

Table C.67: Fourier analysis of the  $y$  coordinate of Saturn in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	1.2478600389E–03	0.0000000000E+00	0.9660402112	5.9183465052E+00	7.4558394226E+00
1.0000006188	–1.1678967625E–01	–7.6954168249E–01	0.9320602009	2.4142790774E–01	9.2406664369E–02
1.9660322375	1.4058757108E–01	1.9200658951E–01	0.0339479554	–5.1524055129E–02	6.0306419770E–02
1.9999946061	–2.1227225872E–03	–1.9344825846E–02			

Table C.68: Fourier analysis of the  $z$  coordinate of Saturn in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	1.2061024051E–02	0.0000000000E+00	0.0339744571	–3.2223219964E–01	2.5790380704E–01
0.0679376399	–1.1119845401E–02	1.6190635353E–03	1.0339656399	–2.7653555367E–03	2.0446784223E–03
0.9660135484	–2.6049680973E–03	–2.2448117482E–03	0.1019026367	–4.2444718954E–04	–1.6921085225E–04

Table C.69: Fourier analysis of the  $x$  coordinate of Uranus in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	–4.3789406363E–03	0.0000000000E+00	0.9880961770	1.5346810684E+01	1.1471763882E+01
0.9999926571	4.7536670525E–01	1.2868748759E+00	1.9880841995	3.7292784450E–01	2.9874485155E–01
0.9761963025	–4.5562678888E–01	–3.0524961877E–02	0.0118893679	–1.3052656529E–01	9.1552004562E–02
1.9999758623	1.0965989726E–02	3.2456681515E–02	0.9644570843	1.7509633077E–02	–3.8379819671E–03
2.9880793025	8.4836323167E–03	7.3963451122E–03	1.9761802800	–1.1330209707E–02	–1.0401615130E–03

Table C.70: Fourier analysis of the  $y$  coordinate of Uranus in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	–1.0531992744E–02	0.0000000000E+00	0.9880961770	1.1471763698E+01	–1.5346810509E+01
0.9999926538	1.2867864429E+00	–4.7541087424E–01	1.9880921106	3.023354339E–01	–3.7000442201E–01
0.9761963019	–3.0524713406E–02	4.5562663647E–01	0.0118988159	–9.0019836285E–02	–1.314532521E–01
1.9999933312	3.2667212524E–02	–1.0004084271E–02	0.9644570856	–3.8379682748E–03	–1.7509656827E–02
2.9880793025	7.3963445072E–03	–8.4836324450E–03	1.9761830841	–1.0818358939E–03	1.1329362292E–02

Table C.71: Fourier analysis of the  $z$  coordinate of Uranus in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	–1.8306444486E–02	0.0000000000E+00	0.0119300232	–2.3212176303E–01	–1.1562501171E–01
0.0238302993	3.1316749382E–03	5.3235814673E–03	0.9880626548	–1.9661792858E–03	8.8376179562E–04
1.0119227781	–1.8908521984E–03	–1.0356960450E–03	0.0350725226	–2.3035297220E–04	–2.2083042756E–04
0.9999844664	–3.0437307899E–04	–9.0819155257E–06			

Table C.72: Fourier analysis of the  $x$  coordinate of Neptune in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	–1.6625727530E–03	0.0000000000E+00	0.9939344130	2.6917903859E+01	1.3379531152E+01
1.9939293374	6.5223771538E–01	3.6278118299E–01	0.9999988293	2.2203859941E–01	–3.4286079580E–01
0.0060591114	–2.2707116839E–01	1.0141673091E–01	0.9878613482	4.5518511371E–02	–1.2832187396E–01
2.9939206357	1.4962152227E–02	9.0304187413E–03	1.9999990210	5.9241124038E–03	–8.2237011351E–03
1.0059643111	6.1863884464E–03	3.7543306470E–03			

Table C.73: Fourier analysis of the  $y$  coordinate of Neptune in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	2.9382489206E–03	0.0000000000E+00	0.9939344557	1.3382327669E+01	–2.6916381687E+01
1.9939200210	3.4661881633E–01	–6.5856104877E–01	0.9999988408	–3.4282884923E–01	–2.2206108662E–01
0.0060590961	–1.0149603236E–01	–2.2696022939E–01	0.9878612263	–1.2833691058E–01	–4.5478613411E–02
2.9939206357	9.0304189333E–03	–1.4962152323E–02	2.0000006551	–8.2004834828E–03	–5.9504708507E–03
1.0059574369	2.4868878673E–03	–7.8863518749E–03			

Table C.74: Fourier analysis of the  $z$  coordinate of Neptune in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	1.2168039874E-02	0.0000000000E+00	0.0060830936	8.7269817888E-02	-9.0880793081E-01
1.0060753832	1.0137412052E-03	-7.5006386729E-03	0.9939262187	1.7330889655E-04	7.5800971227E-03

Table C.75: Fourier analysis of the  $x$  coordinate of Pluto in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	5.9538439765E-02	0.0000000000E+00	0.9959716815	2.8649095189E+01	-2.4064309453E+01
1.0000015382	-8.0264712420E+00	1.1750925327E+01	0.9919432766	4.2228013389E+00	-1.8068741751E+00
1.9959652012	7.3388397429E-01	-5.6447918739E-01	0.9879130511	8.4064425685E-01	-9.7613689298E-02
1.0040347212	5.2228849134E-01	4.3436232933E-01	1.9999936324	-2.0960446259E-01	2.8285839343E-01
0.0040157140	-2.3643386725E-01	-2.0695897804E-01	0.9838817458	1.8180577757E-01	3.1085266123E-02
1.9919363723	1.0626517605E-01	-4.0340480536E-02	1.0080658423	7.6108557712E-02	4.5203538322E-02
0.9798531648	3.9551867832E-02	1.9738575851E-02	0.0080520858	-3.4737325510E-02	-1.6866956226E-02
1.9879041938	2.0864043556E-02	-1.6814838585E-03	2.9959590249	1.7718473760E-02	-1.2406833446E-02
1.0120946070	1.6126509262E-02	5.0114761949E-03	2.0040264890	1.2512596204E-02	1.1231859355E-02

Table C.76: Fourier analysis of the  $y$  coordinate of Pluto in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	-1.0118928671E-01	0.0000000000E+00	0.9959724280	-2.3998584614E+01	-2.8707184132E+01
1.0000015599	1.1749419281E+01	8.0275592194E+00	0.9919434301	-1.8047819648E+00	-4.2236383360E+00
1.9959652087	-5.6446149230E-01	-7.3389381110E-01	0.9879130908	-9.7505501278E-02	-8.4065419991E-01
1.0040346495	4.3615002128E-01	-5.2408065447E-01	1.9999936328	2.8284839548E-01	2.0960926836E-01
0.0040237736	2.0659620900E-01	-2.2186198931E-01	0.9838817611	3.1094478466E-02	-1.8180412361E-01
1.9919312091	-4.2023897853E-02	-1.0551357485E-01	1.0080657555	4.5348456507E-02	-7.6386295656E-02
0.9798531607	1.9738249374E-02	-3.9552160455E-02	0.0080506405	1.6116807987E-02	-3.3490884813E-02
1.9879038140	-1.7069267942E-03	-2.0862328467E-02	2.9959590249	-1.2406830002E-02	-1.7718485137E-02
1.0120945098	5.0216134146E-03	-1.6183682994E-02	2.0040264536	1.1252130431E-02	-1.2531638869E-02

Table C.77: Fourier analysis of the  $z$  coordinate of Pluto in the Sun–Earth+Moon case.

$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$	$f_l$	$A_l^c$	$A_l^s$
0.0000000000	-3.9731483008E+00	0.0000000000E+00	0.0040316358	8.6852375323E+00	-7.2669392271E+00
0.0080609792	7.6127679666E-01	-1.1603430570E+00	0.0120905431	7.2770391026E-02	-2.4473235494E-01
0.9959636886	6.8664111620E-02	6.3327914596E-02	1.0040256980	7.4242946377E-02	-5.6705368973E-02
0.9999906313	-6.5488281447E-02	-2.2001058683E-03	0.0161199998	-1.5415753587E-04	-5.5710047055E-02
0.0201488464	-3.9050715713E-03	-1.2779864231E-02	0.9919312985	5.9044779495E-03	9.8023617741E-03
1.0080522527	6.6183849279E-03	-9.3378789463E-03			

# Appendix D

## Evolution of the families of periodic orbits

In Chapter 7, several families of periodic orbits of the RTBP with the Earth-Moon mass parameter were described. For most of the families only the characteristic and stability curves were given. For each of these families, we give in this Appendix some sample orbits, which have been chosen in order to display its evolution in shape.

### D.1 Lyapunov families

In Fig. D.1, we give the characteristic and stability curves of the planar Lyapunov families around  $L_1$ ,  $L_2$  and  $L_3$ . We have plotted and labeled some points on these curves, which correspond to the orbits displayed in Fig. D.2. Orbits 2,3,4,5 are magnified with respect to the remaining ones, this is in order to display the “change in shape” along the family that takes place between orbits 1 and 6.

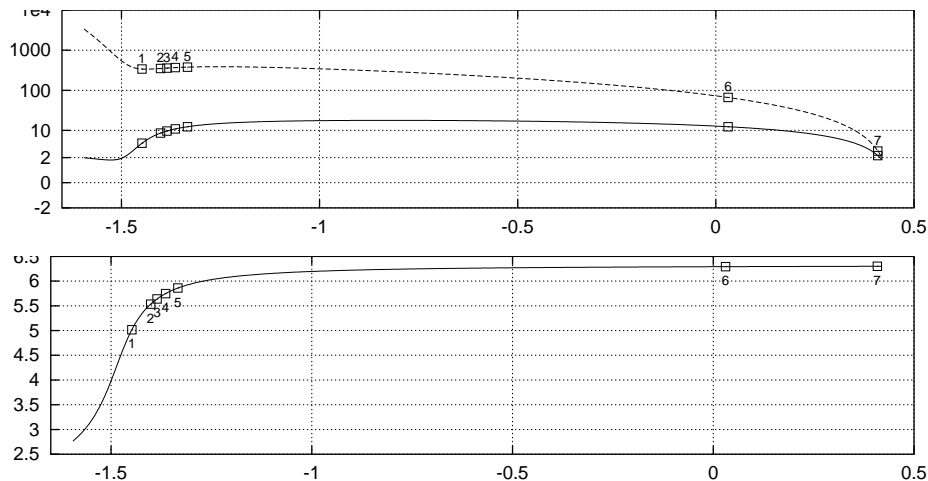


Figure D.1: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the family of vertical orbits of  $L_1$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figures D.2.

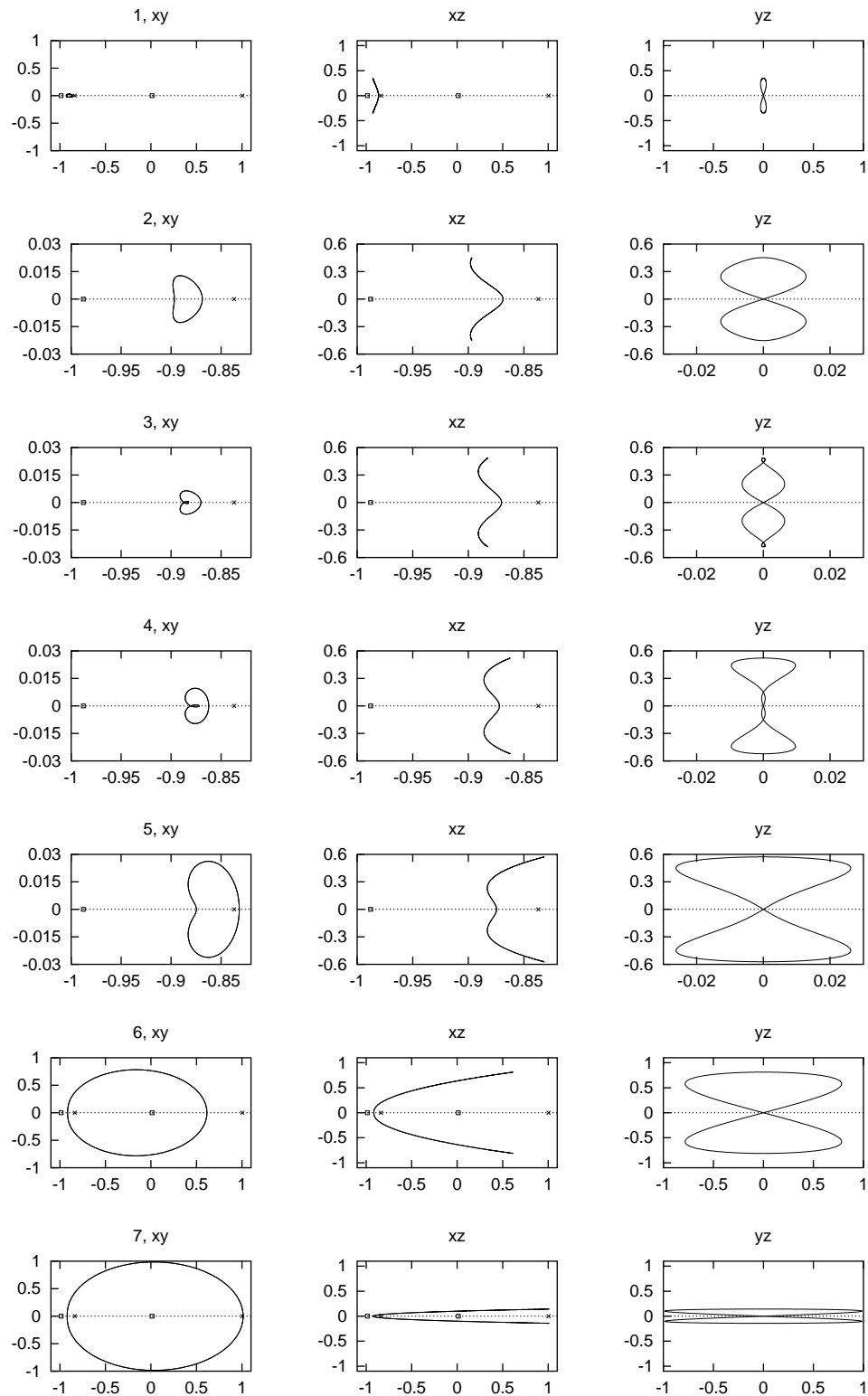


Figure D.2: Projections of orbits 1, ..., 7 of figure D.1.

In figure D.3 we display stability parameters and the characteristic curve for the vertical Lyapunov family around  $L_2$ . In this case there is no change in shape analogous to the  $L_1$  case, and therefore we display less orbits.

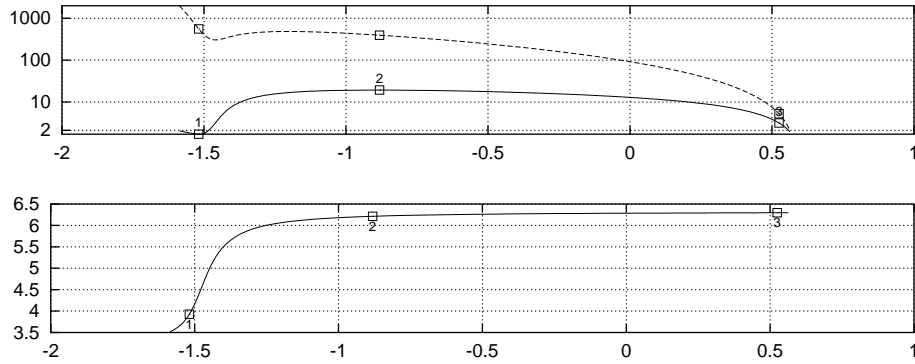


Figure D.3: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the vertical family of  $L_2$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.4.

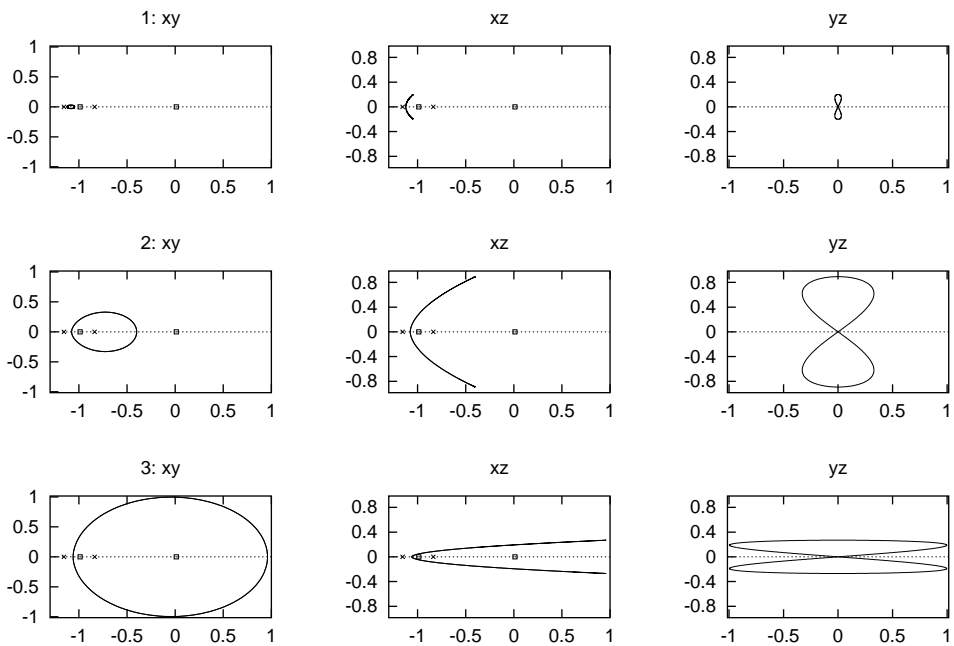


Figure D.4: Projections of the orbits labeled 1,2,3 in figure D.3.

In figures D.5 and D.6 we represent the vertical Lyapunov families around  $L_3$

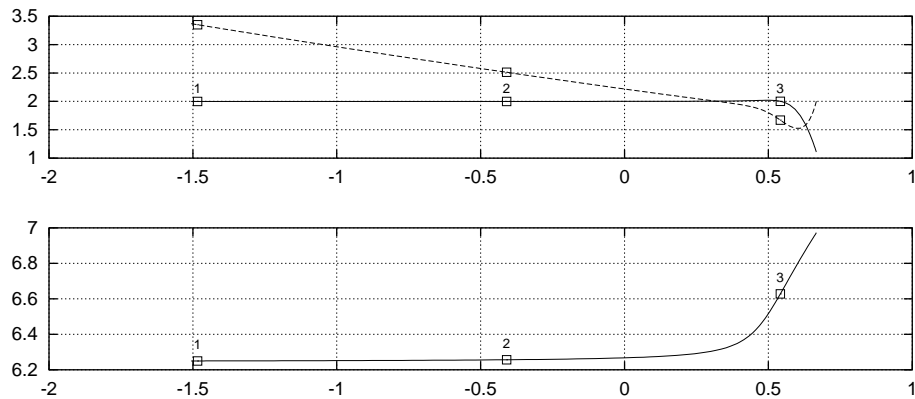


Figure D.5: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the vertical family of  $L_3$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.6.

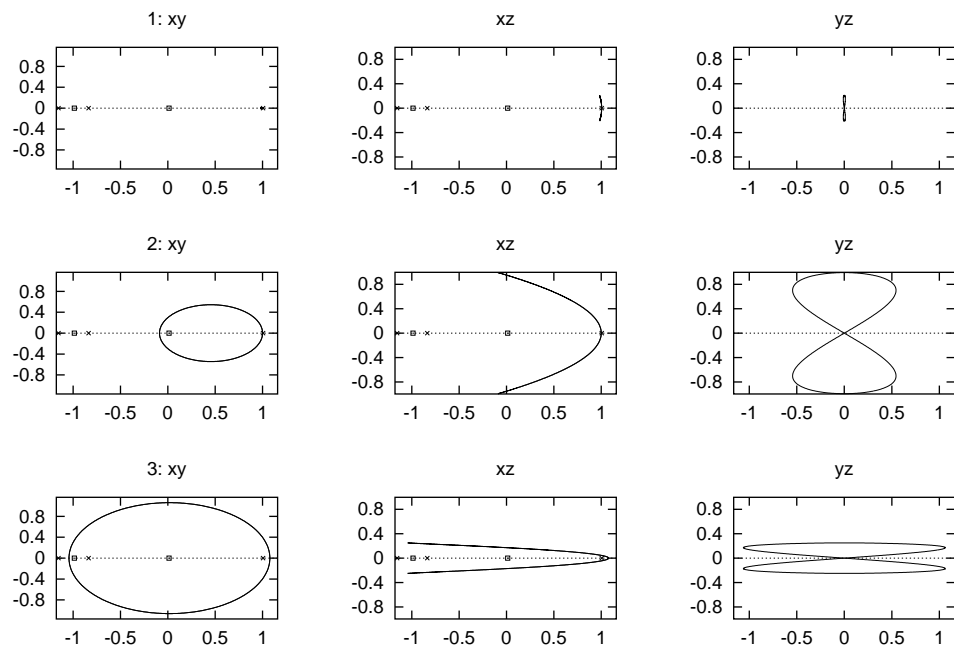


Figure D.6: Projections of the orbits labeled 1,2,3 in figure D.5.

### D.1.1 Planar Lyapunov families

As we did for vertical orbits, we display in Fig. D.7 stability parameters and the characteristic curves of the planar Lyapunov family around  $L_1$ . Since this family is planar, in Fig. D.8 we display only the  $xy$  projections of the orbits labeled in Fig. D.7.

In figures D.9 and D.10 we display stability parameters, the characteristic curve and some sample orbits of the planar Lyapunov family around  $L_2$ .

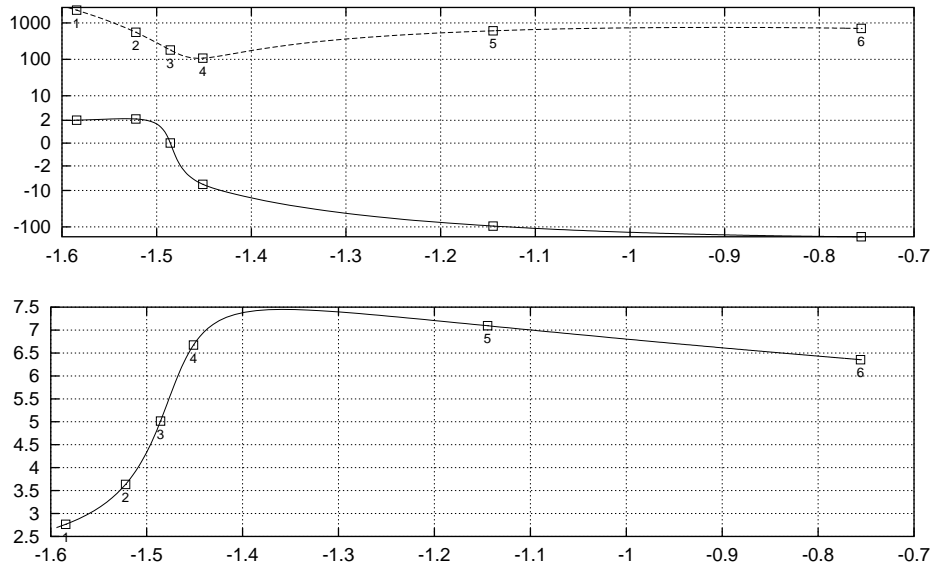


Figure D.7: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the family of planar orbits of  $L_1$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.8.

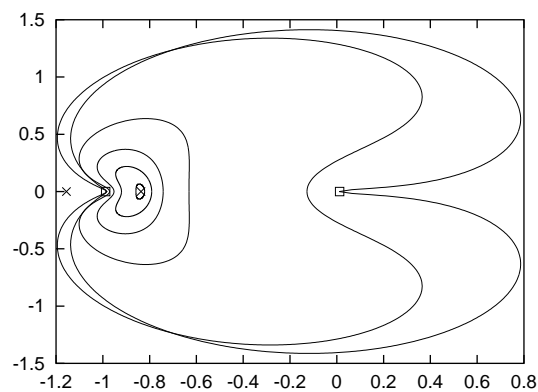


Figure D.8:  $xy$  projection of the orbits labeled 1, . . . , 6 (from smaller to larger) in figure D.7.

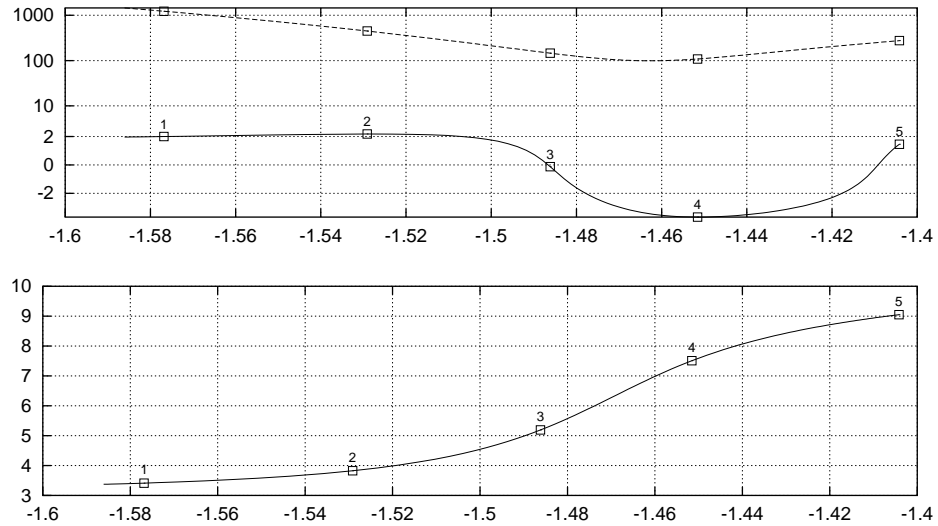


Figure D.9: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the planar family of  $L_2$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.10.

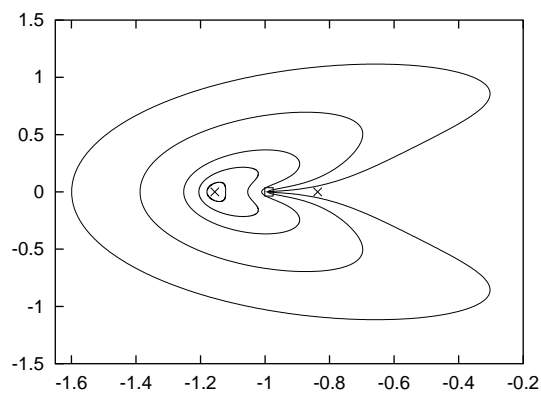


Figure D.10:  $xy$  projection of the orbits labeled 1, ..., 5 (from smaller to larger) in figure D.9.



