

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

**MODELIZACIÓN Y COBERTURA DE
OPERACIONES ACTUARIALES EN
COLECTIVOS CON MÚLTIPLES ESTADOS**

ENRIQUE POCIELLO GARCÍA

2000

UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DIVISIÓN DE CIENCIAS JURÍDICAS, ECONÓMICAS Y SOCIALES
FACULTAD CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO MATEMÁTICA ECONÓMICA, FINANCIERA Y
ACTUARIAL

MODELIZACIÓN Y COBERTURA DE
OPERACIONES ACTUARIALES EN
COLECTIVOS CON MÚLTIPLES ESTADOS

- Tesis Doctoral presentada por Enrique Pociello García para optar al título de Doctor en Ciencias económicas y Empresariales.
- Directores de la Tesis: Dr. Antonio Alegre Escolano y Dr. Fº Javier Sarrasí Vizcarra.
- Programa de doctorado: Métodos matemáticos en Economía Financiera. Bienio: 93-95.

A Joaquín y Esperanza, mis padres

A Sonia

AGRADECIMIENTOS

Comienzo agradeciendo a mis directores de tesis Dr. Antonio Alegre y Dr. Francisco Sarrasí toda su generosa entrega y dedicación que ha permitido la realización de este trabajo. Agradezco muy especialmente al Dr. Alegre no únicamente su labor de dirección activa en la tesis, sino la posibilidad que me brindó de incorporarme a esta profesión tan gratificante.

Hago también extensiva mi gratitud a los compañeros del departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Destaco muy especialmente los profesores y amigos Javier Varea y Mercé Boncompte. Su ayuda y estímulo en los momentos difíciles han sido de inestimable valor.

Mención especial merecen mis padres Joaquín y Esperanza sin cuyo sacrificio y paciencia no hubiera sido posible elaborar esta Tesis. Hago extensivo este agradecimiento a los demás familiares que se han interesado por el desarrollo del presente trabajo. A Sonia, agradezco su comprensión, cariño e incondicional apoyo que de ella he recibido en todo momento

Otro bloque de agradecimientos tiene como destinatarios mis amigos: Xavier Planes, Pedro García, Alberto Callejero, Alberto Martínez, Elena Ruíz. Su apoyo y consejos han sido sumamente valiosos.

Índice

PLANTEAMIENTO, OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DE LA TESIS	1
---	---

TEMA I

OPERACIONES CON MÚLTIPLES ESTADOS: UN TRATAMIENTO GENERAL

INTRODUCCIÓN	13
--------------	----

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN:DEFINICIÓN Y ANTECEDENTES HISTÓRICOS	15
---	----

1 Introducción	16
2 Antecedentes históricos	19
2.1 Primeros modelos teóricos	19
2.2 Modelos de múltiples decrementos	24
2.3 Modelo estocástico Markoviano	32

CAPÍTULO 2
MODELO TEÓRICO 35

1	Introducción	36
2	Proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo	39
2.1	Definición	39
2.2	Matriz de transición	41
2.3	Vector de estado	41
2.4	Ecuación general del proceso estocástico	43
3	Proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo	43
3.1	Definición	44
3.2	Matriz de transición	45
3.3	Vector de estado	45
3.4	Matriz de intensidades de transición	45
3.5	Ecuación general del proceso estocástico	47
3.6	Ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov	48
3.7	Definición de otras medidas de probabilidad	50
3.8	Métodos de estudio y análisis	53
4	Semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo	54

CAPÍTULO 3
MÉTODOS DE AJUSTE 57

1	Introducción	58
2	Métodos de estimación paramétrica	64
2.1	Funciones de ajuste	64
2.1.1	Funciones de ajuste univariante	65

2.1.2 Funciones de ajuste bivalente	67
2.2 Métodos de optimización	68
2.2.1 Método de optimización de máxima verosimilitud	68
2.2.2 Método de los mínimos cuadrados	71
3 Métodos de ajuste no paramétricos	72
3.1 Método de las medias móviles	73
3.2 Ajuste por splines polinómicos	74
3.3 Métodos de estimación mediante núcleos	76
3.3.1 Definición de núcleo	76
3.3.2 Núcleo de Copas y Haberman	78
3.3.3 Núcleo de Nadaraya-Watson	78
3.3.4 Selección del parámetro de alisamiento	78
3.4 Método de estimación de Whittaker	79
3.5 Estimación por regresión dinámica	80
3.6 Método de modelización local polinómica	82
4 Tests de la estimación	82
4.1 Tratamiento de la información muestral	83
4.1.1 Proceso de agrupación en un ajuste univariante	83
4.1.2 Proceso de agrupación en un ajuste bivalente	84
4.2 Test de los signos	85
4.3 Test de Wald-Wolfowitz	86
4.4 Test de correlación	87
4.5 Test de Chi-cuadrado	87
4.6 Test de Kolmogorov-Smirnov	88
Anexo 3-1 Estimación de la intensidad de fallecimiento	91
Anexo 3-2 Estimación de la intensidad de invalidación	109
Anexo 3-3 Estimación de la intensidad de reactivación	123

CAPÍTULO 4

CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN 141

1 Introducción	142
2 Métodos exactos	142
2.1 Intensidad de transición constante	143
2.2 Intensidad de transición definida por tramos constantes	144
2.3 Intensidad de transición continua	145
3 Métodos numéricos	146
3.1 Método numérico basado en el teorema del valor medio	146
3.2 Método numérico basado en la integración por producto	147

CAPÍTULO 5

APLICACIÓN A LA VALORACIÓN FINANCIERO-ACTUARIAL 151

1 Introducción	152
2 Operaciones discretas	152
2.1 Valoración de rentas actuariales	153
2.2 Valoración de seguros	154
2.2.1 Valoración de seguros en procesos estocásticos discretos	154
2.2.2 Valoración de seguros en procesos estocásticos continuos	155
3 Operaciones continuas en el tiempo	157
3.1 Valoración de rentas actuariales	157
3.2 Valoración de seguros	158
4 Cálculo de la reserva matemática	160
5 Ecuación diferencial de Thiele	161
6 Función de pérdida agregada	164
7 Función de pérdida anual	166
8 Teorema de Hattendorff	167

TEMA II

INVALIDEZ

INTRODUCCIÓN	171
--------------------	-----

CAPÍTULO 6

TRATAMIENTO ACTUARIAL DEL RIESGO DE INVALIDEZ 173

1 Introducción	174
2 Factores socioeconómicos influyentes en la invalidez	175
3 Problemática del aseguramiento del riesgo de invalidez	177
4 Método clásico	180
5 Método de invalidez de Manchester-Unity	191
6 Método de las tablas de persistencia	194
7 Tratamiento del riesgo de invalidez en España	197

CAPÍTULO 7

MÉTODO DE INVALIDEZ TEMPORAL 201

1 Aproximación al problema	202
2 Método teórico	205
2.1 Propiedades de las probabilidades de transición	207
2.2 Ecuación general del semiproceso estocástico de Markov	212
3 Estimación y ajuste de las intensidades de transición	218
4 Obtención numérica de las probabilidades de transición	220
4.1 Método basado en la aplicación del teorema del valor medio	221
4.2 Método basado en la resolución numérica de la ecuación general	222
5 Valoración financiero-actuarial	230
Anexo 7-1 Cálculo numérico de las probabilidades de transición	233

CAPÍTULO 8	
MÓDELO DE INVALIDEZ PERMANENTE	
	239
1 Modelo teórico	240
2 Estimación y ajuste de las intensidades de transición	241
3 Obtención exacta de las probabilidades de transición	242
4 Valoración financiero-actuarial	245
Anexo 8-1 Cálculo numérico de las probabilidades de transición	247

CAPÍTULO 9	
MÓDELO DE INVALIDEZ MIXTA	
	255
1 Aproximación al problema	256
2 Modelo teórico	257
3 Estimación y ajuste	260
4 Valoración financiero-actuarial	262
Anexo 9-1 Cálculo numérico de las probabilidades de transición	265

TEMA III	
REASEGURO	
INTRODUCCIÓN	273

CAPÍTULO 10	
REASEGURO DE VIDA: INTRODUCCIÓN Y MODALIDADES	
	275
1 Modelo teórico	276
2 Antecedentes históricos	278
3 Funciones características del reaseguro vida	281

4 Modalidades de reaseguro proporcional	282
4.1 Reaseguro a prima de tarifa	283
4.1.1 Reaseguro a prima de tarifa a cuota parte	285
4.1.2 Reaseguro a prima de tarifa por excedentes	286
4.2 Reaseguro basado en la prima de riesgo	287
5 Modalidades de reaseguro no proporcional	289
5.1 Excess-loss	290
5.2 Stop-loss	292
6 Otras modalidades de reaseguro	294
6.1 Reaseguro de riesgo de ruina	295
6.2 Reaseguro de diferencia de siniestralidad	296

CAPÍTULO 11

REASEGURO DE DIFERENCIA DE SINIESTRALIDAD APLICADO EN COLECTIVOS CERRADOS CON MÚLTIPLES ESTADOS

	299
1 Hipótesis y características de la operación aseguradora	300
2 Simulación estocástica del colectivo	304
3 Modelización estocástica	306
3.1 Variable aleatoria “Valor actual financiero de las prestaciones”	306
3.1.1 Provisión matemática del colectivo	306
3.1.2 Definición y obtención del Valor mínimo del fondo del colectivo..	307
3.1.3 Definición y obtención del fondo del colectivo sin reasegurar	308
3.1.4 Definición y valoración del fondo reasegurado del colectivo	309
3.1.5 Prestaciones del reasegurador	310
3.1.6 Obtención de la variable aleatoria “Valor actual financiero de las prestaciones del reasegurador”	311
3.2 Definición de la variable aleatoria “Valor actual financiero de las primas puras de reaseguro”	312
3.3 Definición y obtención de la variable aleatoria “Valor actual financiero de la pérdida del reasegurador”	314

4 Cálculo de las primas puras de reaseguro	315
5 Cálculo de las primas de reaseguro básicas	317
6 Análisis del coste total de la cobertura	318
6.1 Definición del coste total de la operación	319
6.2 Definición y obtención de la estrategia óptima recargo-reaseguro	320
6.3 Análisis de la sensibilidad del coste total de la operación	322
Anexo 11-1 Cálculo de la prima de reaseguro	325
Anexo 11-2 Estrategia recargo-reaseguro óptima	341
Anexo 11-3 Estudio de sensibilidad	353

CAPÍTULO 12

REASEGURO DE DIFERENCIA DE SINIESTRALIDAD APLICADO EN COLECTIVOS ABIERTOS CON MÚLTIPLES ESTADOS

	361
1 Hipótesis del modelo	362
2 Planteamiento	362
3 Evolución real del colectivo abierto	365
4 Evolución teórica del colectivo	366
4.1 Método de simulación de Montecarlo	367
4.2 Método de Markov	367
5 Modelo estocástico	369
5.1 Variable aleatoria “Valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador antes de la incorporación del colectivo entrante”	369
5.2 Variable aleatoria “Valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador tras la incorporación del colectivo entrante”	370
5.3 Análisis del efecto de la entrada de nuevos asegurados	371
6 Reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas	372
6.1 Cálculo de la prima de reaseguro	373
6.2 Métodos de cálculo del coeficiente de reaseguro	373
7 Reaseguro de diferencia de siniestralidad con contraprestaciones definidas ...	377

7.1 Problemática del cálculo de las nuevas prestaciones	377
7.2 Métodos de cálculo de nuevas prestaciones	378
Anexo 12-1 Aplicación numérica del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas	383
Anexo 12-2 Aplicación numérica del reaseguro de diferencia de siniestralidad con conprestaciones definidas	407

TEMA IV

CONCLUSIONES

CAPÍTULO 12	
CONCLUSIONES	451
1 Conclusiones relativas al tema I	454
2 Conclusiones relativas al tema II	464
3 Conclusiones relativas al tema III	468
4 Líneas de investigación abiertas	480
BIBLIOGRAFÍA	483
APÉNDICE	499

Planteamiento, objetivos y estructura de la tesis

El trabajo que aquí presentamos se centra en la modelización de una operación actuarial en colectivos con múltiples estados sobre la cual planteamos la cobertura de las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad adversas.

Veremos que la aplicación de unas tablas de probabilidad ajustadas a las características del colectivo no es suficiente para garantizar su solvencia ya que ésta también dependerá de la estructura del colectivo. Nuestro objetivo será garantizar la solvencia de un colectivo sobre el cual se define una operación con múltiples estados a través del reaseguro de diferencia de siniestralidad.

La presente tesis doctoral se enmarca dentro de una línea de investigación sobre el análisis de la solvencia en colectivos de vida, llevada a cabo por el departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial de la Universidad de Barcelona.

Resultado de la misma, en los últimos años se han realizado las tesis de la Dra. M^a. Mercedes Claramunt Bielsa (1992) con título “Control Dinámico-estocástico de la Solvencia de los Planes de Pensiones” y del Dr. F^o. Javier Sarrasí Vizcarra (1993), titulada “Reaseguro y Planes de pensiones”.

El trabajo que presento, surge como continuación de la tesis doctoral del Dr. F^o. Javier Sarrasí. En ella se introducen varias modalidades de reaseguro que tienen como objeto asegurar la solvencia de un colectivo y se dejan abiertas varias líneas de investigación para el desarrollo de las mismas, tal como a continuación cito textualmente:

“Una línea de investigación afectaría a la inclusión de más riesgos dentro del modelo, como pueden ser los relacionados con la invalidez.”

“Debemos indicar que es necesario profundizar en el modelo presentado, en intentar obtener un método que nos permita determinar la estrategia óptima recargo-reaseguro en el caso de operaciones de colectivos”

“Se tendría que profundizar en el estudio del reaseguro en colectivos abiertos. Creemos que una de las líneas de investigación que tiene que seguir en este terreno tiene que ver con el estudio de la evolución de la tasa de prima de reaseguro a aplicar al colectivo ampliado, conforme se van produciendo nuevas entradas de partícipes al plan, la cual a su vez podría servir de referencia para permitir la entrada de nuevos partícipes al colectivo.”

En la tesis abordaremos estas líneas de investigación, modelizando en primer lugar, una operación actuarial con múltiples estados, tratando el riesgo de invalidez y desarrollando el reaseguro de diferencia de siniestralidad en colectivo cerrados y abiertos para una operación con múltiples estados determinada.

Por operación actuarial en colectivos con múltiples estados, entenderemos una operación de vida que contempla diferentes estados del asegurado (invalido, activo, empleado, desempleado, etc.). Normalmente, asociamos estas operaciones con prestaciones de invalidez o con otro tipo de prestaciones complementarias a las de vida.

Tradicionalmente, el estudio de esta clase de operaciones no ha sido objeto de la misma atención que las operaciones de vida, sean seguros de fallecimiento o rentas de supervivencia. Por ello, uno de los objetivos que nos fijamos, será plantear de forma general la modelización de las operaciones con múltiples estados.

Con tal fin, describiremos un modelo general de múltiples estados, basado en la aplicación de procesos y semiprosos estocásticos de markov que nos permita realizar un enfoque sistemático, general y matemáticamente riguroso de cualquiera operación con múltiples estados, definida de forma continua o discreta en el tiempo.

Tras describir con generalidad una operación con múltiples estados, nos centraremos en el estudio de las operaciones de invalidez. Esta clase de coberturas, junto con otras como “Critical Illness insurance” (seguro por contraer una enfermedad, considerada muy grave como cáncer, infarto de miocardio, etc. y especificada en contrato) o “Long-term care insurance” (seguro de dependencia), están adquiriendo una importancia cada vez mayor.

Ello es debido a que los países desarrollados están experimentando un creciente envejecimiento, que está provocando un fuerte aumento de la demanda de estos nuevos productos de seguros por parte de una población, económicamente cada vez más próspera y con mayor nivel de educación, que desea conservar su calidad de vida en la vejez.

