Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del
corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència
Programa: Lògica Matemàtica. Bienni: 1987-89
Per optar al títol de doctor en Filosofia

Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Tesi doctoral presentada per
Joan Roselló Moya
Dirigida per
Josep Pla i Carrera

Índex de matèries

TERCERA PART

EL DESENVOLUPAMENT DE LA LÒGICA MATEMÀTICA EN EL PERÍODE 1900-1920

Introducció

Tal com indica el seu títol, aquest treball pretén fer un recorregut històric per alguns dels principals desenvolupaments que tingueren lloc en el camp de la lògica i els fonaments de les matemàtiques a la segona meitat del segle XIX i el primer quart del segle XX aproximadament i, en particular, fer un estudi comparatiu del desenvolupament de les tradicions algèbrica i logicista que permeti determinar les contribucions de cada una d'elles a la gènesi i desenvolupament de la lògica contemporània. És un fet universalment reconegut que en el període anterior es produí un segon naixement de la lògica, la vella disciplina fundada per Aristòtil a la Grècia clàssica, i que en ell es plantejaren i forjaren bona part dels problemes, conceptes i mètodes que dominarien la recerca lògica al llarg del segle vint. Començarem, doncs, fent un breu repàs històric dels principals desenvolupaments que tingueren lloc en el període abans esmentat, per la qual cosa distingirem en ell quatre èpoques diferents.

Una primera època s'obre amb la publicació dels escrits de G. Boole: *A mathematical Analysis of Logic* (*1847*) i *Investigation into the Laws of Thought* (*1854*) i dels articles d'A. De Morgan: "On the Structure of the Syllogism, and on the Application of the Theory of Probabilities to Questions of Argument and Authority" (*1846*) i "On the Syllogism, nº IV, and of the Logic of Relations" (*1860*). Boole era matemàtic de formació i participà, juntament amb G. Peacock, D. Gregory, W. R. Hamilton i altres, en el desenvolupament de l'escola analítica anglesa. Aquesta escola veié clarament que la validesa dels raonament de l'àlgebra comuna no depenia de la interpretació quantitativa dels seus símbols, sinó de les seves lleis de combinació i que, per tant, calia distingir l'àlgebra aritmètica o numèrica de l'àlgebra pròpiament dita o àlgebra simbòlica, la qual entenien com un càlcul formal o abstracte, la validesa dels raonaments del qual depenia exclusivament de les lleis de combinació dels seus signes i que era susceptible de diverses interpretacions. En aquest context sorgiren les àlgebres no numèriques -això és, les àlgebres les lleis de la qual no coincideixen necessàriament amb les de l'àlgebra numèrica- com, per exemple, l'àlgebra dels quaternions de Hamilton o l'àlgebra de la lògica de Boole. Boole distingia dos tipus de proposicions: les proposicions primàries i les secundàries, distinció que coincideix essencialment amb la distinció habitual en aquella època entre proposicions categòriques i hipotètiques. Com que ambdós tipus de proposicions poden formalitzar-se amb els mateixos símbols, subjectes en un i altre cas a les mateixes lleis de combinació, el mateix càlcul o àlgebra serà aplicable a la lògica categòrica o hipotètica i només la diferent interpretació dels seus signes determinarà el seu àmbit d'aplicació. D'aquesta manera, la seva àlgebra lògica pot interpretar-se com un càlcul de classes o proposicions. L'àmbit d'aplicació de l'àlgebra lògica de Boole és, doncs, molt reduït i coincideix essencialment amb el que avui en dia anomenem lògica de predicats monàdics. Per la seva part, l'obra de De Morgan no pretén, com la de Boole, reinventar la lògica sobre una base completament nova, sinó reformular la vella sil·logística aristotèlica, de manera que pugui donar raó dels diferents tipus d'inferència vàlides que no s'adapten al cànon sil·logístic i que no poden formular-se en el sistema de Boole. Amb aquest objectiu, De Morgan construirà una *teoria de relacions* que constituirà la base de nombrosos estudis posteriors. Els escrits de Boole i de De Morgan constitueixen el punt de partida dels treballs de Ch. S. Peirce i E. Schröder sobre la *lògica de relatius*, entre els quals podem destacar els articles del primer: "Description of a Notation for the Logic of Relatives" (*1870*), "Note B: the Logic of Relatives" (*1883_b*) i "On the Algebra of Logic: a Contribution to the Philosophy of Notation" (*1885*), i el tercer volum de l'obra del segon: *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)* (*1890-1905*), titulat *Algebra und Logik der Relative* (*1895*). Peirce desenvolupà el càlcul de relatius o, com ell en deia, l'*àlgebra de relatius binaris*, en els dos primers articles abans esmentats, però ja en el segon se n'adonà de les dificultats que presentava aquesta àlgebra a nivell expressiu i deductiu i desenvolupà el que ell anomenà *àlgebra general de la lògica*, la qual coincideix essencialment amb la lògica quantificacional moderna de primer i segon ordre. Per contra, Schröder centrà les seves recerques sobretot en el càlcul de relatius, el qual considerava com una mena de *calculus ratiocinator* a partir del qual podien expressar-se tots els enunciats de les matemàtiques. Peirce i Schröder contribuïren també decisivament al desenvolupament i sistematització de l'àlgebra de la lògica pròpiament dita, presentant importants innovacions tant pel que fa al càlcul de classes com pel que fa al càlcul d'enunciats o proposicions.

