

Grup de Recerca en Òptica Física Departament de Física Aplicada i Òptica Universitat de Barcelona

Análisis de la influencia de las aberraciones del sistema difractor en el reconocimiento de imágenes por correlación óptica

Julio D. Pérez Tudela Junio de 2006

## Parte II

Implementación computacional y validación del método de análisis

## Capítulo 3

# Desarrollo y comprobación experimental

En el apartado 2.3.2 hemos visto cómo se puede evaluar la calidad del sistema óptico difractivo a través del cálculo de la distribución de amplitud compleja en el plano imagen, ya sea en el plano imagen gaussiano o en un plano desplazado respecto al mismo. Ahora bien, para realizar dicho cálculo es necesario conocer la expresión analítica del polinomio de aberración. En el presente capítulo se explica el proceso llevado a cabo para determinar el polinomio de aberración correspondiente a un sistema óptico iluminado por una fuente de luz puntual situada sobre el eje óptico.

El método desarrollado utiliza para obtener este polinomio el cálculo de la aberración de onda en la pupila de salida, agrupando en ella todos los efectos difractivos, tal y como se ha comentado anteriormente en el apartado 2.3. A partir de la expresión 2.43 se puede apreciar cómo la distribución de luz en un plano arbitrario equivale a la transformada de Fourier de la función generalizada de pupila (ecuación 2.44), y su calidad únicamente viene determinada por el polinomio de aberración W(x,y). Para la determinación de la expresión analítica de este polinomio se utilizará la relación establecida anteriormente entre las aberraciones de rayo y la aberración de onda (expresión 2.18).

Por otro lado, una vez calculado el polinomio de aberración se comprobó la validez de los resultados, y para ello se desarrollaron dos métodos complementarios: por un lado se compararon las expresiones analíticas para el polinomio de aberración obtenidas mediante la aplicación propia con las generadas a partir de un programa comercial de diseño y evaluación de sistemas ópticos. Por otra parte, se desarrolló un procedimiento interferométrico para comparar los patrones de interferencia generados por el método computacional con los obtenidos experimentalmente en el laboratorio manteniendo las mismas condiciones que las utilizadas en la simulación.

### 3.1. Obtención del polinomio de aberración

En nuestro caso, la evaluación del polinomio de aberración W(x,y) se realiza mediante un algoritmo de trazado exacto de rayos que calcula las aberraciones, entendidas como la diferencia entre el punto de impacto real del rayo y el calculado según la óptica paraxial, en diferentes puntos de la pupila de salida. Este conjunto discreto de puntos (uno para cada uno de los rayos trazados desde el punto objeto) son los que resultan de la intersección de los rayos con el plano de la pupila de salida.

Para el cálculo de la aberración de onda en la pupila de salida a partir de la aberración de rayo utilizaremos las relaciones existentes entre las derivadas parciales de W(x,y) y las coordenadas del rayo considerado en el plano imagen [Ray64], tal y como se dedujo en el apartado 2.1.1:

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = -\frac{X}{R - W} \qquad , \qquad \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = -\frac{Y}{R - W}$$
 (3.1)

donde X e Y son las coordenadas ortogonales del rayo sobre el plano imagen y R el radio de la esfera de referencia [Wel91].

El cálculo de la expresión analítica de W(x,y) en el conjunto de la pupila se lleva a cabo por la interpolación de dichos valores con un polinomio de aberración del tipo [BW99]:

$$W(x,y) = A_1(x^2 + y^2) + A_2(x^2 + y^2)^2 + A_3(x^2 + y^2)^3 + \dots$$
 (3.2)

donde sólo se han incluido en la expansión los términos de simetría radial puesto que el sistema tratado trabaja con una fuente puntual situada sobre el eje del sistema óptico.