Los sistemas de asistencia social de muchos países están soportando presiones muy fuertes que obligan a que sus gobernantes busquen y fomenten, con la participación de la industria aseguradora privada, sistemas alternativos de cobertura que provean de fondos la asistencia de la vejez y de la invalidez. Esto explica la creciente importancia que está adquiriendo la comercialización de estos productos de seguros tan innovadores.

Una vez definida sobre el colectivo, la operación con múltiples estados a estudiar, efectuaremos un análisis del riesgo derivado de las desviaciones adversas de la siniestralidad y plantearemos su cobertura a través del reaseguro de diferencia de siniestralidad. Desarrollaremos su definición y aplicación en el marco de una operación con múltiples estados.

La aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad permitirá garantizar totalmente la solvencia del colectivo, considerando como única fuente de ingresos las primas pagadas por sus integrantes. En este contexto, entenderemos por solvencia, la capacidad de atender a las obligaciones presentes y futuras contraídas por el colectivo con sus propios miembros.

Con la finalidad de diseñar una estrategia óptima, combinaremos la utilización del reaseguro de diferencia de siniestralidad con la aplicación del otro instrumento del que dispone el colectivo para asegurar su solvencia: recargo de seguridad, de forma que el valor actual actuarial del coste total (primas de reaseguro más las primas de la operación aseguradora recargadas) sea mínimo.

El colectivo se encuentra sujeto por su propia dinámica a entradas de nuevos asegurados. Con tal objeto, analizaremos los efectos generados por éstas y su repercusión en el colectivo. Resultado de las diferentes propuestas que realicemos, formularemos diferentes variantes del reaseguro de diferencia de siniestralidad.

La matemática actuarial que podríamos denominar clásica utiliza modelos deterministas en el sentido en que trabaja con valores medios o ciertos, resultado de la reducción (por medio de la esperanza matemática) de las variables aleatorias que intervienen a una sola cuantía.

Esta metodología que evidentemente simplifica enormemente el análisis puede ser válida para ciertas aplicaciones, no obstante limita de forma importante los resultados que pueden obtenerse y por lo tanto la utilidad de dichos modelos. Con este enfoque determinista se prescinde de toda la aleatoriedad que caracteriza realmente a los flujos monetarios tanto de prestaciones como de primas.

Estas limitaciones cuestionan cualquier análisis determinista de la solvencia. Por ello, nuestro enfoque metodológico, además de ser actuarial también será estocástico lo cual queda plasmado en dos aspectos:

- Definiremos la evolución de los asegurados a partir de un proceso o semiproceso estocástico de Markov. Ello nos permitirá realizar un seguimiento estocástico del colectivo objeto de seguimiento.
- Consideraremos la distribución de probabilidad de la principal variable aleatoria que centra el estudio del reaseguro de diferencia de siniestralidad, “Valor actual financiero de la pérdida del reasegurador”. Como su obtención por convolución resulta excesivamente complicada y laboriosa, recurriremos a su caracterización mediante simulación de Montecarlo.

En la tesis hemos considerado dos enfoques metodológicos: el general y el particular. El enfoque general hace referencia a una operación de múltiples estados cualquiera. El enfoque particular, en base al cual realizaremos las diferentes aplicaciones prácticas, parte de una operación con múltiples estados muy particular: Una operación de invalidez.

Todo modelo por el mero hecho de serlo es una simplificación de la realidad, en la cual se prescinde de más o menos factores, para que el proceso en estudio sea abarcable. Un modelo excesivamente complejo puede llevar a escasas conclusiones si se hace difícil trabajar con él. Con tal fin, a lo largo de la tesis hemos ido introduciendo hipótesis restrictivas, tanto en relación con la evolución del colectivo como a la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad.

Los modelos que desarrollemos, tanto en la parte de modelización de las operaciones de colectivos con múltiples estados como en la parte del reaseguro de diferencia de siniestralidad, resultan aplicables de forma general, independientemente de la legislación de cada país.

La tesis doctoral se estructura en 4 temas y una sección final que incluye la bibliografía y los anexos desarrollados. Cada uno de los temas se desglosa a su vez en diversos capítulos:

- Tema I: Modelo Markoviano con Múltiples estados.

El capítulo 1 con el que iniciamos el tema, realiza una revisión histórica del desarrollo de la matemática actuarial de vida en general y de las operaciones con múltiples estados en particular.

En el capítulo 2 plantearemos las diferentes estructuras estocásticas que contemplaremos en la modelización de una operación con múltiples estados: procesos de Markov discreto y continuo y semiproceso estocásticos de Markov continuo.

En el capítulo 3, describiremos los métodos de ajuste y estimación (paramétricos y no paramétricos) que suelen utilizarse en la estimación de las intensidades y probabilidades anuales de transición.

En el capítulo 4, recogeremos los métodos numéricos más frecuentemente empleados en la obtención de las probabilidades de transición, una vez estimadas las intensidades y probabilidades anuales de transición.

Finalmente, en el capítulo 5 explicaremos algunas singularidades que ofrece la valoración financiero-actuarial de operaciones con múltiples estados modelizadas a través de procesos o semiprocesos estocásticos de Markov.

- Tema II: Invalidez

El capítulo 6 describe la problemática que comporta la cobertura aseguradora del riesgo de invalidez, incidiendo en las múltiples variables y factores de carácter socioeconómico que intervienen en su valoración. Al final del

capítulo realizaremos un estudio histórico hasta nuestros días del tratamiento dado al riesgo de invalidez.

En los capítulos 7, 8 y 9 consideraremos modelos de invalidez derivados de la aplicación de procesos o semiprocesos estocásticos de Markov. Cada uno de ellos, los trataremos separadamente dependiendo si la clase de invalidez a que hacen referencia es temporal, permanente o mixta (tanto temporal como permanente).

- Tema III: Reaseguro

Comenzaremos el tema en el capítulo 10, donde ofreceremos una visión general de la aplicación del reaseguro en el ramo de vida. Estudiaremos las modalidades proporcionales y no proporcionales más usuales en la práctica reaseguradora de vida y analizaremos sus ventajas e inconvenientes.

En el capítulo 11 realizaremos un estudio del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un marco estático, es decir, sin suponer entradas en el tiempo de nuevos asegurados. Desarrollaremos el planteamiento formal y hallaremos la estrategia recargo-reaseguro óptima, aplicada a un colectivo determinado.

En el capítulo 12, analizaremos la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un marco dinámico, incorporando así entradas futuras de nuevos asegurados. Estudiaremos su repercusión en el colectivo, variando para ello el planteamiento original.

- Tema IV

Presentamos las conclusiones de la tesis doctoral clasificadas por el tema a que hacen referencia: modelización de las operaciones con múltiples estados, tratamiento del riesgo de invalidez y aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad.

- En último lugar, incluimos la bibliografía citada y un apéndice con los programas informáticos, en lenguaje de programación FORTRAN, utilizados en los anexos. Sus fuentes se encuentran en el disquete con que adjuntamos la tesis.

Las librerías utilizadas en los programas desarrollados han sido las NAG Fortran Library. La versión de Fortran utilizada ha sido FORTRAN 77. Adicionalmente para la representación gráfica y el tratamiento de algunos datos ha sido necesario la utilización de la hoja de cálculo de EXCEL 97 de MICROSOFT.

TEMA I

OPERACIONES CON MÚLTIPLES ESTADOS: UN TRATAMIENTO GENERAL

Este primer tema de la Tesis tiene como objetivo modelizar estocásticamente y valorar financiero-actuarialmente una operación con múltiples estados. Con tal fin, en primer lugar, plantearemos un modelo estocástico que sea capaz de recoger y tratar la complejidad de una operación con múltiples estados.

Posteriormente, abordaremos la estimación de las probabilidades e intensidades de transición de la operación mediante los métodos de ajuste paramétrico y no paramétrico más comunes. A partir de sus valores estimados, valoraremos las rentas y seguros más habituales de la práctica aseguradora de vida. Así, podremos hallar las primas y determinar las reservas matemáticas correspondientes.

El tema, así planteado, se divide en 5 capítulos:

- El capítulo 1 del tema sirve para definir qué entendemos por operación con múltiples estados y para introducir el planteamiento estocástico de la misma que seguiremos en la tesis. Con el objeto de entender mejor la complejidad a que nos estamos enfrentando, realizaremos una pequeña revisión histórica del tratamiento dado a las operaciones con múltiples estados.
- En el capítulo 2 formalizaremos el planteamiento estocástico de una operación con múltiples estados a través de tres procesos estocásticos: un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo y un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.
- En el capítulo 3, expondremos con la mayor globabilidad posible propuestas de ajuste de las probabilidades anuales e intensidades de transición de la operación. Consideraremos métodos tanto paramétricos como no. Con la finalidad de discutir la validez de la estimación y la bondad de su ajuste, enunciaremos una serie de tests no paramétricos que resultan aplicables.

- El capítulo 4 proporciona varios métodos matemáticos y algoritmos numéricos que tienen como finalidad obtener, a partir de las probabilidades anuales e intensidades de transición anteriormente estimadas, las probabilidades de transición de forma exacta y aproximada, respectivamente.
- El capítulo 5 desarrolla las formulas de valoración financiero-actuarial tanto de rentas como de seguros. Definiremos el concepto de reserva matemática y describiremos su dinámica mediante la ecuación diferencial de Thiele. Valoraremos estocásticamente una operación con múltiples estados a través de las funciones de pérdida agregada y anual.

Capítulo 1

Introducción: Definición y antecedentes históricos

En la primera parte del capítulo explicaremos qué entendemos por una operación con múltiples estados y qué procesos estocásticos vamos a utilizar en su modelización: proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo y semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

A continuación, analizaremos las principales ventajas y posibilidades que ofrece la aplicación del enfoque estocástico utilizado respecto a otras metodologías de estudio diferentes.

Finalmente, con la finalidad de facilitar la comprensión de los modelos con múltiples estados que aplicaremos en los capítulos siguientes, realizaremos una breve revisión histórica sobre la evolución de la matemática actuarial vida en general y de las operaciones con múltiples estados, en particular.

1 Introducción

Entendemos por operación con múltiples estados aquella operación actuarial de vida que contempla diferentes estados que puede alcanzar el asegurado. Cada uno de ellos puede determinar una prestación distinta. Normalmente, asociamos estas operaciones con prestaciones de invalidez o con otro tipo de prestaciones complementarias a las de vida.

Pitacco, E. et al. (1997) define operación con múltiples estados, de forma muy similar, como aquella operación actuarial de vida en la que intervienen varios estados cuya ocupación por parte del asegurado determina el flujo de primas (pagos de los asegurados al asegurador) y de prestaciones (pagos del asegurador a los asegurados) de la operación.

Tal como hemos explicado, una operación con múltiples estados se caracteriza por contemplar simultáneamente varias contingencias o riesgos personales que afectan a los asegurados tales como el fallecimiento o la invalidez. Por ello, utilizaremos como herramientas de modelización una serie de procesos estocásticos que contemplan la existencia y tratamiento de múltiples estados: proceso estocásticos de Markov discreto en el tiempo, proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo y semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

La matemática inspirada en procesos y semiprocesos de Markov permite extender el modelo básico de dos estados: vivo y muerto a un modelo compuesto por un número mayor de estados. Por tanto, la aplicación de procesos y semiprocesos estocásticos de Markov constituye un capítulo especial de la matemática actuarial que permite al actuario modelizar y valorar operaciones con múltiples estados.

La utilización de los procesos y semiprocesos estocásticos de Markov como herramienta de modelización de operaciones con múltiples estados está ampliamente difundida y generalmente aceptada por las siguientes razones:

- Los procesos y semiprocesos estocásticos de Markov incorporan el tratamiento de la dependencia estadística existente entre los diferentes estados que intervienen en la operación. Esto añade realismo a la modelización de la operación y significación a las probabilidades que como resultado de la misma obtengamos.
- Por la sencillez de su definición, los procesos y semiprocesos estocásticos Markovianos constituyen herramientas de modelización sumamente potentes que permiten describir y adaptarse a cualquier tipo de operación actuarial con múltiples estados (**Hoem, J.M. (1988)**).
- Tal como señala **Kojima, K. (1988)**, la aplicación de procesos y semiprocesos estocásticos de Markov permite obtener probabilidades de transición suficientemente representativas de la evolución de un colectivo, aún siendo su tamaño reducido. La validez de estas probabilidades está limitada a un periodo de tiempo relativamente corto, transcurrido el cual es conveniente repetir el estudio.
- El desarrollo futuro de un proceso estocástico de markov continuo o discreto solamente depende del estado presente del mismo y no de toda su historia anterior. Ello permite determinar la distribución futura del proceso simplemente a partir de las probabilidades de transición y de la distribución inicial, supuestamente conocida a priori.

Si relajamos la anterior hipótesis y, por tanto, consideramos otras variables adicionales, obtendremos un semiproceso estocástico de Markov. Este tipo de proceso estocástico se caracterizará por ser más potente pero también más complejo de analizar.

- Si entendemos por reversibilidad de un estado la posibilidad de que el proceso vuelva a dicho estado después de haberlo abandonado previamente, su introducción en una operación con múltiples estados a través de un proceso o semiproceso estocástico de Markov resulta bastante inmediata.

- La aplicación de procesos y semiprocesos estocásticos de Markov da lugar a que podamos expresar y tratar matricialmente tanto las probabilidades de transición como la valoración financiero-actuarial de la operación. La posibilidad de utilización de una notación matricial además de aportar claridad desde un punto de vista teórico, facilita la valoración conjunta de las diferentes prestaciones definidas en una operación con múltiples estados.
- La teoría Markoviana proporciona modelos estocásticos sencillos de utilizar con un buen número de propiedades estadísticas que facilitan la posterior inferencia estadística, tanto la estimación como la contrastación.
- Dado el carácter estocástico de los modelos Markovianos, éstos a diferencia de los modelos deterministas, permiten representar estocásticamente la evolución de variables tan significativas como la provisión matemática (**Wolthuis, H. et al. (1986)**).

Dado que los riesgos personales son no estacionarios en el tiempo ya que sus probabilidades de transición varían en el tiempo con la edad del asegurado, los procesos y semiprocesos estocásticos de Markov que utilicemos tampoco serán estacionarios.

En un proceso estocástico de Markov, las probabilidades de transición futuras que obtengamos dependerán además del estado actual, de la edad. En un semiproceso estocástico de Markov las probabilidades de transición dependerán, además de las anteriores variables, de otras variables como pueden ser la duración del estado actual, la duración de todo el proceso estocástico, etc.

El tratamiento en el tiempo del proceso estocástico de Markov puede ser discreto o continuo. En el primer caso utilizaremos un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo, en el segundo un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

La aplicación de un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, tal como veremos a lo largo del capítulo, resulta numéricamente más compleja que la puesta en práctica de un proceso estocástico de markov discreto.

2 Antecedentes históricos

El objetivo de este epígrafe es ante todo describir e introducir una reflexión sobre la evolución del cálculo actuarial de las operaciones de vida en general y de las de múltiples estados en particular, que facilite la comprensión del tratamiento de las operaciones con múltiples estados.

2.1 Primeros modelos teóricos

Durante el siglo XVII, la actividad comercial en Europa experimentó un extraordinario apogeo que propició una serie de innovaciones en el campo financiero-actuarial: valoración financiera a interés compuesto, aseguramiento de las naves y de sus cargas, seguros de vida, rentas de supervivencia, etc.

