Apèndix B

Problemes i jocs de fallida

B.1 Introducció

Els jocs de fallida varen ser introduïts per O'Neill (1982) [60]. Aquest tipus de jocs recullen les anomenades situacions de fallida. La característica principal d'aquestes situacions és que una certa quantitat de diners ha de ser repartida entre uns demandants que presenten uns drets sobre aquesta quantitat i els quals conjuntament demanden més que el total disponible.

Un exemple de situació d'aquest tipus és el cas d'una empresa que fa fallida deixant uns deutes entre uns creditors que superen el seu patrimoni. O'Neill discuteix un exemple de situació de fallida presentada pel rabí Abraham Ibn Ezra a l'any 1140 A.C.: un home mor deixant quatre fills i quatre herències on assigna al primer fill la totalitat del patrimoni, al segon la meitat, al tercer una tercera part i al quart una quarta part. És evident, que no hi ha suficient per satisfer els drets dels quatre fills. Altres exemples de situacions de fallida es troben en el Talmud[1]. La qüestió és com hauria de ser distribuït el patrimoni entre els creditors.

O'Neill proposa una presentació formal del problema, assignant-li un joc cooperatiu. També proposa un mètode de repartiment al que anomena *recursive completion* que té com a característica principal la coincidència amb el valor de Shapley del joc cooperatiu associat.

Remarcar que Aumann i Maschler (1985) [8] també treballen amb els jocs de fallida, en concret estudien tres exemples de problemes de fallida

[1]El Talmud és un document de dos mil anys d'antiguitat que forma la base de la religió jueva, així com també de la llei criminal i civil. El Talmud està format per dos tipus de ensenyaments: el Mishna i el Gemara. El Mishna recull declaracions curtes de la llei i el Gemara recull comentaris sobre el Mishna pels rabins d'aquell temps.

presentats en el Talmud i estenen la solució donada a tots els problemes de fallida, demostrant que aquesta solució coincideix amb el nucleolus del corresponent joc de fallida.

Els problemes de fallida han estat àmpliament estudiats dins la literatura de la teoria de jocs cooperatius. En concret, molts d'aquests estudis es basen en cercar regles de distribució del patrimoni que satisfacin determinades propietats, són les anomenades regles de fallida. Alguns dels treballs que es basen en la caracterització axiomàtica de les regles presentades en el Talmud són els realitzats per Aumann i Maschler (1985) [8], Curiel, Maschler i Tijs (1987) [24], Chun (1988) [20], (1999) [21], Dagan (1996) [25], Dagan i Volij (1997) [26], Moulin (1987) [55] i Young (1987) [82], (1988) [83].

En aquest apèndix ens centrarem en presentar els problemes de fallida, així com també el joc de fallida associat per O'Neill. També discutirem les principals regles de fallida, basant-nos en el *survey* de Thomson (1995) [73] i observarem que algunes d'aquestes regles coincideixen amb conegudes solucions de la teoria de jocs cooperatius. Per últim, enunciarem els principals resultats obtinguts per a aquest tipus de jocs.

B.2 Definicions

En aquesta secció definirem formalment el problema de fallida, li associarem el joc de fallida formulat per O'Neill (1982) i ho il·lustrarem amb exemples. També definirem que s'entén per una regla de fallida.

Definició B.1. *Un* **problema de fallida** *és un parell* $(E, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N_+$ *on* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *és el conjunt de demandants,* $E \geq 0$ *el patrimoni a dividir entre els* n *demandants i on cadascun reclama una quantitat* $r_i \geq 0$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, tal que* $\sum_{i \in N} r_i \geq E$*.*

Notarem per BP^N la classe dels problemes de fallida.

Exemple B.2. Considerem el supòsit anterior presentat pel rabí Abraham Ibn Ezra. Suposem per exemple que el patrimoni deixat per l'home és de 120, així $E = 120$, els demandants serien els quatre fills, per tant, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, i les seves demandes serien respectivament $r_1 = 120$, $r_2 = 60$, $r_3 = 40$, $r_4 = 30$. Així, el parell $(120, (120, 60, 40, 30))$ correspon a un problema de fallida ja que el total de les demandes dels fills supera el patrimoni, és a dir, $\sum_{i=1}^{4} r_i = 30 + 40 + 60 + 120 > 120 = E$.