Sustituyendo dicha expresión en las ecuaciones 3.1 y despreciando el valor de la aberración (unas pocas longitudes de onda) respecto de R (en nuestro caso, del orden

de los decímetros), obtenemos las siguientes expresiones:

$$-\frac{X}{R} = 2A_1x + 4A_2x(x^2 + y^2) + 6A_3x(x^2 + y^2)^2 + \dots$$

$$-\frac{Y}{R} = 2A_1y + 4A_2y(x^2 + y^2) + 6A_3y(x^2 + y^2)^2 + \dots$$
(3.3)

Así, para cada rayo trazado obtenemos dos ecuaciones lineales con k incógnitas,  $A_1, A_2, \ldots, A_k$ , correspondientes a los coeficientes del polinomio de aberración. El resto de la información necesaria, tal como las aberraciones de rayo (X,Y) o los puntos de intersección del rayo con la pupila de salida (x, y) se obtiene, tal y como hemos comentado anteriormente, a través del algoritmo de trazado de rayos.

Mediante la utilización de un número suficiente de rayos (n>k) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado, cuya solución se obtiene a través de un minimización del error cuadrático medio entre las dos partes de la ecuación 3.3. Esta ecuación se puede expresar utilizando notación matricial:

$$\begin{pmatrix}
-X_{1}/R \\
-Y_{1}/R \\
\vdots \\
-X_{n}/R \\
-Y_{n}/R
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
2x_{1} & 4x_{1}(x^{2}_{1} + y^{2}_{1}) & 6x_{1}(x^{2}_{1} + y^{2}_{1})^{2} & \dots \\
2y_{1} & 4y_{1}(x^{2}_{1} + y^{2}_{1}) & 6y_{1}(x^{2}_{1} + y^{2}_{1})^{2} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
2x_{n} & 4x_{n}(x^{2}_{n} + y^{2}_{n}) & 6x_{n}(x^{2}_{n} + y^{2}_{n})^{2} & \dots \\
2y_{n} & 4y_{n}(x^{2}_{n} + y^{2}_{n}) & 6y_{n}(x^{2}_{n} + y^{2}_{n})^{2} & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_{1} \\
\vdots \\
A_{k}
\end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{c} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$$
(3.4)

cuya solución de mínimo error es [LT85]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{B})^{-1}\mathbf{c} \tag{3.5}$$

Una vez que los coeficientes del polinomio de aberración han sido hallados mediante el procedimiento anterior, resulta inmediato calcular la función general de pupila según la ecuación 2.44. Finalmente, la distribución de luz en el plano de observación se obtiene transformando dicha función de pupila mediante un algoritmo [PTVF92] de Transformada de Fourier discreta (DFT).

#### 3.2. Validación de los resultados

Como ya se ha comentado anteriormente, la aberración de onda introducida por el sistema óptico es la responsable de las diferencias entre el comportamiento ideal (la transformada de Fourier ideal) y el resultado obtenido. Si la aberración de onda es nula, las ecuaciones 2.43 - 2.44 predicen una transformada de Fourier exacta. Puesto

que la aberración de onda es el elemento clave al predecir el comportamiento real de los sistemas ópticos, uno de los objetivos del trabajo fue obtener los coeficientes de la expresión analítica del polinomio de aberración (ecuación 3.2), y de este modo poder modelizar de forma exacta la influencia del sistema difractor en la correlación final.

Ahora bien, una vez generado el algoritmo para obtener dichos coeficientes resultaba imprescindible comprobar de alguna manera la validez y fiabilidad de los resultados obtenidos. Esta comprobación se realizó de forma paralela utilizando dos estrategias claramente diferenciadas: una presentaba un carácter fundamentalmente numérico, basado en el cálculo de la aberración de onda, mientras que la otra pretendía un enfoque más experimental, a partir de imágenes interferométricas.

#### 3.2.1. Comparación con un programa comercial

En estos momentos existe en el mercado una amplia gama de programas de diseño de sistemas ópticos, algunos de ellos altamente sofisticados y potentes [Mal92]. En nuestro caso se trabajó con el programa ZEMAX XE-Edition [zem96].

El primer paso fue seleccionar un sistema óptico, el cual debía tener unas características (espesores de medios, radios de curvatura de las lentes, índices de refracción) conocidas. El sistema utilizado se encontraba constituido por una única lente tipo menisco, cuyas características físicas (espesor y radios de curvatura), aunque proporcionadas por el fabricante, fueron determinadas experimentalmente con la ayuda de un esferómetro.