Una segona època s'obre amb la publicació dels treballs sobre els fonaments de les matemàtiques de G. Frege: *Begriffschrift* (*1879*), G. Cantor: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (*1883*) i R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*1888*), els quals porten, d'una banda, a una refundació radical de la lògica en l'obra del primer i, d'una altra, al naixement de la teoria intuïtiva de conjunts en l'obra del segon i el tercer. El llibret de Frege, de menys de cent pàgines és una obra mestra. Suposa, ni més ni menys, el naixement de la lògica quantificacional moderna, la qual és presentada com un *sistema formal* concebut per reconstruir, amb la precisió i el rigor necessaris, l'aritmètica. El *programa logicista* fregeà de reducció de l'aritmètica a la lògica comença a *Begriffschrift* amb la reducció del concepte d'ordre en una sèrie al de seqüència lògica i continua a *Die Grundlagen der Arithmetik* (*1884*) amb la definició de tots els conceptes aritmètics -i, en particular, el de nombre- en termes estrictament lògics i la demostració de les lleis bàsiques de l'aritmètica -entre les quals es troben els axiomes de Peano-Dedekind- sense apel·lar en cap moment a la intuïció, és a dir, a partir de les regles de la lògica pura. Però les definicions i demostracions de *Grundlagen der Arithmetik* tenen un caràcter informal, per la qual cosa Frege escriurà una nova obra: *Grundgesetze der Arithmetik* (*1893*, *1903*), en la qual intentarà demostrar la seva tesi formalment, això és, exposant el sistema lògic com un sistema formal de tipus axiomàtic, definint els conceptes específics de l'aritmètica i l'anàlisi en termes dels conceptes lògics i emprant només en les demostracions els axiomes i les regles de la lògica explicitades prèviament. Així, els dos volums d'aquesta obra estan dividits en tres parts: en la primera part, Frege exposa el sistema lògic, anomenat de nou *Begriffschrift*; en la segona part, exposa la teoria dels nombres naturals, demostrant les seves lleis bàsiques; i, en la tercera part, exposa la teoria dels nombres reals a partir d'un esquema molt semblant l'emprat per als nombres cardinals a *Grundlagen der Arithmetik*. Però, Frege interromp bruscament l'exposició d'aquesta teoria i introdueix en un apèndix la paradoxa que Russell li havia comunicat per carta quan el segon volum de la seva obra era ja a la impremta. L'origen d'aquesta paradoxa rau en l'axioma V de *Grundgesetze der Arithmetik*, l'*axioma de comprehensió*, que és el que permet introduir les classes com a extensions dels conceptes. La importància d'aquest axioma per al logicisme fregeà rau en què permet introduir les classes o conjunts com objectes lògics, això és, com objectes obtinguts mitjançant un axioma lògic -sense recórrer, doncs, a processos psicològics com ara l'*abstracció*- i a partir d'objectes lògics: els conceptes. En aquest sentit, la comunicació per part de Russell que aquest axioma portava a una contradicció significà per Frege, un cop constatat el fracàs de qualsevol intent de posar remei a la situació, la impossibilitat de reduir les matemàtiques a la lògica i, per tant, l'abandó del programa logicista.

Una tercera època s'inicia precisament amb la carta de 16 de Juny de 1902 de Russell a Frege, en la qual el primer comunica al segon la seva famosa paradoxa. Aquesta paradoxa mostra la inconsistència tant de la lògica de Frege com de la teoria intuïtiva de conjunts de

Cantor i Dedekind i sortí a la llum pública, per primera vegada, en l'obra de Russell: *The Principles of Mathematics* (*1903*), la qual es pot veure com una obra que tanca una època que podríem anomenar d'aproximació ingènua als problemes de fonamentació de les matemàtiques i obre una època nova caracteritzada per intents cada vegada més sofisticats de solucions als problemes generats per l'aparició de les paradoxes en el sí de la lògica i la teoria de conjunts desenvolupades prèviament. Les dues respostes clàssiques a la paradoxa de Russell són la teoria dels tipus lògics, que el mateix Russell proposa, per primera vegada a *Principles of Mathematics* i la teoria axiomàtica de conjunts proposada per Zermelo a l'article: "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre" (*1908*). A *Principles of Mathematics*, "la distinció de tipus lògics" apareix en relació a les contradiccions com "la clau de tot el misteri"[1] i, a l'apèndix B d'aquesta obra, Russell fa un primer esbós del que anomena allí *doctrina dels tipus lògics*. Amb tot, Russell es fa ja ressò, allí mateix, d'una nova contradicció, que afecta ja no a la noció de classe, sinó a la de proposició, la qual requerirà una ramificació dels tipus tal com aquests havien estat concebuts inicialment. Aquesta *teoria ramificada de tipus* apareixerà exposada per primera vegada a l'article "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" (*1908*) i serà recollida després en la introducció a l'obra de Whitehead i Russell *Principia Mathematica* (*1910-13*). La *teoria de conjunts* de Zermelo s'inscriu en el programa d'axiomatització de les diferents branques de les matemàtiques emprès per Hilbert, el qual constitueix, segons l'autor, la resposta més adequada a les paradoxes de la lògica i la teoria de conjunts i als problemes de la fonamentació de les matemàtiques. El mètode axiomàtic fou aplicat per primera vegada per Hilbert a la geometria en la seva obra *Grundlagen der Geometrie* (*1899*) i després fou aplicat pel mateix Hilbert a l'anàlisi, l'aritmètica i la lògica en diverses lliçons, articles i conferències al llarg de les tres primeres dècades del segle vint. El problema principal que preocupà a Hilbert en els anys immediatament posteriors a la publicació de *Grundlagen der Geometrie* fou el de la consistència de l'anàlisi o, com ell en deia, el problema de la *no contradicció* dels *axiomes de l'aritmètica*, el qual pensava resoldre directament a partir d'un desenvolupament conjunt de la lògica i l'aritmètica pròpiament dita i una reformulació dels mètodes de prova emprats en la teoria dels irracionals de Weiertrass i Dedekind. Però la constatació de que la lògica i la teoria de conjunts eren inconsistents, el portà a revisar el seu programa inicial i a interessar-se per l'axiomatització de la teoria de conjunts i la lògica, disciplines a les quals considerà, de llavors ençà, que podien reduir-se les matemàtiques

---

[1] *Russell 1903*, 105.

senceres. Hilbert confià la tasca d'axiomatització d'una i altra disciplina a Zermelo, el qual va aconseguí axiomatitzar la teoria de conjunts l'any 1908, però l'axiomatització de la lògica continuava encara essent un problema que presentava dificultats inextricables per Zermelo i el mateix Hilbert. D'aquí que la publicació per part de Whitehead i Russell de *Principia Mathematica* fos qualificada per Hilbert a "Axiomatisches Denken" (*1917*) com la "la coronació del treball d'axiomatització vist en conjunt".[1] Aquest enamorament de *Principia Mathematica* no impedí a Hilbert veure que aquesta obra només podia oferir una confiança de tipus experimental en la no contradicció dels axiomes lògics, però no pas una seguretat absoluta com la que ell buscava, car l'únic que es podia fer en el marc de *Principia Mathematica* en aquest respecte era derivar teoremes i veure que d'ells no se seguia cap contradicció. D'aquesta manera, el problema de la demostració de la no contradicció dels axiomes de la lògica i, amb ell, el de la no contradicció dels *axiomes de l'aritmètica* i de la teoria de conjunts romania encara obert. D'aquí que Hilbert, en unes *lliçons* [*Vorlesungen*] impartides durant el semestre d'hivern del curs 1917-18 a la universitat de Göttingen, centrés la seva atenció en l'aplicació del mètode axiomàtic a la lògica.

