** tant a nivell de coneixement dels continguts de la pròpia àrea, com a nivell de desenvolupament cognitiu, de les capacitats de raonament, abstracció, reflexió, etc.
  - b) **Funcionals:** derivats de la seva aplicació, utilitat i utilitarietat, transferència a altres camps, a la vida diària, etc.
  - c) **Instrumentals:** com a base del coneixement d'altres continguts superiors o diversificats, o de continguts d'altres àrees, com a "fonament i bastida formalitzadora de coneixements".

Ara bé, si acceptem tal com diu Coll (1986, 21) que *"una intervenció constructiva de aprendizaje exige una interpretación igualmente constructiva de la intervención pedagógica"*, podem preguntar-nos: què vol dir ensenyar en un marc constructivista? Existeix una metodologia constructivista?

El mateix Coll (1992b, 83) afirma que *"no creemos que exista una metodología didáctica constructivista; lo que hay es una estrategia didáctica general de naturaleza constructivista que se rige por el principio de ajuste de la ayuda pedagógica y que puede concretarse en múltiples metodologías didácticas particulares según el caso"*, i Solé (1992, 24) diu que *"i si ningú no pot suplir l'alumne en el seu procés de construcció personal res, tampoc, no pot substituir l'ajut que representa la intervenció pedagògica perquè aquesta construcció es dugui a terme"*.

Però si acceptem que no hi ha ni sistemes, ni models, ni metodologies didàctiques constructivistes, quin model d'intervenció didàctica està més en consonància amb el constructivisme? Hi ha models contraris al constructivisme?

És possible extreure els "elements i metodologies constructivistes" de tots els models i unir-los en una mena de còctel que rebi el nombre de "model constructivista"?

Solé (1992, 23) diu que si bé "*l'explicació constructivista sobre l'aprenentatge escolar i de l'ensenyament es basa en alguns principis (...), la naturalesa dels quals fa impossible de delimitar un mètode únic o exclusiu que asseguri la significativitat dels aprenentatges que els alumnes fan a les aules*", no té cap mena d'objecció en excloure "*els enfocaments metodològics basats en la homogeneïtzació dels alumnes (...); aquells les característiques dels quals fan impossible la intervenció activa de l'alumne i l'observació efectiva d'aquesta intervenció per part del professor durant el desenvolupament de les seqüències didàctiques; els que preveuen unes activitats i uns recursos materials uniformes, siguin quins siguin els continguts de què es tracti, el nivell inicial dels alumnes... En definitiva, l'explicació constructivista no admet les propostes segons les quals les característiques dels alumnes han de supeditar-se a les característiques de l'ensenyament, sinó que propugna tot el contrari*".

Noddings (1990, 10) en un escrit sobre el constructivisme a l'educació matemàtica exposa que els "*constructivists in mathematics education contend that cognitive constructivism implies pedagogical constructivism; that is, acceptance constructivist premises about knowledge and knowers implies a way of teaching that acknowledges learners as active knowers*".

I Davis, Maher i Noddings (1990, 187) coordinadors d'un ja clàssic monogràfic de la revista *Journal for Research in Mathematics Education* del NCTM, exposen que els constructivistes estan d'acord "*that mathematical learning involves the active manipulation of meanings, not just numbers and formulas. They reject the notion that mathematics is learned in a cumulative, linear fashion. Every stages of learning involves a search for meaning, and the*

*acquisition of rote skills in no way ensures that learners will be able to use these skills intelligently in mathematical settings. Misconceptions may develop anywhere in the process, and constructivist teachers are continually watching for them and planning activities that will lead students to challenge their own faulty conceptions.*

*Constructivists recommended providing learning environments in which students can acquire basic concepts, algorithmic skills, heuristic processes, and habits of cooperation and reflection. These are all capabilities that should be generally useful in the future as well as the present and may well be vital in dealing with problem situations and solution strategies that no one at present can foresee. In such environments, the ideas which the student is learning become our main concern”.*

I concretan més encara quant diuen (Davis, Maher i Noddings, 1990, 189):  
“What kinds of experience does school need to provide to children? At the risk of considerable over-simplification, we might four:

- 1. The usual «show-and-tell-and-drill» experiences (which, some constructivists admit, may have a limited usefulness -these is another vital area as research: How does drill and practice fit, if it does at all, into a constructivist program?).*
- 2. Deliberately created «assimilation paradigms» -that is to say, carefully designed metaphors that correctly mirror the structural features of various pieces of mathematics, and which therefore give the student a basis for powerful mental representations-.*
- 3. General background experience, of the type that is sometimes described as «readiness-building» experience.*

*4. Experiences (such as task-based interviews) that give the teacher opportunities to make direct contact with the ways that the student in thinking about some topic or situation or problem.*

*Only the first of these is really familiar in most traditional approaches; here, too, constructivism makes additional demands on its adherents”.*

És indubtable que, salvat el maniqueisme de classificar els models didàctics en bons i dolents, hem de reconèixer que hi ha metodologies més o menys adequades, o més o menys acords a principis psicològics, pedagògics, ètics o productius.

Sense voler fer cap proposta de classificació d'aquests models didàctics i metodològics, considero que aquests, parafrasejant a King i la seva classificació dels tipus de programari educatiu (King, 1986)<sup>5</sup>, els podríem agrupar en models oberts i models tancats.

Els models tancats serien els que promouen metodologies molt estructurades, gairebé com un programa d'intervenció programada i sistemàtica, els partidaris dels quals no accepten aplicacions heterodoxes. Aquests models es basen en paradigmes psicològics conductuals i recursos de l'anomenada tecnologia educativa dirigida a la instrucció (Quintana, en premsa), propugnen un currículum tancat centrat en objectius operatius i donen molta importància a l'eficàcia i a l'eficiència, i al producte de l'acció de l'ensenyament.

---

<sup>5</sup> Martí (1992, 139) recull aquesta proposta classificadora de programari educatiu de King i la completa i amplia dient que el concepte obert/tancat ha de referir-se a la possibilitat d'intervenció del professorat, però que en base al marge d'iniciativa de l'alumnat, pot parlar-se de programari exploratori o guiat, i en base a la funció educativa, d'eines generals o específiques, existint una relació vehicular entre programari obert, exploratori i eina general, i programari tancat, guiat i eina específica.

Els models oberts són els que conceben les metodologies com un conjunt d'eines i recursos al servei d'un clima i d'un objectiu, i per tant, a més dels recursos propis, n'incorporen d'altres. Aquests models es basen en paradigmes psicològics de tipus cognitiu, propugnen un currículum obert centrat en activitats i objectius terminals i entenen l'educació com un conjunt de processos de ensenyament i d'aprenentatge.

Aquests dos tipus de models coincideixen amb els descrits per Wickens (citats per Coll, 1986, 22), i que Coll resumeix dient que hi ha "*dues concepcions diferents sobre com ha de ser el currículum escolar: la que intenta unificar i detallar al màxim la seva aplicació [currículum tancat], i la que deixa un ampli marge d'iniciativa al professor que l'aplicarà [currículum obert]; en altres paraules, la que identifica pràcticament currículum i programació, i la que entén el currículum com un instrument per a la programació*".

Fent una categorització i resum esquemàtic dels enfocaments i pràctiques curriculars més estesos, ens trobem davant les següents tres etapes o fases<sup>6</sup> més o menys cronològiques -alguna d'elles amb una supervivència tristament mostrada-, que al mateix temps representen un concepte d'educació i un model curricular amb contingut psicològic, didàctic i ideològic específic (King, Quintana i Vivancos, 1992):

---

6 No es difícil trobar paral·lelismes entre:

- Les tres etapes o fases dels enfocaments i pràctiques curriculars de King, Quintana y Vivancos (1992): Transmissivitat, Activisme innocent i Còctel racional o Constructivisme.
- Les tres metàfores de Monereo (1993): Gimnàstica, Hortícola i Elàstica.
- Les tres perspectives de formació de professorat de Pérez (1992 i 1994): Acadèmica, Tècnica i Pràctica.
- Els tres tipus d'interessos cognitius d'Habermas (1986): Tècnic, Pràctic i Emancipador.
- Els tres tipus de currículum de Carr i Kemmis (1988) o de Grundy (1991): Tècnic, Pràctic i Crític.
- Els tres usos dels mitjans de Bautista (1994): Transmissors/reproductors, Pràctics/situacionals i Crítics/transformadors.

1. **La transmitivitis:** sistema tancat centrat en l'educació informativa, que es fonamenta en la transmissió unidireccional de la informació, en la confusió epistemològica y psicopedagògica entre informació i coneixement, i la falsa creença de la transmissió del coneixement.

La seva metodologia és essencialment passiva i es caracteritza per:

- L'excessiu ensenyament i l'escàs aprenentatge. El protagonisme de l'acte educatiu està exclusivament en mans del professorat.
- Una absorció passiva i indiscriminada d'informació per part de l'alumnat.
- Una metodologia estàtica, rígida i pobre de recursos didàctics, molt centrada en l'acumulació i memorització indiscriminada de continguts conceptuals, en explicacions, demostracions, repeticions, exercitacions, etc.
- Una desmotivació de l'alumnat per aprendre, deguda al poc lligam entre els continguts i els interessos de l'alumnat.
- Un molt baix nivell d'interacció interpersonal entre l'alumnat i el professorat, i entre el mateix alumnat.
- Un oblit total de l'atenció a la diversitat, forçant l'estandardització de les tasques de l'alumnat amb independència dels seus interessos, estils cognitius, ritmes d'aprenentatge, coneixements previs formals i informals, necessitats educatives especials, adequacions curriculars, etc. S'explica per la majoria.



- Una visió fragmentada de la realitat basada en un model lineal del coneixement, fraccionat en disciplines estanques.

2. **L'activisme innocent:** sistema obert centrat en l'adquisició d'informació i fonamentat en l'educació formativa.

La seva metodologia és essencialment activa i es caracteritza per:

- El protagonisme del professorat i la responsabilitat compartida amb l'alumnat.
- El desenvolupament de procediments genèrics de tractament de la informació, facilitadors de la seva transformació en coneixements.
- Una metodologia variada centrada en múltiples activitats, descobertes, recursos, mitjans, experimentacions, manipulacions, hipòtesis, etc.
- Un professorat motivador i guia de les descobertes i dels processos d'aprenentatge.
- Una interacció personal i un treball en equip.
- Un tractament personalitzat de l'alumnat i un foment de l'autonomia personal.
- Una visió unificada de la realitat potenciada pels plantejaments globalitzadors.

3. **El còctel racional o constructivisme:** sistema obert de construcció de coneixements a partir de la seva significativitat, interès i utilitat propis o del seu aprenentatge.

No té una metodologia pròpia i específica, però està en concordança amb:

- El protagonisme i la responsabilitat de l'alumnat en el seu propi aprenentatge.
- El desenvolupament contextualitzat de procediments de tractament de la informació, facilitadors de la seva transformació en coneixements significatius.
- Una metodologia variada també centrada en múltiples activitats, recursos, mitjans, descobertes, experimentacions, manipulacions, etc., però lligada a contextos rics i variats.
- Un professorat que actua com a mediador i facilitador dels processos d'aprenentatge.
- Una interacció personal i treball en equip o cooperatiu.
- Un tractament personalitzat de l'alumnat i un foment de l'autonomia personal en un marc d'atenció i respecte a la diversitat.
- Una visió diversificada de la realitat potenciada pels projectes interdisciplinars, els temes transversals, la contextualització dels aprenentatges, etc.

Monereo (1993) etiqueta de manera il·lustrativa i caricaturesca aquests tres models a partir d'una *metàfora gimnàstica* que concep el cervell com un múscul que s'ha de desenvolupar a partir de la repetició i correcció constant dels continguts que s'expliquen a l'alumnat perquè "se'ls hi quedi al cap"; d'una *metàfora hortícola* fonamentada en el respecte als estadis maduratius de l'alumnat i en la facilitació del creixement de les "llavors" que porten a dins seu; i una *metàfora elàstica* segons la qual els infants posseeixen unes potencialitats que són extensibles i per tant han de ser estirades al màxim si es vol aconseguir un bon desenvolupament.

La metàfora gimnàstica està relacionada directament amb el conductisme, la hortícola amb les teories de Piaget i l'elàstica amb el concepte de zona de desenvolupament pròxim de Vigotsky.

Ara bé, si com diu Coll (1992b, 82) "*la concepción constructivista del aprendizaje y de la enseñanza se vincula, pues, claramente con un planteamiento curricular abierto y flexible que rompe con la tradición de currícula cerrados y altamente centralizados*", podem afirmar que els models oberts concordaran més amb el constructivisme que els tancats.

En aquest sentit, Noddings (1990, 7) en relació al constructivisme a l'educació matemàtica afirma que "*constructivism may be characterized as both a cognitive position and a methodological perspective. As a methodological perspective in the social sciences, constructivism assumes that human beings are knowing subjects, that human behaviors is mainly purposive, and that present-day human organisms have a highly developed capacity for organizing knowledge*".

*"As a cognitive position, constructivism holds that all knowledge is constructed and that the instruments of construction include cognitive structures that are either innate<sup>[7]</sup> or are themselves products of developmental constructions<sup>[8]</sup>. The later interpretation is more characteristic of constructivism as a cognitive position, and it is the one held by most constructivists in mathematics education".*

*"Constructivist in mathematics education contend that cognitive constructivism implies pedagogical constructivism; that is, acceptance of constructivist premises about knowledge and knowers implies a way of teaching that acknowledges learners as active knowers".*

### **1.3 Perspectives constructivistes en l'aprenentatge i l'ensenyament de les matemàtiques**

En aquest punt no hem pretès fer una descripció exhaustiva de les principals aportacions al camp de l'educació matemàtica de fonament constructivista, que, entre d'altres, es pot trobar a Bielher (1994), Davis, Maher i Noddings (1990), Chamorro (1991), Nesher i Kilpatrick (1990), Schoenfeld (1987) i Von Glaserfeld (1994), sinó una referència a les aportacions més properes.

De les propostes de l'anomenada "Escola Francesa de Didàctica de la Matemàtica" formada entre d'altres per G. Arsac, M. Artigue, G. Brousseau, Y. Chevallard i R. Douady, cal ressaltar de manera especial les aportacions de Guy Brousseau, el seu fundador, i concretament les relatives als conceptes de:

---

<sup>7</sup> En el sentit de N. Chomsky.

<sup>8</sup> En el sentit de J. Piaget.

1. **Obstacle epistemològic:** Com diu Godino (1991) l'aprenentatge per adaptació al medi, implica necessàriament ruptures cognitives, acomodacions, canvis de models implícits i de concepcions. Les preconcepcions dificulten l'accés del coneixement a un estatus més científic, bé pel lligam i seguretat de les rutines, bé per reticència al canvi i a la ruptura cognitiva, i esdevenen veritables obstacles d'origen ontogènic -relacionats amb el desenvolupament-, didàctic -de les relacions professor/a-alumne/a-, o epistemològic, entès aquest darrer com un conjunt de dificultats conceptuals relacionades amb una teorització inadequada.

Segon Brousseau (1983), per a superar aquests obstacles es precisen situacions didàctiques dissenyades per fer conscient a l'alumnat de la necessitat de canviar les seves idees i per ajudar-los a aconseguir-ho, o sigui, que el professorat ha d'ajudar a l'alumnat perquè prengui consciència de les seves concepcions errònies o inadequades, a descobrir la seva inconsistència i els errors que comporten.

