

## Contribució a l'estudi del problema restringit de 3 cossos per a valors petits del paràmetre de masses

Antoni Benseny Ardiaca

**ADVERTIMENT.** La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

**ADVERTENCIA.** La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR ([www.tesisenred.net](http://www.tesisenred.net)) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

**WARNING.** On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

CONTRIBUCIO A L'ESTUDI DEL.  
PROBLEMA RESTRINGIT DE 3  
COSSOS PER A VALORS PETITS  
DEL PARAMETRE DE MASSES.

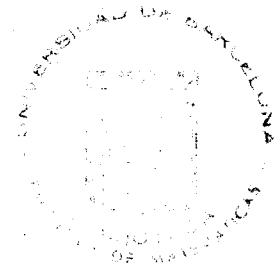
Tesi!  
BLIV-

Memòria presentada per Antoni  
Benseny Ardiaca per aspirar al  
grau de Doctor en Matemàtiques  
(per la Universitat de Barcelona  
na).

CONTRIBUCIO A L'ESTUDI DEL  
PROBLEMA RESTRINGIT DE 3  
COSSOS PER A VALORS PETITS  
DEL PARAMETRE DE MASSES.

*Tesis*  
*BEN-*

Memòria presentada per Antoni  
Benseny Ardiaca per aspirar al  
grau de Doctor en Matemàtiques  
(per la Universitat de Barcelo  
na).





Carles Simó Torres,  
Catedràtic d'Anàlisi Numèrica de la  
Facultat de Matemàtiques de la  
Universitat de Barcelona,

**CERTIFICA:**

Que la present memòria ha estat realitzada  
sota la seva direcció per Antoni Benseny  
Ardiaca, i que constitueix la seva tesi  
per aspirar al grau de Doctor en Matemà-  
tiques.

Barcelona, a 3 de Setembre de 1984.

*C. Simó*

*A la Fanny*

## INDEX

Introducció. . . . .	1
Capítol I: PRELIMINARS.. . . .	4
1. FORMULACIÓ DELS PROBLEMES DE KEPLER I RESTRINGIT DE 3 COSSOS.	
1.1. El problema de 2 cossos i la seva reducció al problema de Ke pler.. . . . .	5
1.2. Lleis de conservació.. . . . .	7
1.3. Orbites circulars dels problemes de Kepler i de 2 cossos.. .	10
1.4. El problema restringit en diversos sistemes de referència. .	11
1.5. Formalisme hamiltonià. . . . .	15
2. SOLUCIONS DEL PROBLEMA DE KEPLER.	
2.1. Introducció. . . . .	20
2.2. Integració de les quadratures. . . . .	21
2.3. Solucions del problema de Kepler en funció de les anomalies excèntriques.. . . . .	23
3. REGULARITZACIÓ.	
3.1. Introducció. . . . .	25
3.2. Regularització de Levi-Civita. . . . .	26
3.3. "Blow up". . . . .	28
4. VARIETATS INVARIANTS DEL PROBLEMA DE KEPLER.	
4.1. Varietats invariants $I_{EK}$ .. . . .	30
4.2 Varietats invariants $I_C$ . . . . .	34
5. QUASI-INTEGRABILITAT DEL PROBLEMA RESTRINGIT AMB $m \ll 0$ .	
5.1. Introducció. . . . .	57
5.2. Variables d'acció-anglè en la zona el·líptica del problema de Kepler. . . . .	58

5.3. El problema restringit amb $m=0$ com problema quasi-integrable.	62
<b>Capítol II: EL PROBLEMA RESTRINGIT AMB <math>m=0</math> I <math>C</math> SUFICIENTMENT GRAN.</b>	<b>64</b>
<b>1. DEFINICIONS I EL CAS <math>m=0</math>.</b>	
1.1. Variables de McGehee.	65
1.2. Classificació de les òrbites i punts de retorn.	66
1.3. Estudi dels conjunts de punts de retorn per a $m=0$ .	69
<b>2. ESTUDI QUALITATIU.</b>	
2.1. Introducció.	71
2.2. Òrbites parabòliques i varietats invariants.	73
2.3. Estudi qualitatiu dels conjunts $P_{\pm 1}^0$ .	75
2.4. L'aplicació $T$ .	76
2.5. Estudi qualitatiu de $P_{\pm n}^0$ i $H_{\pm n}^0$ ( $n>1$ ).	80
2.6. Estudi qualitatiu de $E_{\pm}^0$ .	83
<b>3. ESTUDI QUANTITATIU DE <math>P_{\pm 1}^0</math>.</b>	
3.1. Equacions variacionals.	85
3.2. Expressió integral de $\omega_1$ en $P_{\pm 1}^0$ .	87
3.3. Desenvolupament de $\omega_1$ en $P_{\pm 1}^0$ en funció dels $S_m^{(n)}$ .	89
3.4. Expressions dels $S_n^{(m)}$ en funció dels $I_k, J_k, M_{k+2}$ i $N_{k+2}$ ( $k \geq 1$ ).	91
3.5. Desenvolupament asimptòtic dels $I_k, J_k, M_{k+2}$ i $N_{k+2}$ ( $k \geq 1$ ), quan $\delta \rightarrow \infty$ .	93
3.6. Desenvolupament de Fourier de $\omega_1$ en $P_{\pm 1}^0$ .	101
3.7. Desenvolupament de Fourier de $q_1$ en $P_{\pm 1}^0$ .	103
<b>4. UN MODEL PER A UN ESTUDI QUANTITATIU.</b>	
4.1. Estudi quantitatiu de $P_{\pm n}^0$ i $H_{\pm n}^0$ ( $n>1$ ).	106
4.2. Anàlisi del model. Reducció a l'aplicació standard i simulació.	110



4.3. Aplicació astronòmica. . . . .	122
Apèndix. Coeficients $\alpha_k^{(n)}$ i $\beta_k^{(n)}$ , ( $n \geq 0$ , $k=n(-2)0$ ).. . . .	124
<b>Capítol III: ORBITES PARABÓLIQUES DE COL·LISIO EN EL PROBLEMA RES-</b>	
<b>TRINGIT AMB <math>m \neq 0</math></b> .. . . .	125
1. Introducció. . . . .	126
2. Equació de la variació de l'energia de la binària. . . . .	127
3. Càlcul de les funcions F i G i conclusions. . . . .	130
<b>Capítol IV: APROXIMACIO DELS PASSOS PROP DEL SECUNDARI PER ARCS D'OR</b>	
<b>BITES KEPLERIANES.</b> . . . .	136
1. Introducció. . . . .	137
2. Ordre de pertorbació dels arcs d'òrbites exteriors a $C_\alpha$ . . . . .	138
3. Ordre de pertorbació dels arcs d'òrbites interiors a $C_\alpha$ . . . . .	140
4. Distància al secundari d'empalme òptima. . . . .	142
5. Òrbita d'empalme kepleriana. . . . .	143
<b>Bibliografia</b> .. . . .	146

INTRODUCCIÓ.

El problema de 3 cossos i, en particular, el problema restringit de 3 cossos, ha estat i és, com diu Wintner, la pedra de toc per als matemàtics de les successives generacions de Newton fins ara. Cada generació ha emprat les eines que estaven al seu abast per ampliar coneixements sobre aquest problema.

En aquesta memòria exposem la nostra contribució a l'estudi del problema restringit, usant una combinació d'eines analítiques i, quan s'escau, numèriques per a tractar idees essencialment geomètriques.

El capítol I constitueix una exposició d'aspectes ben coneguts del problema giratori de Kepler, ja que ens mirarem el problema restringit per a valors petits del paràmetre de masses com una pertorbació d'aquell; inclou també detalls sobre regularització i quasi-integrabilitat en la zona el·líptica del problema restringit. La seva lectura pot ésser omesa per tota persona familiaritzada amb el problema, excepte pel que fa a la notació usada.

En el capítol II es tracta el comportament de les òrbites prop de les parabòliques del problema giratori de Kepler per a valors grans de la constant de Jacobi i paràmetre de masses petit. És a dir, centrem el nostre estudi en la component no fitada de la regió de Hill. Un estudi preliminar, mostrant l'existència de moviments oscil·latoris, va ésser fet a [21]. Ací completem la informació sobre la frontera de la regió d'òrbites "el·líptiques" i, seguint idees d'Alekseev ([4]), fem un estudi

qualitatiu de les diverses "cintes" d'òrbites d'escapament i captura, després d'un nombre donat de passos pel "pericentre". Un model aproximat, usant la informació anterior ens permet de fer l'estudi quantitatiu de les dites cintes i, mitjançant un ús convenient de l'aplicació standard, determinem la frontera de la zona estable-Lagrange.

En el capítol III ens situem en un marc completament diferent; ara, el valor de la constant de Jacobi és petit, en valor absolut, i ens preguntem per les òrbites que experimenten col·lisió amb el primari i que van (venen) parabòlicament al (del) infinit. Es mostra que el nombre de tals òrbites (deixant de banda possibles passos prop del secundari) queda determinat en funció de la constant de Jacobi.

En el capítol IV es tracta el problema dels passos prop del secundari. Aquest, si és prou petit, no exerceix influència apreciable sobre el cos de massa menyspreable a no ser que passi a distància suficientment petita. En funció de la constant de Jacobi es determina el "disc d'influència" del secundari i les variacions que produeix tant en posició i velocitat com en moment angular i, per tant, energia; tot això, quan el cos de massa menyspreable està en moviment hiperbòlic respecte al secundari. El moviment global estarà constituït per arcs de cònica respecte al primari, vistos en coordenades sinòdiques i lleugerament pertorbats, empalmats mitjançant arcs d'hipèrbola respecte al secundari, lleugerament pertorbats.

Voldria expressar el meu agraïment al Dr. Carles Simó que, gràcies a la seva excel·lent direcció, m'ha permès d'afrontar amb entusiasme els temes estudiats; al Dr. Amadeo Delshams per les seves suggeriments i comentaris; a la M<sup>a</sup> Carmen Berbel, per la seva col·laboració en l'elaboració dels dibuixos; així com, als meus familiars i amics pel seu recolzament moral.

CAPÍTOL I.  
PRELIMINARS.

## 1. FORMULACIÓ DELS PROBLEMES DE KEPLER I RESTRINGIT DE 3 COSSOS.

### 1.1. El problema de 2 cossos i la seva reducció al problema de Kepler.

Considerem un sistema format per 2 cossos puntuals de masses  $M_1$  i  $M_2$  que s'exerceixen una força mútua, que depèn només de la distància entre ells, dirigida segons la recta d'unió, suposant que ambdós cossos es mouen en l'espai afí  $A^3$  (problema de 2 cossos).

Fixant un origen de coordenades i notant per  $Z_1(t)$  i  $Z_2(t)$  els vectors de posició corresponents en l'instant  $t$ , les equacions de Newton que regeixen el moviment del sistema poden escriure's com:

$$M_1 \ddot{Z}_1 = - \frac{\partial U}{\partial Z_1} \quad , \quad M_2 \ddot{Z}_2 = - \frac{\partial U}{\partial Z_2} \quad ;$$

ja que, en aquest cas, les forces d'interacció poden considerar-se provinents d'un potencial  $U$  que depèn només de la distància entre els cossos:  $U=U(|Z_2-Z_1|)$ . S'usaran punts per indicar les derivades respecte al temps.

D'altra banda, podem prendre com a variables del problema els vectors de posició del centre de masses  $Z_0$  i de posició relativa  $Z$  del cos de massa  $M_2$  respecte al de massa  $M_1$ :

$$Z_0 = \frac{M_1 Z_1 + M_2 Z_2}{M_1 + M_2} \quad , \quad Z = Z_2 - Z_1 \quad .$$

Les equacions del moviment són:

$$\ddot{Z}_0 = 0 \quad , \quad \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \ddot{Z} = - \frac{\partial U}{\partial Z} \quad ;$$

amb  $U=U(|Z|)$ . D'on:

El centre de masses del sistema dels 2 cossos té un moviment rectilini i uniforme. El moviment del cos de massa  $M_2$  respecte al de massa  $M_1$  és el d'un cos de massa  $M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  (massa reduïda) en un camp de forces (central) de potencial  $U$  que només depèn del mòdul del vector de posició  $Z$ , que notem per  $R$ .

El problema gravitatori de 2 cossos és el problema de 2 cossos amb potencial  $U = -G(M_1 + M_2) / |Z_2 - Z_1|$  ( $G$ , constant de la gravitació universal); les anteriors consideracions permeten de reduir-lo a un problema de camp central, el problema de Kepler de massa  $M = M_1 + M_2$ : estudi del moviment en un camp de forces dirigit cap a l'origen de coordenades, de mòdul inversament proporcional a la distància a l'origen:

$$\ddot{Z} = -\frac{\kappa}{R^3} Z \quad , \quad \kappa = GM \quad (1.1)$$

Noti's que el valor de la massa reduïda és irrellevant en l'estudi del seu moviment.

## 1.2. Lleis de conservació.

Per a qualsevol òrbita  $Z(t)$  d'un problema de camp central, el vector moment angular, definit per  $K(t) = Z(t) \wedge \dot{Z}(t)$ , és constant al llarg de tota l'òrbita:

$$\dot{K}(t) = 0 \quad (\text{llei de la conservació del moment angular}).$$

En efecte,  $\dot{K}(t) = \dot{Z}(t) \wedge \dot{Z}(t) + Z(t) \wedge \ddot{Z}(t) = 0$ , ja que en un camp central  $Z(t)$  i  $\dot{Z}(t)$  són colineals.

Les òrbites d'un problema de camp central seran, per tant, planes (en tot moment  $t$ ,  $\dot{Z}(t)$  és normal al vector  $K$ , constant per a tota l'òrbita). Tal fet permet de restringir l'estudi del moviment al pla de l'òrbita. Considerarem el problema en el pla del moviment, fent ús indistintament de la notació en coordenades i de la notació complexa.

Si usem coordenades polars  $(R, \theta)$ :  $Z = R e^{i\theta}$ , les components radial i angular de la velocitat són, respectivament,  $\dot{R}$  i  $R\dot{\theta}$ :

$$\dot{Z} = \dot{R}(e^{i\theta}) + R\dot{\theta}(ie^{i\theta}). \quad (1.2)$$

El moment angular s'expressa en coordenades polars com:

$$Z \wedge \dot{Z} = R^2 \dot{\theta} (e^{i\theta} \wedge ie^{i\theta}).$$

En el problema pla, el vector  $K$  es representa per l'escalar  $R^2 \dot{\theta}$ , que notarem igualment per  $K$ , ja que es coneix perfectament que té la direcció normal al pla del moviment.

$K$  es 2 vegades la variació de l'àrea escombrada pel vector de posició per unitat de temps (velocitat areolar), entenent el signe d'aquesta àrea com el de  $\dot{\theta}$ .



La interpretació física de la conservació del moment angular la dóna la 2ª llei de Kepler que afirma:

En un problema de camp central, la velocitat areolar és constant en les òrbites; el radi vector escombra àrees iguals en temps iguals.

L'energia total, definida per  $E(Z, \dot{Z}) = \frac{1}{2} |\dot{Z}|^2 + U(Z)$  és constant al llarg de les òrbites dels problemes amb potencials independents del temps:

$$\frac{d}{dt} E(Z(t), \dot{Z}(t)) = 0 \quad (\text{llei de la conservació de l'energia}).$$

Ara bé, la conseqüència analíticament important de les lleis de conservació del moment angular i de l'energia és la possibilitat d'integració per quadratures dels problemes de camp central independents del temps; en particular, del problema de Kepler.

Derivant l'expressió (1.2) i substituint en l'equació (1.1), s'obtenen la llei de la conservació del moment angular i la relació:

$$\ddot{R} = \frac{dU}{dR} + R\dot{\theta}^2 = -\frac{dU}{dR} + \frac{K^2}{R^3},$$

que escrivim com:

$$\ddot{R} = -\frac{dV_K}{dR},$$

definint el potencial efectiu (per al moment angular K) per:

$$V_K(R) = U(R) + \frac{K^2}{2R^2}.$$

La llei de la conservació de l'energia dóna directament la quadratura:

$$\int dt = \int \frac{dR}{\pm (2(E - V_K(R)))^{1/2}} \quad (1.3)$$

i, aprofitant la conservació del moment angular, l'altra quadratura:

$$\int d\theta = \int \frac{KdR}{\pm(2(E-V_K(R)))^{1/2}} \quad (1.4)$$

La integració d'ambdues quadratures en la secció 2 permet d'obtenir les solucions del problema de Kepler.

### 1.3. Òrbites circulars dels problemes de Kepler i de 2 cossos.

Fixat el moment angular  $K$ , les òrbites circulars d'aquest problema tenen lloc per als valors de  $R$  que són extrems del potencial efectiu  $V_K(R)$ . Això és, quan  $R=d=K^2$  (cal que  $K \neq 0$ ), o bé, equivalentment  $d=\kappa/(-2E)$  (cal que  $E < 0$ ).

Notem que  $2EK^2/\kappa+1=0$  en les òrbites circulars i que

$$\dot{\theta} = \kappa^{1/2} d^{3/2} = n.$$

Es a dir:

Les òrbites circulars de radi  $d$  del problema de Kepler existeixen per als valors de  $K=d^{1/2}$  i  $E=-\kappa/(2d)$ , acomplint-se l'equació  $2EK^2/\kappa+1=0$ . Les dites òrbites són recorregudes a velocitat angular constant  $n$ .

Considerem ara una òrbita circular donada  $Z(t)$  de radi  $d$  tal que  $Z(t_0)=(1,0)$ ; la dita òrbita es recorrerà segons:

$$Z(t-t_0) = (d\cos(nt), d\sin(nt))$$

i li corresponen les òrbites circulars del problema de 2 cossos:

$$Z_1(t-t_0) = \left(\frac{M_2 d}{M} \cos(nt), \frac{M_2 d}{M} \sin(nt)\right), \quad Z_2(t-t_0) = \left(-\frac{M_1 d}{M} \cos(nt), -\frac{M_1 d}{M} \sin(nt)\right).$$

Normalitzant les masses per  $M=1$  (notarem  $M_1=1-m$ ,  $M_2=m$ ,  $m \in [0, 1/2)$ ); fent un escalat de l'espai i del temps de forma que  $n=d=1$  (llavors,  $\kappa=G=1$ ) i considerant  $t_0=0$ , aquestes òrbites circulars particulars del problema de 2 cossos seran:

$$Z_1(t) = (m \cos t, m \sin t), \quad Z_2(t) = ((m-1)\cos t, (m-1)\sin t)$$

i estan associades a la del problema de Kepler:

$$Z(t) = (\cos t, \sin t).$$

#### 1.4. El problema restringit en diversos sistemes de referència.

El problema restringit (de 3 cossos, pla i circular) consisteix en l'estudi de les característiques del moviment d'un cos de massa menyspreable, en el sentit que es precisarà, sotmès a l'acció (gravitatòria newtoniana) de 2 cossos (anomenats primaris) que descriuen òrbites circulars al voltant de llur centre de masses a velocitat angular constant de forma que el cos de massa menyspreable no modifica llur moviment; a més, els tres cossos es mouen en un mateix pla. Quan un dels primaris tingui una massa més gran que la de l'altre, en direm secundari a aquest últim.

El qualificatiu de restringit es deu a que és un problema simplificat del problema de 3 cossos pla, en que 2 cossos es mouen sempre en òrbites del problema de 2 cossos (en aquest cas, circulars) considerant insignificant l'acció del tercer cos sobre aquells.

Aquest problema pot considerar-se inclòs en el camp dels sistemes dinàmics. Per a la major part de problemes que conformen la teoria general de sistemes dinàmics són referència obligada els treballs de Poincaré, en particular, [27]. En [34] es pot trobar una exposició monogràfica del problema restringit, així com, les referències bàsiques i, en [1], es presenta aquest problema dins d'una teoria general de sistemes hamiltonians.

Mantenint les consideracions finals de l'apartat anterior quant a les òrbites circulars, referint-les ara a les òrbites dels primaris; el potencial del problema restringit en coordenades cartesianes (X,Y) serà:

$$U(X,Y,t) = -(1-m)/R_1(t) + m/R_2(t)$$

amb  $R_1^2(t) = (X-m \cos t)^2 + (Y-m \sin t)^2$ ,  $R_2^2(t) = (X-(m-1)\cos t)^2 + (Y-(m-1)\sin t)^2$ ,

i les equacions de Newton del moviment:

$$\ddot{X} = -(1-m)(X-m \cos t)/R_1^3(t) - m(X-(m-1)\cos t)/R_2^3(t) ,$$

$$\ddot{Y} = -(1-m)(Y-m \sin t)/R_1^3(t) - m(Y-(m-1)\sin t)/R_2^3(t) .$$

Observem les singularitats de les equacions en les col·lisions amb els primaris ( $R_1=0$ ,  $R_2=0$ ). L'acceleració s'hi fa infinita.

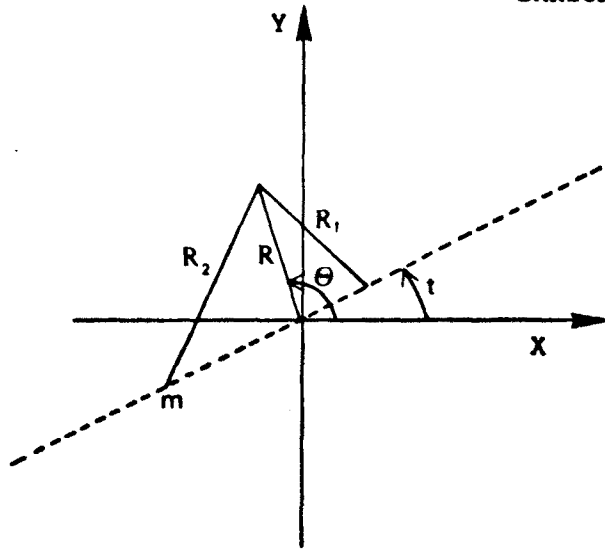
Per a un tractament global que permeti l'estudi de les col·lisions cal regularitzar el problema (secció 3).

El sistema de referència usat té l'origen en el centre de masses dels primaris, s'anomena baricèntric. Notem que és inercial i que, en l'instant  $t=0$ , els primaris són a l'eix X: en direm sideri per aquesta raó.

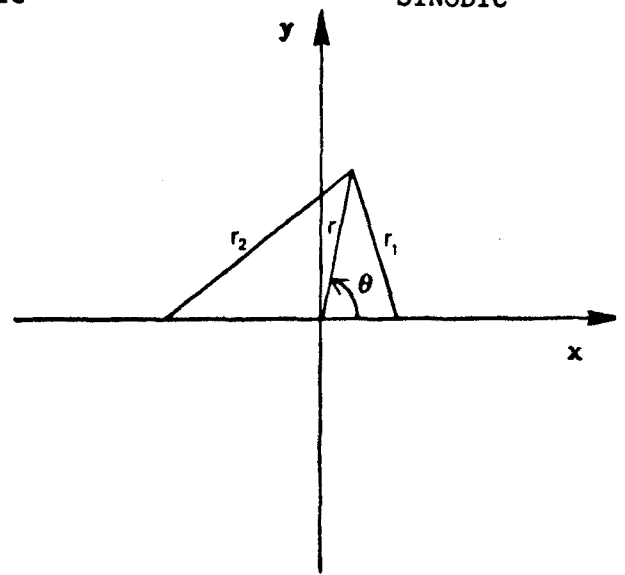
Anàlogament, pot parlar-se dels sistemes de referència heliocèntrics i jovicèntrics considerant l'origen en els primaris de masses  $1-m$  i  $m$  (pensant que podrien ésser el Sol i Júpiter).

Un altre sistema de referència de molta utilitat és el sinòdic que no és inercial sinó que gira amb els 2 primaris de manera que queden fixats en les posicions cartesianes  $(m,0)$  i  $(m-1,0)$ , en el sistema bari-cèntric; en  $(0,0)$  i  $(-1,0)$ , en l'heliocèntric, i en  $(1,0)$ ,  $(0,0)$ , en el jovicèntric.

SIDERI

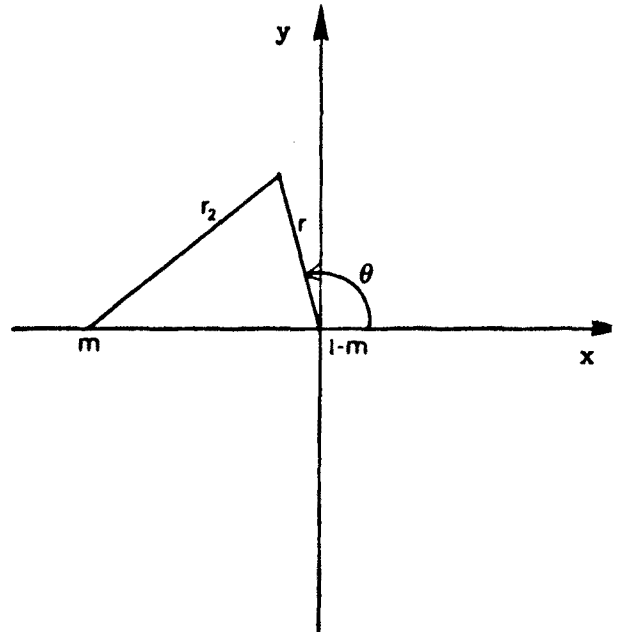
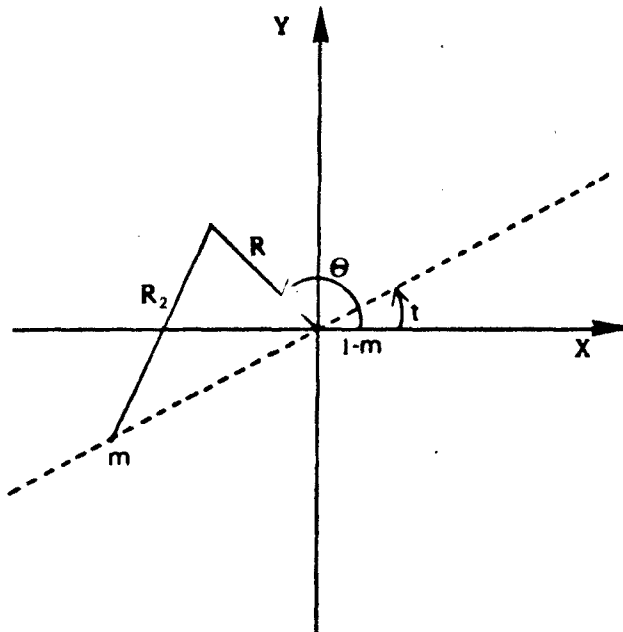


BARICÈNTRIC



SINÒDIC

HELIOCÈNTRIC



JOVICÈNTRIC

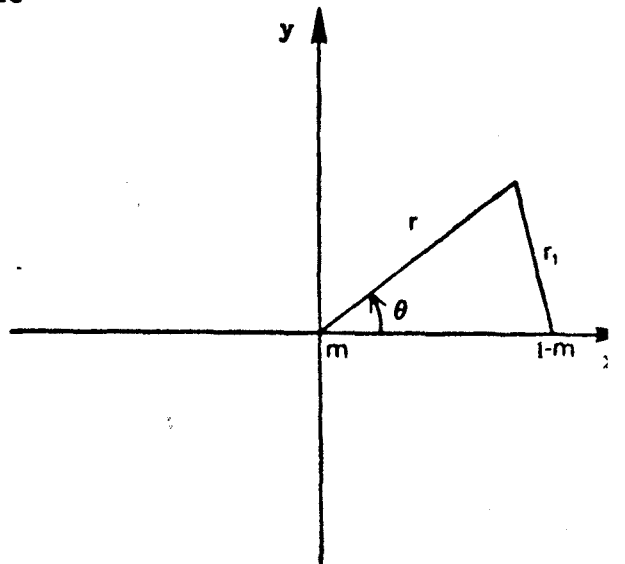
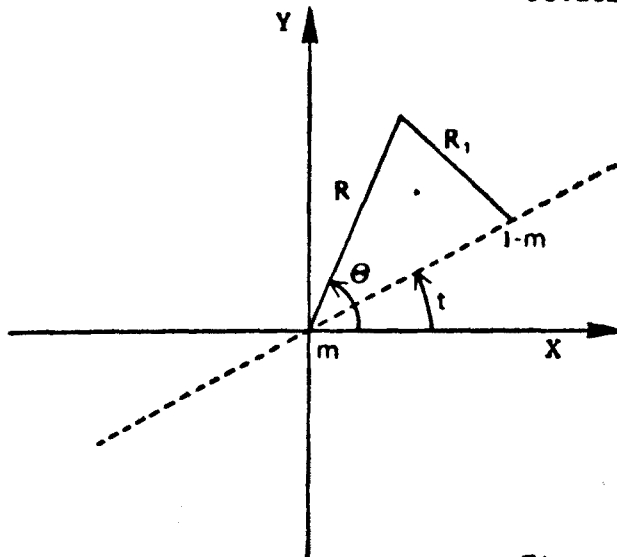


Figura 1.1

No es distingiran en aquesta memòria els noms de les variables quant a l'origen dels sistemes de referència, que s'especificarà prèviament.

Notarem amb lletres majúscules les coordenades referides al sistema sideri:  $(X,Y)$ , les coordenades cartesianes i  $(R,\theta)$ , les polars; les coordenades en el sistema sinòdic es notaran amb lletres minúscules:  $(x,y)$ , les cartesianes i  $(r,\theta)$ , les polars.

En la figura 1.1 es donen dibuixos que clarifiquen les definicions i notacions donades.

### 1.5. Formalisme hamiltonià.

Una bona introducció als sistemes hamiltonians integrables i quasi-integrables es troba a [12] ; ens hi referim en aquesta memòria en cas de manca d'alguna definició o resultat sobre aquests tipus de sistemes. Esmentem però les línies generals de més interès en aquest treball.

Els sistemes d'equacions associats als problemes de Kepler i restringit de 3 cossos es defineixen sobre varietats simplèctiques  $M$  que són els fibrats cotangents d'altres varietats  $V$  (varietats de configuració) :  $M=T^*V$  . Per a aquests problemes, les varietats de configuració són els oberts formats suprimint les col·lisions corresponents del pla del moviment. Les varietats  $M$  tenen una estructura simplèctica natural i en els problemes en qüestió són  $M=V \times \mathbb{R}^2$ . Vegi's [7] .

En coordenades locals  $(q_1, q_2, p_{q_1}, p_{q_2})$ , la forma simplèctica ve donada per  $\Omega = \sum_{i=1}^2 dq_i \wedge dp_{q_i}$  . Les coordenades de tipus  $p_q$  s'anomenen moments conjugats de les variables de posició  $q$ .

Les equacions del moviment en aquestes coordenades locals seran de la forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_{q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,2) \quad (\text{equacions de Hamilton});$$

essent  $H$  l'expressió local en aquestes coordenades d'una funció analítica real sobre  $M$  que s'anomena hamiltonià. A més:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} . \quad (1.5)$$

Les diferents transformacions de coordenades es faran de tal manera



que conservin l'estructura hamiltoniana del sistemes d'equacions sobre  $M$ . Aquestes transformacions es diuen simplèctiques perquè han de conservar la forma simplèctica  $\Omega$ . Un bon procediment per trobar-les és usar funcions generatrius.

A continuació, donem expressions dels hamiltonians dels problemes en estudi, usant diferents coordenades que corresponen als diferents sistemes de referència esmentats.

Les equacions del moviment no es detallen perquè poden ésser trobades directament a partir de les equacions de Hamilton.

#### Problema de Kepler.

$$H(X, Y, p_X, p_Y) = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2) - (X^2 + Y^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad H(R, \theta, p_R, p_\theta) = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_\theta^2/R^2) - R^{-1}.$$

#### Problema restringit.

##### Referència baricèntrica.

$$H(X, Y, p_X, p_Y, t) = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2) - (1-m)/R_1(t) - m/R_2(t),$$

amb  $R_1(t)$  i  $R_2(t)$  donats anteriorment.

$$H(R, \theta, p_R, p_\theta, t) = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_\theta^2/R^2) - (1-m)/R_1(t) - m/R_2(t),$$

amb  $R_1^2(t) = R^2 - 2mR \cos(\theta - t) + m^2$  i  $R_2^2(t) = R^2 - 2(m-1)R \cos(\theta - t) + (m-1)^2$ .

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - (xp_y - yp_x) - (1-m)/r_1 - m/r_2,$$

amb  $r_1^2 = (x-m)^2 + y^2$  i  $r_2^2 = (x-m+1)^2 + y^2$ .

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_\theta^2/r^2) - p_\theta - (1-m)/r_1 - m/r_2,$$

amb  $r_1^2 = r^2 - 2mr \cos \theta + m^2$  i  $r_2^2 = r^2 - 2(m-1)r \cos \theta + (m-1)^2$ .

Referència heliocèntrica.

$$H(X, Y, p_X, p_Y, t) = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2) - m(-p_X \sin t + p_Y \cos t) - (1-m)/R - m/R_2(t) ,$$

amb  $R^2 = X^2 + Y^2$  i  $R_2^2(t) = (X + \cos t)^2 + (Y + \sin t)^2$  .

$$H(R, \theta, p_R, p_\theta, t) = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_\theta^2/R^2) - m(p_R \sin(\theta - t) + p_\theta \cos(\theta - t)/R) - (1-m)/R - m/R_2(t) ,$$

amb  $R_2^2(t) = R^2 + 2R \cos(\theta - t) + 1$  .

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - ((x+m)p_y - yp_x) - (1-m)/r - m/r_2 ,$$

amb  $r^2 = x^2 + y^2$  i  $r_2^2 = (x+1)^2 + y^2$  .

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_\theta^2) - p_\theta - m(p_r \sin \theta + p_\theta \cos \theta / r) - (1-m)/r - m/r_2 ,$$

amb  $r_2^2 = r^2 + 2r \cos \theta + 1$  .

Referència jovicèntrica.

$$H(X, Y, p_X, p_Y, t) = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2) - (m-1)(-p_X \sin t + p_Y \cos t) - (1-m)/R_1(t) - m/R ,$$

amb  $R_1^2(t) = (X - \cos t)^2 + (Y - \sin t)^2$  i  $R^2 = X^2 + Y^2$  .

$$H(R, \theta, p_R, p_\theta, t) = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_\theta^2/R^2) - (m-1)(p_R \sin(\theta - t) + p_\theta \cos(\theta - t)/R) - (1-m)/R_1(t) - m/R ,$$

amb  $R_1^2(t) = R^2 - 2R \cos(\theta - t) + 1$  .

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - (m-1)((x+m-1)p_y - yp_x) - (1-m)/r_1 - m/r ,$$

amb  $r_1^2 = (x-1)^2 + y^2$  i  $r^2 = x^2 + y^2$  .

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_\theta^2) - p_\theta - (m-1)(p_r \sin \theta + p_\theta \cos \theta / r) - (1-m)/r_1 - m/r ,$$

amb  $r_1^2 = r^2 - 2r \cos \theta + 1$  .

En la referència baricèntrica, els moments associats a les variables radials  $r$  i  $r$  són les velocitats radials. Aquestes són les mateixes en els sistemes de referència sideri i sinòdic centrats en un mateix punt, però són diferents al canviar l'origen de la referència.

Els moments associats a les variables angulars  $\theta$  i  $\theta$  són els moments angulars sideris baricèntrics, tant en el sistema sideri com en el sinòdic; varien al canviar l'origen.

Els hamiltonians representen l'energia de la partícula en el sistema corresponent; aquesta però és diferent en les referències sidèria i sinòdica. Notem que, encara que les energies sidèries siguin diferents al canviar l'origen, això ja no passa per a les sinòdiques. A més, els hamiltonians sinòdics ja no depenen del temps; l'equació (1.5) assegura que són integrals primeres.

Es defineix la integral de Jacobi com el doble de l'energia sinòdica canviada de signe. En coordenades baricèntriques sinòdiques polars, per exemple, la conservació de la integral de Jacobi en un nivell C s'expressa per:

$$\frac{1}{2}(p_r^2 + p_\theta^2/r^2) - p_\theta^2/(1-m)r_1 - m/r_2 = -C/2 .$$

La integral de Jacobi és 2 vegades la diferència entre el moment angular sideri i l'energia sidèria.

#### Cas m=0.

El problema restringit en el cas m=0 es redueix a un problema de Kepler de massa 1 en el que cal evitar les col·lisions amb un cos de massa nul·la que, en un sistema inercial, està girant a velocitat angular unitat respecte a l'origen. Si usem la referència sinòdica, aquest estarà fix a (-1,0). El problema de Kepler vist des d'aquesta referència s'anomena problema giratori de Kepler.

Tant el problema de Kepler com el problema giratori de Kepler són integrables per quadratures en el sentit expressat pel teorema de Liouville ([5], [36]).

En efecte, el hamiltonià i el moment angular sideri són integrals primeres en involució, ja que el primer no depèn del temps i els angles  $\theta$  i  $\theta$  són variables cícliques.

En les seccions següents s'analitzaran conseqüències topològiques i analítiques d'aquest fet.

El problema restringit quan  $m \ll 0$  s'entendrà com una petita pertorbació del problema giratori de Kepler, en molts casos: podrem aplicar-li la teoria dels sistemes hamiltonians quasi-integrables.

## 2. SOLUCIONS DEL PROBLEMA DE KEPLER.

### 2.1. Introducció.

Les lleis de la conservació del moment angular i de l'energia ens donaven les quadratures (1.3) i (1.4) que seran integrades en aquesta secció amb la finalitat d'obtenir les solucions de les equacions del moviment. No s'aconseguiran expressions explícites en funció del temps més que en casos especials. S'obtindran però les solucions en funció de variables independents relacionades amb el temps mitjançant expressions no massa complicades; però és impossible d'aïllar-les en funció del temps mitjançant l'ús de funcions elementals.

El signe en les quadratures és el de la velocitat radial  $p_R$ , aquest canviarà sempre que  $p_R$  s'anul·li. Passarà de negatiu a positiu en aquells punts de l'òrbita a distància mínima de l'origen ( $p_R=0$ ,  $\dot{p}_R>0$ ), que anomenem pericentres i notem per  $(R_-, \theta_-)$ . Anàlogament, en els punts a distància màxima ( $p_R=0$ ,  $\dot{p}_R<0$ ), anomenats apocentres i notats per  $(R_+, \theta_+)$ , el canvi de signe és en la direcció contrària. Les òrbites que no tenen pericentre són de col·lisió. Considerarem les òrbites que en  $t=t_0$  surten de col·lisió amb un angle  $\theta_0$  (definides només per a  $t>t_0$ ) o passen pel pericentre  $(R_-, \theta_-)$ . Els eventuals canvis de signe de les quadratures no presenten problema usant les determinacions de les variables angulars adequadament.

Nota:  $R_+$  compleixen l'equació  $2ER_+^2 + 2R_+ - K^2 = 0$  i, per tant, poden trobar-se al fixar E i K.

## 2.2. Integració de les quadratures.

La segona quadratura ens dóna les expressions de les òrbites en el pla de configuració.

Si  $K \neq 0$ , tenim.  $\theta = \theta_{\pm} + \text{sgn}(K) \arccos((K^2/R-1)/e)$ , fent  $e = (1+2EK^2)^{1/2}$   
Invertint-la:  $R = K^2 / (1 + e \cos(\theta - \theta_{\pm}))$  que és l'equació focal d'una cònica.

En el cas  $K \neq 0$ , les òrbites del problema de Kepler són el·lipses, paràboles o hipèrboles segons que  $0 < e < 1$ ,  $e = 1$  o  $e > 1$ ;  $e$  és l'excentricitat. Si  $K = 0$ , les òrbites són arcs de recta.

La primera quadratura cal tractar-la de manera diferent segons que  $-1/2K^2 < E < 0$  (cas el·líptic),  $E = 0$  (cas parabòlic) o  $E > 0$  (cas hiperbòlic).

### Cas el·líptic.

Tenim:

$$t - t_0 = -(-2E)^{-1} (2ER^2 + 2R - K^2)^{1/2} + (-2E)^{3/2} \arccos((1+2ER)/(1+2EK^2)^{1/2}).$$

Fent  $\cos u = (1+2ER)/(1+2EK^2)^{1/2}$ , es converteix en :

$$u - e \sin u = a^{-3/2} (t - t_0) \quad (\text{equació de Kepler el·líptica}).$$

on  $a = (-2E)^{-1}$ .

(2.1)

$R$  s'escriu en funció de la variable  $u$  (anomia excèntrica el·líptica) com  $R = a(1 - e \cos u)$ .

### Cas hiperbòlic.

Anàlogament:

$$t - t_0 = (2E) (2ER^2 + 2R + K^2)^{1/2} - (2E)^{3/2} \text{ArgCh}((1+2ER)/(1+2EK^2)),$$

$$e \text{sh} u - u = a^{-3/2} (t - t_0) \text{ amb } a = (2E)^{-1} \text{ i } R = a(\text{Ch} u - 1),$$

$u$  s'anomena ací anomia excèntrica hiperbòlica.

Cas parabòlic.

S'obté:

$$t-t_0 = ((2R-K^2)/3+K^2)(2R-K^2)^{1/2}/2 ,$$

$$(K^2u + u^3/3)/2 = t-t_0 \quad \text{(equació de Barker)} \quad i$$

$$R = \frac{1}{2}(K^2 + u^2) ;$$

u es l'anomalia excèntrica parabòlica.