Una quarta època s'inicia precisament, d'una banda, amb les lliçons de Hilbert esmentades fa un moment, titulades "Prinzipien der Mathematik" (*1917-18*), i l'*Habilitationschrift* de P. Bernays (*1918*), publicada parcialment alguns anys més tard amb el títol "Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der 'Principia mathematica'" (*1926*) i, d'una altra, amb els articles de Löwenheim: "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" (*1915*) i Skolem: "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfülbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen" (*1920*). Els articles de Löwenheim i Skolem s'inscriuen en el programa de recerca iniciat per Boole, que Peirce i Schröder havien estès a la lògica de relacions de De Morgan, i al qual Löwenheim i, fins cert punt, Skolem, contribuiran d'una forma molt notable, fins al punt de reorganitzar-lo completament i plantejar en el seu marc alguns dels problemes més importants de la lògica contemporània i, en particular, de la teoria de models. Löwenheim i Skolem partiren, en efecte, de la lògica de relatius de Schröder, però es van centrar en el que podríem anomenar el fragment de primer ordre d'aquesta teoria i foren els primers en preguntar-se per la seva decidibilitat de les seves fórmules i per la satisfactibilitat en dominis de diferent cardinalitat. Amb tot, ni Löwenheim ni Skolem (si més no en els seus primers articles) conceberen la lògica de primer com un sistema formal i això constitueix la principal limitació de la seva

[1] *Hilbert 1965 3*, 153.

aportació al que podríem anomenar la moderna concepció *model-teorètica* de la lògica. Per la seva part, com ja hem dit en el paràgraf anterior, Hilbert aplicarà a les lliçons de 1917-18 el seu mètode axiomàtic a la lògica i, en particular, a la lògica proposicional i de primer ordre. Això el durà a presentar, per primera vegada en la història, la lògica de primer ordre com un sistema formal axiomàtic, autònom i separat de la lògica d'ordre superior i a plantejar respecte a aquest sistema les qüestions metalògiques que constitueixen avui en dia el cor de qualsevol exposició de la matèria: *completesa*, *consistència*, *independència* i *decidibilitat*. En el cas de la lògica proposicional, aquestes qüestions seran resoltes uns mesos després per Bernays en la seva *Habilitationschrift* de 1918. Els resultats obtinguts en l'aplicació del mètode axiomàtic a la lògica seran recollits més tard en el llibre de Hilbert i Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik* (*1928*). D'una altra banda, en els anys immediatament posteriors a 1917, Hilbert expressarà primer els seus dubtes i després la seva crítica als *axiomes de reductibilitat* i de l'*infinit*, els quals són necessaris per reduir les matemàtiques clàssiques a la teoria de tipus de *Principia Mathematica*. Això l'empenyerà a desenvolupar, juntament amb Bernays, la seva *Beweistheorie* i, en el seu marc, a la represa de la vella idea d'un desenvolupament conjunt de lògica i aritmètica per tal d'abordar el problema de la consistència de l'anàlisi. Les recerques de Hilbert i Bernays en aquesta direcció culminaran en els dos volums de *Grundlagen der Mathematik* (*1934*, *1939*). Podríem dir, doncs, que la publicació de *Principia Mathematica* no significà, com Hilbert pensà inicialment, el final de les recerques sobre la lògica i els fonaments de les matemàtiques, sinó més aviat, com ell mateix s'encarregaria de demostrar poc després, el punt de partida d'un nou i poderós programa de recerca que constituirà el paradigma que dominarà les investigacions sobre els fonaments de les matemàtiques al llarg de la dècada dels vint.

Tal com suggereix el breu repàs històric que hem fet en els paràgrafs anteriors, hom pot trobar en el període estudiat diferents maneres de entendre el lligam entre lògica i matemàtiques: presentació algèbrica de les lleis i inferències de la lògica, fonamentació de les matemàtiques a partir del conceptes i regles d'inferència de la lògica o estudi matemàtic de la lògica com una branca més de les matemàtiques. El primer punt de vista és el propi de l'anomenada tradició *algèbrica*, el segon és propi de l'anomenada tradició *logicista* i, finalment, el tercer punt de vista és particular de l'anomenat *mètode axiomàtic*, és a dir, de l'escola de Hilbert -nosaltres preferim aquestes expressions a l'expressió *formalisme*, encara que a falta d'un nom millor haurem d'emprar aquesta expressió per designar la filosofia de les matemàtiques que pressuposa el mètode axiomàtic hilbertià. És evident, d'una altra banda, que encara que en cada una de les èpoques que hem esmentat abans hi predomini potser una certa manera de veure el lligam entre lògica i matemàtiques, en un mateix període hi poden conviure tradicions o escoles diferents. De fet, no es pot dir ni tan sols que en els autors estudiats pertanyents a les diferents tradicions i escoles esmentades, el punt de vista dominant sobre els lligams entre lògica i matemàtiques sigui idèntic. Així, per exemple, encara que en la primera època hi predomini el punt de vista algèbric, d'ençà 1867 Peirce criticarà a Boole i els algebristes llur excessiu matematicisme i advocarà per un desenvolupament autònom de la lògica. A més, tal com ja hem dit, Peirce abandonarà a partir de 1883 les seves recerques sobre la lògica algèbrica i desenvoluparà, de forma independent a Frege, la lògica quantificacional de primer i segon ordre. Pel que fa a la segona etapa, encara que el mateix Dedekind es declarava logicista, el seu logicisme no pretén com el de Frege una reducció de les matemàtiques a la lògica -tal com l'entenem avui en dia-, sinó a la teoria de conjunts. En aquest sentit, cal veure l'obra de Dedekind tant o més en relació amb l'obra de Cantor que no pas a la del propi Frege. A més, hi ha en l'obra de Dedekind una certa tendència al formalisme i a l'axiomatització que fa que l'hàgim de veure més com un clar precedent de l'obra de Peano, Hilbert o el mateix Zermelo, que no pas en relació al reduccionisme logicista de Frege o Russell. Pel que fa la tercera època, de les dues respostes clàssiques a les contradiccions abans esmentades, si bé és cert que es pot considerar que ambdues responen a un punt de vista axiomàtic, és evident que mentre que la teoria de tipus de Russell s'ha d'emmarcar en la tradició logicista, la teoria de conjunts de Zermelo s'emmarca plenament dins del programa hilbertià d'axiomatització de les matemàtiques. Finalment, pel que fa a la quarta època, si bé no sembla que en els articles de Löwenheim i Skolem esmentats hi hagi un punt de vista diferent al de Schröder pel que fa a les relacions entre lògica i matemàtiques, el tipus de problemes estudiats són de naturalesa diferent als que trobem en la tradició algèbrica pròpiament dita i, en particular, en l'obra de Schröder. Pel que fa a Hilbert, en canvi, hi ha una clara evolució respecte als seus punt de vista sobre la relació entre lògica i matemàtiques. Així, si a "Axiomatisches Denken", Hilbert sembla acceptar el logicisme de Russell, els dubtes sobre els axiomes de reductibilitat i infinit, el duran a partir de la dècada dels vint a abandonar definitivament aquesta filosofia de les matemàtiques i a recuperar la idea, ja exposada a la conferència "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik" (*1904*), segons la qual la matemàtica pot fonamentar-se a si mateixa a través del mètode axiomàtic.