2. **Transposició didàctica:** Segons Brousseau (1990b, 261) *"el saber nunca es exactamente el mismo para sus creadores, para sus usuarios, para los alumnos, etc., cambia. El estudio y el control de estas modificaciones, que nosotros llamamos transposición didáctica es el objeto principal de la teoría"*.

Així mateix, *"para hacer más fácil la enseñanza, ésta aísla algunas nociones y propiedades del abanico de actividades donde se han originado, donde han tomado su sentido, su motivación y su utilidad. Ella [la enseñanza] las transpone en el contexto escolar. Los*

*epistemólogos llaman a esta operación transposición didáctica"*  
(Brousseau, 1986, 36)

Chevallard (1991, 39) afirma que *"un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès alors un ensemble de transformations adaptatives qui vont rendre apte parmi les objets d'enseignement. Le «travail» qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique"*.

*"Le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir peut être appelé plus justement «transposition didactique stricto sensu». Mais l'étude scientifique de processus de transposition didactique (qui est une dimension fondamentale de la didactique des mathématiques) suppose la prise en compte de la transposition didactique sensu lato, représenté par le schéma  
→ objet de savoir → objet à enseigner → objet d'enseignement  
dans lequel le premier chaînon marque la passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, de préconstruit au construit"*.

3. **Situació didàctica:** Segons Brousseau (citada per Gálvez, 1994a, 41) per situació didàctica es pot entendre *"un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución"*, o sigui, aprenen, reconstrueixen algun coneixement.

El mateix autor d'aquest concepte, tipifica les quatre situacions didàctiques següents:

- a) Les situacions d'acció: interaccions entre l'alumnat i el medi físic.
- b) Les situacions de formulació: comunicació d'informacions entre l'alumnat.
- c) Les situacions de validació: un alumne ha de convèncer a altres de la validesa de les seves afirmacions per mitjà d'explicitacions.
- d) Les situacions d'institucionalització: l'establiment de convencions socials de tipus simbòlic.

Com diu Gálvez (1994a, 44) *"una parte importe del análisis de una situación didáctica lo constituye la identificación de las variables didácticas y el estudio, tanto teórico como experimental, de sus efectos"*.

4. **El contracte didàctic:** Brousseau (citat per Charnay, 1994) defineix el contracte didàctic com *"el conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno, y el conjunto de comportamientos de los alumnos que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumnos-saber definiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?"*<sup>9</sup>

Les relacions que s'estableixen en una negociació entre el professorat i l'alumnat, el resultat de la qual ha estat designat com a contracte didàctic, defineix les regles de funcionament dintre de la situació, com

---

<sup>9</sup> Solé (1993), a partir dels treballs de Rosenthal i Jacobson, desenvolupa el fenomen de les "expectatives" en els processos d'ensenyament i d'aprenentatge, que entronca directament amb el concepte de contracte didàctic, posant, de forma indirecta, algun element de crítica a les idees i plantejaments de Brousseau.

ara allò que s'espera, allò a què s'ha d'arribar, la distribució de responsabilitats, les temporalitzacions, l'ús de recursos, etc.

Azcárate (1994) defineix el contracte didàctic com "*aquell codi de comportament dels alumnes i professors, sovint implícit, que s'aplica a totes les situacions escolars i, en particular, a les tasques relacionades amb la resolució de problemes proposats a la classe de matemàtiques*".

Des d'una altra prespectiva, però en el mateix marc constructivista A. J. Baroody (1988, 30-31) descriu les següents implicacions generals per a estimular la construcció activa del pensament matemàtic, formulades a mode de llistat d'estratègies o condicions<sup>10</sup>:

1. Concentrar-se en estimular l'aprenentatge de relacions ja que aquestes resumeixen blocs sencers d'informació i fan que l'aprenentatge sigui més significatiu i agradable<sup>11</sup>.
2. Concentrar-se en ajudar als infants a veure connexions i a modificar punts de vista, ja que l'aprenentatge significatiu implica assimilar i integrar informació, i una manera de fomentar-lo és ajudar-los a veure la connexió existent entre la instrucció i els seus propis coneixements.
3. Planificar tenint en compte que l'aprenentatge significatiu requereix molt temps, ja que s'aconsegueix de manera gradual, mitjançant la

---

<sup>10</sup> Altres autors han seguit el mateix estil de recomanacions, com Rivière (1990, 168) i els seus "deu manaments cognitius" pel professorat de matemàtiques, Gómez-Granell (1990, 44) i les seves vuit estratègies d'ensenyament potenciadors de l'aprenentatge significatiu en matemàtiques, o les sis condicions possibilitadores d'un ensenyament contextualitzat i personalitzat de les matemàtiques (Gómez-Granell, 1994, 18).

<sup>11</sup> O com diu Rivière (1990, 168), "*vincularás, en lo posible, los contenidos matemáticos a propósitos e intenciones humanas y situaciones significativas*".



comprensió de cada pas, i abans que es produeixi una reorganització del pensament passa un llarg període de preparació.

4. Estimular i aprofitar la matemàtica inventada pels propis infants, ja que la matemàtica informal, que és senyal d'intel·ligència, ha de ser la base i plataforma de tot aprenentatge, facilitant la consciència de la connexió existent entre la matemàtica inventada i la instrucció escolar<sup>12</sup>.
5. Tenir en compte la preparació individual, o sigui, els coneixements que un infant té en un moment concret, ja que aquests desenvolupen un paper cabdal en l'aprenentatge significatiu. Explorar l'interès natural dels infants en el joc, ja que aquest és el seu vehicle natural d'exploració i domini de l'entorn.

Des de la perspectiva de l'aprenentatge sociocultural (Cubero, 1994; Martí, 1991b; Rivière, 1984 i 1987; Vygotsky, 1979; Wertch, 1988), P. del Río (1991, 32-33), tot i que no presenta cap proposta específica en la formació de conceptes, en un interessant article sobre l'educació matemàtica, interpreta les idees de Vygotsky i deixa entreveure tres "etapes" en aquesta formació de conceptes: "*Los instrumentos psicológicos*<sup>[13]</sup> [1] (como una cuerda o el ábaco)

---

<sup>12</sup> O com diu Gómez-Granell (1990, 44), "*ayudar a los alumnos a poner en relación sus procedimientos no formales con los algoritmos formales a través de un proceso de reflexión consciente*".

<sup>13</sup> El terme "instruments psicològics" pertany a L. S. Vygotski (Rivière, 1984, 41; Vygotski, 1979, 88; Wertsch, 1988, 91), i amb ell es refereix a aquells instruments materials que juguen un paper mental, un paper representacional que agafa forma de "*mediador psicológico que permite ampliar y extender la conciencia o las funciones psicológicas naturales, traspasando el esfuerzo constructivo o evolutivo de nuevos mecanismos desde la genética biológica a la genética cultural. (...) Estos «instrumentos psicológicos» permiten, pues, una primera representación aún muy rudimentaria y natural, aún muy ligada al nivel visual y manipulativo. Es decir, construyen la representación mental, en el exterior, y física o técnicamente*" Del Río (1991, 32).

Aquest concepte d'instruments psicològics, instruments físic amb acció psicològica superior, entroca directament amb l'ús, la manipulació de materials, tan extesa en la pràctica de la didàctica de la matemàtica, que va ser proposada,

*no sólo permitieron históricamente acceder a los conceptos matemáticos (como la recta o el número negativo) como sugería Wittgenstein o sugiere el matemático Aleksandrov. Se convierten en traductores de estos conceptos, en la medida en que estos instrumentos son etiquetados con otros, de carácter ya más comunicativo y menos manipulativo, cada vez más fáciles de «llevar» por el sujeto (como el lenguaje escrito o el oral) [2] y en el último término se interiorizan tras todo un proceso de re-representaciones hasta estar presentes en nuestra mente como habla interna o representaciones mentales [3]"*.

O sigui, i a mode de resum, podem dir que Del Ríó ens presenta també, encara que sigui en un marc un mica diferent i com a interpretació vigotsquiana, però amb els mateixos fonaments, tres "etapes" d'alguna manera paral·leles a les de Piaget o Bruner, comentades en el punt anterior<sup>14</sup>.

Aquest autor proposa una ensenyament de la matemàtica que reculli els instruments culturals presents a l'entorn i els utilitzi en els seus dissenys educatius, com a mediadors entre la realitat i els conceptes<sup>15</sup>.

---

entre d'altres, per Burgués (1987), Dienes (1970 i 1975), Canals (1989), Castelnunovo (1980), Gattegno (1967), Gattegno i altres (1967), Grup Almosta (1988), Mialaret (1984), Sanders (1993).

<sup>14</sup> Taula de comparació de les tres fases de Piaget, les de Bruner i les Del Ríó interpretades de Vigotsky.

Piaget	Bruner	Del Rio/Vigotsky
Joc antropomòrfic i manipulatiu	Etapa enactiva	Eines/instruments psicològics / Manipulació
Expressió oral i gràfica	Etapa icònica	Comunicació / Llenguatge oral i escrit
Expressió escrita i simbòlica	Etapa simbòlica	Representacions mentals / Simbolisme

<sup>15</sup> En aquest sentit, Gómez-Granell (1990, 44) proposa "fomentar el uso de instrumentos mediadores de carácter analógico y concreto (contar con los dedos, con material, dibujos, esquemas, materiales estructurados, etc.)".

Seguint aquesta línia afirma que "sería preciso diseñar las actividades educativas integrando la estructura significativa de la actividad al nivel de «sentido» (el significado emocional y social que tienen para él sus actuaciones, los motivos que le impulsan a realizarlas y le permiten movilizar sus acciones) con la estructura significativa de la actividad a nivel del «significado» (el significado semiótico, instrumental que le permite conocer y manejar cognitiva y técnicamente sus acciones)" (Del Río, 1991, 31).

En la mateixa perspectiva R. Brissiaud (1993) exposa que en la formació de conceptes matemàtics hi interactuen dos elements o components fonamentals:

1. Un component pràctic: ja que el veritable avenç i progrés es troba en l'acció del subjecte quan ha de donar solucions pràctiques i resoldre problemes.
2. Un component simbòlic: ja que per avançar és necessari l'ús de representacions simbòliques.

Aquest autor realitza una important revalorització de l'ús de materials i de les manipulacions, reubicant el seu ús a partir dels plantejaments de Vigotsky, segons el qual, els processos mentals estan del tot influïts pels mitjans socioculturals que els mediatitzen, i els instruments materials poden esdevenir instruments psicològics, essent precisament aquests, que per mitjà dels signes i dels sistemes simbòlics -el llenguatge, el contar, l'ús de materials "de cara endins", l'àlgebra, les representacions gràfiques, el dibuix, etc.- permeten el desenvolupament i la regulació, i el control de la conducta (Brissiaud, 1993; Del Río, 1991; Leóntiev, 1991; Rivière, 84; Vygotski, 1979; Wertsch, 1988).

D'altra banda Brissiaud proposa una línia d'intervenció didàctica fonamentada en la idea "que es comunicándose con el adulto como el niño lleva a concebir

*las cantidades*"<sup>16</sup> entenent per quantitat "un sistema simbólico que se adquiere como instrumento de comunicación", o sigui, "como instrumento de regulación de la interacción social"<sup>17</sup>, i el que ell anomena una "teoria de l'ús didàctic dels sistemes simbòlics"<sup>18</sup> inspirada en el "mètode instrumental" de Vigotsky.

Per a E. Martí (1991a, 65) l'aprenentatge de les matemàtiques és un procés constructiu, que és el resultat d'una complexa interacció entre les instàncies següents:

1. L'activitat de l'alumnat en situacions com l'ús de processos i estratègies en l'assimilació de conceptes matemàtics, la realització d'operacions aritmètiques, la resolució de problemes, l'anàlisi de situacions i relacions geomètriques, la generalització i l'aplicació d'algoritmes apresos a noves situacions, etc.
2. Els coneixements i esquemes previs de l'alumnat, o sigui les idees i destreses matemàtiques formals i informals com el contar, la noció intuïtiva de nombre, de successor o següent, la conservació de quantitat numèrica, els procediments espontanis de càlcul, etc.
3. Els conceptes i regles del món de la matemàtica, amb el seu elevat grau d'abstracció, formalització i descontextualització, la seva estructura fortament jeràrquica, el seu rigor i absència d'ambigüitat en l'aplicació de les seves regles, la seva notació simbòlica, etc. Una de les dificultats

---

<sup>16</sup> Aquest plantejament entronca directament amb els "bastiments" i els "formats" de Bruner (Martí, 1991b, 98) i la "zona de desenvolupament pròxim" de Vygotski (1979).

<sup>17</sup> Tal i com suggereixen, entre d'altres, Perret-Clermont (1984) i Shubauer-Léoni y Perret-Clermont (1980).

<sup>18</sup> Que d'alguna manera es contraposa a la "teoria de les situacions didàctiques" de Brousseau.

importants en aquest aspecte és l'articulació dels coneixement declaratius o conceptuals (conjunt de significats relacionats i organitzats) amb els coneixements procedimentals (conjunt de regles d'acció l'aplicació de les quals porta a un cert resultat).

4. Un context social d'intercanvi planificat (el d'ensenyament/aprenentatge) en el qual els tres elements anteriors agafen cos. *"Si aceptamos esta visión constructiva de la cognición y del aprendizaje de las matemáticas, no nos será difícil aceptar que cualquier medio que facilite la interacción entre la actividad del alumno y el objeto de aprendizaje y entre el alumno y otros interlocutores (maestro y compañeros) puede afectar de manera sustancial el proceso de aprendizaje"* (Martí, 1991a, 65)<sup>19</sup>.

Ara bé, acceptant que el pensament matemàtic es construeix a partir de l'acció, (Martí, 1994), l'autor alerta sobre la necessitat de la reestructuració dels significats intuïtius a partir de la contextualització.

*Així, "si la construcción matemática a lo largo de la historia se ha caracterizado por una constante abstracción, generalización y toma de conciencia de las propiedades más generales de la acción ejercida sobre los objetos superando los aspectos más concretos y contextuales de éstas últimas, es necesario que el profesor ayude al alumno ha hacer de forma consciente un proceso inverso: ofrecer constantes precisiones del significado del simbolismo matemático en contextos determinados, para que el alumno pueda, desde esta base, construir conocimientos más abstractos y generales", i per tant, "el esfuerzo de la*

---

<sup>19</sup> L'autor es refereix de manera molt especial al mitjà informàtic ja que *"posee ciertas características que lo convierten potencialmente en un medio simbólico de gran interés para el aprendizaje en general y para el aprendizaje de las matemáticas en particular: es un medio interactivo y dinámico"* (Martí, 1991a, 73).