2.3. Solucions del problema de Kepler en funció de les anomalies excèntriques.

Problema de Kepler (inercial).

Cas el.líptic.

$$\begin{aligned}
 R &= a(1 - e \cos u) , & p_R &= \frac{e \sin u}{a^{1/2}(1 - e \cos u)} , \\
 \theta &= \theta_- + \operatorname{sgn}(K) \arccos\left(\frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}\right) , & p_\theta &= K , \\
 (\theta &= \theta_- , \text{ si } K=0) ; & u - e \sin u &= a^{-3/2}(t - t_0) .
 \end{aligned}$$

Cas parabòlic.

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2}(K^2 + u^2) & p_R &= \frac{2u}{K^2 + u^2} , \\
 \theta &= \theta_- + \operatorname{sgn}(K) 2 \arctg\left(\frac{u}{K}\right) , & p_\theta &= K , \\
 (\theta &= \theta_- , \text{ si } K=0) ; & (K^2 u + u^3/3)/2 &= t - t_0 .
 \end{aligned}$$

Cas hiperbòlic.

$$\begin{aligned}
 R &= a(e \operatorname{Chu} - 1) , & p_R &= \frac{e \operatorname{Sh} u}{a^{1/2}(e \operatorname{Chu} - 1)} , \\
 \theta &= \theta_- + \operatorname{sgn}(K) \arccos\left(\frac{e - \operatorname{Chu}}{e \operatorname{Chu} - 1}\right) & p_\theta &= K , \\
 (\theta &= \theta_- , \text{ si } K=0) ; & e \operatorname{Sh} u - u &= a^{-3/2}(t - t_0) .
 \end{aligned}$$

Problema giratori de Kepler.

Cas el.líptic.

$$\begin{aligned}
 r &= a(1 - e \cos u) , & p_r &= \frac{e \sin u}{a^{1/2}(1 - e \cos u)} , \\
 \theta &= \theta_- + \operatorname{sgn}(K) \arccos\left(\frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}\right) - a^{-3/2}(u - e \sin u) , & p_\theta &= K , \\
 (\theta &= \theta_- - a^{-3/2}(u - e \sin u) , \text{ si } K=0) ; & u &= e \sin u = a^{-3/2}(t - t_0) .
 \end{aligned}$$



Cas parabòlic.

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}(K^2 + u^2) , & p_r &= \frac{2u}{K^2 + u^2} , \\ \theta &= \theta_+ + \operatorname{sgn}(K) 2 \arctg\left(\frac{u}{K}\right) - (K^2 u + u^3/3)/2 , & p_\theta &= K , \\ (\theta &= \theta_- - (K^2 u + u^3/3)/2 , \text{ si } K=0); & (K^2 u + u^3/3)/2 &= t - t_0 . \end{aligned}$$

Cas hiperbòlic.

$$\begin{aligned} r &= a(e^{Chu} - 1) , & p_r &= \frac{e^{Shu}}{a^{1/2}(e^{Chu} - 1)} , \\ \theta &= \theta_+ + \operatorname{sgn}(K) 2 \arccos\left(\frac{e - Chu}{e^{Chu} - 1}\right) - a^{-3/2}(e^{Shu} - u) , & p_\theta &= K , \\ \theta &= \theta_- - a^{-3/2}(e^{Shu} - u) , \text{ si } K=0; & e^{Shu} - u &= a^{-3/2}(t - t_0) . \end{aligned}$$

### 3. REGULARITZACIÓ.

#### 3.1. Introducció.

La regularització consisteix en transformacions de les coordenades i del temps a fi i efecte que les noves equacions del moviment apareixin sense alguna de les singularitats.

Es tractaran les regularitzacions de Levi-Civita i el "blow up" que aconsegueixen de regularitzar, per separat, les 2 singularitats del problema restringit. Aquestes es porten a terme a cada nivell de la integral de Jacobi; això és essencial. En aquesta memòria es tractaran les línies generals de la regularització de la col.lisió amb el primari de massa  $1-m$ ; l'altra col.lisió es regularitza de manera similar.

També s'aplica als problemes de Kepler (inercial i giratori); els problemes regularitzats resulten ésser problemes d'oscil.lador harmònic. La integració d'aquest permet d'expressar de forma uniforme, usant una mateixa variable independent en tots els casos, les solucions dels problemes de Kepler.

### 3.2. Regularització de Levi-Civita.

Per tractar la regularització de la col.lisió amb el primari de massa  $1-m$ , usem les coordenades heliocèntriques sinòdiques  $(x,y)$  i fem el següent canvi de variables de posició i de temps ([20]):

$$(\bar{x}+i\bar{y})^2 = x+iy \quad , \quad \frac{dt}{ds} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Usant els moments conjugats adequats de forma que sigui una transformació simplèctica , les equacions del moviment poden ésser escrites en formulació hamiltoniana en el nivell d'integral de Jacobi  $C$  ; les equacions llavors ja no son singulars en aquella col.lisió. Ho farem en coordenades polars. La transformació simplèctica és ara:

$$r=\bar{r}^2 \quad , \quad \theta = 2\bar{\theta} \quad , \quad \frac{dt}{ds} = r \quad ; \quad p_r = \frac{p_{\bar{r}}}{2\bar{r}} \quad , \quad p_{\theta} = \frac{p_{\bar{\theta}}}{2} .$$

El hamiltonià és:

$$\bar{H}_C(\bar{r}, \bar{\theta}, p_{\bar{r}}, p_{\bar{\theta}}) = \frac{1}{8}(p_{\bar{r}}^2 + p_{\bar{\theta}}^2 / \bar{r}^2) + \frac{1}{2}(C - p_{\bar{\theta}}) \bar{r}^2 - \frac{m}{2}(\bar{r} p_{\bar{r}} \sin(2\bar{\theta}) + p_{\bar{\theta}} \cos(2\bar{\theta})) - (1-m) \frac{mr^2}{r_2} = 0 .$$

Aquesta mateixa regularització pot portar-se a terme per al problema de Kepler; s'obtidria el següent hamiltonià en el nivell d'energia sidèria  $E$ :

$$\bar{H}_E(\bar{R}, \bar{\theta}, p_{\bar{R}}, p_{\bar{\theta}}) = \frac{1}{8}(p_{\bar{R}}^2 + p_{\bar{\theta}}^2 / \bar{R}^2) - E\bar{R}^2 - 1 = 0 ;$$

la transformació canònica és la mateixa que abans, usant lletres majúscules on correspongui.

Es tracta del hamiltonià d'un problema d'oscil.lador harmònic, les solucions d'aquest problema poden escriure's en funció de la variable  $s$ , usant la mateixa expressió per als diferents valors de  $E$ , mitjançant l'ús de funcions d'Stumpff. Vegi's [33].

Refent llavors la transformació de Levi-Civita, es tenen les següents expressions uniformitzades de les solucions del problema de Kepler:

$$R = R_- + es^2 c_2(-2Es^2), \quad t = t_0 + es^3 c_3(-2Es^2),$$

amb  $c_n(z) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+n)!} \quad (n > 0)$  (funcions d'Stumpff).

Notem que  $c_{2n}(w^2) = (-1)^n (\cos w - T(\cos w))|_{2(n-1)}/w^{2n}$  i que  $c_{2n-1}(w^2) = (-1)^n (\sin w - T(\sin w))|_{2n-1}/w^{2n+1}$ , on  $T(f)|_N$  indica el desenvolupament de McLaurin de  $f$  fins a ordre  $N$ .

Per al problema giratori de Kepler s'obté:

$$r = r_- + es^2 c_2(-2ES^2), \quad t = t_0 + es^3 c_3(-2Es^2).$$

Es d'interès observar les relacions entre  $s$  i les anomalies excèntriques:  $u = (-2E)^{1/2} s \quad (E < 0)$ ,  $u = s \quad (E = 0)$  i  $u = (2E)^{1/2} s \quad (E > 0)$ .

### 3.3. "Blow up".

A fi que la regularització aparegui de forma més clara en coordenades polars, caldrà usar les velocitats (heliocèntriques sinòdiques regularitzades) radial  $v_{\bar{r}}$  i angular  $v_{\bar{\theta}}$ , en comptes dels moments  $p_{\bar{r}}$  i  $p_{\bar{\theta}}$ :

$$v_{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \quad i \quad v_{\bar{\theta}} = \frac{d\bar{\theta}}{ds} .$$

En aquestes variables les equacions presenten la forma:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = v_{\bar{r}} , \quad \frac{dv_{\bar{r}}}{ds} = (v_{\bar{r}} + 2v_{\bar{\theta}}^2 + v_{\bar{\theta}}^{-3} + \frac{\bar{r}^6}{2} - \frac{1-m}{2} + \frac{m\bar{r}^4}{2} (\cos(2\bar{\theta}) \frac{\bar{r}^2 + \cos(2\bar{\theta})}{r_2^3}) ) \frac{1}{\bar{r}} ;$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{ds} = \frac{v_{\bar{\theta}}}{\bar{r}} , \quad \frac{dv_{\bar{\theta}}}{ds} = (-v_{\bar{r}}v_{\bar{\theta}} - 2\bar{r}^{-3}v_{\bar{r}} + \frac{m\bar{r}^4 \sin(2\bar{\theta})}{2} (\frac{1}{r_2^3} - 1)) \frac{1}{\bar{r}} .$$

i la conservació de l'energia sinòdica:

$$2(v_{\bar{r}}^2 + v_{\bar{\theta}}^2) = \frac{1}{2}((1-m)\bar{r}^{-4} + m\bar{r}^2)\bar{r}^2 + 1-m + C\bar{r}^{-2} + \frac{m\bar{r}^{-2}}{r_2} . \quad (3.1)$$

Un nou canvi de la variable independent regularitza les equacions del moviment:  $\frac{d\bar{s}}{ds} = \bar{r}$  .

$$\{\bar{r}=0\} \text{ és ara invariant pel flux i té per equació: } 2(v_{\bar{r}}^2 + v_{\bar{\theta}}^2) = 1-m .$$

Aquests canvis de coordenades i de variable independent aconseguen fer explotar la col·lisió (l'origen, en aquestes coordenades) a un tor invariant. Aquest fet s'anomena "blow up" de la col·lisió. En aquest tor, el flux ve donat per:

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{s}} = v_{\bar{\theta}} , \quad \frac{dv_{\bar{r}}}{d\bar{s}} = v_{\bar{\theta}}^2 , \quad \frac{dv_{\bar{\theta}}}{d\bar{s}} = -\frac{v_{\bar{r}}v_{\bar{\theta}}}{\bar{r}} .$$

L'estudi del flux en aquest tor, dóna idea del flux prop de la col·lisió; vegi's [24] i [13].

Observació.

El moment angular sideri heliocèntric  $p_{\theta}$  és nul en la col.lisió.

En efecte:  $p_{\theta} = 4\bar{r}\bar{v}_{\theta} - 2\bar{r}^4 - 2m\bar{r}^2 \cos(2\bar{\theta})$  i l'equació de l'energia (3.1) assegura que  $\bar{r}\bar{v}_{\theta}$  és nul en  $\{\bar{r}=0\}$ .

#### 4. VARIETATS INVARIANTS DEL PROBLEMA DE KEPLER.

##### 4.1. Varietats invariants $I_{EK}$ .

Considerem els subconjunts de l'espai de fases  $M$  del problema de Kepler amb energia  $E$  i moment angular  $K$ , que notarem per  $I_{EK}$ . El seu estudi qualitatiu i topològic serà l'objectiu d'aquesta secció. Les lleis de la conservació de l'energia i del moment angular asseguren la invariança pel flux d'aquests conjunts; d'on, l'interès del seu estudi.

En coordenades polars els punts de  $I_{EK}$  a compleixen les equacions:

$$\frac{1}{2}(p_R^2 + p_\theta^2/R^2) - 1/R = E, \quad p_\theta = K.$$

Aquests subconjunts són, evidentment, subvarietats de la varietat de fases i reben el nom donat.

El fet que  $\theta$  no intervingui en les equacions implica que  $I_{EK} = I_{EK} \times S^1$ .  $I_{EK}$  està contingut en  $\{p_\theta = K\}$  i pot descriure's en coordenades  $(R, p_R)$  per la relació:

$$p_R^2 = 2E + \frac{2}{R} - \frac{K^2}{R^2} = 2E - 2V_K(R), \quad (4.1)$$

recordant la definició del potencial efectiu  $V_K$ .

Les funcions  $V_K$  tenen les següents propietats:

Si  $K \neq 0$ ,  $\lim_{R \rightarrow 0} V_K(R) = \infty$ ;  $R=K^2$  i  $R=K^2/2$  són els únics extrems relatiu (mínim) i zero de  $V_K$  i  $\lim_{R \rightarrow \infty} V_K(R) = 0$ .

$\lim_{R \rightarrow 0} V_0(R) = -\infty$ ,  $V_0$  és creixent i  $\lim_{R \rightarrow \infty} V_0(R) = 0$ .

Vegi's les representacions gràfiques en la figura 4.1.

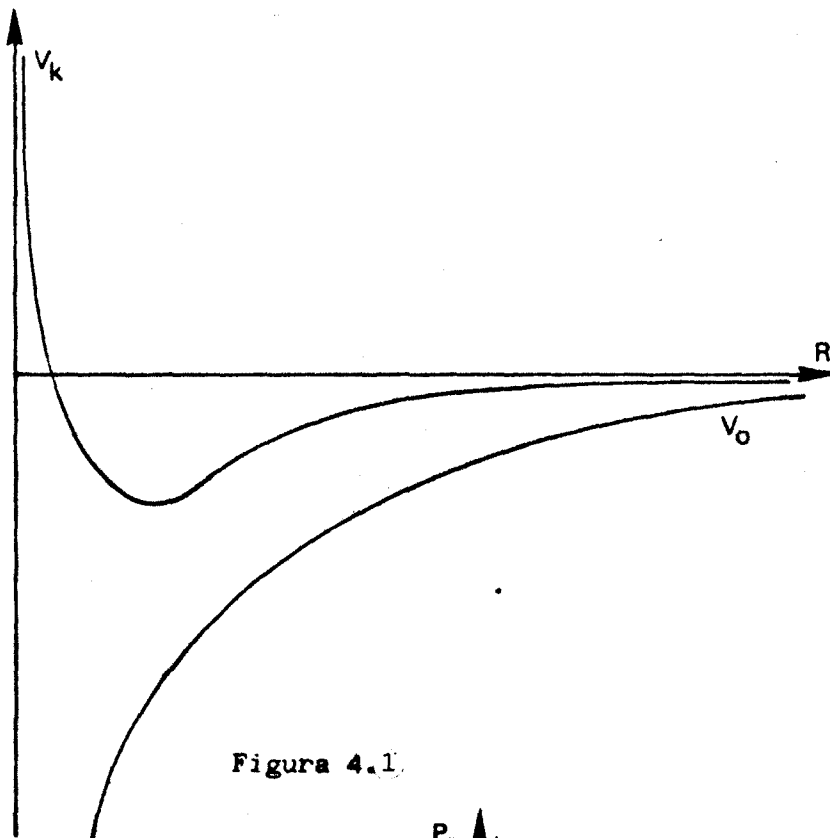
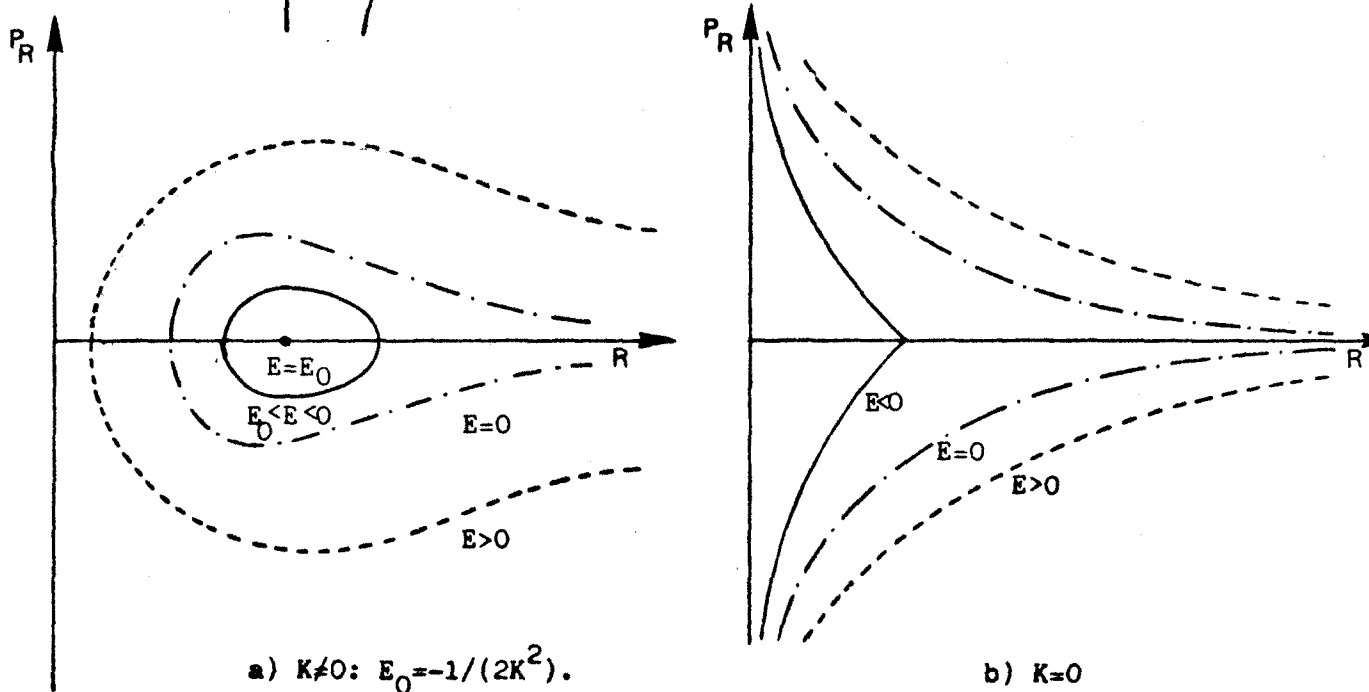


Figura 4.1



a)  $K \neq 0$ :  $E_0 = -1/(2K^2)$ .

b)  $K = 0$

Figura 4.2



Dividirem ara el pla  $(E,K)$  en zones segons els diferents tipus de solució de l'equació (4.1).

Cas  $K \neq 0$ .

Quan  $E < -1/(2K^2)$ , no hi ha cap solució. Si  $E = -1/(2K^2)$ , la solució és  $(R=K^2=1/(-2E), p_R=0)$  (òrbita circular). Si  $-1/(2K^2) < E < 0$ , hi ha solucions amb valors de  $R$  en  $[R_-, R_+]$  (essent  $R_+$  les 2 solucions de  $2E - V_K(R) = 0$ ); en  $R_+$ ,  $p_R = 0$ , i en els altres,  $p_R$  pren 2 valors no nuls oposats (zona el·líptica). Si  $E > 0$ , l'interval de valors de  $R$  per als que hi ha solució és del tipus  $[R_-, \infty)$ , essent  $p_R = 0$  en  $R_-$  i per als altres,  $p_R$  pren 2 valors oposats que tendeixen a 0, quan  $E = 0$  (zona parabòlica) i a  $\pm(2E)^{1/2}$ , quan  $E > 0$  (zona hiperbòlica).

Cas  $K = 0$ .

Aquesta zona s'anomena òbviament zona de col·lisió. Hi distingim:

Si  $E < 0$ , tenim solucions per a  $R$  en  $(0, R_x = 1/(-E))$  de la forma  $(R_x, 0)$  i  $(R, \pm(2E + 2/R)^{1/2})$  (zona de col·lisió el·líptica). Existeixen solucions per a tot  $R > 0$  de la forma  $(R, \pm(2E + 2/R)^{1/2})$  que tendeixen a  $(-\infty, 0)$ , si  $E = 0$  (zona de col·lisió parabòlica) o a  $(\infty, \pm(2E)^{1/2})$ , si  $E > 0$  (zona de col·lisió hiperbòlica).

Vegi's els esquemes de la figura 4.2 per a una visió qualitativa d'aquests conjunts de solucions.

Aquest estudi completament analític porta al teorema d'Smale que ens dóna equivalències topològiques diferenciables (mitjançant difeomorfismes) de les varietats  $I_{EK}$  del problema de Kepler ([30]).

TEOREMA (d'Smale).

- a) Si  $K \neq 0$ :  $I_{EK} = \emptyset$  (si  $E < -1/(2K^2)$ ),  $I_{EK} = S^1$  (si  $E = -1/(2K^2)$ ),  
 $I_{EK} = S^1 \times S^1 = T^2$  (si  $-1/(2K^2) < E < 0$ ),  $I_{EK} = S^1 \times R$  (si  $E > 0$ ).
- b)  $I_{E0} = S^1 \times R$  (si  $E < 0$ ),  $I_{E0} = S^0 \times S^1 \times R$  (si  $E > 0$ ).

En la figura 4.3 es dóna un esquema d'aquest resultat.

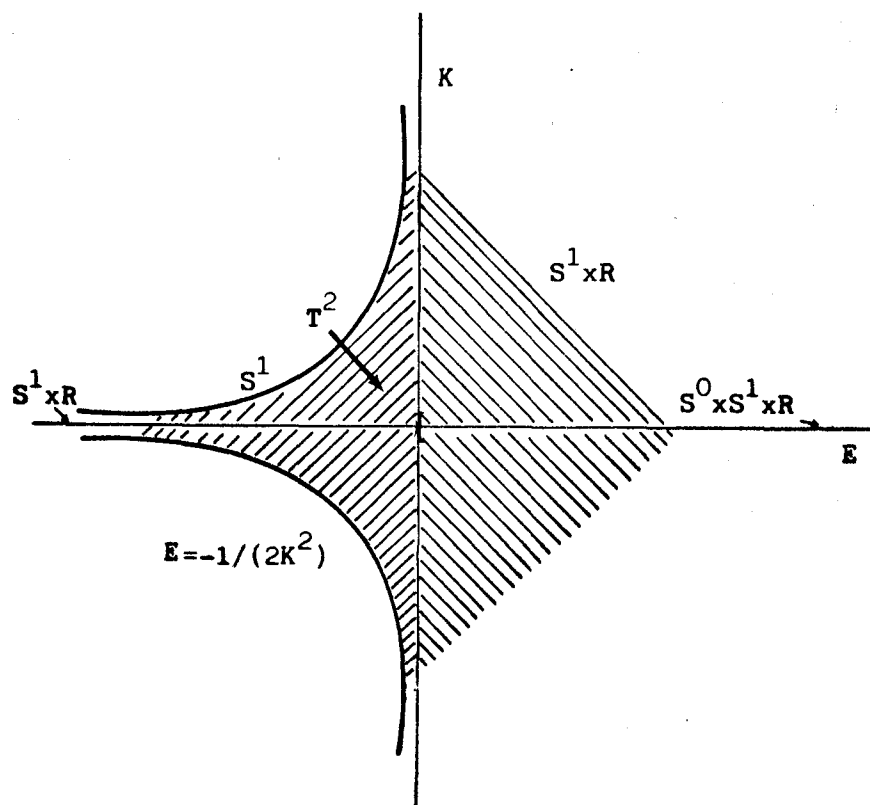


Figura 4.3

#### 4.2. Varietats invariants $I_C$ .

En el problema giratori de Kepler, definim els conjunts  $I_C$  d'estats de  $M$  que tenen la integral de Jacobi igual a  $C$ , per a cada valor real  $C$ .

En coordenades sinòdiques polars, tenen per equació:

$$p_r^2 = 2p_\theta - C + 2/r + p_\theta^2/r^2 .$$

$I_C$  és òbviament una varietat invariant pel flux del problema.

Degut a que  $p_\theta$  és una integral primera, les interseccions de  $I_C$  amb els hiperplans  $\{p_\theta = K\}$  són també conjunts invariants; en realitat, són els conjunts  $I_{EK}$  amb  $E=K-C/2$ . Un dels objectius d'aquest estudi és saber com esta disposats aquests per formar  $I_C$ . Per això, dividirem els  $I_C$  en zones que continguin conjunts  $I_{EK}$  amb la mateixa estructura topològica i analitzarem la distribució de zones en cada  $I_C$ .

Observem les següents propietats:

$I_C$  és de la forma  $I_C = I_C \times S^1$ .

$I_C = I_C^+ \cup I_C^-$ ,  $I_C^0 = I_C^+ \cap I_C^-$ ,  $\Pi(I_C^+) = \Pi(I_C^-) = J_C$  amb  $\partial J_C = I_C$ ; essent

$I_C^+ = I_C \cap \{p_r \leq 0\}$ ,  $I_C^- = I_C \cap \{p_r > 0\}$  i  $\Pi(r, p_r, p_\theta) = (r, p_\theta)$ . D'on:

L'estudi de  $I_C$  pot reduir-se al de  $J_C$ , aquest al de  $J_C$  i, finalment, al de  $I_C$ .

L'eina de treball és la mateixa que en la secció anterior, l'estudi a diferents nivells de  $p_\theta$  de les solucions de l'equació de  $I_C$ .

### Estudi dels $I_C^0$ .

L'equació de  $I_C^0$  en coordenades  $(r, p_r)$  és  $2p_\theta - C + 2/r - p_\theta^2/r^2 = 0$ . Definim  $\Delta_C(p_\theta) = 1 + (2p_\theta - C)p_\theta^2$ . Si  $\Delta_C(p_\theta) < 0$ , l'equació no té arrels reals  $r=r(p_\theta)$ . En cas contrari, fem  $e_C = \Delta_C^{1/2}$  i  $a_C(p_\theta) = |C - 2p_\theta|^{-1}$ . Estem interessats en les solucions reals positives (per a  $r$ ) de l'equació de  $I_C^0$  a diferents nivells de  $p_\theta$ .

- a) Si  $e_C(p_\theta) = 0$ ,  $r=r_0(p_\theta)=p_\theta^2$  és l'única solució.
- b) Si  $0 < e_C(p_\theta) < 1$ ,  $r=r_\pm(p_\theta) = a_C(p_\theta)(1 \pm e_C(p_\theta))$  són les dues solucions.
- c<sub>1</sub>) Si  $p_\theta = C/2$  ( $e_C(p_\theta) = 1$ ),  $r=r_-(C/2) = C^2/8$  és l'única solució (notem que  $\lim_{p_\theta \rightarrow (C/2)^-} r_+(p_\theta) = \infty$ ).
- c<sub>2</sub>) Si  $p_\theta = 0$  ( $e_C(p_\theta) = 1$ ),  $r=r_+(0) = 2/C$  és l'única solució positiva.
- d) Si  $e_C(p_\theta) > 1$ ,  $r=r_-(p_\theta) = a_C(p_\theta)(e_C(p_\theta) - 1)$  és també l'única solució positiva.

Aquesta diversitat de comportaments duu a una divisió en zones dels  $I_C^0$  que notem segons els casos anteriors per:

- a) zona circular  $O_C^0$ ; b) zona el·líptica  $E_C^0$ ; c<sub>1</sub>) zona parabòlica  $P_C^0$ ; c<sub>2</sub>) zona de col·lisió  $X_C^0$  i d) zona hiperbòlica  $H_C^0$ .

Els noms de les zones es corresponen amb el tipus d'òrbites que representen, mirades des del sistema de referència sideri que com sabem han d'ésser arcs de cònica.

Cal notar que totes aquestes zones són disjunctes llevat del cas  $C=0$  per al que coincideixen  $P_C^0$  i  $X_C^0$ . Aquestes zones s'estenen de manera automàtica a zones de  $I_C$  que seran invariants pel flux degut a que  $p_\theta$  és una integral primera del problema; és a dir, cada zona de  $I_C$  és un feix d'òrbites.

L'anàlisi de les funcions  $\Delta_C(p_\theta)$  per a cada valor de  $C$  dóna ja la distribució d'aquestes zones en cada  $I_C$  :

Notem que la funció  $\Delta_C - 1$  té un zero doble en  $p_\theta = 0$  (que és triple si  $C=0$ ) i un de simple en  $p_\theta = C/2$  (que és triple si  $C=0$  i coincideix amb l'anterior només en aquest cas). Aquests valors són els corresponents a les zones de col·lisió ( $p_\theta = K_x = 0$ ) i parabòlica ( $p_\theta = K_p = C/2$ ), respectivament. La funció  $\Delta_C$  té extrems en  $p_\theta = 0$  (que són mínims, si  $C < 0$ , o màxims, si  $C > 0$ ; en tots ells  $\Delta_C$  val 1) i en  $p_\theta = C/3$  (que són mínims, si  $C < 0$ , o màxims, si  $C > 0$ ; en ells,  $\Delta_C$  val  $1 - (C/3)^3$ ). Si  $C=0$ ,  $p_\theta = 0$  és un punt d'inflexió.

$\Delta_C$  té 1, 2 (un d'ells doble) o 3 zeros segons  $C < 3$ ,  $C=3$  o  $C > 3$ , que notarem per  $K_{-1}$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ , amb  $K_{-1} < 0$ , i  $K_{1,2} > 0$ .  $\Delta_C > 0$  només a  $[K_{-1}, \infty)$ , si  $C < 3$  i a  $[K_{-1}, K_1] \cup [K_2, \infty)$ , si  $C > 3$ ; en aquest últim cas,  $I_C$  tindrà dues components connexes,  $I_C^{(int)}$  i  $I_C^{(ext)}$ .

Per a cada valor de  $C$  donat designem per  $\gamma_C = \text{graf}(\Delta_C)$ . En la figura 4.4 poden veure's les representacions gràfiques per a diferents valors de  $C$ :  $C_1 < 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $0 < C_3 < 3$ ,  $C_4 = 3$  i  $C_5 > 3$ .

Els passos d'aquestes per les diferents zones indicades dóna ja idea de la distribució de les zones.

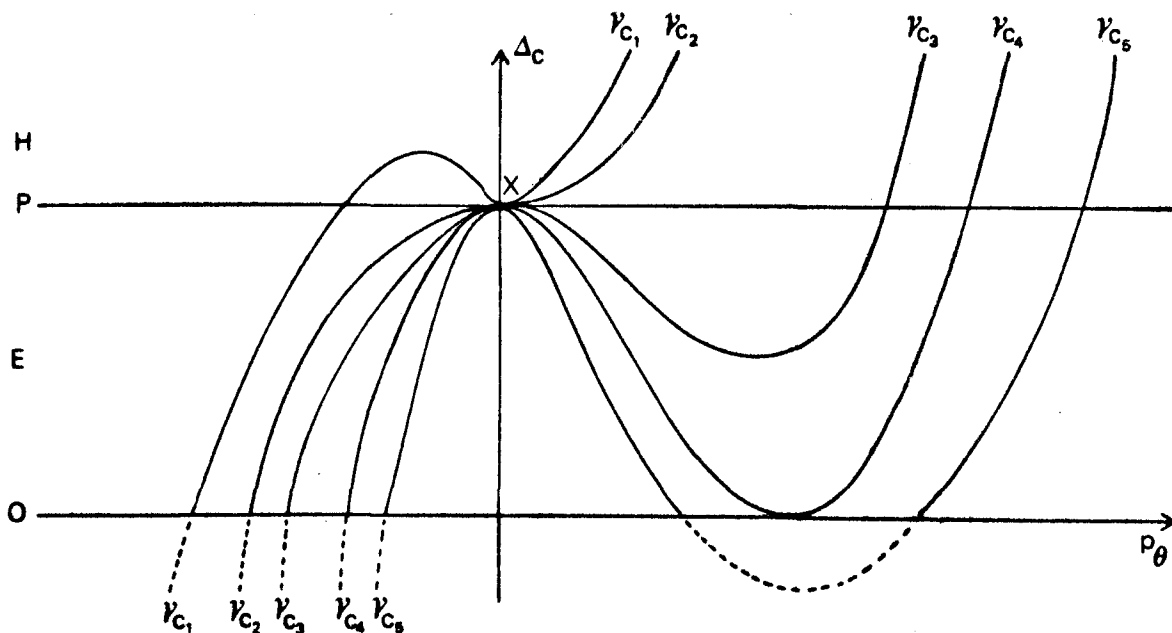


Figura 4.4

Uns altres elements a tractar per la importància geomètrica que tenen són les corbes de velocitat zero. Es troben fent nul·la la velocitat sinòdica  $\dot{r}=\dot{\theta}=0$ , en l'equació de  $I_C$ . Com que  $r=p_\theta^2$  i  $r\dot{\theta}=(p_\theta-r^2)/r$ , tenim que :

Les corbes de velocitat zero es troben en la intersecció de l'hiperplà  $\{p_r=0\}$  amb la hipersuperfície  $\{p_\theta=r^2\}$  i tenen per equació:

$$r^2 + 2/r - C = 0 .$$

Es tracta, per tant, de circumferències en aquest cas.

Observem que hi ha 2 valors de  $r$  ( $r_i$  i  $r_e$ ) corresponents a circumferències de velocitat zero, si  $C>3$ ; 1 valor ( $r_i=r_e=1$ ), si  $C=3$ , i no n'hi ha cap, si  $C<3$ .

Les corbes de velocitat zero limiten les regions del pla de configuració on el moviment és possible per a cada valor de  $C$ , que s'anomenen regions de Hill; en aquest problema tenen per equació  $r^2+2/r-C=0$ , ja que el mòdul de la velocitat sinòdica ha d'ésser positiu o nul.

Si  $C<3$ , la regió de Hill és tot el pla de configuració menys l'origen. Si  $C>3$ , aquesta està limitada per les corbes de velocitat zero de radis  $r_i$  i  $r_e$ ; el moviment pot tenir lloc només en les regions interior i exterior, respectivament, d'aquestes circumferències.

Les òrbites que arriben a una corba de velocitat zero ho fan normalment a ella ( $\dot{r}=0$ ) i tornen sense variació instantània de l'angle ( $\dot{\theta}=0$ ): són punts cúspide de les òrbites que hi passen.

Després d'aquest estudi preliminar dels conjunts  $I_C^0$ , se'n donarà una construcció gràfica efectiva. Comentarem ara la forma de construcció gràfica d'aquests, la qual cosa donarà una visió qualitativa més clara d'aquests conjunts per a tot el rang de valors de  $C$ . Aquesta visió es transportarà més endavant a l'estudi dels  $I_C$ . Les coordenades de treball són com fins ara  $(r, p_r)$ .

Les òrbites circulars estan sempre representades en la intersecció de les corbes d'equacions :  $r=p_\theta^2$ ,  $r=1/(C-2p_\theta)$ . Aquestes, està clar, aniran variant a mesura que ho faci  $C$ : se'n tenen 3 per a  $C>3$  per als valors de  $p_\theta = K_{-1}, K_1, K_2$ ;  $K_1$  i  $K_2$  es confonen quan  $C=3$  i desapareixen per a  $C<3$ , quedant només l'òrbita circular corresponent a  $K_{-1}$ .

La zona parabòlica està representada només per un punt  $(r_p, K_p)$ ; variant  $C$ , aquest punt es mou sobre la paràbola  $r=p_\theta^2/2$ .

Finalment, les corbes de velocitat zero han de representar-se sobre la paràbola  $\{p_\theta = r^2\}$ . Una observació important cara a la localització d'aquests punts és que en ells s'assoleixen els extrems relatius de  $r$  en cada component connexa de  $I_C^0$ ; es tracta de màxims per a les corbes de velocitat zero interiors ( $r=r_i$ ,  $p_\theta = K_i = r_i^2$ ) i de mínims per a les exteriors ( $r=r_e$ ,  $p_\theta = K_e$ ). Notem que només existeixen per a valors de  $C>3$  i que a compleixen  $0 < r_i < 1 < r_e$ .

Els conjunts  $I_C^0$  es representen gràficament per corbes en el pla  $(r, p_\theta)$  en la figura 4.5 per a alguns valors d'interès de  $C$ .

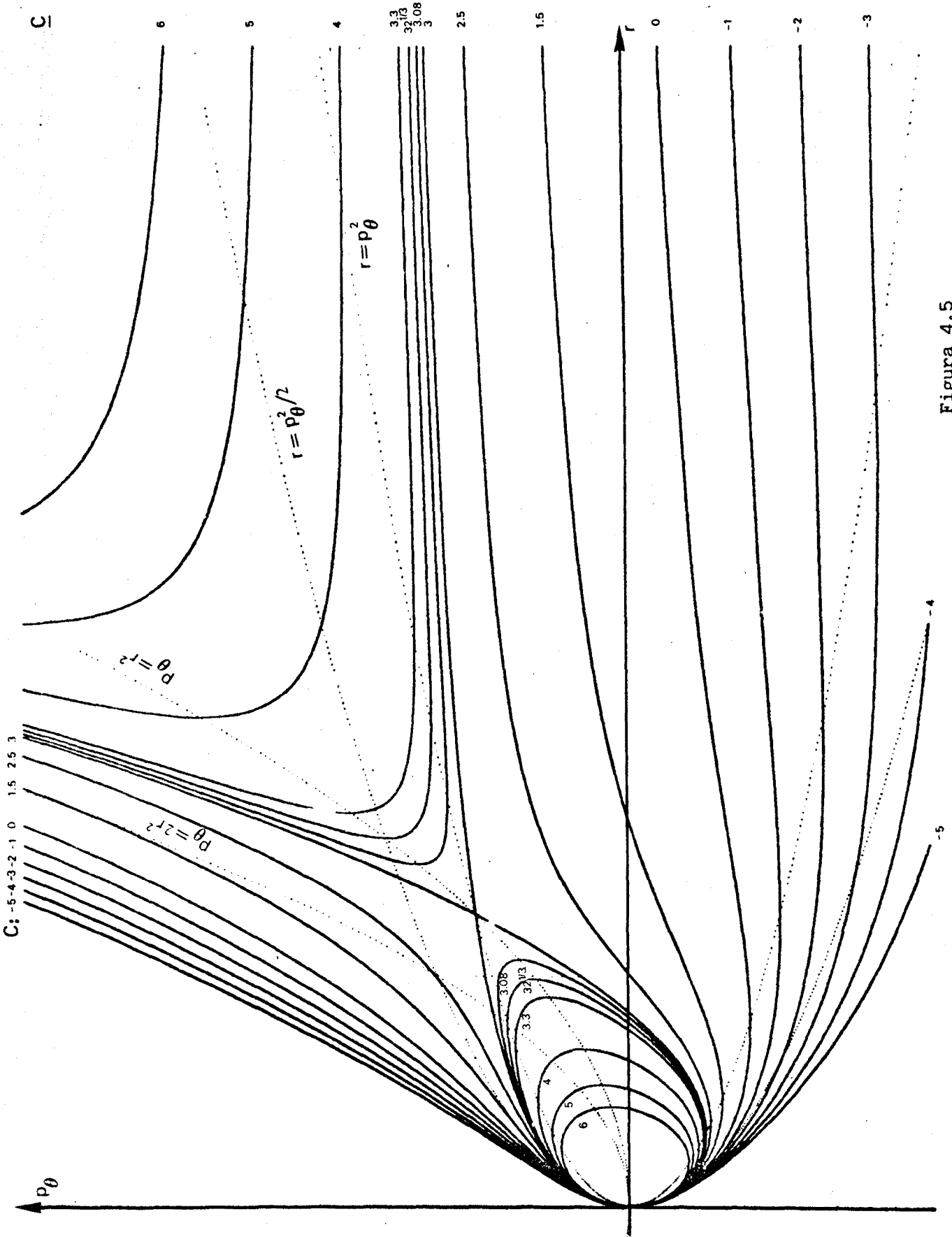


Figura 4.5



Si  $C > 3$ ,  $I_C^0$  té 2 components connexes.

La component interior és una corba que partint de  $(0,0)$  (omitint aquest punt) arriba al punt corresponent a la corba de velocitat zero interior  $(K_i, K_i^{1/2})$  passant per l'òrbita circular en  $(K_{-1}, K_{-1}^2)$  per una banda, i per l'altra, passa per l'òrbita circular en  $(K_1, K_1^2)$ .

La component exterior pot considerar-se també formada per 2 branques que començant en el punt representatiu de la corba de velocitat zero exterior  $(K_e, K_e^{1/2})$  tendeixen una a l'infinit asimptòticament segons la paràbola  $\{p_\theta = 2r^2\}$ , i l'altra, segons l'asímtota horitzontal  $\{p_\theta = K_p\}$ , passant prèviament per l'òrbita circular en  $(K_2, K_2^2)$ .

El punt representatiu de la zona parabòlica es troba a la 1ª branca, si  $C > 32^{1/3}$  i a la 2ª, si  $3 < C < 32^{1/3}$ ; es confon amb el punt representatiu de la corba de velocitat zero exterior, si  $C = 32^{1/3}$ .

Quan  $C=3$ , tenim  $(K_1, K_1^2) = (K_2, K_2^2) = (K_i, K_i^{1/2}) = (K_e, K_e^{1/2}) = (1,1)$  i tots aquests punts deixen de tenir sentit quan  $C > 3$ .