Com es pot observar fent una ràpida ullada a l'índex del nostre treball, aquest es divideix en tres parts: Les dues primeres parts estan dedicades respectivament a l'estudi del corrent algèbric i logicista i estan dividides en diferents capítols, dedicat cada un d'ells als autors que considerem més representatius d'aquestes dos corrents: Boole, Peirce i Schröder, d'una banda, i Frege i Russell de l'altra. El fet que hàgim inclòs a Dedekind a la segona part no significa que el considerem un autor pertanyent pròpiament al corrent logicista. Car, tal com hem dit abans, si bé és veritat que el mateix Dedekind reivindicà una concepció logicista de les matemàtiques, no és menys cert que entenia per lògica quelcom essencialment anàleg al que avui en dia anomenem teoria de conjunts i que no es preocupà mai per especificar els principis lògics emprats en les seves deduccions en un sistema formal, per la qual cosa la seva filosofia de les matemàtiques no pot qualificar-se de logicista, si més no en el sentit que entenem avui en dia aquesta expressió. De fet, la inclusió de Dedekind en aquesta segona part té com objectiu principal donar a conèixer les contribucions d'aquest autor a la fonamentació de les matemàtiques, la qual cosa ens permetrà alhora comparar la seva construcció dels nombres naturals amb la de Frege i Russell i veure la influència de la seva *Systemlehre* (teoria de sistemes o conjunts) en la gènesi de la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo. Finalment, la tercera part del nostre estudi l'hem dedicada essencialment als desenvolupaments més importants que seguiren la publicació de l'obra de Whitehead i Russell *Principia Mathematica* i que més influència tingueren, des del nostre punt de vista, en el desenvolupament posterior de la lògica, a saber, les recerques de Hilbert i la seva escola sobre l'aplicació del mètode axiomàtic a les diferents branques de les matemàtiques i, en particular, a la lògica, i les recerques model-teorètiques de Löwenheim i Skolem sobre el fragment de primer ordre de la lògica de relatius. Aquestes recerques tenen, des del nostre punt de vista, una influència cabdal en la gènesi i desenvolupament de la lògica de primer ordre i en la concepció model-teorètica predominant avui en dia, per la qual cosa el seu estudi presenta un indubtable interès històric i dóna, a més, una bona mesura de les contribucions de les tradicions algèbrica i logicista a la lògica contemporània i, en particular, de les limitacions que presenten en aquest sentit ambdues tradicions. Cal remarcar que el nostre estudi s'ha limitat a subratllar les contribucions d'aquests autors anteriors a 1920 i, per tant, a destacar (en el cas de Hilbert i, sobretot, de Skolem) el que podríem anomenar les seves primeres contribucions al desenvolupament de la lògica contemporània. La raó d'això és que la dècada dels vint és potser un dels períodes més rics de la història de la lògica i els fonaments de les matemàtiques, car en ell hi tingueren lloc algunes de les recerques més importants d'autors com els mateixos Skolem i Hilbert, però també d'altres autors de la talla de Von Neumann, Herbrand o Gödel, per la qual cosa el seu estudi requeriria per si sol l'elaboració d'una nova tesi doctoral. No obstant això, com és ben sabut, bona part de les recerques de Herbrand i del mateix Skolem, foren suggerides pel teorema de Löwenheim-Skolem, les dues versions principals del qual foren demostrades per primera vegada per Löwenheim en el seu article de 1915 i per Skolem en el seu article de 1920. D'una altra banda, tal com reconegué explícitament el mateix Gödel, el mètode emprat per Skolem per demostrar el teorema de Löwenheim, juga un paper fonamental en la demostració de la completesa del càlcul funcional de *Principia Mathematica*, que Gödel realitzà en el seu famós article: "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionen-kälkuls" (*1930*). Com és ben sabut també, el problema de la completesa del càlcul funcional havia estat formulat per primera vegada a l'obra de Hilbert i Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik* (*1928*). Ara bé, tal com veurem en el nostre treball, els trets essencials del sistema lògic presentat per Hilbert en el llibre de 1928 escrit juntament amb Ackermann, així com les principals qüestions de tipus metalògic allí plantejades, són ja presents a les lliçons que Hilbert impartí a la universitat de Göttingen en el curs 1917-18 i a l'*Habilitationschrift* que el seu deixeble P. Bernays presentà l'any 1918. En particular, com és ben sabut, en aquesta última trobem la primera demostració de la completesa del fragment proposicional de *Principia Mathematica*. Podem concloure, en definitiva, que el plantejament de les primeres qüestions model-teorètiques en l'obra de Löwenheim i de les qüestions metalògiques en l'obra de Hilbert i Bernays, les quals han ocupat un lloc central en les recerques lògiques al llarg de tot el segle vint, és anterior a 1920. Ara bé, tal com explicarem desprès, el plantejament del segon tipus de qüestions és impossible en el marc de la tradició algèbrica, mentre que en la tradició logicista de Frege i Russell és impossible plantejar-se qualsevol tipus de qüestió semàntica o metalògica. Així doncs, tal com dèiem abans, les recerques de Hilbert i Löwenheim i Skolem anteriors a 1920 mostren clarament les limitacions de les contribucions d'una i altra tradició al desenvolupament de la lògica contemporània. Això justifica, en definitiva, la inclusió d'aquests autors en el nostre estudi i el fet que aquest no vagi més enllà de la data indicada.