*enseñanza debería dirigirse a relacionar el simbolismo formal con los diversos significados específicos para los cuales dicho formalismo representa un modelo general, igualmente válido".*

*"Si se obvia esta inyección de significado, y no se aprovecha la comprensión matemática intuitiva que la mayoría de alumnos tienen cuando están en la escuela, se corre el peligro de crear dos tipos de pensamientos yuxtapuestos e inconexos: el que el niño elabora sin instrucción formal (altamente significativo y funcional pero que sin ayuda explícita permanece limitado, poco consciente y con un grado mínimo de generalización y abstracción), y el pensamiento matemático escolar (en teoría más riguroso, explícito, consciente, abstracto y general, pero desprovisto de significado y de posibilidades de uso) (...) todas las tentativas que vinculen los contenidos matemáticos con significados específicos y próximos a los alumnos y todos los problemas que se planteen de forma lo más cercana posible a sus preocupaciones y necesidades, ayudarán seguramente a crear el sentimiento de que lo que se hace tiene algún sentido y es pertinente" (Martí, 1994).*

C. Alsina, en el marc del que en podríem anomenar constructivisme crític o moderat, presenta el següent decàleg de principis, perquè, de manera semblant al que va redactar P. Puig Adam al 1955<sup>20</sup>, serveixi per a la reflexió i el treball pràctic, i alhora ajudi a anar trobant una direcció positiva en el futur de la tasca del professorat de matemàtiques (Alsina, 1994a i 1994b):

1. *"El aprendizaje debe ser un viaje, y no un destino en el cual el profesorado debe actuar de guía".*

---

<sup>20</sup> Aquest decàleg va ser publicat al 1955 a Madrid amb el nom de "Decálogo de la Didáctica Matemática Media", a la *Gaceta Matemática*, 1a sèrie, tom VII, núms. 5 i 6. Se'l pot trobar reproduït a *Nueva revista de enseñanzas medias*, núm. 7, 1985; i en una versió resumida en català a Roig, 1992.

2. *"En la etapa obligatoria de la matemàtica que debe enseñarse debe tener como objetivo último formar futuros ciudadanos posibilitando una capacidad inteligente para ejercer una vida en libertad".*
3. *"En la etapa no obligatoria de la matemàtica que podría enseñarse debería completar formaciones y preparar una comprensión «dúctil» de los principios matemáticos útiles en las profesiones y los estudios".*
4. *"Las matemáticas deben asumir las posibilidades tecnológicas e incorporar la labor empírica (de campo o de laboratorio)".*
5. *"Nuevas formas de evaluar deben permitir superar la puntuación clásica de ejercicios individuales y rutinarios".*
6. *"La enseñanza de las matemáticas debe componer un fuerte componente cultural, social y humano".*
7. *"La enseñanza de la matemática debe ser sensible a la diversidad en todos sus aspectos".*
8. *"La enseñanza de la matemática debe actualizarse constantemente y conectar con los recursos matemáticos de su época".*
9. *"Todo aquello que «funciona bien» no es preciso cambiarlo".*
10. *"Nuestra labor es una de las más bellas del mundo y nos exige inteligencia, humanidad y amor".*

### ***Breu resum de les aportacions ressenyades***

Fent un breu de resum de les aportacions fins aquí recollides, es pot dir que un plantejament constructivista de la didàctica de les matemàtiques ha de partir del continguts matemàtics, dels coneixements previs formals i informals de l'alumnat i de les seves capacitats, els seus interessos, neguits i curiositats, per proposar situacions didàctiques contextualitzades i significatives, amb un alt contingut motivacional, funcional i afectiu (Quintana, 1995a), que, sense oblidar les exigències cognitives de l'aprenentatge de les matemàtiques, permetin la construcció personal dels coneixements matemàtics.

Una concreció i proposta pràctica d'aquest plantejament, la podem trobar en els aspecte o criteris pràctics organitzatius i metodològics que el Grup Almosta<sup>21</sup> proposa per fer realitat a les classes de matemàtiques un ensenyament i un aprenentatge de caire constructivista (Grup Almosta, 1993), els quals, i com a membre que sóc del grup, faig també meus:

1. Adaptar els continguts matemàtics als diferents moments evolutius de l'alumnat i adequar-los als seus processos cognitius.
2. Posar a l'abast de l'alumnat de totes les edats les estratègies necessàries per facilitar la formació dels conceptes matemàtics.
3. Seqüenciar els continguts de cada cicle al voltant dels principals aspectes matemàtics

---

<sup>21</sup> El Grup Almosta de didàctica de la matemàtica es va crear al 1984 al si de l'Associació de Mestres Rosa Sensat, i des de llavors ha anat realitzant una important tasca en el camp de l'educació matemàtica que s'ha concretat en: la formació del professorat, sobretot en escoles d'estiu; la publicació de material de didàctica de la matemàtica com el recollit a la bibliografia d'aquest informe; i la publicació de llibres de text per a l'educació primària (Quintana, 1996).



4. Equilibrar el tractament dels diferents blocs de continguts del currículum de matemàtiques.
5. Establir un tractament cíclic dels continguts que faci possible aquest equilibri i permeti el seu aprenentatge continuat.
6. Interrelacionar els continguts que es treballen.
7. Incorporar continguts corresponents als eixos transversals del currículum.
8. Adequar els continguts i les activitats d'aprenentatge a les diferents possibilitats, ritmes i necessitats de l'alumnat, així com als coneixements previs, i als seus interessos, dèries, curiositats, etc.
9. Realitzar propostes de treball obertes que permetin diferents vies, nivells i concrecions individuals.
10. Vetllar per la funcionalitat dels continguts.
11. Presentar els continguts en contextos diversos.
12. Organitzar les tasques de l'alumnat de manera que es faciliti la seva interacció i el treball cooperatiu.
13. Procurar que l'alumnat sigui feliç aprenent.

**2**

**Anàlisi de currículums, propostes i estudis**



## 2 ANÀLISI DE CURRÍCULUMS, PROPOSTES I ESTUDIS

El present anàlisi de currículums de matemàtiques pretén mostrar quina ha estat l'evolució del tractament curricular de les transformacions geomètriques, i de manera més detallada el de les isometries, a Catalunya, i comparar-lo amb el sofert a l'Estat Espanyol, pel que fa al Ministeri d'Educació i Ciència (MEC)<sup>1</sup>, tant a nivell estatal, com de l'anomenat territori MEC.

Així mateix es fa una anàlisi dels currículums de l'educació primària actualment vigents a Andalusia, a Euskadi, a Galícia i al País Valencià, tant a en el primer nivell de concreció (decrets curriculars) com en el segon (seqüenciació).

També es fa un revisió de la importància que aquest contingut té en els currículums de matemàtiques d'altres països, tres d'ells de l'àrea més propera a nosaltres i amb una llarga tradició de recerca, innovació i renovació en l'educació matemàtica europea: Anglaterra, França i Itàlia; i també revisem el cas dels Estats Units, concretament el proposat pel National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en els seus estàndards.

Pel que fa a l'anàlisi de les propostes curriculars i de tractament de les transformacions, ens hem remès a les proposades per Z. P. Dienes; M. A. Canals; C. Burgués; i A. Jaime i A. Gutiérrez, persones totes elles reconegudes per les seves aportacions al camp de l'educació matemàtica, i molt específicament en el de la didàctica de la geometria.

---

<sup>1</sup> Malgrat el canvi de nom que durant l'any 1996 ha sofert aquest ministeri, seguirem referint-nos a ell com a Ministeri d'Educació i Ciència (MEC), donat que en tots els document que utilitzem està referenciat com a tal.

Quant a estudis, hem analitzar el que el MEC va fer dels ensenyaments mínims de 1982, així com l'informe Cockcroft d'Anglaterra, el de la Comissió Internacional sobre la Instrucció Matemàtica (ICMI), i el de l'Associació Internacional d'Avaluació Educativa (ILEA) sobre la situació mundial de l'ensenyament de la matemàtica al 1989.

## **2.1 Les transformacions geomètriques en els currículums**

### **2.1.1 Currículums de l'Estat Espanyol**

En aquest punt s'analitza el tractament de les transformacions geomètriques, i específicament el de les isometries, en el marc de l'Estat Espanyol, tant a nivell d'Estat, com de les Comunitat Autònomes i del Ministeri d'Educació i Ciència.

#### **2.1.1.1 Catalunya: Departament d'Ensenyament**

##### **2.1.1.1.1 Ordres i decrets**

###### **Ordre d'11 de maig de 1981**

L'ordre del Conseller d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, d'11 de maig de 1981 (Departament d'Ensenyament, 1982), per la qual es regulen els ensenyaments de Parvulari i Cicle Inicial d'Educació General Bàsica, estableix, en l'annex 1, els programes bàsics de matemàtiques, en els objectius globals dels quals no s'inclou cap referència a les transformacions geomètriques.

A l'apartat "Orientacions didàctiques" trobem:

*"- Fer explorar l'espai i les seves propietats geomètriques..."*

En el punt "Geometria" es diu:

*"Objectiu: Elaborar una primera representació mental de l'espai en la qual s'integrin les **propietats topològiques** i les més elementals entre les **projectives i mètriques**".*

A l'apartat "Desenvolupament de les orientacions i programes de parvulari i cicle inicial", pel que fa a les matemàtiques, trobem que a l'apartat "4. Geometria" i en relació al parvulari, totes les orientacions didàctiques (4.1, 4.2, 4.3 i 4.4) insisteixen en un treball centrat en la topologia, el qual es concreta i justifica en la introducció:

*"Quan parlem de **topologia** al parvulari ens referim al sentit que dóna Piaget a aquesta paraula, com a terme més apte que troba per a poder descriure nocions d'espai que té el nen. Per **propietats topològiques** podem entendre aquelles que es conserven en les **deformacions elàstiques**".*

En relació al 1r i 2n nivell d'EGB, a més d'insistir en el tema de les nocions topològiques (4.5 i 4.6), en desenvolupar el punt "4.9 Assolir una primera noció experimental d'angle i de distància", trobem:

*"4.9.1 Fer **rotacions** prenent com a centre un nen que no es mou de lloc..."*

*"4.9.3 Fer **rotacions** d'un nen sobre si mateix, d'un quart de volta".*

**Ordre de 16 d'agost de 1982**

L'ordre de 16 d'agost de 1982, regula els ensenyaments del cicle mitjà d'Educació General Bàsica, i estableix, en l'annex 1, les orientacions i els programes de matemàtiques.

En ells, ni en l'objectiu global ni en les orientacions didàctiques s'inclou cap referència explícita ni implícita a les transformacions geomètriques (Departament d'Ensenyament, 1983).

Però en el punt "Geometria" es diu:

*"- Reconèixer, dibuixar i construir figures iguals i figures simètriques respecte a un eix de simetria (fent sécs, plecs, etc.)".*

A l'apartat "Desenvolupament dels programes bàsics. Documents de treball", en el capítol de matemàtiques i concretament en el bloc temàtic de geometria, en donar les orientacions didàctiques es diu:

*"Les transformacions geomètriques, simetries, gir, translacions i la construcció de figures iguals cal introduir-les a través de jocs, moviments, utilitzant plantilles, paper carbó, segells, fent sécs, retallant, etc.".*

Al punt "Continguts" s'explicita:

*"6. Reconèixer, dibuixar i construir figures iguals i figures simètriques respecte a un eix de simetria (fent sécs, plecs, etc.). Identificar figures simètriques respecte a un eix i figures amb un, dos o més eixos de simetria".*

I al punt "Vocabulari", en relació al suara esmentat contingut, s'enumera el següent:

*"Figures geomètriques planes iguals, figures simètriques respecte un eix, punts simètrics, figures que tenen un, dos o més eixos de simetria, transformacions, construcció de figures iguals, construcció de figures simètriques, punt mig d'un segment, quadrícula, distància entre dues rectes paral·leles, altura".*

### **Decret 95/1992**

El Decret 95/1992, de 28 d'abril estableix l'ordenació curricular de l'educació primària (Departament d'Ensenyament, 1992a i 1992b), actualment en vigència.

A l'apartat "Àrea de matemàtiques" de l'annex "Currículum de l'educació primària", en els "Objectius Generals" es diu:

*"7. Percebre les figures i les relacions suggerides pels objectes i moviments i elaborar-ne models (construccions, dibuixos, etc.) on fer observacions i recerca de propietats geomètriques".*

En el punt de "Continguts. Fets, conceptes i sistemes conceptuals" s'explicita:

#### **"5.4 Transformacions geomètriques del pla".**

I en els "Objectius terminals" s'inclou:

*"32. Transformar models geomètrics per obtenir-ne de nous, conservant unes característiques (perímetre, àrea, volum, forma, etc.) i variant-ne d'altres.*

*33. Emprar les transformacions geomètriques del pla (simetries, translacions i girs) per crear noves figures”.*

Aquesta publicació, a més del currículum de les àrees de l'educació primària establert pel Decret 95/1992, inclou al final de cadascuna un apartat no prescriptiu anomenat "Orientacions didàctiques per dissenyar activitats d'avaluació", que en el cas de l'àrea de matemàtiques diu:

*"Es proposa, a més de l'estudi de les figures, l'inici de la comprensió d'algunes transformacions que poden experimentar, fent veure les propietats que es mantenen invariables durant la transformació. L'estudi d'aquestes propietats porta a una millor comprensió de les figures”.*

**Continguts fonamentals relatius al decret 95/1992**

La publicació "Educació primària. Currículum" (Departament d'Ensenyament, 1992d), a més d'incloure els continguts del decret abans esmentat, corresponent a l'anomenat primer nivell de concreció, l'administració catalana hi ha difós uns "Continguts fonamentals de les àrees" que, agrupats per cicles (Cicle Inicial, Cicle Mitjà i Cicle Superior) volen orientar als equips docents a la seqüenciació de continguts del segon nivell de concreció, element fonamental del Projecte Curricular de Centre.

Cicle Inicial

En els continguts fonamentals de l'àrea de matemàtiques no s'inclou cap referència a les transformacions geomètriques.



### Cicle Mitjà

En els "Continguts de Procediments" relacionats amb "Observació, manipulació i experimentació", s'inclou:

*"- Experimentació de **translacions i simetries en figures planes**".*

### Cicle Superior

En relació als "Continguts de Procediments" relacionats amb "Observació, manipulació i experimentació", s'inclou:

*"- Identificació dels canvis produïts per l'aplicació de **transformacions geomètriques: translacions i simetries en figures planes**".*

En els "Continguts de Procediments" relacionats amb "Relacions i comparacions", es cita:

*"- Ús de **transformacions geomètriques**".*

I als "Continguts de Fets, conceptes i sistemes conceptuals" relatius al bloc de continguts "Figures i relacions geomètriques" es concreta:

*"- **Translacions i simetries**".*

### ***Model de Segon nivell de concreció***

El Departament d'Ensenyament (1992d) va elaborar un Segon nivell de concreció del currículum prescriptiu (Departament d'Ensenyament, 1992a), com a exemple de seqüenciació per orientar els centres en la seva elaboració.

Les referències a les isometries incloses en ell són les següents:

#### Cicle Inicial

Procediments genèrics, Continguts, Utilització de llenguatges matemàtics:

*"- Representació simbòlica de fets, accions i **transformacions**".*

Figures i relacions geomètriques, Procediments, Observació, manipulació i experimentació:

*"28. Construcció d'angles a partir de **girs**.*

*29. Pràctica experimental i reconeixement perceptiu i sensorial de **simetries** en figures planes i en l'espai.*

*33. Comparació de **girs** de diferents amplituds".*

#### Cicle Mitjà

Figures i relacions geomètriques, Procediments, Observació, manipulació i experimentació:

*"38. Pràctica experimental de **simetries i girs** en figures planes".*

Figures i relacions geomètriques, Procediments, Relacions: comparació, equivalència i ordre:

" 39. *Classificació de figures segons diversos criteris.*

39.1. *Topològics (nombre d'interseccions, fronteres, regions).*

39.2. *Projectius (nombre de costats, convexitat).*

39.3. ***Mètrics (distàncies i angles)***".