Durante este siglo y el siguiente se desarrollaron las bases fundamentales sobre las que se sustenta la matemática actuarial vida. Al respecto, destacamos como aportaciones más significativas las llevadas a cabo por los siguientes autores:

- **Graunt, J.:** En 1662 publicó la primera tabla de supervivencia. Su trabajo tuvo una enorme repercusión y sus métodos estadísticos y análisis demográficos fueron adoptados de inmediato en Inglaterra, Francia, Holanda y Alemania
- **Halley, E. (1693):** Publicó un trabajo, de gran repercusión posterior, en donde proponía una metodología de cómo construir una tabla de supervivencia a partir de una determinada experiencia. Por otro lado, introdujo un método de valoración actuarial de rentas de supervivencia que, en esencia, es el mismo que se utiliza en la actualidad.
- **Moivre de, A. (1725):** Su obra constituye el primer texto de matemática actuarial vida moderna. En él se proponen métodos de aproximación de tablas

de supervivencia mediante funciones lineales definidas a tramos así como métodos recurrentes de valoración actuarial de rentas de supervivencia.

- **Dodson, J.:** Le es atribuida la paternidad de la matemática actuarial. Su aportación principal consistió en 1755 valorar seguros de fallecimiento e introducir el concepto de provisión matemática.
- **Bernoulli, N.:** En 1709 estudió la esperanza matemática de vida de un colectivo de asegurados y del último superviviente del mismo.
- **Graaf, I.:** Por primera vez, en 1729 representó gráficamente una función de supervivencia, l_x .
- **Struyck, N. (1740):** Construyó por primera vez tablas de vida separadas por sexos.
- **Kersseboom, W. y Deparcieux, A.:** En 1746 elaboraron por primera vez una tabla de vida en Francia a partir de una experiencia observada.
- **Wargentin, P. (1766):** Realizó un análisis de la mortalidad de la población sueca, a partir de la información recogida del periodo 1755-1763, en el cual llegaba a la conclusión que el colectivo femenino tenía menos mortalidad que el formado por la población masculina.
- **Price, R. (1783)** siguiendo la metodología iniciada por el anterior autor, elaboró unas tablas de mortalidad de hombres y mujeres, a partir de la experiencia recogida entre los años 1757 y 1775. Posteriormente amplió su estudio al riesgo de invalidez. Su obra “Observations of Reversionary Payments” fue considerada como el texto de matemática actuarial vida más importante del momento.
- **Wigglesworth, E. (1793):** Publicó la primera tabla de supervivencia en Estados Unidos.

Durante la segunda mitad del siglo XVIII, la aparición y propagación de enfermedades altamente contagiosas y con elevadas tasas de mortalidad tales como la viruela suscitó en diversos matemáticos un interés por construir modelos estadísticos que sirvieran para estimar el efecto de dichas plagas sobre la evolución de la población.

Así, **D'Alembert, J. (1761)**, **Bernoulli, D. (1766)** y **Laplace, P.S. de (1812)**¹ estudiaron la tasa de inoculación de la enfermedad de la viruela y de la mortalidad, deduciendo unas ecuaciones diferenciales cuya solución permitía describir sus efectos sobre la evolución de la población. Su propuesta consistía en una operación con 3 estados:

- i : Personas que nunca han sufrido la enfermedad de la viruela.
- j : Personas que han contraído la viruela.
- m : Muerte.

El modelo suponía que las personas que integran el estado j padecían una mayor mortalidad que las personas que se hallaban en el estado i . Definen la función de supervivencia l_x como el número esperado de supervivientes de edad x provenientes de un grupo inicial de edad 0. De la misma forma, definen las funciones de supervivencia en los estados i y j respectivamente: l_x^i y l_x^j .

$$l_x = l_x^i + l_x^j$$
$$dl_x = dl_x^i + dl_x^j.$$

El modelo propuesto por **D'Alembert, Bernoulli, D.** y **Laplace, P.C.** es continuo en el tiempo lo que les permitió introducir las fuerzas de decremento que definen como las probabilidades condicionadas instantáneas de salida. Representan las fuerzas de decremento de los estados i y j como m_x^i y m_x^j respectivamente.

¹ Su modelo está ampliamente explicado en **Seal, H. (1977)**.

Dado que existían dos causas de salidas del estado i : por fallecimiento o contrayendo la viruela, **D'Alembert**, **Bernoulli, D.** y **Laplace, P.C.** proponen las siguientes relaciones:

$$m_x^i = m_x^{ij} + m_x^{im}$$

$$m_x^j = m_x^{jm}$$

Donde m_x^{ij} , m_x^{im} y m_x^{jm} representan respectivamente las fuerzas de decremento de inoculación de la viruela, de fallecimiento sin contraer viruela y de fallecimiento habiendo contraído la viruela. A partir de éstas, obtuvieron las siguientes ecuaciones diferenciales que describen la variación infinitesimal de las distintas funciones de supervivencia:

$$d l_x^i = -l_x^i \cdot (m_x^{ij} + m_x^{im}) \cdot dx \quad (1)$$

$$d l_x^j = l_x^i \cdot m_x^{ij} - l_x^j \cdot m_x^{jm} \cdot dx \quad (2)$$

$$d l_x = -l_x^i \cdot m_x^{im} \cdot dx - l_x^j \cdot m_x^{jm} \cdot dx \quad (3)$$

Operando con las anteriores ecuaciones, obtienen la ecuación diferencial (4), donde $f_x = m_x^{im} - m_x^{jm}$. Su solución, la expresión (5), constituye la función de supervivencia de las personas no afectadas por la enfermedad de la viruela:

$$d l_x^i = \frac{l_x^i}{l_x} (d l_x + l_x^j \cdot f_x \cdot dx) - l_x^j \cdot m_x^{ij} \cdot dx \quad (4)$$

$$l_x^i = l_x \cdot \frac{e^{-\int_0^x (m_u^i - m_u^j) du}}{1 + \int_0^x f_u \cdot e^{-\int_0^u (m_w^i - m_w^j) dw} du} \quad (5)$$

La inexistencia de estadísticas poblacionales suficientemente fiables con las cuales estimar las fuerzas de decremento, obligó a **Bernoulli, D.** a suponer una serie de relaciones paramétricas existentes entre las diferentes fuerzas de decremento de la población:

$$f_x = \frac{1}{m \cdot n} \quad m_x^{ij} - f_x = \frac{1}{n}.$$

donde m y n son los parametros que sirven para relacionar entre sí las anteriores fuerzas independientemente a la edad. Substituyendo estas relaciones en la fórmula (5), obtienen la siguiente solución particular de l_x^i .

$$l_x^i = \frac{l_x \cdot e^{-\frac{x}{n}}}{1 - \frac{1}{m} \left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right)} \quad (6)$$

En 1799 **Trembley, J.** intentó discretizar para periodos anuales la relación (6) representando n^{-1} y m^{-1} a través de w_x y q_x^i respectivamente. El resultado fue la siguiente fórmula, donde $p_x = l_{x+1}^i / l_x^i$.

$$l_{x+1}^i = \frac{l_x^i \cdot l_x \cdot p_x \cdot (1 - w_x)}{l_x - l_x^i \cdot w_x \cdot q_x^i} \quad (7)$$

Trembley, J. demuestra que cuando $w_x = \frac{1}{n}$, $q_x^i = \frac{1}{m}$ y $n \rightarrow \infty$ la expresión (7) tiende en el límite a la fórmula (6). Aunque **Trembley, J.** desarrolla su fórmula para periodos anuales, logra demostrar numéricamente que se puede tomar una unidad de tiempo menor que el año.

D'Alembert, J. simplificó las fuerzas de decremento al considerar únicamente 2: $\mathbf{m}_x^{(i)}$ que define como la fuerza de decremento por fallecimiento debido a la viruela y $\mathbf{m}_x^{(-i)}$ que define como la fuerza de decremento por fallecimiento debida a una causa distinta a la viruela. Consecuentemente, construyó el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$dl_x = -l_x \cdot \left(\mathbf{m}_x^{(i)} + \mathbf{m}_x^{(-i)}\right) \cdot dx \quad (8)$$

$$dl_x^{(-i)} = -l_x^{(-i)} \cdot \mathbf{m}_x^{(-i)} \cdot dx \quad (9)$$

$$dl_x^{(i)} = -l_x^{(i)} \cdot \mathbf{m}_x^{(i)} \cdot dx \quad (10)$$

Donde $l_x^{(-i)}$ era la función de supervivencia de las personas no afectadas por la viruela, $l_x^{(i)}$ la función de supervivencia de las personas afectadas por viruela y $l_x = l_x^{(i)} + l_x^{(-i)}$ la función de supervivencia de toda la población. Operando con las ecuaciones diferenciales (8), (9) y (10) obtuvo $l_x^{(-i)}$:

$$l_x^{(-i)} = l_x \cdot e^{\int_0^x m_u^{(i)} du} \quad (11)$$

En 1812, **Laplace, P.S.** sugiere que los valores de $m_u^{(i)}$ podían estimarse, dividiendo el número de muertes debidas a la causa i en la edad x por el número de supervivientes del grupo inicial entre las edades de $x - \frac{1}{2}$ y $x + \frac{1}{2}$. Esto le permitió calcular $l_x^{(-i)}$ por integración numérica.

2.2 Modelo de múltiples decrementos

A principios del siglo XIX persistían problemas que en el transcurso del mismo se solucionarían:

- Hallar expresiones de las fuerzas de transición a las que ajustar la experiencia observada que facilitasen el proceso de inferencia estadística y definir expresiones numéricas de las fuerzas de decrementos a partir de las observaciones de la población.
- Obtener una expresión generalizada aplicable a una operación con múltiples estados cualquiera.

Durante el siglo XIX se propusieron diferentes fórmulas matemáticas de la fuerza de fallecimiento, cuya utilización posterior se generalizó a otros decrementos. Citamos las aportaciones más relevantes:

- **Gompertz, B. (1825):** Estableció que la fuerza de mortalidad crece exponencialmente. Su aportación, más conocida como ley de Gompertz, significó el inicio de una nueva era en la ciencia actuarial.

$$m_x = B \cdot C^x \quad (12)$$

- **Makeham, W.M. (1867):** propuso una ampliación de la fórmula de Gompertz que llevó por nombre primera ley de Makeham.

$$m_x = A + B \cdot C^x \quad (13)$$

Posteriormente, añadió a la anterior expresión un término lineal, obteniendo como resultado una expresión conocida con el nombre de segunda ley de Makeham.

$$m_x = A + B \cdot x + C \cdot D^x \quad (14)$$

- **Lazarus, D.:** En 1867, con la finalidad de mejorar la bondad de ajuste de las edades más jóvenes, agregó a la primera ley de Makeham un segundo término que respondía a una fórmula de Gompertz negativa.

$$m_x = A + B \cdot C^x + D \cdot E^{-x} \quad (15)$$

- **Thiele, T.:** Matemático danés que en 1872 propuso una modificación de la ley de Makeham, sugiriendo una expresión con tres sumandos: una curva de Gompertz decreciente ($0 < B_1 < 1$) para mejorar el ajuste de la mortalidad en la infancia, una curva normal para representar la mortalidad en las edades medias y una curva de Gompertz creciente ($B_3 > 1$) para ajustar la mortalidad de las personas de edad más avanzada.

$$m_x = B_1 \cdot C_1^x + B_2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-c_2}{D_2}\right)^2\right) + B_3 \cdot C_3^x \quad (16)$$

Con la finalidad de obtener valores observados de las fuerzas de decremento a partir de una experiencia determinada, **Sprague, T.B. (1879)** desarrolló el siguiente estimador:

$$\hat{m}_x \cong \frac{d}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)} \quad (17)$$

Donde n representa el número de asegurados de que consta la experiencia, $x + a_i$ y $x + b_i$, siendo $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$, las edades inicial y final de observación de un asegurado i , donde $i = 1, \dots, n$, según la información disponible. El numerador, d , representa el número de transiciones registradas en el colectivo durante el periodo de observación.

La expresión del denominador representa la exposición central del colectivo, término actuarial acuñado por **Woolhouse, W.S.B. (1867)**, quien lo definió como la suma del tiempo en que los asegurados de un colectivo han estado expuestos al riesgo.

A mitad del siglo XIX, **Cournot, A. (1843)**, juntamente con el actuario inglés **Makeham, W.M. (1875)**, generalizaron el modelo propuesto anteriormente por **D'Alembert** de 2 causas de fallecimiento: por viruela, por otra causa distinta, a n causas de fallecimiento, estableciendo las relaciones fundamentales del modelo de múltiples decrementos.

$$m_x^k = (a m_x^k) \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (18)$$

$$(a m_x) = \sum_{k=1}^n m_x^k \quad (19)$$

$$(a p)_x = \prod_{j=1}^k (1 - q_x^j) = \prod_{j=1}^k p_x^j \quad (20)$$

siendo,

$(a p)_x$: Probabilidad anual y dependiente de supervivencia entre las edades x y $x+1$

p_x^j : Probabilidad anual e independiente de supervivencia entre las

edades x y $x+1$ por la causa j .

q_x^j : Probabilidad anual e independiente de fallecimiento entre las edades x y $x+1$ por la causa j .

$(a m_x^j)$ Fuerza de fallecimiento dependiente en la edad x por la causa j .

m_x^j Fuerza de fallecimiento independiente en la edad x por la causa j .

La expresión (19) se denomina ley aditiva de fuerzas de fallecimiento. La expresión (20) es conocida como ley multiplicativa de probabilidades. Por combinación de ambas expresiones se puede obtener la función de supervivencia l_x .

$$l_x = l_{x_0} \cdot e^{-\sum_{j=1}^n \int_{x_0}^x m_{x+t}^j dt} \quad (21)$$

Donde x_0 es la edad inicialmente considerada para la cual conoceremos el valor de la función de supervivencia. Una probabilidad dependiente se determina teniendo presente la existencia de otras posibles causas de fallecimiento distintas de la contemplada, que también pudieran presentarse en el colectivo al que se refieren. Las probabilidades independientes, también denominadas probabilidades de eliminación puras resultan de prescindir otras causas.

Levi, E. (1973) propone la siguiente expresión que permite obtener las probabilidades independientes a partir de las dependientes.

$$q_x^j = \frac{(a q_x^j)}{1 - \frac{1}{2} \cdot ((a q_x) - (a q_x^j))} \quad (22)$$

Donde $(a q_x^j)$ representa la probabilidad anual y dependiente de fallecimiento entre las edades x y $x+1$ por la causa j . Por su parte, $(a q_x)$ representa la probabilidad dependiente de salida por cualquier causa entre las edades x y $x+1$.

Richard, P.J. (1946), Seal, H. (1977) y Gerber, H.U. (1990) establecen que la ley multiplicativa de probabilidades sólo es aplicable si las transiciones consideradas son mutuamente excluyentes entre sí, como, por ejemplo, sucede en una operación con múltiples causas de fallecimiento.

La modelización de operaciones con múltiples estados a través del método de los decrementos permite generar tablas de decrementos. Al respecto, destacamos el trabajo de **Haberman, S. (1983)** que plantea la obtención de la función de supervivencia a partir de la resolución del sistema de las $n^2 + 2n$ ecuaciones que forman las ecuaciones de flujo, ecuaciones de orientación y ecuaciones de integración

- Las n ecuaciones de flujo describen la evolución de las personas vivas en un determinado estado i entre las edades x y $x+1$.

$$l_{x+1}^i = l_x^i + \sum_{\forall i \neq j} d_x^{ji} - \sum_{\forall i \neq j} d_x^{ij} \quad i = 1, \dots, n$$

Donde l_x^i representa el número de personas vivas de edad x y estado i , la expresión d_x^{ij} recoge de transiciones entre los estados i y j , entre las edades x y $x+1$.

- Las n^2 ecuaciones de orientación describen la tasa central de salida de los diferentes estados.

$$M_{x+1}^{ij} = \frac{d_x^{ij}}{L_x^i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, n$$

Siendo L_x^i el número de años vividos en i , entre las edades x y $x+1$ por personas del colectivo objeto de estudio; M_x^{ij} es la tasa central observada de transiciones entre los estados i y j , entre las edades x y $x+1$.