In figures D.11 and D.12 we do the same for the planar Lyapunov family around  $L_3$ .

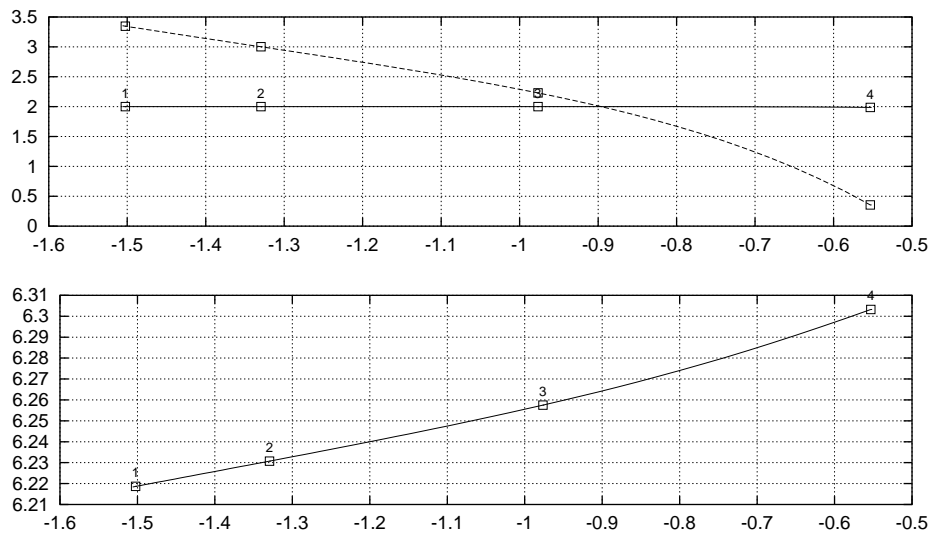


Figure D.11: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the planar family of  $L_2$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.12.

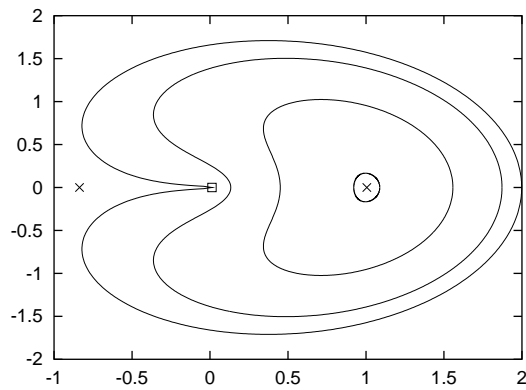


Figure D.12:  $xy$  projection of the orbits labeled 1, ..., 4 (from smaller to larger) in figure D.11.

## D.2 Halo and halo-type families

### D.2.1 Halo families

As we did in Chapter 7, we magnify in Fig. D.13 a neighborhood of the bifurcations to complex instability of the stability parameters. Also, when the stability parameters are complex conjugate, we display the real and imaginary parts of one of them. We display sample orbits in Fig. D.14.

Figures D.15 and D.16 display stability parameters, the characteristic curve and sample orbits of the halo family for the  $L_2$  case. In figures D.17 and D.18 we do the same for the halo family around  $L_3$ .

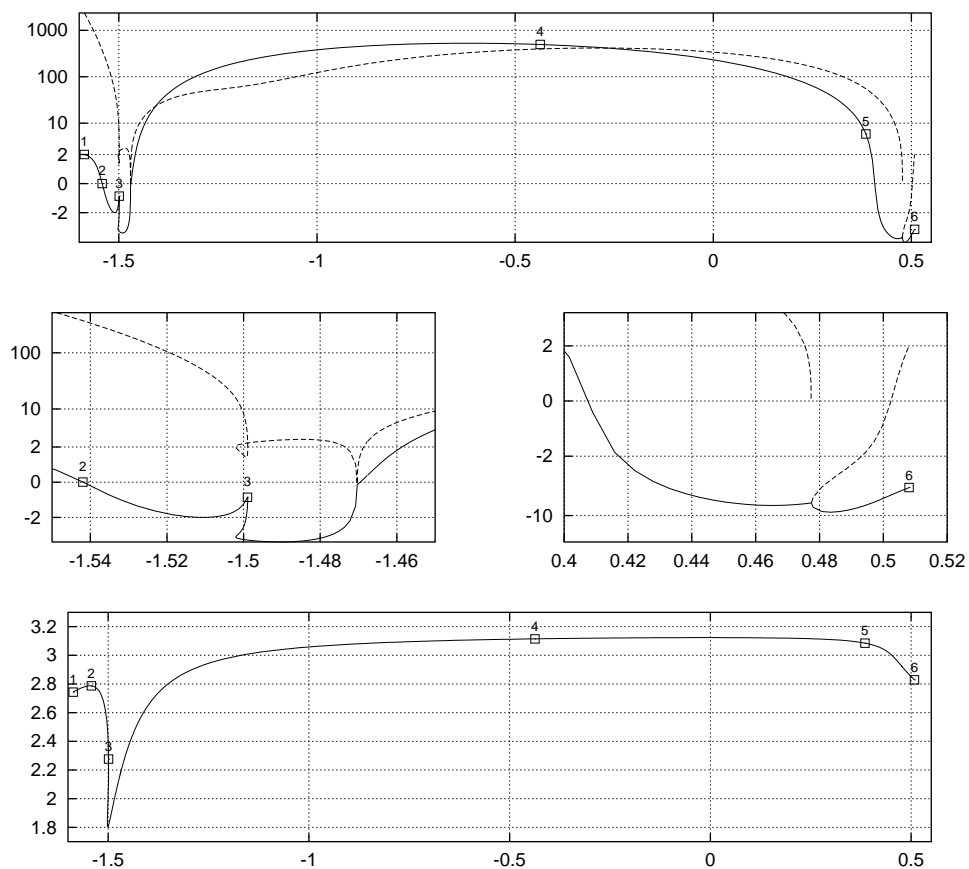


Figure D.13: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the north-class family of halo orbits of  $L_1$ . Middle: two magnifications of the previous plot, in the left one turning points in the energy can be appreciated. Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.14.

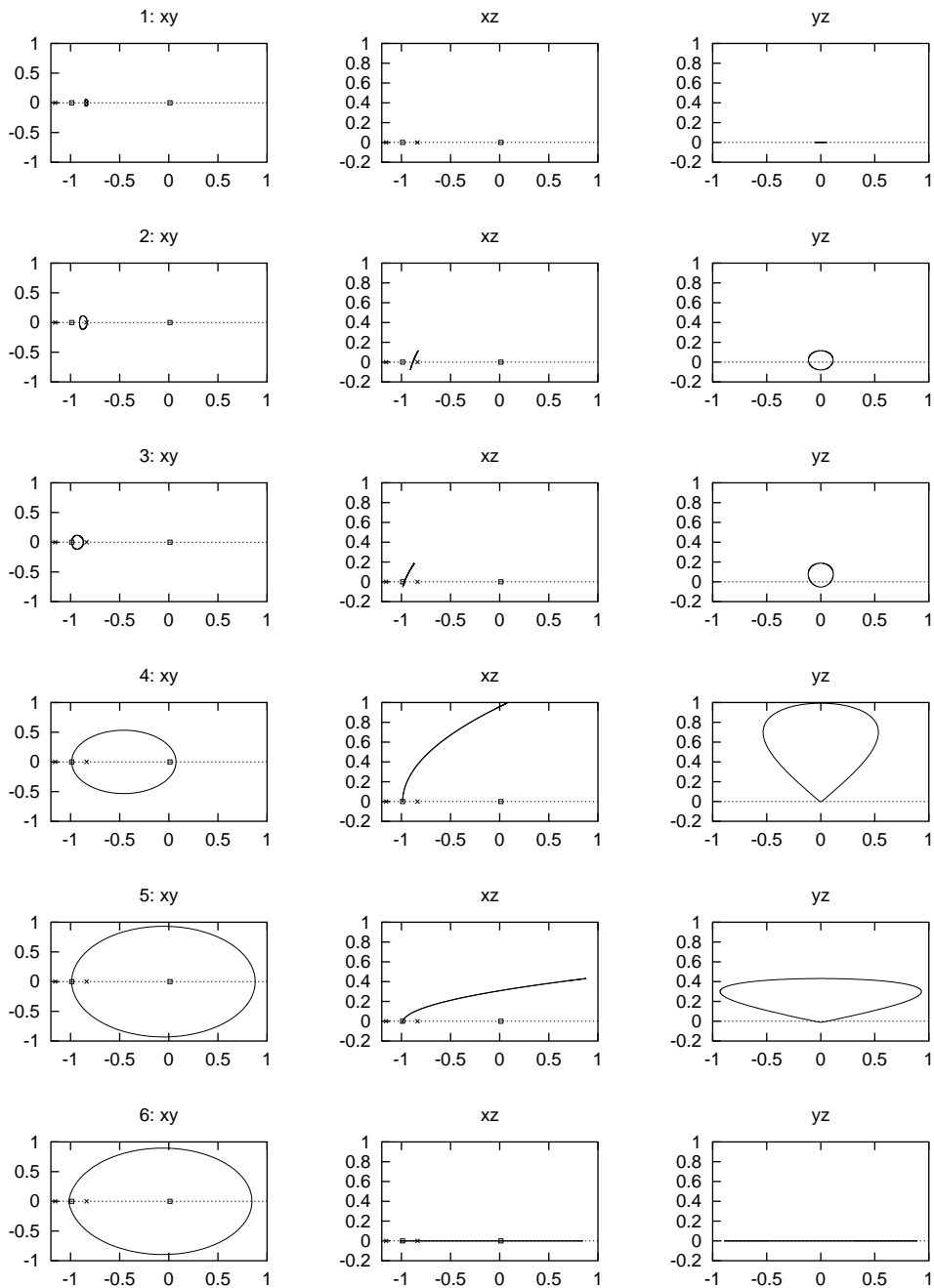


Figure D.14: Halo orbits labeled 1, . . . , 6 in figure D.13.

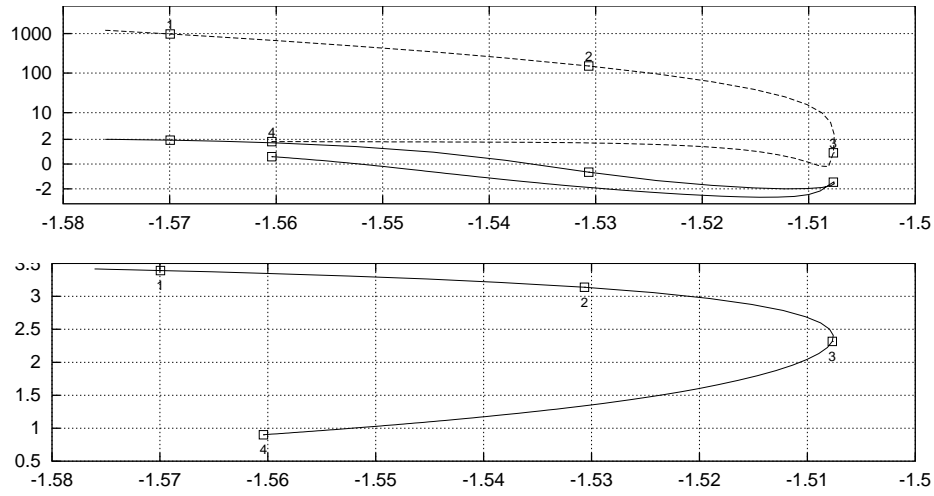


Figure D.15: top: Energy–stability parameters diagram of the halo family of  $L_2$ . Bottom: energy–period diagram for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.16.

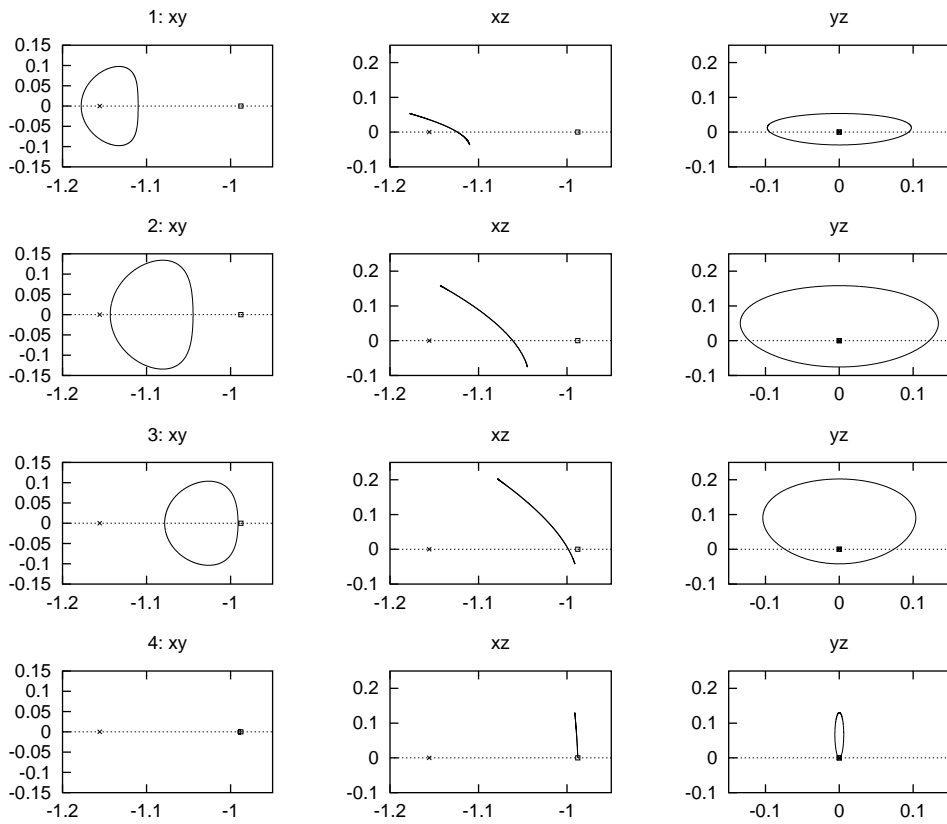


Figure D.16:  $xyz$ ,  $xy$ ,  $xz$  and  $yz$  projections of the halo orbits labeled 1, ..., 4 in D.15.

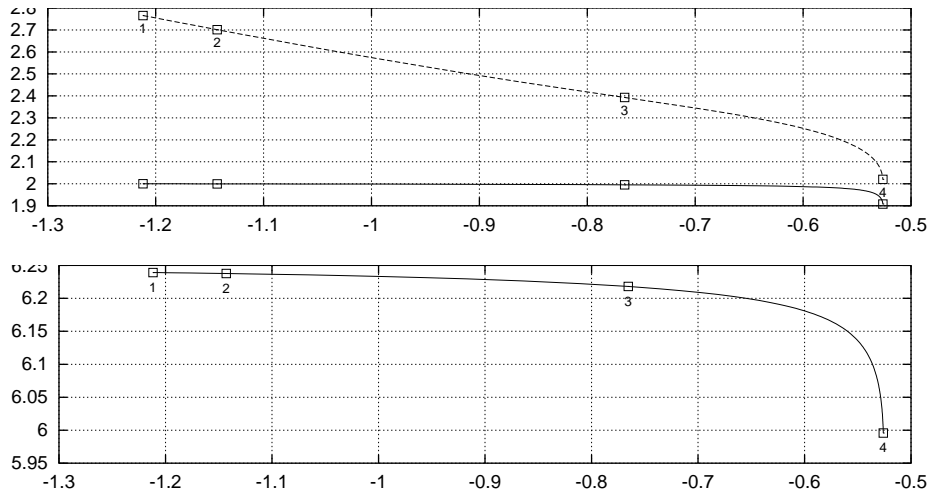


Figure D.17: top: Energy–stability parameters diagram of the halo family of  $L_3$ . Bottom: energy–period diagram for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.18.

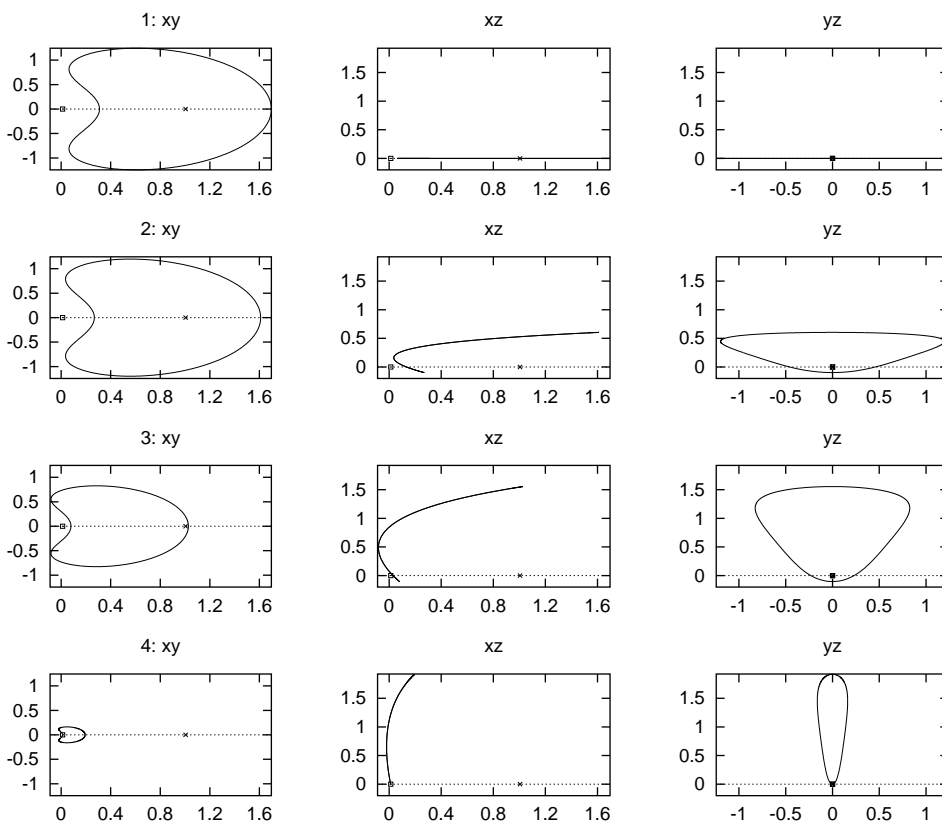


Figure D.18:  $xyz$ ,  $xy$ ,  $xz$  and  $yz$  projections of the halo orbits labeled 1, ..., 4 in D.17.

### D.2.2 Period–duplicated halo families

In Fig. D.19 we display stability parameters and the characteristic curve of the hyperbolic period–duplicated halo family around  $L_1$ . In order to simplify the plots, in the complex unstable case only the real part of the stability parameters has been shown. Note that some orbits are highly unstable. In figures D.20 and D.21 we display some sample orbits. This family ends in a plane orbit, as described in Chapter 7.

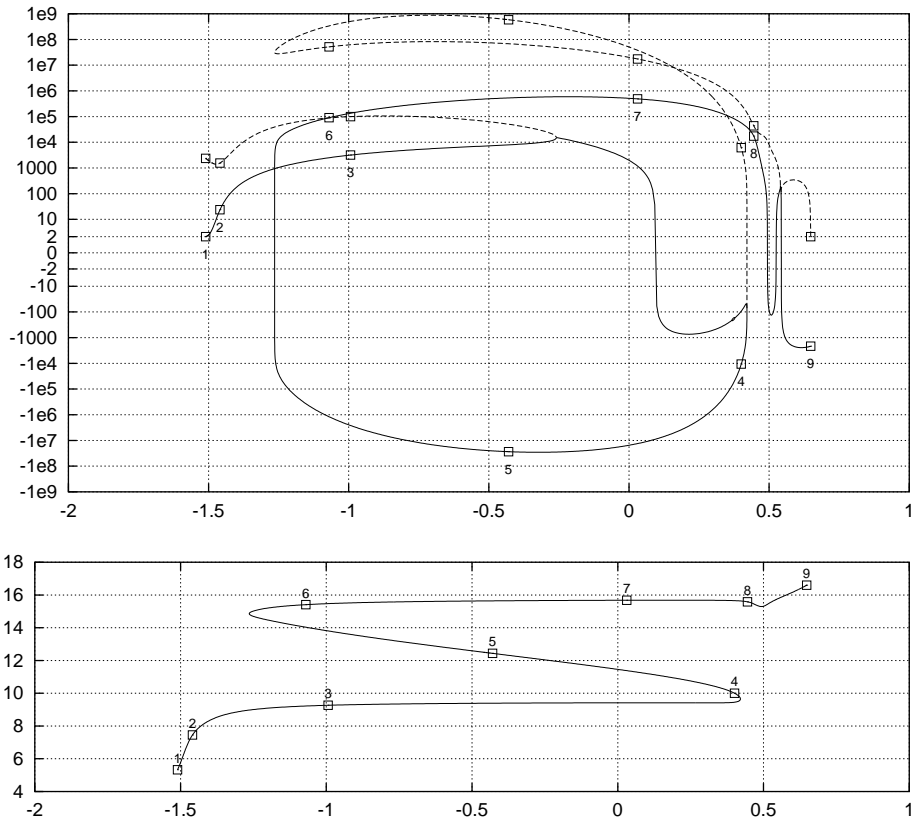


Figure D.19: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the hyperbolic period doubling bifurcation of the halo family of  $L_1$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figures D.20 and D.21.

We give the stability and characteristic curves of the elliptic bifurcated halo–type orbits by period duplication in Fig. D.22, as well as some sample orbits in Fig. D.23. This family ends in a collision orbit with the massive body.

In Fig. D.24 we give the stability parameters and characteristic curve of the hyperbolic bifurcated halo–type family around  $L_2$ . This family ends in a collision orbit with the small body. Some sample orbits are given in Fig. D.25.

As we did before, in the stability parameters curves of the elliptic bifurcated halo–type family around  $L_2$  of Fig. D.26, we have represented just the real part of the stability parameters in the complex unstable case. In this family we have not found a natural termination orbit. We give some sample orbits in figures D.27, D.29 and D.29.

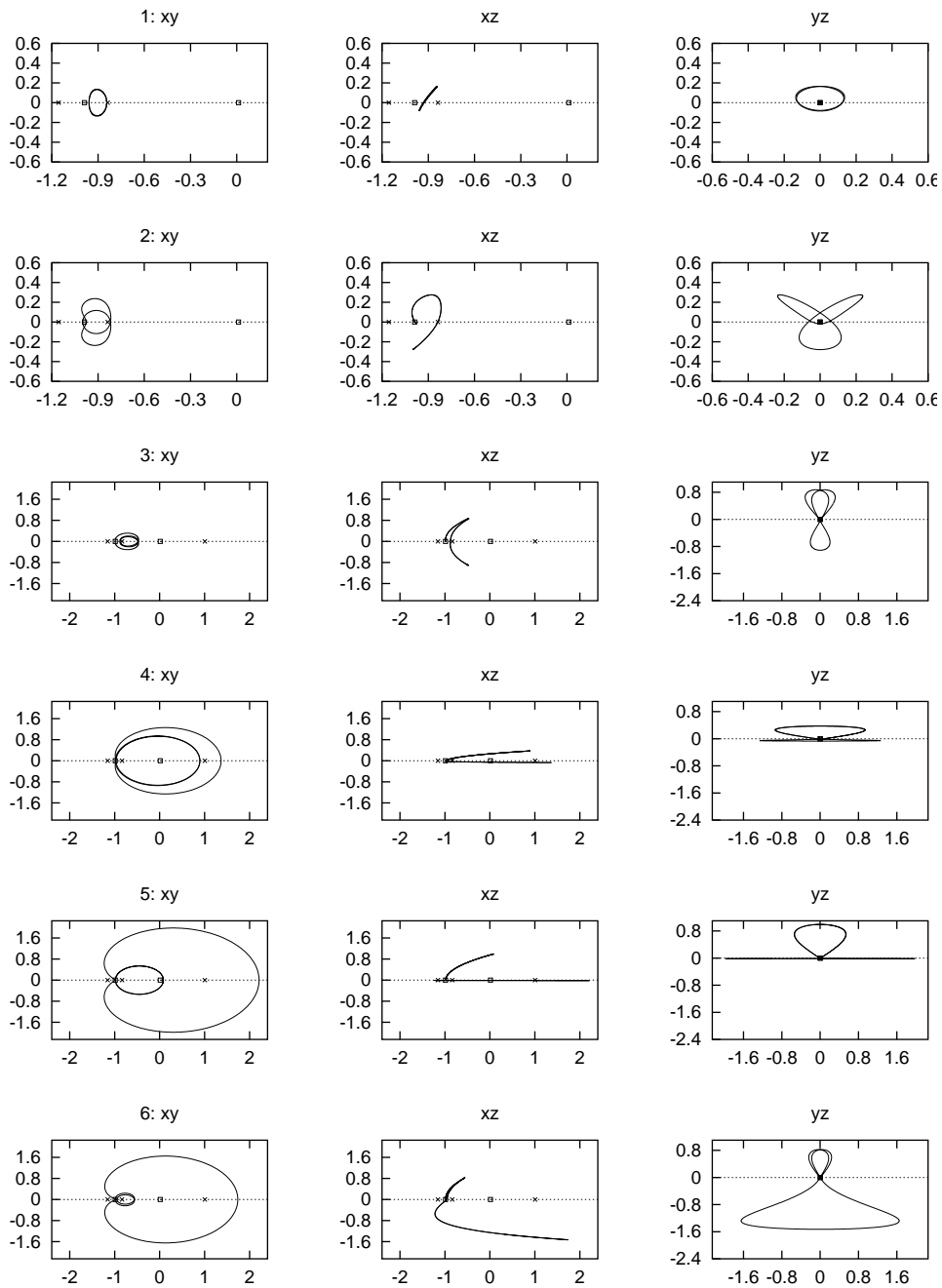


Figure D.20:  $xyz$ ,  $xy$ ,  $xz$  and  $yz$  projections of the orbits labeled 1, . . . , 6 in figure D.19.