Llavors, les 2 branques de  $I_C$  partint de  $(0,0)$  (omitin-lo i, com sempre fent créixer la coordenada  $r$ ) tendeixen també a l'infinit com en el cas anterior, la 1ª directament i la 2ª passant per  $(K_{-1}, K_{-1}^2)$ . El punt corresponent a les òrbites parabòliques es troba a la 1ª branca, si  $0 < C < 3$ , i a la 2ª, si  $C < 0$ . En el cas  $C=0$ , és el punt  $(0,0)$  que no considerem.

### Reconstrucció dels conjunts $I_C$ .

A fi de visualitzar  $I_C$  en coordenades  $(r, p_r, p_\theta)$ , recordem que té una part  $I_C^+$  "sobre" el pla  $\{p_r=0\}$  i una altra part simètrica "sota".  $I_C^0$  és la intersecció de  $I_C$  amb aquest pla; però també, i degut a que les projeccions de  $I_C^+$  són difeomorfes amb la imatge,  $I_C^0$  és la frontera d'un conjunt  $J_C$  que representa de manera difeomorfa  $I_C^+$  i  $I_C^-$ .

A més, sabem que si tallem  $I_C$  per plans  $\{p_\theta=K\}$ , aquestes interseccions són els conjunts  $I_{EK}$  amb  $E=K-C/2$  estudiats en 4.1. D'on:

$I_C$  té una "carena" (es tenen extrems de  $p_r$  segons  $r$ , fixat  $p_\theta$ ) sobre la paràbola  $\{r=p_\theta^2\}$ , que passa per les òrbites circulars en  $\{p_r=0\}$  i sobre la qual  $p_r = \pm(2p_\theta + 2/p_\theta^2 - C)^{1/2}$ .

Per a valors de  $K < C/2$ , els talls per plans  $\{p_\theta=K\}$  donen corbes tancades, que deixen d'ésser tancades quan  $K=C/2$ .

Una altra propietat important és la referent a les corbes de velocitat zero i la possible eliminació de la variable  $p_\theta$  per una representació de certs subconjunts de  $I_C$  de forma difeomorfa.

El valor  $K_e$  corresponent a la corba de velocitat zero exterior és el màxim valor de  $p_\theta$  tal que les projeccions segons  $\pi(r, p_r, p_\theta) = (r, p_r)$  de  $I_C^{(ext)} \cap \{p_\theta < K\}$  deixa d'ésser injectiva. Anàlogament, el valor  $K_i$  de la corba de velocitat zero interior és el mínim que fa que les projeccions de  $I_C^{(int)} \cap \{p_\theta > K\}$  deixin d'ésser injectives.

També:

Les projeccions segons  $\pi$  dels conjunts  $I_C \cap \{p_\theta < 0\}$  són sempre injectives.

## Representacions de les varietats invariants $I_C$ .

En coordenades  $(r, p_\theta, \theta)$ .

$J_C \times S^1$  representa  $I_C \times S^1$  en coordenades  $(r, p_r, \theta)$ , si usem la representació de  $J_C$  en coordenades  $(r, p_\theta)$ . És a dir, per a representar  $I_C$  usarem 2 còpies del sòlid de revolució  $J_C \times S^1$ , les fronteres del qual estaran identificades representant els estats amb  $p_r=0$ . En un dels sòlids podrà representar-se el flux del problema quan  $\dot{r}<0$  i en l'altre, quan  $\dot{r}>0$ ; quan  $\dot{r}$  s'anul·li es passarà d'un sòlid a l'altre per la frontera identificada. O bé, permetre que el flux de tornada pugui tallar el d'anada en un mateix sòlid. Fent això últim, en els talls del sòlid per plans  $\{p_\theta=K\}$  (que són invariants), s'observaria el flux com és en el pla de configuració.

En coordenades  $(r, p_r, \theta)$ .

Els conjunts invariants  $I_C^{(ext)} \cap \{p_\theta < K_e\}$ ,  $I_C^{(int)} \cap \{p_\theta > K_i\}$ ,  $I_C \cap \{p_\theta < 0\}$  admeten representacions en coordenades  $(r, p_r, \theta)$ .

Donarem ara una relació entre aquest fet i els tipus d'òrbites que formen aquests conjunts.

El moment angular sinòdic és  $p_\theta - r^2$  i, per tant, la hipersuperfície  $\{p_\theta = r^2\}$  delimita el sentit de gir de les òrbites: aquestes són directes en la regió  $\{p_\theta > r^2\}$ , retrògrades en  $\{p_\theta < r^2\}$  i radials en aquella hipersuperfície.

Un cop d'ull a les representacions gràfiques de  $I_C$  ens permet dir:

Les òrbites de  $I_C^{(ext)} \cap \{p_\theta < K_e\}$  i  $I_C \cap \{p_\theta < 0\}$  són retrògrades a tot arreu i les de  $I_C^{(int)} \cap \{p_\theta > K_i\}$  són completament directes. Totes les altres van canviant el sentit de gir.

## Representació gràfica global i distribució de zones en els $I_C$ :

Donarem una representació gràfica en el pla  $(K,C)$  que permet d'observar ràpidament, per a cada valor de  $C$ , els valors de  $K$  possibles, així com, la distribució en zones d'aquests.

Caldrà dibuixar-hi els valors de  $K$  corresponents a les òrbites circulars:  $K_{-1}$ ,  $K_1$  i  $K_2$  en funció de  $C$ , que anomenarem corbes característiques de les òrbites circulars i que tenen per equació:  $2K_c + 1/K_c^2 = C$  amb  $c=-1,1,2$ . Notem que  $K_1(3)=K_2(3)=1$  i  $K_{\pm 1}(C) \sim C^{-1/2}$  ( $C \rightarrow 0$ ) i  $K_2(C) \sim C/2$  ( $C \rightarrow \infty$ ).

Els valors de  $K$  possibles per a un cert valor de  $C$  estan compresos entre aquestes corbes:  $K \in [K_{-1}, K_1] \cup [K_2, \infty)$ , si  $C > 3$  i  $K \in [K_{-1}, \infty)$ , si  $C < 3$ .

Les òrbites parabòliques tenen per corba característica la recta  $K_p = C/2$ ; les col.lisions es caracteritzen per  $K_x = 0$  i les corbes de velocitat zero interior i exterior per corbes d'equació:  $K_z + 2K_z^{-1/2} = C$   $z=i,e$ ; observem que  $K_i(3)=K_e(3)=1$ ,  $K_i \sim 4C^{-2}$  ( $C \rightarrow 0$ ) i  $K_e \sim C$  ( $C \rightarrow \infty$ ).

Una altra corba característica és  $K_m = C/3$ , referent als valors de  $K$  per als que l'excentricitat té extrems relatius  $e_m = (1 - (C/3)^3)^{1/2}$ .

Són importants els talls entre corbes característiques cara a la distribució ordenada de les zones per a valors de  $K$  creixents en cada  $I_C$  que es donara més endavant.

Notem el tall entre les corbes característiques corresponents a les corbes de velocitat zero exteriors i a les òrbites parabòliques en  $C=32^{1/3}$ ; per a  $C=3$ , coincideixen les corbes característiques de les òrbites circulars i es de les corbes de velocitat zero interiors i exteriors, que ja no existeixen per a valors inferiors de  $C$ . Les de col.lisió i parabòliques es tallen per a  $C=0$ .

La representació gràfica esmentada es troba a la figura 4.6.

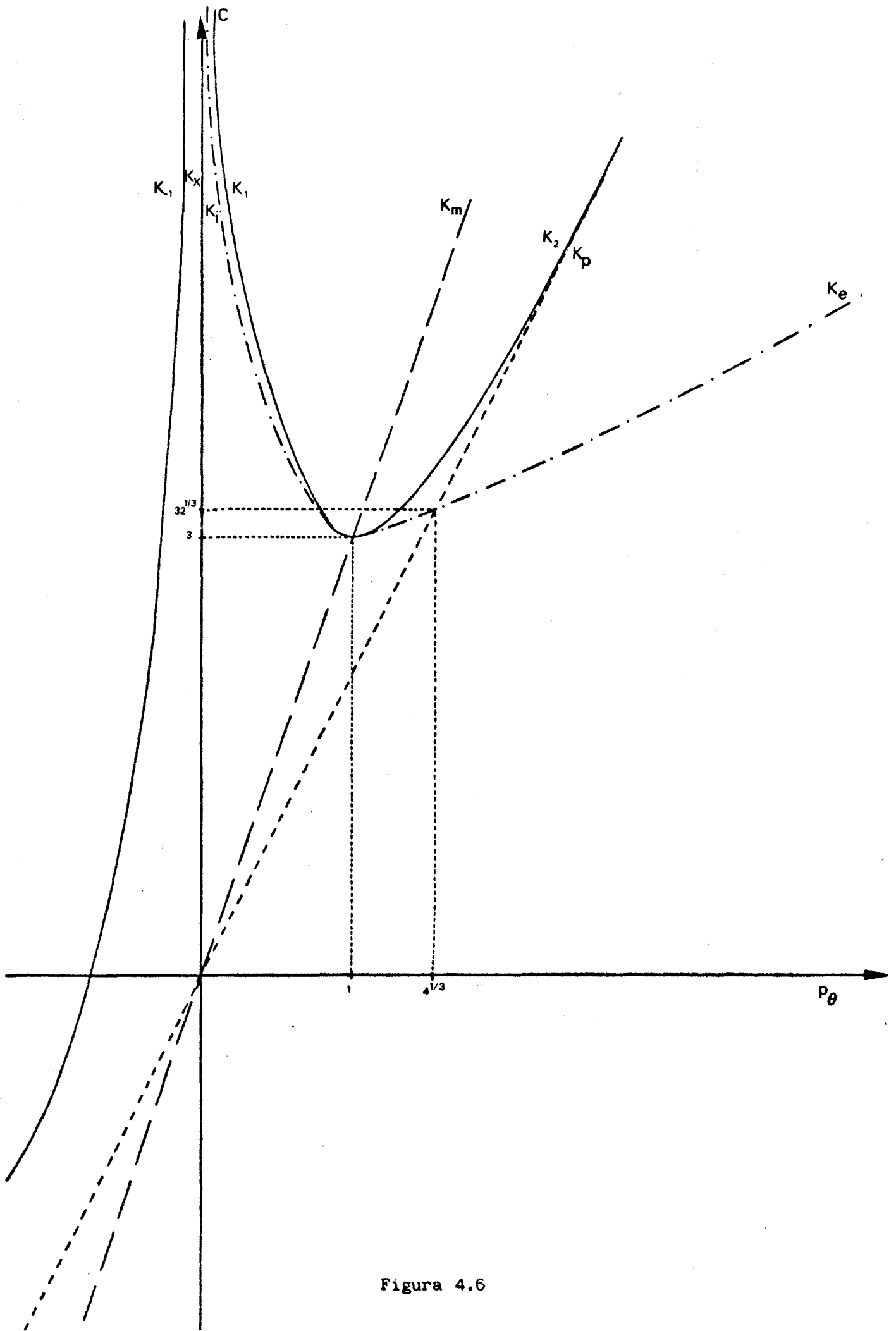


Figura 4.6

En les taules que seguiran es donen les distribucions de les zones en els  $I_C$  per a valors de  $K$  creixents, en diferents rangs de valors de  $C$ : a)  $C > 32^{1/3}$ , b)  $3 < C < 32^{1/3}$ , c)  $0 < C < 3$  i d)  $C < 0$ .

En cadascun d'aquests intervals de  $C$ , la distribució de zones és qualitativament la mateixa. Per als valors de  $C = 32^{1/3}$ ,  $3$  i  $0$ , les distribucions corresponents es troben fàcilment a partir de les anteriors i no s'especifiquen.

Les lletres O, E, P, H, X i Z indiquen, respectivament, les zones circulars, el·líptiques, parabòliques, hiperbòliques, col·lisió i les corresponents a les corbes de velocitat zero.

Es fa esment en aquestes taules del valor de l'excentricitat per a alguns valors fixos d'interès de  $K$ , o bé, si aquesta creix (+) o decreix (-) al augmentar  $K$  en les diferents zones considerades.

S'especifica també el sentit de gir (és a dir, el signe de  $\dot{\theta}$ ) en els punts a distància mínima i màxima de l'origen ( $\sigma_-, \sigma_+$ ), o bé, el sentit de les òrbites circulars, quan correspongui; si l'òrbita és radial, posarem O.

S'han obtingut també, per il·lustrar més aquesta secció, algunes òrbites tipus en gairebé totes les zones indicades en la taula, per als següents valors de  $C$ :

$C=3.2$  (figura 4.7),  $C=3.024$  (figura 4.8),  $C=2.9$  (figura 4.9),  $C=2.4$  (figura 4.10),  $C=1.7$  (figura 4.11) i  $C=-0.45$  (figura 4.12);

en les dites figures s'hi dibuixen també, en cas d'existència, les corbes de velocitat zero (en puntejat). Els nombres en les figures es corresponen amb els nombres de les zones considerades en la taula.

	K	e	Zona	$\sigma_- \sigma_+$		K	e	Zona	$\sigma_- \sigma_+$
1	$K_{-1}$	0	O	-		$K_{-1}$	0	O	-
2	K	↑	E	--		K	↑	E	--
3	O	1	XE	0-		O	1	XE	0-
4	K	↓	E	+ -		K	↓	E	+ -
5	$K_i$	↓	EZ	+ 0		$K_i$	↓	EZ	+ 0
6	K	↓	E	++		K	↓	E	++
7	$K_1$	0	O	+		$K_1$	0	O	+
-----									
8	$K_2$	0	O	-		$K_2$	0	O	-
9	K	↑	E	--		K	↑	E	--
10	$K_e$	↑	ZE	0-		$K_p$	1	P	--
11	K	↑	E	+ -		K	↑	H	--
12	$K_p$	1	P	+ -		$K_e$	↑	ZH	0-
13	K	↑	H	+ -		K	↑	H	+ -

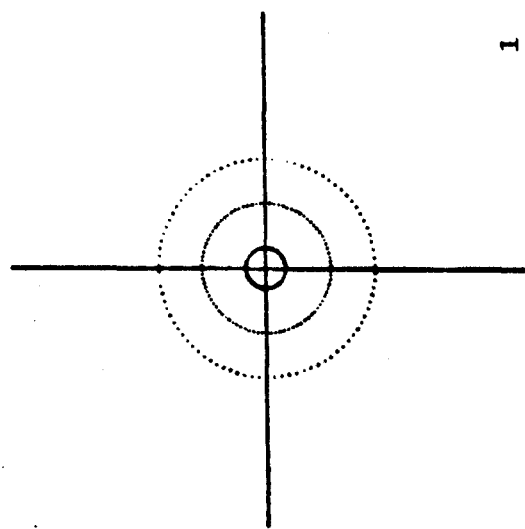
a)  $C > 32^{1/3}$

b)  $3 < C < 32^{1/3}$

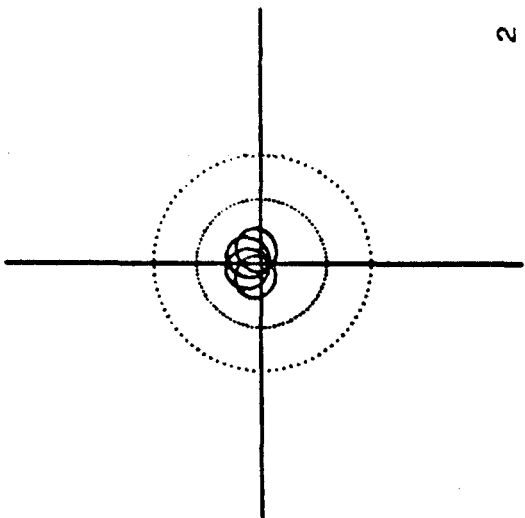
1	$K_{-1}$	0	O	-		$K_{-1}$	0	O	-
2	K	↑	E	--		K	↑	E	--
3	O	1	XE	0-		$K_p$	1	P	--
4	K	↓	E	+ -		K	↑	H	--
		$e_m$	E	+ -		$K_m$	$e_m$	H	--
		↑	E	+ -		K	↓	H	--
5	$K_p$	1	P	+ -		O	1	XH	0-
6	K	↑	H	+ -		K	↑	H	+ -

c)  $0 < C < 3$

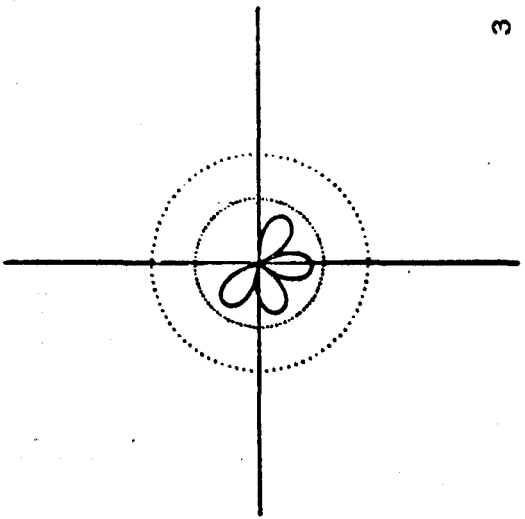
d)  $C < 0$



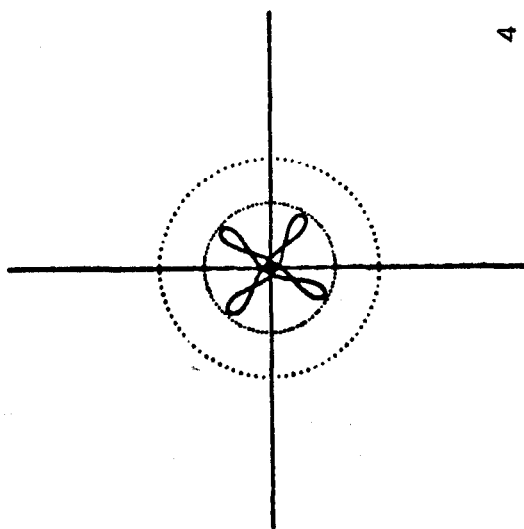
1



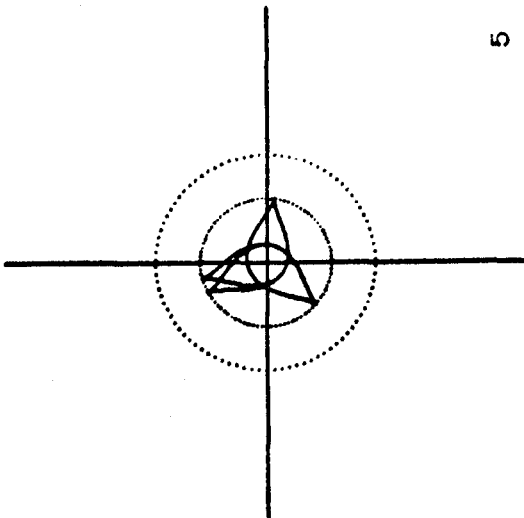
2



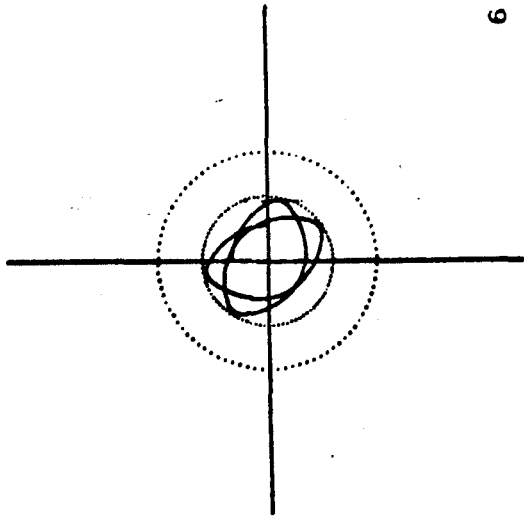
3



4



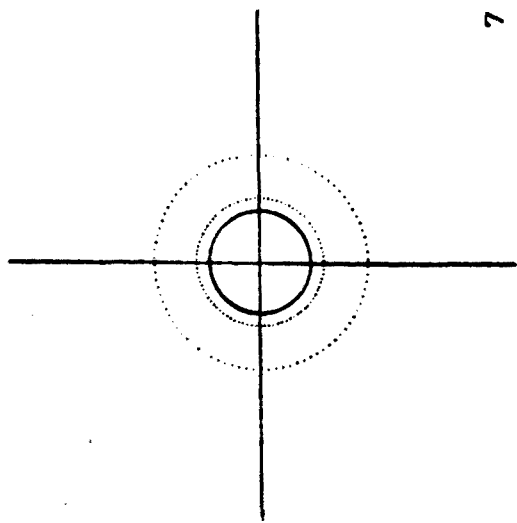
5



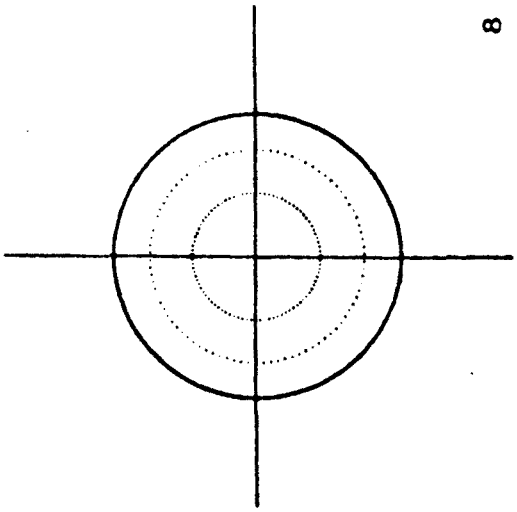
6

Figura 4.7

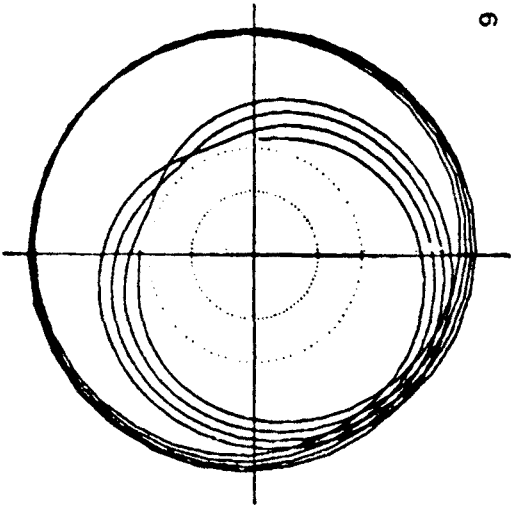




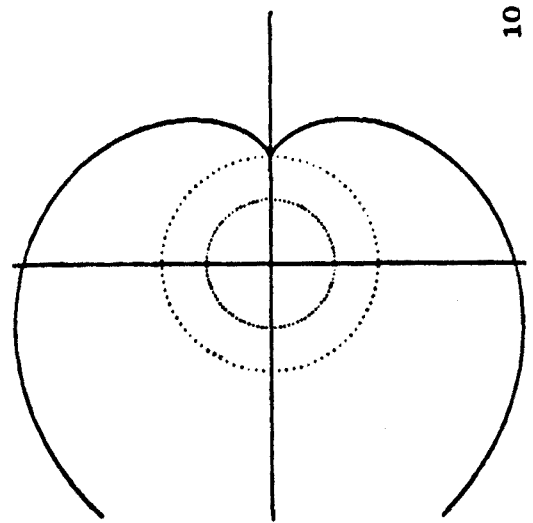
7



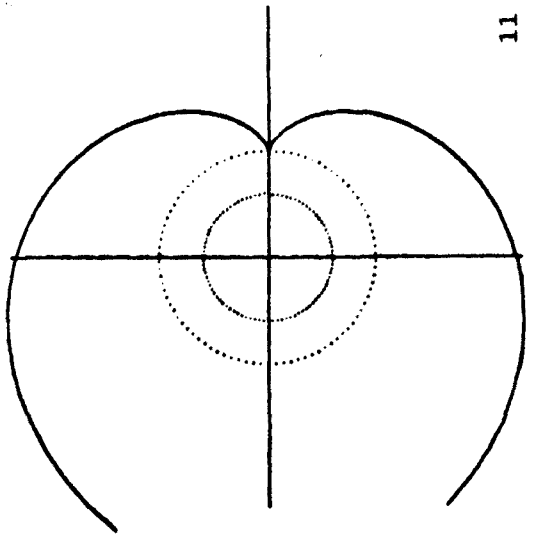
8



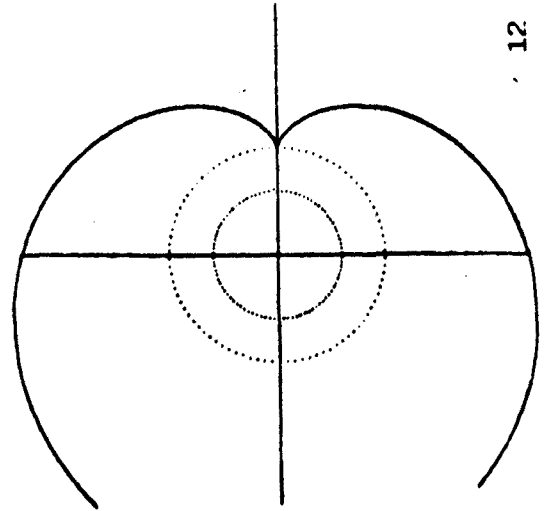
9



10

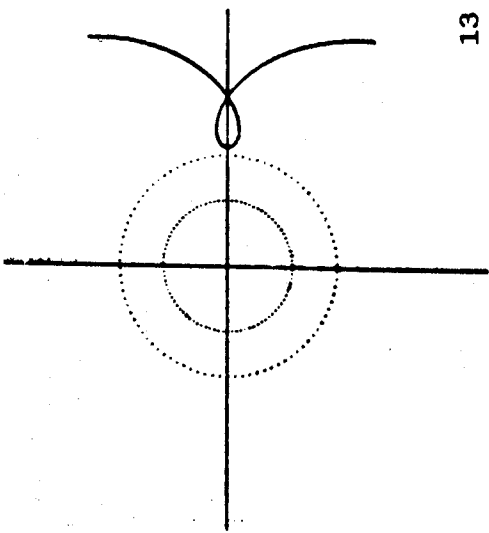


11



12

Figura 4.7 (cont.)



13

Figura 4.7 (fi)

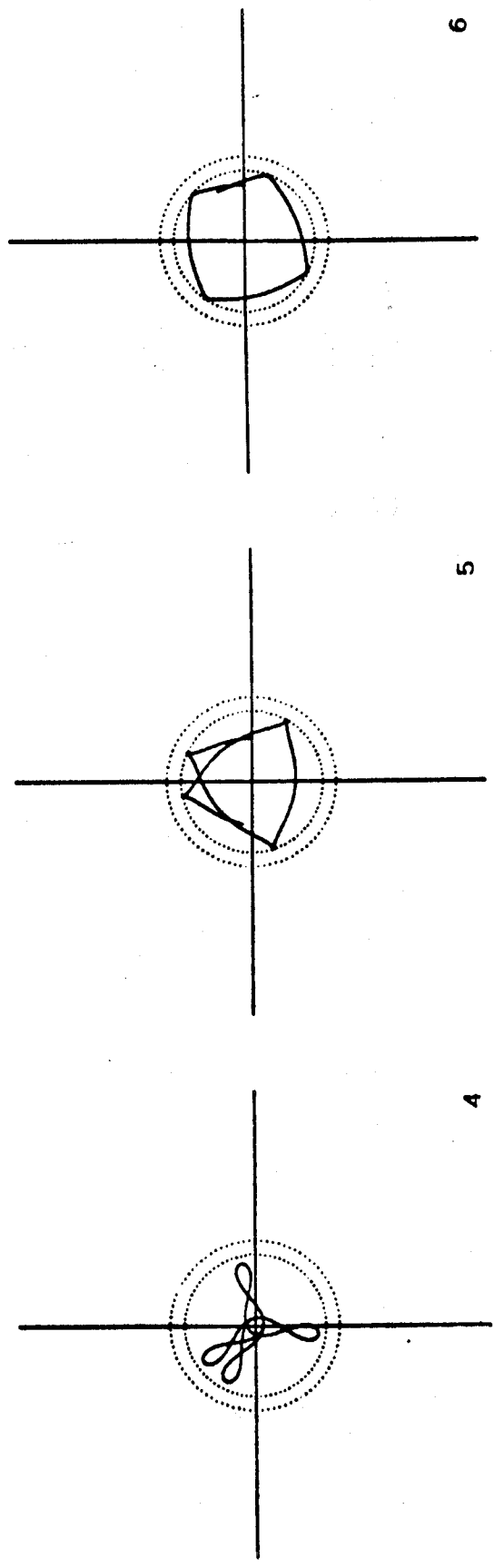
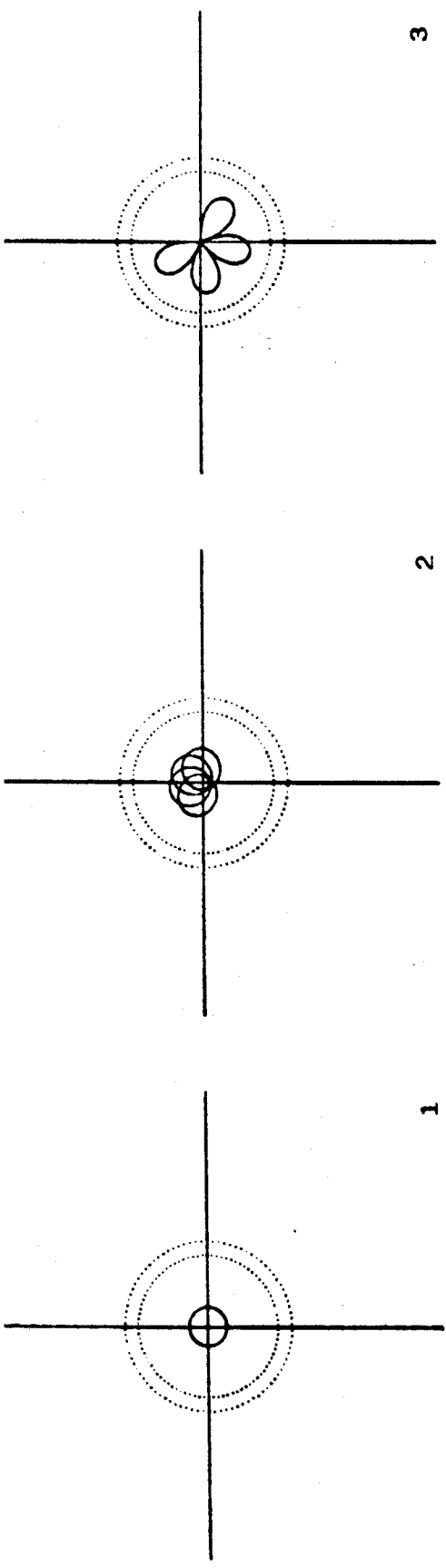
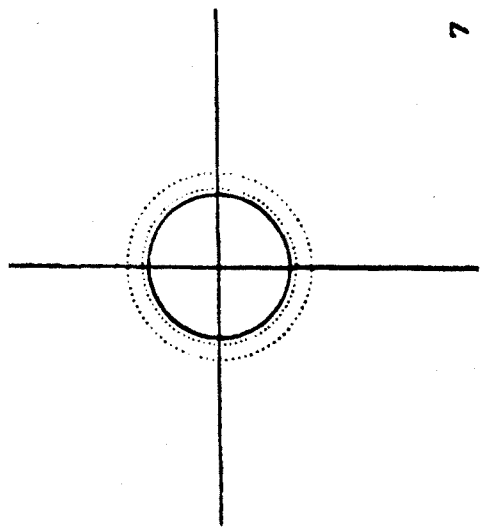
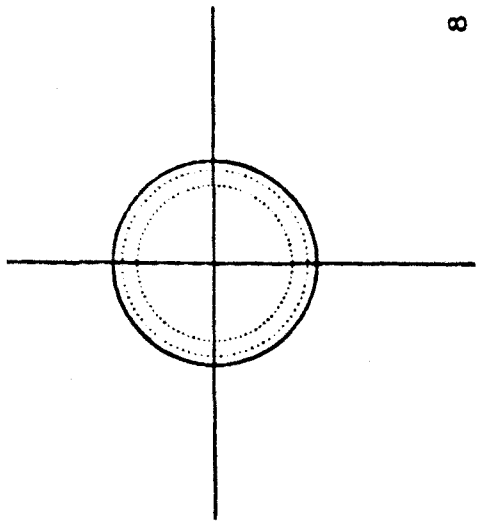


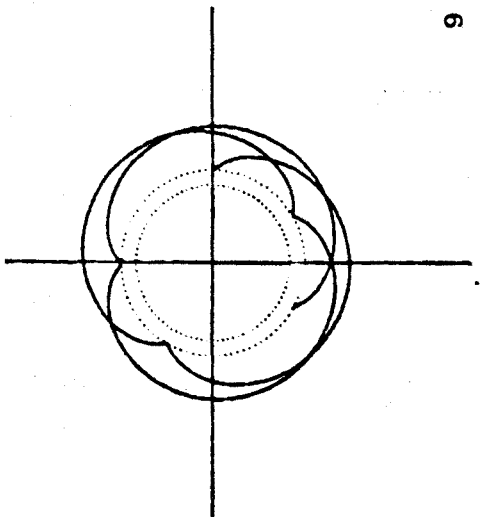
Figura 4.8



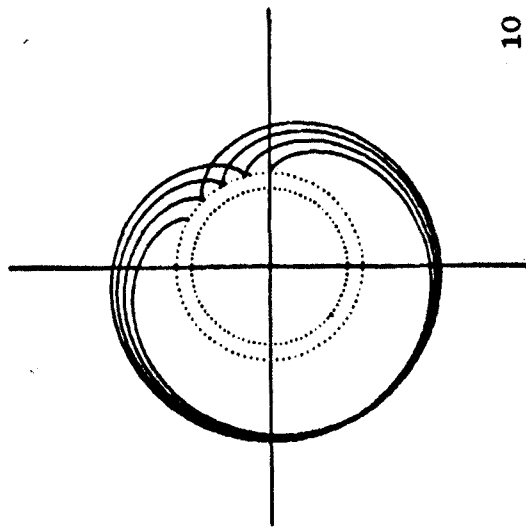
7



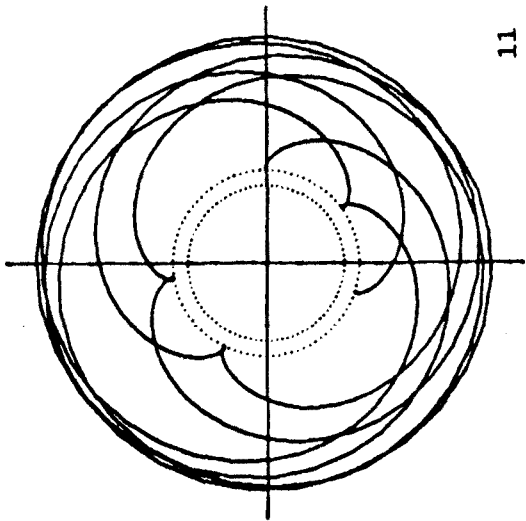
8



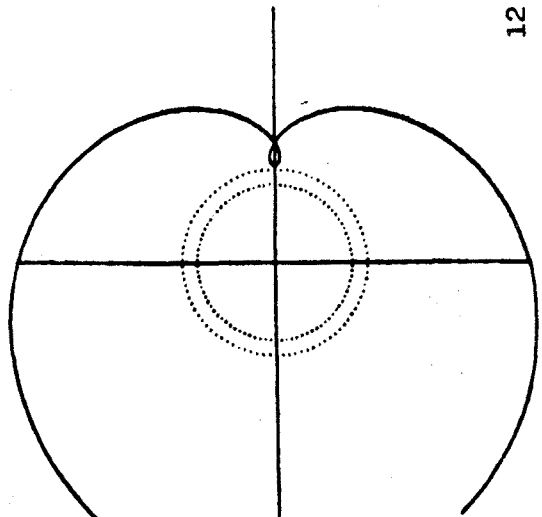
9



10

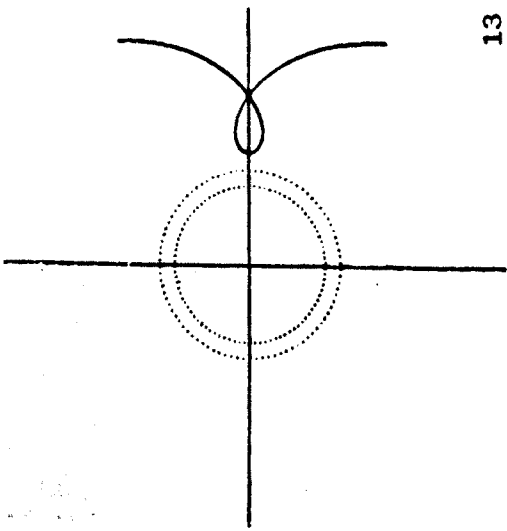


11

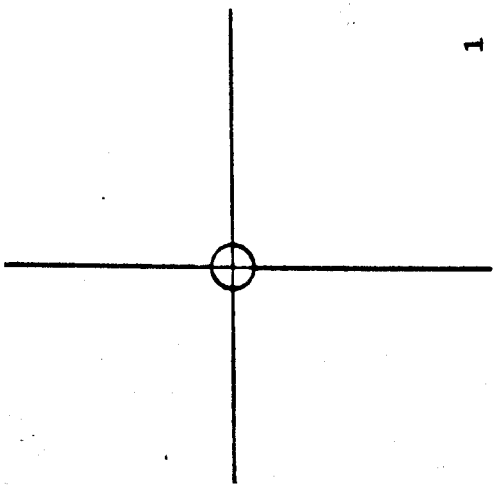


12

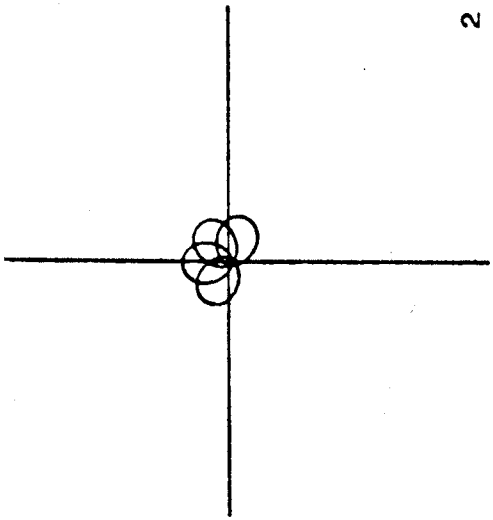
Figura 4.8 (cont.)