- Las n ecuaciones de integración relacionan la función de supervivencia en el estado i con las personas de edades x y $x+1$ vivas en dicho estado.

$$L_{x+1}^i = \frac{1}{2} (l_x^i + l_{x+1}^i) \quad i = 1, \dots, n$$

Los valores de M_x^{ij} resultan conocidos a partir de la experiencia disponible. El anterior sistema de ecuaciones tiene $n^2 + 2n$ incógnitas:

- Los n^2 valores de d_x^{ij} , siendo $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$;
- Los n valores de l_{x+1}^i , siendo $i = 1, \dots, n$
- Los n valores de L_{x+1}^i , donde $i = 1, \dots, n$

Sus valores se obtendrán recurrentemente a partir de una edad inicial x_0 fijada de antemano, para la cual conoceremos los valores de $l_{x_0}^i$, siendo $i = 1, \dots, n$.

Son muchos los autores que se adscriben a esta teoría de decrementos múltiples. **Hooker, P.F. et al. (1957)** elaboraron una tabla de múltiples causas de salida. **Zwinggi, E. (1958)** recogió las probabilidades asociadas a múltiples causas de salida de un colectivo. **Jordan, C.W. (1967)** estudia funciones actuariales correspondientes a modelos con múltiples causas de salida. **Haberman, S. (1983)** introduce la reversibilidad, para lo que añade al modelo tradicional, el tratamiento de los incrementos o entradas procedentes de otros estados de la operación.

Otros trabajos realizados en el campo de la teoría de múltiples decrementos son los debidos a los siguientes autores: **Blaschke, E. (1906)**, **Amtmann, H (1907)**, **Loewy, A. (1924)**, **Berger, A. (1925)**, **Hunter, A. et al. (1932)**, **Spurgeon, E.F. (1932)**, **Galbrun, H. (1933)**, **Richard P.J. (1946)**, **Böhm, F. (1953)**, **Risser, R. (1965)**, **Coppini, M.A. (1968)**, **Bowers, N.L. et al. (1986)** y **Gerber, H.U. (1990)**.

Otras aportaciones a la matemática actuarial vida del siglo XIX que merecen ser destacadas son las debidas a los siguientes autores:

- **Finlaison, J. (1829)**: Fue el primer actuario inglés empleado en la oficina de deuda pública de Inglaterra desde 1821 hasta 1851. Durante este periodo llevó a cabo el estudio de mortalidad más importante realizado hasta entonces que abarcaba el periodo comprendido entre 1695 y 1789. Su estudio se plasmó en

tablas de supervivencia tanto simple como de varias cabezas, vigentes hasta finales del siglo XIX.

- **Hattendorff, K. (1868):** Demostró que la varianza de la pérdida total de una póliza de vida se obtiene como suma de las varianzas de las pérdidas anuales sucesivas.
- **Woolhouse, W.:** En 1869 introdujo un modelo actuarial continuo en el que los seguros por fallecimiento y las rentas de supervivencia se pagan de forma continua en el tiempo.
- **Thiele, T.:** En 1875 dedujo la ecuación diferencial que posteriormente se bautizó con su mismo nombre que refleja la variación infinitesimal de la reserva matemática.

$$\frac{d}{dt} {}_tV_x = P_x + d \cdot {}_tV_x - m_{x+t} \cdot (1 - {}_tV_x) \quad (23)$$

Otros eventos del siglo XIX dignos de mencionarse son los siguientes:

- En 1848 nació el Instituto de Actuarios de Inglaterra (The Institute of Actuaries), el primero que existía en todo el mundo. Poco más tarde, en 1856 nació la facultad de actuarios. Ambas instituciones han desempeñado un papel fundamental en la difusión y divulgación de los progresos de la ciencia actuarial.
- A mediados del siglo XIX, en Inglaterra y Estados Unidos se regula por primera vez la actividad aseguradora, obligando a los aseguradores a constituir la reserva matemática correspondiente a las coberturas aseguradoras realizadas.
- En 1880 se fundó en Estados Unidos la Sociedad de Actuarios (Actuarial Society of America). En 1895 se creó la Asociación Internacional de

Actuarios (International Actuarial Association) que hasta el momento presente ha desempeñado un papel fundamental en el desarrollo y difusión de las innovaciones experimentadas por la ciencia actuarial.

A finales del siglo XIX y principios del XX, se consolidan compañías aseguradoras cada vez con mayor dimensión que aplican en sus cálculos actuariales unas bases técnicas determinadas.

2.3 Modelo estocástico Markoviano

Durante el siglo XX el crecimiento de la practica aseguradora se aceleró aún más, apareciendo grandes compañías aseguradoras multinacionales tanto en Europa como en Estados Unidos. Ello obligó a las autoridades gubernamentales ejercer un mayor control sobre la actividad aseguradora, a través principalmente de las reservas matemáticas.

El desarrollo de la ciencia informática propicia un enorme incremento de la capacidad del cálculo automática que permite a la matemática actuarial de vida explotar nuevos recursos: formular modelos teóricos más complejos y realistas, aplicar métodos de ajuste más precisos y utilizar las técnicas de simulación de Montecarlo de reconocida validez en las aplicaciones concernientes a seguros de vida y planes de pensiones (**Pittaco, E. et al.1997**).

Todo este nuevo ambiente propicia la introducción de los procesos y semiprosos estocásticos de Markov en la modelización de operaciones con múltiples estados. El primer precedente lo encontramos en 1912 en que **Du Pasquier, G.** describe una operación de invalidez temporal, por tanto, reversible, a través de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de Riccati que resuelve suponiendo que las fuerzas de transición son constantes. El trabajo de **Du Pasquier, G.** es enormemente significativo porque constituye una aplicación actuarial de un proceso estocástico de Markov y aporta las bases de la moderna matemática actuarial de operaciones con múltiples estados.

En la difusión posterior de la modelización de operaciones con múltiples estados a partir de la teoría Markoviana, destacamos los siguientes autores:

- **Franckx, E. (1963):** Fue el primer actuario en entrever la posibilidad de unificar el tratamiento actuarial de operaciones con múltiples estado de vidas distintas entre sí, sin descuidar aspectos algorítmicos concernientes al cálculo de las primas y reservas matemáticas.
- **Daboni, L. (1964):** En su trabajo podemos encontrar apuntes que anticipan posteriores desarrollo de las operaciones con múltiples estados, basados en la aceptación de una estructura Markoviana no homogénea y discreta en el tiempo. Particularmente, destacamos el análisis de las relaciones entre las probabilidades de permanecer en estados distintos. Éstas son fundamentales en la valoración actuarial de rentas de invalidez.
- **Amsler, M.H. (1968):** De forma análoga al trabajo presentado por el anterior autor, Amsler, M.H. describe los modelos actuariales para operaciones con múltiples estados desde el punto de vista de un proceso estocástico de Markov, tanto discreto como continuo en el tiempo. Propone un esquema de transiciones en que a la dependencia respecto la edad, añade la de la duración de la permanencia en el mismo estado.
- **Hoem, J.M. (1969):** Expone con carácter general la modelización de una operación con múltiples estados mediante un proceso estocástico de markov continuo en el tiempo.
- **Wolthuis, H. (1994):** Como aportación más importante, destacamos su texto publicado en 1994 en el que propone un estudio de la matemática actuarial vida a través de un enfoque markoviano basado en la aplicación de un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

La modelización de una operación con múltiples estados mediante un modelo estocástico Markoviano permite valorar la misma a partir de sus probabilidades de transición.

Otros autores que merecen ser nombrados son los siguientes: **Waters, H.R. (1984)**, **Wilkie, A.D. (1988)**, **Ramlau-Hansen, H. (1988)**, **Norberg, R. (1992)**, **Jones, B.L. (1993)**, **Linnemann, P. (1993)**, **Hesselager, O. et al. (1996)**, **Haberman, S. (1996) et al.**, **Pittaco, E. et al. (1997)**.

A partir de los trabajos de **Amsler M.H (1968)** y de **Hoem, J.M. (1969)** el modelo de Markov es aceptado universalmente, por la sencillez de su tratamiento y por la potencia de su aplicación, que permite recoger la dependencia estadística entre los diferentes estados que intervienen en cualquier operación con múltiples estados. En el siguiente capítulo lo desarrollaremos ampliamente.

Capítulo 2

Modelo teórico

En este capítulo vamos a abordar la problemática de la modelización estocástica de una operación con múltiples estados con la utilización de tres procesos estocásticos distintos: un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo y un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

Analizaremos las ventajas e inconvenientes de cada uno de los modelos presentados, tanto desde una óptica actuarial como desde un punto de vista más matemático. Igualmente, discutiremos la conveniencia de la aplicación de cada modelo estocástico dependiendo de las características de la operación con múltiples estados a modelizar.

1 Introducción

Sea una operación con múltiples estados cuyo espacio de estados es E . Definimos espacio de estados como aquel conjunto finito de estados que puede alcanzar el asegurado.

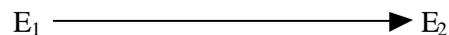
$$E = \{ E_1, E_2, \dots, E_n \}$$

Los estados que lo conforman, atendiendo a su naturaleza, pueden ser de diferentes clases:

- Estado transitivos: Es posible abandonar y volver a acceder a ellos.
- Estados estrictamente transitivos: Una vez se han abandonado, no es posible volver a los mismos.
- Estados absorbentes: No es posible salir del mismo una vez se ha entrado.

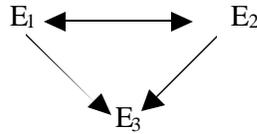
Gráficamente, representamos la operación con múltiples estados con un diagrama de flechas en el que cada transición representa una flecha que une su estado inicial con el final. He aquí algunos ejemplos ilustrativos:

- Seguro de fallecimiento. El asegurador se compromete a pagar un capital de fallecimiento en caso de fallecimiento del asegurado, dentro de la vigencia del contrato.



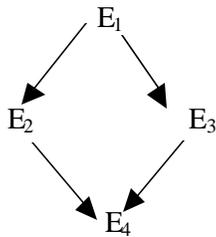
Donde E_1 representa el estado de vivo y E_2 el estado de fallecido. Por tanto, la transición $E_1 \rightarrow E_2$ da lugar al pago del seguro.

- Renta de invalidez temporal. El asegurado paga una renta al asegurado en caso de que éste permanezca inválido.



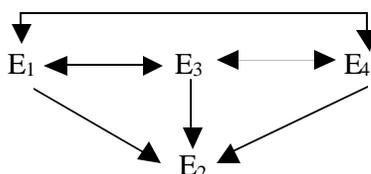
Donde E_1 representa el estado de activo, E_2 el estado de invalidez y E_3 el estado de fallecido. Si el asegurado ocupa el estado E_2 , el asegurador debe pagar la renta de invalidez.

- Pensión de viudedad. Esta cobertura se define sobre dos cabezas, que respectivamente representamos como x e y . El asegurador asume el pago a y de una renta en caso de fallecimiento de x .



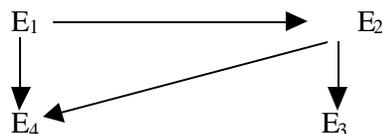
Donde E_1 representa que x y y están vivos, E_2 indica que x está fallecido e y vivo, E_3 asume que x está vivo e y fallecido y por último E_4 representa que x e y están fallecidos. El asegurado debe pagar la renta en caso de que el proceso se encuentre en el estado E_2 .

- Cobertura del riesgo de dependencia (“Long term care”). Prevé la intervención del asegurador para hacer frente a situaciones de necesidad de asistencia que se pueden verificar en edades avanzadas a causa de la reducción de su autosuficiencia (**Pitacco, E. 1997 et al.**).



Donde E_1 representa el estado de activo, E_3 el estado de dependencia de nivel I, E_4 el estado de dependencia de nivel II y E_2 el estado de fallecimiento. El estado de dependencia de nivel II corresponde a una situación con mayor falta de autosuficiencia. Normalmente, la cobertura del riesgo de dependencia se realiza mediante una renta pagadera en los estados E_3 y E_4 . La cuantía de los términos de la renta es mayor en E_4 que en E_3 , por el mayor grado de dependencia del asegurado.

- Cobertura de enfermedades graves (“Dread disease” o “Critical illness cover”). Comporta el pago de un capital por parte del asegurador en caso de que el asegurado contraiga una enfermedad grave (cáncer, infarto miocárdico, etc.) prevista en el contrato de seguro.



Donde E_1 es el estado de activo, E_2 expresa el estado afectado por una enfermedad grave contemplada en el contrato de seguro, E_3 representa el

estado de fallecido a causa de una enfermedad grave también incluida en el contrato de seguro y por último E_4 es el estado de fallecimiento por una causa distinta. El capital asegurado resulta pagadero a la transición $E_1 \rightarrow E_2$.

En los siguientes epígrafes trataremos la modelización de una operación con múltiples estados cualquiera a través de uno de los siguientes procesos estocásticos:

- Un proceso estocástico de Markov, discreto o continuo en el tiempo en los que la evolución en el estado futuro del asegurado únicamente dependerá de su edad y estados actuales.
- Un semiproceso estocástico de Markov cuya principal singularidad será que la evolución del asegurado dependerá además de la edad, de otras variables adicionales.

2 Proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo

En este epígrafe definiremos un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo aplicado a una operación con múltiples estados definida sobre un cierto colectivo. Una vez definida la evolución estocástica de la operación, explicaremos varios conceptos relacionados con la evolución del proceso estocástico (matriz de transición, vector de estados, etc.)

2.1 Definición

Sea un proceso estocástico discreto, $\{S(x), x \in N\}$, donde $S(x)$ representa el estado del asegurado a una cierta edad x . Este proceso estocástico presenta como principal característica la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned} \Pr(S(x+1) = s_{x+1} / S(x) = s_x \wedge S(x-1) = s_{x-1} \wedge \dots \wedge S(0) = s_0) = & \quad (1) \\ = \Pr(S(x+1) = s_{x+1} / S(x) = s_x) & \end{aligned}$$

Donde $s_0, s_1, \dots, s_x, s_{x+1} \in E$. Como queda de manifiesto en (1), esta propiedad consiste en que la probabilidad que el asegurado alcance la edad $x+1$ en el estado s_{x+1} , solamente depende del estado que ocupa en la edad x .

A la probabilidad condicionada recogida en la expresión (1) la denominamos probabilidad de transición entre las edades x y $x+1$ y los estados $s_x = E_i$ y $s_{x+1} = E_j$; la representaremos del siguiente modo.

$$\Pr(S(x+1) = j / S(x) = i) = p_x^{ij}$$

Las probabilidades de transición de una operación con múltiples estados verificarán $\forall x > 0, \forall r < t$ y $E_i, E_j \in E$ las siguientes propiedades.

- Dada la naturaleza personal de los riesgos objeto de aseguramiento por parte de una operación con múltiples estados, las probabilidades de transición no son estacionarias en el tiempo. Es decir, en general, se cumplirá que las probabilidades de transición $p_x^{ij} \neq p_y^{ij}$ son distintas.
- Las probabilidades de transición, como tales, toman valores comprendidos entre 0 y 1. Es decir $0 \leq p_x^{ij} \leq 1$.
- La suma de probabilidades de transición, de un determinado estado suman la unidad.

$$\sum_{k \in E} p_x^{kj} = 1$$

- Las probabilidades de transición verifican la ecuación de Chapman-Kolmogorov.

$${}_{/t}P_x^{ij} = \sum_{k \in E} {}_{/r}P_x^{ik} \cdot {}_{/t-r}P_{x+r}^{kj} \quad (2)$$

La aplicación de la ecuación de Chapman-Kolmogorov tiene gran importancia ya que permite la construcción de probabilidades de transición con temporalidad superior al año, las cuales mantendrán las propiedades de las probabilidades de transición anuales formuladas con anterioridad.

2.2 Matriz de transición

Definimos la matriz de transición anual entre las edades x y $x+1$ como aquella matriz cuadrada de orden n que recoge todas las probabilidades de transición anuales posibles entre dichas edades.