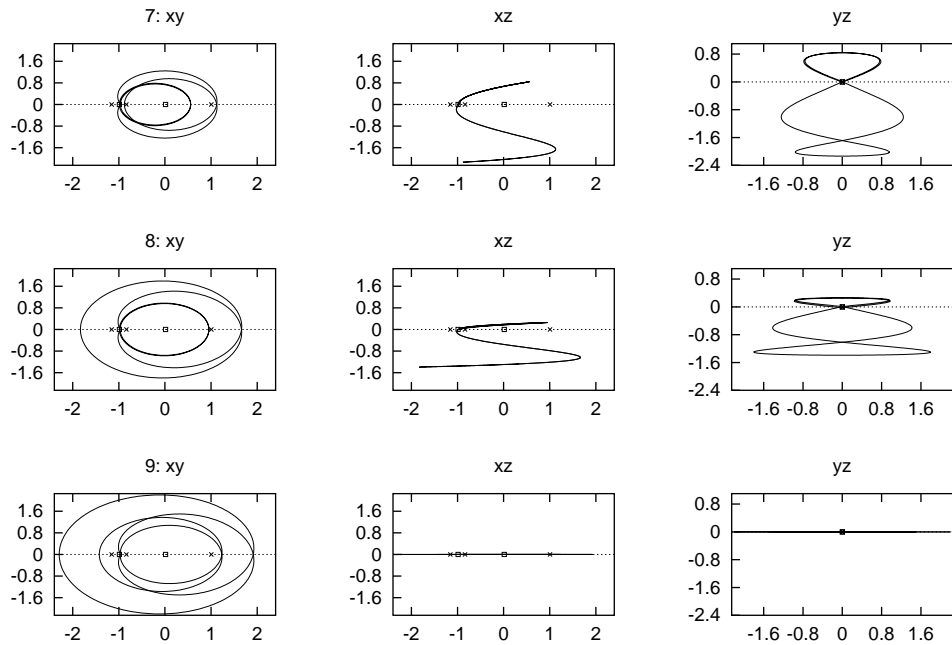


Figure D.21: Projections of the orbit labeled 7, . . . , 9 in figure D.19.

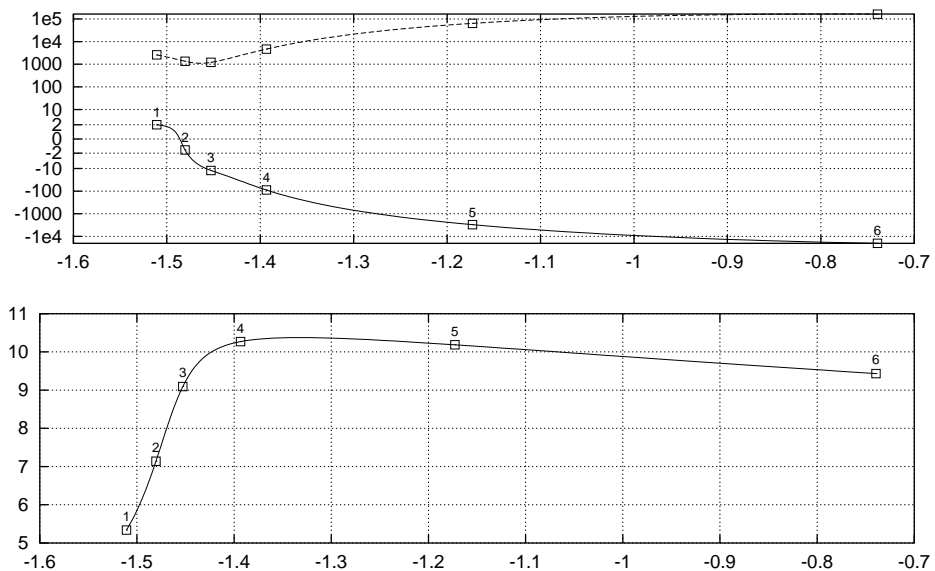


Figure D.22: Top: energy (horizontal axis) vs. stability parameters (vertical axis) of the elliptic period doubling bifurcation of the halo family of  $L_1$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.23.



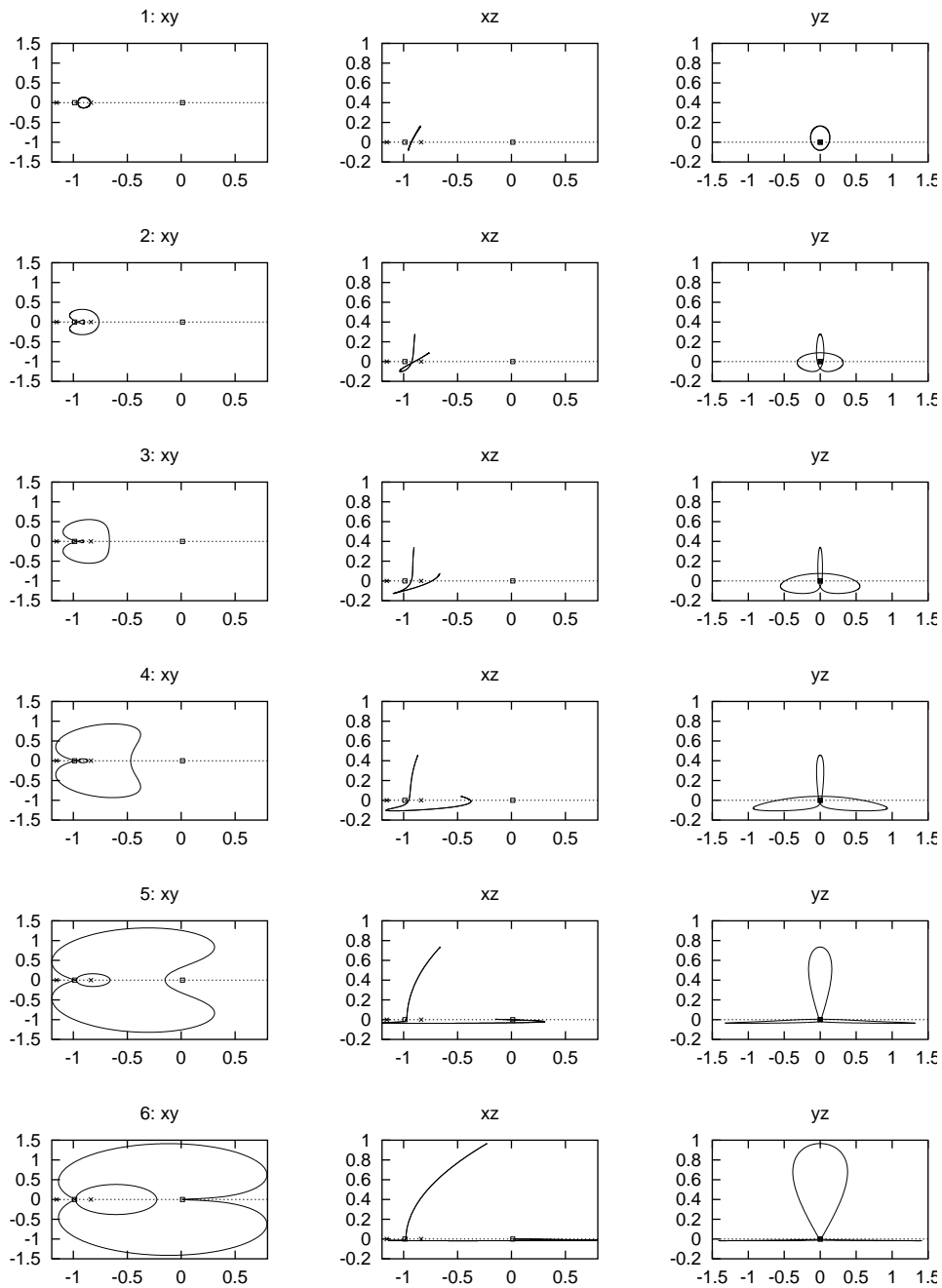


Figure D.23:  $xyz$ ,  $xy$ ,  $xz$  and  $yz$  projections of the orbits labeled 1, . . . , 6 in figure D.22.

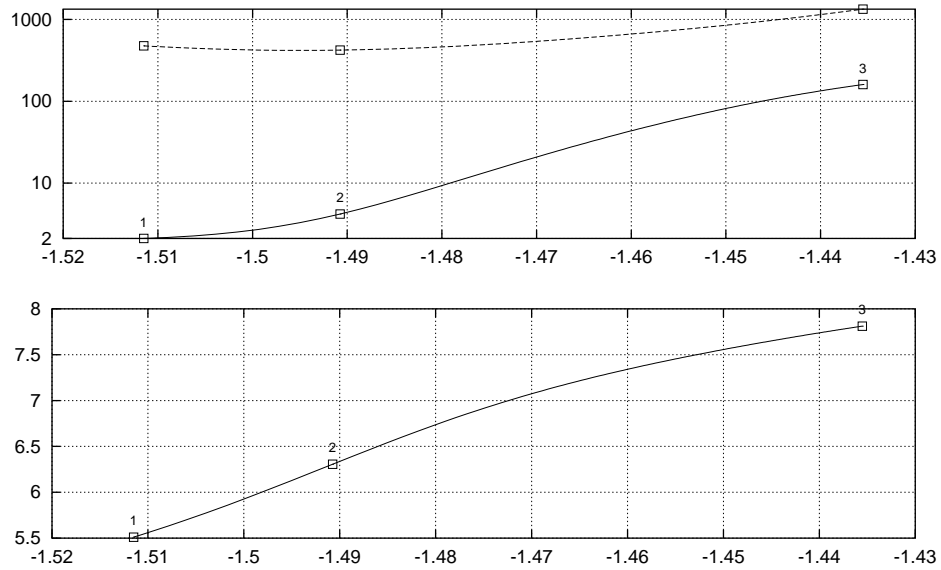


Figure D.24: Top: energy vs. stability parameters of the hyperbolic period doubling bifurcation of the  $L_2$  halo family. Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.25.

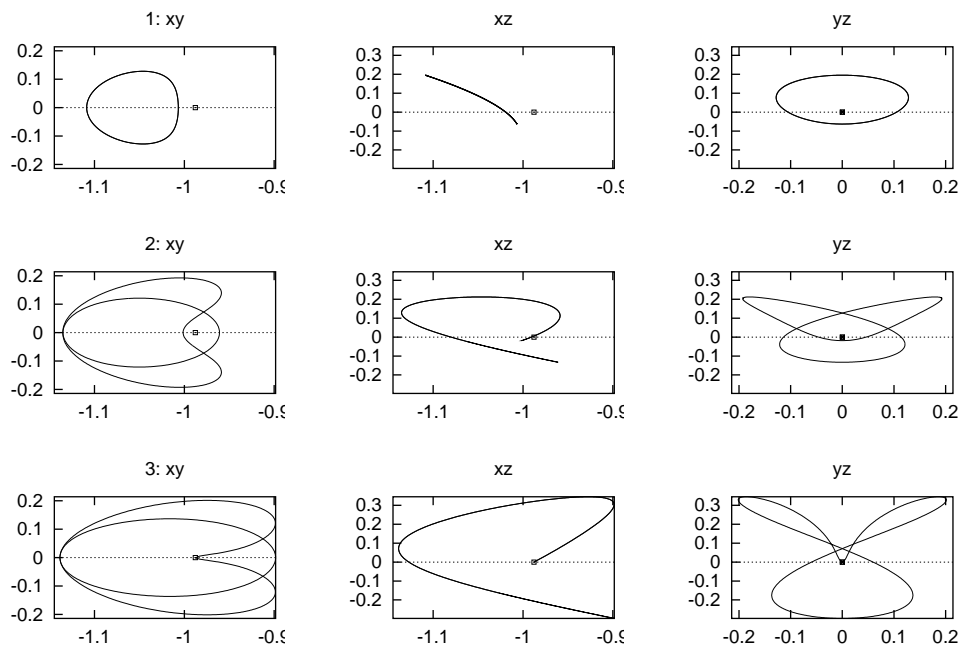


Figure D.25: Projections of the orbits labeled 1, ..., 3 in figure D.24.

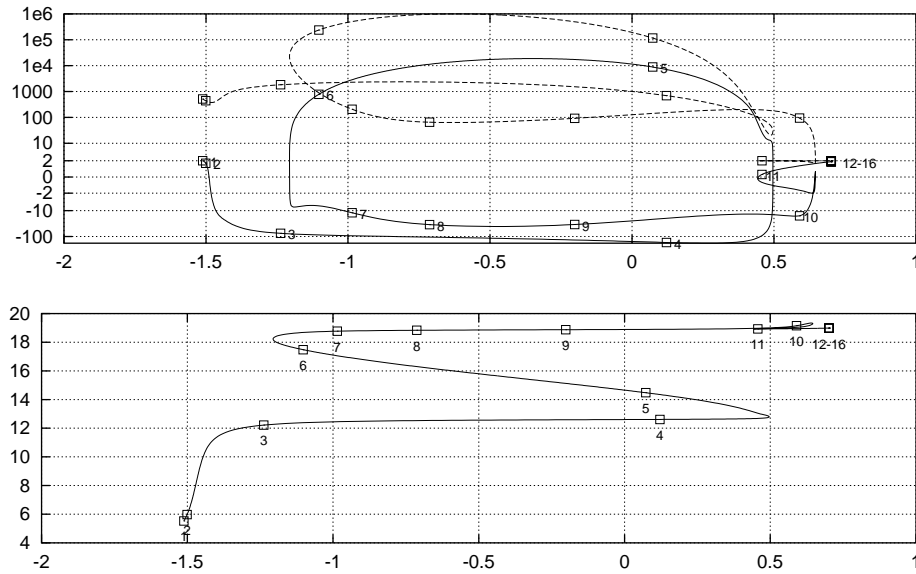


Figure D.26: Top: energy vs. stability parameters of the elliptic period doubling bifurcation of the  $L_2$  halo family. Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figures D.27, D.28, and D.29.

### D.2.3 Period-triplicated halo families

In Fig. D.30 we have represented the stability and characteristic curves of hyperbolic halo-type family bifurcated by period triPLICATION. It has been followed up to periods over 40 because its initial evolution is very similar to the hyperbolic family bifurcated by period duplication, and we expected to find a natural termination orbit like in that case. As before, when the stability parameters are in complex unstable case we have displayed only the real part. Even in this way, the stability diagram is very complicated. We have displayed some sample orbits in figures D.31 through D.35.

In figures D.36 and D.37 we represent the family of elliptic halo-type orbits bifurcated by period triPLICATION around  $L_1$ . It ends in a collision orbit with the massive body. Its evolution in shape is similar to the hyperbolic halo-type family bifurcated by period duplication, but with an additional loop.

In figures D.38 and D.39 we represent the hyperbolic halo-type family bifurcated by period triPLICATION around  $L_2$ . Its evolution is also similar to the analogous family bifurcated by period duplication, but with an additional loop.

In figures D.40 and D.41 we represent the elliptic halo-type family bifurcated by period triPLICATION around  $L_2$ . We have not identified a natural termination orbit for this family. Again, its initial evolution in shape is similar to the analogous family bifurcated by period duplication.

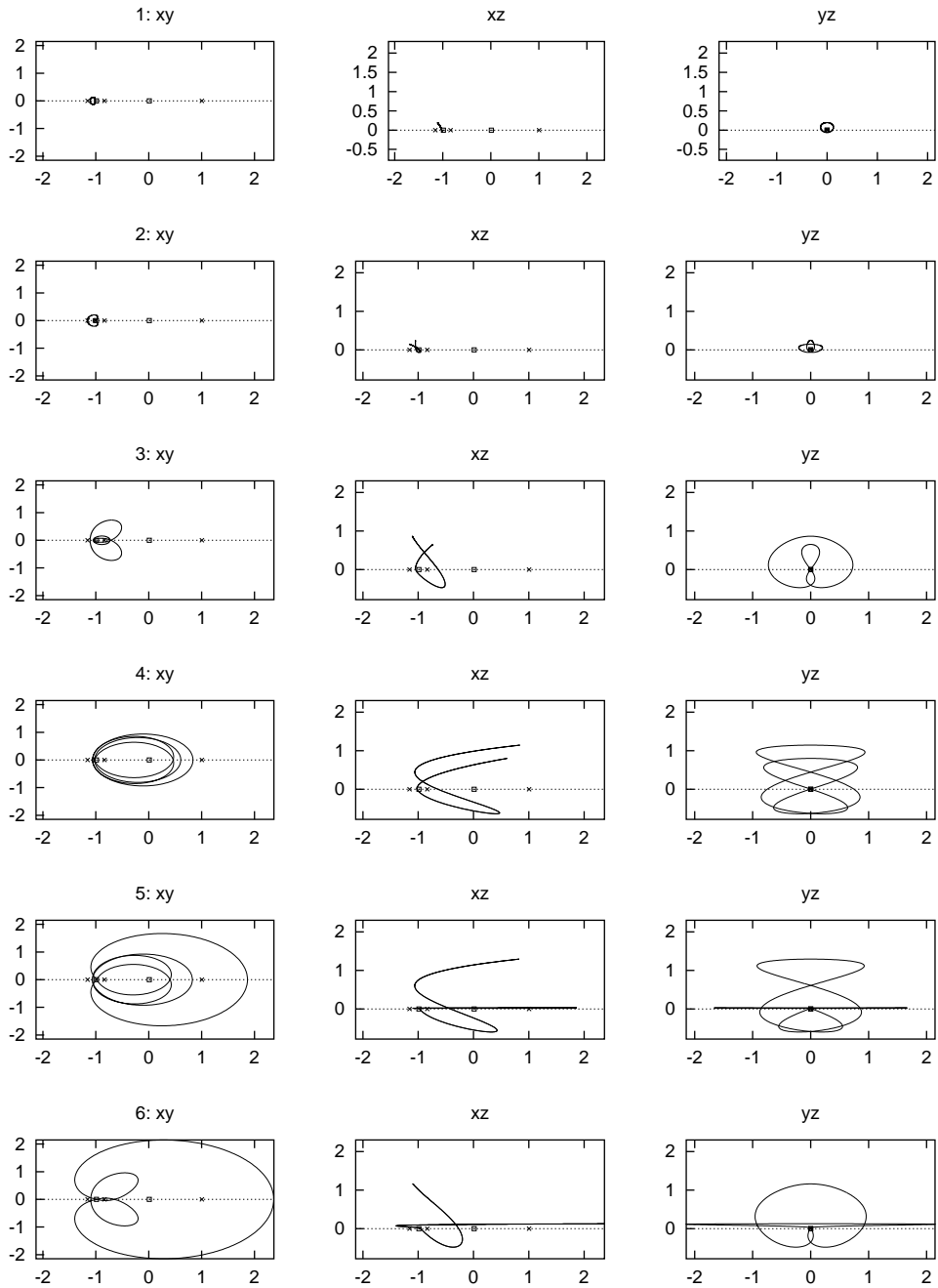


Figure D.27: Projections of the orbits labeled 1, ..., 6 in figure D.26.

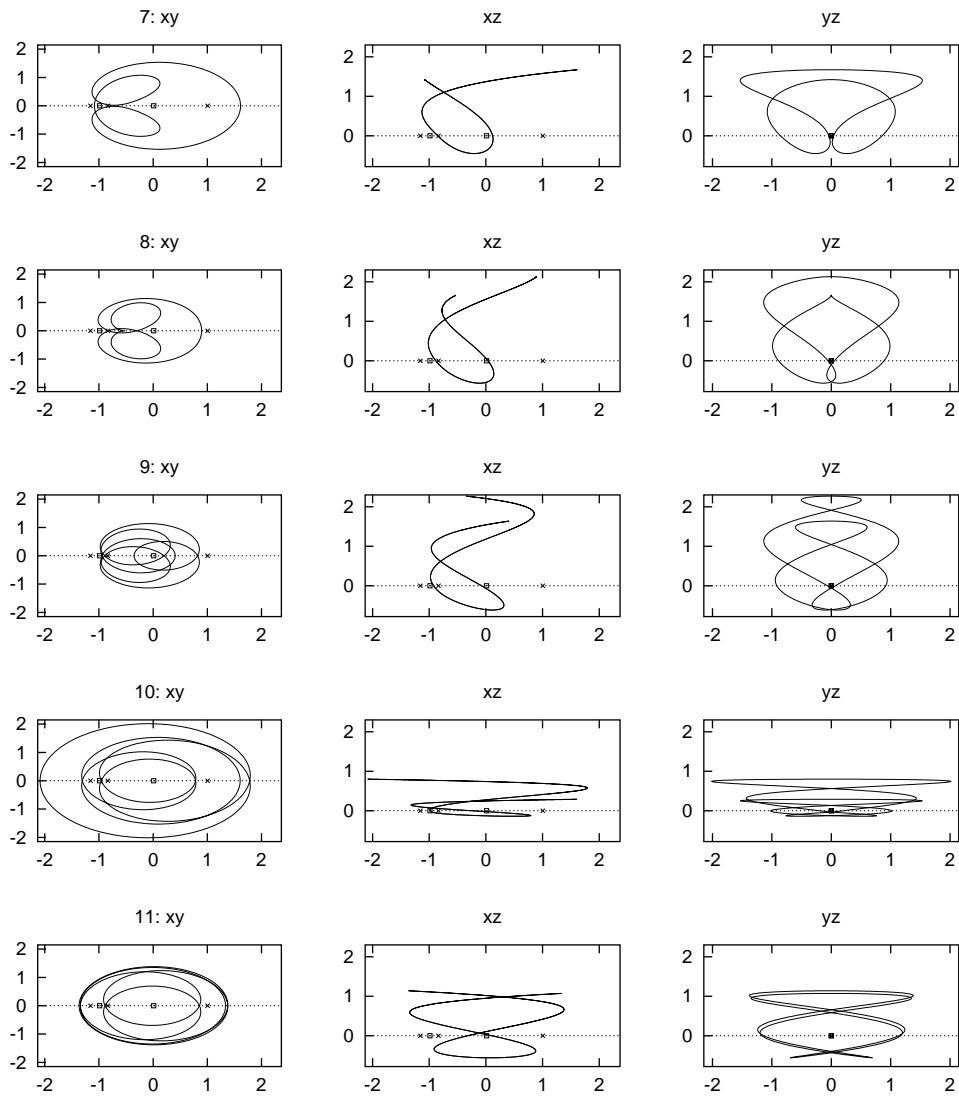


Figure D.28: Projections of the orbits labeled 7, . . . , 11 in figure D.26.

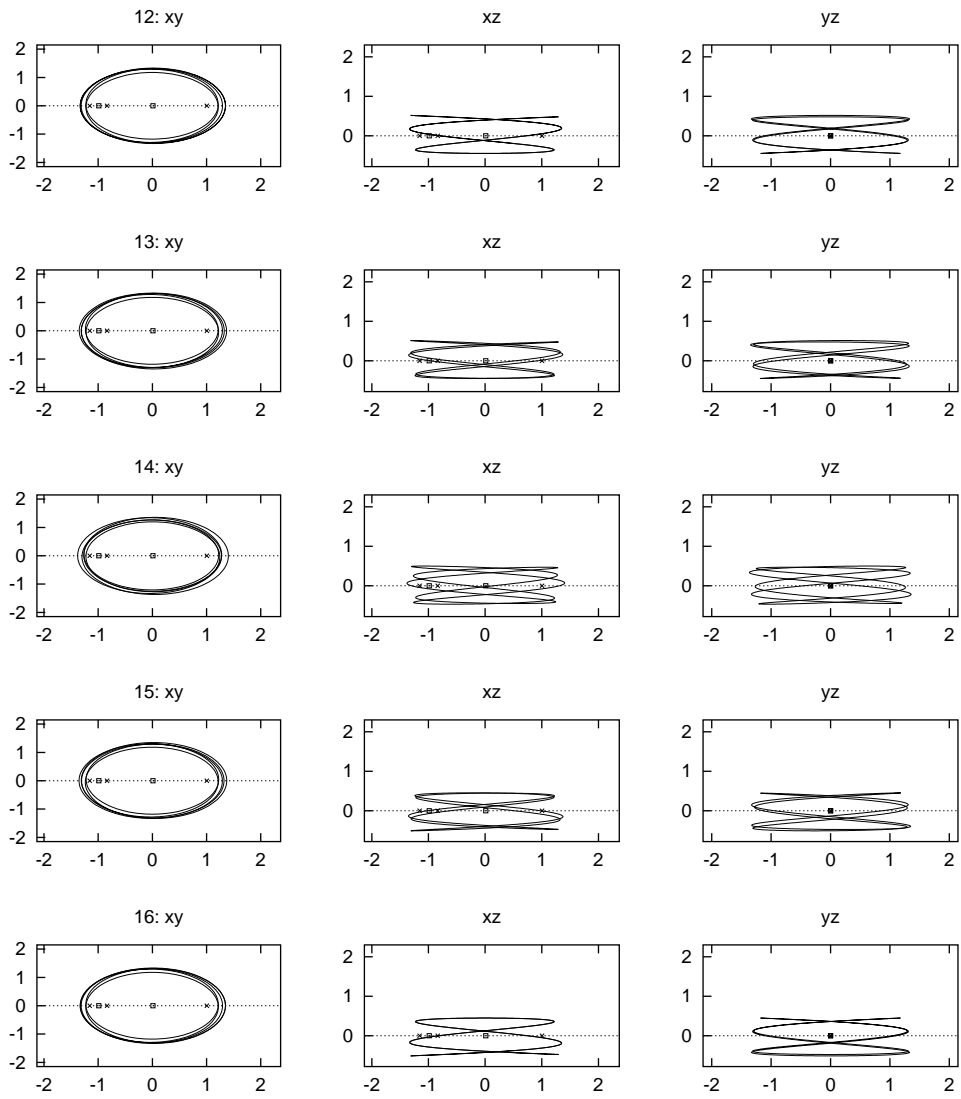


Figure D.29: Projections of the orbits labeled 12, ..., 16 in figure D.26.