Este dispositivo, tal y como se muestra en la figura 3.1 consta de tres apoyos fijos situados en los vértices de un triángulo equilatero y de una punta móvil en altura situada en el baricentro de dicho triángulo, y a una distancia r de cada uno de los apoyos. El desplazamiento de esta punta móvil es posible medirlo gracias a una escala fija unida a su tornillo de avance.

Para medir el radio de una superficie esférica se coloca el esferómetro sobre ella y se desplaza la punta móvil hasta que las cuatro puntas (las tres de los apoyos y la móvil) se encuentren en contacto con la superficie, tal y como se muestra en la figura 3.2. La lectura que nos proporciona la escala corresponde a la altura del casquete (h) que intersecta la superficie esférica con el plano que forman las tres puntas fijas



Figura 3.1: Esferómetro.

del esferómetro, y de cuyo valor es posible deducir el valor del radio de la superficie esférica  $(R_i)$ . Para ello utilizaremos el teorema de la altura en el triángulo que se muestra en la figura 3.2, de modo que:

$$r^2 = h_i(2R_i - h_i) \to R_i = \frac{r^2 + h_i^2}{2h_i}$$
 (3.6)

Por otro lado, para medir el espesor de la lente se coloca primero el esferómetro sobre una superficie plana de referencia y, una vez comprobado si existe error de cero, se levanta la punta del tornillo colocando la lente debajo, y se vuelve a bajar aquella hasta que toque justamente la superficie de la lente.

Los datos experimentales obtenidos son los que se presentan en la tabla 3.1, mientras que en la tabla 3.2 se comparan sus valores medios con los proporcionados por el fabricante de la lente.

La configuración básica utilizada para el cálculo del poliniomio de aberración estaba formada por el sistema óptico descrito anteriormente, con un diámetro de pupila de entrada fijado en 10 mm, y un objeto puntual situado a una distancia de 500 mm de la primera superficie refractiva de dicho sistema. A una determinada distancia de la lente, y en el espacio imagen, se encontraba un diafragma circular que actuaba como

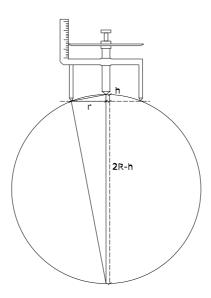


Figura 3.2: Medida de radios de curvatura y espesor de una lente con un esferómetro.

r (mm)	h <sub>1</sub> (mm)	h <sub>2</sub> (mm)	R <sub>1</sub> (mm)	R <sub>2</sub> (mm)	e (mm)
25	5.506	2.472	59.51	127.65	5.428
25	5.522	2.472	59.35	127.65	5.430
25	5.624	2.478	58.38	127.34	5.430
25	5.518	2.478	59.39	127.34	5.430
25	5.490	2.460	59.67	128.26	5.437

Tabla 3.1: Sistema menisco: medidas con esferómetro.

	Media exp. (mm)	Datos fabricante (mm)	Discrepancia
$R_1$	59.46	59.37	0.15%
$R_2$	127.65	128.26	0.48%
Espesor	5.43	5.44	0.18%

Tabla 3.2: Sistema menisco: comparación entre las medidas experimentales y los datos del fabricante

diafragma de apertura y al mismo tiempo también como pupila de salida del sistema.

Para evaluar la similitud entre los resultados obtenidos mediante ambos métodos se calculó el polinomio de aberración para diferentes posiciones de este diafragma, lo que equivalía a variar la posición de la pupila de salida, y por lo tanto, el radio de la esfera de referencia y la aberración del sistema. Estas posiciones se encuentran resumidas en la tabla 3.3, donde la distancia L - PS representa la distancia entre la posición de la última superficie de la lente y la pupila de salida del sistema, y la distancia PS - Im se refiere a la distancia entre la posición de la pupila de salida y la posición del plano imagen paraxial.

Distancia L-PS (mm)	Distancia PS - Im (mm)
294.04	55.00
289.04	60.00
285.5	63.54
284.04	65.00
279.04	70.00
274.04	75.00

Tabla 3.3: Configuraciones del sistema óptico para la evaluación del método de cálculo del polinomio de aberración.