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} p_x^{11} & p_x^{12} & \cdots & p_x^{1n} \\ p_x^{21} & p_x^{22} & \cdots & p_x^{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_x^{n1} & p_x^{n2} & \cdots & p_x^{nn} \end{pmatrix}$$

Dado que cada fila representa las probabilidades de transición de un mismo estado, que anteriormente hemos visto suman la unidad, y los elementos de la matriz son probabilidades de transición comprendidas entre 0 y 1, la matriz de transición \mathbf{P}_x es una matriz estocástica.

Derivado de la misma no estacionariedad que caracteriza todo proceso estocástico asociado a una operación actuarial de vida, la matriz de transición irá cambiando con la edad. Consecuentemente, se cumplirá como norma general que para edades diferentes se satisfaga $\mathbf{P}_x \neq \mathbf{P}_y$.

2.3 Vector de estado

Definimos vector de estado de la Cadena de Markov correspondiente a la edad $x+t$, como aquel vector de n componentes, en el que la componente k -ésima expresa la probabilidad de transición entre las edades x y $x+t$ desde el estado inicial E_k al estado E_j .

El vector $\mathbf{m}_x^i(t)$ es un vector estocástico porque sus componentes recogen todas las probabilidades de transición temporales asociadas al estado inicial E_i por lo que sus componentes son positivas y suman 1.

$$\mathbf{m}_x^i(t) = \left({}_{/i}P_x^{i1}, {}_{/i}P_x^{i2}, \dots, {}_{/i}P_x^{ij}, \dots, {}_{/i}P_x^{in} \right)$$

Inicialmente el vector de estado será un vector unitario cuya única componente no nula valdrá 1 y coincidirá en orden con el estado inicial i -ésimo.

$$\mathbf{m}_x^i(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Los vectores de estado sucesivos pueden expresarse a partir del vector de estado inicial, tal como mostramos a continuación:

$$\mathbf{m}_x^i(1) = \mathbf{m}_x^i(0) \cdot \mathbf{P}_x$$

$$\mathbf{m}_x^i(2) = \mathbf{m}_x^i(1) \cdot \mathbf{P}_{x+1} = \mathbf{m}_x^i(0) \cdot (\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{P}_{x+1})$$

.....

$$\mathbf{m}_x^i(t-1) = \mathbf{m}_x^i(t-2) \cdot \mathbf{P}_{x+t-2} = \dots = \mathbf{m}_x^i(0) \cdot (\mathbf{P}_{x+t-2} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_x) = \mathbf{m}_x^i(0) \cdot \prod_{r=0}^{t-2} \mathbf{P}_{x+r}$$

$$\mathbf{m}_x^i(t) = \mathbf{m}_x^i(t-1) \cdot \mathbf{P}_{x+t-1} = \dots = \mathbf{m}_x^i(0) \cdot (\mathbf{P}_{x+t-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_x) = \mathbf{m}_x^i(0) \cdot \prod_{r=0}^{t-1} \mathbf{P}_{x+r}$$

El productorio matricial de la anterior fórmula nos permite hallar las diferentes probabilidades de transición desde la edad x hasta $x+t$. Por esta razón, la matriz resultante de dicho producto de matrices será la matriz de transición entre las edades x y $x+t$. Sus elementos son probabilidades de transición temporales

$$\mathbf{P}_x(t) = \prod_{r=0}^t \mathbf{P}_{x+r}$$

La expresión anterior demuestra que las probabilidades temporales asociadas a un proceso estocástico de markov discreto en el tiempo pueden obtenerse a partir del productorio de las probabilidades de transición anuales. Estas probabilidades anuales serán objeto de estimación, para a partir de las mismas obtener las probabilidades de transición temporales.

2.4 Ecuación general del proceso estocástico

La ecuación general del proceso estocástico de markov discreto en el tiempo permite describir la variación del vector de estado en dos periodos consecutivos. Para obtener la ecuación general obtendremos de forma recurrente una expresión del vector de estado correspondiente al periodo (t+1)-ésimo.

$$\begin{aligned}
 m_x^i(1) &= m_x^i(0) \cdot P_x \\
 m_x^i(2) &= m_x^i(1) \cdot P_{x+1} \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 m_x^i(t) &= m_x^i(t-1) \cdot P_{x+t-1} \\
 \\
 m_x^i(t+1) &= m_x^i(t) \cdot P_{x+t} \tag{3}
 \end{aligned}$$

La expresión (3), que determina un sistema de ecuaciones lineales, se le conoce por el nombre de ecuación general de la Cadena de Markov.

3 Proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo

Una operación de vida con múltiples estados modelizada mediante un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo efectúa un seguimiento de la evolución de estado de forma periódica en el tiempo (cada año, mes, etc.). En cambio, un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo realiza un estudio más exhaustivo porque recoge la evolución de estado del asegurado en un escenario de tiempo continuo.

3.1 Definición

Sea un proceso estocástico continuo en el tiempo, $\{S(x), x \in R\}$, donde $S(x)$ representa el estado del asegurado a una cierta edad x . Éste se caracteriza porque la probabilidad de que el asegurado ocupe el estado s_{x+t} a la edad $x+t$, siendo $t > 0$, solamente depende del estado que ocupa el asegurado en la edad actual x , sin intervenir, por tanto, la historia anterior del proceso estocástico. Consecuentemente, $\forall t > 0$ y $\forall d_1 < \dots < d_n$ se cumple la expresión (4).

$$\begin{aligned} \Pr(S(x+t) = s_{x+t} / S(x) = s_x \wedge S(x-d_1) = s_{x-d_1} \wedge \dots \wedge S(x-d_n) = s_{x-d_n}) &= (4) \\ &= \Pr(S(x+t) = s_{x+t} / S(x) = s_x) \end{aligned}$$

Donde $s_0, s_1, \dots, s_{x-t}, s_x, s_{x+t} \in E$. La expresión (4) representa la probabilidad de transición entre las edades x y $x+t$ y los estados s_x y s_{x+t} respectivamente. Representaremos dicha probabilidad, de acuerdo a una notación más convencional, de la siguiente forma:

$$\Pr(S(x+t) = j / S(x) = i) = {}_{/t}P_x^{ij}$$

Donde $s_x = E_i$ y $s_{x+t} = E_j$. Las probabilidades de transición de un proceso estocástico de markov continuo en el tiempo verifican las mismas propiedades que las de un proceso estocástico discreto.

$${}_{/t}P_x^{ij} \neq {}_{/t}P_y^{ij}$$

$$0 \leq {}_{/t}P_x^{ij} \leq 1$$

$$\sum_{k \in E} {}_{/t}P_x^{ik} = 1$$

$${}_{/t}P_x^{ij} = \sum_{k \in E} {}_{/r}P_x^{ik} \cdot {}_{/t-r}P_{x+r}^{kj}$$

3.2 Matriz de transición

La matriz de transición entre las edades x y $x+t$ se define de igual forma que hicimos en un proceso estocástico de markov discreto en el tiempo y cumple las mismas propiedades lo que significa que también será una matriz estocástica.

$$P_x(t) = \begin{pmatrix} {}_tP_x^{11} & {}_tP_x^{12} & \cdots & {}_tP_x^{1n} \\ {}_tP_x^{21} & {}_tP_x^{22} & \cdots & {}_tP_x^{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_tP_x^{n1} & {}_tP_x^{n2} & \cdots & {}_tP_x^{nn} \end{pmatrix}$$

3.3 Vector de estado

El vector de estado de un proceso estocástico de markov continuo en el tiempo se define de la misma forma que en un proceso discreto.

$$m_x^i(t) = ({}_tP_x^{i1}, {}_tP_x^{i2}, \dots, {}_tP_x^{ij}, \dots, {}_tP_x^{in})$$

3.4 Matriz de intensidades de transición

Definimos la función de intensidad de transición en la edad x del estado E_i a E_j , siendo $E_i \neq E_j$ como aquella función que proporciona la densidad de probabilidad de transición de los estados anteriores en la edad x . Formalmente, se define a partir del siguiente límite.

$$m_x^{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{{}_{\Delta t}P_x^{ij}}{\Delta t}$$

El producto infinitesimal $m_x^{ij} \cdot dx$ lo podemos interpretar como la probabilidad de transición entre los estados E_i y E_j en un periodo infinitesimal.

La intensidad total de transición del estado E_i se obtiene como suma de las intensidades de transición parciales del estado E_i a cualquier otro distinto. Su valor se interpreta como la densidad de probabilidad de salida del estado E_i entre las edades x y $x+dx$.

$$\mathbf{m}_x^i = \sum_{\forall k \neq j} \mathbf{m}_x^{ik} = \sum_{\forall k \neq j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{{}_{/\Delta t} P_x^{ik}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1 - {}_{/\Delta t} P_x^{ii}}{\Delta t}$$

La expresión diferencial $\mathbf{m}_x^i \cdot dx$ se interpreta como la probabilidad de salida del estado E_i entre las edades x y $x+dx$. Las intensidades de transición pueden variar entre 0 y ∞ . Asumimos la existencia de los anteriores límites así como la integrabilidad de todas las intensidades de transición.

A efectos de obtener la matriz de intensidades de transición, vamos a plantear el cociente incremental del vector de estado $\mathbf{m}_x^i(0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m}_x^i(\Delta t) - \mathbf{m}_x^i(0)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m}_x^i(0) \cdot (\mathbf{P}_x(\check{\Delta}t) - \mathbf{I})}{\Delta t} = \\ &= \mathbf{m}_x^i(0) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{P}_x(\check{\Delta}t) - \mathbf{I})}{\Delta t} = \mathbf{m}_x^i(0) \cdot \check{\mathbf{E}}_x \end{aligned}$$

De la anterior relación, definimos la matriz $\check{\mathbf{E}}_x$ del siguiente modo:

$$\check{\mathbf{E}}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{P}_x(\check{\Delta}t) - \mathbf{I})}{\Delta t}$$

$\check{\mathbf{E}}_x$ representa una matriz cuadrada de orden n , no estacionaria, que denominaremos matriz de intensidades de transición:

- Un elemento de $\check{\mathbf{E}}_x$ correspondiente a la fila i y columna j , siendo $i \neq j$, representa la intensidad de transición \mathbf{m}_x^{ij} .

- Los elementos que componen una fila de la matriz suman 0, (Möller, C.M. (1992)). Por ello el elemento de la fila i y columna j de $\ddot{\mathbf{E}}_x$ se obtiene como sigue.

$$\sum_{\forall k, j} m_x^{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_x^{ji} = - \sum_{\forall k \neq j} m_x^{jk} = - m_x^j$$

De esta forma la matriz de intensidades de transición responderá a la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{E}}_x = \begin{pmatrix} m_x^{11} & m_x^{12} & \dots & m_x^{1i} & \dots & m_x^{1n} \\ m_x^{21} & m_x^{22} & \dots & m_x^{2i} & \dots & m_x^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_x^{j1} & m_x^{j2} & \dots & m_x^{ji} & \dots & m_x^{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_x^{n1} & m_x^{n2} & \dots & m_x^{ni} & \dots & m_x^{nn} \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$\ddot{\mathbf{E}}_x = \begin{pmatrix} -m_x^1 & m_x^{12} & \dots & m_x^{1i} & \dots & m_x^{1n} \\ m_x^{21} & -m_x^2 & \dots & m_x^{2i} & \dots & m_x^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_x^{j1} & m_x^{j2} & \dots & -m_x^j & \dots & m_x^{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_x^{n1} & m_x^{n2} & \dots & m_x^{ni} & \dots & -m_x^n \end{pmatrix}$$

3.5 Ecuación general del proceso estocástico

Para deducir la ecuación general del proceso estocástico, deberemos analizar el efecto de una variación infinitesimal de tiempo sobre el vector de estado.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x^i(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x^i(t) \cdot (P_{x+t}(\Delta t) - I)}{\Delta t} = \\ &= m_x^i(t) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(P_{x+t}(\Delta t) - I)}{\Delta t} = m_x^i(t) \cdot \ddot{\mathbf{E}}_{x+t} \end{aligned}$$

$$\frac{d m_x^i(t)}{dt} = m_x^i(t) \cdot \ddot{\mathbf{E}}_{x+t} \tag{5}$$

A la expresión (5) la denominaremos ecuación general del Proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo. La ecuación general muestra la variación infinitesimal del vector de estado.

La ecuación general de una proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo, recogida en la expresión (3), daba lugar a un sistema de ecuaciones lineales en las que las incógnitas eran las probabilidades de transición. La ecuación (5) se corresponde con un sistema de ecuaciones diferenciales, con lo que la dificultad aumenta muy considerablemente.

Además, el anterior sistema de ecuaciones diferenciales, será un sistema de ecuaciones lineales pero con coeficientes variables, dado que las intensidades de transición varían con el tiempo. Ello supone una dificultad añadida muy importante ya que no existen métodos generales que permitan resolver este tipo de ecuaciones sin asumir hipótesis muy restrictivas, actuarialmente no significativas. Consecuentemente, deberemos recurrir a aplicar métodos numéricos.

3.6 Ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov

A partir de la ecuación general del Proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo se genera un sistema de ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov. Son ecuaciones diferenciales lineales cuyos coeficientes, las intensidades de transición, son variables en el tiempo como consecuencia de la no estacionariedad del proceso estocástico.

Estas ecuaciones diferenciales lineales sirven para describir la variación infinitesimal de cada una de las probabilidades de transición de una cierta temporalidad t . De esta forma las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov expresan la relación de dependencia estadística existente entre las distintas intensidades de transición.

Por su misma definición, tendremos tantas ecuaciones diferenciales como probabilidades de transición hayamos definido. Su expresión para cada una de las probabilidades de transición es la siguiente y $\forall s \leq t$ y $\forall E_i, E_j \in E$:

$$d \left({}_t P_x^{ij} \right) = \sum_{\substack{\forall \\ l \neq k}} {}_t P_x^{ik} \cdot m_{x+t}^{kj} \cdot dt - {}_t P_x^{ij} \cdot m_{x+t}^j \cdot dt \quad (6)$$

La expresión (6) establece que la variación de la probabilidad de transición entre los estados E_i y E_j en el intervalo $[t, t + dt]$ se obtiene como la diferencia de probabilidad de entrada al estado E_j menos la probabilidad de salida del mismo durante un intervalo de tiempo infinitesimal.