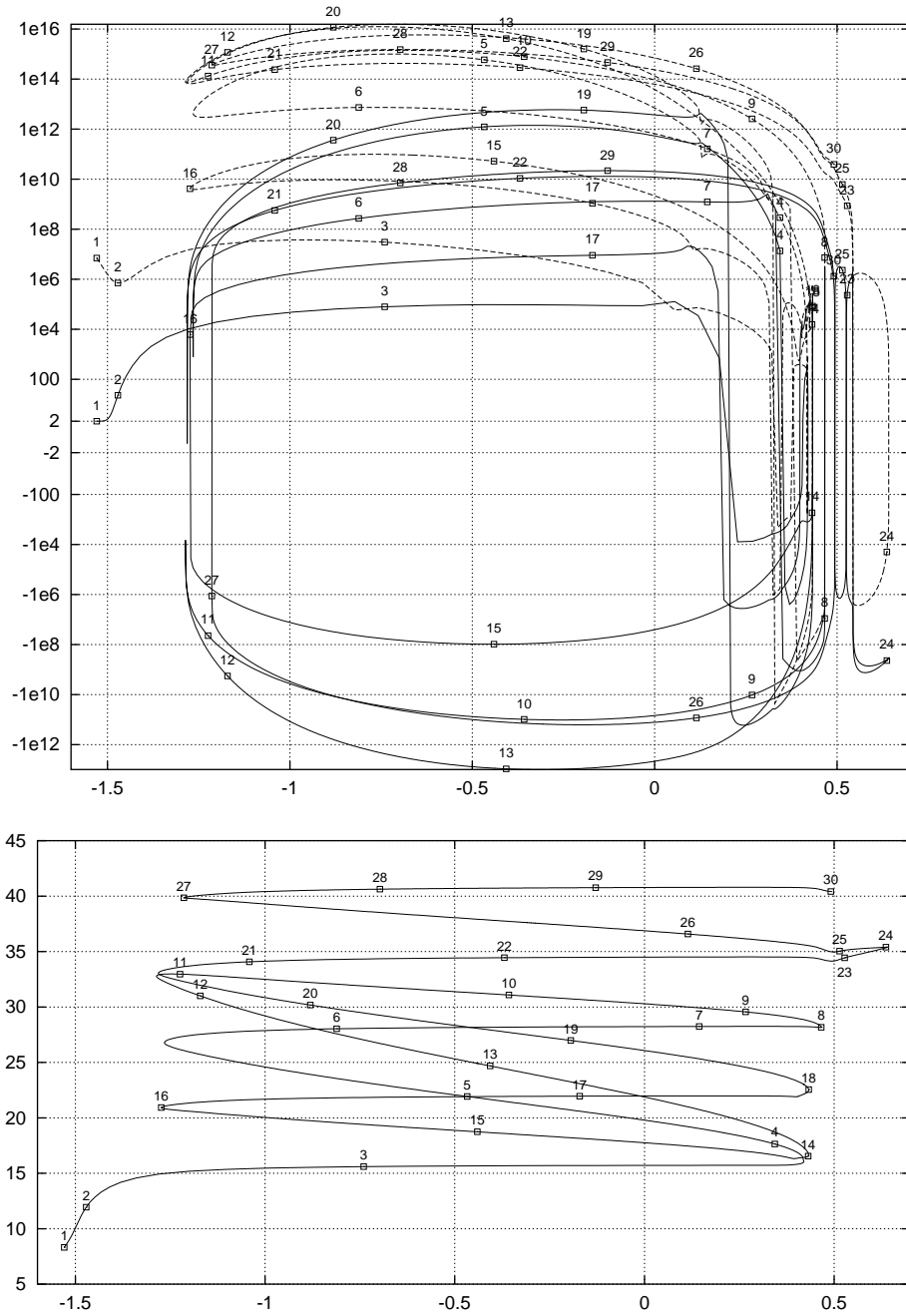


Figure D.30: Top: energy vs. stability parameters of the hyperbolic bifurcation by period tripling of the halo family of  $L_1$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.31 to D.35.

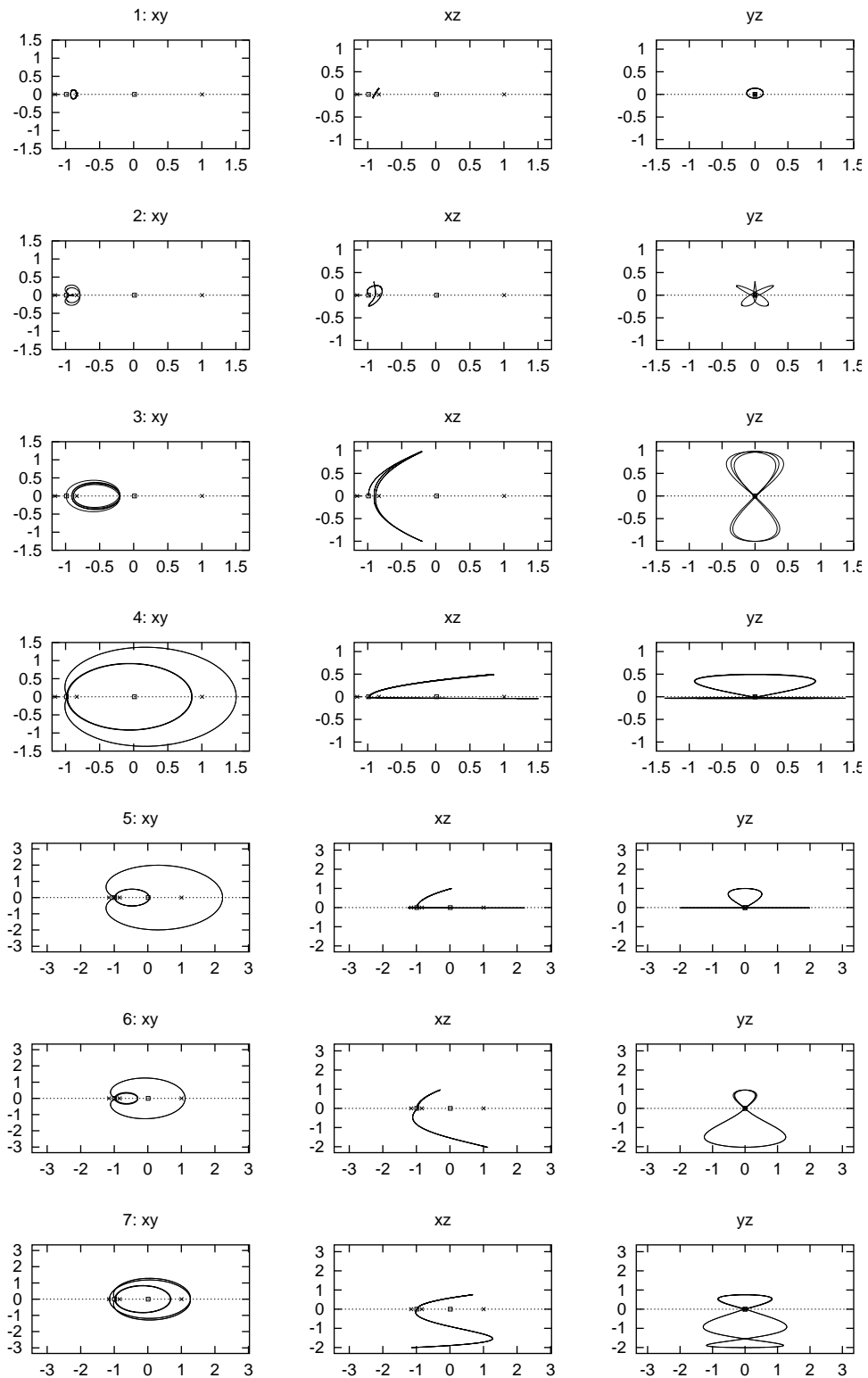


Figure D.31: Orbits labeled 1, ..., 7 in figure D.30. Each row of graphics shows the  $xy$  (left),  $xz$  (middle) and  $yz$  (right) projections of an orbit.



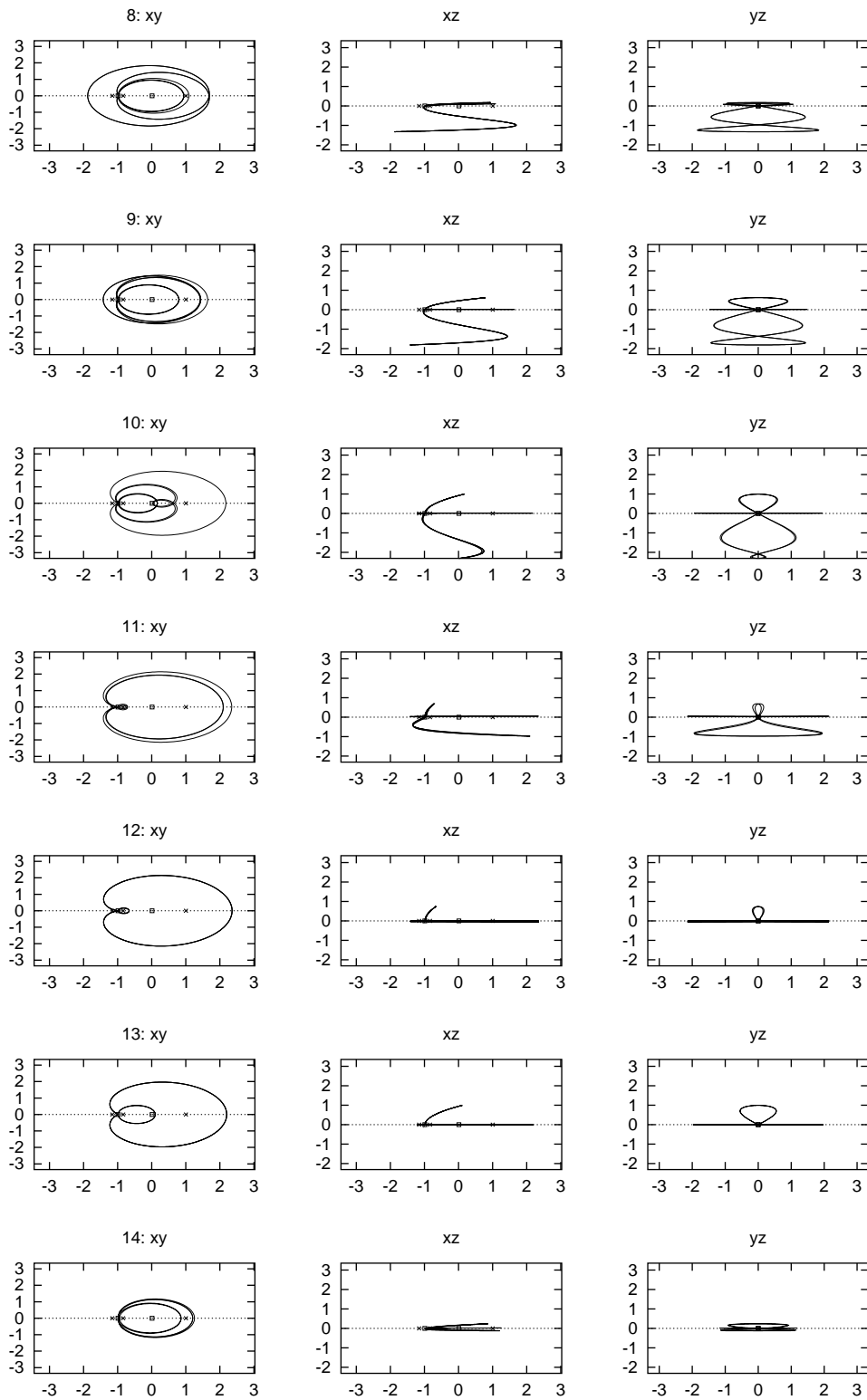


Figure D.32: Orbits labeled 8, . . . , 14 in figure D.30.

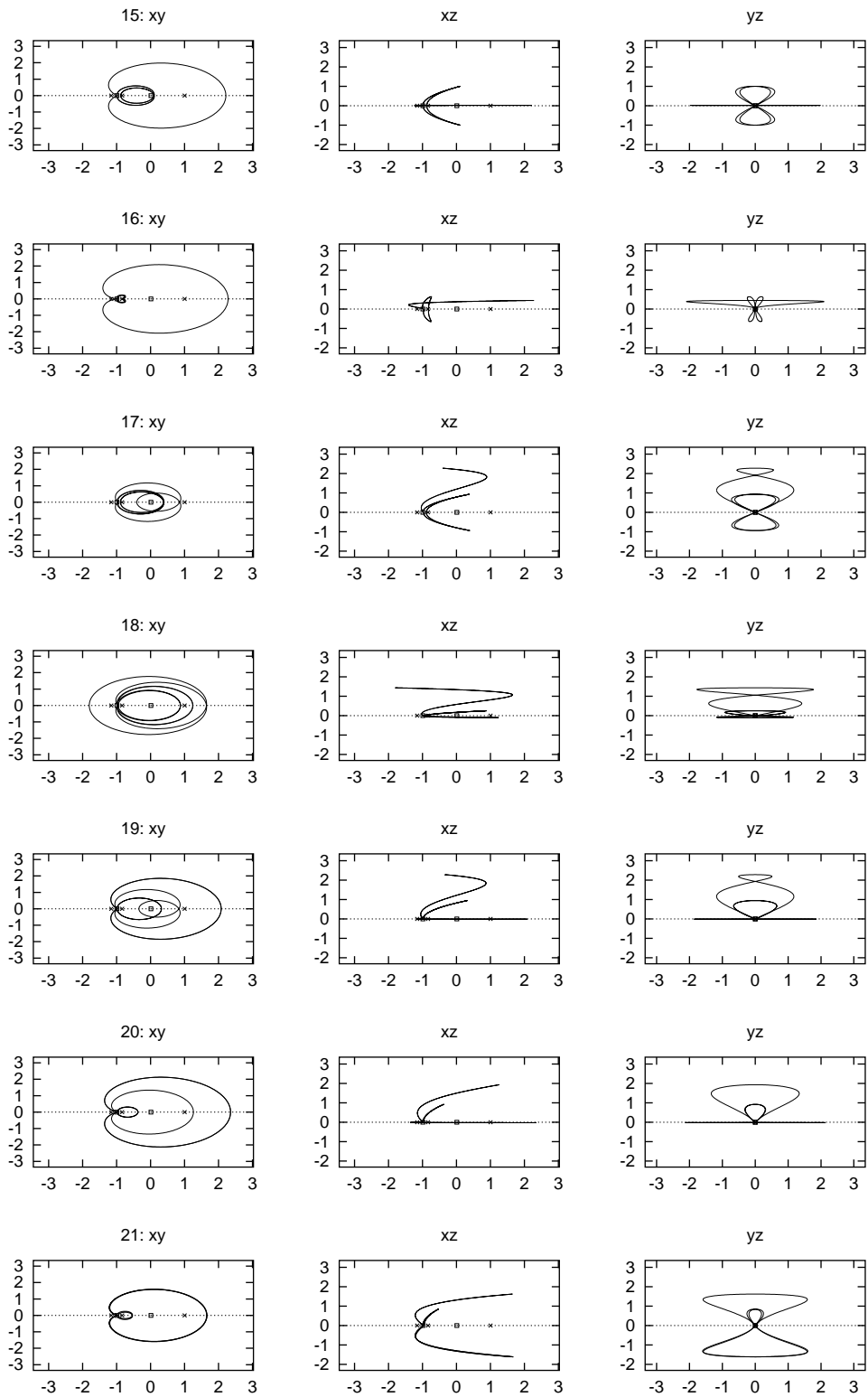


Figure D.33: Orbits labeled 15, . . . , 21 in figure D.30.

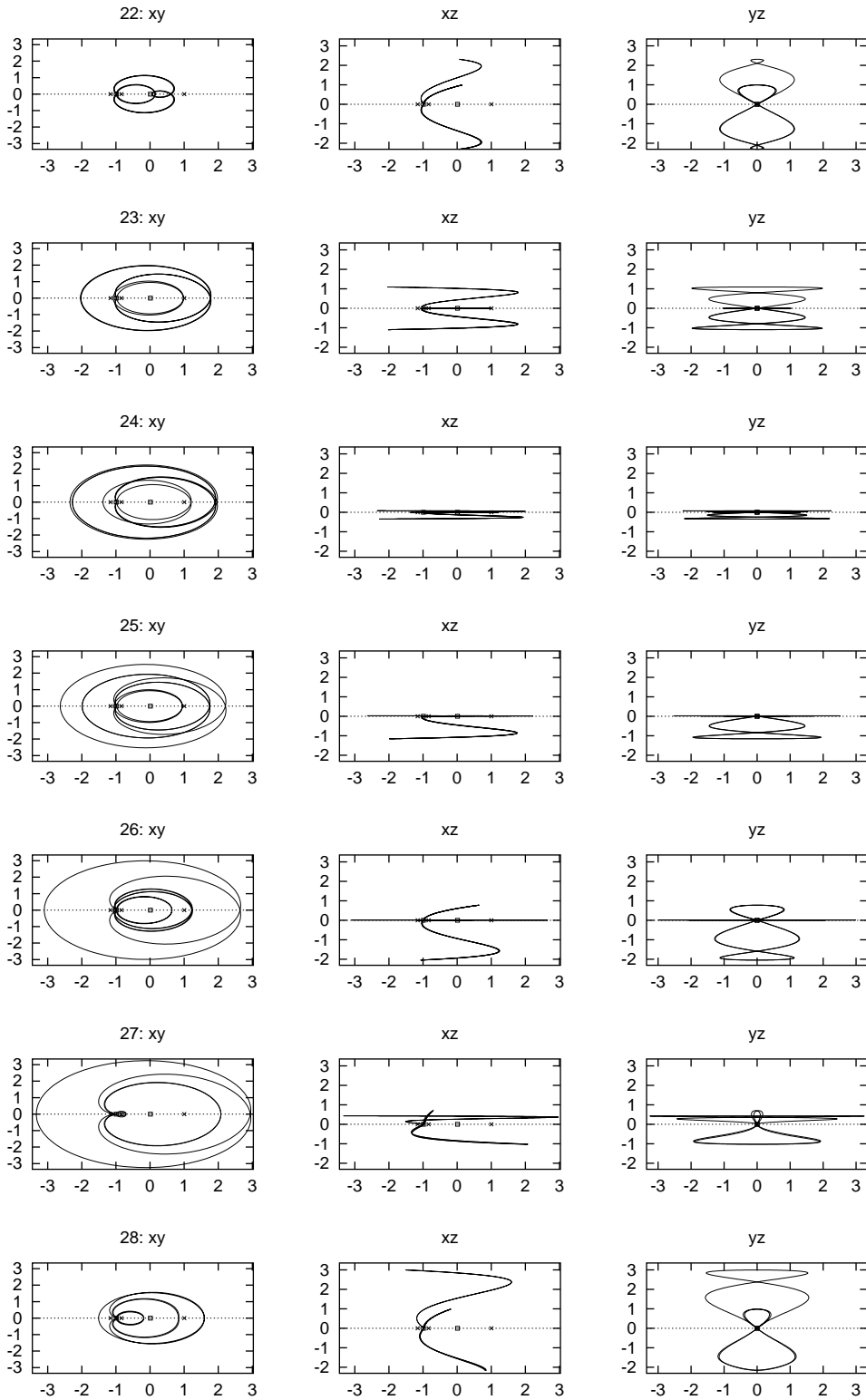


Figure D.34: Orbits labeled 22,...,28 in figure D.30.

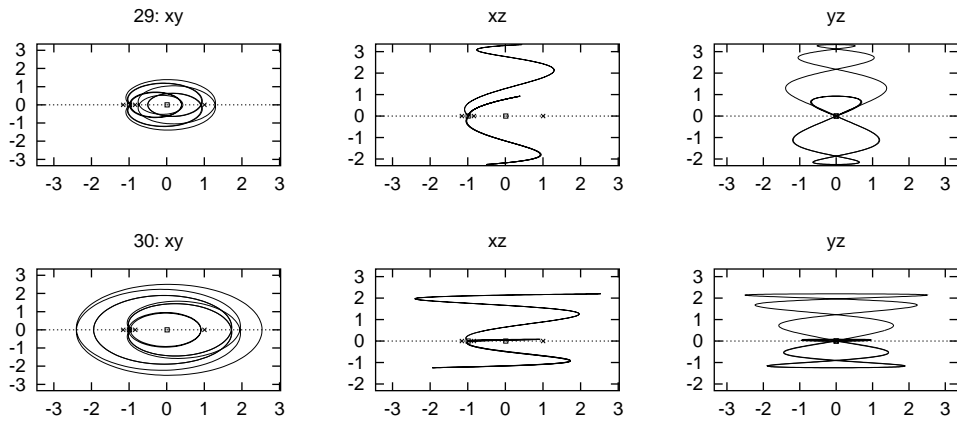
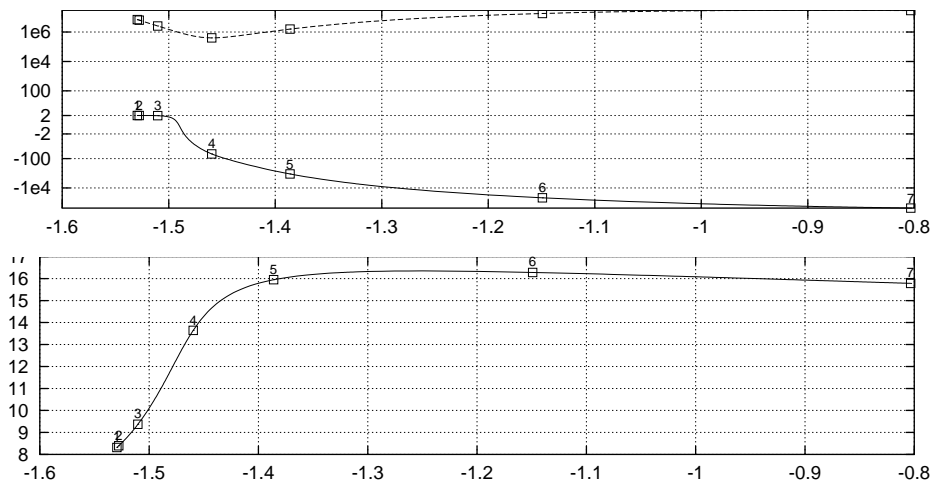


Figure D.35: Orbits labeled 29,30 in figure D.30.

Figure D.36: Top: energy vs. stability parameters of the elliptic bifurcation by period tripling of the halo family of  $L_1$ . Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in Fig. D.37.

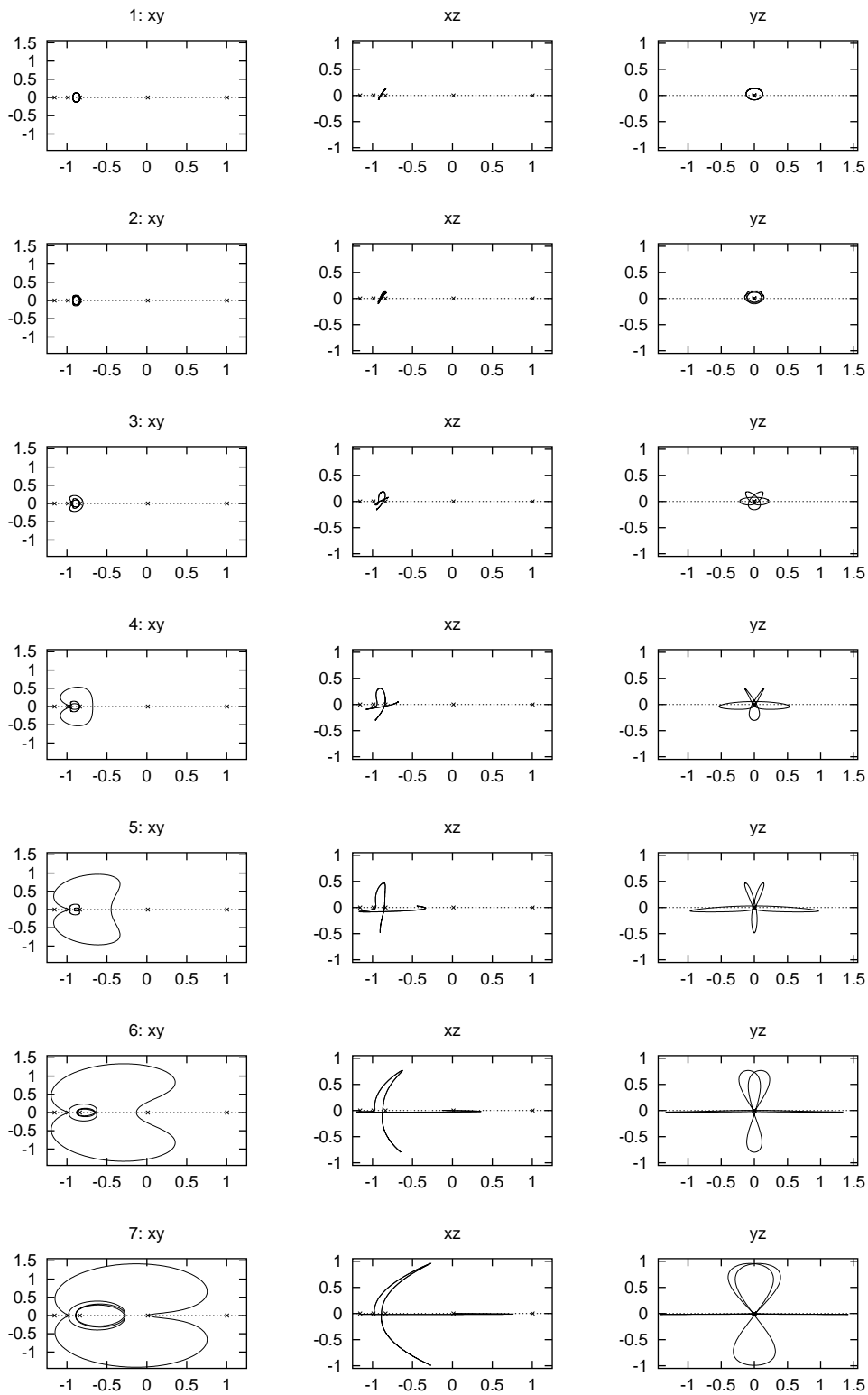


Figure D.37: Projections of the orbits labeled 1, . . . , 7 in figure D.36.

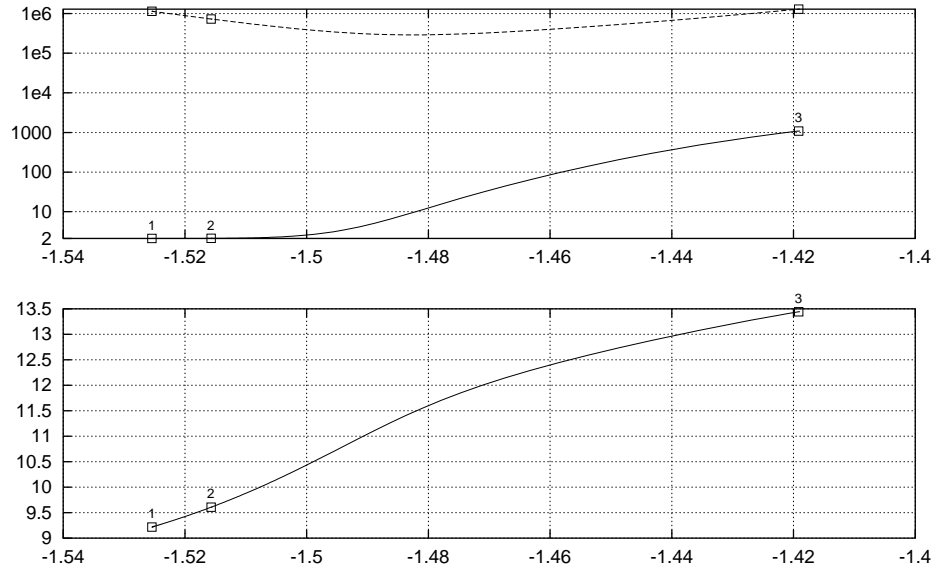


Figure D.38: Top: energy vs. stability parameters of the hyperbolic bifurcation by period tripling of the  $L_2$  halo family. Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.39.