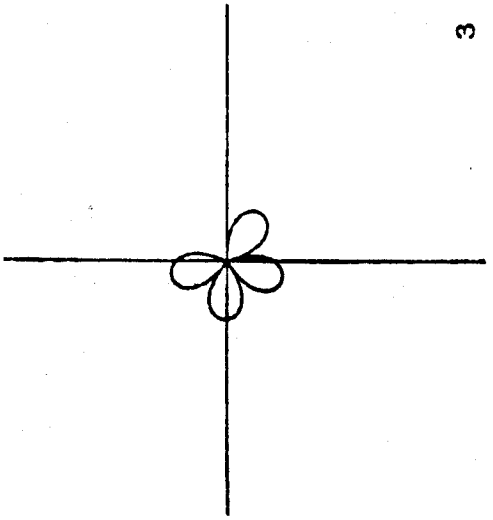
13



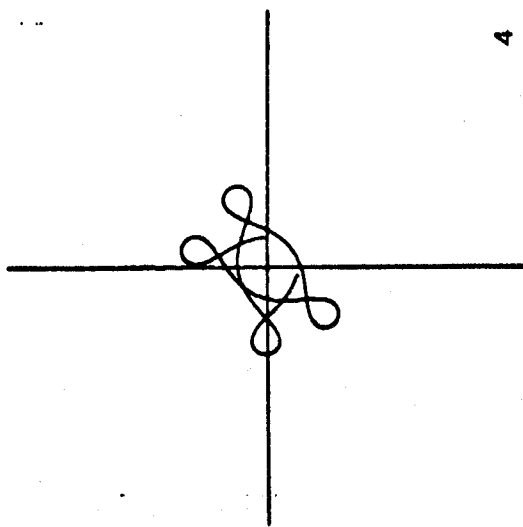
1



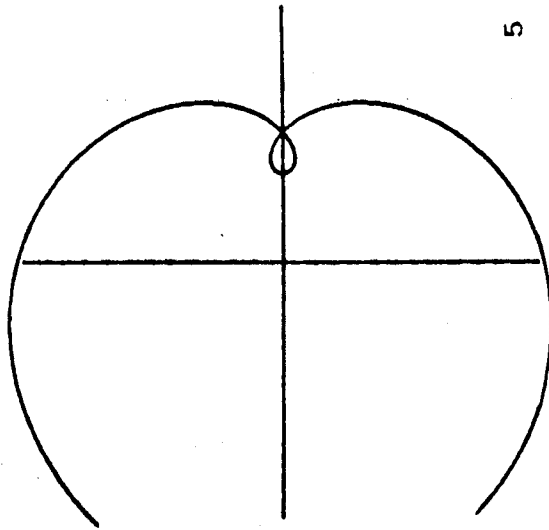
2



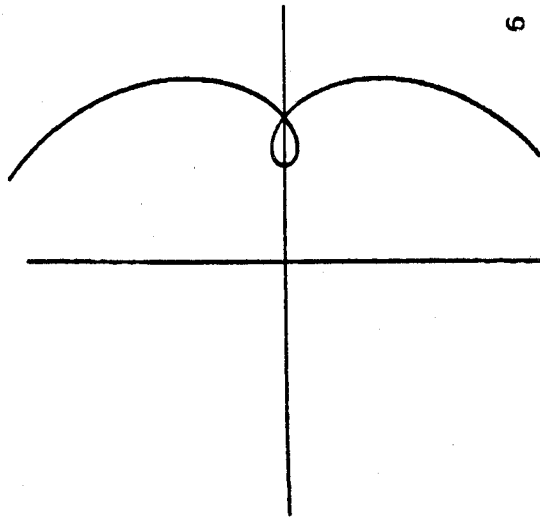
3



4

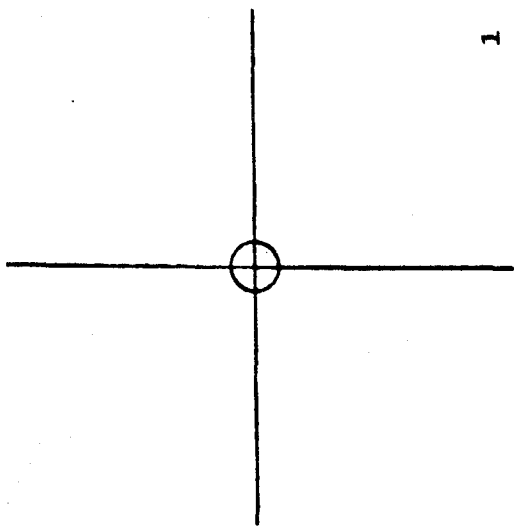


5

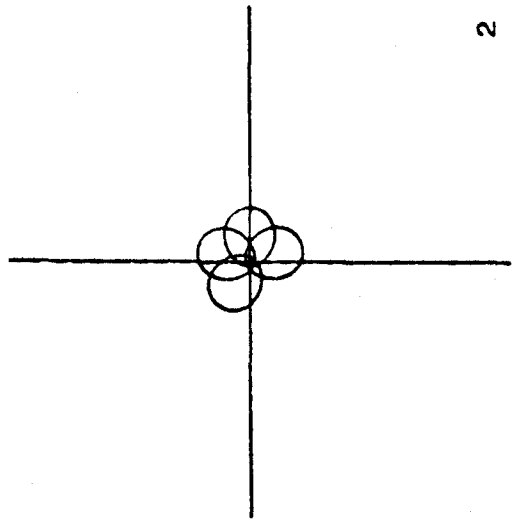


6

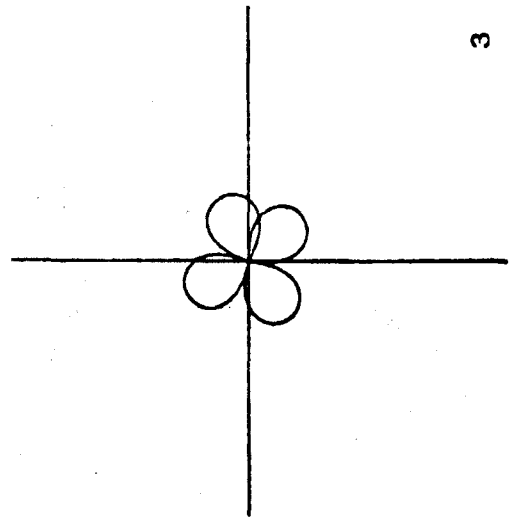
Figura 4.9



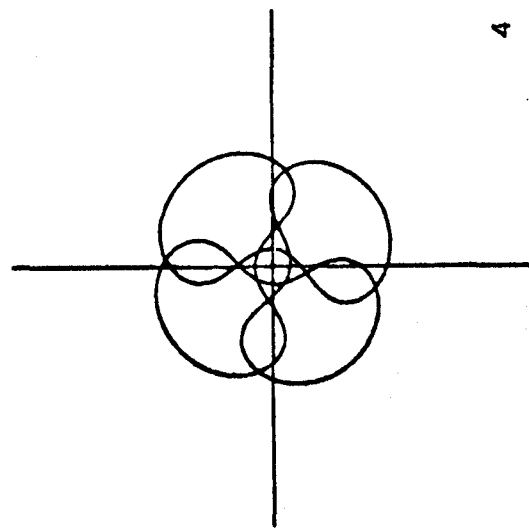
1



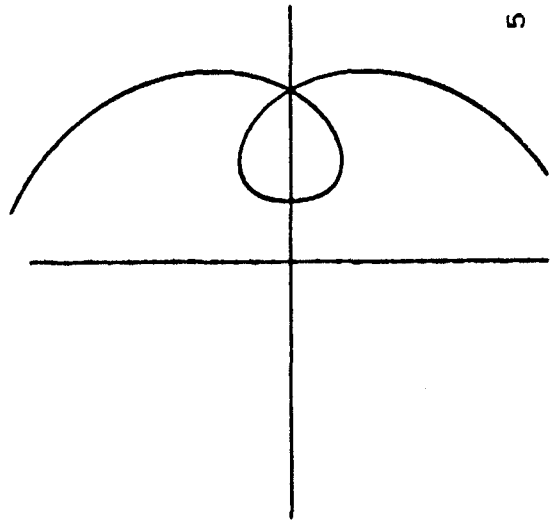
2



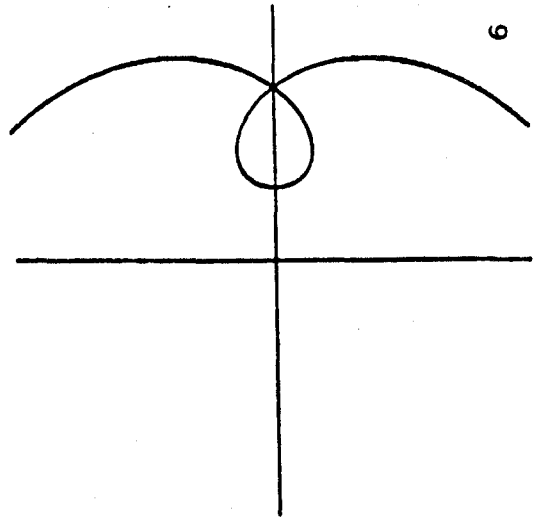
3



4

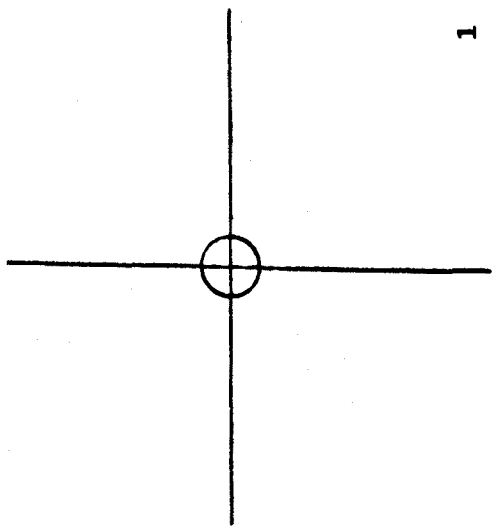


5

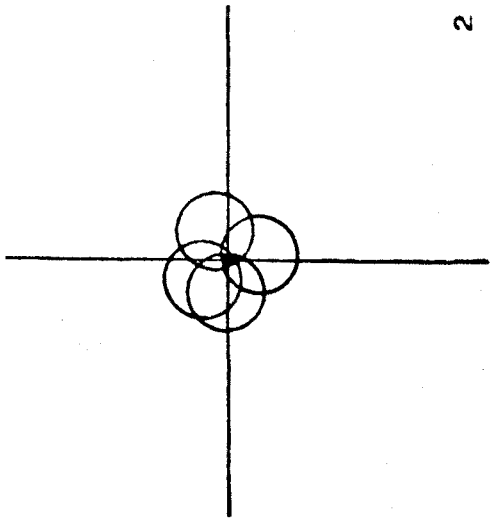


6

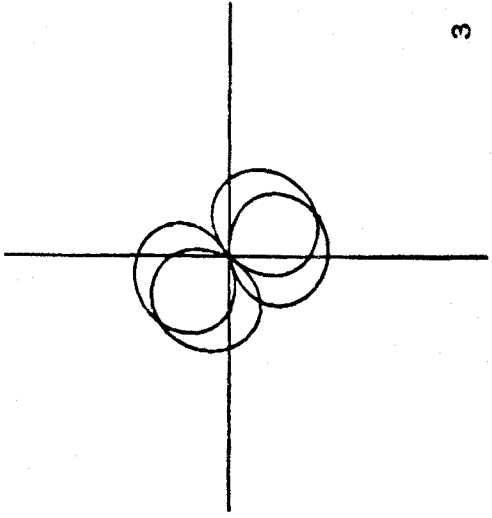
Figura 4.10



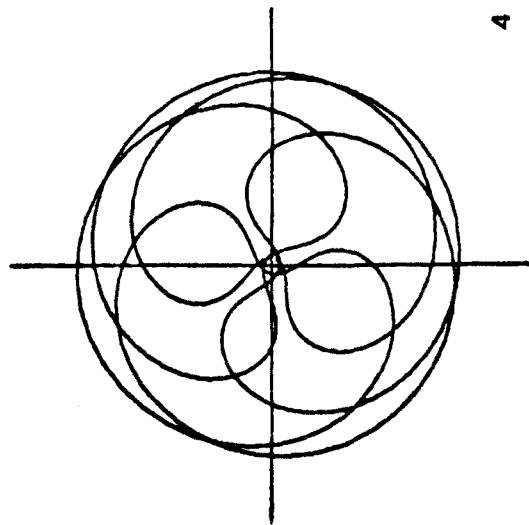
1



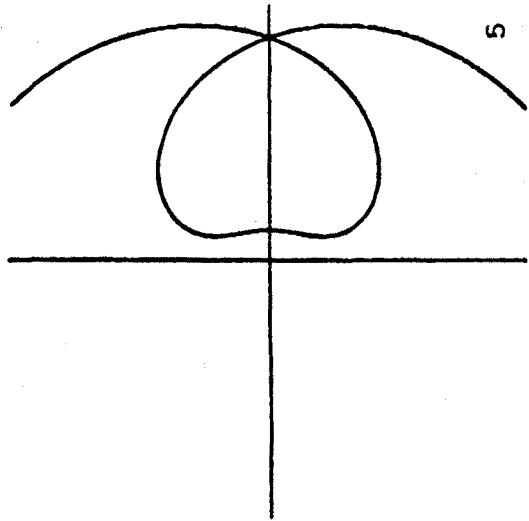
2



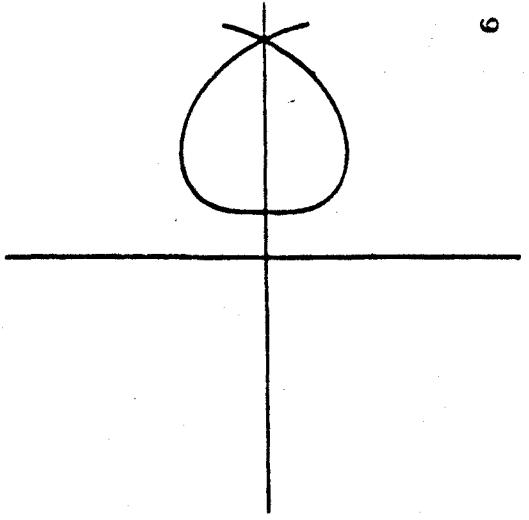
3



4



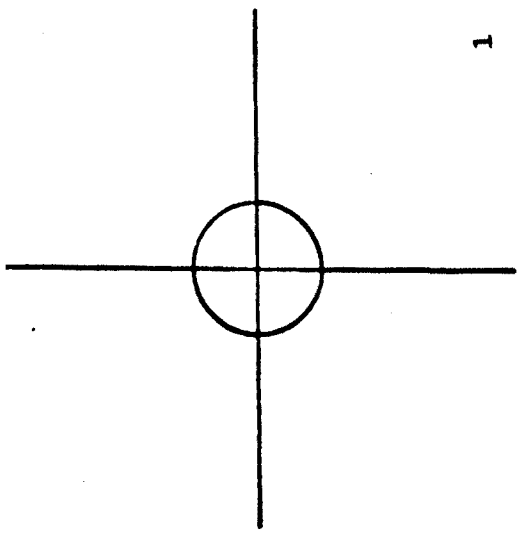
5



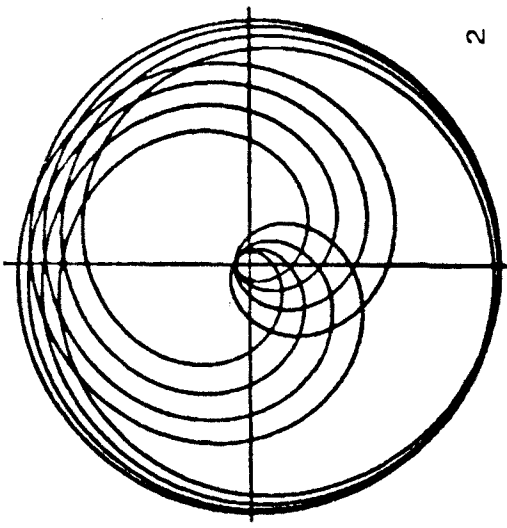
6

Figura 4.11

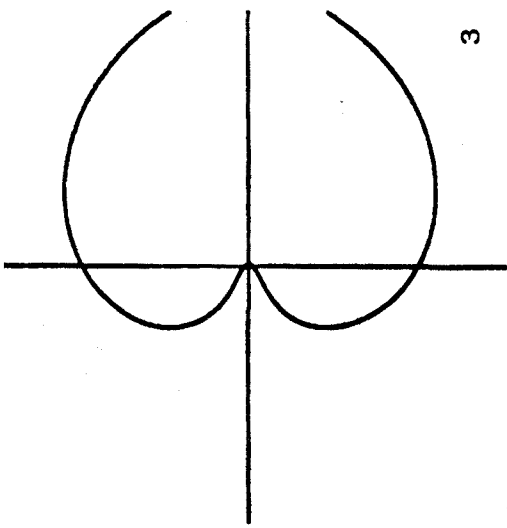




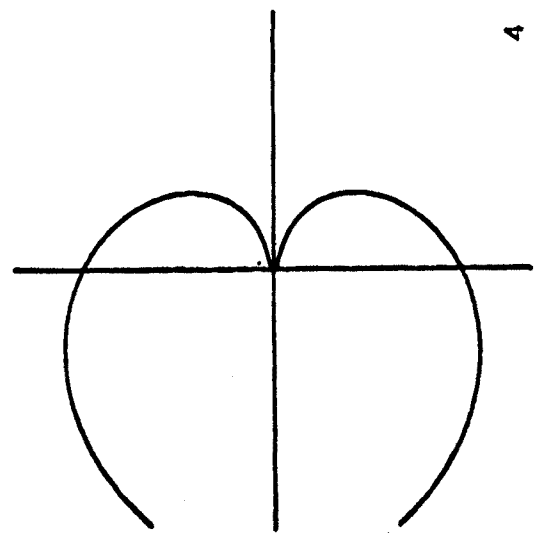
1



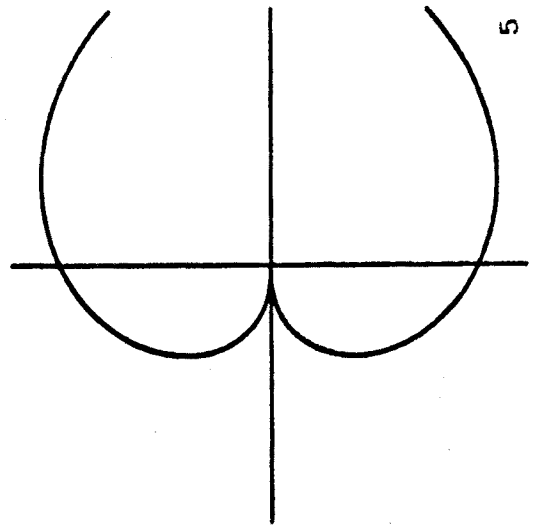
2



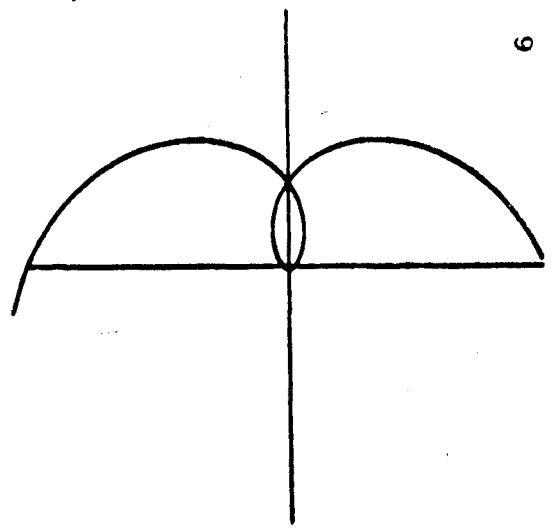
3



4



5



6

Figura 4.12

## 5. QUASI-INTEGRABILITAT DEL PROBLEMA RESTRINGIT AMB $m \neq 0$ .

### 5.1. Introducció.

El teorema de Liouville-Arnold ([6] i [8]) afirma l'existència de variables d'acció-angle en tota subvarietat compacta i connexa invariant pel flux dels sistemes integrables. Per als problemes de Kepler, les subvarietats invariants compactes i connexes maximals són els dominis el·líptics retrògrad i directe. En aquestes variables, els hamiltonians depenen només dels moments que són, per tant, integrals primeres. Els dominis esmentats estan foliats per tors (2-dimensionals) invariants on el flux és lineal en el temps.

Farem la construcció de les variables d'acció-angle de Liouville-Arnold i, a partir d'aquestes, trobarem les variables d'acció-angle de Delaunay i Poincaré.

Les variables d'acció-angle són les adequades cara a un estudi dels problemes que són petites pertorbacions de problemes integrables en la regió d'òrbites afitades (sistemes quasi-integrables). El teorema KAM assegura, sota certes condicions, la persistència de la majoria dels tors invariants per als problemes pertorbats, on el flux continua essent lineal.

En aquesta secció aplicarem el teorema KAM al problema restringit amb  $m \neq 0$ , mirant-lo com una petita pertorbació del problema giratori de Kepler.

## 5.2. Variables d'acció-angle en la zona el·líptica del problema de Kepler.

### Variabls d'acció-angle de Liouville-Arnold.

L'aplicació al problema de Kepler de la construcció de variables d'acció-angle de ([7] i [8]), que no detallem, porta al canvi de variables:

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{(1+2ER)/(1+2EK^2)^{1/2} - (-2E)^{1/2}(2ER^2+2R-K^2)}{(-2E)^{-1}-|K|}\right), \quad p_{\phi_1} = (-2E)^{-1}-|K|;$$

$$\phi_2 = \operatorname{sgn}(K)\phi_1 + \theta - \arccos\left(\frac{(K^2/R - 1)/(1+2EK^2)^{1/2}}{(-2E)^{-1}-|K|}\right), \quad p_{\phi_2} = K.$$

Els dominis de l'espai de fases on s'efectuen aquestes transformacions són els dominis el·líptic retrògrad  $E^r$  i directe  $E^d$  d'equacions respectives:  $0 < 1+2EK^2 < 1$ ,  $K < 0$  i  $0 < 1+2EK^2 < 1$ ,  $K > 0$ .

Es fa un abús de notació al considerar els valors constants  $K$  i  $E$  en comptes de les expressions del moment angular sideri i de l'energia sidèria en funció de les variables de posició i moment.

El hamiltonià no depèn ara de les variables d'angle  $\phi_1$  i  $\phi_2$ :

$$H(p_{\phi_1}, p_{\phi_2}) = \frac{1}{2}(p_{\phi_1} + |p_{\phi_2}|)^{-2}.$$

Les equacions del moviment seran:

$$\dot{\phi}_1 = (p_{\phi_1} + |p_{\phi_2}|)^{-3} = \Omega_1(p_{\phi_1}, p_{\phi_2}), \quad \dot{p}_{\phi_1} = 0;$$

$$\dot{\phi}_2 = \operatorname{sgn}(K)(p_{\phi_1} + |p_{\phi_2}|)^{-3} = \Omega_2(p_{\phi_1}, p_{\phi_2}), \quad \dot{p}_{\phi_2} = 0.$$

Els torsi  $\{p_{\phi_1} = I_1, p_{\phi_2} = I_2\}$  són invariants pel flux i aquest és lineal en el temps. Considerant que en  $t=t_0$  l'òrbita passa pel pericentre  $(R_-, \theta_-)$ :

$$\phi_1(t) = (-2E)^{3/2}(t-t_0), \quad \phi_2(t) = \operatorname{sgn}(K)(-2E)^{3/2}(t-t_0) + \theta_-;$$

essent la relació entre  $E$ ,  $K$ ,  $I_1$  i  $I_2$ :  $I_1 = (-2E)^{-1/2} - |K|$ ,  $I_2 = K$ .

$\Omega = (\Omega_1(I_1, I_2), \Omega_2(I_1, I_2))$  és la frequència d'oscil·lació del flux en el tor  $\{p_{\phi_1}=I_1, p_{\phi_2}=I_2\}$ . Com que aquesta frequència és commensurable, totes les òrbites són periòdiques.

La variable  $\phi_1$  és l'anomia mitjana que apareix en l'equació de Kepler el·líptica (2.1), que es nota clàssicament per  $\ell$  i és l'angle recorregut, suposant que l'òrbita periòdica es recorri a velocitat angular constant 1, com es desprèn de les solucions de l'equació de Kepler. Llavors,  $\phi_2 = \ell + \text{sgn}(K)$ .

Per al problema giratori de Kepler, el canvi a fer és el mateix:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \arccos\left(\frac{(1+2Er)/(1+2EK^2)^{1/2} - (-2E)^{1/2}(2Er^2+2r-K^2)}{1}\right), & p_{\phi_1} &= (-2E) - |K|; \\ \phi_2 &= \text{sgn}(K)\phi_1 + \theta - \arccos\left(\frac{(K^2/r - 1)/(1+2EK^2)^{1/2}}{1}\right), & p_{\phi_2} &= K; \end{aligned} \quad (5.1)$$

obtenint el hamiltonià:

$$H(p_{\phi_1}, p_{\phi_2}) = (p_{\phi_1} + |p_{\phi_2}|)^{-3} - p_{\phi_2}.$$

El flux és també lineal, ara de frequència  $((I_1 + |I_2|)^{-3}, \text{sgn}(K)(I_1 + |I_2|)^{-3} - 1)$  en el tor d'equació:  $p_{\phi_1}=I_1, p_{\phi_2}=I_2$ , que és commensurable només quan  $(I_1 + |I_2|)^3$  és racional; per tant

Les òrbites són periòdiques quan  $(I_1 + |I_2|)^3$  és racional; en cas contrari, són denses en el tor.

Tenim que  $\phi_1 = \ell$ ,  $\phi_2 = \text{sgn}(K)\ell + g$ , fent  $g = \theta$  (argument del pericentre). Les variables  $\ell$  i  $g$  seran unes noves variables d'angle.

Considerarem, a partir d'ara, només el problema giratori.

Variables d'acció-angle de Delaunay.

Les variables  $(\ell, g, p_\ell, p_g)$  definides per la transformació simplèctica:

$$\ell = \phi_1, \quad p_\ell = p_{\phi_1} + |p_{\phi_2}|; \quad g = \phi_2 - \text{sgn}(K), \quad p_g = p_{\phi_2};$$

formen un nou conjunt de variables d'acció-angle (les de Delaunay).

El hamiltonià del problema giratori es converteix en:

$$H(p_\ell, p_g) = \frac{1}{2p_\ell^2} - p_g.$$

El flux és lineal de freqüència  $\omega = (L^{-3}, -1)$  en els tors invariants d'equació  $p_\ell = L, p_g = G$ . Les òrbites seran periòdiques o denses segons la racionalitat o irracionalitat de  $L^3$ .

$L$  representa l'arrel quadrada del semieix de l'òrbita vista des del sistema inercial i  $G$ , el moment angular sideri.

Els dominis el·líptics  $E^{r(d)}$  estan definits en aquestes coordenades per  $0 < |G| < L, G < 0 (G > 0)$ . La intersecció de cadascun d'aquests dominis amb cada  $I_C$  donen corones toroidals foliades per tors invariants pel flux. En el cas  $C > 3$ , en tenim dues i si  $C < 3$ , només una: Això es deu a que l'equació de l'energia fa que puguem ometre una de les variables d'acció i fer la representació amb totes les altres. Per exemple, si omitim  $L$ , el domini de possibles valors de  $G$  és  $(K_{-1}, K_1) \cup (K_2, \infty)$  (si  $C > 3$ ) o  $(K_{-1}, \infty)$  (si  $C < 3$ ); si  $C = 3, K_1 = K_2$ . Per a cada valor de  $G$ , tenim un tor invariant.

### Variabls de Poincaré.

Les variables d'acció-angle de Poincaré es defineixen per la transformació canònica:

$$\lambda = \ell + \operatorname{sgn}(K)g, \quad p_\lambda = p_\ell; \quad \phi = -\operatorname{sgn}(K)g, \quad p_\phi = p_\ell - |p_g|.$$

El hamiltonià ara serà:

$$H(p_\lambda, p_\phi) = \frac{1}{2p_\lambda} + \operatorname{sgn}(K)(p_\ell - p_\lambda).$$

El flux en els tors  $\{p_\lambda = \Lambda, p_\phi = \Phi\}$  és lineal de freqüència

$$\omega = (\Lambda^{-3} - \operatorname{sgn}(K), \operatorname{sgn}(K)).$$

Els dominis el·líptics  $E^{r(d)}$  venen donats tots dos per les relacions

$$\Phi > \Lambda > 0.$$

Notem que  $\Lambda = a^{1/2}$  i que  $\Phi = a^{1/2} - |K|$ . Per a les òrbites circulars,  $K = a^{1/2}$ . Observi's també que la variable  $\phi$  no té sentit per a les òrbites circulars.

Considerem ara la transformació simplèctica:

$$\eta = \sqrt{2p_\phi} \cos \phi, \quad \xi = \sqrt{2p_\phi} \sin \phi.$$

El conjunt de variables (de Poincaré)  $(\lambda, \eta, p_\lambda, \xi)$  ja no és d'acció-angle, el hamiltonià s'hi expressa com:

$$H(\lambda, \eta, p_\lambda, \xi) = \frac{1}{2p_\lambda} - \operatorname{sgn}(K)p_\lambda + \operatorname{sgn}(K)(\eta^2 + \xi^2).$$

Aquest conjunt de variables s'estèn de forma automàtica a les òrbites circulars, fent  $\eta = \xi = 0$ . En aquestes variables es demostra l'existència i estabilitat de les òrbites periòdiques de 1ª espècie de Poincaré: òrbites tancades que s'obtenen per continuació de les òrbites circulars del problema giratori de Kepler, quan  $m \neq 0$ . Vegi's [1] i [32].

### 5.3. El problema restringit amb $m \ll 0$ com problema quasi-integrable.

Les variables de Delaunay es defineixen usant també les expressions (5.1) per al problema restringit en els dominis d'intersecció dels dominis  $E^{r(d)}$  del problema de Kepler amb la varietat de fases del problema restringit i que notarem per  $E_m^{r(d)}$ .

El hamiltonià del problema restringit s'expressa usant aquestes variables en  $E_m^{r(d)}$ , per:

$$H(\ell, g, p_\ell, p_g) = \frac{1}{2p_\ell^2} - p_g - mH_1(\ell, g, p_\ell, p_g, m)$$

amb  $H_1$   $2\pi$ -periòdica en  $\ell$  i  $g$ , analítica en totes les variables.

El problema restringit amb  $m \ll 0$  és un sistema hamiltonià quasi-integrable: admet l'aplicació del teorema KAM que enunciem ara ([19], [5] i [25]).

#### TEOREMA KAM

Siguin els hamiltonians de la forma  $H(q,p) = H_0(p) + mH_1(q,p,m)$ , amb  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $H_1$   $2\pi$ -periòdica respecte a  $q$  i analítica en  $E_m$  on  $H_0$  a compleix almenys una de les condicions:

a)  $\det \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0$  (condició de no-degeneració),

b)  $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} & \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H_0}{\partial p_j} & 0 \end{bmatrix} \neq 0$  (condició de no-degeneració isoenergètica);

llavors, per a tot  $\epsilon > 0$ , existeix  $m_0 > 0$  tal que si  $|m| < m_0$ , el flux en  $E_m$  donat per les equacions de Hamilton:

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

té les següents propietats:

- i) Existeix una descomposició de  $E_m$  en  $\bar{E}_m$  i  $\tilde{E}_m$  (això és:  $E_m = \bar{E}_m \cup \tilde{E}_m$ ,  $\bar{E}_m \cap \tilde{E}_m = \emptyset$ ) amb  $\bar{E}_m$  i  $\tilde{E}_m$  invariants pel flux amb  $\tilde{E}_m$  petit en el sentit que  $\mu(\tilde{E}_m) < \epsilon \cdot \mu(E_m)$ , on  $\mu$  indica la mesura de Lebesgue.
- ii)  $\bar{E}_m$  està format per tors analítics invariants  $T_\omega^m$  a distància més petita que  $\epsilon$  dels tors invariants  $T_\omega$  del sistema de hamiltonià  $H_0$ , definits per l'equació  $p=c$  (constant).
- iii) El flux en els tors  $T_\omega^m$  és lineal i de la mateixa freqüència que en els tors no pertorbats  $T_\omega$ , és a dir,  $\omega = \left. \frac{\partial H_0}{\partial p} \right|_{p=c}$ .

D'on:

#### TEOREMA

Per a tot  $\epsilon > 0$ , existeix  $m_0$  tal que si  $0 < m < m_0$ :

- i) Existeix una descomposició del domini el·líptic  $E_m = E_m^r \cup E_m^d$  en  $\bar{E}_m$  i  $\tilde{E}_m$ , invariants pel flux del problema restringit amb  $\mu(\tilde{E}_m) < m \cdot \mu(\bar{E}_m)$ .
- ii)  $\bar{E}_m$  està format per tors analítics invariants  $T_\omega^m$  a distància menor que  $\epsilon$  dels tors invariants  $T_\omega$  del problema giratori de Kepler, definits per  $p_g = L$ ,  $p_g = G$  ( $0 < |G| < L$ ).
- iii) El flux en  $T_\omega^m$  és lineal de la mateixa freqüència  $\omega = (L^{-3}, -1)$  que en  $T_\omega$ . Les òrbites seran periòdiques o denses en  $T_\omega^m$  segons la racionalitat o irracionalitat de  $L^3$ .

Concretament, el teorema assegura la 'persistència' a les pertorbacions dels tors invariants de freqüències  $\omega$  acomplint la infinitat de condicions diofantines:

$$|(k, \omega)| > \frac{c}{|k|^{n+1}} \quad \text{amb } c=c(n, \epsilon), \text{ per a tot } n \in \mathbb{N} \text{ i } k=(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2,$$

essent  $|k| = |k_1| + |k_2|$ .



CAPÍTOL II.

EL PROBLEMA RESTRINGIT  
AMB  $m \sim 0$  I C SUFICIENTMENT  
GRAN.

## 1. DEFINICIONS I EL CAS $m=0$ .

### 1.1. Variables de McGehee.

Les variables de McGehee  $(q, \theta, p, \omega)$  s'introdueixen amb la finalitat de fer l'anàlisi de les òrbites que van o venen de l'infinit, o bé, d'aquelles que arriben a estar molt allunyades dels primaris en algun moment. Aquesta anàlisi és més còmoda en aquestes coordenades que intercanvien l'infinit i l'origen; de fet, s'obtenen mitjançant una inversió de les coordenades de posició del sistema de referència sinòdic. En coordenades polars ([23]):

$$r=2/q^2 \quad (q>0) , \quad p_r=p , \quad p_\theta=\omega .$$

Notem que aquestes variables deixen d'ésser canòniques.

Les equacions del moviment es converteixen en:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -q^3 p / 4 , & \dot{p} &= -q^4 / 4 + q^6 \omega^2 / 8 - \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} g(2e^{i\theta}/q^2)\} , \\ \dot{\theta} &= -1 + q^4 \omega / 4 , & \dot{\omega} &= -2\operatorname{Im}\{e^{-i\theta} g(2e^{i\theta}/q^2)\} / q^2 ; \end{aligned} \quad (1.1)$$

i la integral de Jacobi en:

$$C = q^2 - p^2 - q^4 \omega^2 / 4 + 2\omega + v(2e^{i\theta}/q^2) ; \quad (1.2)$$

tot això fent:  $g(z)=(1-m)(z-m)/|z-m|^3 + m(z-m+1)/|z-m+1|-z/|z|^3$  i  
 $v(z)=(1-m)/|z-m| + m/|z-m+1| - 1/|z|$  .

## 1.2. Classificació de les òrbites i punts de retorn.

Els punts de retorn d'una òrbita són aquells que tenen velocitat radial nul·la. Aquests poden ésser pericentres, apocentres o punts de retorn degenerats, segons que l'acceleració tangencial sigui negativa, positiva o nul·la. Els pericentres i apocentres d'una òrbita són respectivament els punts a distància mínima i màxima (relatives) de l'origen. Tots els punts d'una òrbita circular són punts de retorn degenerats.

El conjunt de punts de retorn per al problema restringit, per a cada valor de  $C$ , és  $I_C^0 = I_C \cap \{p=0\}$ .

### PROPOSICIÓ.

En el problema restringit per a  $C > C_1(m)$ , tota òrbita en la component exterior de la regió de Hill (interior, en variables de McGehee) té almenys un pericentre. A més, si una òrbita no té cap més punt de retorn, a partir d'un de donat, per a temps creixents (resp. decreixents), llavors tendeix a un punt de  $\{q=0\}$  amb  $p > 0$  (resp.  $p < 0$ ) quan  $t \rightarrow \infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ).

En efecte,  $p(t) > 0$  (resp.  $p(t) < 0$ ) per a tot  $t$ , equival a  $\dot{q}(t) < 0$  (resp.  $\dot{q}(t) > 0$ ) per a tot  $t$ ; en tal cas,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$  (resp.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = -\infty$ ), ja que no hi ha punts d'equilibri en aquesta component connexa de la regió de Hill, i això està en contradicció amb el fet que en la dita component  $q$  està fitada superiorment. D'on, l'existència de pericentres. Si una òrbita no té cap més punt de retorn a partir d'un de donat en  $t=t_1$ , aquest ha d'ésser un pericentre, usant el raonament anterior; llavors,  $\forall t > t_1$ ,  $p(t) > 0$  i  $\dot{q}(t) < 0$ . Per tant,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) > 0$ .

Consegüentment, donem les definicions següents:

Els punts de retorn tals que l'òrbita que passa per ells ja no talla més  $\{p=0\}$  es diuen  $\pm 1$ -hiperbòlics o  $\pm 1$ -parabòlics, segons que tendeixen a  $\{q=0\}$  amb  $p>0$  o amb  $p<0$ , quan  $t \rightarrow \pm\infty$ , respectivament. Els signes  $\pm$  distingeixen sempre si es tracta el comportament per a temps creixents o decreixents.

Un punt de retorn es diu  $\pm n$ -hiperbòlic o  $\pm n$ -parabòlic quan l'òrbita que passa per ell talla  $\{p=0\}$  només  $n-1$  vegades, tendint després a  $\{q=0\}$ , atenent a les mateixes consideracions del paràgraf anterior.

Aquests conjunts es noten per  $H_{\pm n}^0$  i  $P_{\pm n}^0$ . Els punts de  $S_{\pm n}^0 = H_{\pm n}^0 \cup P_{\pm n}^0$  s'anomenen punts de retorn d'escapament i captura a la n-ésima.

Els punts de retorn  $\pm$ -hiperbòlics són els de  $H_{\pm}^0 = \bigcup_{n \geq 1} H_{\pm n}^0$ . Idem amb  $\pm$ -parabòlics i  $P_{\pm}^0 = \bigcup_{n \geq 1} P_{\pm n}^0$ .

Els punts de retorn que no són de  $\bigcup_{j \leq n} S_{\pm j}^0$  reben el nom de  $\pm n$ -el.líptics i formen el conjunt  $E_{\pm n}^0$ . La intersecció de tots aquests  $E_{\pm}^0 = \bigcap_{n \geq 1} E_{\pm n}^0$  conté els punts de retorn d'òrbites que tallen infinites vegades  $\{p=0\}$ .

Si aquestes òrbites adhereixen a un punt de  $\{q=0\}$ , direm que el punt de retorn és de tipus  $\pm$ -oscil.latori; en cas contrari, és  $\pm$ -estable-Lagrange. Els conjunts de punts d'aquests tipus es representa per  $OS_{\pm}^0$  i  $L_{\pm}^0$ .

Tenim que  $OS_{\pm}^0 = \overline{\lim} S_{\pm n}^0 = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} S_{\pm k}^0$  i  $L_{\pm}^0 = E_{\pm}^0 \setminus OS_{\pm}^0$ .

La classificació dels punts de retorn en  $\pm$ -hiperbòlics,  $\pm$ -parabòlics,  $\pm$ -oscil.latoris i  $\pm$ -estables-Lagrange es correspon amb la classificació clàssica de les òrbites segons l'evolució final quan  $t \rightarrow \pm\infty$  ([9] i [3]).

- .  $\pm$ -hiperbòliques:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = \infty$  ,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{r}(t) > 0$  ;
- .  $\pm$ -parabòliques:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = \infty$  ,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{r}(t) = 0$  ;
- .  $\pm$ -oscil.latòries:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = \infty$  ,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) < \infty$  ;
- .  $\pm$ -estables-Lagrange:  $r(t) < \infty$  ,  $\forall t \geq 0$  .

Es a dir, un punt de retorn és d'un cert tipus si i només si pertany a una òrbita del mateix tipus.

La proposició ens permet d'afirmar que només hi ha aquests 4 tipus d'evolució final o de punts de retorn en el problema restringit per a  $C > C_1(m)$ , comptant només un sentit del temps. D'on:

TEOREMA.

Per al problema restringit amb  $C > C_1(m)$ , existeixen com a màxim 16 tipus d'evolució final, o equivalentment 16 tipus de punts de retorn corresponents als conjunts  $A_- \cap A_+$  amb  $A_{\pm} \in \{H_{\pm}^0, P_{\pm}^0, OS_{\pm}^0, L_{\pm}^0\}$  .

### 1.3. Estudi dels conjunts de punts de retorn per a $m=0$ .

Cal considerar valors de  $C > C_1(0) = 3$ . Recordem que, si  $3 < C < 32^{1/3}$ , el valor de  $\omega$  corresponent a les òrbites parabòliques és inferior al corresponent a les corbes de velocitat zero exteriors; si  $C > 32^{1/3}$ , tenim el comportament oposat.

Classificant els punts de retorn en directes, retrògrads i radials segons el sentit del pas de les òrbites per ells, tenim:

#### PROPOSICIÓ.

Per al problema restringit amb  $m=0$  i  $C > 3$ , en la regió exterior:

a) Si  $C > 32^{1/3}$ , els pericentres de les òrbites el·líptiques, parabòliques i part de les hiperbòliques ( $\omega < K_e$ ) són retrògrads (en realitat, ho són totes aquestes òrbites en cada punt); els altres són radials ( $\omega = K_e$ ) o directes ( $\omega > K_e$ ).

b) Si  $3 < C < 32^{1/3}$ , només són retrògrads els pericentres d'una part de les òrbites el·líptiques ( $\omega < K_e$ ); els altres són radials ( $\omega = K_e$ ) o directes ( $\omega > K_e$ ).

c) Tots els apocentres són retrògrads.

En les variables  $(q, \theta, \omega)$ ,  $I_C^{(ext)}$  pot representar-se per 2 còpies, identificades per la frontera, del sòlid de revolució format al girar respecte l'eix  $\{q=0\}$ , el conjunt  $J_C$  en variables  $(q, \omega)$  que es representa en la figura I.4.5, per a diferents valors de  $C > 3$ , en variables  $(r, \omega)$ .

$I_C^{(ext)} \cap \{\omega = K\}$  és invariant i està format per 2 còpies (una a cada sòlid) d'una corona (degenerada o no) que s'han d'identificar per la frontera per donar els conjunts invariants  $I_{EK}$  amb  $E = K - C/2$ , estudiats en I.2.1.