Figures i relacions geomètriques, Fets, conceptes i sistemes conceptuals, Transformacions:

"39. ***Girs, simetries i translacions.***

40. ***Propietats que varien i que no varien en transformacions topològiques, projectives i mètriques***".

Objectius referencials de Procediments i de Fets, conceptes i sistemes conceptuals, Figures i relacions geomètriques:

"- ***Reconèixer tot tipus de moviment: simetries, girs, translacions com a transformacions en el pla i en l'espai.***

- ***Observar que els moviments són transformacions que conserven les distàncies i els angles.***

- ***Realitzar de manera pràctica i senzilla, girs i simetries de figures en el pla i en l'espai.***

- ***Reconèixer la simetria en figures de dues i tres dimensions i aplicar-la a l'estudi de les propietats de les figures.***

- ***Aprendre l'ús del regle i de l'escaire a partir de les translacions, i del transportador d'angles a partir dels girs. Utilitzar aquests instruments en la representació de figures planes mitjançant el dibuix.***

- Fer servir recursos informàtics per **simular desplaçaments**, per representar segments, angles i figures planes i per elaborar conceptes i relacions: direcció, sentit, paral·lelisme, perpendicularitat, frontera, regió, etc.”.

#### Cicle Superior

Figures i relacions geomètriques, Procediments, Observació, manipulació i experimentació:

"51. **Reconeixement i construcció de figures congruents.**

52. **Reconeixement i construcció de figures semblants”.**

Figures i relacions geomètriques, Procediments, Utilització de llenguatges matemàtics:

"55. **Utilització de representacions i del llenguatge geomètric per descriure situacions** espacials i per expressar la forma, la grandària, la posició i els moviments dels éssers o objectes a l'espai.

56. **Ús d'un llenguatge de programació (LOGO) per representar figures, relacions i transformacions geomètriques”.**

(...)

62. **Utilització de les coordenades cartesianes per expressar la posició de les figures geomètriques planes i les transformacions que se'ls poden aplicar (simetries respecte als eixos de coordenades, translacions i simetria central)”.**

Figures i relacions geomètriques, Fets, conceptes i sistemes conceptuals, Transformacions:

**"65. Girs, translacions i simetries.**

(...)

**67. Propietats que varien i que no varien en una transformació topològica, projectiva, mètrica".**

Objectius referencials de Procediments i de Fets, conceptes i sistemes conceptuals, Figures i relacions geomètriques:

**"- Reconèixer figures geomètriques iguals i determinar el moviment o transformació geomètrica que les fa coincidir.**

**- Emprar les transformacions geomètriques del pla (simetries, translacions, girs) per crear noves figures.**

**- Construir i transformar models de figures lineals, planes i espacials que permetin establir relacions entre elles".**

#### **2.1.1.1.2 Evolució del tractament de la geometria als currículums de Catalunya, des de la perspectiva de les isometries**

- El programa de matemàtiques de l'**Ordre d'11 de maig de 1981**, el primer que es va fer a Catalunya des del restabliment de la Generalitat al 1977 i de la proclamació de l'Estatut d'Autonomia al 1979, anava dirigit al Parvulari i al Cicle Inicial de l'Educació General Bàsica, i estava format per un conjunt d'orientacions, així com pels propis programes.

Els programes bàsics de matemàtiques, així com les corresponents orientacions didàctiques reflecteixen els corrents piagetians del moment sobre la concepció de l'espai i la formació dels conceptes geomètrics, els quals estableixen que les primeres descobertes geomètriques dels infants són topològiques, i que fins que aquestes no es dominen, no comencen les de les nocions euclidianes i seguidament les projectives (Canals, 1989a; Dienes, 1969a; Dienes i Golding, 1982; Lovell, 1982; Piaget, 1975 i 1986; Piaget i Inhelder, 1982).

Per aquest motiu hi ha una referència molt forta a aspectes topològics com: obert/tancat, dins/fora, frontera, regió, ordre lineal, etc.

El seu estudi és, però, força descontextualitzat, llevat del reconeixement de "*figures planes, especialment polígons i cercles, començant sempre per les seves propietats topològiques*" (Departament d'Ensenyament, 1982, 42).

En el desenvolupament de les Orientacions Didàctiques per al Parvulari es manté aquesta tendència, i en la seva introducció es diu que "*quan parlem de topologia al parvulari, ens referim al sentit que dóna Piaget a aquesta paraula, com a terme més apte que troba per poder descriure les primeres nocions d'espai que té el nen*" (Departament d'Ensenyament, 1982, 214).

En les orientacions per al Cicle Inicial continua de manera més intensiva el treball de conceptes topològics descontextualitzats i aplicats al reconeixement de figures planes.

Quant a les isometries només es proposa introduir les rotacions amb motiu d'iniciar el concepte d'angle, fent referència, això sí, a activitats motrius de tipus vivencial.

- El programa de matemàtiques de l'Ordre de 16 d'agost 1982, dirigit al Cicle Mitjà de l'Educació General Bàsica, també estava format per un conjunt d'orientacions i pels propis programes.

Si l'ordre d'11 de maig de 1981 tenia un marcat biaix piagetà i una forta insistència en les transformacions topològiques, l'Ordre de 16 d'agost 1982 abandona radicalment aquesta línia i s'instal·la en la visió més euclidiana de la geometria escolar.

Quant als continguts i als seus tipus, aquests són molt formals i fonamentalment de tipus conceptual.

Quant a les isometries només es proposa introduir les figures simètriques i els eixos de simetria, fent referència, això sí, a activitats de manipulació com fer sécs, plecs, etc.

En el desenvolupament dels programes bàsics es fa un suggeriment d'introducció de les transformacions de tipus lúdic i manipulatiu, però sense cap mena de contextualització: *"Les transformacions geomètriques, simetries, girs, translacions i la construcció de figures iguals cal introduir-les a través de jocs, moviments, utilitzant plantilles, paper carbó, segells, fent sécs, retallant, etc."* (Departament d'Ensenyament, 1983, 194).

En l'enumeració dels continguts se segueix la tendència axiomàtica de la geometria euclidiana clàssica, i només es fa referència a les simetries.

- El currículum<sup>2</sup> de matemàtiques del **Decret 95/1992** apareix estructurat per primera vegada en objectius generals; en continguts de procediments, de fets, conceptes i sistemes conceptuals, i d'actituds valors i normes; i en objectius terminals (Departament d'Ensenyament, 1992a), i complementat amb orientacions didàctiques per a dissenyar activitats d'ensenyament i d'aprenentatge (Departament d'Ensenyament, 1992d).

Si en les dues ordres esmentades el bloc de continguts rebia el nom de *Geometria*, en el present decret rep el nom de *Figures i relacions geomètriques*, cosa que reflecteix i explicita el concepte de geometria i d'educació matemàtica/geomètrica que el fonamenta.

Així, en la introducció a l'àrea es diu que "*d'entre els continguts seleccionats com a bàsics cal destacar el paper que la geometria exerceix en el desenvolupament de la comprensió de l'espai*" (Departament d'Ensenyament, 1992b, 85) i en l'objectiu general 7 estableix "*percebre les figures i les relacions suggerides pels objectes i moviments i elaborar-ne models (construccions, dibuixos, etc.) on fer observacions i recerca de propietats geomètriques*" (Departament d'Ensenyament, 1992b, 86).

Quant a les isometries, les referències es troben tant en els objectius generals com en els continguts procedimentals, conceptuals i actitudinals, com en els objectius terminals, i en les orientacions didàctiques. Aquesta diversificació posa de manifest una forma concreta d'entendre el coneixement, en aquest cas geomètric, així com el seu aprenentatge, concepció que mediatitza al propi ensenyament.

---

<sup>2</sup> Aquesta és la primera vegada que es parla de currículum ja que fins al moment només es parlava de programes. Aquest canvi no és simplement semàntic, sinó, i sobretot de tipus conceptual i ideològic (Coll, 1996; Quintana i Vivancos, 1993).



La proposta de treball de les isometries inclou tant el seu estudi descontextualitzat, amb els corresponents elements, propietats i invariants, com la seva aplicació al coneixement de les figures i de l'espai.

En aquest currículum, els verbs que es prioritzen són percebre, elaborar, construir, reconèixer, transformar, identificar i estudiar. Aquestes accions expliciten un enfocament de l'estudi de les transformacions orientat en el que Barberini i Bartolini<sup>3</sup> (1993a, 649) anomenen la tendència "*di costruire un percorso sulle trasformazioni geometriche, attraverso una graduale transizione da attività su oggetti concreti ad attività sulle figure geometriche*", que de fet té un important component dienesià.

- El model de **Segon nivell de concreció de 1992** (Departament d'Ensenyament, 1992d), com el Decret 95/1992, fa una proposta diversificada de l'estudi de les isometries a l'educació primària que en la seqüenciació queda concreta en:
  - Cicle Inicial: Procediments Genèrics, i Procediments de Figures i relacions geomètriques.
  - Cicle Mitjà: Procediments, Fets de Figures i relacions geomètriques, i Objectius referencials.
  - Cicle Superior: Procediments, Fets de Figures i relacions geomètriques, i Objectius referencials.

---

<sup>3</sup> De fet Barberini i Bartolini (1993a, 469) presenten tres tendències: "[1] *quella di utilizzare le trasformazioni geometriche in modo esplicito solo all'interno di ambienti già matematizzati (operazioni su figure del piano) (...)* [2] *quella di costruire un percorso sulle trasformazioni geometriche, attraverso una graduale transizione da attività su oggetti concreti ad attività sulle figure geometriche (...)* [3] *quella di rimuovere il problema delle trasformazioni geometriche dalla scuola elementare, considerando, a questo livello, solo problemi significativi del mondo sensibile, che, eventualmente, utilizzano come strumenti impliciti di soluzione qualche caso di trasformazioni geometriche*".

Aquesta seqüenciació implica una graduació en el treball proposat que va dels procediments als fets, i que reforça la tendència tipificada per Barberini i Bartolini (1993a) que hem esmentat abans. Aquesta proposta està força d'acord amb les referenciades al punt 2.2 i pot esdevenir un bon element per un tractament didàcticomatemàtic coherent de les isometries a l'educació primària.

### ***2.1.1.2 Ministeri d'Educació i Ciència***

En aquest punt s'analitzen tant les ordres anterior al 1991, que eren prescriptives per tot l'Estat, com les posteriors, tant les que segueixen essent d'àmbit estatal, com els continguts mínims, com les pròpies de l'anomenat territori MEC.

#### ***2.1.1.2.1 Ordres i decrets***

##### ***Orientacions i programes per a l'EGB de 1970, per a tot l'Estat***

Amb data 2 de desembre de 1970, va ser publicada al BOE l'ordre que aprovava les orientacions pedagògiques per a l'Educació General Bàsica (MEC, 1971).

Aquesta ordre signada pel ministre d'educació de l'època, Villar Palasí, partint de l'article 9, apartat 3 de Llei General d'Educació, va establir les orientacions i els programes d'estudi de total Educació General Bàsica (EGB), i concretà els de la 1a etapa, o sigui de 1r a 5è curs.

En els objectius específics de l'àrea de matemàtiques per a tota l'EGB no s'hi inclou ha cap referència explícita o implícita a les transformacions geomètriques.

Ara bé, a l'apartat de "Sugerencias de posibles actividades" del punt "Intuición espacial" es diu:

- "- **Experimentar movimientos de planos con figuras adecuadas.***
- **Observación y predicción de transformaciones de figuras y conceptos de proyección (2ª Etapa)**".*

Al punt "Relación. Análisis. Síntesis. Abstracción. Razonamiento lógico" s'explicita:

- "- **Observar y predecir transformaciones de figuras sobre una lámina flexible (2ª Etapa)**".*

A l'apartat "Niveles y contenidos", relatiu a l'àrea de matemàtiques de la **1a etapa**, en el punt dirigit al cinquè curs d'EGB es diu:

- "- **Introducción experimental a los movimientos del plano.***
- **Simetría axial.***
- **Producto de simetrías.***
- **Traslaciones**".*

A l'apartat "Evaluación" no hi ha cap referència a les transformacions geomètriques.

### **Ordre de 6 d'agost de 1971, per a tot l'Estat**

El 6 d'agost de 1971 es va publicar una ordre que prorrogava i completava la de 2 de desembre de 1970 relativa a les orientacions pedagògiques per a l'Educació General Bàsica (MEC, 1976). En ella es prorrogaven les orientacions

i els programes de la primera etapa d'EGB i s'establien les corresponents a l'Educació Preescolar i a la segona etapa d'Educació General Bàsica.

En els objectius generals de l'àrea de matemàtiques no hi ha cap referència explícita o implícita a les transformacions geomètriques.

Els apartats d'objectius, continguts i metodologia dels tres cursos de la segona etapa d'EGB (6è a 8è), tampoc inclouen cap referència explícita a les transformacions geomètriques.

#### ***Reial Decret 69/1981, per a tot l'Estat***

El Reial Decret 69/1981 de 9 de gener d'Ordenació de l'Educació General Bàsica i fixació dels ensenyaments mínims per al cicle inicial (Departament d'Ensenyament, 1981).

El bloc temàtic 4 de l'àrea de matemàtiques de l'Annex I, rep el nom de "Geometria i topologia" i inclou alguns conceptes topològics.

#### ***Reial Decret 712/1982, per a tot l'Estat***

El Reial Decret 712/1982 de 12 de febrer (MEC, 1989), va establir en el seu moment els ensenyaments mínims per al cicle mitjà de l'EGB.

Aquest decret, en l'apartat relatiu a l'àrea de matemàtiques, i dins d'aquest en el bloc temàtic "Topologia y geometría" s'explicitava:

*"4.6 Construir por medio de sucesivos plegados figuras iguales y reconocer **simetrías**. Utilizar la regla, el compás y la escuadra en construcciones geométricas sencillas".*

**Reial Decret 1006/1991, per a tot l'Estat**

El Reial Decret 1006/1991 (MEC, 1992), de 14 de juny, va establir els ensenyament mínims per a l'educació primària, actualment en vigència a tot l'Estat.

A l'apartat "Matemàtiques" de l'annex I, en el punt "3. Continguts; 3. Formes geomètriques i situació a l'espai; Conceptes", es diu:

*"1. La **situació a l'espai** (distàncies, angles i girs, i sistema de coordenadas cartesianes)".*

*"5. Regularitats i **simetries**".*

A "3. Continguts; 3. Formes geomètriques i situació a l'espai; Procediments", es concreta:

*"1. Descripció de la **situació i posició** d'un objecte a l'espai en relació a un mateix i/o a altres punts de referència apropiats".*

*"5. Cerca d'elements de regularitat i **simetria** en figures i cossos geomètrics".*

En el punt "4. Criteris d'avaluació", s'explicita:

*"9. Utilitzar les nocions geomètriques de **simetria**, paral·lelisme, perpendicularitat, perímetre i superfície per descriure i comprendre situacions de la vida quotidiana".*

**Reial Decret 1344/1991, per al territori MEC**

El Reial Decret 1344/1991, de 6 de setembre (MEC, 1992), és el que estableix el currículum de l'educació primària actualment vigent.