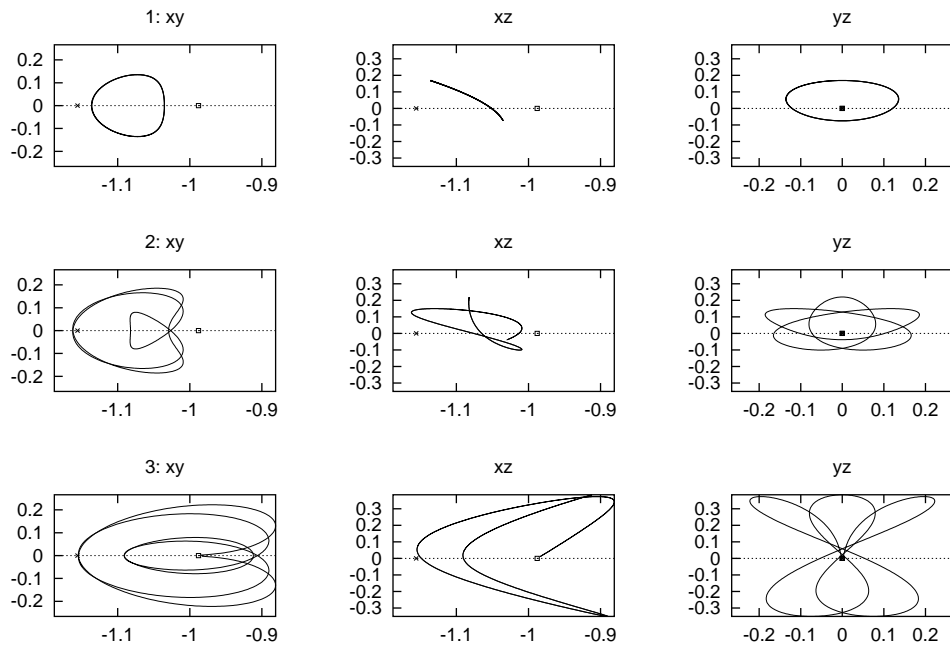


Figure D.39: Projections of the orbits labeled 1, ..., 3 in figure D.38.

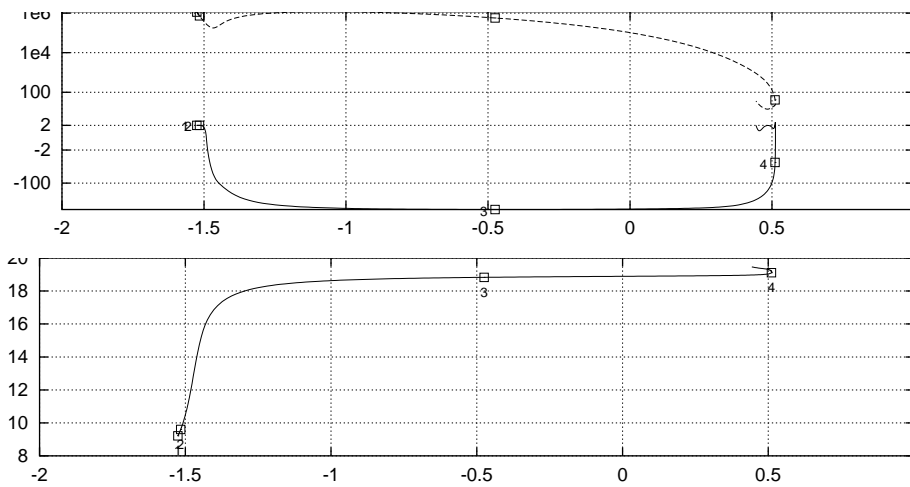


Figure D.40: Top: energy vs. stability parameters of the elliptic bifurcation by period tripling of the  $L_2$  halo family. Bottom: energy vs. period for the same family. The square points refer to the orbits displayed in figure D.41.

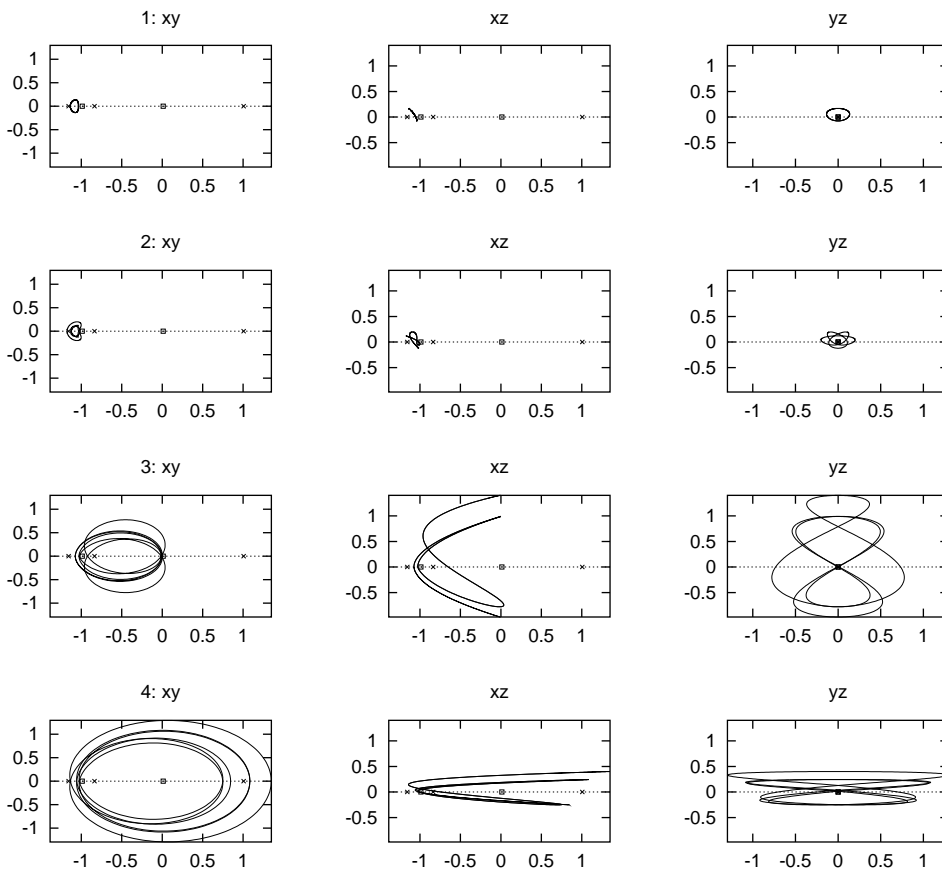


Figure D.41: Projections of the orbits labeled 1, . . . , 4 in figure D.40.





# Apèndix E

## Resum

La primera part d'aquest treball està dedicada al desenvolupament i estudi d'un procediment per al càlcul acurat de les freqüències d'una funció quasi periòdica, així com dels coeficients de Fourier associats, usant com a única entrada un mostreig equiespaiat de la funció analitzada sobre un interval de temps finit.

La primera tècnica per la determinació acurada de freqüències ha estat introduïda per J. Laskar ([18], [20], [19]). Està basada en la maximització de la fórmula que dona els coeficients de Fourier d'una funció respecte de l'harmònic, però considerant aquest últim com a quantitat real. Aquest procediment ha estat aplicat a l'estudi de la dinàmica a llarg termini del Sistema Solar ([18]), així com a l'estudi de models químics i d'acceleradors de partícules, a través del càlcul d'*aplicacions de freqüències* ([19]). Metodologia addicional ha estat introduïda en [12],[13],[10],[11]. En aquests treballs, la determinació de freqüències ha estat aplicada al desenvolupament de models semianalítics per al moviment en el Sistema Solar.

El nostre procediment pren la metodologia desenvolupada en [12],[13],[10],[11] com a punt de partida. Està basat en imposar igualtat entre la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de la funció analitzada i l'aproximació quasiperiòdica que s'està calculant. Hem obtingut estimacions de l'error que hem il·lustrat amb exemples numèrics. A més, en la línia dels treballs mencionats abans, hem aplicat el nostre procediment al desenvolupament de models simplificats de moviment en el Sistema Solar.

La segona part d'aquest treball està dedicada a l'estudi de la dinàmica en l'entorn dels punts d'equilibri colineals del Problema Restringit de Tres Cossos (RTBP) tridimensional, per al paràmetre de masses Terra–Lluna.

El primer estudi sistemàtic d'aquest veïnatge ha estat realitzat a [10] i [16], usant com a eina la reducció a la varietat central dels punts d'equilibri colineals. Aquest és un procediment semianalític, en el qual la regió que pot ser explorada es veu limitada per la convergència de les expansions obtingudes. La mateixa metodologia ha estat aplicada a l'estudi dels punts d'equilibri colineals d'un model per al sistema Terra–Lluna, anomenat Problema Quasibicircular ([3]). En aquest darrer estudi, les restriccions de convergència encara són més severes.

En aquest treball, continuem les famílies d'òrbites periòdiques i tors invariants bidimensionals de les varietats centrals dels tres punts de libració colineals. D'aquesta manera, podem estendre l'anàlisi de l'espai de fase fet a [10] i [16] a un rang més gran de valors

de l'energia, que ara inclou diverses bifurcacions i el punt d'equilibri  $L_3$ . La metodologia usada per al càlcul de tors invariants es basa en [7], amb algunes modificacions per a tenir en compte excitacions variables i paràmetres addicionals necessaris per la nostra exploració. Hem seguit estratègies de computació paral·lela degut als grans requeriments de càlcul. Els càlculs s'han dut a terme a HIDRA, un dels Beowulf clusters del grup de Sistemes Dinàmics de Barcelona.

## E.1 Anàlisi de Fourier de funcions quasiperiòdiques

Donats  $N$  valors  $\{f(t_l)\}_{l=0}^{N-1}$ ,  $t_l = l\frac{T}{N} \in [0, T]$  de certa funció  $f(t)$ , que suposem quasiperiòdica, volem trobar una aproximació trigonomètrica polinomial amb un nombre de freqüències fixat,

$$Q_f(t) = A_0^c + \sum_{l=1}^{N_f} (A_l^c \cos(\frac{2\pi\nu_l t}{T}) + A_l^s \sin(\frac{2\pi\nu_l t}{T})).$$

En aquesta secció descriurem el nostre procediment d'anàlisi de Fourier per a trobar les freqüències  $\{\nu_l\}_{l=1}^{N_f}$  i les amplituds  $\{A_l^c\}_{l=0}^{N_f}$ ,  $\{A_l^s\}_{l=1}^{N_f}$ . Després d'introduir notació, descriurem les tres etapes en les que es divideix: primera aproximació de freqüències, càlcul de les amplituds corresponents i refinament conjunt de freqüències i amplituds. Finalitzarem la secció amb la descripció de l'algorisme a dur a terme.

### E.1.1 Notacions per la DFT

Denotarem els coeficients de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de  $N$  punts de  $f$  a l'interval  $[0, T]$  per

$$\begin{aligned} c_{f,T,N}(j) &= \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \cos(2\pi \frac{j}{N} l), \quad j = 0, \dots, N/2, \\ s_{f,T,N}(j) &= \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \sin(2\pi \frac{j}{N} l), \quad j = 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned}$$

De vegades treballarem amb la forma complexa de la DFT, que notarem com

$$F_{f,T,N}(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-2\pi i \frac{j}{N} t_l}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

De cara a reduir *leakage*, treballarem amb les versions filtrades de les anteriors transformades, que denotarem com

$$\begin{aligned} F_{f,T,N}^{n_h}(j) &= F_{H^{n_h} f, T, N}(j), \\ c_{f,T,N}^{n_h}(j) &= c_{H^{n_h} f, T, N}(j), \\ s_{f,T,N}^{n_h}(j) &= s_{H^{n_h} f, T, N}(j). \end{aligned}$$

on  $H_T^{n_h}$  són les *funcions de Hanning* d'ordre  $n_h$ ,

$$H_T^{n_h}(t) = q_{n_h} \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{1}{T} t \right) \right)^{n_h},$$

amb

$$q_{n_h} = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{1}{T} t \right) \right)^{n_h} dt \right]^{-1} = \frac{n_h!}{(2n_h - 1)!}.$$

### E.1.2 Primera aproximació de freqüències

Consisteix a cercar màxims locals del mòdul de la DFT filtrada,  $|F_{f,T,N}^{n_h}(j)|$ , de la funció analitzada, suposant que  $j$  pren valors reals. La maximització es duu a terme emprant el mètode de Newton. Es prenen els “pics” de la DFT com a aproximacions inicials, és a dir, donat  $j_0$  tal que  $|F_{f,T,N}^{n_h}(j_0 - 1)| < |F_{f,T,N}^{n_h}(j_0)| < |F_{f,T,N}^{n_h}(j_0 + 1)|$ , prenem  $j_0$  com a aproximació inicial.

### E.1.3 Càlcul de les amplituds suposant freqüències conegudes

Un cop coneixem les freqüències  $\{\nu_l\}_{l=1}^{N_f}$ , trobem les amplituds  $\{A_l^c\}_{l=0}^{N_f}$ ,  $\{A_l^s\}_{l=1}^{N_f}$  imposant que la DFT de l'aproximació quasiperiòdica actual  $Q_f$  coincideixi amb la DFT de les mostres  $\{f(t_l)\}_{l=0}^{N-1}$  sobre harmònics adequats. Amb la finalitat d'obtenir un sistema quadrat per a les  $1 + 2N_f$  incògnites, seleccionem valors per als harmònics  $j$  de manera que obtenim

$$\begin{aligned} A_0^c + \sum_{l=1}^{N_f} \left( A_l^c \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0) + A_l^s \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0) \right) &= c_{f,T,N}^{n_h}(0), \\ A_0^c c_1^{n_h}(j_i) + \sum_{l=1}^{N_f} \left( A_l^c \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) + A_l^s \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) \right) &= c_{f,T,N}^{n_h}(j_i), \\ \sum_{l=1}^{N_f} \left( A_l^c \bar{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) + A_l^s \tilde{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) \right) &= s_{f,T,N}^{n_h}(j_i), \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} c_1^{n_h}(j) &= c_{1,T,N}^{n_h}(j), \\ \bar{c}_{\nu,N}^{n_h}(j) &= c_{\cos(\frac{2\pi\nu}{T}),T,N}^{n_h}(j), & \bar{s}_{\nu,N}^{n_h}(j) &= s_{\cos(\frac{2\pi\nu}{T}),T,N}^{n_h}(j), \\ \tilde{c}_{\nu,N}^{n_h}(j) &= c_{\sin(\frac{2\pi\nu}{T}),T,N}^{n_h}(j), & \tilde{s}_{\nu,N}^{n_h}(j) &= s_{\sin(\frac{2\pi\nu}{T}),T,N}^{n_h}(j), \end{aligned}$$

i els  $j_i$  s'escullen com els enters més propers a  $\nu_i$ , és a dir, tals que  $|j_i - \nu_i| \leq 1/2$  per  $i = 1 \div N_f$ .

### E.1.4 Refinament conjunt de freqüències i amplituds

Donades aproximacions de freqüències i amplituds, les podem refinar simultàniament resolent un sistema d'equacions similar a l'emprat a la secció anterior. Ara necessitem

una condició addicional per cada freqüència, donat que les freqüències són desconegudes. Per tant, resollem iterativament el sistema

$$\begin{aligned}
A_0^c + \sum_{l=1}^{N_f} (A_l^c \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0) + A_l^s \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0)) &= c_{f, T, N}^{n_h}(0), \\
A_0^c c_1^{n_h}(j_i) + \sum_{l=1}^{N_f} (A_l^c \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) + A_l^s \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i)) &= c_{f, T, N}^{n_h}(j_i), \\
\sum_{l=1}^{N_f} (A_l^c \bar{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) + A_l^s \tilde{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i)) &= s_{f, T, N}^{n_h}(j_i), \\
A_0^c c s_1^{n_h}(j_i^+) + \sum_{l=1}^{N_f} (A_l^c \bar{c s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i^+) + A_l^s \tilde{c s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i^+)) &= c s_{f, T, N}^{n_h}(j_i^+),
\end{aligned} \tag{E.1}$$

per  $\{\nu_l\}_{l=1}^{N_f}$ ,  $\{A_l^c\}_{l=0}^{N_f}$ ,  $\{A_l^s\}_{l=1}^{N_f}$ , on  $j_i$  i  $j_i^+$  es defineixen com

$$\begin{aligned}
j_i &= [\nu_i], \quad j_i^+ = [\nu_i] + 1 \quad \text{si } \nu_i - [\nu_i] \leq 1/2, \\
j_i &= [\nu_i] + 1, \quad j_i^+ = [\nu_i] \quad \text{altrament,}
\end{aligned}$$

per  $i = 1 \div N_f$ . En la darrera equació de (E.1),  $cs$  denota  $c$  o  $s$ ; el criteri per escollir un o l'altre es dóna més endavant.

Si  $j_i \geq 1 + n_h$  per  $i = 1 \div N_f$ , la diferencial de (E.1) respecte de les incògnites

$$\left( A_0^c \quad \nu_1 \quad A_1^c \quad A_1^s \quad \dots \quad \nu_{N_f} \quad A_{N_f}^c \quad A_{N_f}^s \right),$$

que es necessita per a poder aplicar el mètode de Newton, es pot escriure com

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \nu_1 & \dots & \nu_{N_f} \\ 0 & B_1^1 & \dots & B_{N_f}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & B_1^{N_f} & \dots & B_{N_f}^{N_f} \end{pmatrix},$$

essent

$$\begin{aligned}
\nu_l &= \left( A_l^c \partial \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0) + A_l^s \partial \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0) \quad \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0) \quad \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(0) \right), \\
B_{i, l} &= \begin{pmatrix} A_l^c \partial \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) + A_l^s \partial \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) & \bar{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) & \tilde{c}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) \\ A_l^c \partial \bar{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) + A_l^s \partial \tilde{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) & \bar{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) & \tilde{s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i) \\ A_l^c \partial \bar{c s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i^+) + A_l^s \partial \tilde{c s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i^+) & \bar{c s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i^+) & \tilde{c s}_{\nu_l, N}^{n_h}(j_i^+) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

on  $\partial$  denota derivada respecte  $\nu$ .

Per cada bloc  $B_{i, l}$ , el criteri emprat per escollir  $cs$  entre  $c$  i  $s$  és prendre el que minimitza  $\|B_{i, l}^{-1}\|_\infty$ . Això assegura que el sistema (E.1) és no singular i, sota hipòtesis adequades, ben condicionat.

### E.1.5 Algorisme

A partir de les mostres  $\{f(t_l)\}_{l=0}^{N-1}$  d'una funció de la que es coneix comportament quasiperiòdic, portem a terme la seva anàlisi de Fourier aplicant els tres passos descrits anteriorment. De cara a evitar que algunes freqüències “amaguin” freqüències properes d'amplitud inferior, convé procedir de manera iterativa, de manera que a cada iteració només considerem les freqüències amb amplitud per sobre d'una determinada tolerància. Concretament, l'algorisme que usarem és el següent:

**Algorisme E.1.1** *Donada una amplitud mínima  $b_{\min}$  per a les freqüències per calcular, i un nombre d'iteracions  $n$  per al procediment, defineixi's*

$$p_{\max} = \max_{j=1 \div \frac{N}{2}} p_{f,T,N}^{n_h}(j), \quad db = (b_{\min}/p_{\max})^{1/n},$$

*i*

$$Q_f(t) = 0, \quad b = p_{\max}, \quad N_f = 0.$$

$Q_f(t)$  serà l'aproximació quasiperiòdica actual,  $b$  l'amplitud mínima de les freqüències per detectar en la iteració actual i  $N_f$  el nombre de freqüències que es calcularan. Aleshores, mentre  $b > b_{\min}$ ,

1. Assigni's  $b \leftarrow b \cdot db$ . Sigui  $k_{N_f+1}, \dots, k_{N_f+m}$  els pics del mòdul de la DFT de  $f - Q_f$  amb amplitud mínima  $b$ , o sigui,  $\{k_{N_f+1}, \dots, k_{N_f+m}\} = \{j \in \mathbb{Z} : n_h + 2 \leq j \leq \frac{N}{2} - n_h - 2, p_{f-Q_f,T,N}^{n_h}(j) \geq b, p_{f-Q_f,T,N}^{n_h}(j-1) \leq p_{f-Q_f,T,N}^{n_h}(j) \leq p_{f-Q_f,T,N}^{n_h}(j+1)\}$ . Per cada  $k_l$ , apliqui's el procediment de la Secció E.1.2 per obtenir  $\nu_l$ .
2. Resolgui's (E.1.3), d'acord amb la Secció E.1.3, per obtenir  $\{A_l^c\}_{l=0}^{N_f+m}, \{A_l^s\}_{l=1}^{N_f+m}$  a partir de  $\{\nu_l\}_{l=1}^{N_f+m}$ .
3. Resolgui's (E.1), d'acord amb la Secció E.1.4 per a refinar iterativament  $\{\nu_l\}_{l=1}^{N_f+m}, \{A_l^c\}_{l=0}^{N_f+m}, \{A_l^s\}_{l=1}^{N_f+m}$ .
4. Actualitzi's el nombre de freqüències i l'aproximació quasiperiòdica actual

$$N_f \leftarrow N_f + m, \quad Q_f(t) = A_0^c + \sum_{l=1}^{N_f} (A_l^c \cos(\frac{2\pi\nu_l t}{T}) + A_l^s \sin(\frac{2\pi\nu_l t}{T}))$$

*i vagi's al pas 1.*

Aturem l'algorisme si

- $N_f$  atansa un nombre màxim de freqüències donat, o si
- $\max_{l=0 \div N-1} |f(t_l) - Q_f(t_l)|$  és més petit que una tolerància donada, o si
- $\max_{j=0 \div j/2} p_{f-Q_f,T,N}^{n_h}(j)$  és més petit que una tolerància donada, o si
- detectem dues freqüències massa properes. Usualment, considerarem que  $\nu_{l_1}, \nu_{l_2}$  són massa properes si  $|\nu_{l_1} - \nu_{l_2}| < 2 + n_h$ .

### E.1.6 Estudi de l'error

En aquesta secció enunciem un teorema que dona fites de l'error per als procediments descrites en les seccions E.1.3 i E.1.4. Abans necessitem una definició auxiliar.

**Definició E.1.1** Per  $j_1, j_2, \alpha, \delta > 0$  definim les funcions

$$\begin{aligned} G_f(j_1, j_2, \alpha, \delta) &= \frac{1}{\delta^{\alpha+1}} \chi_{\{j_1 \leq \frac{\alpha}{\delta} - 1\}} \left( \gamma(\alpha + 1, \delta \min([\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1}, j_2 + 1)) - \gamma(\alpha + 1, \delta j_1) \right) + \\ &\quad \chi_{\{j_1 \leq \frac{\alpha}{\delta}, j_2 > \frac{\alpha}{\delta} - 1\}} \left( [\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} \right)^\alpha e^{-\delta [\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1}} + \\ &\quad \chi_{\{j_1 < \frac{\alpha}{\delta} + 1, j_2 > \frac{\alpha}{\delta}\}} \left( [\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} + 1 \right)^\alpha e^{-\delta ([\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} + 1)} + \\ &\quad \frac{1}{\delta^{\alpha+1}} \chi_{\{j_2 > \frac{\alpha}{\delta} + 1\}} \left( \gamma(\alpha + 1, \delta j_2) - \gamma(\alpha + 1, \max([\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} + 1, j_1 - 1)) \right), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} G_\infty(j_1, \alpha, \delta) &= \frac{1}{\delta^{\alpha+1}} \chi_{\{j_1 \leq \frac{\alpha}{\delta} - 1\}} \left( \gamma(\alpha + 1, \delta [\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1}) - \gamma(\alpha + 1, \delta j_1) \right) + \\ &\quad \chi_{\{j_1 \leq \frac{\alpha}{\delta}\}} \left( [\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} \right)^\alpha e^{-\delta [\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1}} + \\ &\quad \chi_{\{j_1 < \frac{\alpha}{\delta} + 1\}} \left( [\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} + 1 \right)^\alpha e^{-\delta ([\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} + 1)} + \\ &\quad \frac{1}{\delta^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha + 1, \delta \max([\frac{\alpha}{\delta}]_{j_1} + 1, j_1 - 1)). \end{aligned}$$

En les fórmules anteriors,  $\chi_{\{\text{condició}\}}$  és igual a 1 si condició és certa i 0 altrament.