Dentro del conjunto de opciones que incorpora el programa ZEMAX, una de ellas permite calcular los coeficientes de Zernike asociados al polinomio de aberración del sistema considerado (tabla 2.1). A partir de dichos coeficientes es posible determinar el valor de la aberración de onda del sistema en un plano concreto, y de este modo comparar este resultado con el obtenido mediante el método descrito en el apartado 3.1. ZEMAX permite calcular hasta un máximo de 231 coeficientes de Zernike, que en la práctica, dadas las características de simetría del sistema estudiado, se redujeron a 11 coeficientes no nulos. Estos coeficientes diferentes de cero se corresponden a los valores de n  $\leq$  20 y par, y m = 0 (ecuación 2.25), y sus expresiones se muestran en la tabla 3.4.

Se debe tener en cuenta que en las expresiones de la tabla 3.4 se define  $\rho = \frac{r}{a}$ , con  $a = \frac{\phi_{PS}}{2}$  y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . De este modo, una vez conocido el valor de los coeficientes  $Z_i$  es posible obtener el perfil del polinomio de aberración, calculando para ello su

n	m	Coef.	Expresión
0	0	$Z_1$	1
2	0	$Z_4$	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$
4	0	$Z_{11}$	$\sqrt{5}(6\rho^4 - \rho^2 + 1)$
6	0	$Z_{22}$	$\sqrt{7}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$
8	0	$Z_{37}$	$\sqrt{9}(70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1)$
10	0	$Z_{56}$	$\sqrt{11}(252\rho^{10} - 630\rho^8 + 560\rho^6 - 210\rho^4 + 30\rho^2 - 1)$
12	0	$Z_{79}$	$\sqrt{13}(924\rho^{12} - 2772\rho^{10} + 3150\rho^8 - 1680\rho^6 + 920\rho^4 - 42\rho^2 + 1)$
14	0	$Z_{106}$	$\sqrt{15}(3432\rho^{14} - 12012\rho^{12} + 16632\rho^{10} - 11550\rho^{8} + 4200\rho^{6} - 756\rho^{4} + 56\rho^{2} - 1)$
16	0	$Z_{137}$	$\sqrt{17}(12870\rho^{16} - 51480\rho^{14} + \dots - 72\rho^2 + 1)$
18	0	$Z_{172}$	$\sqrt{19}(48620\rho^{18} - 218790\rho^{16} + \ldots + 90\rho^2 - 1)$
20	0	$Z_{211}$	$\sqrt{21}(184756\rho^{20} - 923780\rho^{18} + \dots - 110\rho^2 + 1)$

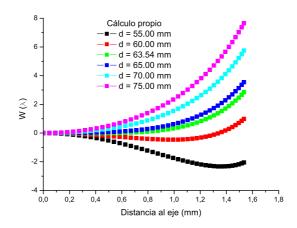
Tabla 3.4: Expresiones de los coeficientes de Zernike no nulos calculados por el programa ZEMAX.

valor para diferentes distancias del eje óptico.

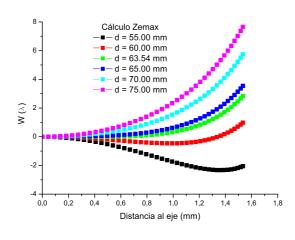
Por otro lado, para el ajuste propio se utilizó un conjunto de 10 coeficientes  $(A_1...A_{10}$ , según la expresión 3.2), los valores de los cuales permitieron calcular los perfiles de aberración correspondientes a cada una de estas posiciones.

Se calcularon, tanto mediante el programa comercial como mediante el programa propio, los polinomios de aberración correspondientes a las posiciones indicadas anteriormente para la pupila de salida del sistema, y los resultados son los que se representan en las figuras 3.3(a) y 3.3(b). Para apreciar mejor las diferencias entre ambos polinomios, en las figuras 3.4(a) - 3.4(f) se representan conjuntamente para cada una de las posiciones.