A l'apartat "Matemàtiques" de l'annex, els objectius generals inclouen cap referència a les transformacions geomètriques.

En el punt "3. Continguts; 3. Formes geomètriques i situació a l'espai; Conceptes", es diu:

*"1. Punts i sistemes de referència*

*- La **situació** d'un objecte a l'espai.*

*- Distàncies, **desplaçaments**, angles i girs com a elements de referència.*

*- Sistemes de coordenades cartesianes".*

*"3. Formes planes.*

*- Les figures i els seus elements.*

*- Relacions entre figures.*

*- Regularitats i **simetries**".*

*"4. Formes espacials.*

*- Els cossos geomètrics i els seus elements.*

*- Relacions entre cossos geomètrics.*

*- Regularitats i **simetries**".*

I a "3. Continguts; 3. Formes geomètriques i situació a l'espai; Procediments", es concreta:

*"1. Descripció de la **situació i posició** d'un objecte a l'espai en relació a un mateix i/o a altres punts de referència apropiats".*

"11. Cerca d'elements de regularitat i **simetria** en figures i cossos geomètrics".

En el punt "Criteris d'avaluació", s'explicita:

"6. Utilitzar les nocions geomètriques de **simetria**, paral·lelisme, perpendicularitat, perímetre i superfície per descriure i comprendre situacions de la vida quotidiana".

### **Seqüència per cicles**

El MEC, en les anomenades "Cajas Rojas" (MEC 1992), va incloure una seqüència per a cada àrea, estructurada per cicles, amb l'objectiu orientar al professorat en la seva elaboració. Les referències a les transformacions geomètriques d'aquesta seqüència són les següents:

Primer cicle

No hi ha cap referència a les isometries ni als objectius, ni als continguts.

Segon cicle

Objectius:

"Con el mismo fin [desarrollar la capacidad de orientación espacial], es conveniente el conocimiento de la **simetría** de una figura y de figuras entre sí".

Continguts:

- **Simetría de una figura.**
- **Simetrías de figuras entre sí".**

Tercer cicle

No hi ha cap referència a les isometries ni als objectius, ni als continguts.

Criteris d'avaluació

*"6. Utilizar las nocione geométricas de **simetría**, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana".*

#### **2.1.1.2.2 Evolució del tractament de la geometria als currículums del MEC, des de la perspectiva de les isometries**

- En les **Orientacions i programes de 1970**, i en relació a la geometria de la 1a Etapa d'EGB, es nota una influència de l'inici dels moviments renovadors en didàctica de la matemàtica a nivell europeu, així com la puixança de l'anomenada escola activa, i del coneixement dels plantejaments i propostes de Piaget. Aquests programes, com bé diuen Rico i Sierra (1991, 37) són un testimoni clar *"de la interpretación de los estudios de Piaget como una justificación para estudiar el álgebra de Boole de las partes de un conjunto desde los niveles más elementales, ya que esta estructura resumía el pensamiento lógico del niño"*.

Serveixi com a exemple la següent cita dels continguts de matemàtiques de 6è d'EGB: *"Semigrupos de los segmentos y de los ángulos generales"* (MEC, 1976, 73).



De tota manera, i quant a la geometria, si bé aquesta té un espai propi a la 1a etapa, fortament mediatitzat pels corrents abans esmentats i per l'inici de traduccions d'autors com, entre d'altres, Z. P. Dienes, T. J. Fletcher o C. Gattegno, etc., en la 2a etapa només se citen alguns aspectes euclidians a 6è d'EGB i desapareix del tot a 7è i 8è.

- Al **Reial decret 69/1981**, de manera semblant a allò que hem dit sobre l'Ordre de la Generalitat de Catalunya d'11 de maig de 1981, els plantejaments piagetians es consoliden de manera errònia, en el sentit que les descobertes en el procés de formació de conceptes i estructures matemàtiques es traspassa a seqüències d'ensenyament. Així, el bloc de continguts que fins al moment sempre s'havia dit "Geometria", de cop i volta, i a nivell del **cicle inicial** d'EGB, rep el nom de "Geometria i topologia", i inclou, com a ensenyaments mínims, conceptes topològics i mètrics.
- En l'avenç del canvi de programes, el **Reial Decret 712/1982** establí els ensenyament mínims per al **cicle mitjà** d'EGB. El bloc de continguts rep el nom de "Topologia i Geometria", però gairebé tot el seu contingut és euclidià i mètric. Malgrat tot però, esmenta el reconeixement de la simetria.
- Els ensenyaments mínims de matemàtiques establerts pel **Reial Decret 1006/1991**, i el currículum de matemàtiques establert pel **Reial Decret 1344/1991**, tot i presentar un plantejament de la geometria molt dinàmic dirigit a facilitar "*el desarrollo de capacidades de organización y orientación espacial*" (MEC, 1992a, 93), no recullen les transformacions geomètriques, i per tant tampoc les isometries. En els continguts conceptuals i procedimentals tan sols es fa referència a la situació, la posició i la simetria lligada a la regularitat.

### 2.1.1.2.3 Propostes de seqüències de matemàtiques

El MEC, després de l'establiment dels ensenyaments mínims (Reial Decret 1006/91) i del currículum oficial, (Reial Decret 1344/1991), va encarregar a diversos autors i autores l'elaboració de segons nivells de concreció "amb l'ànim d'ajudar al professorat de Primària en l'elaboració dels projectes i les programacions curriculars" (Torra i Quintana, 1992).

L'anàlisi que segueix pertany a la publicació del dos exemples de segon nivell de concreció per a l'àrea de matemàtiques de l'educació primària, que sota el nom global de "Propuestas de Secuencia. Matemáticas" va editar el MEC conjuntament amb l'editorial Escuela Española.

- **Proposta A** (elaborada per Montserrat Torra)

#### Seqüència de continguts per cicles

##### Primer Cicle

Conceptes:

*"Regularitats i simetries: Reconeixement".*

Procediments:

*"Cerca d'elements de regularitat i simetria en figures i cossos geomètrics".*

##### Segon Cicle

Conceptes:

*"Regularitats i simetries: Reconeixement i reproducció".*

Procediments:

*"Traçat d'una figura plana **simètrica** d'una altra respecte d'un element donat (amb l'ajut de plantilles i altres materialitzacions)".*

Tercer Cicle

Conceptes:

*"Regularitats i **simetries**: Reconeixement i reproducció".*

Procediments:

*"Comparació i classificació de figures i cossos geomètrics utilitzant diversos criteris (**Eixos de simetria...**)".*

*"Traçat d'una figura plana **simètrica** d'una altra respecte d'un element donat (**punts i eixos de simetria**) amb l'ajut dels instruments de dibuix".*

**Grau de desenvolupament dels principals continguts**

Primer Cicle

No hi ha cap referència

Segon cicle

*"També es pot iniciar el traçat de figures **simètriques** d'altres amb l'ajut de plantilles, quadrícules..."*

Tercer cicle

*"La major capacitat de representació formal i d'ús dels instruments de dibuix han de permetre l'obtenció de figures planes **simètriques**".*

- **Proposta B** (elaborada per Jordi Quintana)

### Seqüència de continguts per cicles

Primer Cicle

Procediments:

*"Experimentació i reconeixement de **transformacions**".*

Segon Cicle

Procediments:

*"- Classificació de figures segons criteris topològics, projectius i mètrics.*

*- Experimentació i reconeixement en figures planes i cossos de **transformacions**".*

Conceptes:

*"- **Transformacions** en superfícies i cossos".*

Tercer Cicle

Procediments:

*"- Observació, reconeixement i **transformació** de models geomètrics.*

- *Experimentació i reconeixement de **transformacions** en figures planes i cossos”.*

Conceptes:

- "- *Transformacions topològiques, projectives i **mètriques**.*
- ***La semblança**”.*

### Seqüència de continguts en cada cicle

#### Cicle Inicial

Procediments

- "- *Experimentació del **desplaçament** amb joguines electròniques o entorns informàtics (Logo) a partir d'instruccions directes”.*
- "- *Construcció d'angles a partir de l'activitat motriu de **girar** i de l'ús d'aplicacions informàtiques com el Logo”.*
- "- *Experimentació i reconeixement de:*
  - Desplaçaments o translacions***
  - Voltes, girs o rotacions***
  - Reflexions o simetries***
- *Identificació de **simetries** en objectes i figures.*
- *Realització experimental de **simetries** en figures planes i cossos”.*

#### Cicle Mitjà

Procediments:

- "- *Construcció i reconeixement d'angles a partir de **girs** realitzats o observats en activitats motrius, manipulacions o aplicacions informàtiques (Logo...)”.*

"- **Classificació de figures segons criteris topològics, projectius i mètrics.**

- **Experimentació i reconeixement, en figures planes i cossos, de:**

**Desplaçaments o translacions**

**Voltes, girs o rotacions**

**Reflexions o simetries**

- **Identificació de simetries en objectes i figures.**

- **Observació de les propietats de les figures que romanen invariables en aplicar-les-hi transformacions".**

Conceptes:

"- **Transformacions: topològiques (deformacions), projectives (ombres) i mètriques.**

- **Propietats de les figures que romanen invariables a transformacions.**

- **Transformacions mètriques: Girs, translacions i simetries".**

Cicle Superior

Procediments:

"- **Interpretació, realització i formulació d'instruccions verbals i gràfiques dirigides al desplaçament i al moviment, en entorns manipulatiu, gràfics i informàtics".**

"- **Construcció i reconeixement d'angles a partir de girs realitzats o observats en activitats manipulatives, gràfiques o en aplicacions informàtiques (Logo)".**

"- **Classificació de figures segons criteris topològics, projectius i mètrics.**

- **Experimentació i reconeixement, amb figures planes i cossos, de: girs, translacions i simetries.**

*Al desarrollar los contenidos relacionados con el conocimiento, orientación y representación espacial el alumno progresará, en función de sus vivencias y nivel de competencias cognitivas, desde las percepciones intuitivas del espacio, hasta la progresiva **construcción de nociones topológicas, proyectivas y euclidianas**, que le facilitarán su adaptación y utilización del espacio”.*

*- “Coordinación de las diversas perspectivas desde las que se puede contemplar la realidad espacial.*

*(...)*

*Mediante observaciones dirigidas, acciones sobre objetos reales y manipulación de material apropiado en situaciones de aprendizaje diseñadas al efecto, se acercarán los alumnos a las distintas nociones proyectivas: perspectiva, rectitud, distancia, paralelismo, ángulo, **simetría**, etc.*

*Se propondrán materiales y situaciones; donde puedan manipular, tantear, probar, el resultado de mover y trasladar determinados objetos y figuras. De esta forma se iniciarán conocimientos sobre **simetría, semejanza de figuras**, conservación del paralelismo, proporcionalidad en las medidas y conservación de sus ángulos, desarrollo de figuras tridimensionales, etc.”.*

*”- Las formas geométricas en el espacio. Detección de regularidades y conocimiento de cuerpos y formas geométricas sencillas.*

*Resultan aconsejables actividades basadas en el uso de las **transformaciones geométricas planas** para generar y clasificar figuras.*

*En el último ciclo se iniciarán los conocimientos sobre las relaciones de igualdad, perpendicularidad y **simetría**, ángulos, etc.”.*

- **Identificació i construcció de simetries de figures planes i cossos.**
- **Observació i reconeixement de les propietats de les figures que romanen invariables en aplicar-les-hi transformacions”.**
- **Classificació de polígons segons diferents criteris: nombre de costats, eixos de simetria, angles, girs coincidents, regularitat, igualtat, equivalència...”.**

Conceptes:

- **Transformacions topològiques, projectives i mètriques.**
- **Transformacions mètriques: Girs, translacions i simetries.**
- **Propietats de les figures que romanen invariables a transformacions.**
- **Inici a la semblança”.**

### **2.1.1.3 Andalusia**

En el Decret 105/1992 de 9 de juny, BOJA núm. 56 de 20-6-92 (Junta de Andalucía, 1992a) pel qual s'estableix els ensenyaments de l'educació primària a Andalusia, a l'apartat "Área de Matemáticas", punt "Contenidos; Bloc 6. Conocimiento, Orientación y Representación Espacial " es diu:

*“Al propio tiempo, las propiedades geométricas de los objetos y lugares, las afinidades y diferencias entre ellas, **las transformaciones a las que pueden ser sometidas y la sistematización, conceptualización y representación de todo ello, constituyen un campo de conocimientos idóneo, que puede contribuir al desarrollo intelectual de los alumnos de esta etapa.***



La mateixa Junta de Andalucía (1992b) va editar un document donant orientacions per a la seqüenciació de continguts, en el qual, en el capítol de matemàtiques, apartat Tercer Cicle de primària es suggereix que:

*"Mediante actividades de composición, medición, **transformación**, etc., de figuras geométricas, alumnos y alumnas realizarán deducciones lógicas al efecto e inferirán nuevas y diversas relaciones.*

*(...)*

*La construcción de figuras y la exploración de **las transformaciones** a que se someten si se **deslizan, giran o reflejan**, acercará a los alumnos a la comprensión de nociones como **simetría, igualdad y congruencia**, al tiempo que mejoran su percepción espacial y se perfeccionan en el uso preciso y cuidadoso de instrumentos de dibujo y construcción geométrica.*

*Así, podrán apreciar y conocer de manera significativa la utilización, por ejemplo, de la **simetría** en obras de arte, en elementos cotidianos, e incluso en determinados objetos matemáticos, representaciones numéricas, etc."*

I a l'apartat "Cuadro-Resumen" on s'inclou una proposta de seqüenciació més estructurada, trobem:

Primer Cicle, "Conocimiento, orientación y representación espacial"

*"- Aproximación a los cambios operados en las figuras planas si son sometidas a determinados **movimientos**".*

Segon Cicle, "Conocimiento, orientación y representación espacial"

"- Aproximación a la noción de operación geométrica.

**Transformaciones de figuras. Traslaciones, simetrías y giros. Combinación de varias transformaciones".**

Tercer Cicle, "Conocimiento, orientación y representación espacial"

"- Exploración de las propiedades de las relaciones espaciales simples: transitividad, reflexibilidad, conservación, **simetría, asimetría...**

- Relaciones entre figuras. Acercamiento a la noción de proporcionalidad. Intuición de las nociones **de simetría, igualdad, semejanza y congruencia** de figuras.

- Exploración de las **transformaciones fundamentales: simetrías, rotaciones, ampliaciones, combinación de transformaciones, transformaciones equivalentes**. Investigación y predicción del resultado de combinar; subdividir y cambiar de **posición** figuras planas".

#### **2.1.1.4 Euskadi**

El Disseny Curricular Base de Primaria (Gobierno Vasco, 1992), en el capítol relatiu a matemàtiques, "Bloque 3: Formas geométricas y situación en el espacio ", es diu:

Fets, conceptes i principis:

"2. *Sistemas de Representación y Referncia.*

- La **situación** de objetos en el espacio.

- Elementos referenciales: **desplazamientos**, distancias, ángulos y **giros**".

"3. Formas Planas.

- Polígonos: *classificación*. Circunferencia. **Regularidades y simetría**. Relación entre los elementos de una figura.

- Relaciones entre figuras: igualdad y  **semejanza**".

"4. Formas Espaciales.

- **Regularidades y Simetrías**".