**Teorema E.1.1** Suposem que duem a terme l'anàlisi de Fourier d'una funció quasi-periòdica analítica,

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} a_k e^{i2\pi\omega t},$$

que satisfà les estimacions de Cauchy amb constants  $C, \delta > 0$ ,

$$|a_k| \leq C e^{-\delta|k|}, \quad (\text{E.2})$$

i el vector de freqüències de la qual  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  satisfà una condició Diofantina de la forma

$$|k\omega| > \frac{D}{|k|^\tau}, \quad (\text{E.3})$$

amb  $D, \tau > 0$ . Suposem que mostregem  $f$  en  $N$  punts equiespaiats a l'interval  $[0, T]$ , i que volem determinar les freqüències  $Tk\omega$  amb  $1 \leq |k| \leq r_0 - 1$ ,  $Tk\omega > 0$ , i les amplituds corresponents, de les que tenim aproximacions suficientment properes a les reals. Suposem que duem a terme el procediment de la Secció E.1.4 amb  $n_h \geq 1$  i que obtenim una aproximació de  $f$  de la forma

$$p(t) = A_0^c + \sum_{l=1}^{N_f} \left( A_l^c \cos\left(\frac{2\pi\nu_l t}{T}\right) + A_l^s \sin\left(\frac{2\pi\nu_l t}{T}\right) \right).$$

Suposem que  $N$  és tal que  $N - T(2r_0 - 2)\|\omega\|_\infty > 3 + n_h$ , i que  $T$  és tal que  $\frac{TD}{(2r_0 - 2)^\tau} > 3 + n_h$  i  $[\nu_{min}] > 2 + n_h$ . Aleshores, l'error en freqüències amplituds, que denotem com  $\Delta y$ , es pot fitar, en l'aproximació de primer ordre, com

$$\|\Delta y\| \lesssim \|M^{-1}\| \|\Delta b\|, \quad (\text{E.4})$$

on

$$\|M^{-1}\| \leq \frac{\|M_D^{-1}\|}{1 - \|M_D^{-1}\| \|M_O\|}$$

i

$$\begin{aligned} \|M_O\| \leq & \frac{(n_h!)^2}{\pi} \left( \frac{\sqrt{2} \left( \sum_{l=1}^{N_f} A_l \right) (\pi + \ln(\frac{TD}{(2r_0 - 2)^\tau} - 1 + n_h) - \ln(\frac{TD}{(2r_0 - 2)^\tau} - 2 - n_h)) + 2N_f}{(\frac{TD}{(2r_0 - 2)^\tau} - 1 - n_h)^{1+2n_h}} \right. \\ & + \frac{\sqrt{2} \left( \sum_{l=1}^{N_f} A_l \right) (\pi + \ln([\nu_{min}] + n_h) - \ln([\nu_{min}] - 1 - n_h)) + 2N_f}{([\nu_{min}] - n_h)^{1+2n_h}} \\ & \left. + \frac{4 \left( \sqrt{2} \left( \sum_{l=1}^{N_f} A_l \right) (\pi + \ln(N - \Omega_0 + n_h) - \ln(N - \Omega_0 - 1 - n_h)) + 2N_f \right) \left( 1 + \frac{1}{2n_h} \right)}{(N - \Omega_0 - n_h)^{1+2n_h}} \right) \end{aligned}$$

i

$$\|M_D^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{M}_D^{-1}\|}{1 - \|\mathcal{M}_D^{-1}\| \varepsilon_1}, \quad \|\mathcal{M}_D^{-1}\| \leq \frac{\|\mathfrak{M}_D^{-1}\|}{1 - \|\mathfrak{M}_D^{-1}\| \varepsilon_2}, \quad \|\mathfrak{M}_D^{-1}\| \leq \frac{G_{n_h}}{\min(1, A_{min})},$$

amb  $G_{n_h}$  donades per la taula E.1, essent

$$\varepsilon_1 = \frac{4(n_h!)^2 \left( \sqrt{2} A_{max} (\pi + \ln(N - \Omega_0 + n_h) - \ln(N - \Omega_0 - 1 - n_h)) + 2 \right) \left( 1 + \frac{1}{2n_h} \right)}{\pi (N - \Omega_0 - n_h)^{1+2n_h}},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(n_h!)^2 \left( \sqrt{2} A_{max} (\pi + \ln(2[\nu_{min}] + n_h) - \ln(2[\nu_{min}] - n_h - 1)) + 2 \right)}{\pi (2[\nu_{min}] - n_h)^{1+2n_h}},$$

$$\Omega_0 = T(2r_0 - 2)\|\omega\|_\infty + 1,$$

Pel que fa a  $\|\Delta b\|$ ,

$$\begin{aligned} \|\Delta b\| \leq & \frac{2^{m+1} C}{(m-1)!} \left( \frac{(n_h!)^2 e^{\delta(r_0 - 1)} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \left( \frac{m}{2} - r_0 + 1 \right)^{m-1-l} G_f(2r_0 - 1, r_0 + r_* - 2, l + \tau(1 + 2n_h), \delta)}{E_* \pi (TD)^{1+2n_h}} \right. \\ & + \chi_{\{r_* > r_0\}} \frac{2(n_h!)^2 e^{\delta \frac{m}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2n_h} \right) G_f\left(r_0 + \frac{m}{2}, r_* - 1 + \frac{m}{2}, m - 1, \delta\right)}{\pi (N - \Omega - n_h)^{1+2n_h}} \\ & \left. + e^{\delta \frac{m}{2}} G_\infty\left(r_* + \frac{m}{2}, m - 1, \delta\right) \right), \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}
\Omega &= T(r_* + r_0 - 2)\|\omega\|_\infty + 1 \\
r_* &= \max\left(r_0, \min\left(\left[\left(\frac{TD}{\max\left(\left(\frac{(n_h!)^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{1+2n_h}} + 1 + n_h, 2(1+n_h)\right)}\right)^{\frac{1}{\tau}} - r_0 + 2\right], \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[\frac{N-1-n_h}{T\|\omega\|_\infty} - r_0 + 1\right]\right)\right) \\
E_* &= \frac{(z_* - 1 - n_h)^{1+2n_h}}{z_*^{1+2n_h}}, \\
z_* &= \frac{TD}{(r_* + r_0 - 2)^\tau},
\end{aligned} \tag{E.6}$$

i les  $G_f$ ,  $G_\infty$  corresponen a la Definició E.1.1.

Si suposem que les freqüències  $\{Tk\omega\}_{|k|\leq r_0-1}$  són conegudes i volem calcular les amplituds usant el procediment descrit a la Secció E.1.3, la fórmula (E.4) encara és vàlida, on les fites per  $\|\Delta b\|$  es poden prendre com abans i les fites per  $\|M^{-1}\|$  són donades per

$$\|M^{-1}\| \leq \frac{\|M_D^{-1}\|}{1 - \|M_D^{-1}\|\|M_O\|}$$

essent

$$\begin{aligned}
\|M_O\| \leq \frac{N_f(n_h!)^2}{\pi} &\left( \frac{\sqrt{2}}{\pi\left(\frac{TD}{(2r_0-1)^\tau} - \frac{1}{2} - n_h\right)^{1+2n_h}} + \frac{2}{\pi([\nu_{min}] - n_h)^{1+2n_h}} \right. \\
&\left. + \frac{8\left(1 + \frac{1}{2n_h}\right)}{\pi(N - T(2r_0 - 2)\|\omega\|_\infty - \frac{1}{2} - n_h)^{1+2n_h}} \right)
\end{aligned}$$

i

$$\|M_D^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{M}_D^{-1}\|}{1 - \|\mathcal{M}_D^{-1}\|\varepsilon_1}, \quad \|\mathcal{M}_D^{-1}\| \leq \frac{\|\mathfrak{M}_D^{-1}\|}{1 - \|\mathfrak{M}_D^{-1}\|\varepsilon_2}, \quad \|\mathfrak{M}_D^{-1}\| \leq \frac{5}{3},$$

essent

$$\varepsilon_1 = \frac{8(n_h!)^2\left(1 + \frac{1}{2n_h}\right)}{\pi(N - T(2r_0 - 2)\|\omega\|_\infty - \frac{1}{2} - n_h)^{1+2n_h}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2(n_h!)^2}{\pi(2[\nu_{min}] - n_h)^{1+2n_h}}.$$

$n_h$	0	1	2	3
$G_{n_h}$	4.84	8.83	13.3	17.7

Taula E.1: Valors de les constants  $G_{n_h}$  per  $n_h = 0, \dots, 3$ .



### E.1.7 Un exemple numèric

Amb la finalitat d'il·lustrar els procediments descrits i verificar les fites de l'error obtingudes, hem analitzat una família de funcions quasiperiòdiques per les quals els coeficients de Fourier es poden calcular explícitament. Les funcions són

$$f_\mu(t) = \frac{\sin(2\pi\omega_1 t + \varphi_1)}{1 - \mu \cos(2\pi\omega_1 t)} \cdot \frac{\sin(2\pi\omega_2 t + \varphi_2)}{1 - \mu \cos(2\pi\omega_2 t)}, \quad \mu \in [0, 1).$$

Verifiquen  $f_\mu(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} a_k^{\mu, \varphi} e^{2\pi i(\omega, k)t}$ , amb

$$a_k^{\mu, \varphi} = \begin{cases} \frac{-\text{signe}(k_1 k_2)}{\mu^2} c_2^{|k|} e^{i(k, \varphi)} & \text{si } k_1, k_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } k_1 = 0 \text{ o } k_2 = 0 \end{cases}$$

essent

$$\omega = (\omega_1, \omega_2), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{i} \quad c = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu}$$

El paràmetre  $\mu$  està directament relacionat amb el paràmetre  $\delta$  de les estimacions de Cauchy (E.2), concretament

$$\delta = \text{Im arccos} \frac{1}{\mu} = -\log c.$$

Hem aplicat l'algorisme descrit a la Secció E.1.5 a les funcions  $f_\mu$  per  $\omega = (1, \sqrt{2})$ ,  $\varphi = (0, 0)$  i diversos valors de  $\mu$ ,  $T$  i  $N$ . Per al valor escollit de  $\omega$ , els paràmetres  $D$  i  $\tau$  de la condició Diofantina (E.3) són 0.85355 i 1, respectivament. Hem aturat el procediment quan totes les freqüències d'ordre  $|k| \leq 5$  han estat refinades. L'error de l'aproximació de Fourier, així com la fita corresponent, d'acord amb el Teorema E.1.1, es mostren a la Figura E.1.

S'ha de notar que l'error en freqüències i amplituds és molt menor que la diferència entre la funció analitzada  $f$  i l'aproximació quasiperiòdica  $Q_f$  obtinguda. Per exemple, en el cas de  $\mu = 0.9$ , de (E.1.7) se segueix que l'amplitud màxima de les freqüències no determinades és  $c_2^6/\mu^2 = 0.6268$ , mentre que el nostre procediment atansa errors tan petits com  $10^{-14}$  per a alguns valors de  $T$  i  $N$ . Això es deu al fet que els errors de truncament del nostre procediment no provenen de la diferència  $f - Q_f$  sinó de la seva DFT.

A la Figura E.1, la fita de l'error es troba diversos ordres de magnitud per sobre de l'error real. Això és degut a la condició Diofantina, que dona només una fita inferior per la diferència entre freqüències. Aquesta diferència atansa la condició Diofantina en molts pos casos, tal com es mostra a la Figura E.2. A la Figura E.3 avaluem la fita del Teorema E.1.1, però substituint el primer terme de la fita de  $\|\Delta b\|$  per

$$\max_{i=1 \div N_f} \max_{j=j_i, j_i^+} \frac{C(n_h!)^2}{\pi} \sum_{|k|=r_0}^{r_*-1} \frac{e^{-\delta|k|}}{(|Tk\omega - j| - n_h)^{1+2n_h}}. \quad (\text{E.7})$$

Observem que en aquest cas l'error predit i l'error real són molt a prop.

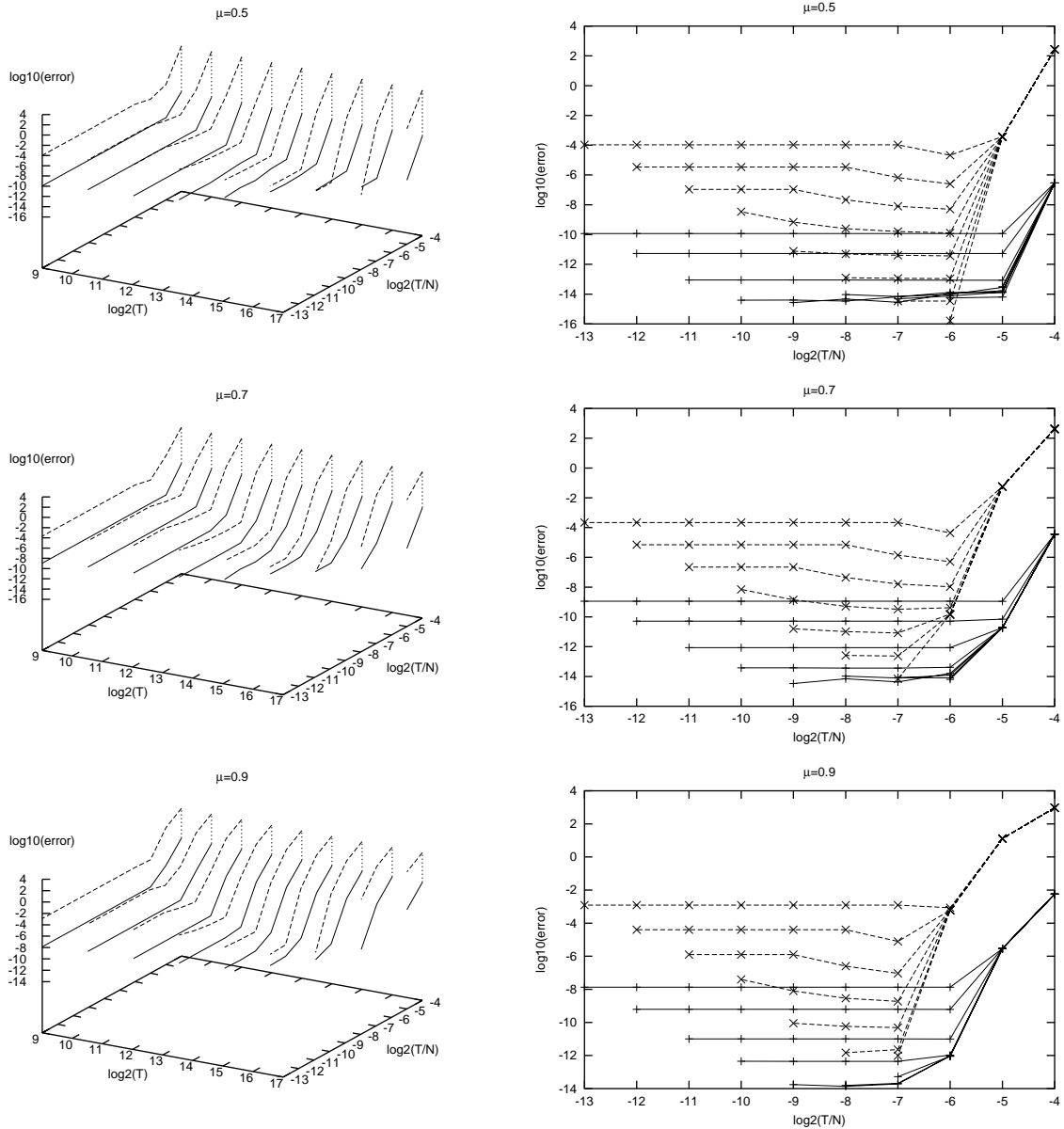


Figura E.1: Anàlisi de Fourier de les funcions  $f_\mu$  per  $\mu = 0.5, 0.7, 0.9$  i diversos valors de  $T$  i  $N$ . Els punts corresponents a anàlisi amb el mateix valor de  $T$  han estat units per línies. Les línies sòlides representen l'error en freqüències i amplituds de les corresponents anàlisis de Fourier. Això significa que hem representat el valor màxim entre l'error en les freqüències i l'error en les amplituds. Els punts units per línies puntejades corresponen a la fita donada pel teorema E.1.1. Les figures de la dreta són la projecció  $(y, z)$  de les figures de l'esquerra.

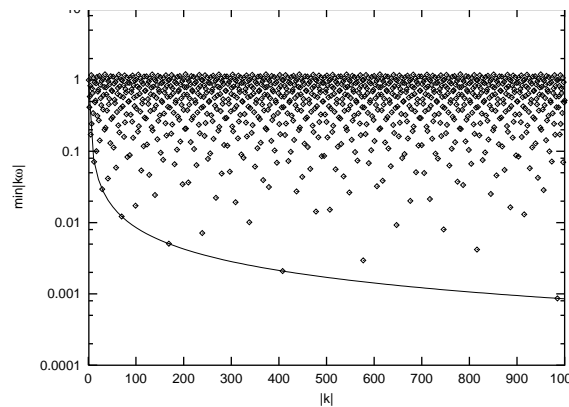


Figura E.2: Il·lustració de la no optimalitat de la condició Diofantina. Els punts representen els valors de  $\min_{|k|=\text{const.}} |k\omega|$  per  $|k| = 1 \div 1000$ . La corba representa els valors de la condició Diofantina  $0.85355/|k|$ . Els únics punts que es troben aproximadament sobre la corba  $0.85355/|k|$  corresponen als valors de  $|k|=1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985$ .

### E.1.8 Aplicació al desenvolupament de models simplificats de moviment al Sistema Solar

En aquesta secció comentarem els resultats corresponents a l'aplicació del procediment d'anàlisi de Fourier introduït anteriorment al desenvolupament de models simplificats de moviment al Sistema Solar.

Denotarem els cossos del Sistema Solar com

$$\mathcal{S} = \{P_1, \dots, P_9, P_{10}, P_{11}\} \quad (\text{E.8})$$

on  $P_1, \dots, P_{11}$  denoten Mercuri, Venus, Terra, Mart, Júpiter, Saturn, Urà, Neptú, Plutó, la Lluna i el Sol, respectivament. Denotarem també la Terra, la Lluna i el Sol com  $E$ ,  $M$  i  $S$ , respectivament. La massa de  $P_I \in \mathcal{S}$  es denotarà com  $m_{P_I}$ .

De vegades estarem interessats en considerar la Terra i la Lluna com un únic cos, situat al baricentre Terra–Lluna. Denotarem aquest cos “virtual” com  $P_{12}$ . En aquest cas, considerarem un Sistema Solar “modificat”,

$$\mathcal{S} = \{P_1, P_2, P_4, \dots, P_9, P_{11}, P_{12}\}, \quad (\text{E.9})$$

que denotem com abans per a reduir notació.

Considerem dos cossos  $I, J \in \mathcal{S}$  (bé el sistema solar “real” o el “modificat”) amb  $m_I > m_J$ , que anomenarem *primaris*. Podem escollir coordenades  $(x, y, z)^\top$  i unitats de temps  $t$  tals que

- els cossos  $I, J$  romanen fixats a les posicions  $(\mu_{I,J}, 0, 0)^\top$  i  $(\mu_{I,J} - 1, 0, 0)^\top$ , respectivament, essent

$$\mu_{I,J} = \frac{m_J}{m_I + m_J},$$

- el cos  $J$  completa una revolució al voltant de  $I$  en  $2\pi$  unitats de temps.

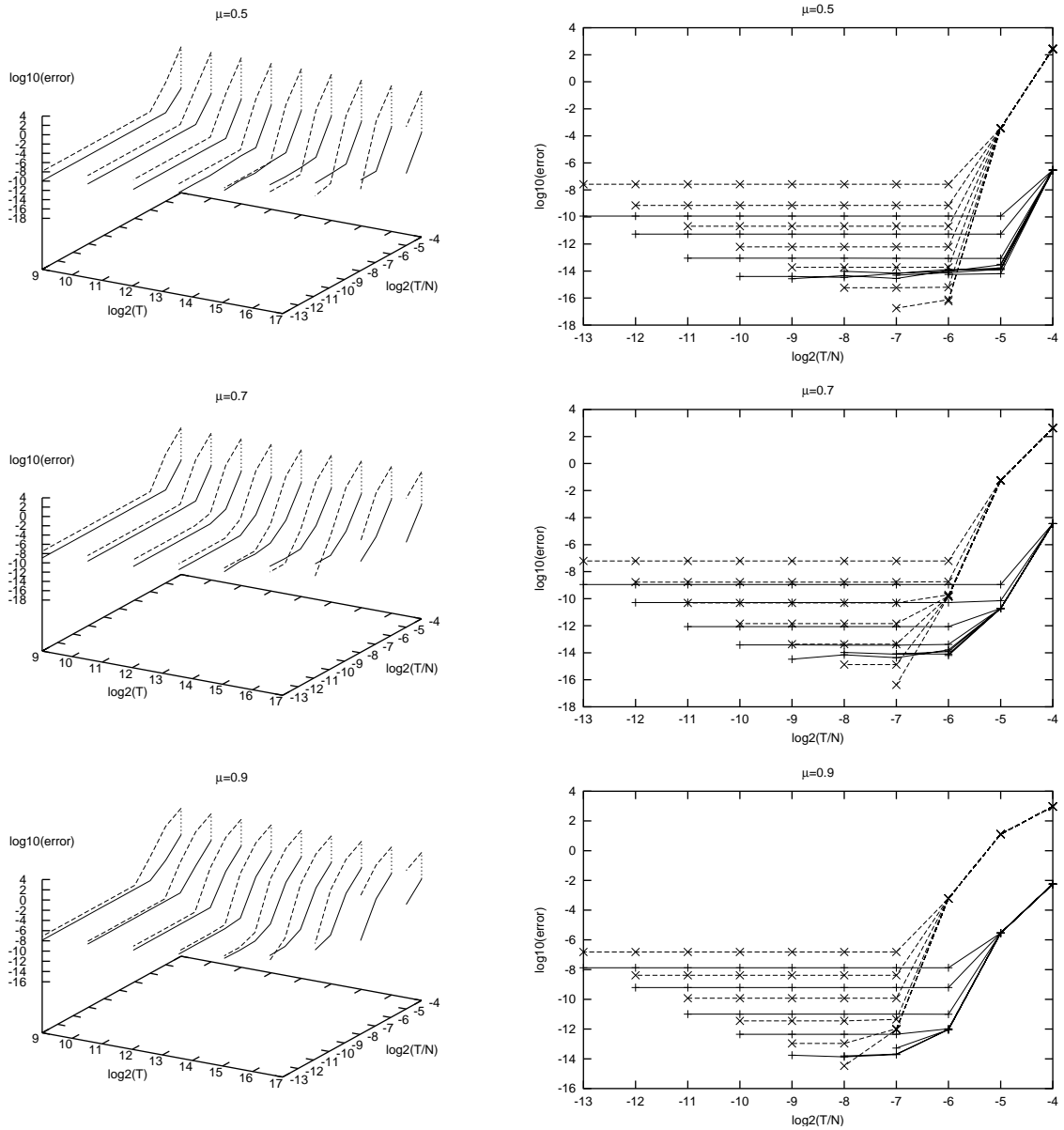


Figura E.3: Aquesta és la mateixa exploració que la de la Figura E.1, llevat que la fita de l'error representada per les línies puntejades s'obté substituint el primer terme de (E.5) per (E.7).

Aquestes coordenades seran anomenades *adimensionals*. En aquestes coordenades, les equacions del moviment d'una partícula sota l'atracció newtoniana dels cossos del Sistema Solar es pot escriure com

$$\begin{cases} \ddot{x} &= c_1 + c_4\dot{x} + c_5\dot{y} + c_7x + c_8y + c_9z + c_{13}\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= c_2 - c_5\dot{x} + c_4\dot{y} + c_6\dot{z} - c_8x + c_{10}y + c_{11}z + c_{13}\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= c_3 - c_6\dot{y} + c_4\dot{z} + c_9x - c_{11}y + c_{12}z + c_{13}\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases} \quad (\text{E.10})$$

essent

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1 - \mu_{I,J}}{\sqrt{(x - \mu_{I,J})^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu_{I,J}}{\sqrt{(x - \mu_{I,J} + 1)^2 + y^2 + z^2}} \\ &+ \sum_{\substack{j \in \mathcal{S} \\ j \neq I, J}} \frac{\mu_{I,J,j}}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

on

$$\mu_{I,J,j} = \frac{m_j}{m_I + m_J},$$

i  $(x_j, y_j, z_j)^\top$  són les coordenades adimensionals del cos  $j \in \mathcal{S}$ . Al sistema (E.10),  $\{c_i\}_{i=1 \div 13}$  són funcions dependent del temps que es poden calcular en termes de les posicions, velocitats, acceleracions i sobreacceleracions dels dos primaris  $I, J$ . Si posem  $c_5 = 2$ ,  $c_7 = c_{10} = c_{13} = 1$ , les restants  $c_i$  iguals a zero i eliminem la suma a (E.11), aleshores les equacions (E.10) esdevenen les equacions del Problema Restringit de Tres Cossos (RTBP) amb paràmetre de masses  $\mu_{I,J}$ . Per tant, podem veure (E.10) com una perturbació de les equacions del RTBP.

De cara a evaluar el sistema d'equacions anterior, necessitem les posicions dels cossos del Sistema Solar, així com les seves derivades respecte del temps fins a ordre tres. Es poden calcular a partir de qualssevol efemèrides planetàries, siguin analítiques o numèriques. En els càlculs hem usat les efemèrides numèriques DE406 del Jet Propulsion Laboratory (JPL), degut a la seva alta precisió al llarg d'un interval de temps de 6000 anys.

Tot seguit desenvoluparem models entre el RTBP i el Sistema Solar "real" (E.10). L'estratègia a seguir és "afegir freqüències bàsiques" al RTBP, tot calculant aquestes freqüències mitjançant l'aplicació de les tècniques d'anàlisi de Fourier descrites anteriorment a les funcions  $\{c_i\}_{i=1 \div 13}$  i  $\{(x_j, y_j, z_j)^\top\}_{j \in \mathcal{S}}$ . Els models es desenvoluparan per

- el cas Terra–Lluna, que significa considerar  $I = P_3$  i  $J = P_{10}$ , essent  $\mathcal{S}$  tal com a (E.8), i
- el cas Sol–Terra+Lluna, que significa considerar  $I = P_{11}$  i  $J = P_{12}$ , essent  $\mathcal{S}$  com a (E.9).

Malgrat que només cobrirem aquests dos casos, la metodologia usada pot ser aplicada a qualsevol parell de primaris.

### Models simplificats per al cas Terra–Lluna

En una teoria acurada per al moviment lunar, com la teoria simplificada de Brown donada a [8], els paràmetres fonamentals es poden expressar en termes de cinc freqüències bàsiques:

- La longitud mitjana de la Lluna, que és igual a 1.0.
- L'elongació mitjana de la Lluna respecte del Sol, 0.925195997455093. Aquesta és la freqüència de la part dependent del temps al Problema Bicircular (BCP) i el Problema Quasibicircular (QBCP, veure Apèndix A).
- La longitud mitjana del perigeu lunar, que és igual a  $8.45477852931292 \times 10^{-3}$ .
- La longitud del node ascendent mitjà de l'òrbita lunar sobre l'eclíptica,  $4.01883841204748 \times 10^{-3}$ .
- La longitud mitjana del perigeu solar,  $3.57408131981537 \times 10^{-6}$ .

Les unitats emprades per a aquestes freqüències són cicles per revolució lunar. En el que segueix, aquestes freqüències seran denotades per  $\{\omega_1, \dots, \omega_5\}$ .

Per als models simplificats que especificarem a continuació, només tindrem en compte les coordenades del Sol en (E.11). Això estalvia la introducció de freqüències bàsiques addicionals i és suficient per als nostres propòsits, com quedarà clar més endavant. D'aquesta manera, només usarem les expansions de Fourier de  $c_1, \dots, c_{13}$  i  $x_S, y_S, z_S$ .