En la frontera  $I_C$  de  $J_C \times S^1$  es classifiquen els punts de retorn segons els comportaments finals de les òrbites que passen per ells. Notem que només hi ha òrbites hiperbòliques, parabòliques i estables-Lagrange i que ho són en ambdós sentits del temps; són branques d'hipèrboles, paràboles i el·lipses o cercles en el problema de Kepler (inercial). Els corresponents punts de retorn seran:

$$H_+^0 = H_-^0 = H_1^0 = H_{-1}^0 = H^0 = I_C^0 \cap \{\omega > K_p\}, \quad P_+^0 = P_-^0 = P_1^0 = P_{-1}^0 = P^0 = I_C^0 \cap \{\omega = K_p\},$$

$$E_+^0 = E_-^0 = E_1^0 = E_{-1}^0 = E^0 = I_C^0 \cap \{K_2 < \omega < K_p\}, \quad L_+^0 = L_-^0 = L^0 = E^0, \quad OS_+^0 = \emptyset.$$

Els punts de retorn retrògrads i directes poden descriure's per separat en coordenades  $(q, \theta)$ . En efecte,  $I_C^{0(\text{ext})} \cap \{\omega < K_e\}$  i  $I_C^{0(\text{ext})} \cap \{\omega > K_e\}$  es projecten injectivament en el pla  $(q, \theta)$  en discs de radis  $q = q_e$ , on  $r_e = 2/q_e$ , i que notem per  $D_r$  i  $D_d$ . Les fronteres d'aquests discs corresponen als punts de retorn radials. En cadascun d'aquests discs hi distingirem els punts de retorn segons els comportaments finals. Aquestes representacions són qualitativament diferents segons els casos a) i b) de la proposició anterior.

L'òrbita circular  $\{q = q_2 = \sqrt{2}/K_2\}$  està continguda sempre a  $D_r$ ; en el seu interior hi ha tots els apocentres. A l'exterior, en  $D_r$ , hi ha alguns pericentres el·líptics, si  $3 < C < 32^{1/3}$ , i tots els pericentres el·líptics, els parabòlics i part dels hiperbòlics, si  $C > 32^{1/3}$ . En  $D_d$  s'hi troben la resta de pericentres el·líptics, els parabòlics i tots els hiperbòlics, si  $3 < C < 32^{1/3}$ , i la resta de pericentres hiperbòlics, si  $C > 32^{1/3}$ . Vegi's la figura 1.1

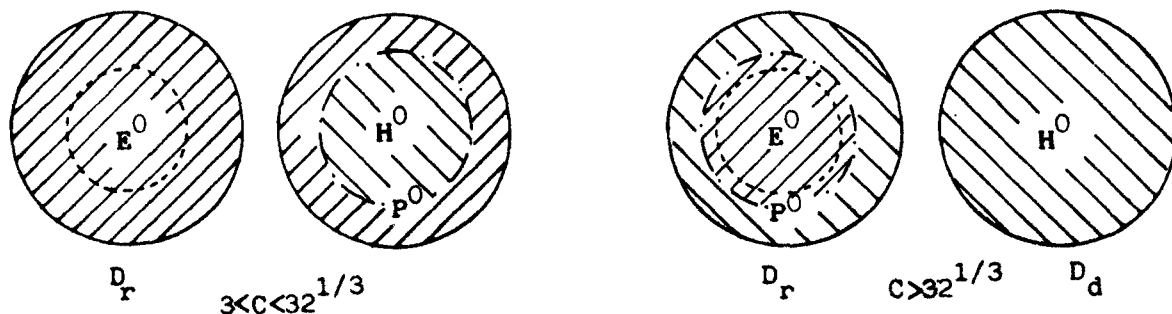


Figura 1.1

## 2. ESTUDI QUALITATIU.

### 2.1. Introducció.

Les representacions de  $I_C^{(ext)}$  com 2 còpies d'un sòlid amb fronteres identificades continuen essent vàlides per al problema restringit amb  $m \neq 0$ , amb la diferència que aquest sòlid ja no és de revolució, pel fet que la integral de Jacobi depèn ara de l'angle  $\theta$ . Les representacions obtingudes per al cas  $m=0$  són però una aproximació d'aquelles.

Un altre fet que complica l'anàlisi de les diferents zones és que els hiperplans  $\{\omega=K\}$  ja no són invariants pel flux del problema i els diferents conjunts de punts de retorn ja no s'obtenen per interseccions de feixos d'aquests hiperplans amb  $I_C^{(ext)}$ , com en el cas  $m=0$ .

Es faran servir dos tipus d'eines per l'estudi dels conjunts de punts de retorn que no serà tan simple i exhaustiu com en el cas  $m=0$ .

La primera d'elles fa referència a les òrbites parabòliques. Les varietats invariants estable i inestable de l'òrbita periòdica de l'origen, en coordenades de McGehee, coincideix amb el conjunt de punts que pertanyen a òrbites parabòliques. Els conjunts  $P_{\pm n}^0$  són les successives interseccions d'aquestes varietats amb  $\{p=0\}$ . Els conjunts  $H_{\pm n}^0$  s'obtindran sense dificultats a partir dels anteriors, ja que  $\partial H_{\pm n}^0 = P_{\pm n}^0$ . En el complementari en  $I_C^{(ext)}$  caldria distingir els punts de tipus oscil·latori dels de tipus estable-Lagrange.

Per a obtenir informació sobre aquesta zona s'usarà l'altra eina. El teorema del twist de Moser podrà aplicar-se a les aplicacions de Poincaré associades al flux del problema pertorbat en certes corones dels



discs  $D_r$  i  $D_d$  del problema no pertorbat, on l'aplicació de Poincaré es un twist. Aquest teorema assegurarà l'existència de corbes invariants que són petites pertorbacions de les circumferències invariants del problema amb  $m=0$ . Les regions entre corbes invariants seran de punts de retorn estables-Lagrange. Les dites corbes no són més que les interseccions dels tors invariants, donats en l'aplicació del teorema KAM, amb  $\{p=0\}$ .

La representació dels conjunts de punts de retorn es farà també en coordenades  $(q, \theta)$  en dominis anàlegs a  $D_r$  i  $D_d$  del problema no pertorbat; observi's que en casascun d'aquests discs el valor de  $\omega$  queda determinat unívocament donant un punt  $(q, \theta)$  del disc, fent ús de la integral de Jacobi. Cadascun d'aquests dominis és una còpia de la regió de Hill exterior, d'equació:

$$q^2 + 2/q^4 + v(2e^{i\theta}/q^2) \geq C .$$

Vegi's [34] per a un estudi exhaustiu d'aquestes regions en coordenades  $(r, \theta)$ .

## 2.2. Òrbites parabòliques i varietats invariants.

Les òrbites  $\pm$ -parabòliques s'han definit com aquelles que, en l'espai de configuració tendeixen a l'infinit amb velocitat radial nul·la, quan  $t \rightarrow \pm\infty$ .

En variables de McGehee, els conjunts de punts que pertanyen a òrbites  $\pm$ -parabòliques ( $P_{\pm}$ ) es corresponen amb els conjunts asimptòtics a l'òrbita periòdica de l'origen, quan  $t \rightarrow \pm\infty$ . McGehee demostrà que  $P_{\pm}$  són varietats analítiques reals ([23]), malgrat no acomplir-se les hipòtesis del teorema de Hartman ([17],[31]). Aquests conjunts reben llavors el nom de varietats invariants estable ( $P_+$ ) i inestable ( $P_-$ ) de la dita òrbita periòdica.

Fixada  $C$ , els conjunts  $P_{\pm n}^0$  seràn les successives interseccions de  $P_{\pm}$  amb la varietat de punts de retorn  $I_C^{0(\text{ext})}$ .

Per a  $m=0$ , aquestes varietats poden descriure's en coordenades  $(q, \theta, \omega)$  pels talls del pla  $\{\omega=C/2\}$  amb els 2 sòlids identificats per la frontera que representen  $I_C^{(\text{ext})}$ . Les varietats estable i inestables es confonen totes dues amb 2 corones degenerades:  $(0, q_p] \times S^1$  identificades per la frontera  $\{q_p\} \times S^1$ ; l'òrbita periòdica és  $\{0\} \times S^1$ .

Aquesta representació pot fer-se també en el cas  $m \neq 0$ ; el sòlid no serà de revolució i les successives interseccions de  $P_{\pm}$  amb la frontera del sòlid ja no coincidirán donant lloc als diferents conjunts  $P_{\pm n}$  a estudiar en variables  $(\theta, \omega)$ . Podrà fer-se'n també una representació en coordenades  $(q, \theta)$  en el disc  $D_r$  com passa en el cas  $m=0$ , si  $C$  és suficientment gran.

La invariança de les equacions del moviment del problema restringit per la simetria  $(q, \theta, p, \omega, t) \rightarrow (q, -\theta, -p, \omega, -t)$  implica que les varietats invariants estable i inestable es corresponguin per la simetria  $(q, \theta, p, \omega) \rightarrow (q, -\theta, -p, \omega)$  que per als punts de retorn parabòlics  $P_{\pm n}^0$  és  $(q, \theta, \omega) \rightarrow (q, -\theta, \omega)$ ; en la representació  $(q, \theta)$  es correspondran per la simetria  $(q, \theta) \rightarrow (q, -\theta)$ .

### 2.3. Estudi qualitatiu dels conjunts $P_{\pm 1}^0$ .

Moser demostrà que les primeres interseccions de varietats similars a  $P_{\pm}$ , per al problema de Sitnikov eren difeomorfes a cercles. ([26]). Després, en [21], Llibre i Simó demostraren que  $P_{\pm}$  eren difeomorfes a cilindres que tallen  $\{p=0\}$  en 2 corbes difeomorfes a cercles, quan ho fan per primer cop.

Ho recollim en el següent teorema:

TEOREMA 2.1.

- a) Per a valors de  $C$  suficientment grans i  $m \in [0, \frac{1}{2})$ ,  $P_{\pm 1}^0$  són corbes analíticament difeomorfes a cercles.
- b)  $P_{\pm 1}^0$  tenen intersecció transversal en punts de la forma  $(q, 0)$  i  $(q, \pi)$ , si  $m$  és suficientment petit i  $C$ , suficientment gran.

En la secció 3 d'aquest capítol es fa un estudi analític d'aquestes corbes, quan  $m \neq 0$  i  $C$  suficientment gran. En tal cas, els punts de la forma  $(q, 0)$  i  $(q, \pi)$  del teorema són els únics punts d'intersecció.

#### 2.4. L'aplicació T.

Sigu'  $D_-$  el conjunt de punts de retorn no degenerats, tals que l'òrbita que passa per ells té algun punt de retorn anterior del mateix tipus -mateix signe de  $\dot{p}$ - o de tipus degenerat; definirem l'aplicació T que fa correspondre a tot punt de  $D_-$  el punt de retorn immediatament anterior de l'òrbita que passa per ell. Fem  $D_+ = TD_-$ .

Una aplicació d'una corona  $(a,b) \times S^1$  en si mateixa de la forma

$$(q, \theta) \longrightarrow (q, \theta + \alpha(q))$$

amb  $\alpha$  diferenciable a  $(a,b)$  i  $\alpha'(q) \neq 0$ ,  $q \in (a,b)$ , s'anomena twist; un twist serà degenerat quan  $\lim_{q \rightarrow a} \alpha(q) = \infty$  o  $\lim_{q \rightarrow b} \alpha(q) = \infty$ .

Si  $m=0$ , fixada  $C > 3$ ;  $D_+ = D_- = D$  és el conjunt de punts de retorn el.líp-tics menys l'òrbita circular, corresponent a aquest valor de C. D està format per corones tals que l'aplicació T restringida a aquestes corones és un twist, que en coordenades  $(q, \theta)$  s'expressa com en la definició amb  $\alpha(q) = 2\pi a^{3/2}(q)$ , on  $a(q)$  a compleix  $(C - \frac{1}{a(q)})^2 \frac{q^4}{16} - q^2 + \frac{1}{a(q)} = 0$ . (2.1)

Més precisament:

LEMA.

Si  $m=0$ , T és un twist en els següents dominis de definició:

a) Si  $3 < C < 32^{1/3}$ , en els corones  $(0, q_2) \times S^1$ ,  $(q_2, q_e) \times S^1$  de  $D_r$  i en la corona  $(q_p, q_e) \times S^1$  de  $D_d$ ;

b) si  $C > 32^{1/3}$ , en  $(0, q_2) \times S^1$  i  $(q_2, q_p) \times S^1$  de  $D_r$ .

Aquests twists són degenerats en  $q=0$  i  $q=q_p$ .

Aplicarem ara el teorema del twist de Moser, que enunciem a continuació, a les aplicacions  $T$  per a  $m \neq 0$  ([25], [29] i [28]).

TEOREMA (del twist de Moser) 2.2.

Considerem les aplicacions  $T_m$  ( $|m| < m_0$ ), definides en la corona  $(a, b) \times S^1$ , per  $(q, \theta) \longrightarrow (q + mf(q, \theta, m), \theta + \alpha(q) + mg(q, \theta, m))$  acomplint:

a)  $\text{Int}_m(S) \neq \emptyset$ , per a tot cercle  $S$  de la corona ( propietat d'intersecció efectiva);

b)  $\alpha, f$  i  $g$  són de classe  $C^k$  ( $k > 3$ );

c)  $\alpha'(q) \neq 0$ , per a tot  $q$  de  $(a, b)$  ( $:: T_0$  és un twist);

i sigui  $\tau \in (1, (k-1)/2)$ ; llavors, per a tot  $\epsilon > 0$ , existeix  $m_\epsilon > 0$  ( $m_\epsilon = O(\epsilon^2)$ ) tal que si  $|m| < m_\epsilon$ :  $T_m$  té corbes tancades invariants

$\gamma_\alpha = \{ q = q_0 + mu_m(s), \theta = s + mv_m(s), s \in S^1 \}$  amb  $u_m$  i  $v_m$  de classe  $C^1$  on l'aplicació induïda és una trasllació d'angle  $\alpha$ :  $s \longrightarrow s + \alpha$ , per a tot  $\alpha$  acomplint:

$$\left| \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{P}{Q} \right| > \frac{\epsilon}{q^{\tau+1}}, \quad \forall Q \in \mathbb{N}, \quad \forall P \in \mathbb{Z};$$

i, per tant, el conjunt de punts que no pertanyen a corbes invariants té mesura  $O(\epsilon)$  i tota òrbita en cada  $\gamma_\alpha$  és densa en la corba invariant.

D'on:

TEOREMA 2.3.

Per a tot  $\epsilon > 0$ , existeix  $m_\epsilon > 0$  tal que l'aplicació  $T$  associada al problema restringit, per a valors de  $m < m_\epsilon$ , té corbes tancades invariants, on tota òrbita és densa; el conjunt de punts entre les corbes invariants té mesura de Lebesgue  $O(\epsilon)$ .

### Demostració.

En el conjunt de definició de  $T$ , poden definir-se corones contingudes en les del lema anterior i pròximes a aquestes (tan més com més petita sigui  $m$ ), on l'aplicació restringida és de la forma indicada en el teorema del twist amb  $\alpha$ ,  $f$  i  $g$  analítiques. La propietat d'intersecció efectiva es dedueix del fet que aquestes aplicacions conserven una àrea. En efecte, el flux hamiltonià conserva la forma simplèctica  $dr \wedge dp_r + d\theta \wedge dp_\theta$ ; a cada nivell de la integral de Jacobi, l'aplicació  $T$  conservarà l'àrea donada per la forma simplèctica:  $d\theta \wedge \left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)_{p=0} dq$  amb

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)_{p=0} = \frac{(1 - \omega^2 q^2/2) + O(m)}{1 - \omega q^4/4}.$$

Cal notar efectivament que tal forma simplèctica estarà definida i no serà degenerada en corones arbitràriament pròximes (segons  $m$ ) de les del lema, ja que el denominador de  $\left(\frac{\partial \omega}{\partial q}\right)_{p=0}$  s'anul·la només en les òrbites circulars i el numerador en les corbes de velocitat zero, si  $m=0$ . El teorema del twist de Moser fa la resta.

Considerem ara  $C$  suficientment gran i  $m \neq 0$ . Llavors,  $D_\pm$  són les regions interiors a  $P_{\pm 1}^0$ , llevat dels punts de retorn degenerats. Les òrbites que passen pels punts de  $I_C^{0(\text{ext})} \setminus D_\pm$  ja no tenen cap més punt de retorn per a temps creixents o decreixents, respectivament; tals òrbites tendeixen a  $\{q=0\}$ , quan  $t \rightarrow \pm\infty$ , ja que no poden travessar  $P_\pm$ .

Els punts de retorn exteriors a  $P_{\pm 1}^0$  formen  $H_{\pm 1}^0$  i  $E_{\pm 1}^0 = D_\pm$ .

Es important assenyalar que  $\lim_{q \rightarrow q_p} \alpha(q) = \infty$ ; això fa que la imatge d'una corba que tendeix transversalment a  $P_{-1}^0$  en  $D_-$  és una corba que tendeix espiralant a  $P_1^0$ . Aquesta propietat fou estesa per Llibre i Simó, en [21] al problema restringit amb  $C$  suficientment gran, basant-se en un resultat anàleg per al problema de Sitnikov, degut a Moser ([26]). Això és:

PROPOSICIO 2.1.

Si  $C$  és suficientment gran, la imatge per l'aplicació  $T$  d'un arc  $\Gamma$ , contingut en  $D_-$ , tendint transversalment a  $P_{-1}^0$  és una corba que tendeix espiralant, en  $D_+$ , a  $P_1^0$ . Es a dir, si  $\Gamma$  es parametriza per  $s$  a  $(0,1]$  per  $q=q_\Gamma(s)$ ,  $\theta=\theta_\Gamma(s)$  i tendeix transversalment a  $P_{-1}^0$ , quan  $s \rightarrow 0$ ; llavors  $T\Gamma$  parametrizat per  $q=q_{T\Gamma}(s)$ ,  $\theta=\theta_{T\Gamma}(s)$  tendeix a  $P_1^0$ , en  $D_+$ , amb  $\lim_{s \rightarrow 0} \theta_{T\Gamma}(s) = \infty$ .

Aquesta proposició serà clau en la descripció qualitativa dels  $P_{\pm n}^0$  ( $n > 1$ ) de la següent secció.



2.5. Estudi qualitatiu de  $P_{\pm n}^0$  i  $H_{\pm n}^0$  ( $n > 1$ ).

Considerarem  $m \neq 0$  i  $C$  prou gran. Els conjunts  $P_n^0$  poden ésser definits, usant l'aplicació  $T$  i a partir de  $P_1^0$ , per:

$$P_{n+1}^0 = T(P_n^0 \cap D_-) . \quad (2.2)$$

Del teorema 2.1 en deduïm que  $P_1^0 \cap D_- = \gamma_1$  és una corba que tendeix als 2 punts d'intersecció de  $P_1$  i  $P_{-1}$ , transversalment. La proposició 2.1 assegura llavors que la imatge per  $T$  de  $\gamma_1$  tendeix espiralant a  $P_1^0$  a mesura que els punts de  $\gamma_1$  van tendint als 2 punts de  $P_1^0 \cap P_{-1}^0$ ; direm que  $P_2^0$  espirala doblement a  $P_1^0$ , definint una regió interior que amb  $P_2^0$  forma una cinta que espirala a  $P_2^0$ . La regió interior és  $H_2^0$  i  $S_2^0$  té la forma de cinta.

A més,  $P_2^0$  talla transversalment  $P_{-1}^0$  infinites vegades en punts que tendeixen alternativament als 2 punts de  $P_1^0 \cap P_{-1}^0$ . Observem que  $P_2^0 \cap D_-$  contindrà una infinitat numerable de corbes  $\{\gamma_{2,k_2}\}_{k_2 \in \mathbb{Z}}$  que tendeixen transversalment a  $P_{-1}$  en els punts d'intersecció esmentats i que s'acumularan a  $\gamma_1$  quan  $k_2 \rightarrow \infty$ . Usarem índexs  $k_2 > 0$  per a les corbes que provenen de punts de l'arc de la corba  $\gamma_1$  que tendeixen al punt amb  $\theta_- = 0$ ; idem amb  $k_2 < 0$  i  $\theta_- = \pi$ . Aquestes corbes s'agrupen a parelles, la  $\gamma_{2,k_2}$  amb la  $\gamma_{2,-k_2}$ , de forma que la regió d'aquestes corbes sigui de  $H_2^0$ . La imatge de cadascuna d'aquestes corbes dóna també una corba que espirala doblement a  $P_1^0$ ; el conjunt d'aquestes corbes s'ha d'acumular a  $P_2^0$ . Es a dir,  $P_3^0$  conté una infinitat de corbes que espiralen doblement a  $P_{-1}^0$  acumulant-se a una banda i altra de  $P_2^0$ .  $S_3^0$  contindrà una infinitat de cintes que s'acumulen

sobre la cinta  $S_2^0$  : aquestes cintes es formen amb les imatges de les corbes  $\gamma_{2,k_2}$  i  $\gamma_{2,-k_2}$  i de la regió compresa entre elles.

Similarment,  $P_3^0 \cap D_-$  conté una infinitat de corbes  $\{\gamma_{3,k_2,k_3}\}_{k_2,k_3 \in \mathbb{Z}}$  de forma que les corbes  $\{\gamma_{3,k_2,k_3}\}_{k_3 \in \mathbb{Z}}$  s'acumulen sobre la corba  $\gamma_{2,k_2}$  corresponent. El signe de  $k_3$  es tria de forma similar al de  $k_2$ . Això comporta que  $S_4^0$  estigui format per una infinitat numerable de conjunts infinits numerables de cintes que tendeixen a la infinitat numerables de cintes que conté  $S_3^0$ . I així indefinidament. Vegi's la figura 2.1 per a una visió intuïtiva més o menys artística.

El límit superior d'aquests conjunts de cintes està contingut en  $OS_+$ .

Els conjunts de punts de retorn amb subíndex negatiu s'obtenen mitjançant la coneguda simetria d'aquests.

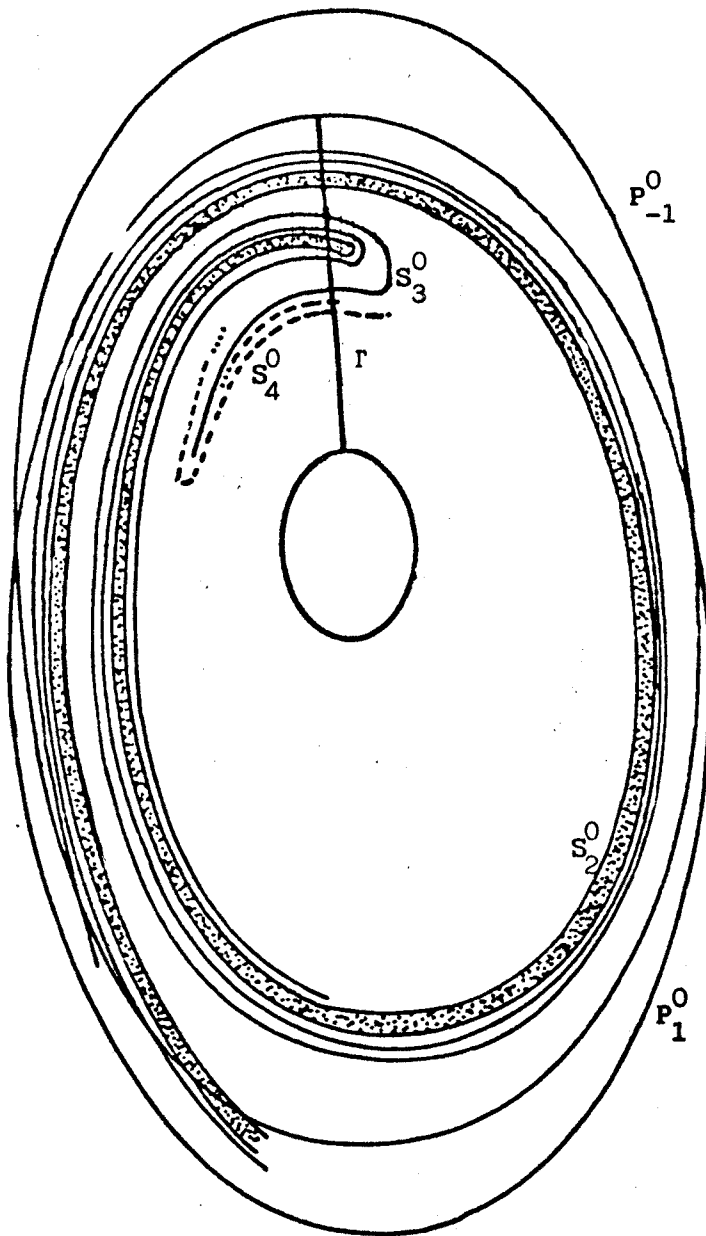


Figura 2.1

## 2.6. Estudi qualitatiu de $E_+^0$ .

$E_+^0 \cap E_-^0$  conté les corbes invariants i les regions entre aquestes corbes invariants donades en el teorema 2.3.; en realitat, estan contingudes en  $L_+^0 \cap L_-^0$ .

$E_+^0$  conté, a més, un subconjunt prop de  $P_{-1}^0$  que té una certa estructura cantoriana. En efecte, considerem un arc  $\Gamma$  qualsevol que tendeixi transversalment a  $P_{-1}$  en la regió exterior a les corbes invariants esmentades i volem conèixer com és qualitativament el conjunt de punts de  $\Gamma \cap E_+$ ; caldrà, per això, suprimir de  $\Gamma$  les successives interseccions dels conjunts d'escapament: la intersecció amb  $S_2^0$  conté una infinitat numerable d'interval·ls  $\{C_{2;j_2}\}_{j_2 \in \mathbb{N}}$ ; per a cada un d'aquests,  $S_3^0$  en conté una altra infinitat numerable  $\{C_{3;j_2,j_3}\}_{j_3 \in \mathbb{N}}$ , i així successivament. Vegi's la figura 2.2 per a una visió intuïtiva.

Un estudi qualitatiu similar, per al problema de Sitnikov, es troba a [22].

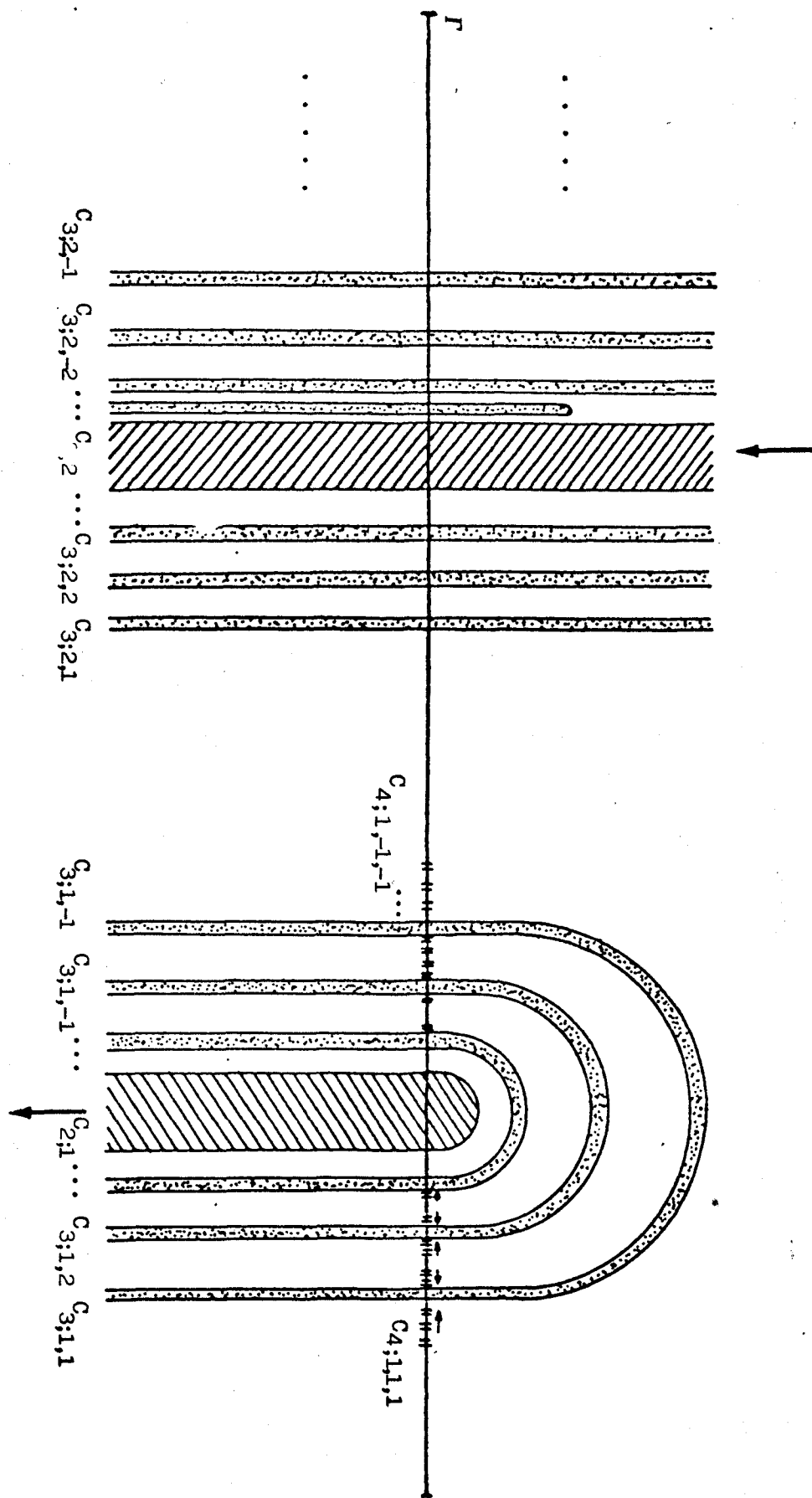


Figura 2.2

### 3. ESTUDI QUANTITATIU DE $P_{\pm 1}^0$ :

#### 3.1. Equacions variacionals.

Es farà una anàlisi quantitativa de les pertorbacions de  $1^r$  ordre en  $m$  dels conjunts  $P_{\pm 1}^0$  del problema amb  $m=0$ : circumferències de radi  $q_p=4/C$  en  $\omega=C/2$ . Per això, cal conèixer les equacions variacionals de  $1^r$  ordre en  $m$  prop de les òrbites parabòliques del problema no pertorbat.

Considerem les solucions del problema restringit de la forma:

$$(q, \theta, p, \omega) = (q_0, \theta_0, p_0, \omega_0) + m(q_1, \theta_1, p_1, \omega_1) + O(m^2),$$

on el primer sumand és la solució coneguda del problema amb  $m=0$ . Substituint-ho en les equacions (1.1), els termes en  $m$  aconpleixen el següent sistema d'equacions diferencials lineals a coeficients variables (equacions variacionals de  $1^r$  ordre):

$$\dot{q}_1 = -\frac{3p_0 q_0^2}{4} q_1 - \frac{q_0^3}{4} p_1, \quad \dot{p}_1 = (-q_0^3 + \frac{3}{4} K^2 q_0^5) q_1 + \frac{K q_0^6}{4} \omega_1 - c_1$$

$$\dot{\theta}_1 = K q_0^3 q_1 + \frac{q_0^4}{4} \omega_1, \quad \dot{\omega}_1 = c_2;$$

on  $c_1 = \text{Re}(e^{-i\theta_0} \partial_m (g(2e^{i\theta}/q^2))_0)$  i  $c_2 = -2\text{Im}(e^{-i\theta_0} \partial_m (g(2e^{i\theta}/q^2))_0)/q_0^2$

amb  $g$  definida en 1.1. Fent ara la substitució en l'expressió de la conservació de la integral de Jacobi (1.2), tenim que els termes en  $m$  aconpleixen la relació:

$$q_0 \left(1 - \frac{K^2 q_0^2}{2}\right) q_1 - p_0 p_1 + \left(1 - \frac{K q_0^4}{4}\right) \omega_1 + \frac{1}{2} \partial_m (v(2e^{i\theta}/q^2))_0 = 0, \quad (3.1)$$

amb  $v$  definida en 1.1. Noti's que en totes aquestes equacions ja s'ha fet  $\omega_0 = K$ .

La integració analítica d'aquestes equacions és una tasca difícil, diríem que impossible; s'han obtingut però solucions del sistema homogeneïtzat ( $c_1=c_2=0$ ), així com expressions integrals complicades de les solucions del sistema en diferents casos. Per al nostre propòsit, no calen tals expressions.

La independència en  $q_1$ ,  $\theta_1$ ,  $p_1$  i  $\omega_1$  de l'equació corresponent a  $\omega_1$  permet d'obtenir una expressió integral de  $\omega_1$  en  $P_{\pm 1}^0$ . A partir d'aquesta deduirem expressions asimptòtiques per als coeficients de Fourier de  $\omega_1$  en  $P_{\pm 1}^0$ , quan  $C \rightarrow \infty$ .

La simplicitat de l'equació (3.1) en  $\{p=0\}$  per a les òrbites parabòliques farà que puguin trobar-se també expressions asimptòtiques dels coeficients de Fourier de  $q_1$  en  $P_{\pm 1}^0$ .

### 3.2. Expressió integral de $\omega_1$ en $P_{\pm 1}^0$ .

En l'òrbita periòdica de l'origen,  $\omega$  val exactament  $C/2$ ; allí  $\omega_1$  serà nul·la. Volem obtenir la variació de  $\omega_1$  al llarg de les òrbites. Per això, cal saber com varia  $\omega_1$  segons les equacions variacionals corresponents a les òrbites parabòliques del problema amb  $m=0$ . S'han de considerar per separat la varietat estable de la inestable. Tractarem primerament la estable, la simetria del problema dóna immediatament l'altra.

Escrivim l'equació variacional que dóna la variació de  $\omega_1$  en variables polars sinòdiques:

$$\dot{\omega}_1 = r_0 \sin \theta_0 (|r_0 e^{i\theta_0} + 1|^{-3} - r_0^{-3}), \text{ amb } r_0 = 2/q_0^2.$$

Usant la variable uniformitzadora  $s$  tal que  $\frac{dt}{ds} = r_0$ , tenim

$$\frac{d\omega_1}{ds} = \frac{\sin \theta_0}{r_0} (|e^{i\theta_0} + \frac{1}{r_0}|^{-3} - 1).$$

Les solucions del problema de Kepler en funció de les anomalies excèntriques foren donades a I.2.3. Ara bé, l'anomalia excèntrica  $u$  i la variable  $s$  coincideixen en el cas parabòlic.

Usarem la variable  $\tau$  definida per  $s = \frac{C}{2}\tau$ ; llavors:

$$r_0 = \frac{C^2}{8}(1+\tau^2) = r_-(1+\tau^2), \quad \theta_0 = \theta_- + \hat{\theta}, \quad \text{amb } \theta = 2\arctg \tau - \delta(\tau + \frac{\tau^3}{3}) \text{ i } \delta = C^3/3.$$

Per la varietat estable tendim a l'òrbita periòdica quan  $\tau \rightarrow \infty$ . Per a un valor donat  $\tau_0$  de  $\tau$ , si la variació de  $\omega_1$  per anar del punt corresponent en la varietat estable a l'origen en diem  $\Delta\omega_1$ , es tindrà que  $\omega_1$  en  $\tau = \tau_0$  valdrà  $-\Delta\omega_1$ , ja que  $\omega_1(\tau = \infty) = 0$ . Fent  $\tau_0 = 0$ , tenim l'expres-



sió integral de  $\omega_1$  en  $P_1^0$  :

$$\omega_1(\tau=0) = -\frac{c}{2} \int_0^\infty \frac{\sin \theta_0}{r_0} (\Delta^{-3/2} - 1) d\tau, \quad (3.2)$$

on  $\Delta = 1 + \frac{2\cos\theta_0}{r_0} + \frac{1}{r_0^2}$  ; noti's que es tracta d'una funció en l'angle  $\theta_-$ .

### 3.3. Desenvolupament de $\omega_1$ en $P_{+1}^0$ en funció dels $S_n^{(m)}$ .

Comencem fent el desenvolupament en potències de  $w=1/r_0$  de l'expressió  $\Delta^{-3/2}_{-1}$ .  $\Delta^{-\nu}$  és la funció generatriu dels polinomis de Gegenbauer  $C_n^{(\nu)}(c)$  per a  $c=-\cos\theta_0$ ; és a dir (vegi's [2]):

$$\Delta^{-\nu}(c) = (1-2cw+w^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\nu)}(c)w^n.$$

$$\text{Com que } C_0^{(\nu)}=1, \Delta^{-3/2}_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(3/2)}(-\cos\theta_0) \frac{1}{r_0^n}.$$

$$\text{Ara bé, } C_n^{(\nu)}(\cos\phi) = \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\nu+m)\Gamma(\nu+n-m)}{m!(n-m)!(\Gamma(\nu))^2} \cos((n-2m)\phi);$$

d'on,  $C_n^{(\nu)}(-\cos\theta_0) = (-1)^n \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\nu+m)\Gamma(\nu+n-m)}{m!(n-m)!(\Gamma(\nu))^2} \cos((n-2m)\theta_0)$ . L'última ex-

pressió té només sumands en cosinus de múltiples de  $\theta_0$  de la mateixa paritat que  $n$ . A més, el coeficient de  $\cos((n-2m)\theta_0)$  coincideix amb el de  $\cos((n-2(n-m))\theta_0)$  i  $\cos((n-2m)\theta_0) = \cos((n-2(n-m))\theta_0)$ . Això fa que:

$$C_n^{(3/2)}(-\cos\theta_0) = \sum_{k=n(-2)0} \alpha_k^{(n)} \cos(k\theta_0).$$

En l'apèndix es troben els valors dels coeficients  $\alpha_k^{(n)}$  que es necessiten en aquesta memòria.

L'integrand de l'expressió (3.2) s'escriu com una combinació de sinus de múltiples de  $\theta_0$ , tenint en compte la relació:

$$2 \cos(k\theta_0)\sin(k\theta_0) = \sin((k+1)\theta_0) - \sin((k-1)\theta_0) \quad (k \geq 1)$$

i que donem en forma explícita:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1^{(1)} \sin(2\theta_0)}{r_0^2} + \frac{\alpha_2^{(2)} (\sin(3\theta_0) - \sin\theta_0) + \alpha_0^{(2)} 2\sin\theta_0}{r_0^3} + \right. \\
& + \frac{\alpha_3^{(3)} (\sin(4\theta_0) - \sin(2\theta_0)) + \alpha_1^{(3)} \sin(2\theta_0)}{r_0^4} + \\
& \left. + \frac{\alpha_4^{(4)} (\sin(5\theta_0) - \sin(3\theta_0)) + \alpha_2^{(4)} (\sin(3\theta_0) - \sin\theta_0) + \alpha_0^{(4)} 2\sin\theta_0}{r_0^5} + \dots \right) = \\
& \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2\alpha_0^{(2)} - \alpha_2^{(2)}}{r_0^3} + \frac{2\alpha_0^{(4)} - \alpha_2^{(4)}}{r_0^5} + \frac{2\alpha_0^{(6)} - \alpha_2^{(6)}}{r_0^7} + \dots \right) \sin\theta_0 + \right. \\
& + \left( \frac{\alpha_1^{(1)}}{r_0^2} + \frac{\alpha_1^{(3)} - \alpha_3^{(3)}}{r_0^4} + \frac{\alpha_1^{(5)} - \alpha_3^{(5)}}{r_0^6} + \dots \right) \sin(2\theta_0) + \\
& \left. + \left( \frac{\alpha_2^{(2)}}{r_0^3} + \frac{\alpha_2^{(4)} - \alpha_4^{(4)}}{r_0^5} + \frac{\alpha_2^{(6)} - \alpha_4^{(6)}}{r_0^7} + \dots \right) \sin(3\theta_0) + \dots \right] .
\end{aligned}$$

D'on:

$$\begin{aligned}
\omega_1(\tau=0, \theta_-) = & \frac{c}{4} \left[ \left( \frac{2\alpha_0^{(2)} - \alpha_2^{(2)}}{r_-^3} S_3^{(1)} + \frac{2\alpha_0^{(4)} - \alpha_2^{(4)}}{r_-^5} S_5^{(1)} + \dots \right) + \right. \\
& + \left( \frac{\alpha_1^{(1)}}{r_-^2} S_2^{(2)} + \frac{\alpha_1^{(3)} - \alpha_3^{(3)}}{r_-^4} S_4^{(2)} + \dots \right) + \\
& \left. + \left( \frac{\alpha_2^{(2)}}{r_-^3} S_3^{(3)} + \frac{\alpha_2^{(4)} - \alpha_4^{(4)}}{r_-^5} S_5^{(3)} + \dots \right) + \dots \right] ,
\end{aligned}$$

$$\text{fent } S_n^{(m)} = \int_0^\infty \frac{\sin(m\theta_0)}{(1+\tau^2)^n} d\tau \quad (n \geq 2, m \geq 1) .$$

3.4. Expressions dels  $S_n^{(m)}$  en funció dels  $I_k, J_k, M_{k+2}$  i  $N_{k+2}$  ( $k \geq 1$ ).

Els  $S_n^{(m)}$  són funcions de  $\theta_-$  i de  $\delta$ . En aquesta secció s'obtidran desenvolupaments de Fourier dels  $S_n^{(m)}$  com a funcions de  $\theta_-$ ; els coeficients de Fourier s'expressaran com combinacions lineals de les expressions integrals  $I_k, J_k, M_{k+2}$  i  $N_{k+2}$  que es definiran més endavant.