Procediments:

"- Utilización de diversos lenguajes

1. Descripción de la **situación y posición** de un objeto en el espacio en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia adecuados".

"- Algoritmos y destrezas

8. Construcción de una **figura plana simétrica de otra respecto a un punto o a un eje de simetría**".

"- Estrategia generales

12. Búsqueda de elementos de **regularidad y simetría** en figuras y cuerpos geométricos".

A "Criterios de evaluación" s'explicita:

"Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro, superficie y volumen para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana".

### 2.1.1.5 Galícia

En el Decret 245/1992 de 30 de juliol, DOG, núm. 158 de 14-8-92 (Xunta de Galicia, 1992a) que estableix el currículum d'educació primària, a l'apartat "5. Área de Matemáticas", punt "5.2. Obxectivos xerais" es diu que l'alumnat anirà desenvolupant les capacitats enunciades en els objectius següents:

*"- Recoñece-la **posición de calquera obxecto** no espacio e ser capaz de expresalo sen ambigüidades".*

En el punt "5.3.2. Estudio e representación do espacio", es concreta:

Procediments:

*"- Recoñecemento e construción de figuras planas e corpos xeométricos en **diversas posicións**.*

*(...)*

*- Utilización do dobrado, recortado, papel cuadrículado... para a construción e interpretación de **figuras simétricas**.*

*(...)*

*- Busca de **elementos de regularidade e simetría** en figuras e corpos xeométricos".*

Conceptes:

*"- O Plano:*

*· Elementos xeométricos: **líña e punto, liñas rectas e non rectas, figuras xeométricas, ángulos, xiros...***

*· **Regularidades e simetrías**.*

*- O Espacio:*

*· **Regularidades e simetrías**".*

I en el punt "5.4. Criterios de avaliación", s'especifica:

*"- Utiliza-las nocions xeométricas de **simetría**, paralelismo, perpendicularidad, perímetro e superficie para describir e comprender situaciones da vida cotiá".*

La Xunta de Galicia (1992b) va publicar un document complementari per a facilitar la seqüenciació de continguts als centres educatius, el qual inclou diversos criteris l'avaluació molt d'acord amb els prescrits des del MEC, en el qual es concreta:

Primer Cicle

Procediments:

*"Recoñecemento de figuras e corpos xeométricos en **diversas posicións**".*

Segon Cicle

Procediments:

*"Recoñecemento e construcción de figuras planas e corpos xeométricos en **diversas posicións**".*

Tercer Cicle

Conceptes:

*"- O plano: **Regularidades e simetrías: simetría nunha figura e simetría de figuras respecto a un eixe.***  
*- O Espacio: **Regularidades e simetrías**".*

Procediments:

*"Manipulación de formas xeométricas: Xogo con tangram, con mosaicos, con quebracabezas, con xeoplano, **con espellos...**"*

Criteris d'avaluació

*"Utiliza-las nicións xeométricas de **simetría**, paralelismo, perpendicularidade, perímetro e superficie para describir e comprender situacións da vida cotiá"*

#### **2.1.1.6 País Valencià**

En el Decret 20/1992 de 17 de febrer, DOGV, núm. 1728 de 20-2-92 (Generalitat Valenciana, 1992) que estableix el currículum d'educació primària, a l'apartat "Matemàtiques", punt "III. Continguts; Bloc 3. Geometria" es diu:

*"1. Descripció de **posicions i moviments**.*

*- Context geomètric: mitjançant coordenades, distàncies, angles, **girs...**"*

*"2. Reconèixer, descriure, classificar, nomenar i definir formes i configuracions geomètriques de tres, dues i una dimensió.*

*- En practicar els processos indicats apareixeran elements i relacions geomètriques: cares, vèrtexs, arestes, angles, paral·lelisme, perpendicularitat, inclinació, incidència, **simetries**, superfície, volum.*

*"3. Construir, dibuixar, modificar i explorar les formes i configuracions geomètriques.*

*- Truncament, **transformacions**. Composició i descomposició.(...)"*

Al punt "IV Criteris d'avaluació" s'explicita:

*"7. Realitzar i interpretar representacions espacials d'objectes i la seua **situació** utilitzant diferents sistemes de representació senzills i, si fa al cas, sistema de referència".*

*"9. Utilitzar les nocions geomètriques de **simetria**, paral·lelisme, perpendicularitat, perímetre i superfície, per descriure i comprendre situacions de la vida quotidiana".*

D'altra banda, la Generalitat Valenciana va publicar un llibre d'orientacions metodològiques, per a l'avaluació i la seqüenciació de continguts (Massoni i Pérez, 1992) del qual creiem adequat ressaltar els següent punts relatius a la seqüenciació.

Sobre el treball de la geometria a primària en relació al Primer Cicle es diu:

*"Els continguts de geometria en aquest cicle tracten de desenvolupar en els escolars les seues capacitats per a conèixer l'espai, explorar-lo, limitar-lo i situar-se en ell a partir de punts de referència. La seua representació mental de l'espai anirà construint-se a partir de referent tant topològics com projectius i euclidis".*

Al Segon Cicle:

*"El treball de la geometria en el cicle hauria de continuar entorn a la conceptualització de l'espai: **moviments, posicions, trajectòries**, sistemes de referència, regions, límits. Certes capacitats i concepcions van afirmant-se i n'apareixen d'altres: (...) conservació d'angles en **simetries, girs, semblança...**".*

I al Tercer Cicle:

*"El treball geomètric es va ampliant i de nou es planteja el reconeixement i l'exploració d'espais cada vegada més complexos, la realització de maquetes, plans, reconeixement de paral·lelisme, perpendicularitat, **simetries, girs, translacions, semblança...** tant en el pla com en l'espai".*

La Generalitat Valenciana, com a complement al currículum prescrit, va editar un document d'orientacions metodològiques per a l'avaluació i la seqüenciació de continguts del currículum d'educació primària (Massoni i Pérez, 1992), en el qual, en el capítol de matemàtiques, es proposa:

Primer Cicle

*"Els continguts de Geometria en aquest cicle tracten de desenvolupar en els escolars les seues capacitats per a conèixer l'espai, explorar-lo, limitar-lo i situar-se en ell a partir de punts de referència. La representació mental de l'espai anirà construint-se a partir de referents tant topològics com projectius i **euclidis**, en propostes didàctiques àmplies i globals (...) situar persones i objectes, **descriure trajectes i posicions** (...) reconèixer algunes **regularitats** (horitzontalitat, verticalitat, paral·lelisme, perpendicularitat, **simetries...**)..."*

Segon Cicle

*"El treball de geometria en el cicle hauria de continuar entorn a la conceptualització de l'espai: **moviments, posicions, trajectòries,***



*sistemes de referència, regions, límits (...) conservació d'angles en simetries, girs, semblança...".*

Tercer Cicle

*"El treball geomètric es va ampliant i de nou es planteja el reconeixement i l'exploració d'espais cada vegada més complexos, la realització de maquetes, plans el reconeixement de paral·lelisme, perpendicularitat, **simetries, girs, translacions, semblança...** tant en el pla com en l'espai".*

### **2.1.1.7 Comparances i comentaris entre les Comunitats Autònomes**

El tractament de les transformacions geomètriques en els currículums ressenyats (Catalunya, MEC, Andalusia, Euskadi, Galícia i País Valencià) no és uniforme, tant per motius de concepció de l'ordenació curricular prescriptiva, com per la importància donada a la geometria, i més concretament a les isometries.

Així, a Andalusia i al País Valencià, quan s'especifiquen continguts no es concreten si són procedimentals o conceptuals, i la redacció general té un caire d'orientacions didàctiques.

Hi ha comunitats autònomes que no especifiquen cap criteri d'avaluació, però malgrat tot estan obligades a recollir els inclosos en el reial decret 1006/1991 de 14 de juny d'ensenyament mínims. El currículum de Catalunya és l'únic que prescriu objectius terminals.

Un resum i comparació quantitativa del tipus de referències dels diferents currículums de les Comunitats Autònomes és el següent:

	Catalunya	MEC	Andalusia	Euskadi	Galícia	País Valencià
<b>Objectius Generals</b>	1				1	
<b>Procediments</b>		2	6	3	3	4
<b>Conceptes</b>	1	4		5	3	
<b>Objectius terminals</b>	2					
<b>Criteris d'avaluació</b>	1	1		1	1	

Quant als conceptes de les isometries als quals fan referència els blocs de continguts de geometria, el seu detall comparatiu també per Comunitats Autònomes és el següent:

	Catalunya	MEC	Andalusia	Euskadi	Galícia	País Valencià
<b>Transformacions geomètriques - Isometries</b>	√		√			
<b>Gir, simetria i translació</b>	√					
<b>Gir</b>				√		√
<b>Simetria</b>		√	√		√	√
<b>Translació</b>						
<b>Invariants</b>	√					
<b>Moviments, desplaçaments</b>	√	√		√		√
<b>Situació, posició</b>		√		√	√	√
<b>Regularitat</b>		√		√	√	
<b>Semblança</b>		√		√		

Els currículums d'Andalusia i de Catalunya són els únics que és refereixen a les isometries, i el de Catalunya l'únic que fa una referència explícita als girs, les simetries i les translacions, i al concepte d'invariant.

En el primer nivell de concreció totes les comunitats excepte Catalunya i Euskadi insisteixen força en les simetries, fet comprensible pel seu reconeixement social, per l'ús artístic, l'equilibri, la facilitat de reconeixement, etc., recollint el que es diu al Reial Decret 1006/1991 d'ensenyament mínims. Galícia i Euskadi recullen directament el concepte de regularitat lligat a les simetries, establert a l'abans esmentat decret de mínims.

Cap currículum, excepte Catalunya, que les esmenta en fer explícites les tres isometries planes, fa referència a les translacions. Als currículum d'Andalusia i Euskadi es fa un referència a la introducció del concepte de semblança.

Quant a la comparança més específica entre el primer nivell de Catalunya, el del MEC i el decret de mínims, la següent taula permet en fer una anàlisi:

	CATALUNYA DECRET DOGC 95/1992	TERRITORI MEC DECRET BOE 1344/1991	MÍNIMS PER A L'ESTAT DECRET BOE 1006/91
<b>Objectius Generals</b>	7. <i>Percebre les figures i les relacions suggerides pels objectes i moviments i elaborar-ne models (construccions, dibuixos, etc.) on fer observacions i recerca de propietats geomètriques</i>		
<b>Fets, conceptes i sistemes conceptuals</b>	5.4 Transformacions geomètriques del pla	1. Punts i sistemes de referència - La <b>situació</b> d'un objecte a l'espai. - Distàncies, <b>desplaçaments</b> , angles i girs com a elements de referència. - Sistemes de coordenades cartesianes. 3. Formes planes. - Les figures i els seus elements. - Relacions entre figures. - Regularitats i <b>simetries</b> . 4. Formes espacials. - Els cossos geomètrics i els seus elements. - Relacions entre cossos geomètrics - Regularitats i <b>simetries</b> .	1. La <b>situació a l'espai</b> (distàncies, angles i girs, i sistema de coordenades cartesianes). 5. Regularitats i <b>simetries</b>

	CATALUNYA DECRET DOGC 95/1992	TERRITORI MEC DECRET BOE 1344/1991	MÍNIMS PER A L'ESTAT DECRET BOE 1006/91
<b>Procediments</b>		<p>1. Descripció de la <b>situació i posició</b> d'un objecte a l'espai en relació a un mateix i/o a altres punts de referència apropiats.</p> <p>11. Cerca d'elements de regularitat i <b>simetria</b> en figures i cossos geomètrics.</p>	<p>1. Descripció de la <b>situació i posició</b> d'un objecte a l'espai en relació a un mateix i/o a altres punts de referència apropiats.</p> <p>5. Cerca d'elements de regularitat i <b>simetria</b> en figures i cossos geomètrics</p>
<b>Objectius terminals</b>	<p>32. <b>Transformar models geomètrics</b> per obtenir-ne de nous, conservant unes característiques (perímetre, àrea, volum, forma, etc.) i variant-ne d'altres.</p> <p>33. Emprar les <b>transformacions geomètriques del pla (simetries, translacions i girs)</b> per crear noves figures.</p>		

## 2.1.2 El tractament de les isometries a altres països

### 2.1.2.1 Anglaterra

Les referències a les transformacions geomètriques i de manera més específica a les isometries en el currículum d'Anglaterra, el "National Curriculum"<sup>4</sup> vigent des de 1991, segons es desprèn del document "Mathematics in the National Curriculum" (DES, 1991), formulats com a "*Attainment targets and programmes of study*", que podriem traduir com a "Objectius terminals i programes d'estudi", són:

<sup>4</sup> Aquest Currículum Nacional ha rebut nombroses crítiques, especialment pel que fa al currículum de matemàtiques, en relació als models d'ensenyament i d'aprenentatge implícits, a la jerarquia de continguts, a la seqüenciació proposada i als exemples mostrats. Per a més informació vegeu el llibre de Dowling i Noss (1990).

"Attainment Target 4: Shape and space

*Pupils should recognise and use the properties of two-dimensional (2-D) and three-dimensional (3-D) shapes and use measurement, location and transformations in the study of space.*

<b>PROGRAM OF STUDY</b>	<b>STATEMENTS OF ATTAINMENT</b>
<i>Pupils should engage in activities which involve:</i>	<i>Pupils should be able to:</i>
<b>Level 1</b>	
(...)	(...)
<i>giving and understanding instructions for movement along a route.</i>	<i>b) Follow or give instructions related to movement and position.</i>
<b>Level 2</b>	
(...)	(...)
<i>recognising types of movement straight (translation, turning rotation)".</i>	<i>b) Recognise different types of movement.</i>
<i>understanding angle as a measurement of turn</i>	
<b>Level 3</b>	
(...)	(...)
<i>recognising (reflective) symmetry in a variety of shapes in two and three dimensions.</i>	<i>b) Recognise reflective symmetry.</i>
<b>Level 4</b>	
(...)	(...)
<i>reflecting simple shapes in a mirror line.</i>	<i>c) Recognise rotational symmetry.</i>
<i>recognising rotational symmetry</i>	
<b>Level 5</b>	
(...)	(...)
<i>identifying the symmetries of various shapes.</i>	

<b>PROGRAM OF STUDY</b>	<b>STATEMENTS OF ATTAINMENT</b>
<b>Level 6</b>	
(...)	(...)
<i>knowing and using angle and symmetry properties of quadrilaterals and other polygons.</i>	<i>b) Transform shapes using computer, or otherwise</i>
<i>using computers to generate and transform 2-D shapes.</i>	
<i>understanding and using bearings to define directions.</i>	<i>c) Understand and use bearings to define direction.</i>
<b>Level 7</b>	
(...)	(...)
<i>determining the locus of an object moving subject to a rule.</i>	<i>b) Determine the locus of an object which is moving subject to a rule".</i>

### 2.1.2.2 França

Les referències a les isometries en el currículum de matemàtiques de l'escola primària de França (*école élémentaire*) vigent des de 1985, segons es desprèn dels documents "École Élémentaire. Programmes et instructions" (MENJS, 1990) i "Classe de sixième. Programmes et compléments" (MEN, 1987), són:

#### Curs Elemental

##### *"B) Géométrie*

*- Applications à des objets géométriques des transformations ponctuelles (symétrie, translation)".*