Demostración de (6):

Las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov se obtienen por diferenciación respecto t de cada una de las probabilidades de transición $\forall E_i, E_j \in E$ y posterior sustitución en la expresión resultante de la ecuación original de Chapman-Kolmogorov, expresión (2).

$$\begin{aligned} \frac{d \left({}_t P_x^{ij} \right)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{{}_{t+\Delta t} P_x^{ij} - {}_t P_x^{ij}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{\forall k} {}_t P_x^{ik} \cdot {}_{t+\Delta t} P_{x+t}^{kj} - {}_t P_x^{ij}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{\forall k \neq j} {}_t P_x^{ik} \cdot {}_{t+\Delta t} P_{x+t}^{kj}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{{}_t P_x^{ij} \cdot {}_{t+\Delta t} P_{x+t}^{jj} - {}_t P_x^{ij}}{\Delta t} = \\ &= \sum_{\forall k \neq j} {}_t P_x^{ik} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{{}_{t+\Delta t} P_{x+t}^{kj}}{\Delta t} - {}_t P_x^{ij} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1 - {}_{t+\Delta t} P_{x+t}^{jj}}{\Delta t} = \\ &= \sum_{\forall k \neq j} {}_t P_{x+r}^{ik} \cdot m_{x+r+t}^{kj} - {}_t P_{x+r}^{ij} \cdot m_{x+r+t}^j \end{aligned}$$

3.7 Definición de otras medidas de probabilidad

Definimos ${}_t p_x^{\bar{ii}}$ como la probabilidad de permanecer de forma ininterrumpida en el estado $E_i \in E$ entre las edades x y $x+t$. Análíticamente, su valor se obtiene a partir de las intensidades de transición de salida de E_i .

$$\begin{aligned} {}_t p_x^{\bar{ii}} &= \Pr(S(\mathbf{t}) = i \ \forall \ \mathbf{t} \in [0, t] \ / \ S(\mathbf{t}) = i) = \\ {}_t p_x^{\bar{ii}} &= e^{-\int_0^t \sum_{\forall k \neq i} \mathbf{m}_{x+u}^{ik} du} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^i du} \end{aligned} \quad (7)$$

Demostración de (7)

Diferenciamos ${}_t p_x^{\bar{ii}}$.

$$\begin{aligned} \frac{d({}_t p_x^{\bar{ii}})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{t+\Delta t} p_x^{\bar{ii}} - {}_t p_x^{\bar{ii}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t p_x^{\bar{ii}} \cdot {}_{\Delta t} p_{x+t}^{\bar{ii}} - {}_t p_x^{\bar{ii}}}{\Delta t} = \\ &= -{}_t p_x^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(1 - {}_{\Delta t} p_{x+t}^{\bar{ii}})}{\Delta t} = -{}_t p_x^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^i = -{}_t p_x^{\bar{ii}} \cdot \sum_{\forall k \neq j} \mathbf{m}_{x+t}^{ik} \\ d(\ln {}_t p_x^{\bar{ii}}) &= - \sum_{\forall k \neq j} \mathbf{m}_{x+t}^{ik} dt \\ \int_0^t d(\ln {}_u p_x^{\bar{ii}}) &= - \int_0^t \sum_{\forall k \neq j} \mathbf{m}_{x+u}^{ik} du \\ {}_t p_x^{\bar{ii}} &= e^{-\int_0^t \sum_{\forall k \neq i} \mathbf{m}_{x+u}^{ik} du} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^i du} \end{aligned}$$

La expresión (7) se puede resolver de forma exacta o aproximada, aplicando métodos numéricos de integración, como por ejemplo, el método de los trapecios o la regla de Simpson. **Wolthuis, H. (1994)** define la probabilidad de transición en n etapas del estado $E_i \in E$ a $E_j \in E$, entre las edades x y $x+t$, como la probabilidad de que una persona inicialmente en el estado E_i se encuentre en E_j después de haber transcurrido t

años, habiéndose realizado n transiciones. Representaremos dicha probabilidad como ${}_t p_x^{ij, (n)}$. La introducción de las probabilidades de transición de n etapas permite definir ${}_t p_x^{ij}$ de la siguiente forma:

$${}_t p_x^{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_t p_x^{ij, (n)}$$

Definimos la tasa de la transición $E_r \mapsto E_s$ entre las edades x y $x+t$ de una persona inicialmente en el estado E_i , siendo $E_i, E_r, E_s \in E$ como el número esperado de transiciones $E_r \mapsto E_s$ entre ambas edades. Representamos la tasa de transición a través de la expresión ${}_t q_x^{irs}$ cuya expresión seguidamente deducimos.

$${}_t q_x^{irs} = \int_0^t {}_u p_x^{ir} \cdot \mathbf{m}_{x+u}^{rs} \cdot du \quad (8)$$

En el caso particular de que la transición $E_r \rightarrow E_s$ sólo pueda registrarse una vez en la temporalidad considerada, la tasa de transición ${}_t q_x^{irs}$ puede tratarse como una probabilidad de transición, gozando de sus mismas propiedades. En caso contrario, ${}_t q_x^{irs}$ puede tomar valores superiores a 1 y, por tanto, no debe tratarse como una probabilidad.

Por ${}_t q_x^{iEj}$, entendemos el número esperado de transiciones registradas a E_j procedentes de cualquier otro estado entre las edades x y $x+t$ de un asegurado inicialmente en el estado E_i . Por otra parte, ${}_t q_x^{i,jE}$ representa el número esperado de transiciones del estado E_j a otro distinto entre las edades x y $x+t$ de un asegurado que se encuentra inicialmente en el estado E_i .

$${}_t q_x^{iEj} = \sum_{k \neq r} \int {}_t p_x^{ik} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{kj} dt$$

$${}_t q_x^{i,jE} = \int {}_t p_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^j dt$$

La probabilidad de la transición $E_i \mapsto E_j$ se puede expresar como sigue, donde \mathbf{d}_{ij} indica la delta de Kronecker que es igual a 0 para $i \neq j$ e igual a 1 para $i = j$:

$${}_{/t}P_x^{ij} = \mathbf{d}_{ij} + {}_{/t}q_x^{iEj} - {}_{/t}q_x^{i:jE} \quad (9)$$

Demostración de (9):

Por integración de las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov, obtenemos la siguiente relación.

$$\begin{aligned} d({}_{/t}P_x^{ij}) &= \sum_{k \neq j} {}_{/t}P_x^{ik} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{kj} \cdot dt - {}_{/t}P_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^j \cdot dt \\ \int d({}_{/t}P_x^{ij}) &= \int \sum_{k \neq j} {}_{/t}P_x^{ik} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{kj} \cdot dt - \int {}_{/t}P_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^j \cdot dt \\ {}_{/t}P_x^{ij} &= \sum_{k \neq j} \int {}_{/t}P_x^{ik} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{kj} \cdot dt - \int {}_{/t}P_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^j \cdot dt \\ {}_{/t}P_x^{ij} &= \mathbf{d}_{ij} + {}_{/t}q_x^{iEj} - {}_{/t}q_x^{i:jE} \end{aligned}$$

De forma similar, a través de la ecuación ordinaria de Chapman-Kolmogorov, $\forall E_i, E_j, E_r, E_s \in E$ y $\forall 0 \leq t \leq u$, derivamos la siguiente relación entre las probabilidades de transición y las correspondientes tasas de transición.

$${}_{/u}q_x^{i:rs} - {}_{/t}q_x^{i:rs} = \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot {}_{/u-t}q_{x+t}^{j:rs} \quad (10)$$

Demostración de (10):

Integramos las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov.

$$\begin{aligned} {}_{/u}P_x^{ir} &= \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot {}_{/u-t}P_{x+t}^{jr} \\ {}_{/u}P_x^{ir} \cdot \mathbf{m}_{x+u}^{rs} &= \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot {}_{/u-t}P_{x+t}^{jr} \cdot \mathbf{m}_{x+u}^{rs} \end{aligned}$$

$$\int_t^u {}_{/v}P_x^{ir} \cdot \mathbf{m}_{x+v}^{rs} \cdot dv = \int_0^{u-t} \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot {}_{/v}P_{x+t}^{jr} \cdot \mathbf{m}_{x+t+v}^{rs} \cdot dv$$

$$\int_t^u {}_{/v}P_x^{ir} \cdot \mathbf{m}_{x+v}^{rs} \cdot dv = \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot \int_0^{u-t} {}_{/v}P_{x+t}^{jr} \cdot \mathbf{m}_{x+t+v}^{rs} \cdot dv$$

$$\int_t^u {}_{/v}P_x^{ir} \cdot \mathbf{m}_{x+v}^{rs} \cdot dv = \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot {}_{/u-t}q_{x+t}^{j:rs}$$

$$\int_0^u {}_{/v}P_x^{ir} \cdot \mathbf{m}_{x+v}^{rs} \cdot dv - \int_0^t {}_{/v}P_x^{ir} \cdot \mathbf{m}_{x+v}^{rs} \cdot dv = \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot {}_{/u-t}q_{x+t}^{j:rs}$$

$${}_{/u}q_x^{i:rs} - {}_{/t}q_x^{i:rs} = \sum_{j \in E} {}_{/t}P_x^{ij} \cdot {}_{/u-t}q_{x+t}^{j:rs}$$

3.8 Métodos de estudio y análisis

Una operación actuarial de vida modelizada a través de un Proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo puede ser tratada de formas distintas:

- Estimando en primer lugar las probabilidades de transición y obteniendo las intensidades de transición a partir de sus vabres.
- Estimando inicialmente las intensidades de transición para después calcular las probabilidades de transición. Este método ha sido ampliamente contrastado por autores tales como **Sverdrup, E. (1965)**, **Hoem, JM. (1984)** o **Waters, H.R. (1984)**.

Optamos por el segundo procedimiento porque, tal como ponen de manifiesto esos mismos autores, conserva mejor la naturaleza estocástica del proceso.

4 Semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo

Podemos elaborar modelos más realistas, incorporando al estudio del proceso estocástico continuo, otros aspectos de interés como pueden ser los siguientes:

- Dependencia de algunas intensidades (probabilidades) de transición respecto a la edad de suscripción de la póliza.
- Dependencia de algunas intensidades (probabilidades) de transición de la permanencia en el estado presente desde la última transición.
- Dependencia de algunas intensidades (probabilidades) de transición del tiempo total en el estado presente, desde la suscripción de la póliza.

El resultado de incluir alguna de las anteriores hipótesis será un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo. Este proceso estocástico resultará más complejo que el proceso estocástico de Markov original pero más realista, ya que incluye más variables de estudio: duración de la permanencia en el estado actual desde la última transición, permanencia total en determinados estados, etc.

Un proceso estocástico de Markov, $\{S(x), x \in R\}$, se construye sobre una hipótesis muy simple: la probabilidad de $S(x+t)$ solo depende de $S(x)$. Un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo añadirá a la anterior probabilidad condicionada más variables. Nosotros supondremos, en concreto, una variable más z . Consecuentemente, $\forall t, d_0 \geq 0$, se cumple la siguiente probabilidad.

$$\text{Prob}(S(x+t)=s_{x+t} \wedge Z(x+t)=z_{x+t} / S(x)=s_x \wedge Z(x)=z_x \cdots \wedge S(x-d_0)=s_{x-d_0}, Z(x-d_0)=z_{x-d_0} \cdots) =$$

$$\text{Prob}(S(x+t)=s_{x+t} \wedge Z(x+t)=z_{x+t} / S(x)=s_x \wedge Z(x)=z_x)$$

Sus probabilidades de transición entre las edades x y $x+t$ y los estados E_j y E_k dependerán de x y z .

$${}_t P_{x,z}^{ij} = \text{Prob}(S(x+t)=j / S(x)=i, Z(x)=z)$$

Las intensidades de transición asociadas a un semiproceso estocástico de Markov, a diferencia de las intensidades de transición definidas para un proceso estocástico de Markov, son funciones bivariantes porque dependen de x y z .

$$\mathbf{m}_{x,z}^{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{{}_t P_{x,z}^{ij}}{\Delta t}$$

Es posible que algún tipo de transición no dependa de z . En tal caso, las probabilidades e intensidades de transición correspondientes se definirán como las expresiones correspondientes derivadas de un proceso de Markov continuo en el tiempo.

La presencia de z complica la construcción del sistema de ecuaciones de Chapman-Kolmogorov ya que en lugar de obtener ecuaciones diferenciales, tendremos ecuaciones integro-diferenciales.

Las probabilidades de permanencia ininterrumpida en un mismo estado, se obtienen de forma muy similar al procedimiento seguido en un proceso estocástico de Markov.

$$\text{Prob}(S(\mathbf{t}) = i \ \forall \ \mathbf{t} \in [x, x+t] / S(x) = i, Z(x) = z) = \tag{11}$$

$$= {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} = e^{-\int_0^t \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \mathbf{m}_{x+u, z+u}^{ik} du} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u, z+u}^i du}$$

Demostración de (11)

Demostraremos la validez de la expresión (11) por diferenciación de ${}_t P_x^{\bar{j}}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left({}_t P_{x,z}^{\bar{i}}\right)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{t+\Delta t} P_{x,z}^{\bar{i}} - {}_t P_{x,z}^{\bar{i}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_{x,z}^{\bar{i}} \cdot {}_{t+\Delta t} P_{x+t,z+t}^{\bar{i}} - {}_t P_{x,z}^{\bar{i}}}{\Delta t} = \\
 &= -{}_t P_{x,z}^{\bar{i}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(1 - {}_{t+\Delta t} P_{x+t,z+t}^{\bar{i}}\right)}{\Delta t} = -{}_t P_{x,z}^{\bar{i}} \cdot m_{x+t,z+t}^i = -{}_t P_{x,z}^{\bar{i}} \cdot \sum_{\forall k \neq i} m_{x+t,z+t}^{ik} \\
 d\left(\ln {}_t P_{x,z}^{\bar{i}}\right) &= - \sum_{\forall k \neq i} m_{x+t,z+t}^{ik} dt \\
 \int_0^t d\left(\ln {}_u P_{x,z}^{\bar{i}}\right) &= - \int_0^t \sum_{\forall k \neq i} m_{x+u,z+u}^{ik} du \\
 {}_t P_{x,z}^{\bar{i}} &= e^{-\int_0^t \sum_{\forall k \neq i} m_{x+u,z+u}^{ik} du} = e^{-\int_0^t m_{x+u,z+u}^{ik} du}
 \end{aligned}$$

Las tasas de transición se definen de forma análoga a la expresión (8), correspondiente a un proceso estocástico de markov continuo.

$${}_t q_{x,z}^{i:rs} = \int_0^t {}_u P_{x,z}^{ir} \cdot m_{x+u}^{rs} du$$

El método de estudio utilizado coincide con el de un proceso estocástico de markov continuo en el tiempo: en primer lugar estimamos las intensidades de transición y posteriormente se obtienen de forma aproximada las probabilidades de transición.

Derivado de la misma complejidad de las ecuaciones integro-diferenciales y de las intensidades de transición que intervienen en su caracterización, la obtención numérica a través de métodos de aproximación, resultará sumamente compleja.

Capítulo 3

Métodos de ajuste

En este capítulo vamos a proponer diferentes métodos de ajuste y estimación de las probabilidades anuales e intensidades de transición. Estos métodos están basados en el análisis de la experiencia disponible. Contemplaremos métodos de ajuste tanto paramétricos como no paramétricos. De cada uno de ellos, extraeremos sus ventajas e inconvenientes. Finalizaremos el capítulo con unos anexos en donde realizaremos algunas aplicaciones prácticas de los modelos de estimación anteriormente expuestos.

1 Introducción

En la estimación de las intensidades y probabilidades anuales de transición, asumiremos las siguientes hipótesis de trabajo:

- Fijamos un periodo de observación cuya duración depende del tamaño del colectivo observado. Si el tamaño es muy grande el periodo de observación puede llegar a ser de un solo año. Para colectivos más reducidos el **C.M.I.B. (1991)**, propone periodos comprendidos entre 3 y 5 años.
- Asignamos a cada asegurado una edad mediante el criterio de la edad actuarial (edad entera más próxima al cumpleaños) o de la edad entera alcanzada (edad natural).
- Durante el periodo de observación, realizamos un seguimiento de la evolución de cada asegurado, atendiendo a su edad y estado.
- Para favorecer la claridad de exposición de los modelos presentados, supondremos que no se incurren en duplicidades de registros para un mismo asegurado. Esto significa que no contabilizaremos simultáneamente más de una póliza por asegurado¹.

Dada la transición $E_i \mapsto E_j$, siendo $E_i, E_j \in E$, definimos X como el conjunto de edades observadas, para las cuales podemos disponer de la siguiente información:

N_x^{ij} : Número de transiciones $E_i \mapsto E_j$ con edad x .