Aquest delimitació deliberada no només en el temps, sinó també forçosament en els temes tractats, pel que fa a l'estudi de Hilbert i Skolem, contrasta vívidament amb el caràcter més general i autocontingut que hem volgut donar als capítols dedicats als autors del corrent algèbric i logicista. L'excepció que confirma la regla és aquí Dedekind, l'estudi del qual s'ha centrat essencialment en les seves contribucions a la teoria de conjunts i l'aritmètica i, per tant, ha deixat de banda les importants contribucions d'aquest autor a l'anàlisi i a l'àlgebra. Una possible manera de justificar això podria ser argumentar que el nostre objectiu ha estat realitzar un estudi sobre la història de la lògica i que, per això, hem volgut veure les interrelacions entre els problemes relatius a la fonamentació de les matemàtiques i el formalisme lògic, no pas realitzar un estudi sobre la història de les matemàtiques, però la realitat és que un estudi introductori sobre, per exemple, la definició dels reals en Dedekind o sobre la seva teoria dels ideals no hagués estat, de bon segur, sobrer. S'ha de dir, amb tot, que en la majoria dels casos, el nostre estudi s'ha limitat a destacar les contribucions dels diferents autors a la lògica, la teoria de conjunts i la filosofia de les matemàtiques, limitant-nos pel que fa a aquest darrer tema als problemes relatius a la fonamentació dels nombres naturals, és a dir, a la aritmètica o teoria de nombres. Així, en el cas de Frege i Russell, tal i com s'esdevé també en el cas de Dedekind, el nostre estudi no contempla la seva definició dels reals i, per tant, hem deixat de banda les seves contribucions a l'anàlisi. En aquest sentit, doncs, el nostre estudi de Dedekind està en la línia del dels altres autors i les seves limitacions responen al fet que en la seva obra no hi ha un desenvolupament de la lògica pròpiament dita. Les observacions anteriors mostren també que el nostre estudi no és tant exhaustiu com podria semblar a primer cop d'ull i, en qualsevol cas, no és tant exhaustiu com nosaltres hauríem desitjat. S'ha de dir, de totes maneres, que sempre que ha estat necessari per a la comprensió del punt de vista d'un autor sobre els temes específics tractats en el nostre estudi (lògica, teoria de conjunts i fonaments de les matemàtiques), hem dedicat una secció a l'estudi d'aquelles qüestions que corresponen més aviat, per dir-ho d'alguna manera, a la història de les matemàtiques *strictu sensu*. Així, per exemple, en la primera secció del capítol dedicat a Frege, fem una exposició dels problemes relatius a la fonamentació de les matemàtiques a què s'enfrontaren Cantor, Dedekind i Frege en àmbits aparentment tan dispars com ara la geometria, l'àlgebra o l'anàlisi, fent referència a les definicions geomètriques de Von Staudt i la seva relació amb les definicions dels nombres naturals i reals dels autors abans esmentat, a la importància de la teoria dels sencers ciclotòmics de Kummer i la seva relació amb la teoria dels ideals de Dedekind, etc. Així mateix, la primera secció del capítol dedicat a Hilbert conté una exposició sobre el desenvolupament de les geometries no euclidianes en el segle XIX, la seva relació amb els problemes tractats per Hilbert a *Grundlagen der Geometrie* i les recerques model-teorètiques posteriors, etc. Un altre exemple significatiu és també la quarta secció del capítol dedicat a

Peirce, en el qual hem explicat la connexió de les recerques d'aquest autor sobre l'àlgebra de relatius amb les del seu pare Benjamin Peirce sobre les àlgebres no associatives i les d'altres algebristes importants de l'època com ara Hamilton, Sylvester o Cayley.

Una altra limitació del nostre estudi la constitueix el fet que s'hagi centrat només en els autors que podríem anomenar clàssics, és a dir, els autors més representatius de cada corrent. Així, per exemple, pel que fa al corrent algèbric hem dedicat només capítols sencers del nostre estudi a Boole, Peirce i Schröder. I, encara que hem explicat les aportacions més significatives de De Morgan i Jevons en el marc de l'exposició d'aquests autors, hem deixat completament de banda els autors més significatius de *l'escola de Schröder*: Müller, Lüroth, Voigt i Korselt. D'una altra banda, pel que fa al logicisme, hem dedicat un capítol sencer a Frege i Russell, però hem deixat de banda a autors que seguiren l'estel de Russell tan significatius com ara Chwistek i Ramsey. La raó d'aquesta tria tan reduïda dels autors estudiats és que el nostre treball no ha pretès fer un estudi del desenvolupament del corrent algèbric i logicista, sinó més aviat un estudi comparatiu d'aquests dos corrents que aporti una mica de llum sobre quines han estat les contribucions més importants d'aquestes dues tradicions al desenvolupament de la lògica contemporània. I amb aquesta finalitat, els autors escollits són, des del nostre punt de vista, els que han realitzat les aportacions més significatives en la direcció abans esmentada. Cal remarcar també que la limitació del nostre estudi a la segona meitat del segle XIX i els primers vint anys del segle XX ha permès excloure les recerques abans esmentades de Chwistek i Ramsey sobre la teoria de tipus.

Com hem explicat en els paràgrafs precedents, en el període estudiat s'hi poden trobar principalment tres maneres diferents de veure el lligam entre lògica i matemàtiques, que són les pròpies de la tradició *algèbrica*, la tradició *logicista* i l'escola de Hilbert. Com és ben sabut, el *logicisme* i el *formalisme* constitueixen, juntament a l'*intuïcionisme*, les tres principals filosofies de les matemàtiques del primer quart del segle XX, les quals sorgiren com a resposta als problemes relatius a la fonamentació de les matemàtiques plantejats en aquest període. De fet, l'any 1908 no és només l'any en què Russell i Zermelo publiquen les seves respostes al problema de les paradoxes, sinó també l'any en que L. E. J. Brouwer publicà el seu article: "De onbetrouwbaarheid der logische principes" (*1908*), que pot considerar-se el primer *manifesto* del corrent intuïcionista, un dels corrents més importants i influents en les recerques ulteriors sobre lògica i fonaments sorgits en aquest període. Ara bé, com és evident a partir de la relació d'autors que hem fet en els paràgrafs anterior, en el nostre estudi hem deixat de banda completament l'escola intuïcionista i això s'ha de justificar d'alguna manera. Explicar l'intuïcionisme de Brouwer o Poincaré sembla, en efecte, indispensable per a qualsevol estudi que pretengui fer una exposició acurada de la problemàtica sobre els fonaments de les matemàtiques, tal com aquesta és plantejada en el primer quart del segle XX. Car, en aquest cas, sembla irrenunciable fer una comparació de les tres escoles de pensament predominants en aquest període: el logicisme, el formalisme i l'intuïcionisme. En particular, difícilment es pot pretendre fer una exposició del desenvolupament de l'obra de Hilbert sobre els fonaments de les matemàtiques si no és en contrast i oposició a l'intuïcionisme de Brouwer i Poincaré. La justificació d'aquesta marginació del corrent intuïcionista en el nostre treball és que l'objectiu d'aquest no és fer una exposició sobre els problemes de fonamentació de les matemàtiques *per se*, sinó més aviat sobre la interrelació entre les respostes donades en aquest període a les qüestions relatives a la fonamentació de les matemàtiques i el desenvolupament de la moderna teoria de la quantificació i la moderna concepció semàntica de la lògica. Ara bé, tal com explica P. Mancosu a l'obra *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s* (*1998*), les contribucions al desenvolupament de la lògica per part dels autors pertanyents a l'escola intuïcionista anteriors a 1920 són més aviat escasses, degut en bona mesura a la manca de valor que atribuí el seu fundador a la formalització de les matemàtiques i al formalisme en general. De fet, les principals contribucions a la lògica en el període estudiats d'autors adscrits generalment a l'escola intuïcionista es troben a l'obra de H. Weyl *Das Kontinuum* (*1918*), però aquesta obra va ser escrita abans de la conversió d'aquest autor a l'intuïcionisme. D'una altra banda, tal com indica el subtítol del nostre estudi, un dels objectius principals que ha perseguit el nostre estudi ha estat fer un estudi comparatiu del corrent algèbric i logicista i de les seves influències en la lògica contemporània. Aquesta és, des del nostre punt de vista, una altra raó de pes per excloure del nostre estudi el corrent intuïcionista, però no pas les recerques hilbertianes sobre el mètode axiomàtic, donades les seves interrelacions amb el logicisme russellià i les seves contribucions fonamentals al desenvolupament de la lògica contemporània. En aquest sentit, la finalitat de la nostra exposició sobre el mètode axiomàtic de Hilbert no és tant explicar l'aplicació d'aquest mètode als problemes de fonamentació de l'aritmètica o l'anàlisi, com esbrinar com l'aplicació d'aquest mètode a la lògica i la teoria de conjunts ha permès, d'una banda, plantejar una sèrie de qüestions metalògiques que no s'havien pogut formular abans ni en la tradició algèbrica ni en la tradició logicista i, d'una altra banda, el desenvolupament de la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo. Aquesta és l'alternativa més clara a la teoria de tipus de Russell com a resposta a les paradoxes de la lògica i, de fet, ha estat la resposta universalment acceptada per la majoria dels lògics i matemàtics de la segona meitat del segle XX, la qual cosa justifica sobradament el seu estudi en un treball com aquest.