Tenim:

$$\begin{aligned} \sin(m\theta_0) &= \sin(m\theta_-)\cos(m\hat{\theta}) + \cos(m\theta_-)\sin(m\hat{\theta}), \\ \cos(m\hat{\theta}) &= \cos(2m\arctg\tau)\cos(m\delta(\tau+\frac{\tau^3}{3})) + \sin(2m\arctg\tau)\sin(m\delta(\tau+\frac{\tau^3}{3})), \\ \sin(m\hat{\theta}) &= \sin(2m\arctg\tau)\cos(m\delta(\tau+\frac{\tau^3}{3})) - \cos(2m\arctg\tau)\sin(m\delta(\tau+\frac{\tau^3}{3})). \end{aligned}$$

Ara bé:

$$\begin{aligned} \cos(2m\arctg\tau) &= \cos(2m\arccos(1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}) = T_{2m}((1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}) = \bar{T}_m((1+\tau^2)^{-1}), \\ \sin(2m\arctg\tau) &= \sin(2m\arccos(1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}) = U_{2m-1}((1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}})\sin(\arccos(1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= \tau(1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}U_{2m-1}((1+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}) = \tau\bar{U}_m((1+\tau^2)^{-1}); \end{aligned}$$

fent ús dels polinomis de Txeixef de 2<sup>a</sup> i 1<sup>a</sup> espècie,  $T_{2m}$  i  $U_{2m-1}$ , que degut a la seva paritat, poden posar-se en la forma:

$$\bar{T}_m(x^2) = T_{2m}(x), \quad \bar{U}_m(x^2) = xU_{2m-1}(x),$$

amb polinomis  $\bar{T}_m$  i  $\bar{U}_m$  adequats de grau  $m$ .

El següent lema dóna propietats d'interès en aquesta memòria dels coeficients d'aquests polinomis. Notarem per  $\bar{t}_j^{(m)}$  i  $\bar{u}_j^{(m)}$  els coeficients en  $x^j$  dels polinomis  $\bar{T}_m$  i  $\bar{U}_m$ , respectivament.

LEMA.

$$a) \sum_{j=0}^m \bar{t}_j^{(m)} = 1, \quad \sum_{j=0}^m \bar{u}_j^{(m)} = 2m; \quad b) \sum_{j=1}^m j \cdot \bar{t}_j^{(m)} = 2m^2;$$

$$c) \bar{t}_m^{(m)} = 2^{2m-1}, u_m^{(m)} = 2^{2m-1}; \quad d) \bar{t}_{m-1}^{(m)} = -m2^{2m-2}, \bar{u}_{m-1}^{(m)} = -m2^{2m-3}$$

Demostració.

Les propietats a), c) i d) es dedueixen de propietats anàlogues dels coeficients  $t_j^{(N)}$  i  $u_j^{(M)}$  dels polinomis  $T_N$  i  $U_M$  per a  $M=2m$  i  $N=2m-1$ , que són evidents a l'observar les recurrències que acompleixen:

a) surt de  $T_M(1)=1$  i  $U_N(1)=N+1$ ; c) de  $t_M^{(M)}=2^{M-1}$  i  $u_N^{(N)}=2^N$ ; d) surt de resoldre l'equació en diferències finites que acompleixen els coeficients del tipus  $t_{M-2}^M$  i  $u_{N-2}^N$ :

$$t_{M-1}^{(M+1)} = 2t_{M-2}^{(M)} - t_{M-1}^{(M-1)} = 2t_{M-2}^{(M)} - 2^{M-2}, \quad \text{amb } t_0^{(2)} = -1 \quad \text{i} \quad t_1^{(3)} = -3;$$

obtenint  $t_{M-2}^{(M)} = -M2^{M-3}$  i anàlogament  $u_{N-2}^{(N)} = -(N+1)2^{N-3}$ . Finalment, demostrarem b):

$$\sum_{j=1}^m j \cdot \bar{t}_j^{(m)} = \frac{d\bar{T}_m}{dy}(y=1) = \frac{dT_{2m}}{dx}(x=1) \cdot \frac{1}{2} = m \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2m \arccos x)}{(1-x^2)^{1/2}} = 2m^2.$$

Usant ara les expressions del començament d'aquesta secció podem donar les següents expressions per als  $S_n^{(m)}$ :

$$S_n^{(m)} = (\bar{T}_m[I_{n+}] + \bar{U}_m[M_{n+}]) \sin(m\theta_-) + (\bar{U}_m[N_{n+}] - \bar{T}_m[J_{n+}]) \cos(m\theta_-),$$

$$\text{amb } \bar{T}_m[I_{n+}] = \sum_{j=0}^m \bar{t}_j^{(m)} I_{n+j}(m\delta), \quad \bar{U}_m[M_{n+}] = \sum_{j=0}^m \bar{u}_j^{(m)} M_{n+j}(m\delta), \quad \bar{U}_m[N_{n+}] \text{ i}$$

$\bar{T}_m[J_{n+}]$  es defineixen de forma anàloga; on

$$I_k(\delta) = \int_0^\infty \cos(\delta(\tau + \frac{\tau^3}{3})) (1+\tau^2)^{-k} d\tau, \quad M_k(\delta) = \int_0^\infty \tau \sin(\delta(\tau + \frac{\tau^3}{3})) (1+\tau^2)^{-k} d\tau,$$

$$J_k(\delta) = \int_0^\infty \sin(\delta(\tau + \frac{\tau^3}{3})) (1+\tau^2)^{-k} d\tau, \quad N_k(\delta) = \int_0^\infty \cos(\delta(\tau + \frac{\tau^3}{3})) (1+\tau^2)^{-k} d\tau.$$

3.5. Desenvolupament asimptòtic dels  $I_k, J_k, M_{k+2}$  i  $N_{k+2}$  ( $k \geq 1$ ), quan  $\delta \rightarrow \infty$ .

Aquestes funcions de  $\delta$  estan relacionades entre si per les fórmules d'analogia i reducció següents, que poden obtenir-se usant integració per parts:

$$M_{k+2} = \frac{\delta}{2(k+1)} I_k, \quad I_{k+4} = \frac{\delta^2}{4(k+1)(k+3)} I_k + \left(1 - \frac{1}{2(k+3)}\right) I_{k+3};$$

$$N_{k+2} = \frac{1}{2(k+1)} (1 - \delta J_k), \quad J_{k+4} = \frac{\delta^2}{4(k+1)(k+3)} J_k + \left(1 - \frac{1}{2(k+3)}\right) J_{k+3} - \frac{\delta}{4(k+1)(k+3)}.$$

Les fórmules d'analogia permeten de conèixer les funcions  $M_{k+2}$  i  $N_{k+2}$  a partir de  $I_k$  i  $J_k$ ; seguidament s'obtidran desenvolupaments asimptòtics de  $I_k$  i  $J_k$  quan  $\delta \rightarrow \infty$ . Els desenvolupaments asimptòtics de  $M_{k+2}$  i  $N_{k+2}$  podran obtenir-se a partir de les fórmules d'analogia.

Les fórmules de reducció (o recurrència) serviran més endavant per a obtenir els termes asimptòtics dominants de tots els  $I_k$  coneixent-los per a valors petits de  $k$ . A continuació, es calculen aquests termes dominants dels  $I_k$  i  $J_k$ .

Desenvolupaments asimptòtics de  $I_k$  i  $J_k$  ( $k \geq 1$ ).

En notació complexa:  $I_k + iJ_k = \int_0^\infty h(\tau) d\tau$  amb  $h(\tau) = e^{i\delta(\tau + \tau^3/3)} (1 + \tau^2)^{-k}$ .

Considerem els recintes  $\Gamma(R, \epsilon)$  del pla complex amb  $\epsilon > 0$  i  $R > 0$ , donats en la figura 3.1.

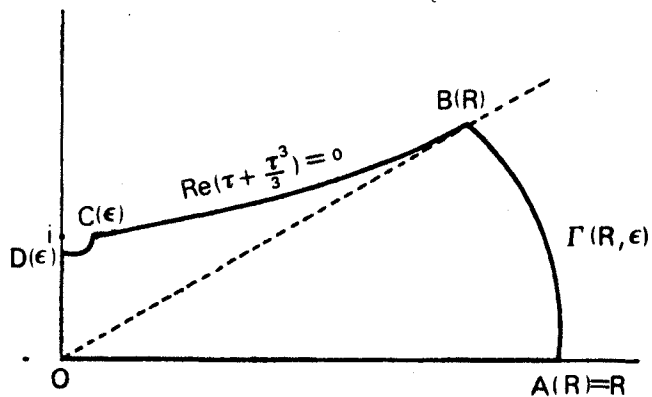


Figura 3.1

L'aplicació del teorema dels residus a la integral de la funció  $h$  en aquests recintes permetrà de trobar aquests desenvolupaments.

El desenvolupament de  $I_k$  es troba a [21]. Degut a que l'obtenció del desenvolupament de  $J_k$  hi està molt lligada i a fi i efecte de tenir una millor unitat d'exposició, el reproduïrem també ací.

Aplicació del teorema dels residus a la integral de  $h$  en els recintes  $\Gamma(R, \epsilon)$ .

La funció  $h$  és holomorfa en la regió interior a  $\Gamma(R, \epsilon)$ , d'on:

$$\int_{\Gamma(R, \epsilon)} h(\tau) d\tau = \left( \int_0^{A(R)} + \int_{A(R)}^{B(R)} + \int_{B(R)}^{C(\epsilon)} + \int_{C(\epsilon)}^{D(\epsilon)} + \int_{D(\epsilon)}^0 \right) h(\tau) d\tau = 0 .$$

Vegi's que volem calcular:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{A(R)} h(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau = I_k + iJ_k .$$

Per això, haurem de fer la suma de:

$$K_1 = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{A(R)}^{B(R)} h(\tau) d\tau, \quad K_2(\epsilon) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(\epsilon)}^{B(R)} h(\tau) d\tau, \quad K_3(\epsilon) = \int_{D(\epsilon)}^{C(\epsilon)} h(\tau) d\tau \text{ i}$$

$$K_4(\epsilon) = \int_0^{D(\epsilon)} h(\tau) d\tau.$$

Càlcul de  $K_1$ .

L'arc de circumferència entre  $A(R)$  i  $B(R)$  es parametrilitza per l'angle  $\phi$ :  $\tau = Re^{i\phi}$ ,  $\phi \in [0, \phi(R)]$ , on  $\phi(R)$  és l'argument de  $B(R)$ , que tendeix a  $\pi/6$  quan  $R \rightarrow \infty$ . Llavors:

$h(Re^{i\phi}) = \exp(i\delta(R\cos\phi + R^3 \cos(3\phi)/3)) \exp(-i\delta(R\sin\phi + R^3 \sin(3\phi)/3)) (1 + R^2 e^{i2\phi})^{-k}$   
 i  $|h(Re^{i\phi})| < \exp(-\delta(R\sin\phi + R^3 \sin(3\phi)/3)) R^{-2k}$  tendeix a 0 quan  $R \rightarrow \infty$ . D'on:  
 $K_1 = 0$ .

Càlcul de  $K_3$ .

L'arc de circumferència entre  $D(\epsilon)$  i  $C(\epsilon)$  es parametrilitza per l'angle  $\phi$ :  $\tau - i = \epsilon e^{i\phi}$ ,  $\phi \in [-\pi/2, \phi(\epsilon)]$ , on  $\phi(\epsilon)$  és l'argument de  $C(\epsilon)$ , que aconpleix l'equació  $\epsilon = 6\sin(\phi(\epsilon)) / (1 - 4\sin^2(\phi(\epsilon)))$  i és, per tant, una funció imparella; a més,  $\phi(\epsilon) = \epsilon/6 + o(\epsilon^3)$ , quan  $\epsilon \rightarrow 0$ .

El desenvolupament en sèrie de Laurent de  $h(\tau)$  s'analitza ara.

Tenim  $i(\tau + \tau^3/3) = -2/3 - (\tau - i)^2 + i(\tau - i)^3/3$  i  
 $(1 + \tau^2)^{-k} = (\tau - i)^{-k} (2i + \tau - i)^{-k}$ ; d'on:  $h(\tau) = \sum_{j \geq -k} b_j (\tau - i)^j$ . Es a dir,  
 $\tau = i$  és un pol d'ordre  $k$  de la funció  $h$ . Ara bé, com que  $d\tau = i(\tau - i)d\phi$ ,

$$\int_{D(\epsilon)}^{C(\epsilon)} h(\tau) d\tau = i \sum_{j \geq -k} b_j \int_{D(\epsilon)}^{C(\epsilon)} (\tau - i)^{j+1} d\tau = i \sum_{j \geq -k} b_j \int_{-\pi/2}^{\phi(\epsilon)} \epsilon^{j+1} e^{i(j+1)\phi} d\phi =$$

$$= i b_{-1} \left( \frac{\pi}{2} + \phi(\epsilon) \right) + \sum_{\substack{j \geq -k \\ j \neq -1}} \frac{j}{j+1} \left( e^{i(j+1)\phi(\epsilon)} - e^{-i(j+1)\pi/2} \right) \epsilon^{j+1} = \sum_{j \geq -k+1} a_j \epsilon^j,$$

amb  $a_0 = \frac{\pi}{2} i b_{-1} + \sum_{j \geq -k} \frac{b_j}{j+1} c_{-j-1}(j)$ , essent  $c_r(j)$  el coeficient de  $\epsilon^r$  en  $\exp(i(j+1)\phi(\epsilon))$ , que és real o imaginari segons que  $r$  sigui parell o imparell. Del càlcul que seguirà se'n pot deduir que els coeficients  $b_j$  ( $-k \leq j < -1$ ) són també reals o imaginaris segons que  $j$  sigui parell o imparell.  
 Per tant,  $\text{Re}(a_0) = i \frac{\pi}{2} b_{-1}$  i  $\text{Im}(a_0) = o(\delta^{-N})$ ,  $\forall N$ .



Càlcul de  $Re(a_0)$ .

El desenvolupament de Laurent prop de  $\tau=i$  de la funció  $h$ , per a diferents valors de  $k$ , dóna els valors dels  $Re(a_0)$  corresponents. En concret,  $Re(a_0) = \frac{\pi}{2}i \text{Res}(h(\tau); \tau=i)$  i aquest residu és el coeficient de  $(\tau-i)^{-1}$  en aquest desenvolupament:

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \exp(i\delta(\frac{2}{3}i+i(\tau-i)^2 + \frac{(\tau-i)^3}{3})) (2i+\tau-i)^{-k} (\tau-i)^{-k} = \\ &= \exp(-\frac{2}{3}\delta) \exp(\delta(-(\tau-i)^2 + i\frac{(\tau-i)^3}{3})) (2i)^{-k} (1+\frac{\tau-i}{2i})^{-k} (\tau-i)^{-k} = \\ &= \exp(-\frac{2}{3}\delta) (2i)^{-k} (1-(\tau-i)^2\delta + i\frac{(\tau-i)^3}{3}\delta + \frac{(\tau-i)^4}{2}\delta^2 + \dots) (\tau-i)^{-k} \cdot \\ &\quad \cdot (1 - \frac{k}{2i}(\tau-i) + \frac{k(k+1)}{2(2i)^2}(\tau-i)^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{6(2i)^3}(\tau-i)^3 + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24(2i)^4}(\tau-i)^4 + \dots); \end{aligned}$$

$$\underline{k=1} \quad h(\tau) = \exp(-2\delta/3) (2i)^{-1} (1+\dots) (\tau-i)^{-1},$$

$$\underline{k=2} \quad h(\tau) = \exp(-2\delta/3) (2i)^{-2} (\dots - \frac{2}{2i}(\tau-i) + \dots) (\tau-i)^{-2},$$

$$\underline{k=3} \quad h(\tau) = \exp(-2\delta/3) (2i)^{-3} (\dots + (\frac{3 \cdot 4}{2(2i)^2} - \delta)(\tau-i)^2 + \dots) (\tau-i)^{-3},$$

$$\underline{k=4} \quad h(\tau) = \exp(-2\delta/3) (2i)^{-4} (\dots + (-\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6(2i)^3} + \frac{4}{2i}\delta + \frac{i}{3}\delta)(\tau-i)^3 + \dots) (\tau-i)^{-4},$$

$$\underline{k=5} \quad h(\tau) = \exp(-2\delta/3) (2i)^{-5} (\dots + (\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{24(2i)^4} - \frac{5 \cdot 6 \delta}{2(2i)^2} + \frac{5}{6}\delta + \frac{\delta^2}{2})(\tau-i)^4 + \dots) (\tau-i)^{-5}.$$

S'obtenen doncs els següents valors per a  $Re(a_0)$  ( $k=1+5$ ).

$k$	$Re(a_0)$
1	$\frac{\pi}{4} \exp(-2\delta/3)$
2	$\frac{\pi}{8} \exp(-2\delta/3)$
3	$\frac{\pi}{16} \exp(-2\delta/3) (\delta + \frac{3}{2})$
4	$\frac{\pi}{32} \exp(-2\delta/3) (\frac{5\delta}{3} + \frac{5}{2})$
5	$\frac{\pi}{64} \exp(-2\delta/3) (\frac{\delta^2}{2} + \frac{35\delta}{12} + \frac{35}{8})$

Càlcul de  $K_4$  :

$$\text{Fent } \tau=it \text{ per a } t \in [0, 1-\epsilon], \text{ tenim } K_4(\epsilon) = i \int_0^{1-\epsilon} \exp(\delta(-t+t^3/3))(1-t^2)^{-k} dt,$$

que és imaginari pur.

Sigui  $g(t)=(1-t^2)^{-k}$ ,  $u(t)=t-t^3/3$  és decreixent a  $[0, 1-\epsilon]$ , fem  $\beta=1-\epsilon$ .

Calculem  $K_4(\epsilon)$  fent ús del paràmetre  $u$ :

$$\kappa(u) = \frac{g(t(u))}{u'(t(u))} = \frac{(1-t^2(u))^{-k}}{1-t^2(u)} = (1-t^2(u))^{-(k+1)} \text{ implica}$$

$$K_4(\epsilon) = i \int_0^{u(\beta)} (1-t^2(u))^{-(k+1)} e^{-\delta u} du .$$

Usant la fórmula d'inversió de Lagrange ([37]) en  $u=t-t^3/3$ , tenim:

$$t(u) = \sum_{m \geq 0} d_m u^m = \sum_{n \geq 0} \frac{(3n)! u^{2n+1}}{(2n+1)! 3^n n!} = (u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{3} + \frac{4u^7}{9} + \dots) ;$$

com que:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= (1-t^2)^{-(k+1)} = \sum_{n \geq 0} c_n t^n = \sum_{n \geq 0} \binom{-(k+1)}{n} (-1)^n t^{2n} = \\ &= 1 + (k+1)t^2 + \frac{(k+1)(k+2)}{2} t^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\kappa(t(u)) = \sum_{n \geq 0} c_n \left( \sum_{m \geq 0} d_m u^m \right)^n = \sum_{r \geq 0} \gamma_r u^r \quad i$$

$$K_4(\epsilon) = i \sum_{r \geq 0} \gamma_r \int_0^{u(\beta)} \exp(-\delta u) u^r du .$$

Segons el mètode de Laplace ([14]), cada integral pot estendre's a la integral a  $[0, \infty)$  a l'hora de calcular el seu desenvolupament asimptòtic, quan  $\delta \rightarrow \infty$ .

S'obté doncs el següent desenvolupament asimptòtic de  $K_4$ :

$$K_4 \sim i \sum_{r \geq 0} \gamma_r \int_0^{\infty} \exp(-\delta u) u^r du \sim i \sum_{r \geq 0} \gamma_r \frac{r!}{\delta^{r+1}} ;$$

fent explícits els primers termes tenim:

$$K_4 \sim i(\delta^{-1} + 2(k+1)\delta^{-3} + 4(k+1)(3k+10)\delta^{-5} + \dots) . \quad (3.3)$$

### Càlcul de $K_2$ .

El tros de recinte que va de  $C(\epsilon)$  a  $B(R)$  segons la corba  $\operatorname{Re}(\tau + \tau^3/3) = 0$  és un arc de la hipèrbola:  $3 + \xi^2 - 3\eta^2 = 0$  si  $\tau = \xi + i\eta$ , que parametritzarem primerament segons  $\xi$ . Ara bé, la funció  $u(\tau) = -2/3 - i(\tau + \tau^3/3)$  sobre la hipèrbola s'escriu com:  $u(\xi) = (\tau(\xi) - i)^2 - i \frac{(\tau(\xi) - i)^3}{3} = (1 + \frac{\xi^2}{2})^{1/2} (\frac{2}{3} + \frac{8\xi^2}{9}) \frac{2}{3}$ ; notis que  $u$  és una funció creixent i positiva en l'arc d'hipèrbola considerat. Aquest serà el nou paràmetre de la hipèrbola amb el que estudiarem la integral  $K_2$ . El dit paràmetre es mou en l'interval d'extremes  $u(\epsilon \cos(\phi(\epsilon))) = \psi(\epsilon^2)$  (ja que  $\phi(\epsilon)$  és una funció imparella de  $\epsilon$  i  $u$ , funció parella de  $\xi$ ) i infinit (perquè  $\lim_{R \rightarrow \infty} u(B(R)) = \infty$ , ja que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \xi(B(R)) = \infty$ ).

Per parametritzar la funció  $h$  segons  $u$ , cal fer-ho prèviament amb  $\tau - i$ ; ho farem usant de nou el teorema d'inversió de Lagrange:

$$\tau - i = \sum_{n \geq 1} \frac{i^{n-1} \Gamma(\frac{3n-1}{2})}{n! 3^{n-1} \Gamma(\frac{n}{2})} (u^{1/2})^n = u^{1/2} \sum_{p \geq 0} \alpha_p (iu^{1/2})^p ;$$

$$d'on: d\tau = u^{-1/2} \sum_{p \geq 0} \beta_p (iu^{-1/2})^p du, \quad 1 + \tau^2 = (\tau - i)(2i + \tau - 1) = 2iu^{1/2} \sum_{p \geq 0} \delta_p (iu^{1/2})^p \quad i$$

$$(1 + \tau^2)^{-k} = (2iu^{1/2})^{-k} \left( \sum_{p \geq 0} \delta_p (iu^{1/2})^p \right)^{-k} = \sum_{j \geq -k} \epsilon_j (iu^{1/2})^j ,$$

amb els coeficients reals  $\alpha_p, \beta_p, \delta_p$  i  $\epsilon_p$  adequats.

$K_2$  s'expressa llavors en la forma:

$$\begin{aligned}
 K_2(\epsilon) &= \int_{\psi(\epsilon^2)}^{\infty} \exp(-2\delta/3) \exp(-\delta u) i \sum_{j \geq -k-1} \lambda_j (iu^{1/2})^j du = \\
 &= \int_{\psi(\epsilon^2)}^{\infty} \exp(-2\delta/3) \exp(-\delta u) \sum_{\substack{j \geq -k-1 \\ j \neq 2}} \mu_j u^{j/2} + \\
 &+ i \int_{\psi(\epsilon^2)}^{\infty} \exp(-2\delta/3) \exp(-\delta u) \sum_{\substack{j \geq -k-1 \\ j=2}} \mu_j u^{j/2} .
 \end{aligned}$$

Fent  $g_r(\epsilon) = \int_{\psi(\epsilon^2)}^{\infty} \exp(-\delta u) u^r du$ , la fórmula de reducció:

$$\frac{g_{-2q-1}}{2} = \frac{1}{2q-1} ( \psi(\epsilon^2)^{-1/2} )^{2q-1} \exp(-\delta \psi(\epsilon^2)) - \frac{g_{-2q+1}}{2}$$

ens assegura que la part real del desenvolupament en potències de  $\epsilon$  de  $K_2$  només conté potències imparelles. Noti's que l'expressió entre parèntesis de la fórmula de reducció es funció imparella de  $\epsilon$ , ja que  $\psi(\epsilon^2) = \sum_{s \geq 1} c_s \epsilon^{2s}$ .

$\text{Im}(K_2(\epsilon))$  és també  $o(\delta^{-N})$ ,  $\forall N$  i no donarà contribucions d'importància en els desenvolupaments tractats ací.

### Conclusions.

Observem que  $I_k + iJ_k$  ve donat per una integral no singular i, per tant, els termes singulars de  $K_2(\epsilon)$ ,  $K_3(\epsilon)$  i  $K_4(\epsilon)$  s'han de cancel·lar. Considerem ara el límit quan  $\epsilon \rightarrow 0$ : Com que  $\text{Re}(K_3(\epsilon))$  té només potències imparelles en el seu desenvolupament, el terme independent de  $\text{Re}(K_3(\epsilon))$  ha de coincidir amb  $I_k$ ; és a dir,  $I_k = \text{Re}(a_0)$  (per a aquest valor de  $k$ ), ja que els  $a_0$  són reals.  $J_k$  tindrà asimptòticament el desenvolupament de  $\text{Im}(K_4)$  en (3.3), ja que la contribució de  $K_2$  és  $o(\delta^{-N})$ ,  $\forall N$  i la de  $K_3$ , també.

D'on, usant les fórmules d'analogia i reducció, les expressions de  $\text{Re}(a_0)$  ( $k=1+4$ ) i el desenvolupament de  $K_4$ :

PROPOSICIÓ

$$I_k \sim \pi \exp(-2\delta/3) \delta^{[(k-1)/2]} \hat{I}_k,$$

amb  $\hat{I}_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\hat{I}_2 = \frac{1}{8}$ ,  $\hat{I}_3 = \frac{1}{16}$ ,  $\hat{I}_4 = \frac{5}{96}$ ,  $\hat{I}_{2j+3} = \frac{1}{4(2j)(2j+2)} \hat{I}_{2j-1}$  (3.4)

$$\hat{I}_{2j+4} = \frac{1}{4(2j+1)(2j+3)} \hat{I}_{2j} + \left(1 - \frac{1}{2(2j+3)}\right) \hat{I}_{2j+3} \quad (j \geq 1);$$

$$J_k \sim \delta^{-1} + 2(k+1)\delta^{-3} + 4(k+1)(3k+10)\delta^{-5};$$

$$M_{k+2} = \frac{\delta}{2(k+1)} I_k;$$

$$N_{k+2} = \frac{1}{2(k+1)} (1 - \delta J_k) \sim -\delta^{-2} - 2(3k+10)\delta^{-4}.$$

3.6. Desenvolupament de Fourier de  $\omega_1$  en  $P_{+1}^0$ :

De la proposició anterior i l'expressió dels  $S_n^{(m)}$  en la secció 3.4 ,  
tenim el següent desenvolupament asimptòtic dels  $S_n^{(m)}$  amb  $n+m$  parell:

$$S_n^{(m)} \sim \pi s_n^{(m)} (m\delta)^{(n+m-2)/2} \exp(-2m\delta/3) \sin(m\theta_-) -$$

$$- \left( \sum_{j=0}^m \bar{t}_j^{(m)} (m\delta)^{-1} + \sum_{j=0}^m \bar{u}_j^{(m)} (m\delta)^{-2} + \sum_{j=0}^m \bar{t}_j^{(m)} 2(j+n+1)(m\delta)^{-3} \cos(m\theta_-) \right) ,$$

amb  $s_n^{(m)} = \bar{t}_m^{(m)} \hat{I}_{n+m} + \bar{t}_{m-1}^{(m)} \hat{I}_{n+m-1} + \frac{\bar{u}_m^{(m)}}{2(n+m-1)} \hat{I}_{n+m-2} + \frac{\bar{u}_{m-1}^{(m)}}{2(n+m-2)} \hat{I}_{n+m-3} .$

Usant ara el lema de la secció 3.4 tenim:

PROPOSICIO

Si  $n+m$  és parell:

$$S_n^{(m)} \sim \pi s_n^{(m)} (m\delta)^{(n+m-2)/2} \exp(-2\delta/3) \sin(m\theta_-) -$$

$$-(m\delta)^{-1} (1+2\delta^{-1}+4\delta^{-2}+2(n+1)(m\delta)^{-2}) \cos(m\theta_-) ,$$

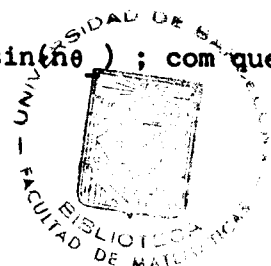
amb  $s_n^{(m)} = 2^{2m-1} \hat{I}_{n+m} - m 2^{2m-2} \hat{I}_{n+m-1} + \frac{2^{2m-2}}{n+m-1} \hat{I}_{n+m-2} - m \frac{2^{2m-4}}{n+m-2} \hat{I}_{n+m-3} (1-\delta_{m1})$  , on els  $\hat{I}_k$  a compleixen la recurrència (3.4).

Nota: L'últim sumand de  $s_n^{(m)}$  s'omet en el cas  $m=1$ , ja que  $\bar{u}_0^{(1)}=0$ .

Farem ara ús de l'expressió de  $\omega_1(\tau=0, \theta_-)$  en la secció 3.3 i trobarem els termes dominants dels desenvolupaments asimptòtics, quan  $C \rightarrow \infty$ , dels coeficients de Fourier de  $\omega_1(\tau=0, \theta_-)$  que surten de manera natural a partir dels desenvolupaments de  $S_n^{(m)}$  de la proposició anterior.

Fent  $\omega_1(\tau=0, \theta_-) = C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n \cos(n\theta_-) + \sum_{n \geq 1} D_n \sin(n\theta_-)$  ; com que

$C/(2\delta)=1/r_-$ , tenim:



$$C_0=0, \quad C_1 \sim \frac{1}{r_-^4} (1+2\delta^{-1}+4\delta^{-2}+4\delta^{-2}) \alpha_1, \quad C_n \sim \frac{1}{r_-^{n+1}} (1+2\delta^{-1}+4\delta^{-2}+2(n+1)(n\delta)^{-2}) \alpha_n,$$

$$D_1 \sim -\pi s_1 \frac{\delta^2}{r_-^4} \exp(-2\delta/3) \alpha_1, \quad D_n \sim -\pi s_n \frac{\delta^n}{r_-^{n+1}} \exp(-2n\delta/3) \alpha_n \quad (n>1);$$

$$\text{amb } \alpha_1 = \left( \frac{2\alpha_0^{(2)} - \alpha_2^{(2)}}{2} + \frac{2\alpha_0^{(4)} - \alpha_2^{(4)}}{2r_-^2} + \dots \right) i$$

$$\alpha_n = \left( \frac{\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{2n} + \frac{\alpha_{n-1}^{(n+1)} - \alpha_{n+1}^{(n+1)}}{2nr_-^2} + \frac{\alpha_{n-1}^{(n+3)} - \alpha_{n+1}^{(n+3)}}{2nr_-^4} + \dots \right) \quad (n>1) \quad i$$

$$s_1 = s_3^{(1)} = 2\hat{I}_4 - \hat{I}_3 + \frac{1}{3}\hat{I}_2 = \frac{1}{12},$$

$$s_n = n^n (2^{2n-1} \hat{I}_{2n} - n 2^{2n-2} \hat{I}_{2n-1} + \frac{2^{2n-2}}{2n-1} \hat{I}_{2n-2} - n \frac{2^{2n-1}}{2n-2} \hat{I}_{2n-3}) \quad (n>1). \quad (3.5)$$

Escrivint només els primers termes dominants, ara en funció de C:

$$C_0=0, \quad C_1 \sim 3 \cdot 2^8 C^{-8}, \quad C_n \sim (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!!}{(2n)!!!} 2^{3n+3} C^{-(2n+2)} \quad (n>1);$$

$$D_1 \sim \frac{\pi}{2} C^{-2} \exp(-C^3/24), \quad D_n \sim (-1)^n \pi s_n \frac{(2n-1)!!!}{(2n)!!!} 2^{4-n} C^{n-2} \exp(-nC^3/24) \quad (n \geq 1).$$

Els coeficients  $C_n^-$  i  $D_n^-$  ( $n \geq 1$ ) de  $\omega_1$  en  $P_{-1}^0$ , degut a la simetria, compliran:  $C_n^- = C_n$  i  $D_n^- = -D_n$ . D'on:

TEOREMA.

$\omega$  en  $P_{+1}^0$  s'expressa asimptòticament quan  $m \rightarrow 0$  i  $C \rightarrow \infty$  per:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{C}{2} + m \left[ 3 \cdot 2^8 C^{-8} \cos \theta_- - 3 \cdot 2^6 C^{-6} \cos(2\theta_-) + \sum_{n \geq 3} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!!}{(2n)!!!} \frac{2^{3n+3}}{C^{2n+2}} \cos(n\theta_-) \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2} C^{-2} \exp(-C^3/24) \sin \theta_- + \pi \sum_{n \geq 2} (-1)^n s_n \frac{(2n-1)!!!}{(2n)!!!} \frac{C^{n-2}}{2^{n-4}} e^{-nC^3/24} \sin(n\theta_-) \right] \\ & \cdot (1+o(1)) + O(m^2); \end{aligned}$$

amb  $s_n$  ( $n > 1$ ) donats en (3.5).

### 3.7. Desenvolupament de Fourier de $q_1$ en $P_{+1}^0$ .

L'expressió (3.1) en  $\tau=0$  permet de relacionar  $q_1$  i  $\omega_1$  en  $P_1^0$  :

$$q_1(\tau=0, \theta_-) = \frac{C}{4} \left( \left(1 - \frac{32}{C^3}\right) \omega_1(\tau=0, \theta_-) + \frac{1}{2} (\partial_m v)_0(\tau=0, \theta_-) \right) .$$

Coneixem els termes dominants dels desenvolupaments asimptòtics dels coeficients de Fourier de  $\omega_1(\tau=0, \theta_-)$ ; desenvolupant  $(\partial_m v)_0(\tau=0, \theta_-)$  arribarem a conèixer aquests termes dominants per a  $q_1(\tau=0, \theta_-)$ . Escrivim:

$$q_1(\tau=0, \theta_-) = A_0 + \sum_{k \geq 1} A_k \cos(k\theta_-) + \sum_{k \geq 1} B_k \sin(k\theta_-) .$$

$$\text{Tenim que: } \frac{1}{2} (\partial_m v)_0(\tau=0, \theta_-) = \frac{1}{r_-} \left( \Delta_-^{-1/2} + \frac{\cos \theta_-}{r_-} - 1 \right) \text{ amb}$$

$$\Delta_- = 1 + \frac{2 \cos \theta_-}{r_-} + \frac{1}{r_-^2} .$$

Tornant a usar els desenvolupaments en polinomis de Gegenbauer com en la secció 3.3., es té:

$$\frac{1}{2} (\partial_m v)_0(\tau=0, \theta_-) = \sum_{n \geq 2} C_n^{(1/2)}(-\cos \theta_-) \frac{1}{r_-^{n+1}} \quad i$$

$$C_n^{(1/2)}(-\cos \theta_-) = \sum_{k=n(-2)0} \beta_k^{(n)} \cos(k\theta_-) ;$$

en l'apèndix es troben propietats i alguns valors d'interès dels coeficients  $\beta_k^{(n)}$ .

$$\text{Fent } \frac{1}{2} (\partial_m v)_0(\tau=0, \theta_-) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \cos(n\theta_-) , \text{ tenim:}$$

$$\beta_0 = \frac{\beta_0^{(2)}}{r_-^3} + \frac{\beta_0^{(4)}}{r_-^5} + \dots , \quad \beta_1 = \frac{\beta_1^{(3)}}{r_-^4} + \frac{\beta_1^{(5)}}{r_-^6} + \dots ,$$



$$\beta_n = \frac{\beta_n^{(n)}}{r_-^{n+1}} + \frac{\beta_n^{(n+2)}}{r_-^{n+3}} + \dots \quad (n > 1).$$

Utilitzant l'apèndix, tenim que  $\beta_n = -\alpha_n$  ( $n > 0$ ) i, a més:

$$A_0 = \frac{C}{4} \beta_0 \sim \frac{C}{4} \frac{\beta_0^{(2)}}{r_-^3} = 32C^{-5},$$

$$A_1 = \frac{C}{4} (C_1 (1 - 2\delta^{-1}) + \beta_1) = \frac{C}{4r_-} ((1 + 4\delta^{-2} + O(\delta^{-3}))\alpha_1 + \beta_1) \sim \frac{C}{r_-^4} \delta^{-2} \beta_0^{(3)} = \frac{3 \cdot 2^{17}}{C^{13}};$$

$$A_n = \frac{C}{4} (C_n (1 - 2\delta^{-1}) + \beta_n) = \frac{C}{4r_-^{n+1}} ((1 + 2(n+1)(n\delta)^{-2} + O(\delta^{-3}))\alpha_n + \beta_n) \sim$$

$$\sim - \frac{C}{4r_-^{n+1}} 2(n+1)(n\delta)^{-2} \beta_n^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{2^{3n+11}}{C^{2n+7}} \quad (n > 1);$$

$$B_n = \frac{C}{4} D_n \quad (n > 1).$$

D'on; usant les simetries de  $P_{+1}^0$ :

TEOREMA.

q en  $P_{+1}^0$  s'expressa asimptòticament, quan  $m \rightarrow 0$  i  $C \rightarrow \infty$  per:

$$4C^{-1+m} [32C^{-5} + 3 \cdot 2^{17} C^{-13} \cos \theta_- - 9 \cdot 2^{12} C^{-11} \cos(2\theta_-) +$$

$$+ \sum_{n \geq 3} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{2^{3n+10}}{C^{2n+7}} \cos(n\theta_-) +$$

$$+ \frac{\pi}{8} C^{-1} \exp(-C^3/24) \sin \theta_- \quad (3.6)$$

$$+ \pi \sum_{n \geq 2} (-1)^{n+1} s_n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{C}{2} \right)^{n-1} \exp(-nC^3/24) \sin(n\theta_-) ] (1 + o(1)) +$$

$$+ O(m^2);$$

amb  $s_n$  ( $n > 1$ ) donats en (3.5).

COROL.LARI

Els conjunts  $P_{\pm 1}^{\cup}$  són difeomorfs a cercles que es tallen només en els punts amb  $\theta_{\pm}=0, \pi$ , amb un angle

$$m \frac{\pi}{4} C^{-1} \exp(-C^3/24)(1+o(1)) + O(m^2),$$

quan  $m \rightarrow 0$  i  $C \rightarrow \infty$ .

COROL.LARI

El problema restringit de 3 cossos, pla i circular no és integrable.

COROL.LARI

El mínim valor de  $q$  en  $P_{\pm 1}^0$  s'obté tan a prop com es vulgui dels punts de tall i val

$$4C^{-1} + m(A_0 + A_2(1+o(1))) + O(m^2)$$

quan  $m \rightarrow 0$  i  $C \rightarrow \infty$ .

Els dos primers corol.laris es troben a [ 21 ], veieu les seccions 5 i 6 d'aquest article. El corol.lari 3.3 es deu a que  $A_2$  és el coeficient de Fourier dominant (exceptuant  $A_0$ ) i és negatiu.

A pesar del corol.lari 3.2, el corol.lari 3.1 permet de parlar de quasi-integrabilitat en el següent sentit: si el sistema fos integrable; llavors,  $P_+ = P_-$  i, per tant,  $P_1^0 = P_{-1}^0$ . Ara bé, l'angle de tall entre aquests és extremadament petit quan  $C$  és gran i  $m$ , petit i la separació màxima entre ambdues corbes tancades val asimptòticament el mateix que aquell angle. Es a dir, encara que matemàticament  $P_+$  i  $P_-$  no coincideixen, físicament, es confonen quan  $m \rightarrow 0$  i  $C$  suficientment gran. El sistema semblaria integrable sempre que la separació màxima  $D$  entre ambdues corbes no fos observable físicament. Si  $D=10^{-10}$  i  $m=0.1$ , ho semblaria per a  $C > 8.2$ , usant tan sols el primer terme en l'expressió de l'angle.

#### 4. UN MODEL PER A UN ESTUDI QUANTITATIU.

##### 4.1. Estudi quantitatiu de $P_{\pm n}^0$ i $H_{\pm n}^0$ ( $n \geq 1$ ).

Donarem un model de l'aplicació  $T$  per a punts de  $D_-$  tan a prop com calgui de  $P_{-1}^0$  amb el que farem un estudi quantitatiu dels conjunts d'escapament i captura, en aquella regió.

La tècnica per a obtenir-lo es basa en el coneixement de l'aplicació  $T$  en el cas  $m=0$ , prop de  $P^0$ .

Fent  $q=4/C - \rho$ , amb  $\rho$  suficientment petit, i usant l'expressió (2.1) que defineix  $a(q)$ , tenim:  $a(\rho) = \frac{C}{8\rho} + O(C^2)$ ; per tant, l'aplicació  $T$  s'expressa en variables  $(\theta, \rho)$  per:

$$(\theta, \rho) \longrightarrow (\theta + 2\pi(\frac{C}{8\rho} + O(C^2))^{3/2}, \rho).$$

Parametritzem els punts de retorn en coordenades  $(\theta_{\pm}, \rho_{\pm})$  tals que, si  $\theta_{\pm}$  és l'angle de posició d'un punt, llavors  $\rho_{\pm}$  és la diferència entre el valor de  $q$  corresponent a  $\theta_{\pm}$  en  $P_{\pm 1}^0$  i el del punt en qüestió.