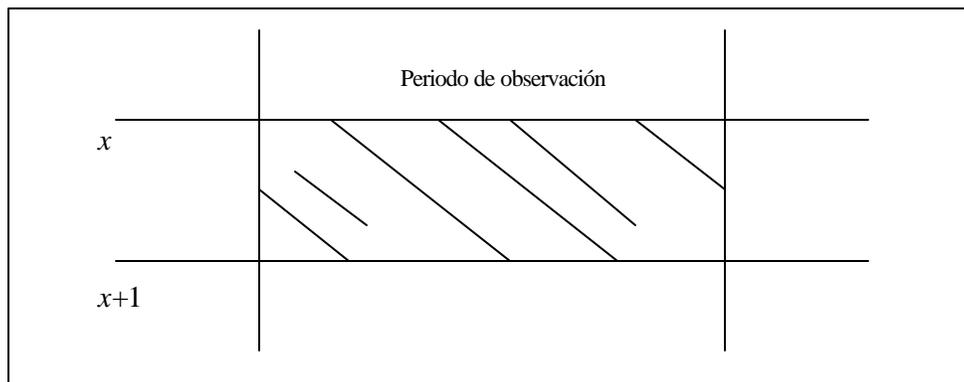
R_x^i Exposición inicial u observaciones de asegurados distintos en el estado E_i y edad x . Resulta necesario en la estimación de las probabilidades de transición anuales.

¹ Al respecto, **Haberman, S. et al. (1996)**, **C.M.I.B. (1991)** y **Forfar, D.O. et al. (1988)** demuestran que el tratamiento de la duplicidad de registros en los modelos que exponemos es posible y únicamente exige corregir algunas de las hipótesis teóricas asumidas.

Navarro, E. (1991) definen exposición inicial al riesgo como el periodo de tiempo potencialmente² vivido en el estado E_i y edad x durante el periodo de observación.

\bar{R}_x^i : Exposición central o tiempo de permanencia de los asegurados del colectivo en el estado E_i con edad x . Normalmente se cuantifica en años. Se requiere en la estimación de las intensidades de transición.

Ilustramos la diferencia entre exposición central e inicial con el diagrama de Lexis. Sus líneas diagonales muestran la evolución de un asegurado del colectivo observado que durante algún momento del estudio se halla en el estado $E_i \in E$ con edad x .



La longitud de cada línea diagonal representa el tiempo en que un asegurado permanece en el estado E_i con edad x . Si la línea diagonal parte de la edad x y alcanza la edad $x+1$, el asegurado permanece en E_i con edad x durante todo un año, por lo que suponemos que la longitud de la línea diagonal es 1. En caso contrario, permanece menos tiempo.

La exposición inicial en la edad x y estado E_i coincide con el número de líneas diagonales que aparecen en el diagrama de Lexis. La exposición central en años se calcula sumando las longitudes de todas las líneas diagonales del diagrama de Lexis.

² Con la expresión "potencialmente" **Navarro, E (1991)** quiere señalar que no se trata del periodo realmente vivido, sino el que habría vivido de no haberse producido ninguna transición durante el periodo de observación.

Basándonos en los resultados de **Sverdrup, E. (1965)** y de otros autores posteriores como **Hoem, J.M. (1984)**, **Waters, H.R. (1984)** y **Forfair, D.O. et al. (1988)**, construimos los valores observados de las probabilidades anuales e intensidades de transición, a partir de la experiencia del colectivo.

$$\hat{p}_x^{ij} = \frac{N_x^{ij}}{R_x^i} \quad (1)$$

$$\hat{m}_x^{ij} = \frac{N_x^{ij}}{\bar{R}_x^i} \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) proporcionan los valores observados de la variable dependiente de la estimación: la probabilidad de transición anual o bien la intensidad de transición.

La expresión (1) se refiere a una probabilidad y, por tanto sus valores están acotados entre 0 y 1. Por ello, $0 \leq N_x^{ij} \leq R_x^i$ con lo que N_x^{ij} recoge el número de exposiciones iniciales de edad x en el estado E_i que alcanzan E_j al final del seguimiento observado de dicha edad.

En cambio la expresión (2) representa una intensidad de transición por lo que toma valores entre 0 y ∞ . Consecuentemente, N_x^{ij} puede ser mayor o menor que \bar{R}_x^i . Por ello, N_x^{ij} se refiere a todas transiciones $E_i \mapsto E_j$ registradas en el intervalo de edades $(x, x + 1]$.

En el caso de un semiproceso estocástico continuo, las intensidades de transición bivariantes se definen de forma análoga a la expresión (2).

$$\hat{m}_{x,z}^{ij} = \frac{N_{x,z}^{ij}}{\bar{R}_{x,z}^i}$$

Donde $N_{x,z}^{ij}$ representa el número total de transiciones $E_i \rightarrow E_j$ y $\bar{R}_{x,z}^i$ la exposición central en E_i para unos determinados valores de x y z . Nos referiremos genéricamente a la variable dependiente de la estimación como \hat{f}_x^{ij} y a sus distintos valores como.

$$\left\{ \hat{f}_x^{ij} \right\}_{\forall x \in X}$$

Para facilitar el proceso de optimización y posterior inferencia estadística, **Forfar, D.O. et al. (1988)** y **Sverdrup, E. (1965)** tratan los valores posibles de N_x^{ij} como una variable aleatoria independiente del resto de edades, que se ajusta una determinada distribución teórica.

- En la estimación de p_x^{ij} , basándonos en **Bloomfield, O.S.F. et al. (1987)** y **Forfar, D.O. et al. (1988)** y en la propiedad de que $0 \leq p_x^{ij} \leq 1$, asumimos que la variable aleatoria N_x^{ij} se distribuye según una ley binomial de parámetros R_x^i y p_x^{ij} .

$$N_x^{ij} \approx \text{Binomial}(R_x^i, p_x^{ij}) \quad (3)$$

Donde,

$$E(N_x^{ij}) = R_x^i \cdot p_x^{ij} \quad \text{Var}(N_x^{ij}) = R_x^i \cdot p_x^{ij} \cdot (1 - p_x^{ij})$$

- En la estimación de las intensidades de transición, \mathbf{m}_x^{ij} , **Sverdrup, E. (1965)** demuestra que N_x^{ij} se ajusta a una distribución de Poisson de parámetro $\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}$.

$$N_x^{ij} \approx \text{Poisson}(\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}) \quad (4)$$

Donde

$$E(N_x^{ij}) = \text{Var}(N_x^{ij}) = \bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}$$

En la estimación de intensidades de transición bivariantes $\mathbf{m}_{x,z}^{ij}$ adoptaremos esta misma hipótesis:

$$N_{x,z}^{ij} \approx \text{Poisson}\left(\bar{R}_{x,z}^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2},z}^{ij}\right)$$

Siendo

$$E(N_{x,z}^{ij}) = \text{Var}(N_{x,z}^{ij}) = \bar{R}_{x,z}^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2},z}^{ij}$$

Si el número de transiciones por edad es suficientemente elevado, en virtud del Teorema Central del Límite, podemos plantear una aproximación normal de las anteriores distribuciones teóricas.

$$N_x^{ij} \approx \text{Normal}\left(R_x^j \cdot p_x^{ij}, R_x^i \cdot p_x^{ij} \cdot (1 - p_x^{ij})\right) \quad (5)$$

$$N_x^{ij} \approx \text{Normal}\left(\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}, \bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}\right) \quad (6)$$

En la estimación de \mathbf{m}_x^j , **Renshaw, A.E. et al. (1996)**, opta por un enfoque distinto al considerar los valores de \bar{R}_x como una variable aleatoria que se ajusta a una distribución Gamma de parámetros N_x y $\mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}$ respectivamente.

$$\bar{R}_x \approx \text{Gamma}\left(N_x, \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}\right) \quad (7)$$

Donde

$$E(\bar{R}_x) = \frac{N_x}{\mathbf{m}_{x+1/2}} \quad \text{Var}(\bar{R}_x) = \frac{N_x}{\mathbf{m}_{x+1/2}^2}$$

Los valores observados de la variable dependiente, tanto intensidades como probabilidades de transición, están sujetos a fluctuaciones aleatorias. Éstas resultan achacables a las siguientes causas: Errores muestrales en la toma de la información del colectivo, tamaño del colectivo (a menor tamaño más fluctuaciones), tramos de edades con pocas observaciones (normalmente se corresponden con los tramos inferiores o superiores), los valores observados de N_x^{ij} constituyen realizaciones de una variable aleatoria, etc.

El proceso estadístico que tiene como principal objeto corregir estas irregularidades se denomina estimación y consiste en transformar los valores observados de la variable dependiente, en valores más regulares que denominamos valores estimados o ajustados. Una buena estimación debe reunir las siguientes cualidades:

- Bondad de ajuste. Las intensidades y probabilidades anuales de transición estimadas deben ajustarse bien a las observadas para que de esta forma sean representativas de la experiencia.
- Suavidad y alisamiento del ajuste. Tal como señala **Navarro, E. et al. (1995)**, el concepto de suavidad hace referencia al valor de las diferencias sucesivas, tomando como intervalo de diferencia un año. La estimación no debe manifestar irregularidades ni registrar cambios bruscos en los valores estimados adyacentes. Por ello, es importante que la estimación sea razonablemente suave.

De la misma forma que un ajuste excesivo puede originar un suavizado muy pobre no deseado, un excesivo alisamiento de la experiencia puede eliminar características propias del colectivo observado (**Del Hoyo, J. et al. (1988)**).

Mc Leod, H.D. (1990) añade otras cualidades deseables del proceso de estimación: estabilidad, adaptabilidad, aplicabilidad. Tal como remarcan **Copas, B. et al. (1983)** y **Haberman, S. (1996)**, existen dos metodologías de ajuste, distintas entre sí, que a continuación describimos brevemente:

- Estimación paramétrica: Engloba métodos que buscan una función de ajuste que se adapte lo mejor posible a la experiencia disponible. En ellos, prevalece el proceso de ajuste global sobre el análisis local de la experiencia. El alisamiento de las estimaciones así obtenidas suele ser muy satisfactorio.
- Estimación no paramétrica: Son métodos en los que prevalece el estudio local de los valores observados sobre el proceso de ajuste global de la experiencia. Por ello, suelen ofrecer un ajuste muy bueno. Como cualidad adicional,

destacamos que su aplicación permite combinar el nivel de ajuste con la suavidad de la estimación.

Bloomfield, O.S.F. (1987) sugieren la aplicación de métodos de estimación no paramétrica cuando la función matemática de ajuste no sea conocida a priori o resulte extraordinariamente compleja de prever su forma. Igualmente, consideran que para que los métodos paramétricos produzcan resultados satisfactorias, es necesario un volumen de información superior al requerido en la aplicación de un método no paramétrico.

En general, tanto los métodos paramétricos como los no paramétricos resultan aplicables con determinadas particularidades a procesos de ajustes univariantes y bivariantes. No obstante, a efectos de simplificar la exposición supondremos en adelante, de forma general, que el ajuste es univariante.

2 Métodos de estimación paramétrica

El proceso de estimación paramétrica consta de dos etapas claramente diferenciadas entre sí: elección de una determinada función de ajuste cuyos parámetros representamos como \mathbf{a} y aplicación de un método de optimización que permita obtener los parámetros estimados de la función de ajuste que recogeremos en $\hat{\mathbf{a}}$. Trataremos ambas etapas en subepígrafes distintos.

2.1 Funciones de ajuste

En este subepígrafe describiremos las funciones de ajuste utilizadas con mayor frecuencia en la estimación de probabilidades e intensidades de transición. Estas funciones destacan por su generalidad y sencillez, lo que en principio las hace aptas para cualquier estudio. No obstante, en última instancia, la experiencia del estudio y sus características acabarán por determinar la función. Vamos a considerar dos apartados: en el primero de ellos, estudiaremos funciones de ajuste univariantes y en el segundo bivariantes.

2.1.1 Funciones de ajuste univariante

Destacamos dos propuestas:

- Función de Gompertz-Makeham de orden (r,s) . Se representa como $GM_x^{ij}(r, s)$, siendo $r \geq 0$, $s \geq 0$. Responde a la siguiente expresión.

$$GM_x^{ij}(r, s) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \cdot x^k + e^{\sum_{m=0}^{s-1} b_m \cdot x^m}$$

$$GM_x^{ij}(r, s) = pol_1(x) + e^{pol_2(x)}$$

La función $GM_x^{ij}(r, s)$ se utiliza principalmente en la estimación de intensidades de transición. Destacamos dos casos particulares:

- $GM_x(0, 2)$ que se corresponde con la ley de Gompertz
- $GM_x(1, 2)$ más conocida como ley de Makeham.

Con el objeto de facilitar la estimación, **Forfair, D.O. et al. (1988)**, propone introducir las siguientes modificaciones en $GM_x^{ij}(r, s)$:

- Corrección de las edades, reemplazando x por $t = (x-u)/v$, donde u y v se fijan de forma que t varíe aproximadamente entre -1 y 1 para todas las edades.
- Substitución de los polinomios de la función de ajuste por polinomios ortogonales de Chebycheff y de Legendre, cuya expresión genérica queda recogida en las expresiones (3) y (4) respectivamente.

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$C_{n+1}(x) = 2x \cdot C_n(x) - C_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \quad (8)$$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$(n+1) \cdot L_{n+1}(x) = (2n+1) \cdot x \cdot L_n(x) - n \cdot L_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \quad (9)$$

- Logit de la función de Gompertz-Makeham de orden (r, s) . Ésta se obtiene a partir de $GM_x(r, s)$.

$$LGM_x^{ij}(r, s) = \frac{GM_x^{ij}(r, s)}{1 + GM_x^{ij}(r, s)}$$

Los valores ajustados por esta función pueden interpretarse como probabilidades, pues su dominio coincide con el intervalo $[0, 1]$. Por tal motivo, su utilización parece especialmente indicada en la estimación de probabilidades de transición anuales (**Forfair, D.O. et al. 1988**).

Los polinomios fraccionados constituyen otra clase de funciones de ajuste que destacan por su flexibilidad. Su aplicación ha sido ampliamente desarrollada en el trabajo de **Royston, P. et al. (1994)**. Responden a la siguiente forma.

$$f_m(x, \mathbf{x}, p) = \sum_{j=0}^m x_j \cdot H_j(x)$$

Donde,

$$H_j(x) = \begin{cases} x^{(p_j)} & \text{si } p_j \neq p_{j-1} \\ H_{j-1}(x) \cdot \ln x & \text{si } p_j = p_{j-1} \end{cases}$$

Otras fórmulas utilizadas con resultados satisfactorios en estimaciones tanto de intensidades de transición como de probabilidades de transición anuales (**Forfar, D.O. et al. 1988**) son las siguientes:

$$f_a^{ij}(x) = \frac{a_1 + a_2 \cdot a_3^x}{1 + a_4 \cdot a_3^x}$$

$$g_a^{ij}(x) = a_1 + \frac{a_2 \cdot a_3^x}{(a_4 \cdot a_3^{-2x} + 1 + a_5 \cdot a_3^x)}$$

2.1.2 Funciones de ajuste bivariantes

Una fórmula de ajuste bivalente está condicionada por la relación de dependencia existente entre las variables que intervienen en ella: x y z . Si éstas son independientes propondremos un modelo de estimación multiplicativo:

$$f_{x,z}^{ij} = f_x^{ij} \cdot g_z^{ij}$$

donde f_x^{ij} y g_z^{ij} representan las componentes individuales de ajuste respecto las variables x y z . Cada una de ellas debe estimarse por separado a partir de las respectivas experiencias.

Si existe dependencia entre las variables, recurriremos a un modelo alternativo que además de incorporar una componente de ajuste bivalente, $h_{x,z}^{ij}$, contemple una relación aditiva o multiplicativa entre sus componentes, que se adecue a la observada. Como posibles propuestas, sugerimos las siguientes:

$$f_{x,z}^{ij} = f_x^{ij} \cdot g_z^{ij} \cdot h_{x,z}^{ij}$$

$$f_{x,z}^{ij} = f_x^{ij} \cdot g_z^{ij} + h_{x,z}^{ij}$$

Cada una de las funciones univariantes que aparece en la expresión de $f_{x,z}^{ij}$ se ajusta individualmente a su información correspondiente. Para estimar la componente bivalente $h_{x,z}^{ij}$ Royston, P. et al. (1994) proponen la utilización de un polinomio fraccionado bivalente en combinación con otras expresiones matemáticas.