En el nostre estudi, quan parlem de *lògica moderna* o *contemporània* ens referim fonamentalment a la *moderna teoria de la quantificació* i la *concepció semàntica* o *model-teorètica* predominant avui en dia. Quan parlem de la *teoria de la quantificació* o de la *lògica quantificacional* en general ens referim com és habitual, a la *lògica de primer ordre* i les *lògiques d'ordre superior* (particularment la *lògica de segon ordre*). Aquesta manera de parlar pot ser acusada evidentment d'una certa simplificació, però donat el lloc central que ha ocupat la lògica quantificacional i, en particular, la *lògica de primer ordre*, en les recerques lògiques que han tingut lloc al llarg del segle vint, no creiem que pugui ser criticada per estar mancada totalment de raó o d'anar en contra del sentit habitual en què s'empren avui en dia aquests termes. D'una altra banda, quan parlem de *concepció model-teorètica* ens referim essencialment al punt de vista des del qual entenem avui en dia la lògica quantificacional, a saber, "com un esquema general o *lògica subjacent*, una lògica aplicable a qualsevol àrea particular de les matemàtiques de la següent manera: hom especifica un vocabulari i axiomes particulars en aquest vocabulari, i usa instàncies dels axiomes i les regles d'inferència de la lògica quantificacional per tal d'obtenir els resultats propis d'aquella àrea particular. La *nostra* concepció de la lògica incorpora la noció que les veritat lògiques són completament generals, no en el sentit de ser les veritat més generals sobre les entitats lògiques, sinó més aviat en el sentit de no tenir cap contingut en particular, de no parlar de cap entitat o mena d'entitats en particular i de ser aplicable a no importa quines coses desitgem investigar".[1] Així, algunes de les característiques principals d'aquesta concepció són l'*èmfasi en les qüestions semàntiques i metalògiques*, la *distinció entre llenguatge i metallenguatge* i, en definitiva, l'ús dels *conceptes i mètodes propis de la teoria de models*, com ara les nocions de *veritat lògica* i *conseqüència lògica* -i tots els conceptes implicats en la seva definició: *univers del discurs*, *interpretació*, *satisfacció*, etc-, la construcció de *models* per demostrar la *consistència* de les teories, la *independència* d'uns enunciats respecte un altres, etc. D'una altra banda, la capacitat de la lògica de primer ordre per formalitzar les diferents branques de les matemàtiques i la validesa d'alguns dels teoremes més importants de la teoria de models respecte a aquesta lògica, però no respecte a altres lògiques (per exemple, en lògica de segon ordre no són vàlids el teorema de completesa, de compacitat o de Löwenheim-Skolem) han

---

[1] *Goldfarb 1979*, 352-53.

fet que el desenvolupament de la concepció model-teorètica de la lògica hagi estat íntimament unit a la progressiva demarcació de la lògica quantificacional de primer ordre com un objecte digne d'estudi diferenciat de la lògica quantificacional d'ordre superior i expliquen, en definitiva, que la lògica de primer ordre ocupi el lloc central que ocupa en la lògica contemporània. D'acord amb l'anterior, doncs, podríem dir que l'objectiu principal del nostre estudi és l'elucidació de les principals contribucions del corrent logicista i algèbric al desenvolupament de la lògica de primer ordre i de la moderna concepció model-teorètica de la lògica, així com les seves limitacions respecte al desenvolupament de l'una i l'altre. Com hem explicat, per veure precisament aquestes limitacions hem volgut també fer-nos ressò dels principals desenvolupaments que tingueren lloc en les recerques sobre lògica i fonaments en els anys immediatament posteriors a la publicació de *Principia Mathematica* d'A. N. Whitehead i B. Russell i, particularment, d'una banda, de les contribucions de Hilbert i la seva escola i, d'un altra, de les de Löwenheim i Skolem. Això ens ha servit alhora per veure les connexions d'aquests autors amb el corrent logicista i algèbric, fins ara poc estudiades. És important remarcar, en qualsevol cas, que encara que hàgim explicat fa un moment que per lògica moderna entenem essencialment la lògica quantificacional i, en particular, la lògica de primer ordre, no se segueix evidentment d'aquí que considerem que, per exemple, la *lògica algebràica* no formi part d'això que avui en dia anomenem lògica moderna o no sigui un objecte digne d'estudi. De fet, l'objectiu de la identificació anterior entre lògica moderna i lògica quantificacional (de primer ordre) ha estat el de permetre'ns especificar quin ha estat l'objectiu principal del nostre estudi, a saber, esbrinar quines han estat les contribucions més importants de la tradició algèbrica i logicista a la gènesi i desenvolupament de la lògica de primer ordre i la moderna concepció semàntica de la lògica. Ara bé, del fet que aquest hagi estat l'objectiu *principal* del nostre estudi no se segueix evidentment que aquest hagi estat l'*únic* objectiu que hàgim perseguit en el nostre estudi. Així, per exemple, al llarg del nostre estudi hem intentat també fer-nos ressò de les contribucions d'aquestes dues tradicions al desenvolupament d'altres branques de la lògica moderna com ara la *lògica algèbrica* -i, en particular, la *teoria de les àlgebres de relacions*- i la *lògica de segon ordre*. La raó d'això és purament històrica. Tal com veurem al llarg del nostre treball, en efecte, bona part de les recerques de Peirce i Schröder es desenvoluparen en el si del que podríem anomenar *lògica algèbrica de relacions* i les recerques de Schröder en aquest camp constituïren el punt de partida a partir del qual Tarski desenvolupà a partir dels anys 40 la *teoria de les àlgebres de relacions*. Per un altre costat, el sistema lògic emprat per Frege per dur a terme el seu programa de reducció de les matemàtiques equival essencialment a la lògica de segon ordre -curiosament, Peirce fou un dels primers en ressaltar la potencialitat de la lògica de segon ordre per a la formalització de les matemàtiques.