Finalmente, en la figura 3.5 se encuentra representada la diferencia (en valor absoluto) del polinomio de aberración calculado según ambos métodos para cada una de las posiciones consideradas. Como puede apreciarse, en ningún caso dicha diferencia supera el valor de  $\frac{\lambda}{200}$ . Se puede concluir, por lo tanto, que el método de ajuste utilizado para obtener los coeficientes del polinomio de aberración permite obtener unos resultados tan fiables como los programas comerciales de cálculo y diseño de sistemas ópticos.



(a) Cálculo propio.



(b) Cálculo Zemax.

Figura 3.3: Polinomios de aberración para diferentes posiciones de la pupila de salida.

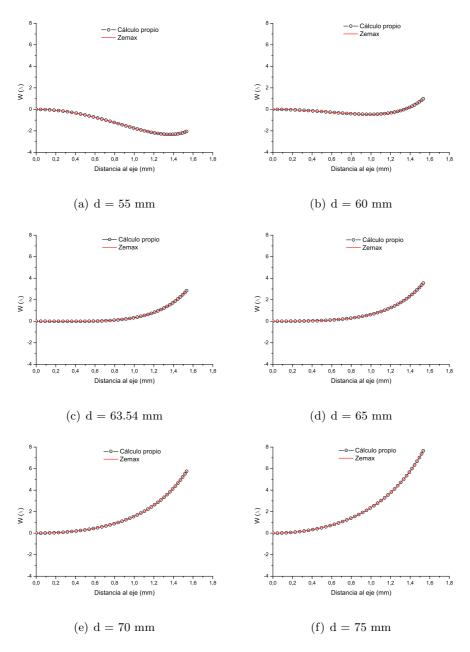


Figura 3.4: Comparación del perfil del polinomio de aberración para diferentes posiciones de la pupila de salida mediante un programa comercial y la aplicación desarrollada.

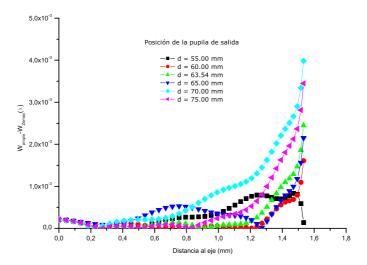


Figura 3.5: Diferencias entre los valores del polinomio de aberración calculado mediante el programa ZEMAX y el ajuste propio.

#### 3.2.2. Análisis interferométrico del polinomio de aberración

Al mismo tiempo que se llevaba a cabo el análisis anterior, se desarrollaba en paralelo el trabajo experimental, basado en la utilización de técnicas interferométricas [Mal92]. Estas técnicas permiten [Mah98], a partir del estudio de las franjas de interferencia con una onda de referencia conocida, analizar las aberraciones presentes en un frente de onda determinado. Del mismo modo, también es posible comparar la interferencia del frente de onda generado por el método de cálculo y una onda esférica ideal, con la interferencia real del frente de onda proveniente del sistema aberrado con un frente de onda obtenido a partir de un sistema óptico altamente corregido.

Existe una gran variedad de dispositivos interferométricos que son utilizados para evaluar y medir las aberraciones de los sistemas ópticos. La mayoría de ellos utilizan un esquema experimental basado en la interferencia de dos haces de luz de igual amplitud que recorren caminos diferentes hasta que son recombinados. Una de las configuraciones básicas de este tipo de interferómetros es el denominado interferómetro de Michelson, descrito originalmente por A. A. Michelson en 1881 [Tol55]. Unos pocos años más tarde (1891), Mach y Zehnder, de forma independiente, desarrollaron [Tol55] un interferómetro formado por dos divisores de haz, DH<sub>1</sub> y DH<sub>2</sub>, y dos espejos E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub>. La luz proveniente de la fuente F es dividida por DH<sub>1</sub> en dos haces,

los cuales, después de la reflexión en los espejos  $E_1$  y  $E_2$ , son recombinados formando nuevamente un único haz mediante el divisor  $DH_2$ . Generalmente, los cuatro elementos son ajustados de modo que estén situados aproximadamente de forma paralela, de manera que los recorridos de los haces formen un rectángulo o un paralelogramo, tal y como se muestra en la figura 3.6.