$\diamond$

Definició B.3. *Donat un problema de fallida* (E, r)*, el* **joc de fallida** *associat ve donat per* $(N, v_{E,r})$ *on el conjunt de jugadors* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *és el conjunt de demandants i* $v_{E,r}$ *és la funció característica tal que* $v_{E,r}(S) = \max\{0, E - \sum_{i \in N \setminus S} r_i\}$ *per a tota* $S \subseteq N$.

Observi's que la definició de joc de fallida és una valoració pessimista del què una coalició pot aconseguir, ja que $v(S)$ representa la quantitat del patrimoni que no és demandada pels membres que no pertanyen a S.

Exemple B.4. Si considerem el problema de fallida de l'exemple anterior $(120, (120, 60, 40, 30))$, aleshores el joc de fallida associat $(N, v_{E,r})$ ve donat per:

$$\begin{array}{llll} & v(12) = 50, & & \\ v(1) = 0, & v(13) = 30, & v(123) = 90, & \\ v(2) = 0, & v(14) = 0, & v(124) = 80, & v(1234) = 120. \\ v(3) = 0, & v(23) = 20, & v(134) = 60, & \\ v(4) = 0, & v(24) = 0, & v(234) = 0, & \\ & v(34) = 0, & & \end{array}$$

$\diamond$

Un cop definits formalment els problemes de fallida i els jocs de fallida, procedirem a resoldre la qüestió de com dividir el patrimoni entre els demandants. Les regles de divisió per a aquesta mena de problemes es coneixen amb el nom de regles de fallida.

Definició B.5. *Una* **regla de fallida** *és una funció* φ *que associa a cada problema de fallida* $(E, r) \in BP^N$ *una solució*

$$\varphi(E, r) = (\varphi_1(E, r), \varphi_2(E, r), \ldots, \varphi_n(E, r))$$

tal que

1. $\varphi_i(E, r) \geq 0$ *per a tot* $i \in N$.
2. $\sum_{i \in N} \varphi_i(E, r) = E$.

Observi's que una regla de fallida compleix l'eficiència. Noti's que si $E = 0$ aleshores $\varphi_i(E, r) = 0$ per a tot $i \in N$.

Aumann i Maschler (1985) consideren el següent exemple estret del Talmud.

Exemple B.6. Un home mor deixant tres mullers amb un contracte de casament cadascuna on s'especifica que en cas de mort haurien de rebre 100, 200 i 300 respectivament. Depenent de quina és la valoració del patrimoni el Talmud recomana una solució o una altra:

Patrimoni	Demandes	$\varphi(E,r)$
100	(100,200,300)	$(\frac{100}{3},\frac{100}{3},\frac{100}{3})$
200	(100,200,300)	(50,75,75)
300	(100,200,300)	(50,100,150)

Les recomanacions que fa el Talmud corresponen en el cas del patrimoni de 100 a la distribució igualitària i en cas del patrimoni de 300 a la distribució proporcional. Ara bé, si el patrimoni és de 200 la solució proposada sembla misteriosa. Increïblement, les tres propostes de solució coincideixen amb una coneguda solució dins la teoria de jocs cooperatius, el nucleolus.

$\diamond$

B.3 Regles de fallida

En aquesta secció presentarem diferents regles de fallida que són estudiades usualment dins la literatura dels problemes de fallida. L'objectiu final és identificar regles de repartiment que presentin un bon comportament.

- **Regla proporcional**, $P(E,r)$: la regla més usada és la regla proporcional als drets:

  $$P_i(E,r) = r_i \cdot \frac{E}{\sum_{k\in N} r_k}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

  on $\sum_{k\in N} r_k > 0$.

- **Regla proporcional als drets truncats**, $P^t(E,r)$: una versió de la regla proporcional als drets s'obté assignant proporcionalment als drets truncats pel patrimoni:

  $$P_i^t(E,r) = r_i^t \cdot \frac{E}{\sum_{k\in N} r_k^t}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

  on $r_k^t = \min\{r_k, E\}$.

- **Regla igualitària**, $EA(E,r)$: Aquesta regla distribueix a parts iguals el patrimoni:

$$EA_i(E,r) = \frac{E}{n}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

El principal problema que presenta aquesta regla és que alguns agents poden rebre més que al seu dret. Per evitar aquest problema, es defineix la següent regla.

- **Regla igualitària restringida**[2], $CEA(E,r)$: Aquesta regla preserva l'esperit de l'igualitarisme però assegura que cap dels agents rebi més que el seu dret:

$$CEA_i(E,r) = \min\{r_i,\lambda\}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

on λ és tal que $\displaystyle\sum_{i\in N} \min\{r_i,\lambda\} = E$.