A partir de la base de freqüències  $\{\omega_i\}_{i=1 \div 5}$ , cercarem una nova base  $\{\nu_i\}_{i=1 \div 5}$ . En termes d'aquesta base, generarem cinc models SSSM<sub>*i*</sub>,  $i = 1 \div 5$ , de manera que les equacions del moviment de SSSM<sub>*i*</sub> són

$$\begin{cases} \ddot{x} &= c_1^i + c_4^i \dot{x} + c_5^i \dot{y} + c_7^i x + c_8^i y + c_9^i z + c_{13}^i \frac{\partial \Omega^i}{\partial x} \\ \ddot{y} &= c_2^i - c_5^i \dot{x} + c_4^i \dot{y} + c_6^i \dot{z} - c_8^i x - c_{10}^i y + c_{11}^i z + c_{13}^i \frac{\partial \Omega^i}{\partial y} \\ \ddot{z} &= c_3^i - c_6^i \dot{y} + c_4^i \dot{z} + c_9^i x - c_{11}^i y + c_{12}^i z + c_{13}^i \frac{\partial \Omega^i}{\partial z} \end{cases}$$

essent

$$\Omega = \frac{1 - \mu_{E,M}}{\sqrt{(x - \mu_{E,M})^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu_{E,M}}{\sqrt{(x - \mu_{E,M} + 1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu_{E,M,S}}{\sqrt{(x - x_S^i)^2 + (y - y_S^i)^2 + (z - z_S^i)^2}}.$$

Aquí  $c_j^i$ ,  $j = 1 \div 13$  i  $x_S^i, y_S^i, z_S^i$  són les expansions de Fourier de  $c_j$ ,  $j = 1 \div 13$  i  $x_S, y_S, z_S$ , respectivament, calculades usant els procediments d'anàlisi de Fourier descrits anteriorment, però mantenint només les freqüències que s'expressen com a combinacions lineals (amb coeficients enters) de les freqüències  $\nu_1, \dots, \nu_i$ .

La nova base  $\{\nu_i\}_{i=1 \div 5}$  ha estat escollida com

- $\nu_1 = \omega_2$ , que és la freqüència principal de  $c_1, c_2, x_S$  i  $y_S$ .

- $\nu_2 = \omega_1 - \omega_3$ , que permet ajustar amb combinacions lineals a coeficients enters de  $\nu_1, \nu_2$  les freqüències més importants de totes les funcions llevat de  $c_3, c_6, c_9, c_{11}$  i  $z_S$ .
- $\nu_3 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_4$ , que és la freqüència principal de  $c_3$ ,
- $\nu_4 = \omega_1 - \omega_5$ , que és la primera freqüència de  $c_3$  que no es pot expressar en termes de  $\nu_1, \nu_2$ , i
- $\nu_5 = \omega_5 - \omega_2$ , que és la primera freqüència de  $c_3$  que no es pot expressar en termes de  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ .

D'aquesta manera, tenim

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{pmatrix}.$$

Donat que la matriu anterior és unimodular,  $\{\nu_i\}_{i=1 \div 5}$  és un conjunt vàlid de freqüències bàsiques.

Usant acceleracions residuals, hem comparat els models SSSM<sub>i</sub>, així com el RTBP, el Problema Bicircular (BCP) i el problema Quasibicircular (QBCP) amb el Sistema Solar real, donat per (E.10) i (E.11) amb les funcions  $c_i$  i  $x_i, y_i, z_i$  evaluades a partir del fitxer d'efemèrides DE406 del JPL. Hem procedit com segueix. Donats dos models per ser comparats, amb equacions diferencials  $\dot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}, t)$  i  $\dot{\mathbf{r}} = g(r, t)$ , respectivament, i donada una trajectòria (en posicions i velocitats)  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ , que no té perquè ser de cap dels dos models, calculem les “acceleracions mitjanes residuals relatives sobre  $\gamma$ ” com

$$\frac{1}{L} \int_0^T \frac{\|f(\gamma(s), t) - g(\gamma(s), t)\|}{\|g(\gamma(s), t)\|} \|\gamma'(s)\| ds, \quad (\text{E.12})$$

on  $t$  és una època determinada (en unitats adimensionals), i

$$L = \int_0^T \|\gamma'(s)\| ds$$

és la longitud de la trajectòria.

Els resultats del test d'acceleracions residuals es donen a la Taula E.2. D'aquesta taula es conclou que els millors models d'una freqüència que podem usar, d'acord amb el criteri d'acceleracions residuals, són el BCP i el QBCP. Quan permetem dues o més freqüències, els models que obtenim s'ajusten molt millor al model JPL. Com s'ha dit anteriorment, només el Sol ha estat tingut en compte en tots els models intermedis. Afegint cossos addicionals, les acceleracions residuals són del mateix ordre de magnitud que les obtingudes usant només el Sol.

$z$ -a.	RTBP	BCP	QBCP	SSSM <sub>1</sub>	SSSM <sub>2</sub>	SSSM <sub>3</sub>	SSSM <sub>4</sub>	SSSM <sub>5</sub>
0.020	0.140126	0.146459	0.138580	0.365299	0.095769	0.010674	0.001374	0.000727
0.022	0.138397	0.144693	0.136908	0.359442	0.094562	0.010534	0.001360	0.000724
0.025	0.136603	0.142856	0.135174	0.353302	0.093293	0.010388	0.001346	0.000720
0.028	0.134760	0.140962	0.133392	0.346913	0.091967	0.010235	0.001331	0.000716
0.031	0.132882	0.139025	0.131578	0.340305	0.090590	0.010076	0.001315	0.000711
0.034	0.130985	0.137059	0.129747	0.333509	0.089166	0.009913	0.001299	0.000707
0.038	0.129087	0.135080	0.127914	0.326550	0.087699	0.009744	0.001282	0.000702
0.043	0.127204	0.133103	0.126097	0.319452	0.086191	0.009570	0.001265	0.000696
0.048	0.125352	0.131141	0.124312	0.312235	0.084643	0.009393	0.001247	0.000691
0.053	0.123549	0.129209	0.122576	0.304915	0.083056	0.009211	0.001229	0.000685
0.059	0.121813	0.127324	0.120905	0.297505	0.081429	0.009024	0.001210	0.000678
0.066	0.120162	0.125502	0.119319	0.290018	0.079760	0.008833	0.001191	0.000671
0.073	0.118614	0.123757	0.117835	0.282462	0.078045	0.008637	0.001171	0.000664
0.082	0.117189	0.122108	0.116473	0.274845	0.076280	0.008436	0.001150	0.000655
0.091	0.115905	0.120571	0.115249	0.267173	0.074461	0.008229	0.001128	0.000646
0.102	0.114778	0.119161	0.114181	0.259453	0.072581	0.008016	0.001105	0.000636
0.113	0.113823	0.117895	0.113283	0.251690	0.070634	0.007796	0.001081	0.000625
0.126	0.113052	0.116784	0.112566	0.243889	0.068612	0.007568	0.001056	0.000612
0.141	0.112471	0.115836	0.112037	0.236056	0.066510	0.007331	0.001030	0.000598
0.157	0.112080	0.115057	0.111695	0.228199	0.064322	0.007085	0.001002	0.000583
0.175	0.111872	0.114443	0.111533	0.220325	0.062042	0.006831	0.000973	0.000566
0.195	0.111829	0.113984	0.111535	0.212440	0.059667	0.006566	0.000942	0.000547
0.217	0.111928	0.113663	0.111672	0.204551	0.057196	0.006292	0.000910	0.000526
0.242	0.112133	0.113450	0.111909	0.196665	0.054632	0.006008	0.000875	0.000504
0.269	0.112400	0.113311	0.112201	0.188782	0.051978	0.005716	0.000840	0.000481
0.300	0.112678	0.113200	0.112492	0.180899	0.049240	0.005417	0.000802	0.000456

Taula E.2: Acceleracions residuals mitjes relatives entre diversos models i el Sistema Solar real sobre diverses òrbites halo del RTBP al voltant de  $L_2$  per al cas Terra–Lluna. La primera columna mostra l'amplitud  $z$  de la òrbita halo de prova. Les columnes restants mostren l'acceleració residual mitja relativa entre el model corresponent i el Sistema Solar real sobre l'òrbita de prova.



### Models simplificats per al cas Sol–Terra+Lluna

Per als models simplificats del cas Sol–Terra+Lluna, només tenim en compte les funcions  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $c_7$ ,  $c_{10}$ ,  $c_{12}$  i  $c_{13}$ , degut a que les altres es troben, en valor absolut, diversos ordres de magnitud per sota d'aquestes. De les freqüències donades per l'anàlisi de Fourier d'aquestes funcions n'extraïem quatre de bàsiques:

$$\nu_1 = 0.9999926164, \nu_2 = 0.6255242728, \nu_3 = 0.9147445983, \nu_4 = 1.8313395538.$$

Amb aquestes freqüències, construïm els models  $\text{SSSM}_1, \dots, \text{SSSM}_4$  com vam fer en el cas Terra–Lluna.

z-a.	RTBP	SSSM <sub>1</sub>	SSSM <sub>4</sub>
0.020000	3.446497E-02	9.901526E-05	8.905454E-04
0.022288	3.429997E-02	9.844882E-05	8.842048E-04
0.024838	3.411184E-02	9.779360E-05	8.768670E-04
0.027680	3.390024E-02	9.701858E-05	8.684772E-04
0.030846	3.366579E-02	9.616913E-05	8.589500E-04
0.034375	3.341007E-02	9.521763E-05	8.482675E-04
0.038308	3.313580E-02	9.416327E-05	8.364166E-04
0.042691	3.284681E-02	9.300703E-05	8.234040E-04
0.047575	3.254789E-02	9.175134E-05	8.092527E-04
0.053018	3.224472E-02	9.039967E-05	7.939978E-04
0.059084	3.194355E-02	8.895610E-05	7.776813E-04
0.065843	3.165101E-02	8.742482E-05	7.603471E-04
0.073376	3.137381E-02	8.582841E-05	7.420444E-04
0.081771	3.111844E-02	8.413352E-05	7.227963E-04
0.091126	3.089082E-02	8.236183E-05	7.026421E-04
0.101551	3.069597E-02	8.051628E-05	6.816096E-04
0.113169	3.053770E-02	7.859979E-05	6.597243E-04
0.126117	3.041819E-02	7.661569E-05	6.370130E-04
0.140545	3.033772E-02	7.450252E-05	6.135638E-04
0.156624	3.029470E-02	7.240496E-05	5.893022E-04
0.174543	3.028516E-02	7.020714E-05	5.643885E-04
0.194512	3.030323E-02	6.801648E-05	5.388121E-04
0.216766	3.034115E-02	6.579492E-05	5.127031E-04
0.241565	3.038961E-02	6.350846E-05	4.862056E-04
0.269202	3.043825E-02	6.123496E-05	4.593820E-04
0.300000	3.047577E-02	5.898080E-05	4.323859E-04

Taula E.3: Acceleracions residuals mitjes relatives entre diversos models i el Sistema Solar real sobre diverses òrbites halo del RTBP al voltant de  $L_2$  en el cas Sol–Terra+Lluna.

A la taula E.3, comparem els models RTBP,  $\text{SSSM}_1$  i  $\text{SSSM}_4$  amb el Sistema Solar real usant el mateix test d'acceleracions residuals que ha estat usat al cas Terra–Lluna. Notem que el model  $\text{SSSM}_4$  dona pitjors resultats que  $\text{SSSM}_1$ . Això no és una contradicció, degut a que l'aproximació de les funcions  $c_i$  per les expansions de Fourier calculades no millora significativament en afegir freqüències no múltiples de  $\nu_1$ . D'aquesta manera, l'estructura

de les equacions (E.10) “s’imposa” sobre el fet que els termes  $c_i$  de  $\text{SSSM}_4$  són més propers als del Sistema Solar real que els termes corresponents de  $\text{SSSM}_1$ .

En conseqüència, donem  $\text{SSSM}_1$  com model simplificat de moviment al Sistema Solar per al cas Sol–Terra+Lluna. Notem que aquest és un model amb molt poques freqüències que millora significativament el RTBP.

## E.2 L’entorn dels punts de libració colineals

Aquesta secció està dedicada a l’estudi de l’entorn dels punts d’equilibri colineals del RTBP per al paràmetre de masses Terra–Lluna. L’estudi està basat en la continuació de les famílies d’òrbites periòdiques i tors invariants 2–dimensionals de la varietat central dels punts d’equilibri. En les següents seccions, presentem un resum de la metodologia emprada i els resultats numèrics obtinguts.

### E.2.1 Metodologia

Ens centrarem en el càlcul de tors invariants, donat que el refinament i continuació d’òrbites periòdiques ha estat estudiat exhaustivament amb anterioritat. El procediment de càlcul de tors invariants 2–dimensionals pren com a punt de partida el procediment desenvolupat en [7].

Concretament, sigui  $H(\mathbf{x})$  el Hamiltonià del RTBP,  $X_H(\mathbf{x})$  el seu camp vectorial i  $\phi_t(\mathbf{x})$  el seu flux temps  $t$ . Podem cercar la parametrització d’un tor 2–dimensional  $\psi : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 6$  per al RTBP), satisfent

$$\psi(\theta + \omega t) = \phi_t(\psi(\theta)), \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\text{E.13})$$

on  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$  és el vector de freqüències del tor. Denotem per  $T_i$  el període corresponent a la freqüència  $\omega_i$ , és a dir,  $T_i = 2\pi/\omega_i$ , i denotem  $\theta = (\xi, \eta)$ .

De cara a reduir la dimensió del problema, en comptes de cercar una parametrització del tor sencer, podem cercar la parametrització d’una corba  $\{\eta = \eta_0\}$  (o  $\{\xi = \xi_0\}$ ) sobre el tor, que és invariant sota  $\phi_{T_2}$ , concretament

$$\phi_{T_2}(\psi(\xi, \eta_0)) = \psi(\xi + \omega_1 T_2, \eta_0), \quad \forall \xi \in \mathbb{T}^1. \quad (\text{E.14})$$

Per tant, cercarem una parametrització  $\varphi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfent

$$\varphi(\xi + \rho) = \phi_\delta(\varphi(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{T}^1, \quad (\text{E.15})$$

on  $\delta = T_2$  i  $\rho = \delta\omega_1$ . Notem que  $\rho$  és el nombre de rotació de la corba que estem cercant.

### Indeterminacions de la representació de Fourier

Cercarem  $\varphi$  sota la forma de sèrie de Fourier truncada,

$$\varphi(\xi) = A_0 + \sum_{k=1}^{N_f} (A_k \cos(k\xi) + B_k \sin(k\xi)), \quad (\text{E.16})$$

amb  $A_k, B_k \in \mathbb{R}^n$ . Aquesta representació del tor geomètric  $\{\psi(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{T}^2}$  no és única per dues raons:

- Cada elecció de  $\eta_0$  correspon a una  $\varphi$  diferent en (E.16), és a dir, a una corba invariant diferent sobre el tor  $\{\psi(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{T}^2}$ .
- Donada la parametrització (E.16), per cada  $\xi_0 \in \mathbb{T}^1$ ,  $\varphi(\xi - \xi_0)$  és una parametrització diferent amb una expansió de Fourier diferent de la mateixa corba invariant  $\{\varphi(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{T}^1}$  del tor  $\{\psi(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{T}^2}$ . De fet, la seva expansió de Fourier és

$$\varphi(\xi - \xi_0) = A_0 + \sum_{k=1}^{N_f} (\tilde{A}_k \cos(k\xi) + \tilde{B}_k \sin(k\xi)),$$

essent

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= A_k \cos(k\xi_0) - B_k \sin(k\xi_0) \\ \tilde{B}_k &= A_k \sin(k\xi_0) + B_k \cos(k\xi_0). \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Anomenarem aquest fenomen “modulació de coeficients”, en analogia amb la terminologia usada en processament de senyal.

Per a evitar la primera indeterminació, mantenim constant una coordenada de  $A_0$ . S'ha de verificar que aquesta condició sigui vàlida per la família de tors que s'estigui continuant.

Respecte de la segona indeterminació, notem que, per qualsevol  $k \geq 1$ , si  $(A_k^j, B_k^j) \neq (0, 0)$  (aquí  $A_k^j$  denota la  $j$ -èsima coordenada de  $A_k$ ), de (E.17) se segueix que existeix un  $\xi_0$  que dona  $\tilde{A}_k^j = 0$ . Per tant, prenent  $A_k^j = 0$  evitarem la indeterminació, sempre i quan  $B_k^j$  romanguí diferent de zero. Usualment, hem pres  $k = 1$  i  $j$  ha estat escollit maximitzant  $\|(A_1^j, B_1^j)\|_2$ .

### Tir múltiple

Per poder tractar amb tors altament inestables, usem un procediment de tir múltiple. Consisteix en cercar diverses corbes invariants sobre el tor  $\{\psi(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{T}^2}$  en comptes de només una, amb la finalitat de reduir el temps màxim d'integració a una fracció de  $\delta$ . Concretament, cercarem  $m$  parametritzacions  $\varphi_0 = \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$  satisfent

$$\begin{cases} \varphi_{j+1}(\xi) = \phi_{\frac{\delta}{m}}(\varphi_j(\xi)) & (j = 0 \div m-2) \\ \varphi_0(\xi + \rho) = \phi_{\frac{\delta}{m}}(\varphi_{m-1}(\xi)), \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

per a tot  $\xi \in \mathbb{T}^1$ .

### El sistema d'equacions

D'acord amb [7], convertirem (6.13) en un sistema d'equacions finit discretitzant  $\mathbb{T}^1$  en  $2N_f + 1$  valors de  $\xi$ . Prendrem, simplement

$$\xi_i = i \frac{2\pi}{1 + 2N_f} \quad (i = 0 \div 2N_f). \quad (\text{E.19})$$

A més dels coeficients de Fourier, hem de considerar  $\delta, \rho$  com a incògnites, donat que s'espera que variïn al llarg de les continuacions. De cara a descriure els tors en termes de

l'energia, afegim una nova incògnita  $h$  i una nova equació  $H(\varphi_0(0)) - h = 0$ , que prescriu un nivell d'energia per al tor que s'està calculant.

De cara a simplificar la notació, denotarem els coeficients de Fourier com

$$\mathcal{F} = (A_0, A_1, B_1, \dots, A_{N_f}, B_{N_f})$$

i

$$\Psi(\xi, \mathcal{F}) = A_0 + \sum_{k=1}^{N_f} (A_k \cos(k\xi) + B_k \sin(k\xi)).$$

El sistema d'equacions que resoldrem és

$$\begin{aligned} H(\Psi(0, \mathcal{F}_0)) - h &= 0 \\ \Psi(\xi_i, \mathcal{F}_{j+1}) - \phi_{\frac{\delta}{m}}(\Psi(\xi_i, \mathcal{F}_j)) &= 0 & j = 0 \div m - 2, \quad i = 0 \div 2N_f \\ \Psi(\xi_i + \rho, \mathcal{F}_0) - \phi_{\frac{\delta}{m}}(\Psi(\xi_i, \mathcal{F}_{m-1})) &= 0 & i = 0 \div 2N_f, \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

on les incògnites són  $h, \delta, \rho, \mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_{m-1}$ .  $\mathcal{F}_i$  representa els coeficients de Fourier de la corba  $\varphi_i$  en el tir múltiple (E.18). Les equacions de tir múltiple

$$\Psi(\xi_i, \mathcal{F}_{j+1}) - \phi_{\frac{\delta}{m}}(\Psi(\xi_i, \mathcal{F}_j)) = 0$$

se suposen inexistents si  $m = 1$ .

En el sistema d'equacions anterior les incògnites considerades no són independents. L'estratègia que seguim consisteix a mantenir constants determinades incògnites en termes del que volguem calcular.

### Refinament i continuació de famílies de tors invariants

Per refinar un tor invariant, mantindrem constants dues incògnites al sistema (E.20) per tal de fixar una corba invariant sobre el tor refinat i per evitar modulació de coeficients. A més d'això, fixarem dues incògnites addicionals perquè el tor que volem refinar sigui l'única solució (localment) del sistema d'equacions que resollem. Això és necessari perquè els tors que calcularem estaran sempre immersos en famílies cantorians biparamètriques. Un cop fixades aquestes quatre incògnites, usem el mètode de Newton per a resoldre el sistema obtingut.

Portem a terme la continuació de famílies de tors invariants usant un esquema predictor–corrector. Donat un tor, per predir un nou tor dins la família, considerem la família com una varietat de tors invariants i ens movem al llarg del seu espai tangent. Donat que aquesta varietat s'expressa com  $F(X) = 0$  (per  $F, X$  adients), el seu espai tangent a un tor  $X$  donat ve donat per  $\text{Ker } DF(X)$ . Notem que això no és estrictament cert, donat que les famílies de tors invariants són cantorians, però el procediment funciona a la pràctica sempre i quan els “forats” deguts a resonàncies no siguin excessivament grans.

### Control de l'error

Per tal de tenir un cert control sobre l'error degut a la discretització de  $\mathbb{T}^1$ , procedim com a [7]: avaluem (E.20) sobre una discretització més fina que (E.19) i incrementem el

nombre d'harmònics fins que la norma màxima estigui sota una tolerància donada. És a dir, incrementem  $N_f$  fins que

$$\max_{\substack{i=0 \div 2N_f, j=0 \div m-2 \\ k=0 \div M(1+2N_f)-1}} \left\| \begin{array}{l} \Psi(\tilde{\theta}_k, \mathcal{F}_{j+1}) - \phi_{\frac{\delta}{m}}(\Psi(\tilde{\theta}_k, \mathcal{F}_j)) \\ \Psi(\tilde{\theta}_k + \rho, \mathcal{F}_0) - \phi_{\frac{\delta}{m}}(\Psi(\tilde{\theta}_k, \mathcal{F}_{m-1})) \end{array} \right\|_{\infty} < tol, \quad (\text{E.21})$$

essent  $\tilde{\theta}_k = k \frac{2\pi}{M(1+2N_f)}$ .

### Estratègies de càlcul en paral·lel

La part de càlcul més intensiva ha estat duta a terme seguint una estratègia de càlcul en paral·lel, en la qual es continuen  $n_c$  famílies de tors invariants en una execució.

Aquesta estratègia ha estat implementada segons el model “master-esclau”. El programa master engega  $n_e$  còpies del programa esclau i distribueix les  $n_c$  famílies entre ells. Donat un tor d'una família, el programa esclau calcula un nou tor sobre la família portant a terme un pas de continuació.

El programa master distribueix passos de continuació de manera cíclica entre les famílies de tors que es continuen. D'aquesta manera podem continuar en una execució més famílies que processadors ( $n_c > n_e$ ). Els esclaus s'ordenen en una llista en la qual el master cerca esclaus de començament a final. D'aquesta manera, quan més de  $n_c - n_e$  continuacions han estat finalitzades i alguns esclaus es queden sense feina, la càrrega “puja” cap al començament de la llista. Això permet treure profit d'una xarxa heterogènia, col·locant els processadors més ràpids al començament de la llista.

### E.2.2 Resultats numèrics

Han estat continuades diverses famílies d'òrbites periòdiques, concretament:

- Les famílies de Lyapunov planes i verticals originades als tres punts d'equilibri colineals.
- Les famílies d'òrbites halo, que s'obtenen com a bifurcació de la famílies plana de Lyapunov deguda a una resonància 1 : 1, també per als tres punts d'equilibri.
- Les famílies d'òrbites tridimensionals que fan de “pont” entre les famílies de Lyapunov planes i verticals, que bifurquen de la família de Lyapunov plana després de la bifurcació de la família halo, per als casos de  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ .
- Famílies que bifurquen de les famílies halo per duplicació i triplicació de període. Cadascuna d'aquestes bifurcacions dona lloc a dues famílies, una sense direccions estables, que anomenarem hiperbòlica, i una altra amb una direcció estable, que anomenarem el·líptica. Aquestes famílies només han estat detectades en els casos de  $L_1$  i  $L_2$ , perquè en el cas de  $L_3$  la família halo arriba a una òrbita de col·lisió abans d'atansar les resonàncies 1:2 i 1:3 que donen lloc a les famílies esmentades.

Per a les famílies anteriors d'òrbites periòdiques, han estat continuades les famílies de tors invariants que s'originen a les seves direccions estables.

### Tor al voltant de les famílies verticals de Lyapunov

A la Figura E.4 hem representat, per als tres punts d'equilibri, les regions, al pla  $h-\rho$ , determinades per les famílies biparamètriques de tors calculats començant a les famílies d'òrbites periòdiques de Lyapunov verticals. Cada regió està envoltada per una corba formada per diverses seccions:

- La secció inferior esquerra  $\alpha$  (del vèrtex 1 al 2) correspon la família de Lyapunov plana. Les òrbites d'aquesta família representades en la corba corresponen al primer tram de la família amb direccions estables.
- La secció superior  $\beta$  (del vèrtex 2 al 3) correspon a la família d'òrbites de Lyapunov verticals.
- La secció inferior  $\gamma$  (del vèrtex 3 al 1), que es troba sobre  $\rho = 0$ , comença al valor de l'energia en què neixen les òrbites planes. Correspon a una separatriu entre els tors al voltant de les òrbites de Lyapunov verticals i els tors al voltant de les òrbites halo.

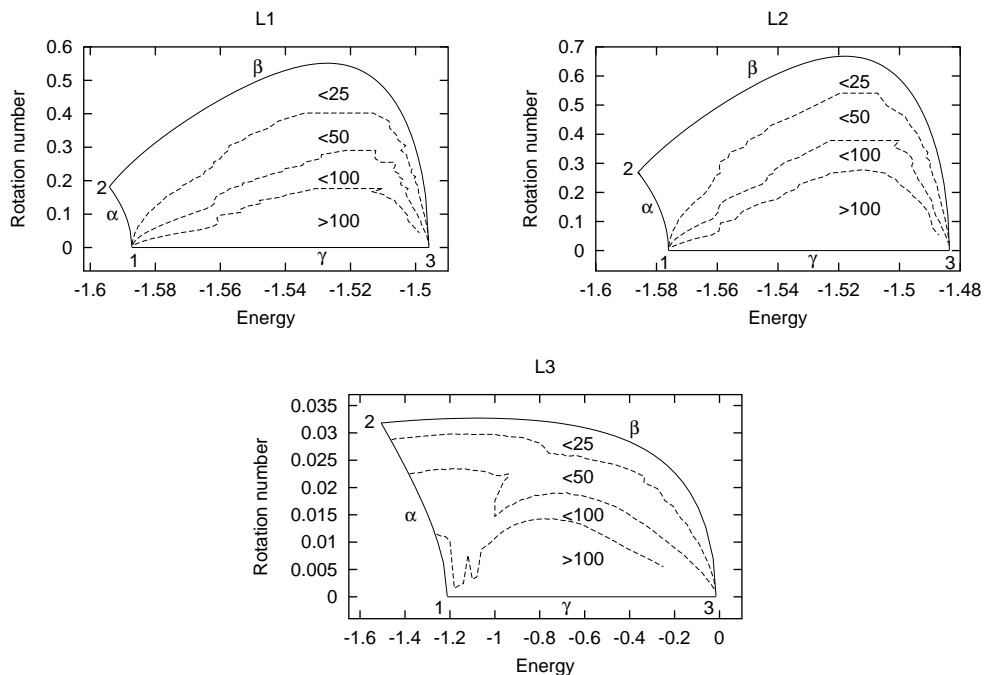


Figura E.4: Regions al pla  $h-\rho$  que contenen les famílies 2-paramètriques de tors invariants calculats començant a les famílies verticals de Lyapunov d'òrbites periòdiques per  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ . A les figures es mostra el nombre d'harmonics necessari per al càlcul dels tors ( $< 25$ ,  $< 50$ ,  $< 100$  i  $> 100$ ).