Uns altres termes que apareixen sovint en el nostre estudi i que mereixen potser un cert aclariment conceptual, són els termes *tradició* (o *corrent*) i *escola*, tal i com aquest termes apareixen en expressions com ara la *tradició algèbrica* (o el *corrent algèbric*) i l'*escola* de *Hilbert*. Tal com ha assenyalat Ferreirós en la introducció a *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics* (*1999*), en la historiografia contemporània més recent, el terme *escola* fa referència a un grup de recerca dirigit normalment per un sol matemàtic i en el si d'una institució concreta, normalment una facultat o una universitat. Naturalment, aquest grup de recerca comparteix, com a resultat de la seva col·laboració intel·lectual, una sèrie d'eines de tipus conceptuals, perspectives metodològiques, punts de vista sobre quins són els problemes dels quals cal ocupar-se, etc. Per contra, el terme *tradició* fa referència a un grup d'investigadors que comparteixen unes orientacions de recerca comunes i en el quals es poden traçar nombroses influències comunes, però que no desenvolupen la seva activitat en una institució comuna ni hi ha una persona que dirigeixi el grup com s'esdevé en les escoles de recerca. En aquest sentit, doncs, l'ús de les expressions *tradició algèbrica* i *tradició logicista* i, en canvi, *escola de Hilbert*, sembla completament justificat i, de fet, és bastant habitual en la historiografia contemporània. Amb tot, l'ús de la paraula escola en el sentit abans descrit no esta generalitzat entre els historiadors de la lògica actuals, els quals empren sovint aquest terme per designar un grup d'investigadors que comparteixen una determinada filosofia de les matemàtiques i, per tant, amb un significat més ampli que el que hem atribuït abans a aquest terme i més proper al significat que hem atribuït al terme tradició. Així, per exemple, el logicisme es descrit sovint com una *escola*, les tesis de la qual s'oposarien a les de l'*escola formalista* i l'*escola intuïcionista.* Com que aquest ús de la paraula *escola* està molt estès en aquest context que no pas l'ús de la paraula *tradició*, nosaltres també emprarem ocasionalment les expressions *escola logicista* o *escola formalista* quan vulguem contraposar els punts de vista de la tradició logicista o de l'escola de Hilbert amb els punt de vista dels intuïcionistes.

La distinció entre *dues tradicions* en el desenvolupament de la lògica a la segona meitat del segle dinou i el primer quart del segle vint: la *tradició algèbrica* de Boole, Peirce i Schröder, entre d'altres, i la *tradició logicista*, encapçalada per Frege i Russell, és una distinció clàssica en la historiografia lògica contemporània. Pel que nosaltres sabem, el seu origen es troba en els articles de J. Van Heijenoort "Logic as Calculus and Logic as Language" (*1967$_a$*) i "Set-Theoretics Semantics" (*1977*), i en el seu llibret *El desarrollo de la teoría de la quantificación* (*1976*). Uns altres articles que es fan ressò específicament d'aquesta distinció són els articles de W. Goldfarb: "Logic in the Twenties: The Nature of The Quantifier" (*1979*) i J. Hintikka: "On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory" (*1988*). Els articles de Van Heijenoort, Goldfarb i Hintikka defensen unes tesis molt semblants pel que fa a les concepcions sobre la naturalesa de la lògica dominants en la tradició algèbrica i logicista i a les seves contribucions al desenvolupament de la lògica contemporània i la concepció model-teorètica predominant avui en dia. Segons aquests autors, en efecte, en la tradició logicista, la lògica es concep com un llenguatge universal i omnicomprensiu, per la qual cosa els quantificadors tenen com abast un univers fix i determinat per endavant: l'Univers; per contra, en la tradició algèbrica, la lògica es concep com un càlcul o àlgebra que pot ser realitzat sobre diferents dominis d'interpretació, per la qual cosa els quantificadors tenen sempre com abast un univers concret i particular, que els autors d'aquesta tradició anomenaren *univers del discurs* o *domini pensable*. Ara bé, tal com ha assenyalat Van Heijenoort, "en un univers fix, les nocions de veritat lògica i satisfactibilitat perden la seva aplicabilitat, mentre que en un univers variable aquestes nocions passen al primer pla".[1] Aquesta seria, en definitiva, la raó per la qual ni Frege ni Russell s'haurien plantejat cap qüestió metalògica -per exemple, la completesa del sistema-, ni trobem en la seva obra cap noció semàntica -com, per exemple, les nocions de veritat lògica i satisfactibilitat- i, en canvi, els lògics de l'escola de Schröder com Löwenheim i Skolem haurien plantejat de forma natural aquestes qüestions. Així doncs, segons els historiadors de la lògica abans esmentats, autors com Boole, Peirce i Schröder formarien part d'una tradició més amplia, que ells anomenen *tradició semàntica* (Van Heijenoort) o *model-teorètica* (Hintikka) i que englobaria també autors com Löwenheim i Skolem, en la qual hom posa l'accent sobre qüestions semàntiques com ara la *veritat lògica* o la *satisfactibilitat* de les fórmules lògiques, mentre que Frege i Russell pertanyerien al que ells anomenen *tradició sintàctica* o *universalista*, en la qual hom posa l'accent en nocions sintàctiques com ara la *demostrabilitat* a partir d'un conjunt d'axiomes o de regles d'inferència. En aquest sentit, doncs, podríem considerar les recerques de Boole, Peirce i Schröder com una anticipació de la *teoria de models* (*model theory*) contemporània, que