- **Regla igualitària restringida de pèrdues**, $CEL(E,r)$: Aquesta regla és la dual de la $CEA(E,r)$, centrant-se en les pèrdues en què incorren els demandants enlloc de què obtenen:

$$CEL_i(E,r) = \max\{0, r_i - \lambda\}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

on λ és tal que $\displaystyle\sum_{i\in N} \max\{0, r_i-\lambda\} = E$.

- **Regla del Talmud** (Aumann i Maschler, 1985 [8]), $T(E,r)$: Aquesta regla va ser suggerida com una extensió d'una solució presentada en el Talmud a una situació de fallida. La seva filosofia de repartiment és la següent:

  – Si $\dfrac{r(N)}{2} \geq E$, aleshores $T_i(E,r) = \min\left\{\frac{r_i}{2},\lambda\right\}$ on λ és tal que $E = \sum_{i\in N} \min\left\{\frac{r_i}{2},\lambda\right\}$, i

  – si $\dfrac{r(N)}{2} < E$, aleshores $T_i(E,r) = r_i - \min\left\{\frac{r_i}{2},\lambda\right\}$ on λ és tal que $E = \sum_{i\in N}\left(r_i - \min\left\{\frac{r_i}{2},\lambda\right\}\right)$.

[2] Aquesta regla ha estat defensada per molts autors, entre ells Maimonides (s.XII) (veure Aumann i Maschler ,1985).

L'algorisme estableix que les primeres unitats es reparteixen a parts iguals fins que cada demandant hagi obtingut la meitat del dret més petit. De moment aquest demandant no rep res més. El següent pas és repartir fins que els demandants restants hagin obtingut la meitat del segon dret més petit. El procediment és anàleg fins que tots els demandants han rebut $\frac{r_i}{2}$. En cas que quedin unitats per repartir l'algorisme serà similar a l'anterior però pensant en termes de pèrdues. Així, les unitats restants es reparteixen a parts iguals de tal manera que tots els demandants presentin una pèrdua igual a la meitat del dret més petit. Arribats a aquest punt, si encara queden unitats addicionals per repartir es distribueixen a parts iguals.

- **Regla proporcional ajustada** (Curiel, Maschler i Tijs (1987) [24]), $AP(E,r)$: Aquesta regla assigna a cada jugador el seu mínim dret i el que resta ho distribueix proporcionalment considerant que els agents ja han rebut una part del seu dret i que aquesta no pot superar el patrimoni restant. Així,

$$A_i(E,r) = m_i(E,r) + P(E - \sum_{i\in N} m_i(E,r), r_i^*), \quad i = 1,2,\dots,n,$$

on $m_i(E,r) = \max\{E - \sum_{k\in N\setminus i} r_k, 0\}$ i $r_i^* = \min\{r_i - m_i(E,r), E - \sum_{i\in N} m_i(E,r)\}$.

- **Regla d'ordre aleatori** (O'Neill, 1982 [60]), $RO(E,r)$: La interpretació d'aquesta regla es basa en el fet de què els agents arriben en un determinat ordre i se'ls hi paga el seu dret o en cas contrari el que queda. Per obtenir la regla cal realitzar la mitjana dels possibles pagaments considerant tots els ordres possibles. Formalment, la regla d'ordre aleatori s'obté de:

$$RO_i(E,r) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in\Pi^N} \min\{r_i, \max\{E - \sum_{k\in P_i^\pi} r_k, 0\}\}$$

on Π^N representa la classe de les bijeccions d'N en si mateix i $P_i^\pi := \{k \in N \,/\, \pi(k) < \pi(i)\}$.

B.4 Teoremes bàsics per als problemes i jocs de fallida

En aquesta secció enunciarem els principals teoremes per als problemes i jocs de fallida[3]. Així, ens referirem a la convexitat, a l'existència de distribucions en el core i a la coincidència entre algunes de les regles de fallida presentades en la secció anterior i coneguts conceptes de solucions de la teoria de jocs cooperatius.

La classe dels jocs de fallida pertany a una classe més gran de jocs, la classe dels jocs convexos (Curiel, Maschler i Tijs (1987)).