## Tors invariants al voltant d'òrbites halo i de tipus halo

A la Figura 7.16 representem les continuacions de les famílies 2-paramètriques de tors invariants al voltant de les òrbites halo.

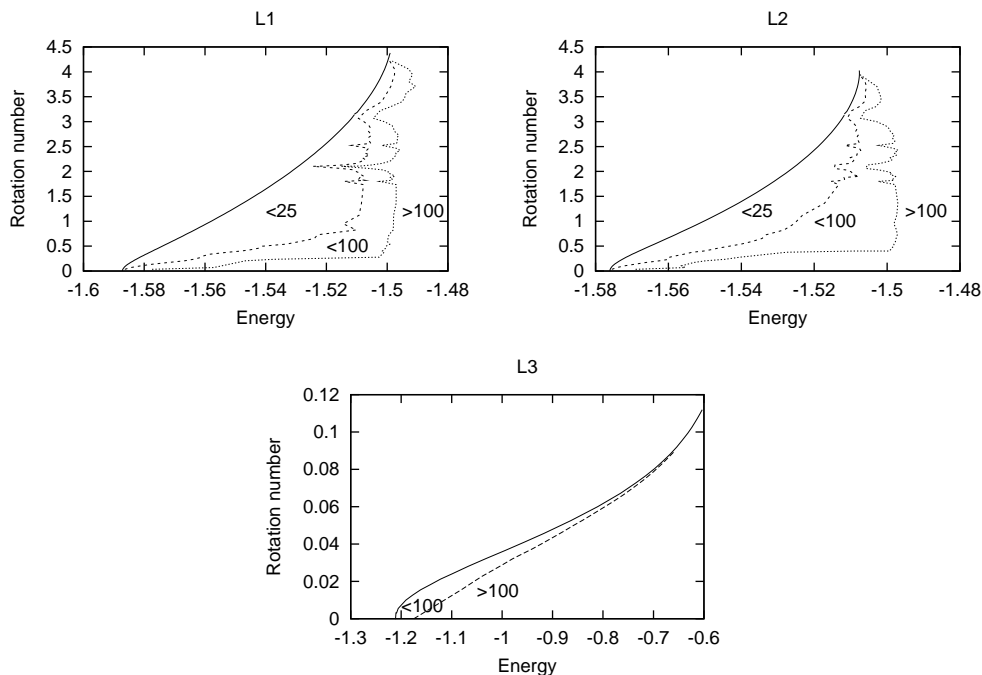


Figura E.5: Regions en el pla  $h$ - $\rho$  que contenen les famílies biparamètriques de tors invariants al voltant de les famílies halo de  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ . Com a la figura anterior, mostrem el nombre d'harmònics usat per al càlcul de tors.

Les vores inferiors d'aquestes regions són compartides amb les de les regions mostrades a la Figura E.4. El vèrtex inferior-esquerre dels tres gràfics correspon al vèrtex número 1 dels gràfics de la Figura E.4. Aquest vèrtex correspon a la òrbita plana de bifurcació que origina les famílies halo. En els tres casos, quan  $\rho \rightarrow 0$  tendim a una connexió homoclínica [14].

La vora dreta és fictícia en cert sentit, donat que correspon a atansar el nombre màxim d'harmònics permès. De totes maneres, reflecteix d'una manera clara quan el nombre de rotació  $\rho$  travessa resonàncies d'ordre baix, en els quals els tors col·lapsen a òrbites periòdiques. Els quatre pics principals detectats corresponen a  $\rho = 2\pi/2$ ,  $4\pi/5$ ,  $2\pi/3$  i  $2\pi/4$  (de dalt a baix). El primer i tercer pics corresponen a les resonàncies 1:3 i 1:2, corresponents a les famílies bifurcades de tipus halo mencionades prèviament. Algunes d'aquestes famílies tenen direccions estables, que donen lloc a famílies de tors invariants al voltant. Aquestes famílies també han estat calculades, per a les quals els diagrames  $h$ - $\rho$  es donen a les figures E.6 i E.7.

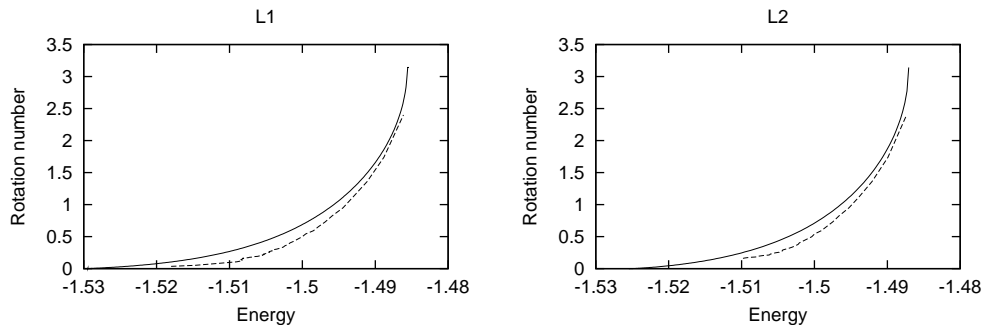


Figura E.6: Regions en el pla  $h$ - $\rho$  que contenen les famílies biparamètriques de tors invariants al voltant de les famílies el·líptiques bifurcades de les òrbites halo per triplicació de període. Entre la corba sòlida i la corba puntejada, el nombre d'harmònics requerit per al càlcul de tors és inferior a 100. A la dreta de la corba puntejada, es requereixen més de 100 harmònics.

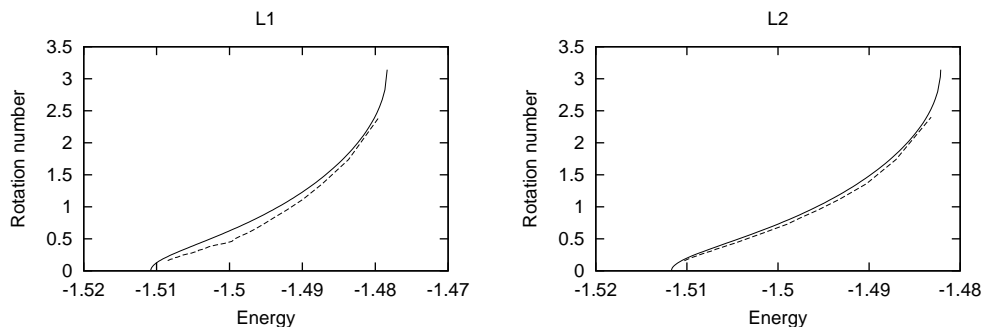


Figura E.7: Regions del pla  $h$ - $\rho$  que contenen les famílies biparamètriques de tors invariants al voltant de les famílies el·líptiques bifurcades de les òrbites halo per duplicació de període. El significat de la línia puntejada és el mateix que a la figura E.6.



Seccions de Poincaré amb  $\{z = 0\}$ 

Per tal de comparar els resultats obtinguts amb els resultats de treballs previs usant la reducció a la varietat central ([10],[16]), en aquesta secció mostrarem la evolució respecte de l'energia del comportament de les seccions de Poincaré per  $z = 0$ ,  $p_z > 0$  dels diferents tipus d'òrbites calculades.

Les figures E.8, E.9 i E.10 mostren els resultats per  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ , respectivament. En totes aquestes figures, hem representat les coordenades  $x$ - $y$  a les interseccions amb  $z = 0$ ,  $p_z > 0$ . Tots els gràfics tenen una estructura similar. La corba exterior de cada gràfic és l'òrbita plana de Lyapunov del nivell d'energia corresponent al gràfic. Com que aquesta òrbita és plana, està completament inclosa a la superfície de secció, i és l'única òrbita que ho està. El moviment dins la regió fitada per la òrbita plana de Lyapunov és quasiperiòdic, llevat de alguns forats que no poden ser distingits en aquests figures. A tots els gràfics hi ha un punt fix a l'eix  $x$  associat amb l'òrbita de Lyapunov vertical.

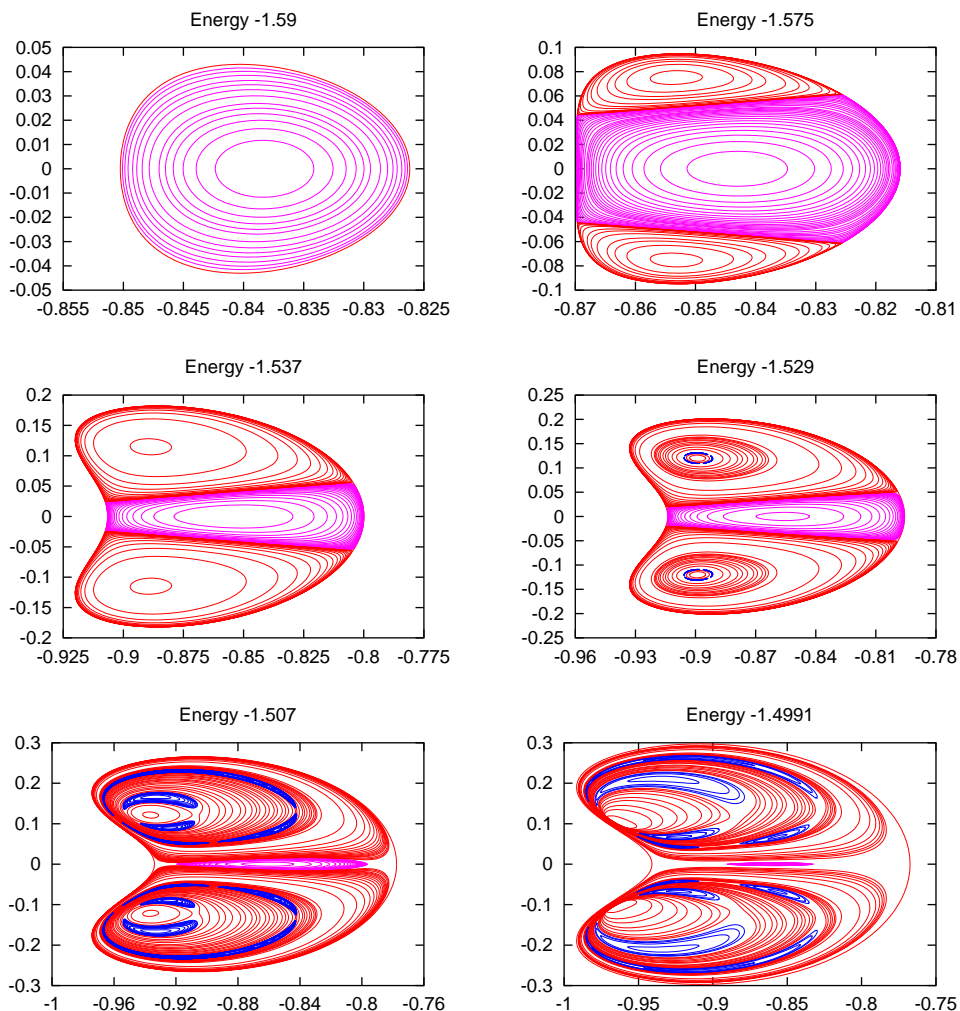


Figura E.8: Llesques a energia constant de la secció  $z = 0$ ,  $p_z > 0$  dels tors invariants al voltant de  $L_1$ .

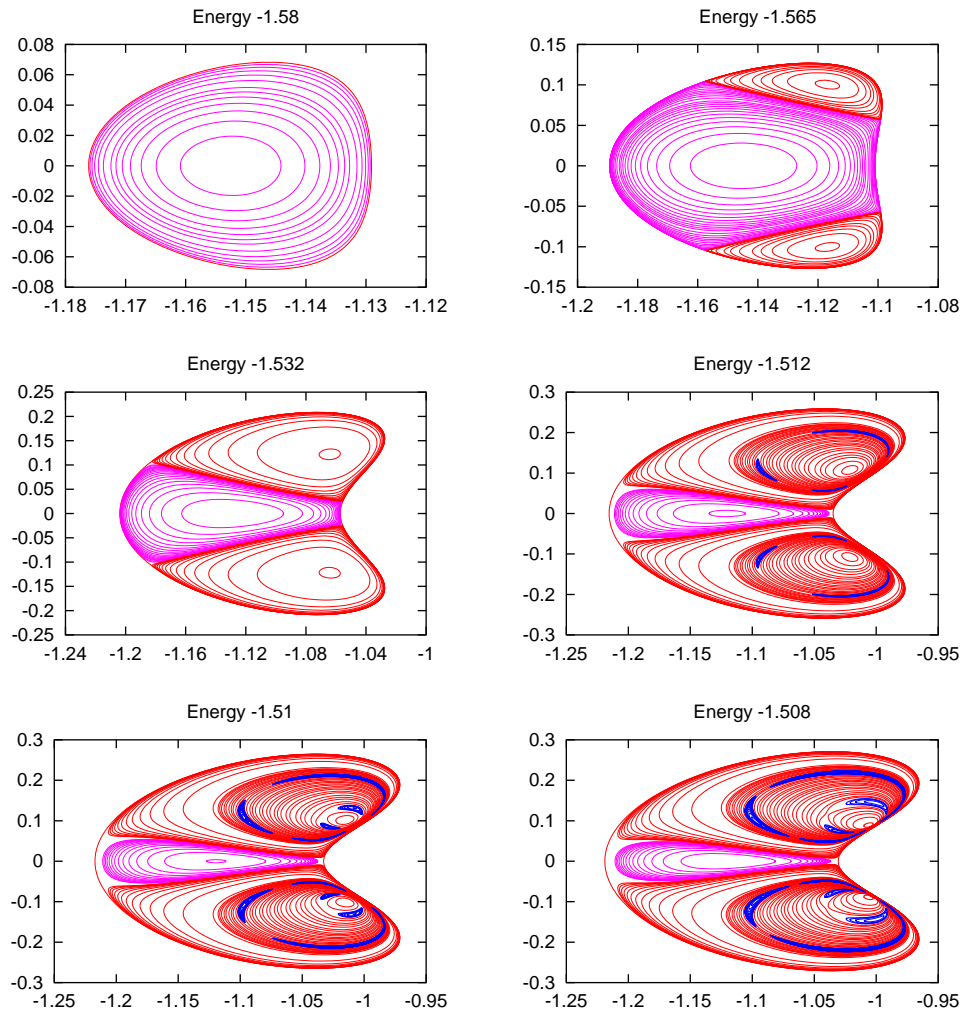


Figura E.9: Llesques a energia constant de la secció  $z = 0$ ,  $p_z > 0$  dels tors invariants al voltant de  $L_2$ .

Per als tres punts d'equilibri, i per a valors petits de l'energia, tot el gràfic està format per corbes invariants envoltant el punt fix associat a l'òrbita vertical. Aquestes corbes corresponen a les interseccions de les trajectòries de tipus Lissajous al voltant de l'òrbita periòdica vertical. Als nivells d'energia associats a la primera bifurcació de la família plana de Lyapunov, apareixen les òrbites halo. Això es pot veure clarament a les representacions de l'aplicació de Poincaré, donat que apareixen dos punts fixos addicionals envoltats de corbes invariants. En incrementar els valors de l'energia, les famílies d'òrbites halo de  $L_1$  i  $L_2$  tenen dues bifurcacions rellevants, per triplicació i duplicació de període. Les dues bifurcacions són detectades per les representacions de Poincaré. Aquesta estructura addicional no ha estat detectada per al cas de  $L_3$ . Tal com s'ha dit, entre les famílies bifurcades n'hi ha amb direccions estables, que estan envoltades per tors invariants. Aquests tors donen lloc a la estructura de "cadena d'illes", típica d'aplicacions 2-dimensionals preservant àrea. Per mostrar aquest comportament amb més claredat, a les figures E.11 i E.12 mostrem una ampliació de les òrbites periòdiques

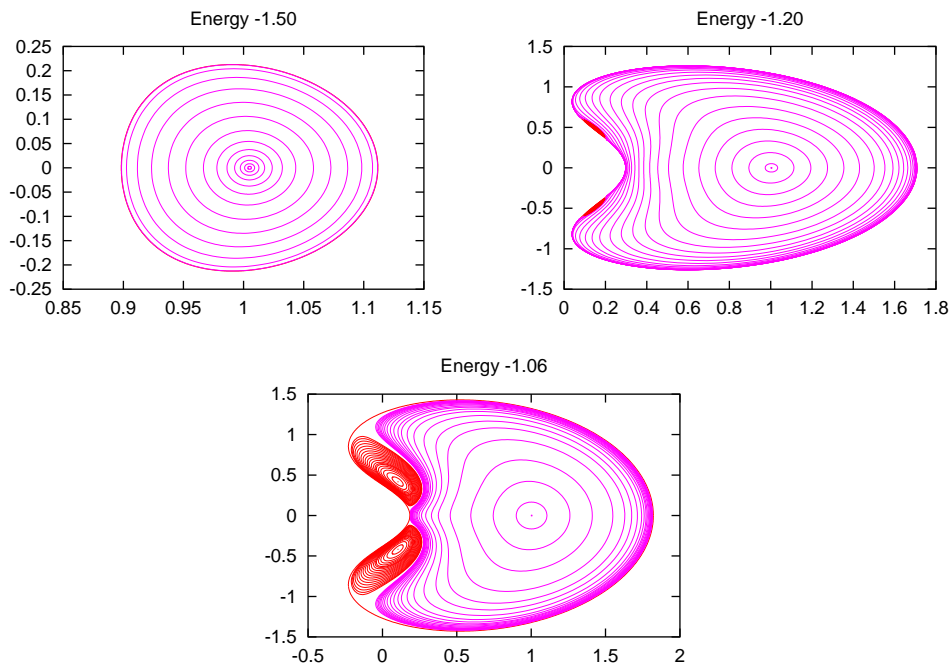


Figura E.10: Llesques a energia constant de la secció  $z = 0$ ,  $p_z > 0$  dels tors invariants al voltant de  $L_3$ .

bifurcades i els tors invariants que les envolten.

La regió entre els tors envoltant l'òrbita vertical de Lyapunov i els tors al voltant de les òrbites halo és omplerta amb les traces, sobre la superfície de secció, de les varietats invariants de l'òrbita plana de Lyapunov. Aquestes varietats actuen com a separatrius entre els dos tipus de moviment. El mateix succeeix entre les illes de les òrbites bifurcades de tipus halo i els tors que envolten les òrbites halo. En aquest cas, la regió entre els dos tipus de tors és omplerta amb les traces de les varietats invariants de les òrbites bifurcades de tipus halo hiperbòliques. En totes aquestes regions, el moviment és de tipus caòtic. Amb la metodologia desenvolupada en aquest treball no hem pogut calcular aquestes separatrius, que es poden trobar a [14] per valors de l'energia propers als valors dels punts d'equilibri.

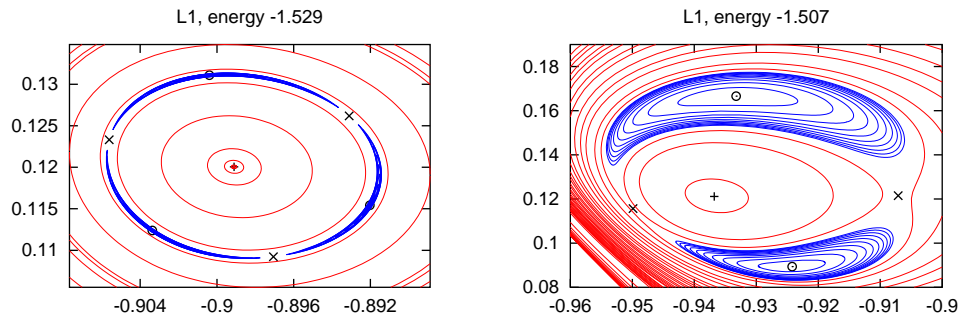


Figura E.11: Ampliació de les dues llesques intermèdies de la figura E.8 mostrant les òrbites bifurcades de tipus halo i els tors invariants que les envolten en el cas de  $L_1$ . Els punts marcats amb + representen les seccions amb  $z = 0$ ,  $p_z > 0$  de les òrbites halo, els punts marcats amb  $\times$  representen les seccions de les bifurcacions hiperbòdiques de les òrbites halo per duplicació o triplicació de període, i els punts marcats amb  $\odot$  en representen les el·líptiques.

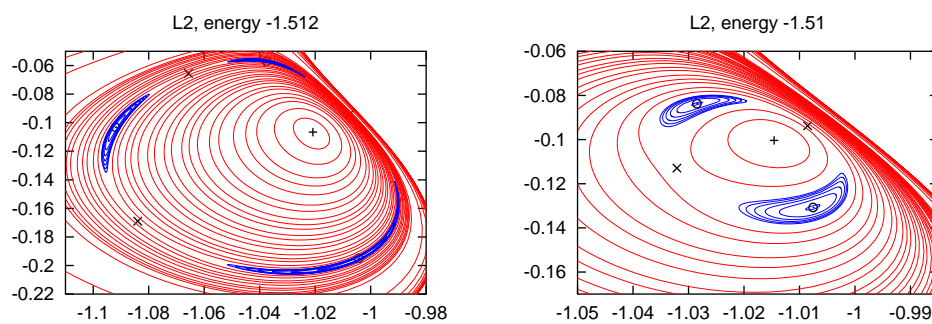


Figura E.12: Ampliació de les dues llesques intermèdies de la figura E.9 mostrant les òrbites bifurcades de tipus halo i els tors invariants que les envolten en el cas de  $L_2$ .

# Bibliography

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1965.
- [2] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. D. Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide*. SIAM, second edition, 1995.
- [3] M. A. Andreu. *The Quasi-Bicircular problem*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, 1999.
- [4] L. S. Blackford, J. Choi, A. Cleary, E. D'Azevedo, J. Demmel, I. Dhillon, J. Dongarra, S. Hammarling, G. Henry, A. Petitet, K. Stanley, D. Walker, and R. C. Whaley. *ScaLAPACK Users' Guide*. SIAM, 1997.
- [5] W. L. Briggs and V. E. Henson. *The DFT: an owner's manual for the Discrete Fourier Transform*. SIAM, 1995.
- [6] E. O. Brigham. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice-Hall, 1988.
- [7] E. Castellà and A. Jorba. On the vertical families of two-dimensional tori near the triangular points of the bicircular problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 76:35–54, 2000.
- [8] P. R. Escobal. *Methods of Astrodynamics*. John Wiley & Sons, 1968.
- [9] G. H. Golub and C. R. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, third edition, 1996.
- [10] G. Gómez, À. Jorba, J. Masdemont, and C. Simó. *Dynamics and Mission Design Near Libration Point Orbits – Volume 3: Advanced Methods for Collinear Points*. World Scientific, 2000.
- [11] G. Gómez, A. Jorba, J. Masdemont, and C. Simó. *Dynamics and Mission Design Near Libration Point Orbits – Volume 4: Advanced Methods for Triangular Points*. World Scientific, 2000.
- [12] G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez, and C. Simó. *Dynamics and Mission Design Near Libration Point Orbits – Volume 1: Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points*. World Scientific, 2000.

- [13] G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez, and C. Simó. *Dynamics and Mission Design Near Libration Point Orbits – Volume 2: Fundamentals: The Case of Triangular Libration Points*. World Scientific, 2000.
- [14] G. Gómez and J. J. Masdemont. Some zero cost transfers between halo orbits. *Advances in the Astronautical Sciences*, 105:1199–1216, 2000.
- [15] M. Hénon. Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem. *Astronomy & Astrophysics*, 28:415–426, 1973.
- [16] A. Jorba and J. J. Masdemont. Dynamics in the center manifold of the restricted three-body problem. *Physica D*, 132:189–213, 1999.
- [17] À. Jorba and C. Simó. On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients. *Journal of Differential Equations*, 98(1):111–124, 1992.
- [18] J. Laskar. The chaotic motion of the solar system. a numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, 88:266–291, 1990.
- [19] J. Laskar. Introduction to frequency map analysis. In C. Simó, editor, *Hamiltonian Systems With Three or More Degrees of Freedom*, pages 134–150. Kluwer Academic Pub., 1999.
- [20] J. Laskar, C. Froeschlé, and A. Celletti. A measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping. *Physica D*, 56:253–269, 1992.
- [21] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1987.
- [22] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov, and O. I. Marichev. *Integrals and Series*, volume 1. Gordon and Breach Science Publishers, 1988.
- [23] D. Richardson. Analytical construction of periodic orbits about the collinear points. *Celestial Mechanics*, 22(3):241–253, 1980.
- [24] C. Simó. On the analytical and numerical approximation of invariant manifolds. In D. Benest and C. Froeschlé, editors, *Modern methods in Celestial Mechanics*, pages 285–330. Editions Frontières, 1990.
- [25] C. Simó, G. Gómez, À. Jorba, and J. Masdemont. The bicircular model near the triangular libration points of the RTBP. In A. Roy and B. Steves, editors, *From Newton to Chaos*, pages 343–370. Plenum Press, 1995.
- [26] E. M. Standish. User’s guide to the jpl lunar and planetary ephemeris export package. Technical report, Jet Propulsion Laboratory, 1985.
- [27] E. M. Standish. JPL planetary and lunar ephemerides, DE405/LE405. Technical Report JPL IOM 314.10-127, Jet Propulsion Laboratory, 1998.

- 
- [28] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag, 1983.
- [29] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag, second edition, 1993.
- [30] V. Szebehely. *Theory of orbits*. Academic Press, 1967.
- [31] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 1940.
- [32] C. Zagouras and P. Kazantzis. Three-dimensional periodic oscillations generating from plane periodic ones around the collinear lagrangian points. *Astrophysics Space Science*, 61(4):389–409, 1979.