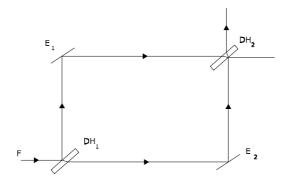


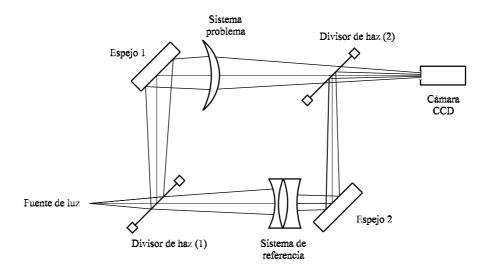
Figura 3.6: Esquema de un interferómetro de Mach-Zehnder.

En nuestro caso, el haz de referencia es generado a partir de un sistema óptico altamente corregido que se coloca en uno de los brazos del difractómetro. En el otro brazo se coloca el sistema problema, de manera que en el plano de observación se obtiene la interferencia entre ambos haces, el que ha atravesado el sistema a analizar, y el de referencia.

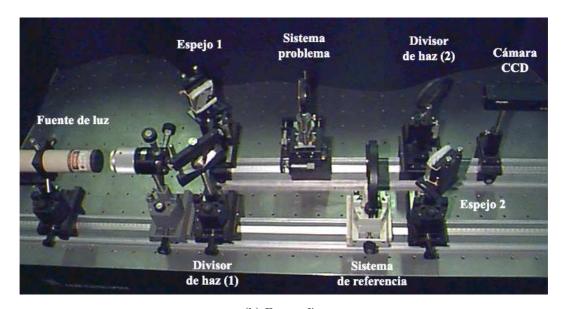
#### Descripción del dispositivo interferométrico experimental

La Figura 3.7 muestra una representación esquemática (3.7(a)) y una fotografía (3.7(b)) del dispositivo experimental utilizado, el cual se encuentra basado en un interferómetro de Mach-Zehnder (figura 3.6).

Tal y como se ha explicado anteriormente, la luz proveniente de un láser de He-Ne ( $\lambda$ =632.8 nm) es dividida en dos haces por un divisor de haz; uno de dichos haces atraviesa un sistema óptico altamente corregido, el cuál generará el frente de onda esférico de referencia, mientras que el segundo haz se propaga a través del sistema a analizar. Estos dos haces son nuevamente recombinados después de atravesar un segundo divisor de haz, y el patrón de interferencias resultante es captado por una cámara Pulnix TM-765 situada en la posición de la pupila de salida del sistema problema, y que a su vez envía la imagen a un ordenador equipado con una tarjeta



(a) Representación esquemática



(b) Fotografía

Figura 3.7: Dispositivo interferométrico utilizado para la validación experimental del cálculo del polinomio de aberración.

digitalizadora Matrox PIP-1024B. En [MB98] se llevó a cabo una completa caracterización de las características de los dos dispositivos, un resumen de las cuales es el que se presenta en la tabla 3.5.

	Matrox PIP-1024B	Pulnix TM-765
Pixeles teóricos (nfil $\times$ ncol)	$512 \times 512$	$581 \times 756$
Pixeles activos (nfil $\times$ ncol)	$484 \times 478$	$512 \times 702$
Dimensiones pixel		$11 \times 11 \; \mu\mathrm{m}$
Tamaño área activa (vert $\times$ horiz)		$5.63 \times 7.72 \text{ mm}$

Tabla 3.5: Características del dispositivo optoelectrónico de captación.

Uno de los principales problemas para realizar la comparación entre ambos interferogramas era el mantenimiento de las mismas condiciones de trabajo tanto en la simulación como en el dispositivo experimental. Del análisis de la figura 3.7(b) es fácil apreciar la dificultad de determinar de forma precisa, por ejemplo, la distancia entre el punto objeto y el sistema óptico. Ésta y otras dificultades de índole similar hicieron necesario el establecimiento de un protocolo de trabajo que combinase de forma natural los datos experimentales y los simulados:

- determinación experimental de la posición del plano imagen, entendida como la distancia desde la última superficie de la lente hasta el elemento sensible de la CCD (d<sub>1</sub> en la figura 3.8).
- Con la posición del plano imagen, y conocida la focal de la la lente, cálculo de la posición del punto objeto.
- mediante la utilización de un microscopio de banco, determinación de la distancia entre el plano imagen y el plano de captación (correspondiente a la posición de la pupila de salida). Esta distancia coincide con el valor del radio de la esfera de referencia, y corresponde a d<sub>2</sub> en la figura 3.8.
- captación del interferograma experimental
- a partir de la imagen del interferograma experimental, y utilizando la relación entre píxeles y milímetros existente en la CCD (5.63 mm equivalen a 512 pixeles), cálculo del valor exacto del diámetro de la pupila de salida.
- cálculo del interferograma simulado utilizando los valores obtenidos anteriormente para la posición del punto objeto, el radio de la esfera de referencia y el

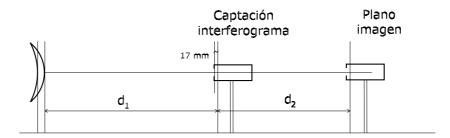


Figura 3.8: Medida de la posición del plano de captación y del radio de la esfera de referencia.

diámetro de la pupila de salida.

• comparación entre ambos interferogramas.

#### Comparación entre las aberraciones teóricas y las experimentales

El método de trabajo descrito anteriormente, aun utilizando elementos como el microscopio de banco y tornillos micrométricos para los desplazamientos, presenta imprecisiones difíciles de solventar. Así, por ejemplo, existía una indeterminación en la fase inicial del interferograma experimental, puesto que sonidos o corrientes leves de aire alteraban los valores del anillo central. De cara a minimizar este efecto se decidió que el interferograma simulado incluyese una fase inicial, y para cada configuración se calculaba el interferograma con diferentes valores de dicha fase (de 0 a  $2\pi$  radianes cada 0.25 radianes).

Parte de esta secuencia de interferogramas es la que se muestra en la figura 3.9 para una configuración del sistema dondes la distancia objeto - lente era de 495 mm, con una distancia entre la lente y el plano de captación de 283.05 mm, un radio de la esfera de referencia de 65.40 mm y un diámetro de la pupila de salida de 3.9 mm.

Por otro lado, la Figura 3.10 muestra los interferogramas obtenidos para una nueva configuración del dispositivo experimental. En este caso, se calculó una distancia objeto de 352 mm, la distancia entre la última superficie de la lente y la cámara era de 408.75 mm, el radio de la esfera de referencia era 90.20 mm, y el diámetro de la pupila de salida de 2.6 mm. En esta última configuración, el mayor número de anillos de interferencia se traduce en un valor superior para la aberración de onda.

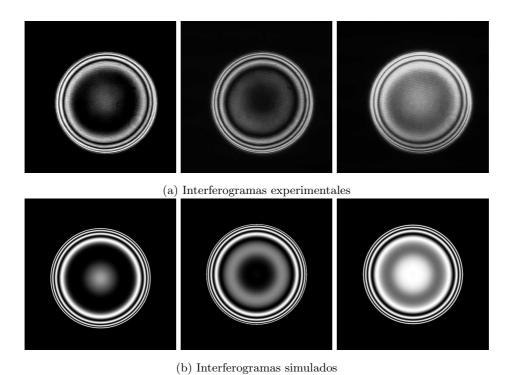


Figura 3.9: Comparación entre los interferogramas experimentales y los simulados obtenidos para una distancia objeto  $s=495~\mathrm{mm}$ , modificando la fase inicial.

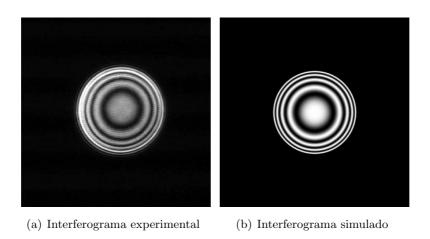


Figura 3.10: Comparación entre el interferograma experimental y el simulado para una distancia objeto s $=352~\mathrm{mm}.$ 

En todos los casos se observa una gran semejanza entre los resultados simulados y experimentales, lo cual constituye una comprobación de la validez del método de simulación desarrollado para representar el comportamiento difractivo de sistemas ópticos reales.