Teorema B.7. *Sigui (E, r) un problema de fallida i $(N, v_{E,r})$ el joc de fallida associat. Aleshores, $(N, v_{E,r})$ és un joc convex.*

Del teorema anterior se'n desprenen dos corol·laris:

Corol·lari B.8. *Sigui (E, r) un problema de fallida i $(N, v_{E,r})$ el joc de fallida associat. Aleshores, $(N, v_{E,r})$ és un joc equilibrat, és a dir, $Core(v_{E,r}) \neq \emptyset$.*

Corol·lari B.9. *Sigui (E, r) un problema de fallida i $(N, v_{E,r})$ el joc de fallida associat. Aleshores, el valor de Shapley pertany al core de $v_{E,r}$.*

Totes les regles de fallida definides en la secció B.3, excepte la regla igualitària, presenten una propietat desitjable per a qualsevol repartiment. Aquesta propietat és l'assignació d'una quantitat que no supera la seva demanda. La propietat en qüestió és clarament raonable ja que no sembla lògic assignar a un agent més que el seu dret quan no hi ha suficient per satisfer tots els drets. En realitat aquesta propietat caracteritza les distribucions que pertanyen al core d'un joc de fallida, Curiel, Maschler i Tijs (1987) ho demostraren.

Teorema B.10. *Sigui (E, r) un problema de fallida, φ una regla de fallida i $(N, v_{E,r})$ el joc de fallida associat. Aleshores, $\varphi \in Core(v_{E,r})$ si i només si $\varphi_i \leq r_i$ per a tot $i \in N$.*

Per tant, totes les regles mencionades (a excepció de la regla igualitària) assignen pagaments als problemes de fallida que es troben en el core del

[3]Els jocs de fallida són jocs d'estalvis. Els conceptes definits en l'apèndix A estan referits a jocs de costos, ara bé tots els conceptes es poden traslladar automàticament als jocs d'estalvis.

corresponent joc de fallida.

Per últim, comentar que la regla d'ordre aleatori, la regla del Talmud i la regla proporcional ajustada coincideixen amb tres coneguts conceptes de solució de la teoria de jocs, el valor de Shapley (O'Neill, 1982 [60]), el nucleolus (Aumann i Maschler, 1985 [8]) i el valor de tau (Curiel, Maschler i Tijs, 1987 [24]).

Teorema B.11. *Sigui* (E, r) *un problema de fallida i* $(N, v_{E,r})$ *el joc de fallida associat. Aleshores,* $RO(E, r) = \phi(v_{E,r})$ *on* $\phi(v_{E,r})$ *és el valor de Shapley del joc* $v_{E,r}$.

És més, els vectors de contribucions marginals d'un joc de fallida és poden calcular sense necessitat de recórrer a la funció característica del joc, només necessitem conèixer quin és el patrimoni i quins són els drets.

Observació B.12. *Sigui* (E, r) *un problema de fallida i* $(N, v_{E,r})$ *el joc de fallida associat. Aleshores, els vectors de contribucions marginals,* $m^\pi(v_{E,r})$*, venen donats per:*

$$m_i^\pi(v_{E,r}) = \begin{cases} r_i & si \;\; E \geq \sum\limits_{k \in P_i^{\pi'}} r_k + r_i, \\ E - \sum\limits_{j \in P_i^{\pi'}} r_k & si \;\; 0 \leq E - \sum\limits_{k \in P_i^{\pi'}} r_k \leq r_i, \\ 0 & si \;\; E \leq \sum\limits_{k \in P_i^{\pi'}} r_k, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

on $\pi' \in \Pi^N$ *és tal que* $\pi'(k) = n - \pi(k) + 1$.

Teorema B.13. *Sigui* (E, r) *un problema de fallida i* $(N, v_{E,r})$ *el joc de fallida associat. Aleshores,* $T(E, r) = \eta(v_{E,r})$*, on* $\eta(v_{E,r})$ *és el nucleolus del joc* $v_{E,r}$.

Teorema B.14. *Sigui* (E, r) *un problema de fallida i* $(N, v_{E,r})$ *el joc de fallida associat. Aleshores,* $AP(E, r) = \tau(v_{E,r})$*, on* $\tau(v_{E,r})$ *és el valor de tau del joc* $v_{E,r}$.

Per suposat, no totes les regles de fallida corresponen a alguna solució de la teoria de jocs cooperatius. Una condició suficient i necessària per tal correspondència és que la regla depengui només dels drets truncats i del patrimoni (Curiel, Maschler i Tijs, 1987).