[1] *Van Heijenoort 1977*, 184.

naixeria precisament en l'obra de Löwenheim i Skolem, mentre que les de Frege i Russell podrien considerar-se com una anticipació del que avui en dia s'anomena *teoria de la demostració* (*proof theory*). Podríem dir, en definitiva, que si la contribució essencial de la tradició logicista al desenvolupament de la lògica moderna seria la noció de sistema formal -la primera presentació de la lògica com a sistema formal és troba a l'obra *Begriffschrift* de Frege (*1879*)-, la contribució fonamental de la tradició algèbrica o semàntica de Boole, Peirce, Schröder i Löwenheim seria el plantejament de qüestions semàntiques com ara la veritat lògica i la satisfactibilitat en relació a les fórmules del llenguatge lògic -en concret, a l'article "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" (*1915*), Löwenheim plantejarà, per primera vegada a la història, el problema de la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre en dominis de diferent cardinalitat. Segons els historiadors de la lògica abans esmentats, la limitació de la tradició semàntica rau precisament en el fet que el seu punt de vista és purament semàntic: no hi ha un concepte de demostració formal i, per tant, no hi ha una especificació del sistema formal, per la qual cosa aquests autors no poden formular les qüestions metalògiques més característiques de la lògica contemporània: *completesa*, *consistència*, *decidibilitat*, etc. El plantejament d'aquestes qüestions en relació a la lògica de primer ordre seria precisament una de les contribucions més rellevants del mètode axiomàtic de Hilbert, la posició del qual es trobaria en un lloc intermedi en relació a les dues tradicions.

Un altres articles en els quals la distinció entre la tradició logicista i algèbrica hi ocupa un lloc prominent i destaquen els contrastos entre una i altra tradició són els articles de G. Moore: "Beyond First-Order Logic: The Historical Interplay Between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory" (*1980*), I. Grattan-Guinness: "Living Together and Living Apart: On the Interactions Between Mathematics and Logics from the French Revolution to the First World War" (*1988*) i "Peirce Between Logic and Mathematics" (*1997*), i I. H. Anellis i N. R. Houser: "Nineteenth Century Roots of Algebraic Logic and Universal Algebra" (*1991*). D'entre aquests articles cal destacar els de Grattan-Guinness, no només perquè aporten una acurada anàlisi històrica del desenvolupament de la tradició algèbrica i logicista, sinó també perquè ofereixen una explicació alternativa a la de Van Heijenoort, Goldfarb i Hintikka sobre quina seria la influència de la tradició algebràica i logicista en el desenvolupament de la lògica moderna. Essencialment, la tesi que Grattan-Guinness defensa en els articles anteriors és que el *corrent* (*1988*) o *tradició* (*1997*) de la *lògica algèbrica* de Boole, Peirce i Schröder hauria estat eclipsada i reemplaçada per el de la *lògica matemàtica* de Frege, Peano i Russell en el canvi de segle. Segons aquest autor, Russell seria el pare de la lògica moderna i la seva obra hauria sorgit de la unió del formalisme de Peano i la tradició conjuntista de Cantor i Dedekind, hereva de la recerca en els fonaments de l'anàlisi de Cauchy, Weiertrass i altres. Així, per exemple, en les primeres línies de l'article de 1988, Grattan-Guinness explica que la línia de recerca de Boole i De Morgan "va tenir continuació en Peirce i Schröder; però, amb l'entrada del segle es va veure reemplaçada per la lògica matemàtica que havia sorgit del creixent rigor aportat per Cauchy a l'anàlisi matemàtica, la qual havia de ser encara més depurada per Weiertrass i els seus seguidors. Peano fou una figura clau en la "nova" lògica -sense que els treballs de Frege fossin molt influents-, però Russell la dugué al seu punt més àlgid en exposar durant la dècada de 1900 la seva filosofia logicista de les matemàtiques, en el marc de la qual la matemàtica pura es trobava fundada en -la seva versió- de la lògica".[1] Com podem veure, doncs, la posició de Grattan-Guinness és essencialment diferent a la de Van Heijenoort, Goldfarb i Hintikka respecte a les contribucions de la tradició algèbrica i logicista al desenvolupament de la lògica contemporània, car limita les contribucions de la primera a la lògica algèbrica i considera el desenvolupament de la lògica contemporània com una contribució exclusiva o quasi bé exclusiva dels *lògics matemàtics* i, en particular, de Russell. Naturalment, això només és possible si hom considera que la tradició algèbrica ha estat absorbida per la nova lògica matemàtica, de manera que vegi les contribucions de Löwenheim i Skolem com alienes al desenvolupament de la tradició algèbrica o, simplement, relegui les contribucions d'aquests autors al naixement de la teoria de models a un segon pla en favor de les contribucions a la mateixa de Hilbert i la seva escola. Com explicarem en la conclusió, aquesta és essencialment la posició de Grattan-Guinness en l'obra *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940. Logics, Set Theories and The Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel* (*2000*). Simplificant una mica, podríem dir que en les tres parts que constitueixen el cos o part principal del nostre treball expliquem totes les qüestions relatives al desenvolupament pròpiament dit de les tradicions algèbrica i logicista i les seves contribucions a la gènesi i desenvolupament de la lògica contemporània, així com les contribucions a la mateixa d'altres autors o escoles pertanyents al període estudiat, mentre que en la conclusió fem un breu repàs d'aquestes contribucions i una valoració personal de les mateixes, contrastant aquesta amb la valoració que ofereixen els articles i obres a què ens hem referit en aquests dos darrers paràgrafs.

Aquesta tesi s'inscriu en el programa de doctorat "Lògica matemàtica", ofert pel Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la Universitat de Barcelona en el

---

[1] *Grattan-Guinness 1988*, 73.

bienni 1987-89. Voldríem agrair al Dr. Ignasi Jané, tutor d'aquest programa de doctorat, i al Dr. Ventura Verdú, l'interès mostrat pel desenvolupament de la tesi malgrat els anys transcorreguts, així com alguns importants suggeriments de tipus bibliogràfic. Voldríem agrair també molt especialment al Dr. Josep Pla i Carrera, director de la tesi, no només la paciència que ha tingut amb nosaltres llegint els nombrosos esborranys d'aquest escrit, discutint les dificultats plantejades o suggerint noves perspectives a partir de les quals abordar-les, sinó també la seva afabilitat i bonhomia que han fet sempre de la realització d'aquest treball una tasca agradable i engrescadora.