#### Curs Mitjà

##### *"B) Géométrie*

*- Applications à des objets géométriques des transformations ponctuelles (translation, rotation, symétrie):*

*Utilisation des instruments: papier-calque, papier quadrillé, règle, équerre, compas, gabarit;*

*Mise au point des techniques de reproduction et de construction: report de distances; reproduction, agrandissement ou réduction d'un dessin fait sur fond quadrillé; tracé de parallèles ou de perpendiculaire”.*

Quant a la classe de 6è (sixième) trobem (MEN, 1987):

*”1. Travaux géométriques*

*3. Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite, en exploitant des problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures:*

*Construction de l'image: d'un point, d'une figure simple;*

*Mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires.*

*Exemples d'utilisation de ces propriétés;*

*Construction d'axes de symétrie (médiatrice, bissectrice...);*

*Construction de triangles isocèles, de quadrilatères possédant des axes de symétrie (rectangles, losanges...);*

*Enoncé et utilisation de quelques propriétés. Caractéristiques des figure précédents”.*

*”Explicitation des connaissances, des méthodes des compétences exigibles des élèves*

*1. Travaux géométriques*

*(...)*

*De l'école élémentaire, les élèves apportent une expérience des figures les plus usuelles. L'objectif fondamental en sixième est encore la description et la tracé de figures simples. Au terme d'un processus*

*progressif, le champ des figures étudiées est enrichi, le vocabulaire est précise et les connaissances sont réorganisées à l'aide de nouveaux outils, notamment la symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale)”.*

Programme	Compétences exigibles des élèves
<p><i>1.3 Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite .</i></p>	
<p><i>1.3.1 Constructions d'images, mise en évidence de conservations.</i></p> <p><i>L'effort portera d'abord sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles se dégageron de façon progressive les propriétés conservées par la symétrie axiale, ces propriétés prenant alors naturellement le relais dans les programmes de constructions.</i></p> <p><i>La symétrie axiale n'a ainsi, aucun moment, à être présentée comme une application du plan dans lui-même.</i></p> <p><i>Suivant le cas, elle apparaîtra sous la forme:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>- de l'action d'une symétrie axiale donnée sur une figure,</i></li> <li><i>- de la présence d'un axe de symétrie dans une figure, c'est-à-dire d'une symétrie axiale la conservant.</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><i>- Construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'une ligne polygonale, d'un cercle, que l'axe de la symétrie coupe ou non la figure.</i></li> <li><i>- Tracer le ou les axes de symétrie des figures suivants: triangle isocèle, triangle équilatéral, losange, rectangle, carré.</i></li> </ul>



Programme	Compétences exigibles des élèves
<p>1.3.2 Construction de figures symétriques élémentaires et énoncé de leurs propriétés.</p> <p>Ces constructions partent de notions acquises à l'école élémentaire et aboutissent à des définitions plus élaborées et plus efficaces: par exemple, on reconnaît qu'un triangle est isocèle à ce qu'il possède un axe de symétrie.</p>	<p>- Construire, par une méthode non imposée et su papier blanc: la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle.</p> <p>- Utiliser la symétrie axiale pour construire: un triangle isocèle, un losange, un rectangle, un carré.</p>
<p>Des travaux permettront, sous la direction du professeur, de mettre en oeuvre de brèves séquences déductives: ici aussi, on prendra garde de ne pas demander aux élèves de prouver de propriétés comme évidentes.</p> <p>A travers les problèmes de déconstruction d'une figure, les élèves seront initiés à quelques propriétés la caractérisant, mais ces propriétés ne sont pas exigibles. En outre, elles seront formulées à l'aide de deux énoncés séparés, par exemple: dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et on même milieu; si deux segments de même milieu sont perpendiculaires ce sont les diagonales d'un losange. La locution «propriété» caractéristique n'a pas à être employée».</p>	<p>- Relier les propriétés de la symétrie axiale à celles des figures du programme.</p>

Al final del programa i de l'explicitació de les competències de l'alumant de 6è, s'inclou un quadre resum dels continguts de matemàtiques de 6è a 3er, on en relació a les isometries trobem:

	<i>"Configurations, constructions et transformations"</i>
<i>Classe de sixième</i>	<i>- Transformations de figures par symétrie par rapport à une droite.</i>
<i>Classe de cinquième</i>	<i>- Transformations de figures par symétrie par rapport à un point.</i>
<i>Classe de quatrième</i>	<i>- Transformations de figures par translation, par rotation; polygones réguliers.</i>
<i>Classe de troisième</i>	<i>- Construction de transformées de figures par composition de deux translations, de deux symétries centrales, de deux symétries par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires".</i>

### 2.1.2.3 Itàlia

Les referències a les isometries en el currículum de matemàtiques de l'escola primària d'Itàlia, vigent des de 1985, segons es desprèn del document "Decreto del Presidente della Repubblica 12 febbraio 1985, núm. 104" (Bernardi, C.; et alt, 1990; Ferrari, 1987b; IRRSAE PIEMONTE, 1993a), són:

Objectius i continguts

#### c) Geometria i mesura<sup>5</sup>

*"L'itinerario geometrico elementare, tendendo alla sistemazione delle esperienze spaziali del fanciullo, si svilupperà attraverso la progressiva introduzione di rappresentazioni schematiche degli aspetti*

---

<sup>5</sup> En el currículum italià la geometria i la mesura formen part del mateix bloc de continguts.

*della realtà fisica; dallo studio dalla realizzazione di modelli e disegni si perverrà alla conoscenza delle principali figure geometriche piane e solide e delle loro trasformazioni elementari”.*

Objectius del primer i del segon any

*“- individuare simmetrie in oggetti e figure date; realizzare e rappresentare graficamente simmetrie mediante piegature, ritaglie, disegni, ecc.”.*

Objectius del tercer, quart i cinquè any

*“- individuare, in situazioni concrete, posizioni e spostamenti nel piano (punti, direzioni, distanze, angoli comi rotazioni); rappresentare tali situazioni anche con l'uso di reticolati a coordinate intere positive, di mape, di cartine, ecc.*

*- riconoscere eventuale simmetrie presenti in una figura piana e classificare triangoli e quadrangoli rispetto alle simmetrie stesse;*

*- realizzare, anche con l'uso di materiale concreto e con disegni, la corrispondente di una figura geometrica piana sottoposta ad una traslazione, ad una simmetria assiale, ad una rotazione, ad un ingrandimento o impicciolimento in scala”.*

Indicacions didàctiques

*“Va favorita, invece, un'attività geometrica ricca e variata, prendendo le mosse della manipolazione concreta di oggetti e dall'osservazione e descrizione delle loro trasformazioni e posizioni reciproche”.*

#### **2.1.2.4 Estat Units d'Amèrica: el National Council of Teachers of Mathematics**

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que es va crear als Estats Units d'Amèrica (EUA) al 1908, va publicar al 1989 el document "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics" amb l'objectiu de ser una resposta de la comunitat educativa matemàtica a la petició de reformes a l'ensenyament i a l'aprenentatge de les matemàtiques i establir un marc on enquadrar la reforma de les matemàtiques a l'escola durant la pròxima dècada (NCTM, 1991).

En aquests estàndards curriculars per a la educació matemàtica del NCTM, i en relació a les transformacions geomètriques es diu:

Estàndards curriculars per als nivells de preescolar a quart

Estàndard 9, Geometria i percepció espacial

No hi ha cap referència a les transformacions geomètriques.

Estàndards curriculars per als nivells de cinquè a vuitè

Estàndard 12, Geometria

*"En los niveles 5-8, el currículo de matemáticas debe incluir el estudio de la geometría en una, dos y tres dimensiones en situaciones diversas para que los estudiantes sean capaces de (...) - explorar transformaciones de figuras geométricas".*

### Discussió

*"La simetría en dos y tres dimensiones proporciona interesantes oportunidades para que los estudiantes aprecien la geometría del mundo del arte, la naturaleza, la construcción, etcétera. La simetría está presente en mariposas, caras, flores, disposición de ventanas, reflejos en el agua y en algunos dibujos sobre cerámica. La simetría por rotación que ilustrada en el piñón de una bicicleta. Puede observarse simetría en patrones encontrados en la tabla de multiplicar, en números ordenados en cuadros, y en el triángulo de Pascal".*

#### **2.1.2.5 Comparances i comentaris sobre el tractament de les isometries als currículums de primària d'Anglaterra, França i Itàlia, i als estàndards del NCTM dels EUA**

Analitzant els punts del 2.1.2.1 al 2.1.2.4, es constata que el tractament de les isometries a l'educació primària que fa als esmentat països, és força diferenciat.

Possiblement el plantejament que es fa a Anglaterra sigui el més coherent, ja que planteja conjuntament les tres isometries tant al pla com a l'espai, per posteriorment treballar-les una a una. En les simetries es proposa treballar tant la simetria axial com la central.

A França, tot i incloure el treball de les isometries, es fa des d'una perspectiva més clàssica i euclidiana, donant una gran rellevància a la simetria, tant axial com central. A més, s'explicita el treball dels invariants i de la composició d'isometries, i es fan moltes referències al dibuix geomètric.

A Itàlia també es parla dels tres tipus d'isometries, però, de manera semblant als currículum del MEC, hi ha una gran insistència en el treball de la posició i de la situació, així com de les simetries.

Quant als EUA, tot i la importància que el NCTM dóna al tema de les transformacions, així com de les nombroses propostes elaborades (Coxford, 1991; Del Grande i Morrow, 1993; Geddes, 1992), en els seus estàndards només fa referència a la simetria. El treball sobre les isometries suggereix fer-lo de manera força formal a l'educació secundària.

## **2.2 Propostes sobre les isometries**

Com en el punt anterior les següents propostes de diversos autors i autores estan ordenades per data d'elaboració o edició.

### **2.2.1 Proposta de Z. P. Dienes**

Dienes, sense perdre de vista la seva proposta de sis etapes de l'aprenentatge de la matemàtica (1) Activitats d'exploració, joc i manipulació; 2) Descoberta de regularitats i jocs i materials estructurats; 3) Discriminació estructural i classificació; 4) Representació diagramàtica, gràfica o esquemàtica; 5) Descripció simbòlica de les representacions construïdes; 6) Formalització de les descripcions)<sup>6</sup>, presenta un programa de treball de les transformacions geomètriques estructurades, a partir de les propostes piagetianes, en primer el treball de topologia, després la geometria projectiva i tot seguit la geometria

---

<sup>6</sup> Vegeu el seu detalla a l'apartat 1.

euclidiana, tot seguint les propostes piagetianes de formació dels conceptes geomètrics i d'espai.

Piaget (1975 i 1986) i Piaget i Inhelder (Lovell, 1982) van exposar que les primeres descobertes geomètriques dels infants són topològiques, i que fins que no passa força temps d'haver dominat les relacions topològiques, no comencen a descobrir les seves nocions de geometria euclidiana i projectiva, i que llavors les formen simultàniament.

Tot i que aquesta idea l'hagin recolzat la bona majoria d'autors (Canals, 1989; Del Lungo Barbi, 1986; Dienes, 1969a; Dienes i Golding, 1982; Fuson, 1978; Gálvez, 1994b; Martin, 1978; Pons i Canals, 1982; Sauvy i Sauvy, 1980; Smock, 1976; Vidal i de la Torre, 1984), altres, tot i acceptant les conclusions de Piaget, han manifestat el seu desacord amb que aquestes impliquin la necessitat d'ensenyar els conceptes topològics en els primers nivells. Entre els autors més representatius de l'anomenada crítica a la tesi genètica de la "primacia topològica" cal destacar a Kapadia (1974), Darke (1982) i Shipper (1983).

Així, i conjuntament amb Golding (Dienes i Golding, 1969a, 1969b i 1969c), elaboren un conjunt de fitxes per a ser treballades en grup.

El seu objectiu és doble, d'una banda fer copsar la importància de la geometria en la classificació de les figures, i de l'altre generar tota la geometria a partir de l'estudi de les propietats que romanen invariables en les figures i els cossos en aplicar-los-hi una transformació.

El contingut de les fitxes, que permet veure l'estructura de la proposta d'ensenyament, és el següent:

Girs

Fitxa	Contingut
1	Direccions i angles en polígons. Girs en graus
2	Direccions i angles en polígons. Girs en radians
2A	Angles interiors de polígons
3	Suma girs en els vèrtexs de polígons convexos
3P1	Suma girs en els vèrtexs de polígons convexos i còncaus
3P2	Suma angles exteriors i interiors de polígons convexos
4	Girs de polígons convexos, del quadrat i del rectangle
4P	Girs de figures amb centre coincidents 3, 4 i 6 vegades
5	Girs de figures amb centre i eixos de simetria que coincideixen 3 i 4 vegades
6	Girs de la circumferència. Composició de girs.
7A	Girs i polígons regulars: quadrat
7B	Girs i polígons regulars: quadrat
8	Girs a la dreta i a l'esquerra
8A	Composició de girs
8B	Composició de girs
8C1	Composició de girs i diferents sentits
8C2	Composició de girs i diferents sentits
8D	Girs i polígons regulars
9	Girs i polígons regulars
10	Joc de transformacions amb regla de canvi cíclic
11	Repàs de les fitxes i anàlisi de la sèrie 8
12	Polígons regulars i angles centrals
13	Polígons regulars i angles centrals
14	Polígons regulars i angles interiors



Simetries

Fitxa	Contingut
1	Simetries d'un rectangle amb plegat de paper
1A	Simetria a un dibuix donat per un eix donat
1E	Simetries a un dibuix donat amb llibre de miralls de $90^\circ$
2i	Simetries a un dibuix donat amb 2 eixos perpendiculars i girs de $90^\circ$ i $180^\circ$ (grup de Klein): estat-operador (e-o)
2ii	Com en la fitxa 2i, simetries de lletres i dibuix de figures amb 2 eixos: e-o
2E	Simetries a lletra donada amb llibre de miralls de $90^\circ$
2B	Cerca d'eixos de simetria en dibuixos (1, 2, 3, 4 i 6)
2P	Cerca d'eixos i modificació per tenir-ne més o menys
3	Estudi 3 eixos de simetria del triangle: e-o
3E	Estudi figura amb 3 eixos de simetria amb miralls: e-o
3P	Estudi 3 eixos de simetria del triangle: e-o
3A	Estudi 3 eixos de simetria i 3 girs: e-o
3B	Composició de 3 eixos de simetria i 3 girs (o-o-o)
3C	Composició de 3 eixos de simetria i 3 girs
4i	Composició dels 4 eixos i els 4 girs del quadrat
4ii	Com la fitxa 4i (e-o)
4iii	Com la fitxa 4i
4E	Com la fitxa 4i amb miralls
<b>Miralls</b>	Figura amb 6 eixos de simetria
4A	Com la fitxa 4i (o-o-o)
5	Composició dels 6 eixos i els 6 girs de l'hexàgon
5A	Composició en l'hexàgon de girs, simetries i girs amb simetries
6	Anàlisi de propietats de les simetries: $e - aa'$ , $ae = ea'$
7	Composició de simetries d'eixos concurrents i girs
8	Anàlisi: el traç dels girs són arcs
9	Anàlisi: cerca de simetries en 2 segments iguals
10	Anàlisi: tres punts no alineats determinen un pla

### Simetries i girs

Fitxa	Contingut
1	El triangle
2	El triangle: simetries
3	Cas especial
4T	Teorema de Pitàgores
4P	Teorema de Pitàgores
5	Determinació de simetries
6	Determinació de girs

### Translacions

Fitxa	Contingut
1	Paral·lisme de les traces dels punts en translacions
2	Paral·lisme de les traces dels punts en translacions
3	Simetries i translacions
3E	Simetries i translacions amb miralls
4	Composició de simetries i translacions
5	Composició de simetries i translacions en un rectangle
6	Composició de simetries i translacions

### 2.2.2 Proposta de M. A. Canals

M. A. Canals, a partir de fonamentacions de Montessori, Dienes i Piaget<sup>7</sup>, fa un proposta de programació de la geometria a l'educació infantil i primària, en la qual les transformacions geomètriques en són un eix vertebrador, fent realitat el títol dels llibres de Dienes i Golding (1969a, 1969b i 1969c): *La geometria a través de les transformacions*.