El nostre model consisteix en aproximar la imatge  $(\theta_+, \rho_+)$  d'un cert punt  $(\theta_-, \rho_-)$  per

$$(\theta_+, \rho_+) = (\theta_- + 2\pi(\frac{C}{8\rho_-})^{3/2}, \rho_-).$$

Usant (3.6), veiem que el terme dominant en la diferència entre  $\rho_-$  i  $\rho_+$ , per a un cert angle  $\theta_-$  és:

$$\rho_- - \rho_+ = \frac{m}{4C} \exp(-C^3/24) \sin \theta_- = \epsilon \sin \theta_-.$$

Es a dir, si referenciem també el punt imatge respecte a  $P_{-1}^0$  i fem  $\rho = \epsilon t$ , tindrem que la imatge de  $(\theta, t)$  serà:

$$(\theta + 2\pi(B/t)^{3/2}, t + \sin(\theta + 2\pi(B/t)^{3/2})),$$

amb  $B = \frac{C}{8\epsilon}$ .

Notem que no està definida la imatge per a valors de  $t \leq 0$ .

Recordant (2.2), tenim que els conjunts  $P_{+n}^0$  ( $n \geq 1$ ) estan representats per les següents parametritzacions, en aquest model:

$$P_1^0 = \{(\theta_1, t_1 = \sin \theta_1), \theta_1 \in [0, 2\pi)\},$$

$$P_n^0 = \{(\theta_n = \theta_{n-1} + 2\pi(B/t_{n-1})^{3/2}, t_n = t_{n-1} + \sin \theta_n), (\theta_{n-1}, t_{n-1}) \in P_{n-1}^0, t_{n-1} > 0\}.$$

Notem que aquest model potser no serà bo lluny de  $P_{-1}$ , ja que  $t_n$  en  $P_+^0$  podria fer-se massa gran i això estaria en contradicció amb l'existència de corbes invariants. En canvi, pot ésser un bon model per a l'estudi quantitatiu de les amplades de les successives cintes que formen els conjunts d'escapament i captura, tan a prop com calgui de  $P_{\pm 1}^0$  i que farem a continuació.

Considerem, en  $P_1^0 \cap D_-$ , arcs  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_\pi$ , que tendeixen als punts amb  $\theta = 0, \pi$  que formen  $P_1^0 \cap P_{-1}^0$ , suficientment petits de forma que sigui aplicable el model en qüestió de l'aplicació  $T$  per als punts d'aquests arcs. Els dits punts es parametritzaran per l'angle  $\theta_1$ , amb el que mesurarem amplades d'interval  $C_{-j; k_2, \dots, k_j}$  ( $j \geq 2$ ),  $k_2, \dots, k_j \in \mathbb{Z}$ , d'intersecció de les successives cintes que formen els conjunts de captura amb  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_\pi$ .

$T\Gamma_0$  i  $T\Gamma_\pi$  espiralen cap a  $P_1^0$ , delimitant la part final de la cinta  $S_2^0$  que talla transversalment  $P_{-1}^0$  infinites vegades.

Siguin  $C_{-2; k_2} = [\theta_1(k_2), \bar{\theta}_1(k_2)]$ , els intervals de tall de la cinta  $S_{-2}^0$  amb  $P_1^0$  en  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_\pi$ , que indicarem amb  $k_2 > 0$  i  $k_2 < 0$ , respectivament, i que tenen per imatge la frontera de la component connexa  $|k_2|$  de la cinta  $S_2^0$  exterior a  $D_{-1}$ ;  $k_2$  es defineix d'acord amb el que segueix.

Els extrems de  $C_{-2; k_2}$  aconpleixen l'equació:

$$t_2 = \sin \theta_1 + \sin(\theta_1 + 2\pi(B/\sin \theta_1)^{3/2}) = 0,$$

ja que son de  $T^{-1}(P_2^0 \cap P_{-1}^0)$  i els considerem de forma que:

$$\frac{\theta_1(k_2)}{\pi} + \left(\frac{B}{\sin\theta_1(k_2)}\right)^{3/2} = |k_2|, \quad \left(\frac{B}{\sin\theta_1(k_2)}\right)^{3/2} = |k_2| - \frac{1}{2}, \quad k_2 > 0 \text{ i } k_2 < 0.$$

D'on, asimptòticament quant  $k_2 \rightarrow \pm\infty$ , les amplitudes de  $C_{-2;k_2}$  seran:

$$\Delta\theta_1(k_2) = |\theta_1(k_2) - \bar{\theta}_1(k_2)| \sim \frac{B}{3|k_2|^{5/3}}$$

i estaran situades aproximadament en:

$$\theta_1(k_2) \sim \frac{B}{|k_2|^{3/2}} \quad (k_2 > 0) \quad \text{i} \quad \theta_1(k_2) \sim \pi - \frac{B}{|k_2|^{3/2}} \quad (k_2 < 0).$$

Els intervals  $C_{-3;k_2,k_3}$  corresponen a les antiimatges per T, prop de  $C_{-2;k_2}$  (en  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_\pi$ ) de les fronteres de les components connexes  $|k_3|$  de  $S_{-2}^0$  en  $D_{-1}$ . Observem que existiran 2 intervals per a cada component connexa, situats a una banda i altra de  $C_{-2;k_2}$ , i que podem notar amb  $k_3 > 0$  i  $k_3 < 0$ , corresponents als talls, prop dels punts  $P_1^0 \cap P_{-1}^0$  amb  $\theta_- = 0, \pi$ , respectivament, de  $T\Gamma_0$  i  $T\Gamma_\pi$  amb la component connexa esmentada.

Per trobar l'amplada aproximada de  $C_{-3;k_2,k_3}$ , cal només observar que la imatge per T d'un petit arc en  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_\pi$ , prop de  $C_{-2;k_2}$ , queda amplificada aproximadament per un factor  $3\pi|k_2|^{5/3}/B$  i l'amplada de la component  $|k_3|$  de la cinta  $S_{-2}^0$  en  $D_{-1}$  és aproximadament  $\Delta\theta_1(k_3) \sim \frac{B}{3|k_3|^{5/3}}$ .

D'on, asimptòticament quan  $k_2, k_3 \rightarrow \pm\infty$ , l'amplada de  $C_{-3;k_2,k_3}$  és:

$$\Delta\theta_1(k_2, k_3) \sim \pi \left(\frac{B}{3\pi|k_2|^{5/3}}\right) \left(\frac{B}{3\pi|k_3|^{5/3}}\right).$$

Aquest procediment pot estendre's per trobar l'amplada de  $C_{-j;k_2, \dots, k_j}$ , definit de forma anàloga, obtenint:

PROPOSICIÓN.

Asintòticament, quan  $k_2, k_3, \dots, k_j \rightarrow \pm\infty$ , l'amplada de  $C_{j;k_2, \dots, k_j}$

és 
$$\Delta\theta_1(k_2, \dots, k_j) \sim \pi \left( \frac{B}{3\pi|k_2|^{5/3}} \right) \dots \left( \frac{B}{3\pi|k_j|^{5/3}} \right),$$

amb  $B = \frac{C^2 \exp(C^3/24)}{2\pi m}$ , essent  $C$  suficientment gran i  $m \neq 0$ ; suposant la validesa del model d'aquesta secció.

Nota. Per mesurar radialment el gruix de les cintes caldrà multiplicar essencialment per  $\epsilon$  els gruixos trobats.

#### 4.2. Anàlisi del model. Reducció a l'aplicació standard i simulació.

El model emprat per l'aplicació de Poincaré:

$$(\theta, t) \longrightarrow (\theta = \theta + 2\pi(B/t)^{3/2}, t' = t + \sin\theta') \quad (4.1)$$

no és, certament, una bona aproximació quantitativa del sistema real. En efecte, si bé la component  $t$  té poc error relatiu, la variació de  $\theta$  té errors relativament petits però que són, en valor absolut, molt grans; de tota manera, l'error que es té afecta essencialment el comportament d'un punt determinat sota iteració, però no la dinàmica global, en el sentit d'existència de corbes invariants, zones estocàstiques, etc.

És per això que és valuós obtenir informació sobre el comportament del model per tal d'extreure'n conseqüències.

Considerem  $B$  gran i prenem  $t_0$  tal que  $(B/t_0)^{3/2} \in \mathbb{N}$ . Introduïm  $\bar{t} = t - t_0$ , amb lo qual:

$$(\theta, \bar{t}) \longrightarrow (\theta' = -3\pi B^{3/2} t_0^{-5/2} \bar{t} + \frac{15}{4} \pi B^{3/2} t_0^{-7/2} \bar{t}^2 + \dots, \bar{t}' = \bar{t} + \sin\theta')$$

i, suposant que  $B^{3/2} t_0^{-5/2} = O(1)$ , l'aplicació pot aproximar-se per

$$(\theta, \bar{t}) \longrightarrow (\theta' = \theta + g\bar{t}, \bar{t}' = \bar{t} + \sin\theta'), \text{ on } g = -3\pi B^{3/2} t_0^{-5/2}.$$

Recordem, d'altra banda, l'anomenada aplicació standard (vegi's, per exemple, [10]), donada per  $I' = I + K \sin\theta$ ,  $\theta' = \theta + I'$ . És conegut que existeix un valor crític  $|K| = K_{cr}$  per sota del qual hi ha corbes invariants, mentre que si  $|K| > K_{cr}$  despareixen. Per simulació numèrica ([10]) hom té que  $K_{cr} \sim 0.989$ . Una combinació de mètodes numèrics i analítics ([16]) mostra que  $K_{cr} \sim 0.972$ . Fites analítiques de  $K_{cr}$  degudes a treballs de Mather, Aubry, etc. donen  $K_{cr} < 1.3$  (vegi's les referències pertinents a [18]).

Ara fem  $x=\theta$ ,  $y=g\bar{t}$  i tenim  $x'=x+y$ ,  $y'=y+K\sin x$ , on  $K=g$ . Si usem el valor crític  $|K|=0.98$ , tindrem  $t_0=(3\pi/0.98)^{2/5}B^{3/5}$  com a límit inferior de la zona on podem esperar l'existència de corbes invariants. Per exemple, per  $B=10^2$ ,  $10^3$  i  $10^4$  es té  $t_0 \sim 39.7$ ,  $157.5$  i  $625$ , respectivament, recordant que cal  $(B/t_0)^{3/2} \in \mathbb{N}$ .

Les figures 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 i 4.7 mostren diverses simulacions. La taula 4.1 dóna les dades de cada figura i la taula 4.2 els punts usats en la simulació de (4.1), el nombre d'iterats  $N$  a partir de cada punt inicial i el resultat observat. En abscisses apareix sempre  $\theta \in [0, 2\pi]$  i, en ordenades  $t$  entre  $t_{\min}$  i  $t_{\max}$ . En la taula 4.2 el valor inicial de  $\theta$  s'ha pres sempre igual a 3, excepte si es diu expressament una altra cosa.

Figura	B	$t_{\min}$	$t_{\max}$
4.1	100	0	50
4.2	1000	0	200
4.3	1000	140	180
4.4	10000	0	1000
4.5	10000	500	800
4.6	10000	600	650
4.7	10000	620	630

Taula 4.1

S'observa una bona concordància amb la predicció, aproximant per l'aplicació standard, en certa zona de valors de  $t$ . Notem que, com més gran sigui  $B$ , més gran és la zona estocàstica entre  $t=0$  i  $t=t_0(K_{cr}, B)$ . Per tant, encara que es produeixi escapament, aquest requereix un nombre molt elevat d'iteracions. És per

aquest motiu pel que ens hem limitat als valors de  $B$  esmentats. Per exemple, per a  $B=10^6$  es té  $t_0 \sim 9850$ . Una exploració grollera ha detectat una corba invariant per  $\theta_0=3$  i  $t_0=10490$ . Partint de  $\theta_0=3$ ,  $t_0=1000$ , clarament en la zona estocàstica i relativament prop d'escapament, després de 50000 iterats es té que aquests cobreixen una banda entre  $t \sim 900$  i  $t \sim 1300$ .



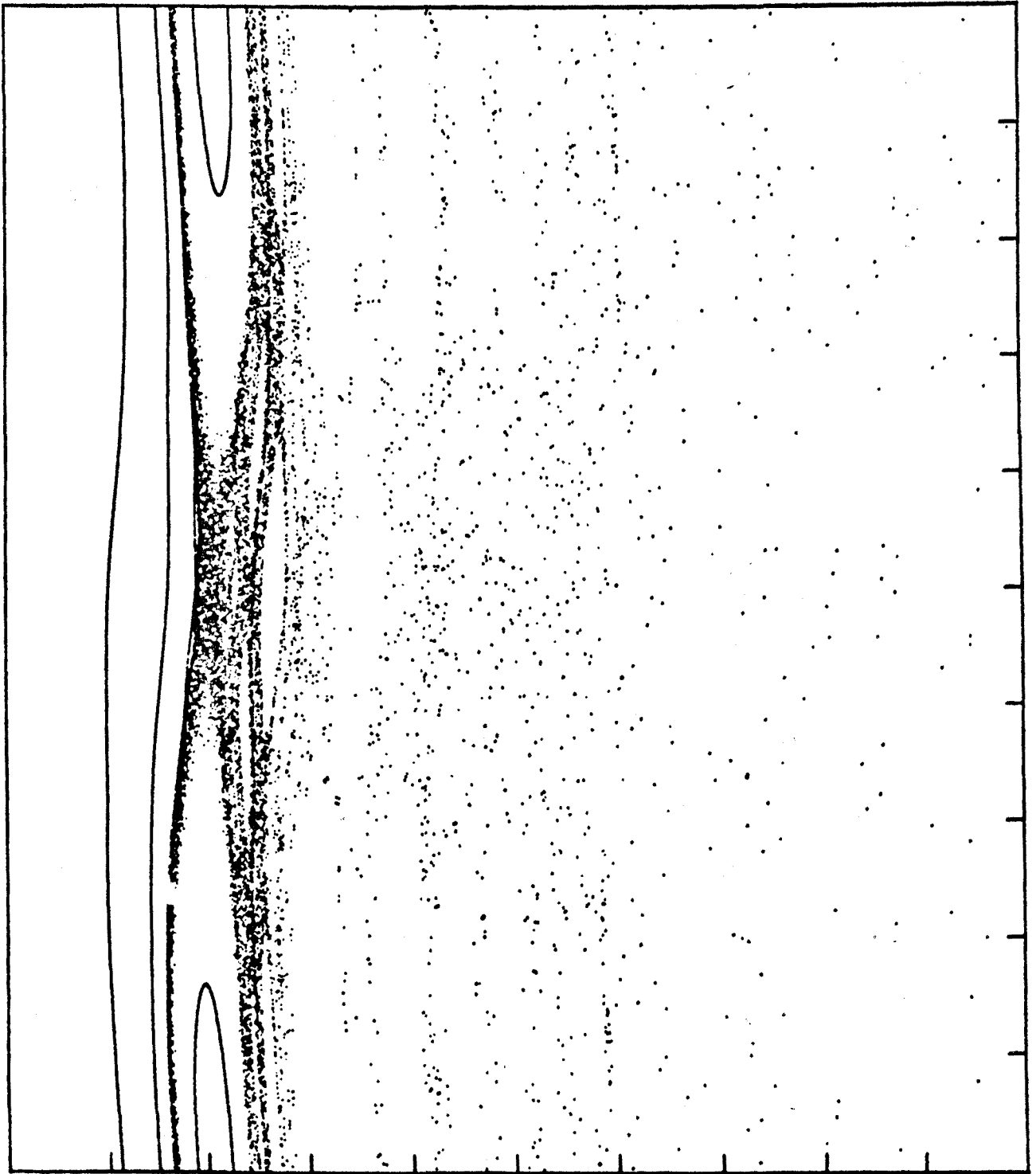


Figura 4.1

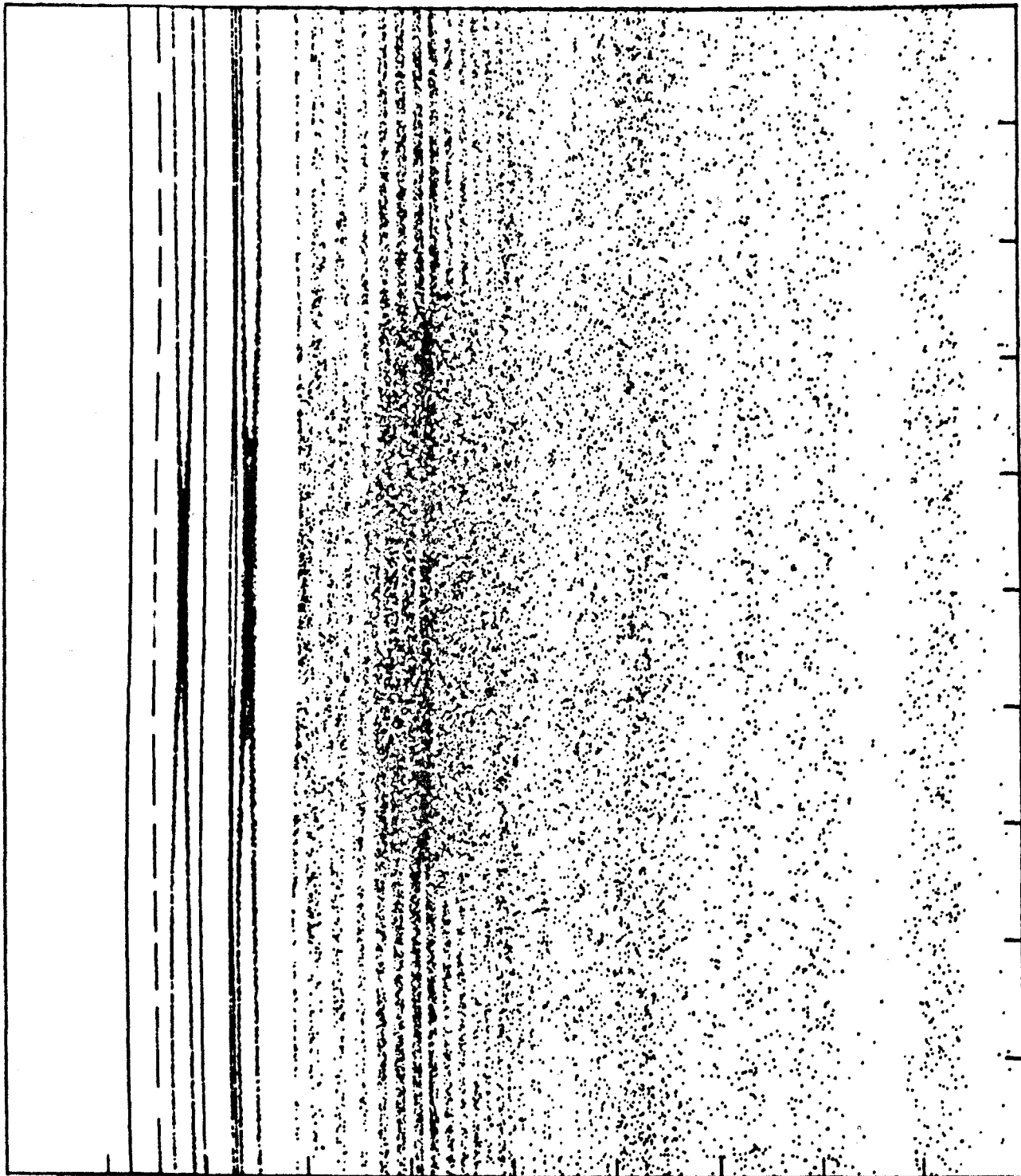


Figura 4.2

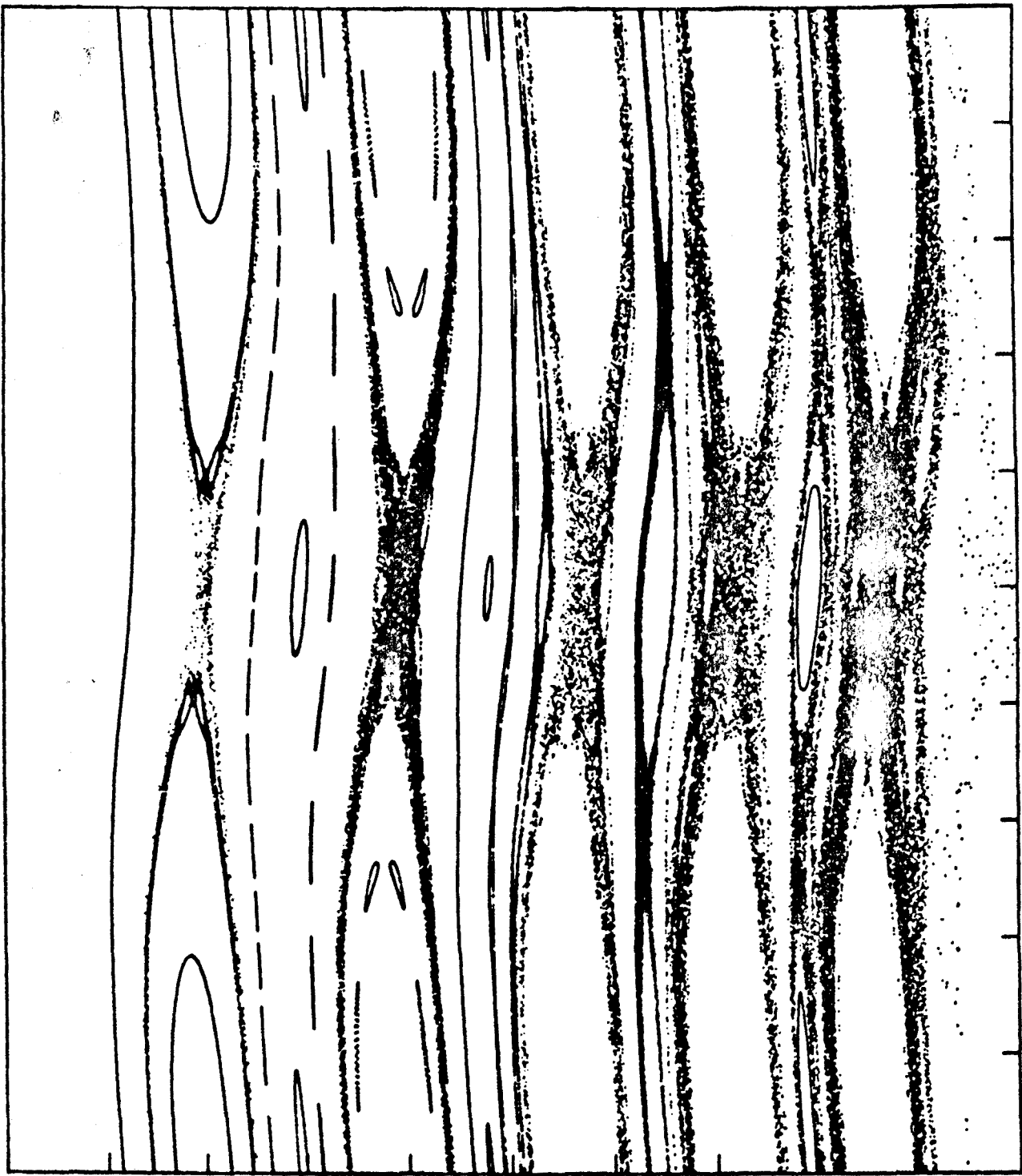


Figura 4.3

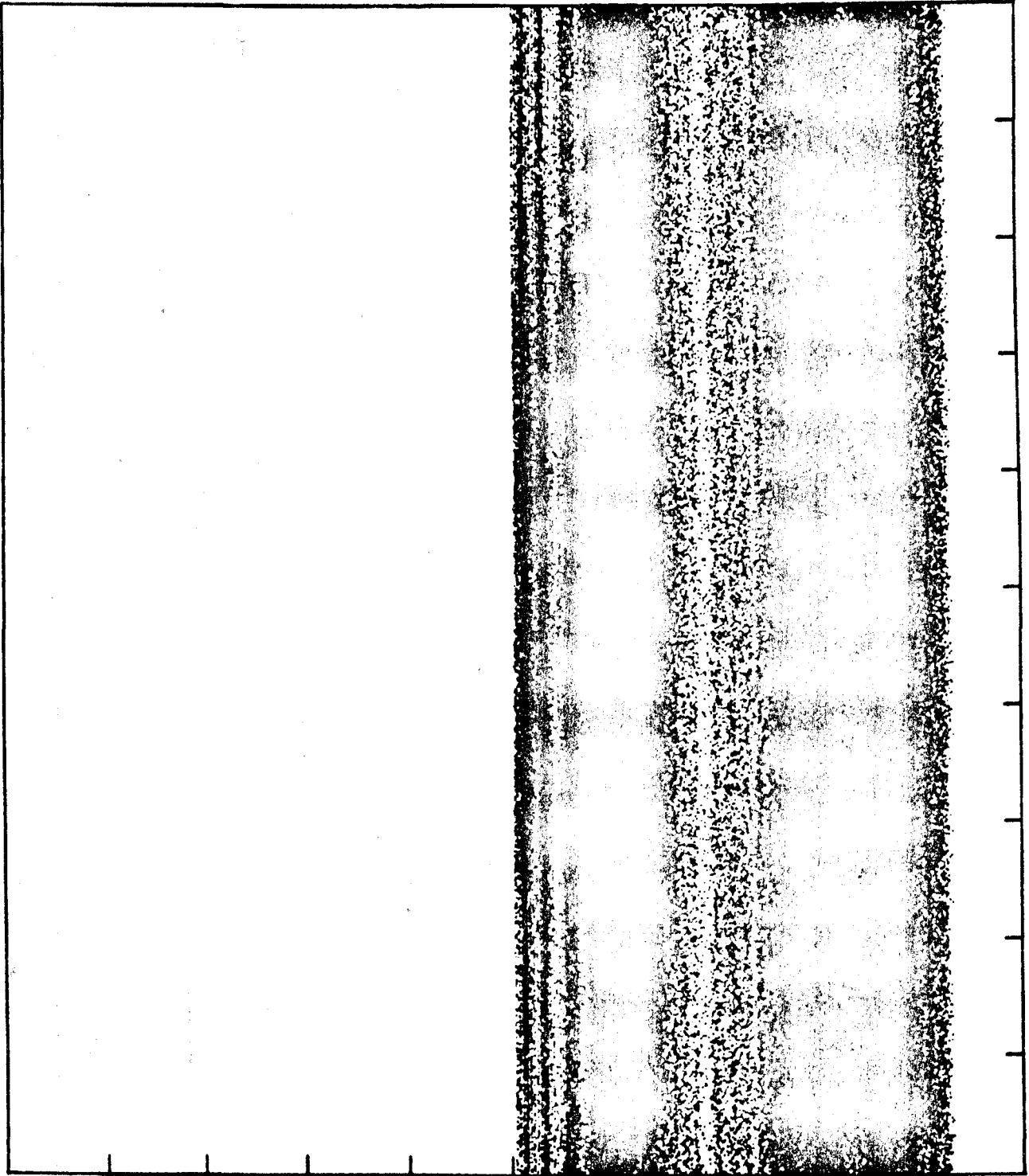


Figura 4.4





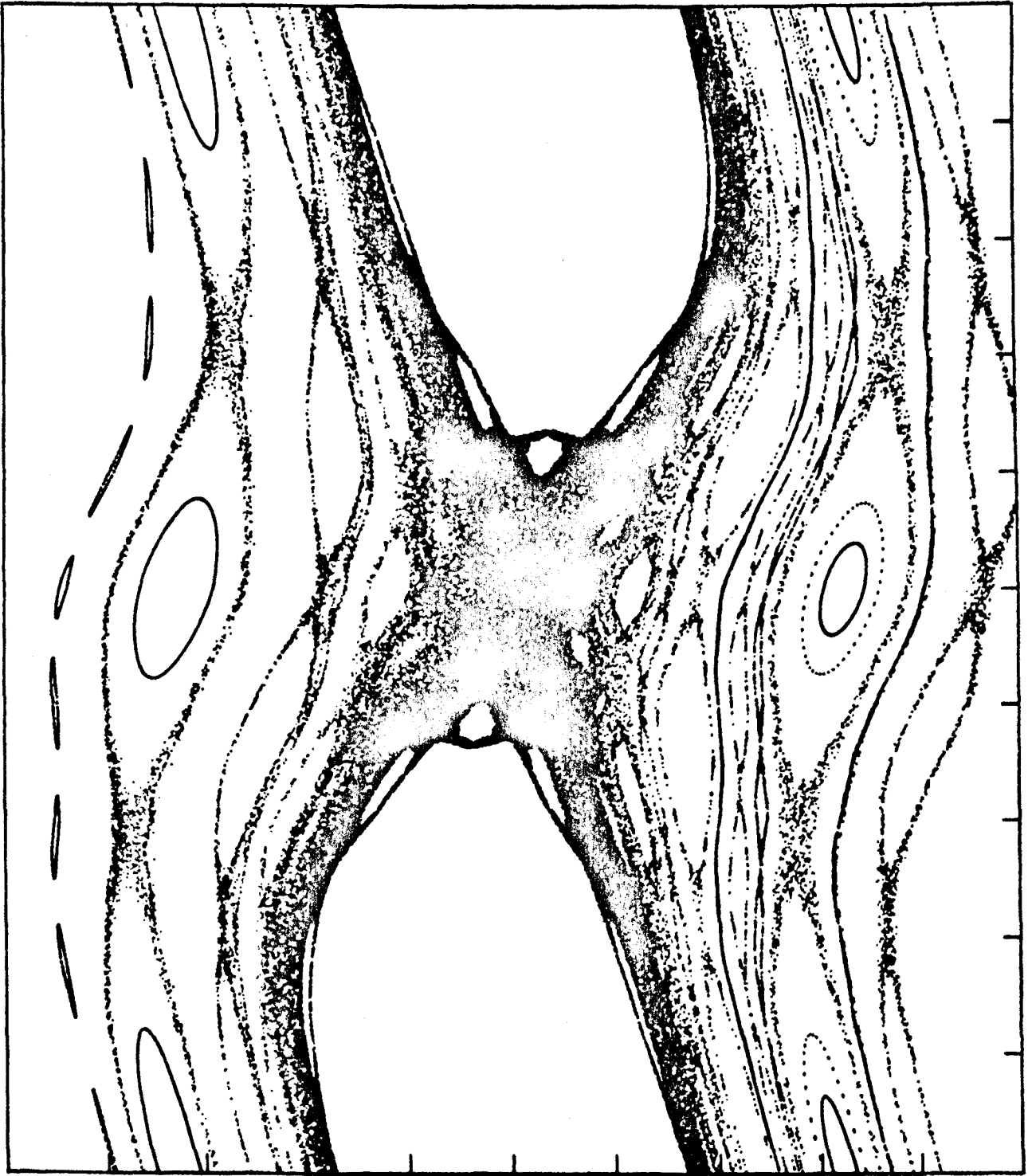


Figura 4.7

Fig.	$t_0$	N	Resultat
4.1	45	2000	corba invariant
	42	2000	corba invariant
	40	2000	zona estocàstica gruixuda
	*40	1000	1 illa
	35	1000	zona estocàstica que es junta amb l'anterior
	30	1058	zona estocàstica que es junta amb l'anterior i després escapa.
	4.2	175	2000
170		5000	16 illes
165		5000	zona estocàstica
160		5000	zona estocàstica molt petita
155		5000	zona estocàstica petita
150		5000	zona estocàstica
140		22338	zona estocàstica gran que escapa
4.3	175	2000	corba invariant
	172	10000	zona estocàstica
	*172	2000	1 illa
	170	5000	16 illes
	168	5000	2 illes
	167	5000	8 illes
	*166	2000	8 illes
	165	10000	zona estocàstica
	162	5000	corba invariant
	161	1000	2 illes
	160	10000	zona estocàstica molt petita
	159	5000	zona estocàstica petita
	158	5000	zona estocàstica
	155	10000	zona estocàstica
	150	10000	zona estocàstica
	149	5000	zona estocàstica
	148	1000	2 illes
145	20000	zona estocàstica que es junta amb la de 149 i que baixa de 140 (possible escapament)	



Fig.	$t_0$	N	Resultat
	400	100000	zona estocàstica entre 320 i 500
4.4	200	100000	zona estocàstica que solapa amb l'anterior i baixa fins a 70.
	775	4000	corba invariant
	750	4000	3 illes
	725	2000	corba invariant
	700	2000	zona estocàstica
	675	5000	zona estocàstica
4.5	650	2000	23 illes
	625	5000	zona estocàstica
	600	10000	zona estocàstica
	575	2000	2 illes
	562	10000	zona estocàstica
	550	2000	2 illes
	525	10000	zona estocàstica gruixuda
	645	5000	zona estocàstica
	640	5000	18 illes
	637.5	5000	zona estocàstica petita
	635	5000	2 illes
	632.5	5000	zona estocàstica
	630	5000	zona estocàstica molt petita
	627.5	5000	53 illes
4.6	625	5000	zona estocàstica
	622.5	5000	zona estocàstica
	620	5000	zona estocàstica
	617.5	5000	4 illes
	615	5000	2x8 illes
	613	5000	zona estocàstica
	610	5000	zona estocàstica
	605	5000	zona estocàstica

Fig.	$t_0$	N	Resultat
	629.5	3000	8 illes
	629	3000	zona estocàstica
	628	3000	2 illes
	627	3000	zona estocàstica
	625	55000	zona estocàstica gran
	623.5	1000	zona estocàstica petita
	623.2	1000	zona estocàstica
4.7	623	5000	zona estocàstica molt petita ~ corba invariant
	622.8	1000	zona estocàstica
	622.6	2000	zona estocàstica petita
	622	5000	2 illes
	621.5	1000	2 illes
	621.2	2000	zona estocàstica
	621	5000	zona estocàstica molt petita
	620.5	2000	zona estocàstica

\*)  $\theta_0=1$  .

Taula 4.2

### 4.3. Aplicació astronòmica.

Anem a treure conseqüències de l'estudi que hem fet. Usem el valor  $t_0 = (3\pi/0.98)^{2/5} B^{3/5}$  com a límit de la zona de captura-escapament. Desfent l'escalat, tenim  $\rho_0 = \epsilon t_0 = (6\pi^2/0.98)^{2/5} C^{1/5} m^{2/5} \exp(-C^3/60)/8$  i, per tant, el semieix serà  $a_0 = C/(8\rho_0) = (0.98/6\pi^2)^{2/5} C^{4/5} m^{-2/5} \exp(C^3/60)$ .

Fem una aplicació al cas del sistema solar aproximat per Sol-Júpiter ( $m \sim 10^{-3}$ ) i considerem el cos de massa menyspreable com un cometa. Destaquem que l'anàlisi feta fins ara no permet d'estudiar cometes que passin prop del Sol. Estan confinats per la corba de velocitat zero exterior i, per tant, la mínima distància al Sol és més gran que la distància de Júpiter al Sol. Per a fer l'estudi en el cas de cometes que s'apropen molt al Sol, cal usar valors de C menors, les eines analítiques per a estudiar la transversalitat de les varietats invariants de l'òrbita periòdica de l'infinít semblen molt més complicades (en particular, cal tenir compte en les possibles col.lisions). D'altra banda, les eines geomètriques són idèntiques. La taula 4.3 dóna el valor de  $a_0$  expressat en unitats adimensionals i en unitats astronòmiques (semieix de Júpiter=5.2056 u.a.) i el valor del període corresponent.

El significat del període	C	$a_0$	$a_0$ (u.a.)	període (anys)
és el següent: quan hom detecta un cometa i es determinen els seus elements orbitals, es pot calcular el període, si la seva òrbita és el·líptica (generalment d'elevada excentrici	4	27.065	140.806	1670.8
	4.5	46.737	243.154	3791.6
	5	89.426	465.247	10035.2
	5.5	192.337	1000.64	31653.3
	6	471.51	2453.06	121496

Taula 4.3

tat). Pel que sabem, el fet que l'òrbita sigui localment el·líptica no vol dir que no pugui escapar, degut a l'efecte del tercer cos, Júpiter (encara que , com en el cas que estudiem, passi lluny d'ell). Llavors, el "període" no té cap significat, donat que després de cert nombre de revolucions pot escapar i que mentrestant els successius "períodes" poden tenir notables variacions.

Per cloure aquest apartat cal fer esment de 3 qüestions:

a) Les conclusions obtingudes ho han estat a partir del model. Caldria verificar que, per a valors grans de  $t$ , l'aplicació usada és encara una bona aproximació.

b) L'aplicació s'ha obtingut usant el valor de  $\epsilon$  obtingut teòricament. Aquesta és una expressió asimptòtica vàlida per a  $C$  gran. Com es mostra a [21] , per a valors petits de  $C$ , l'angle real de tall és molt més gran que el donat en l'estimació asimptòtica, tal cosa fa que les estimacions del "període sense sentit" sigui més dràstiques i es redueixen, a la pràctica, els valors donats en la taula 4.3.

c) Per a cometes apropant-se al Sol cal suposar que, excepte en el cas de certes resonàncies, l'efecte de Júpiter sigui més fort i el valor del "període sense sentit" sigui més petit . (Noti's que l'efecte de la resta dels planetes és relativament petit, excepte si hi ha passos prop de col·lisió i que, fins i tot per a semieixos de 6000 u.a., l'efecte dels cossos de fora del sistema solar és menyspreable). Així, quan Arthur C. Clarke en la seva obra "En el cometa" ( [11] ) parla d'un cometa de període 2 milions d'anys incorre en un greu error dinàmic, degut al seu desconeixement dels fenòmens homoclínics.

Apèndix. Coeficients  $\alpha_k^{(n)}$  i  $\beta_k^{(n)}$  ( $n \geq 0, k = n(-2)0$ ).

Definicions.

$$C_n^{(3/2)}(-\cos\theta) = \sum_{k=n(-2)0} \alpha_k^{(n)} \cos(k\theta), \quad C_n^{(1/2)}(-\cos\theta) = \sum_{k=n(-2)0} \beta_k^{(n)} \cos(k\theta).$$

Taules de valors.

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0		1				
1			-3			
2		$\frac{9}{4}$		$\frac{15}{4}$		
3			$-\frac{45}{8}$		$\frac{35}{8}$	
4		$\frac{225}{64}$		$\frac{105}{16}$		$\frac{315}{64}$

Taula de  $\alpha_k^{(n)}$ .

$n$	$k$	0	1	2	3	4	5
0		1					
1			-1				
2		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$			
3			$-\frac{3}{8}$		$-\frac{5}{8}$		
4		$\frac{9}{64}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{35}{64}$	
5			$-\frac{15}{64}$		$-\frac{35}{128}$		$-\frac{63}{128}$

Taula de  $\beta_k^{(n)}$ .

Propietats.

$$2\alpha_0^{(2n)} - \alpha_2^{(2n)} = -2\beta_1^{(2n+1)}.$$

$$\frac{\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{2n} = -\beta_n^{(n)} = (-1)^{n+1} 2 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

$$\frac{\alpha_{n-1}^{(n+1+2r)} - \alpha_{n+1}^{(n+1+2r)}}{2n} = -\beta_n^{(n+2+2r)}.$$

CAPÍTOL III.

ORBITES PARABOLIQVES DE  
COL.LISIO EN EL PROBLEMA  
RESTRINGIT AMB  $m \sim 0$ .



## 2. Equació de la variació de l'energia de la binària.

Les coordenades adequades per a començar l'anàlisi d'aquestes òrbites són les cartesianes heliocèntriques, que notem per X i Y.

La conservació de l'energia sinòdica s'expressa en variables heliocèntriques sinòdiques per:

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2) - (x+m)p_y + yp_x - (1-m)/r - m/r_2 = -C/2 ,$$

essent C la constant de Jacobi ,  $r^2 = x^2 + y^2$  i  $r_2^2 = (x+1)^2 + y^2$ ; i, en heliocèntriques sidèries, per:

$$\frac{1}{2}(p_X^2+p_Y^2) - ((X+m\cos t)p_Y - (Y+m\sin t)p_X) - (1-m)/R - m/R_2(t) = -C/2 ,$$

amb  $R^2 = X^2 + Y^2$  i  $R_2^2(t) = (X + \cos t)^2 + (Y + \sin t)^2$ . Aquesta expressió s'obté a partir de l'anterior, usant les relacions entre les coordenades i moments d'ambdós sistemes de referència.

Fent servir les equacions del moviment en el sistema sideri:

$$\dot{X} = p_X + m\sin t , \quad \dot{Y} = p_Y - m\cos t ;$$

la relació anterior s'escriu en funció de la velocitat sidèria  $(\dot{X}, \dot{Y})$  com:

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - (X\dot{Y} - Y\dot{X}) - m(X\cos t + Y\sin t) - \frac{1}{2}m^2 - (1-m)/R - m/R_2(t) = -C/2 \quad (2.1)$$

Es defineix l'energia de la binària (partícula-primari de massa 1-m):

$$h = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - (1-m)/R .$$

Notem que, en la col·lisió, aquesta expressió té sentit encara que ambdós sumands esdevinguin singulars. Usant (2.1), tenim que:

$$h + C/2 = X\dot{Y} - Y\dot{X} + m(X\cos t + Y\sin t) + \frac{1}{2}m^2 + m/R_2(t) . \quad (2.2)$$



L'observació final de la secció I.3 assegura que  $X\dot{Y}-Y\dot{X}=0$  en la col·lisió. D'on, h en la col·lisió val:  $h = h_0 = m + \frac{1}{2}m^2 - C/2$ .

Notarem ara les coordenades cartesianes en el sistema baricèntric sideri per  $X_b$  i  $Y_b$ . Per a les òrbites parabòliques en l'infinit,  $X_b=Y_b=\infty$ , es té  $\dot{X}_b=\dot{Y}_b=0$ ; això és,  $X=Y=\infty$  i  $\dot{X}=-m\text{sint}$ ,  $\dot{Y}=-m\text{cost}$ . Per tant, l'energia h d'aquestes òrbites en l'infinit valdrà:  $h = h_\infty = \frac{1}{2}m^2$ .

La variació total de l'energia de la binària per a les òrbites parabòliques de col·lisió ha d'ésser:  $\Delta h = h_\infty - h_0 = C/2 - m$ .

D'altra banda, pot trobar-se una expressió per a la variació de l'energia de la binària al llarg d'una òrbita. Derivant (2.2) i usant les equacions del moviment, tenim:

$$\dot{h} = m(\dot{X}\text{cost} + \dot{Y}\text{sint} - (X\dot{X} + Y\dot{Y} + X\text{cost} + Y\text{sint})/R_2^3(t)) \quad (2.3)$$

En efecte:

$$\dot{h} = X\ddot{Y}-Y\ddot{X}+m(\dot{X}\text{cost}+\dot{Y}\text{sint}-(X\text{sint}-Y\text{cost})+\frac{d}{dt}(1/R_2(t))), \quad (2.4)$$

$$\ddot{X} = -(1-m)X/R^3 - m(X+\text{cost})/R_2^3(t) + m\text{cost},$$

$$\ddot{Y} = -(1-m)Y/R^3 - m(Y+\text{sint})/R_2^3(t) + m\text{sint}; \text{ d'on:}$$

$$X\ddot{Y}-Y\ddot{X} = m((X\text{sint}-Y\text{cost})(1-1/R_2^3(t))) \text{ i}$$

$$\frac{d}{dt}(1/R_2(t)) = -((X\dot{X}+Y\dot{Y})+(\dot{X}\text{cost}+\dot{Y}\text{sint})+(Y\text{cost}-X\text{cost}))/R_2^3(t),$$

que substituïdes en (2.4) donen (2.3).

Per tant,

#### PROPOSICIO

Les òrbites parabòliques de col·lisió del problema restringit acompleixen l'equació:

$$\int_0^\infty \dot{h}(X(t), Y(t)) dt = C/2 - m \quad (2.5)$$

amb  $\dot{h}$  donada per (2.3), essent  $(X(t), Y(t))$  l'expressió de l'òrbita en coordenades heliocèntriques sideries.

Si  $m$  es suficientment petit, existeixen òrbites del problema restringit que són petites pertorbacions de les del problema amb  $m=0$ , sempre que no passin massa a prop de la col.lisió:

$$(X(t), Y(t)) = (X_0(t), Y_0(t)) + m(X_1(t), Y_1(t)) + o(m) .$$

Estem interessats en òrbites d'aquest tipus que siguin parabòliques de col.lisió del problema restringit, essent  $(X_0(t), Y_0(t))$  les òrbites parabòliques de col.lisió del problema no pertorbat.

#### PROPOSICIO

Les possibles òrbites parabòliques de col.lisió del problema restringit amb  $m \neq 0$  que siguin petites pertorbacions d'òrbites parabòliques de col.lisió del problema giratori de Kepler hauran de sortir amb un angle  $\theta_0$ , respecte a la posició del secundari en  $t=0$ , que aconpleixi:

$$G(\theta_0) - F(\theta_0) = C/2m - 1 + o(1) , \quad (2.6)$$

$$\text{amb } G(\theta_0) = \int_0^\infty \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}R^{3/2} - \theta_0\right) dR \quad \text{i} \quad F(\theta_0) = \int_0^\infty \frac{(R + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}R^{3/2} - \theta_0\right)) dR}{(R^2 + 2R\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}R^{3/2} - \theta_0\right) + 1)^{3/2}} .$$

#### Demostració.

Tenim  $\dot{X}\cos t + \dot{Y}\sin t = \dot{R}\cos(t - \theta_0)$  i  $X\dot{X} + Y\dot{Y} = R\dot{R}$ , ja que  $\theta$  és constant;  $R_2^2(t) = R^2 + 2R\cos(t - \theta_0) + 1$  i  $t = \frac{\sqrt{2}}{3}R^{3/2}$ . Llavors, les fórmules de la proposició s'obtenen substituint aquestes en (2.3) i aquesta en (2.5), canviant la variable d'integració  $t$  per  $R$ .

Notem que  $F$  té una singularitat en  $\theta_0^* = \pi + \frac{\sqrt{2}}{3}$ . Per a valors de  $\theta_0$  prop de  $\theta_0^*$  no valdrà aquest estudi; les pertorbacions no podran considerar-se petites.

Les òrbites en qüestió s'obtinran només per a valors de  $C$  que són  $O(m)$ . L'estudi de l'equació (2.6) ens dirà quantes òrbites hi haurà a mesura que variï  $C$ .

### 3. Càlcul de les funcions F i G. i conclusions.

La funció G té una dependència molt senzilla en  $\theta_0$ , usant ([15];pg 399):

$$G(\theta_0) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta_0\right) \quad , \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1.351170394\dots$$

Davant la impossibilitat de trobar una expressió senzilla per a  $F(\theta_0)$ , no ha sigut possible tampoc de deduir-ne propietats interessants cara a l'obtenció de resultats rigorosos. S'ha optat finalment per obtenir F numèricament, per a una xarxa de valors de  $\theta_0$ . Els resultats corresponents no tindran demostracions rigoroses; es disposa només d'evidències numèriques que reforcen la seva veracitat.

Les integrals  $F(\theta_0)$  presenten certes dificultats a primera vista; es tracta d'integrals impròpies de 2ª espècie (interval infinit) de funcions amb oscil·lacions ràpides (observi's que l'argument en el cosinus de l'integrand tendeix a infinit ràpidament quan ho fa la variable d'integració). Les dites integrals poden calcular-se sense dificultat en intervals finits (no massa grans), usant fórmules de Newton-Còtes, per exemple. La integral a la resta de l'interval podrà calcular-se trobant-ne un desenvolupament asimptòtic. És a dir, farem:

$$F(\theta_0) = F_0(R_0; \theta_0) + F_\infty(R_0; \theta_0) \quad \text{amb} \quad F_0(R_0; \theta_0) = \int_0^{R_0} f(R; \theta_0) dR \quad i$$

$$F_\infty(R_0; \theta_0) = \int_{R_0}^{\infty} f(R, \theta_0) dR; \text{ essent } f(R, \theta_0) \text{ l'integrand en la definició de } F.$$

$F_0$  es calcularà pel mètode de Simpson i s'obtindrà un desenvolupament asimptòtic de  $F_\infty$ , quan  $R_0 \rightarrow \infty$ .

Desenvolupament asimptòtic de  $F_\infty(R_0; \theta_0)$ .

Les sèries de McLaurin de  $g_c\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{c}{R}\right) \left(1 + \frac{2c}{R} + \frac{1}{R^2}\right)^{-3/2}$ ,  $c \in [-1, 1]$  es donen a contiunació:

$$g_c\left(\frac{1}{R}\right) = \sum_{j>0} \frac{(2j+1)!!!}{(2j)!!!} \sum_{k=0}^j \frac{2^k c^k}{R^{2j-k+2}} \left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

Fent  $c = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} R^{3/2} - \theta_0\right)$  i integrant terme a terme, tenim:

$$F_\infty(R_0; \theta_0) = \sum_{j>0} \frac{(2j+1)!!!}{(2j)!!!} \sum_{k=0}^j 2^k \int_{R_0}^{\infty} \frac{c^k (1+c/R) dR}{R^{2j-k+2}}.$$

Afitem el reste  $J$ -ésim  $R^{(J)}(R_0; \theta_0)$ :

$$\begin{aligned} |R^{(J)}(R_0; \theta_0)| &< \sum_{j>J} \frac{(2j+1)!!!}{(2j)!!!} \sum_{k=0}^j 2^k \int_{R_0}^{\infty} \frac{(1+1/R) dR}{R^{2j-k+2}} = \\ &= \sum_{j>J} \frac{(2j+1)!!!}{(2j)!!!} \sum_{k=0}^j 2^k \left( \frac{1}{2^{j-k+1}} \frac{1}{R_0^{2j-k+1}} + \frac{1}{2^{j-k+2}} \frac{1}{R_0^{2j-k+2}} \right) \\ &< \sum_{j>J} \frac{(2j+1)!!!}{(2j)!!!} \frac{2^j}{R_0^{j+1}} \left(1 + \frac{1}{R_0}\right) \leq \frac{(2J+1)!!!}{(2J)!!!} \frac{2^J}{R_0^{J+1}} \frac{1+1/R_0}{1 - \frac{2J+1}{2J} \frac{2}{R_0}}. \end{aligned}$$

Notem que  $||R^{(5)}(100, \theta_0)||_{\infty} < 10^{-10}$ .

La suma dels 5 primers termes serà asimptòticament:

$$\int_{R_0}^{\infty} \left( R^{-2} - 2cR^{-3} + \left(\frac{9}{2}c^2 - \frac{3}{2}\right)R^{-4} - (10c^3 - 6c)R^{-5} + \left(\frac{175}{8}c^4 - \frac{75}{4}c^2 + \frac{15}{8}\right)R^{-6} \right) dR.$$

Es fàcil, però pesat, veure que la resta de termes que no apareixen en l'expressió anterior poden afitar-se en conjunt per  $10^{-10}$ , si  $R_0=100$ .

Fent servir les relacions entre les potències del cosinus d'un angle i els cosinus de múltiples d'aquest angle, tenim:

$$F_{\infty}(R_0; \theta_0) \sim R_0^{-1} + 4R_0^{-3} + \frac{9}{64}R_0^{-5} - (2I_3^{(1)} + \frac{3}{2}I_5^{(1)}) + (\frac{9}{4}I_4^{(2)} + \frac{25}{16}I_6^{(2)}) - \frac{5}{2}I_5^{(3)} + \frac{175}{64}I_6^{(4)}, \quad (3.1)$$

$$\text{amb } I_m^{(k)}(R_0; \theta_0) = \int_{R_0}^{\infty} \frac{\cos(k(\frac{\sqrt{2}}{3}R^{3/2} - \theta_0))}{R^m} dR.$$

Usant la variable d'integració  $T = \frac{\sqrt{2}}{3}R^{3/2}$  :

$$I_m^{(k)}(R_0; \theta_0) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{3})^{\alpha_m} \int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos(k(T - \theta_0))}{T^{\alpha_m}} dT,$$

$$\text{amb } \alpha_m = \frac{2}{3} + 1 \quad \text{i} \quad T_0 = \frac{2}{3}R_0^{3/2},$$

LEMA

Les integrals  $\int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos(k(T - \theta_0))}{T^{\alpha}} dT$  tenen el desenvolupament asimptòtic

$$\begin{aligned} & \cos(k(T_0 - \theta_0)) \left( \frac{\alpha}{k^2 T_0^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{k^4 T_0^{\alpha+1}} + \dots \right) - \\ & - \sin(k(T_0 - \theta_0)) \left( \frac{1}{k T_0} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{k^3 T_0^{\alpha+2}} + \dots \right). \end{aligned}$$

L'error al prendre  $j$  termes és més petit en valor absolut que 2 vegades

$$\epsilon_j = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+j-1)}{k^{j+1} T_0^{\alpha+j}}.$$

Demostració.

El desenvolupament asimptòtic s'obté per integració per parts successiva. El reste  $j$ -èsim és, en valor absolut, menor que

$$\frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+j-1)}{k^j} \int_{T_0}^{\infty} \frac{dT}{T^{\alpha+j}} = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+j-2)}{k^j T_0^{\alpha+j-1}};$$

o sigui, més petit que el coeficient de la funció trigonomètrica del terme  $j$ -èsim, en valor absolut. Si prenem  $j+1$  termes l'error serà menor que  $\epsilon_j$ ; si en prenem només  $j$ , l'error serà com a màxim  $2\epsilon_j$ , ja que el terme  $j+1$  està fitat també per  $\epsilon_j$ .

Fent ara ús del lema en l'expressió (3.1), amb  $R_0=100$ , tenim:

$$\frac{175}{64} \|I_6^{(4)}\|_\infty < \frac{175}{32} \sqrt{2} \frac{10^{-13}}{4} < 10^{-12}, \quad \frac{5}{2} \|I_5^{(3)}\|_\infty < 5\sqrt{2} \frac{10^{-11}}{3} < 2.3 \cdot 10^{-11},$$

$$\frac{25}{16} \|I_6^{(2)}\|_\infty < \frac{25}{8} \sqrt{2} \frac{10^{-13}}{2} < 10^{-12}, \quad \frac{3}{2} \|I_5^{(1)}\|_\infty < 3\sqrt{2} \cdot 10^{-11} < 4.5 \cdot 10^{-11},$$

$$\frac{9}{4} I_4^{(2)} = -\frac{9\sqrt{2}}{8} \cdot 10^{-9} \sin\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 10^3 - \theta_0\right)\right) + e_2,$$

$$-2I_3^{(1)} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 10^3 - \theta_0\right) - 14 \cdot 10^{-10} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 10^3 - \theta_0\right) + e_1;$$

amb  $\|e_2\|_\infty < 2 \frac{9\sqrt{2}}{8} 10^{-9} \frac{3}{2} \frac{3}{\sqrt{2} 100} < 1.1 \cdot 10^{-9}$  i

$$\|e_1\|_\infty < 2 \cdot 14 \cdot 10^{-10} \frac{10}{3} \frac{3}{\sqrt{2} 100} < 2 \cdot 10^{-11}.$$

Observem també que els únics termes del desenvolupament asimptòtic, quan  $R_0 \rightarrow \infty$  de  $F_\infty(R_0; \theta_0)$  són els considerats efectivament fins ara. Es a dir:

PROPOSICIÓN

$$F_\infty(R_0; \theta_0) \sim \frac{1}{R_0} + \frac{1}{4R_0^3} + \frac{2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} R_0^{3/2} - \theta_0\right)}{R_0^{7/2}} - \frac{9\sqrt{2} \sin\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{3} R_0^{3/2} - \theta_0\right)\right)}{8R_0^{9/2}} + \frac{\frac{9}{64} - 14 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} R_0^{3/2} - \theta_0\right)}{R_0^5} + o(R_0^{11/2}). \quad (3.2)$$

A més, si  $R_0=100$ , aquest desenvolupament dóna  $F_\infty(100; \theta_0)$  amb un error me or que  $\frac{1}{2} 10^{-9}$ .

Taula de G-F+1 i representació gràfica.

S'ha fet una taula de la funció G-F+1 en 19 punts equiespaiats :  
 $\theta_0^{(k)} = \theta_0^* + \frac{k\pi}{10}$  ( $k=1+19$ ) en  $(\theta_0^*, \theta_0^* + 2\pi)$ , usant la fórmula (3.2) per a  $F_\infty(100; \theta_0)$  i el mètode de Simpson en el càlcul de  $F_0(100; \theta_0)$ . El mètode de Simpson s'ha usat sempre amb passos  $h$  i  $h/2$  suficientment petits de forma que els resultats de les integrals corresponents coincidissin almenys en les 10 primeres xifres decimals.

Donem a continuació la taula esmentada:

k	$(F-G+1)(\theta_0^{(k)})$	k	$(F-G+1)(\theta_0^{(k)})$
0	$\infty$	11	0.666972334
1	6.530586295	12	0.553438393
2	4.950044307	13	0.573198822
3	4.334197951	14	0.707325567
4	3.846243199	15	1.053905479
5	3.345809355	16	1.133343387
6	2.813817355	17	1.240144434
7	2.269520542	18	0.966883885
8	1.746919098	19	-0.786867071
9	1.283877162	20	$-\infty$
10	0.864315312		

i una representació gràfica en la figura 3.1.

Conclusió.

Numèricament s'observa que segons els valors de  $C=0(m)$  s'obtidran 1, 2 o 3 òrbites parabòliques de col.lisió, d'acord amb la representació gràfica donada. Noti's, però, que només hi ha més d'una òrbita d'aquest tipus per a una petita franja de valors de  $C$  aproximadament entre 1.1m i 2.5m.

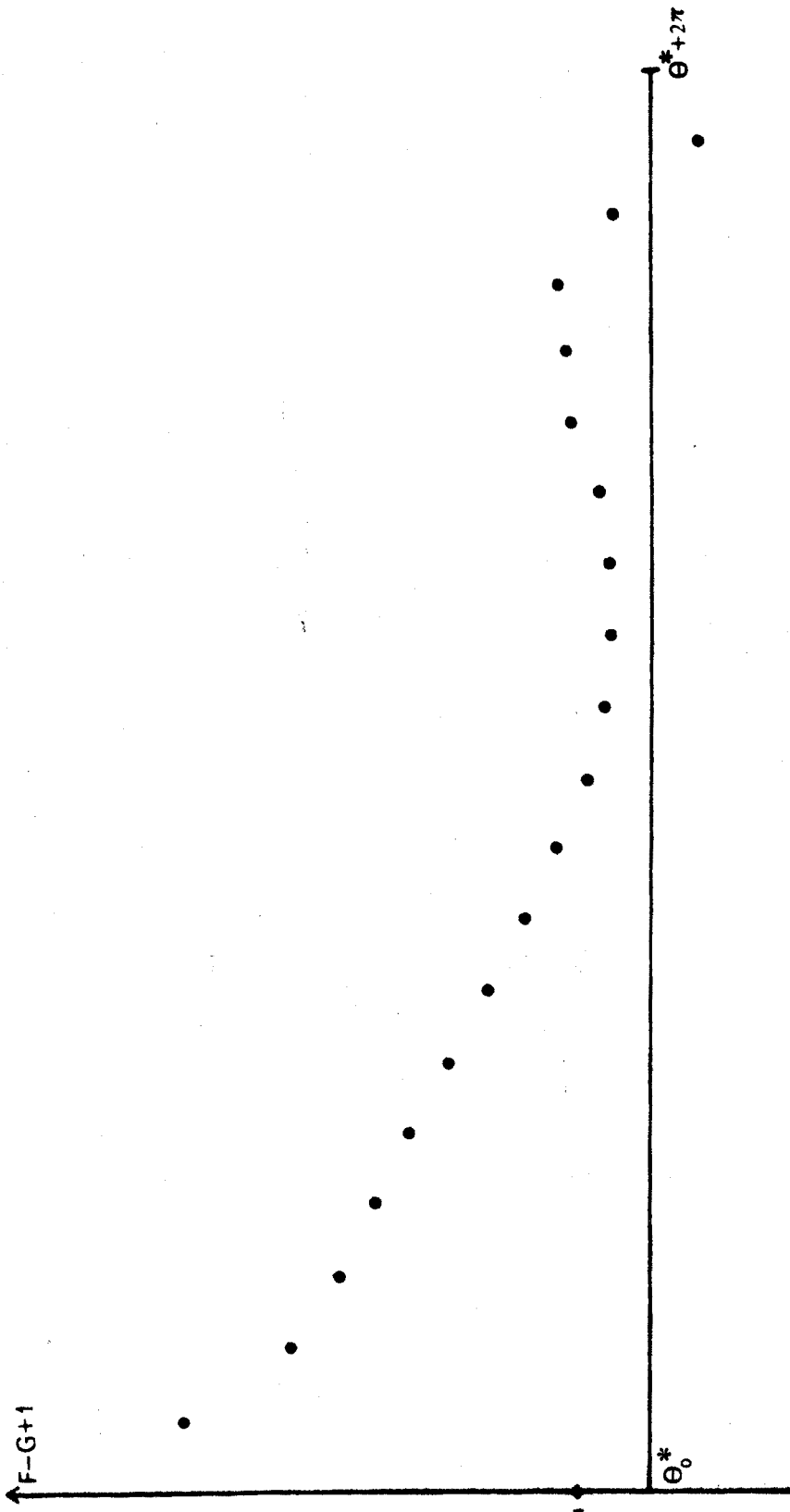


Figura 3.1



CAPÍTOL IV.

APROXIMACIO DELS PASSOS  
PROP DEL SECUNDARI PER  
ARCS D'ORBITES KEPLERIANES.

## 1. Introducció.

L'objectiu d'aquest capítol és el tractament aproximat de les òrbites del problema restringit amb  $m \ll 0$ , quan passen prop del secundari o col·lionen amb ell.

Les òrbites de tal problema que no passin a prop del secundari poden considerar-se com a pertorbacions de  $1^r$  ordre en  $m$  d'òrbites del problema giratori de Kepler creat pel primari de massa gran. El cas contrari és el d'interès en aquest capítol.

Per a estudiar-lo de forma aproximada:

a) Considerarem un arc d'òrbita del problema giratori de Kepler esmentat que passi a distància menor que  $m^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) del secundari i estudiarem l'ordre de pertorbació de l'arc d'òrbita del problema restringit amb les mateixes condicions inicials, en el  $1^r$  punt de contacte amb la circumferència  $C_\alpha$  centrada en el secundari i de radi  $m$ .

b) Analitzarem l'ordre de pertorbació en  $C_\alpha$  dels arcs d'òrbites del problema restringit en  $D_\alpha$  (disc de frontera  $C_\alpha$ ) front a arcs d'òrbites del problema de Kepler (creat pel secundari).

c) Deduirem el valor òptim de  $\alpha$  tal que la pertorbació dels arcs d'òrbites del problema restringit, front a arcs d'òrbites obtingudes empalmant en  $C_\alpha$  2 arcs d'òrbites del problema giratori de Kepler exteriors a  $C_\alpha$  amb un arc del problema de Kepler, tingui ordre més gran possible (segons  $m$ ).

d) Coneixent les característiques de l'arc d'entrada en  $C_\alpha$ , donarem les característiques aproximades de l'arc de sortida, mitjançant l'òrbita kepleriana en  $D_\alpha$ .

## 2. Ordre de pertorbació dels arcs d'òrbites exteriors a $C_\alpha$ .

Volem estudiar ací l'ordre de magnitud dels efectes de la pertorbació singular, deguda al secundari, sobre les òrbites del problema giratori de Kepler.

Escrivim primerament l'expressió asimptòtica de la integral de Jacobi, quan  $m \ll 0$  i la distància al secundari és petita:

La integral de Jacobi en els sistemes de referència sinòdics, emprant la velocitat sinòdica de mòdul  $v$ , pot expressar-se per:

$$v^2 = (1-m)(r_1^2 + 2/r_1) + m(r_2^2 + 2/r_2) - C,$$

essent  $r_1$  i  $r_2$  les distàncies als primaris. Quan  $m \ll 0$ ,

$$v^2 = v_1^2 + 2m/r_2 + O(m),$$

essent  $v_1^2 = r_1^2 + 2/r_1 - C$  (expressió de la integral de Jacobi per al problema giratori de Kepler), i que té la següent expressió prop del secundari:

$$v^2 = 3 - C + 2m/r_2 + 3r_2^2 \cos^2 \theta_2 + O(r_2^3) + O(m).$$

Estudiarem el problema restringit amb constant de Jacobi de la forma:  $C = 3 - m^\gamma$ , imposant les següents hipòtesis sobre  $\alpha$  i  $\gamma$ :

$$\alpha > 1/3, \quad \alpha + \gamma < 1, \quad 4\alpha + \gamma > 2. \quad (2.1)$$

Llavors:

$$v^2 = m^\gamma + 2m/r_2 + O(m^{2\alpha}) = (v_0 + \Delta v)^2, \quad (2.2)$$

on  $v_0 = m^{\gamma/2}$ ; a més, en  $C_\alpha$ :

$$v = v_0 (1 + m^{1-\alpha-\gamma} + O(m^{2(1-\alpha-\gamma)})).$$

Es a dir, sota les hipòtesis (2.1), els termes dominants de la pertorbació en el mòdul de la velocitat sinòdica en  $C_\alpha$  són deguts a la pertorba

ció singular. La velocitat en  $C_\alpha$  és asimptòticament  $m^{\gamma/2}$  i l'efecte relatiu de la pertorbació és de l'ordre de  $m^{1-\alpha-\gamma}$ .

Les pertorbacions en les posicions seran de l'ordre de

$$\int_{t_0}^t \Delta v(x_0(t), y_0(t)) dt,$$

essent  $\{(x_0(t), y_0(t)), t[t_0, t_\alpha]\}$  l'arc exterior parametrizat pel temps. Notem primerament que, per calcular l'ordre d'aquesta pertorbació, podem considerar  $t_0$  tan a prop de  $t_\alpha$  com vulguem i l'arc exterior pot pensar-se parametrizat segons  $r_2$  en un interval tan petit com vulguem  $[r_2^{(0)}, m^\alpha]$ , usant la condició tècnica que l'arc exterior tendeixi transversalment a  $C_\alpha$  formant un angle finit amb la tangent. Llavors, la integral anterior és del mateix ordre que:

$$\int_{r_2^{(0)}}^{m^\alpha} \Delta v(r_2) \frac{dt}{dr_2} dr_2;$$

de l'expressió (2.2) deduïm que  $\Delta v = O(m^{1-\gamma/2})/r_2$  i la condició tècnica implica que  $\frac{dt}{dr_2} = O(v_0^{-1}) = O(m^{-\gamma/2})$ .

D'on, l'ordre de la integral anterior és:

$$O\left(\int_{r_2^{(0)}}^{m^\alpha} \frac{m^{1-\gamma/2}}{m^{\gamma/2}} \frac{dr_2}{r_2}\right) = O(m^{1-\gamma} \ln m).$$

O sigui, sota les hipòtesis (2.1), l'efecte relatiu de les pertorbacions en les posicions dels arcs exteriors a  $C_\alpha$  és de l'ordre de  $m^{1-\alpha-\gamma} \ln m$ .

### 3. Ordre de pertorbació dels arcs d'òrbites interiors a $C_\alpha$ .

Considerem el següent escalat de les variables de posició jovicèntriques sinòdiques  $(x,y)$  i del temps:

$$(x,y) = m^\alpha(\xi,\eta) , r_2 = m^\alpha \rho , ; t = m^\beta \tau , \text{ amb } \beta = \alpha - \gamma/2 . \quad (3.1)$$

Notarem amb primes les derivades respecte a  $\tau$ .

Les equacions del problema restringit en variables  $(x,y)$ :

$$\ddot{x} - 2\dot{y}' = x + m - 1 - (1-m)(x-1)/r_1^3 - mx/r_2^3$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x}' = y - (1-m)y/r_1^3 - my/r_2^3 ,$$

es transformen en:

$$m^{\alpha-2\beta} \xi'' - 2m^{\alpha-\beta} \eta' = m^\alpha \xi - (1-m)(1 - (1-m^\alpha \xi)/r_1^3) - m^{1-2\alpha} \xi/\rho^3$$

$$m^{\alpha-2\beta} \eta'' + 2m^{\alpha-\beta} \xi' = m^\alpha \eta - (1-m)m^\alpha \eta/r_1^3 - m^{1-2\alpha} \eta/\rho^3 ,$$

i, com que  $r_1^{-3} = ((m^\alpha \xi - 1)^2 + m^{2\alpha} \eta^2)^{-3/2} = (1 - 2m^\alpha \xi + m^{2\alpha} \xi^2 + m^{2\alpha} \eta^2)^{-3/2} = 1 + 3m^\alpha \xi + O(m^{2\alpha})$

fa que  $1 - (1-m^\alpha \xi)r_1^{-3} = -2m^\alpha \xi + O(m^{2\alpha})$  ,

tenim:

$$\xi'' - 2m^\beta \eta' = 3m^{2\beta} \xi - m^{1-3\alpha+2\beta} \xi/\rho^3 + O(m^{\alpha+2\beta})$$

$$\eta'' + 2m^\beta \xi' = -m^{1-3\alpha+2\beta} \eta/\rho^3 + O(m^{\alpha+2\beta}) ,$$

i substituint  $\beta$ :

$$\xi'' - 2m^{\alpha-\gamma/2} \eta' = 3m^{2(\alpha-\gamma/2)} \xi - m^{1-\alpha-\gamma} \xi/\rho^3 + O(m^{3\alpha-\gamma})$$

$$\eta'' + 2m^{\alpha-\gamma/2} \xi' = -m^{1-\alpha-\gamma} \eta/\rho^3 + O(m^{3\alpha-\gamma}) .$$

Sota les hipòtesis (2.1) , aquest sistema pot considerar-se com una petita pertorbació del problema de Kepler, que en variables  $x,y,t$  és el problema de Kepler creat pel secundari:

$$\ddot{x} = -mx/r_2^3 , \quad \ddot{y} = -my/r_2^3 .$$

A més, degut a l'escalat (3.1),  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi'$  i  $\eta'$  són  $O(1)$  en  $C_\alpha$  i, per tant, podem afirmar que l'ordre de pertorbació en  $C_\alpha$  dels arcs en  $D_\alpha$  aproximats per arcs keplerians en les variables  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi'$  i  $\eta'$  és  $O(m^{\alpha-\gamma/2})$ .

Es a dir, els efectes relatius de les pertorbacions en posicions i velocitats dels arcs interiors a  $C_\alpha$  són de l'ordre de  $m^{\alpha-\gamma/2}$ .

#### 4. Distància al secundari d'empalme òptima.

La distància òptima  $m^\alpha$  d'empalme dels arcs d'òrbites exteriors i interior, haurà d'ésser aquella que faci l'error global d'ordre màxim (en  $m$ ).

Considerem els errors relatius en  $C_\alpha$  donats en les seccions anteriors; aquests disminueixen segons  $m^{1-\alpha-\gamma} \ln m$  per als arcs exteriors i augmenten segons  $m^{\alpha-\gamma/2}$  per als interiors, a mesura que disminueix  $\alpha$ , és a dir, si ens allunyem del secundari.

Com que, degut a que  $4\alpha+\gamma > 2$ , tenim que  $m^{1-\alpha-\gamma} < m^{\alpha-\gamma/2}$ , l'error total serà  $O(m^{1-\alpha-\gamma} \ln m)$ .

Donat  $\epsilon > 0$  i fixat el valor de  $\gamma$ , prenent  $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \frac{\gamma}{2}) + \frac{\epsilon}{2}$  tindrem errors relatius  $O(m^{1/2-3\gamma/4-\epsilon})$  per a les òrbites exteriors i  $O(m^{1/2-3\gamma/4+\epsilon/2})$  per a les interiors.

## 5. Òrbita d'empalme kepleriana.

La finalitat d'aquesta secció, com ja s'ha indicat, és donar les característiques d'una òrbita kepleriana (deguda al secundari) a la sortida de  $D_\alpha$ , coneixent les característiques a l'entrada; en particular, donarem la variació del moment angular sideri  $K$  al travessar  $D_\alpha$ , sempre sota les hipòtesis (2.1).

L'òrbita en qüestió tindrà per equació, en coordenades polars  $(r_2, \theta_2)$ :

$$r_2 = \frac{K_2^2/m}{1 + e_2 \cos(\theta_2 - \theta_0)},$$

on  $\theta_0$ ,  $e_2$  i  $K_2$  són, respectivament, el pericentre, l'excentricitat i el moment angular. Ací,  $e_2 = (1 + 2E_2 K_2^2/m)^{1/2}$ , essent  $E_2$  l'energia.

L'energia  $E_2$  es conserva en el moviment keplerian i val, per exemple en  $C_\alpha$ :  $E_2 \sim \frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2 - m^{1-\alpha} > 0$ ; per tant, el moviment serà sempre hiperbòlic.

Els angles de posició (respecte l'eix  $x$ ) a l'entrada i sortida de  $D_\alpha$ , que notem respectivament per  $\theta_e$  i  $\theta_s$ , han d'acomplir:

$$m^\alpha = \frac{K_2^2/m}{1 + e_2 \cos(\theta_s - \theta_0)} = \frac{K_2^2/m}{1 + e_2 \cos(\theta_e - \theta_0)};$$

per tant,  $\theta_s - \theta_0 = \theta_0 - \theta_e$  i  $\theta_s = \theta_e + 2(\theta_0 - \theta_e)$ ; d'on:

$$\theta_s = \theta_e + \operatorname{sgn}(K_2) 2 \arccos((K_2^2 m^{-(1+\alpha)} - 1)/e_2). \quad (5.1)$$

Siguin  $\psi_e$  i  $\psi_s$  els angles a l'entrada i sortida de  $D_\alpha$  de l'òrbita kepleriana amb la direcció radial sortint del secundari. La conservació del moment angular al llarg de l'òrbita fa que:



$$m^\alpha v_e \sin \Psi_e = m^\alpha v_s \sin \Psi_s ,$$

essent  $v_e$  i  $v_s$  les velocitats respectives a l'entrada i sortida. Fent servir l'expressió (2.2) de la integral de Jacobi, veiem que aquestes velocitats són iguals a  $v_0$ , en primera aproximació; per tant:

$$\Psi_e + \Psi_s \sim \pi. \quad (5.2)$$

El moment angular sideri en coordenades jovicèntriques té la següent expressió:  $K = (x+m-1)p_y - yp_x$ ; usant les relacions entre moments i velocitats jovicèntriques tindrem en  $C_\alpha$ :

$$K \sim 1 - \dot{y} = 1 - v \sin \Psi, \quad (5.3)$$

on  $\Psi$  és l'angle format per la tangent a l'òrbita amb l'eix  $x$  i  $v$  pot aproximar-se per  $v_0 = m^{\gamma/2}$ . En els punts d'entrada i sortida de  $C_\alpha$  tindrem

$$\Psi = \Psi_e = \theta_e + \Psi_e \quad \text{i} \quad \Psi = \Psi_s = \theta_s + \Psi_s .$$

Trobarem ara una relació aproximada entre els angles de posició, així com entre els moments angulars sideris, a l'entrada i sortida de  $C_\alpha$ . Aquestes s'obtinran usant les expressions (5.2) i (5.1) i aproximant  $K_2$  i  $e_2$ , tenint en compte les hipòtesis (2.1).

Caldrà distingir 2 casos:

$$\text{A) } |\sin \Psi_e| \gg 0(m^{1-\alpha-\gamma}).$$

$$\text{Tenim } e_2 \sim \frac{|\sin \Psi_e|}{m^{1-\alpha-\gamma}}, \quad K_2^2 m^{-(1+\alpha)} - 1 \sim \frac{\sin^2 \Psi_e}{m^{1-\alpha-\gamma}}, \quad \text{i llavors:}$$

$$\theta_s \sim \theta_e + \text{sgn}(\sin \Psi_e) 2 \arccos(|\sin \Psi_e|) = \theta_e + 2\Psi_e - \pi \quad \text{i}$$

$$\Psi_s = \theta_s + \Psi_s \sim \theta_e + 2\Psi_e - \pi + \pi - \Psi_e = \theta_e + \Psi_e = \Psi_e .$$

En aquest cas, notem que el secundari no desvia l'òrbita en primera aproximació: la variació de moment angular és pràcticament nul·la.

$$B) \quad |\sin \psi_e| = O(m^{1-\alpha-\gamma}).$$

$$\text{Fem } \sin \psi_e = S \cdot m^{1-\alpha-\gamma}; \text{ ara, } e_2 \sim (1+S^2)^{1/2}, \quad \frac{K_2^2}{m^{1+\alpha}} - 1 = O(m^{1-\alpha-\gamma}) - 1.$$

D'on:

$$\theta_s \sim \theta_e + \operatorname{sgn}(S) 2 \arccos(-(1+S^2)^{-1/2}) \quad i$$

$$\psi_s \quad \theta_s + \psi_s \sim \theta_e + \operatorname{sgn}(S) 2 \arccos(-(1+S^2)^{-1/2}) + \pi - \psi_e$$

$$\sim \psi_e + \operatorname{sgn}(S) 2 \arccos(-(1+S^2)^{-1/2}) + \pi;$$

degut a que  $\psi_e$  és petit.

Considerem la relació entre moments angulars:

$$K_s \sim 1 + v_0 \sin(\psi_e + \Delta) = 1 + v_0 \sin \psi_e \cos \Delta + v_0 \cos \psi_e \sin \Delta$$

$$1 + (1-K_e) \cos \Delta + (v_0^2 - (K_e - 1)^2)^{1/2} \sin \Delta, \quad ,$$

amb  $\Delta = \operatorname{sgn}(S) 2 \arccos(-(1+S^2)^{-1/2})$ .

Com que  $\sin \Delta = -2S/(1+S^2)$ ,  $\cos \Delta = (1-S^2)/(1+S^2)$  i  $|K_e - 1|$  és petit

front a  $v_0$ , tenim:

$$K_s \sim 1 + (1-K_e)(1-S^2)/(1+S^2) - 2v_0 S/(1+S^2).$$

Note que, quan  $S \rightarrow 0$  (col.lisió):

$$\theta_s \sim \theta_e + \pi \quad i \quad K_s \sim 2 - K_e.$$

Per contra, si  $S$  és gran, tindrem:

$$\psi_s \sim \psi_e \quad i \quad K_s \sim K_e,$$

d'acord amb A).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Abraham, R. i Marsden, J.E.: "Foundations of mechanics". 2<sup>a</sup> ed. Benjamin (1978).
- [2] Abramowitz, M. i Stegun, I.A.: "Handbook of mathematical functions". Dover (1965).
- [3] Alekseev, V.M.: Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps. Actes Congrès Intern. Nice (1970). Tome 2, 893-907. Gautier-Villars.
- [4] Alekseev, V.M.: Final motions in the three body problem and symbolic dynamics. Russ. Math. Surveys 36, 181-200 (1981).
- [5] Arnold, V.I.: Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. Russ. Math. Surveys 18, 85-191 (1963).
- [6] Arnold, V.I.: On a theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics. Ann. Math. Soc. Translations 61, 292-296 (1967).
- [7] Arnold, V.I.: "Les méthodes mathématiques de la mécanique classique". Mir (1976).
- [8] Arnold, V.I. i Avez, A.: "Problèmes ergodiques de la mécanique classique". Gautier-Villars (1967).
- [9] Chazy, J.: Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment. I. Ann. Ecole Norm. Sup. 39, 29-130 (1922).
- [10] Chirikov, B.V.: A universal instability of many-dimensional oscillators systems. Phys. Reports 52, 263-379 (1979).

- [11] Clarke, A.C.: "Relatos de diez mundos". Edhasa. Barcelona (1984).
- [12] Delshams, A: "Por qué la difusión de Arnold aparece genéricamente en los sistemas hamiltonianos con más de 2 grados de libertad". Tesis. Universitat de Barcelona (1983).
- [13] Devaney, R.L.: Singularities in classical mechanical systems. Progress in Math. 10, 211-333. Birkhauser (1981).
- [14] Erdélyi, A.: "Asymptotic expansions". Dover (1956).
- [15] Gradshteyn, I.S. i Ryzhik, I.M.: "Table of integrals, series and products". Academic Press (1967).
- [16] Greene, J.M.: J. Math. Phys. 20, 1183 (1979).
- [17] Hartman, P.: "Ordinary differential equations". Wiley (1969).
- [18] Katok, A.: Periodic and quasiperiodic orbits for twist maps. L.N. in Physics 179, 47-65 (1983).
- [19] Kolmogorov, A.N.: The general theory of dynamical systems and classical mechanics. Apèndix de [1] :
- [20] Levi-Civita, T: Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi. Ann. Math. (3) 9, 1 (1903).
- [21] Llibre, J. i Simó, C.: Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem. Math. Ann. 248, 153-184 (1980).
- [22] Llibre, J. i Simó, C.: Estudio qualitativo del problema de Sitnikov. Actas II CEDYA. Pub. de la Secció de Matemàtiques. U. A. B. 18, 49-71 (1980).
- [23] Mc Gehee, R.: A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics. J. Diff. Eq. 14, 70-88 (1973).

- [24] McGehee, R.: Triple collisions in the collinear three body problem. *Inv. Math.* 27, 191-227 (1974).
- [25] Moser, J.: On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Anad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.* 27-120 (1962).
- [26] Moser, J.: "Stable and random motions in dynamical systems". Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press (1973).
- [27] Poincaré, H.: "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" (3). Dover (1892).
- [28] Rüssmann, H.: Kleine nenner 1: Über invariante kurven differenzierbarer abbildungen eines kreisringes. *Nach. Akad. Wiss. Göttingen II, Math. Phys. Kl.* 67-105 (1970).
- [29] Siegel, C.L. i Moser, J.: "Lectures on celestial mechanics". Springer-Verlag (1971).
- [30] Smale, S.: Topology and mechanics (I,II). *Inv. Math.* 10: 305-331 , 11: 45-64 (1970).
- [31] Sotomayor, J.: "Lições de equações diferenciais ordinárias". Projeto Euclides. IMPA-CNPq (1979).
- [32] Sternberg, S.: "Celestial mechanics" (I,II). Benjamin-Cummings (1969).
- [33] Stiefel, E.L. i Scheifele, G.: "Linear and regular celestial mechanics. Springer-Verlag (1971).
- [34] Szebehely, V.: "Theory of orbits". Academic Press (1967).
- [35] Treve, Y.M.: A Jornada S.: "Topics in nonlinear dynamics". AIP Conf. Proced. 46. Ann. Inst. Phys. New York (1978).
- [36] Whittaker, E.T.: "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies". 4ª ed. Cambridge Univ. Press (1959).

- [37] Whittaker, E.T. i Watson, G.N.: "A course of modern analysis". 4 ed.  
Cambridge Univ. Press (1946).