Aquesta proposta ha tingut diverses modificacions i adequacions (Canals, 1981a, 1989a i 1989b), i s'ha concretat en una col·lecció de llibres de text de matemàtiques per a l'educació primària (Canals, Dalmau i Quintana, 1994a i 1995a; Canals, Fernández i Vallès, 1991a i 1991b; Canals i Vallès, 1990a i 1990b), en els quals es desenvolupa de manera pràctica la programació de la geometria, i més concretament la de les isometries.

El contingut i estructura de la seva proposta és:

#### Cicle Inicial

##### Procediments:

- *Comparació de girs per criteris d'equivalència i de «més que».*
- *Experimentació de l'eix de simetria d'algunes figures a partir de la manipulació de material (paper plegar) i de la percepció visual".*

##### Conceptes:

*"Noció experimental del gir d'una volta, de ½ volta i d'¼ de volta".*

---

<sup>7</sup> M. A. Canals, en el pròleg d'un dels seus llibres (Canals, 1981), diu que ell hi ha "tot allò que hem tret de la lectura de molts pedagogs, especialment Z. P. Dienes; en segon lloc, una mica d'estudi de la teoria evolutiva de Piaget sobre el concepte del nombre i el concepte d'espai", i un altre del seus llibres (Canals, 1989), a més d'estar dedicat entre d'altres a M. Montessori i Z. P. Dienes, fa referències constant a la primera, tant pels seus plantejaments, com per l'ús dels seus materials sensorials (Montessori, 1984; Monés, 1988).

### Cicle Mitjà

#### Procediments:

- *Translació de punts i segments.*
- *Translació de figures.*
- *Pràctica experimental de girs en figures planes.*
- *Pràctica experimental de simetries en figures planes.*
- *Reconeixement de figures que tenen eix de simetria.*
- *Polígons isòsceles a partir de la simetria.*
- *Construcció dels eixos de simetria d'una figura per mitjà del plegatge de paper i per mitjà del tangram”.*

#### Conceptes:

- *Noció de gir. Elements que defineixen un gir.*
- *Girs d'un, dos i tres quarts de volta.*
- *Noció de simetria. Eix.*
- *Eix de simetria d'una figura.*
- *Figures sense eix, amb un sol eix i amb diversos eixos”.*

### Cicle Superior

#### Procediments:

- *Comparació de les noves descobertes amb propietats dels quadrilàters ja conegudes, a través de girs, simetries i ombres.*
- *Imaginació de la figura plana i del cos tridimensional obtinguts experimentalment per rotació d'un segment o d'una figura.*
- *Pràctica de girs i simetries manipulant objectes.*
- *Comparació del funcionament dels diferents tipus de transformacions.*

- *Descoberta de propietats comunes i específiques.*
- *Descoberta de lleis generals.*
- *Aplicació de les transformacions a l'estudi de figures planes.*
- *Centre i eixos de simetria de figures.*
- *Classificació de figures tenint en compte elements de gir i de simetria.*
- *Pràctica de rotacions i simetries manipulant materials.*
- *Comparació del funcionament de rotacions i simetries.*
- *Descoberta de propietats comunes i específiques i de lleis generals*
- *Aplicació de girs i simetries a l'estudi de cossos en l'espai.*
- *Anàlisi de diferents moviments del nostre entorn.*
- *Reconeixement de la composició de translació i girs en qualsevol moviment real.*
- *Diferenciació de la simetria (no moviment) a la vida pràctica.*
- *Relació entre cada tipus de transformació i algunes formes importants del nostre medi natural i social".*

### Conceptes:

- *Girs, angles interior i angles exteriors.*
- *Quadrilàter isòsceles (un eix de simetria).*
- *Eix de rotació dels cossos rodons.*
- *Transformacions mètriques en general.*
- *Translació. Vector translació.*
- *Gir en el pla. Centre i angle de gir.*
- *Simetria plana com a operació.*
- *Gir o rotació en l'espai. Eix de rotació.*
- *Simetria a l'espai. Pla de simetria.*
- *Eixos i plans de simetria en cossos tridimensionals".*

### 2.2.3 Proposta de C. Burgués

C. Burgués (1992) va elaborar una proposta d'unitat de programació de geometria per al Cicle Superior d'educació primària, de tipus disciplinar però oberta i lligada a la investigació i la interrogació.

En ella, i pel que fa als components de la programació relatius a les isometries proposa:

#### Continguts de procediments

*"Classificació de figures segons diversos criteris: topològics (nombre d'interseccions, fronteres, regions), projectius (nombre de costats, convexitat), mètrics (distàncies i angles)".*

*"Utilització de les coordenades cartesianes per expressar la posició de les figures geomètriques planes i les transformacions que se'ls poden aplicar (simetries respecte als eixos de coordenades, translacions i simetria central)".*

#### Continguts de fets, conceptes i sistemes

*"Figures equivalents segons criteris topològics.*

*Figures iguals".*

*"Girs, translacions, simetries".*

*"Semblances.*

*Propietats que varien i que no varien en una transformació topològica, projectiva, mètrica".*

*"Ampliació i reducció de figures".*

### Objectius didàctics

"*Dibuixar una figura simètrica, respecte d'un eix, d'un polígon senzill en un geoplà o quadrícula.*

· *Relacionar els doblecs i retalls del paper amb la simetria respecte d'un eix".*

"*Relacionar l'enrotllament i la retallada de paper amb les translacions.*

· *Distingir translacions de simetries.*

· *Relacionar els doblecs de paper i l'ús dels miralls per obtenir figures simètriques".*

"*Obtenir polígons amb paper plegat i tisores aprofitant els seus elements de simetria.*

"*Descobrir la relació entre el grau de simetria (n. d'eixos de simetria) d'una figura i el nombre de maneres que es pot restituir el forat d'on ha estat retallada".*

#### 2.2.4 Proposta d'A. Jaime i A. Gutiérrez

Jaime i Gutiérrez (1996; Jaime, 1993) van elaborar una unitat d'ensenyament de les isometries del pla, en la qual l'organització dels seus objectius i la seqüenciació de les seves activitats està lligada als nivells de raonament Van Hiele (vegeu apartat 1).

Aquesta proposta pretén facilitar a l'alumnat "*una comprensión progresiva de las isometrías de plano, de manera que, al alcanzar el tercer nivel de razonamiento Van Hiele, se consiga un comprensión clara de los movimientos y de las relaciones existentes entre ellos, y posteriormente, en el cuarto nivel, los alumnos sea capaces de profundizar en la comprensión, de dar un enfoque formal a las demostraciones, propiedades y relaciones observadas y utilizadas*

*con anterioridad, y de basarse en ese enfoque para llevar a cabo nuevos descubrimientos”.*

Els continguts proposats per a cada nivell són els següents:

**Nivell 1: Raonament**

*“Los estudiantes razonando en este nivel son capaces de:*

- a) Considerar los movimientos (traslaciones, giros y simetrías) de manera global.*
- b) Reconocer la característica de isometría (conservación del tamaño y de la forma de las figuras) de los movimientos.*
- c) Reconocer los movimientos cuando se ven objetos en acción o sus resultados. Describir los movimientos, por ejemplo como recorrido en línea recta, circular, o paso al otro lado del eje.*
- d) Realizar movimientos (traslaciones, giros y simetrías) sirviéndose de materiales auxiliares, como una regla, un disco, un espejo, etc., en diferentes direcciones y con diferentes posiciones relativas de las figuras y el vector, centro o eje,*
- e) Utilizar propiedades visuales para identificar o describir los movimientos, como la «colocación igual» de las figuras en las traslaciones, la disposición circular de las figuras en los giros, y la visión del eje de simetría como separador «por la mitad» de las dos figuras simétricas, junto con el cambio de orientación en éstas.*
- f) Aprender y utilizar el vocabulario elemental de las isometrías: traslación. giro, simetría, centro de giro, eje de simetría, etc.”.*



### Nivell 2: Anàlisi

*“En este nivel de razonamiento, los estudiantes son capaces de:*

- a) Considerar los movimientos mediante sus elementos matemáticos*
- b) Utilizar de forma explícita los elementos propios de cada movimiento: Módulo dirección y sentido del vector en las traslaciones, centro y ángulo en los giros, y eje en las simetrías.*
- c) Identificar en casos concretos las características de traslaciones (componentes del vector), giros (centro, sólo cuando está sobre la figura girada, ángulo, y equidistancia del centro) y simetría (eje, perpendicularidad, y equidistancia respecto del eje).*
- d) Descubrir nuevas propiedades de los movimientos a partir de su verificación en casos concretos y utilizarlas para resolver otros problemas. En particular, generalizar los resultados de composiciones de movimientos (excepto giros de distinto centro).*
- e) Realizar simetrías en deslizamiento.*
- f) Utilizar explícitamente las definiciones de traslación, giro y simetría en las explicaciones de las actividades realizadas.*
- g) Utilizar las coordenadas del vector de traslación en situaciones concretas.*
- h) Aprender y utilizar notación y vocabulario matemáticos asociados a las isometrías y sus elementos:  $p$ ,  $p'$ ,  $T_a$ ,  $S_e$ ,  $G(0, a^\circ)$ , perpendicularidad, mediatriz, módulo, dirección, sentido, etc.”.*

Nivell 3: Classificació

*“Los estudiantes del tercer nivel adquieren capacidad para:*

- a) Identificar las características de cualquier giro (centro, mediante corte de mediatrices de segmentos, y ángulos). Generalizar y justificar los resultados de composiciones de giros de distinto centro.*
- b) Completar el estudio de las simetrías en deslizamiento, sus propiedades y sus relaciones con las otras isometrías.*
- c) Establecer relaciones entre las propiedades de las isometrías y descubrir o deducir nuevas propiedades. Comprender planteamientos y argumentaciones generales para demostrarlas.*
- d) Comprender y utilizar la posibilidad de descomposición, de infinitas formas, de traslaciones y giros en producto de dos simetrías o en producto de dos giros de distinto centro.*
- e) Utilizar las propiedades de las composiciones de isometrías para justificar:*
  - Qué características se puedan conocer del resultado de una composición particular de isometrías.*
  - La posibilidad de transformar una figura en otra congruente por una composición de isometrías.*
- f) Establecer relaciones generales, sin soporte de figuras o traslaciones concretas, entre las coordenadas de un punto, las de su imagen y el vector de la traslación aplicada.*
- g) Enunciar definiciones de las isometrías como conjunto de definiciones necesarias y suficientes. Comprender las definiciones formales usuales.*

- h) Comprender demostraciones formales sencillas que se presenta hechas o explicadas por el profesor. hacer demostraciones formales simples que sólo supongan la adaptación de una demostración conocida.*
- i) Pasar de un caso concreto a una situación general realizando una demostración basada en argumentos informales”.*

Nivell 4: Deducció formal

*“En el cuarto nivel de razonamiento los estudiantes tienen capacidad para:*

- a) Razonar formalmente, prescindiendo de todo soporte concreto, para demostrar tanto propiedades nuevas como ya estudiadas con anterioridad.*
- b) Comprender y utilizar la estructura algebraica de las isometrías del plano y sus propiedades más importantes.*
- c) Hacer y comprender demostraciones formales completas. Identificar las hipótesis, la tesis y la red de implicaciones lógicas que llevan al resultado”.*

Les activitats proposades per a cada nivell de raonament Van Hiele són:

- Nivell 1: 6 activitats de translacions, 14 de simetries i 6 de girs.
- Nivell 2: 14 activitats de translacions, 22 de simetries i 26 de girs.
- Nivell 3: 11 activitats de translacions, 19 de simetries i 22 de girs.
- Nivell 4: 10 activitats de translacions, simetries i girs.

## 2.3 Referències a les isometries en alguns estudis

En aquest punt analitzarem diversos estudis relatiu a l'educació matemàtica amb la intenció de cerca de referències a les isometries.

### 2.3.1 Avaluació dels ensenyament mínims del cicle mitjà d'EGB.

Al 1989 va ser publicats els resultats de l'estudi que el MEC conjuntament amb les Comunitats Autònomes, van realitzar per avaluar els ensenyaments mínims del cicle mitjà de l'EGB (MEC, 1989) al llarg dels cursos 1984/1985, 1985/1986 i 1986/1987.

En aquest estudi estava format per 155 ítems dels quals 3 eren relatius a la geometria i cap d'ells estava relacionat amb les isometries.

### 2.3.2 L'Informe Cockcroft

Al 1982 la Comissió d'Investigació sobre l'Ensenyament de les Matemàtiques a les escoles angleses, presidida per W. H. Cockcroft va publicar un estudi realitzat entre el 1978 i el 1981 sobre la situació de les matemàtiques a Anglaterra i a Gal·les, que per la bona majoria de gent és l'estudi més complet sobre l'ensenyament de les matemàtiques que s'hagi publicat mai en qualsevol país (Cockcroft, 1985).

En el punt 292 "Forma y espacio" del capítol "Las matemáticas en la enseñanza primaria" es diu:

*"292: Todos los niños deberían tener cierta experiencia en el trabajo con gran variedad de formas planas y de sólidos. (...) Pueden también explorar las ideas de simetría, rotación y reflexión. En*

*definitiva, gracias a este tipo de indagaciones aumentarán los conocimientos de geometría y, de la misma forma, a medida que vayan elaborándose los distintos diseños se irán revelando las propiedades de las formas geométricas”.*

### **2.3.3 La International Commission on Mathematical Instruction**

La International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) va realitzar al 1986 un seminari d'estudi a Kuwait que sota el nom de "School Mathematics in the 1990's" que volia posar sobre la taula els reptes amb els quals es trobaria l'educació matemàtica en els anys 90 (ICMI, 1987).

Entre d'altres temes, en ell s'inclou un resum del "Second International Mathematics Study" (SIMS), en aquell temps encara no publicat, en el qual una vintena de països opinaven sobre la importància de diversos temes matemàtics i la seva relació amb quatre categories cognoscitives: càlcul, comprensió, aplicació i anàlisi (vegeu punt 2.3.4). En l'apartat de geometria es manifesta la més alta discordança entre els països en relació als continguts més importants de la geometria.

En l'apartat de geometria, després de constatar l'abandó històric que aquesta ha sofert fins al moment, i l'inici d'una preocupació actual pel seu ensenyament, es diu que:

*“Quizás sean todavía más llamativas las oportunidades que ofrecerá el diseño de software de ordenador para la enseñanza de la geometría de las transformaciones en los 90, y que hasta ahora ha tenido poco impacto en la escuela”.*