2.2 Métodos de optimización

En este subepígrafe analizaremos la aplicación de los métodos de optimización más comunes: Método de máxima verosimilitud y método de los mínimos cuadrados.

2.2.1 Método de optimización de máxima verosimilitud

Para estimar las probabilidades de transición anuales, en base a las hipótesis (5) y (7), construimos la función de verosimilitud $L(\hat{\mathbf{a}})$. La obtención de $\hat{\mathbf{a}}$ resulta de maximizar $L(\hat{\mathbf{a}})$ o, equivalentemente, su transformada logarítmica $L'(\hat{\mathbf{a}})$, más operativa que $L(\hat{\mathbf{a}})$.

- Según la hipótesis (5)

$$L(\hat{\mathbf{a}}) = \prod_{\forall x \in X} [p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}})]^{N_x^{ij}} \cdot [1 - p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}})]^{R_x^i - N_x^{ij}}$$

$$L'(\hat{\mathbf{a}}) = \ln L(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{\forall x \in X} N_x^{ij} \cdot \ln p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) + (R_x^i - N_x^{ij}) \cdot \ln(1 - p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}})) \quad (10)$$

- Según la hipótesis (7)

$$L(\hat{\mathbf{a}}) = \prod_{\forall x \in X} \frac{e^{\frac{-(N_x^{ij} - R_x^i \cdot p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))^2}{2 \cdot R_x^i \cdot p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) \cdot (1 - p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))}}}{\sqrt{2p \cdot R_x^i \cdot p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) \cdot (1 - p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))}}$$

$$L'(\hat{\mathbf{a}}) = -\frac{1}{2} \sum_{\forall x \in X} \left[\ln(p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) \cdot (1 - p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))) + \frac{(N_x^{ij} - R_x^i \cdot p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))^2}{R_x^i \cdot p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) \cdot (1 - p_x^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))} \right] \quad (11)$$

Para la estimación de las intensidades de transición, construimos la función de verosimilitud $L(\hat{\mathbf{a}})$ según las distribuciones teóricas (6) y (8). Los parámetros estimados, $\hat{\mathbf{a}}$, se obtienen de maximizar $L(\hat{\mathbf{a}})$ o $L'(\hat{\mathbf{a}})$, su transformada logarítmica.

- Según la distribución teórica (6)

$$L(\hat{\mathbf{a}}) = \prod_{\forall x \in X} e^{-\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}})} \cdot \frac{(\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))^{N_x^{ij}}}{N_x^{ij}!}$$

$$L'(\hat{\mathbf{a}}) = \ln L(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{\forall x \in X} \left\{ -\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) + N_x^{ij} \cdot \ln \left(\mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) \right) \right\} \quad (12)$$

- Según la distribución teórica (8)

$$L(\hat{\mathbf{a}}) = \prod_{\forall x \in X} \frac{1}{\sqrt{2p \cdot (\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))}} \cdot e^{-\frac{(N_x^{ij} - \bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))^2}{2 \cdot (\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))}}$$

$$L'(\hat{\mathbf{a}}) = \ln L(\hat{\mathbf{a}}) = -\frac{1}{2} \sum_{\forall x \in X} \left[\ln \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) + \frac{(N_x^{ij} - \bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))^2}{\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}})} \right]$$

Forfair, D.O et al. (1988) prescinde del término logarítmico de $L'(\hat{\mathbf{a}})$ por considerarlo escasamente significativo, obteniendo como resultado la expresión a maximizar $L''(\hat{\mathbf{a}})$.

$$L''(\hat{\mathbf{a}}) = -\frac{1}{2} \sum_{\forall x \in X} \frac{(N_x^{ij} - \bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}}))^2}{\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\hat{\mathbf{a}})} \quad (13)$$

- Según la distribución teórica (9):

Su función objetivo coincide con la expresión (10) por lo que su aplicación resulta equivalente a la derivada de la distribución teórica (6). No obstante, los parámetros estimados obtenidos por ambos métodos pueden presentar ligeras diferencias entre sí, debidas a que el enfoque basado en la distribución teórica (9) prescinde de las edades que no registran fallecimientos.

Los estimadores de máxima verosimilitud obtenidos por este método son consistentes y asintóticamente normales. La obtención de la matriz de varianzas y covarianzas resulta razonablemente sencilla (**Forfair D.O. et al. (1988)**):

- En la estimación de las probabilidades anuales de transición, los elementos de la matriz H cuya inversa constituye la matriz de varianzas covarianzas, responden a la siguiente expresión:

$$H_1^{ij}(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{\forall x \in X} \frac{R_x^i}{p_x^{ij} \cdot (1 - p_x^{ij})} \cdot \frac{\partial p_x^{ij}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial p_x^{ij}}{\partial a_j}$$

- En la estimación de las intensidades de transición, los elementos de la matriz H cuya inversa es la matriz de varianzas covarianzas se obtienen como sigue:

$$H_1^{jk}(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{\forall x \in X} \frac{\bar{R}_x^i}{m_x^{ij}} \cdot \frac{\partial m_x^{ij}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial m_x^{ij}}{\partial a_j}$$

Los modelos de máxima verosimilitud utilizados con las hipótesis teóricas propuestas, constituyen modelos lineales generalizados (**Mc Cullagh, P. et al. (1989)**). Éstos pueden resolverse fácilmente mediante paquetes estadísticos de uso muy extendido tales como SPSS, S⁺, GLIM, etc. (**Francis, B. et al. (1993)**).

2.2.2 Método de los mínimos cuadrados

Para estimar las probabilidades de transición anuales debemos minimizar la suma de las desviaciones relativas o estandarizadas, e_x^{ij} , al cuadrado. Los valores de e_x^{ij} resultan de restar al valor observado del número de transiciones, su esperanza matemática y de dividir el resultado por su varianza. Tanto una como otra, se deducen de la ley binomial que asumimos como distribución teórica de N_x^{ij} .

$$e_x^{ij} = \frac{(N_x^{ij} - R_x^i \cdot p_x^{ij}(\mathbf{a}))}{R_x^i \cdot p_x^{ij}(\mathbf{a}) \cdot (1 - p_x^{ij}(\mathbf{a}))}$$

$$X^2(\mathbf{a}) = \sum_{\forall x \in X} (e_x^{ij})^2 = \sum_{\forall x \in X} \frac{(N_x^{ij} - R_x^i \cdot p_x^{ij}(\mathbf{a}))^2}{(R_x^i \cdot p_x^{ij}(\mathbf{a}) \cdot (1 - p_x^{ij}(\mathbf{a})))^2} \quad (14)$$

Alternativamente, podemos plantear la minimización de los errores cuadrados, ponderando el error cuadrático de cada edad por un coeficiente $w^i(x)$.

$$\sum_{\forall x \in X} \left(p_x^{ij}(\mathbf{a}) - \frac{N_x^{ij}}{R_x^i} \right)^2 \cdot w^i(x) \quad (15)$$

De igual forma, planteamos la estimación de las intensidades de transición con la única diferencia de que la esperanza y varianza matemáticas se obtienen a partir de la ley de Poisson que aceptamos como distribución teórica de N_x^{ij} .

$$e_x^{ij} = \frac{(N_x^{ij} - \bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\mathbf{a}))}{\sqrt{\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\mathbf{a})}}$$

$$X^2 = \sum_{\forall x \in X} e_x^{ij} = \sum_{\forall x \in X} \frac{(N_x^{ij} - \bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\mathbf{a}))^2}{\bar{R}_x^i \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{ij}(\mathbf{a})} \quad (16)$$

Obsérvese que la minimización de la expresión (16) equivale a maximizar la expresión (13). Por esta consideración, los parámetros obtenidos por ambos métodos son muy similares. Por otro lado, proponemos un método basado en la minimización de los errores cuadrados, ponderando el error cuadrático asociado a cada edad por un coeficiente $w^i(x)$.

$$\sum_{\forall x \in X} \left(m_{x+\frac{1}{2}}^j(\mathbf{a}) - \frac{N_x^j}{R_x^i} \right)^2 \cdot w^i(x) \quad (17)$$

3 Métodos de estimación no paramétrica

En este epígrafe vamos a enunciar los métodos no paramétricos más usuales. Todos ellos tienen en común que permiten combinar el nivel de ajuste con la cantidad de alisamiento. Atendiendo a su naturaleza, diferenciamos dos clases de métodos no paramétricos:

- Métodos que ajustan puntualmente el valor observado de la variable dependiente de cada edad, a partir de la ponderación del resto. En esta categoría incluimos el método de las medias móviles y los métodos basados en núcleos. Por proporcionar estimaciones puntuales, tradicionalmente estos métodos se han asociado al ajuste de probabilidades anuales de transición. Por ello, referiremos su aplicación a éstas.
- Métodos más sofisticados que combinan el ajuste a una determinada función matemática con el análisis local de los valores observados de la variable dependiente (intensidades o probabilidades de transición anuales). Destacamos las siguientes propuestas: modelo de Whittaker, ajuste por splines, modelo de regresión dinámica y modelización local polinómica. Dada la generalidad de su aplicación, desarrollaremos la misma tanto para intensidades como probabilidades de transición anuales.

3.1 Método de las medias móviles

Este método de estimación se caracteriza por obtener la probabilidad estimada de la transición $E_i \mapsto E_j$, asociada a una edad determinada $x_0 \in X$ como promedio de las probabilidades de transición observadas de las k edades precedentes y las k siguientes.

Gavin, J. et al. (1993) distingue dos variantes de este método:

- Método basado en la media aritmética: La probabilidad estimada para cada $x_0 \in X$, se obtiene como media aritmética de las probabilidades observadas de las k edades anteriores y k posteriores. Como resultado, ponderamos todas las probabilidades observadas de la misma forma.

$$\hat{p}_{x_0}^{ij} = \frac{\sum_{p=1}^k \dot{p}_{x_0+p}^{ij} + \dot{p}_{x_0-p}^{ij}}{2k}$$

El valor de k se denomina rango de la fórmula. A mayor k , más suave es la estimación aunque su ajuste es menor.

- Fórmula de la media ponderada: A diferencia del anterior método, ponderamos las edades por pesos diferentes.

$$\dot{p}_{x_0}^{ij} = \sum_{p=1}^k \dot{p}_{x_0+p}^{ij} \cdot w_{x_0+p}^{ij} + \dot{p}_{x_0-p}^{ij} \cdot w_{x_0-p}^{ij}$$

Donde $\sum_{\forall x} w_x^{ij} = 1$. Como caso particular de este método, destacamos la

fórmula de 21 términos de Spencer (**Verrall R.J. (1996)**).

$$\begin{aligned} \hat{p}^{ij}(x) = & \frac{1}{350} \cdot [60 \dot{p}_x^{ij} + 57 (\dot{p}_{x+1}^{ij} + \dot{p}_{x-1}^{ij}) + \\ & + 47 (\dot{p}_{x+2}^{ij} + \dot{p}_{x-2}^{ij}) + 33 (\dot{p}_{x+3}^{ij} + \dot{p}_{x-3}^{ij}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 18 (\dot{p}_{x+4}^{ij} + \dot{p}_{x-4}^{ij}) + 6 (\dot{p}_{x+5}^{ij} + \dot{p}_{x-5}^{ij}) + \\
 &- 2(\dot{p}_{x+6}^{ij} + \dot{p}_{x-6}^{ij}) - 5(\dot{p}_{x+7}^{ij} + \dot{p}_{x-7}^{ij}) + \\
 &- 5(\dot{p}_{x+8}^{ij} + \dot{p}_{x-8}^{ij}) - 3(\dot{p}_{x+9}^{ij} + \dot{p}_{x-9}^{ij}) + \\
 &- (\dot{p}_{x+10}^{ij} + \dot{p}_{x-10}^{ij})]
 \end{aligned}$$

Como muy bien señala **Navarro, E. (1991)**, hay que tener en cuenta que este método, por la definición de sus estimadores, no proporciona los valores correspondientes al principio y al final de la tabla

3.2 Ajuste por splines polinómicos

Un spline polinómico de orden k , representado como $s(x)$, es una función polinómica de orden k , definida a trozos, continua y derivable $(k-1)$ veces en los puntos de unión denominados nudos. Esta última condición es, la que permite distinguir los splines, de otras funciones polinómicas definidas a tramos.

Por supuesto, la condición de derivabilidad se satisface automáticamente entre los nudos, de forma que la condición impuesta únicamente es restrictiva respecto a la forma en que los polinomios adyacentes se unen.

Una función spline de orden k , que designamos como $s(x)$, definida sobre un intervalo $[a, b]$ con nudos internos x_1, \dots, x_m , es una función tal que si $0 \leq i \leq n$ y $x_i < x < x_{i+1}$, entonces $s(x) = p_i(x)$, donde $p_i(x)$ es un polinomio de grado no superior a k . Además los polinomios $p_0(x), \dots, p_m(x)$ se ajustan conjuntamente de tal modo, que $s(x)$, es $(k-1)$ veces diferenciable en todo el intervalo (a, b) .

Tal como queda recogido en el trabajo de **Forfair, D.O. et al. (1988)** , el conjunto de splines de orden k con m nudos internos, constituye un espacio vectorial real de dimensión $(k + 1 + m)$. De esta forma, cualquier spline de orden k puede ser expresado como sigue:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+k+1} I_i \cdot y_i(x)$$

donde $\{y_1(x), \dots, y_{m+k+1}(x)\}$ representa una base del espacio vectorial de splines de orden k con m nudos. Al respecto, **Fan, J et al. (1996)** proponen, con carácter general, la siguiente base:

$$\{1, x, \dots, x^k, (x - x_1)^k, \dots, (x - x_m)^k\}$$

Si suponemos fijos las posiciones de los nudos, la obtención de los coeficientes estimados del spline, que representamos como $(\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_{m+k+1})$, se lleva a cabo por el método de mínimos cuadrados ponderados. Tal como destaca **Navarro, E. et al. (1995)**, la suavidad y la bondad del ajuste de la función depende del número de nudos que definamos. A mayor número de nudos, mejor será la bondad de ajuste, pero menor su suavidad.

Si suponemos variables las posiciones de los nudos, tendremos $(k + 1 + 2m)$ parámetros a estimar: los coeficientes $(\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_{m+k+1})$ y las posiciones de los nudos x_1, \dots, x_m . En tal caso, utilizaremos una técnica de ajuste similar descrita en el trabajo de **Mc Cutcheon, J.J. (1984)**, basada en escoger aquellas posiciones de los nudos que minimicen la suma de los residuos al cuadrado.

En la práctica actuarial, se utilizan splines cúbicos ($k = 3$). En el campo de aplicaciones en vida, los splines pueden aplicarse tanto en el ajuste de las intensidades como las probabilidades anuales de transición. Destacamos al respecto los trabajos publicados por **Benjamin, B. et al. (1980)** y **Renshaw, A.E. (1991)**.

3.3 Métodos de Estimación mediante núcleos

En primer lugar definiremos qué entendemos por núcleo para seguidamente describir varios métodos de estimación basados en núcleos.

3.3.1 Definición de núcleo

Definimos un núcleo $\mathbf{y}(u)$ como una función de densidad de probabilidad simétrica. Dada una determinada edad $x_0 \in X$, la función $\mathbf{y}(u)$ proporciona ponderaciones de los valores observados del resto de las edades, que intervienen en el cálculo del valor estimado de x_0 .

Los pesos asignados por $\mathbf{y}(u)$ a una determinada edad dependen tanto de su proximidad a x_0 como de un parámetro h , inicialmente subjetivo, que indica el nivel de alisamiento.

$$\mathbf{y}(u) = \mathbf{y}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

Donde $(x - x_0)$ representa la proximidad de las edades y h un parámetro que determina el suavizado de la estimación. Dadas las características del núcleo, a mayor proximidad de la edad o a mayor valor de h , mayor suavidad de la estimación. En los casos extremos nos encontraremos con las siguientes situaciones:

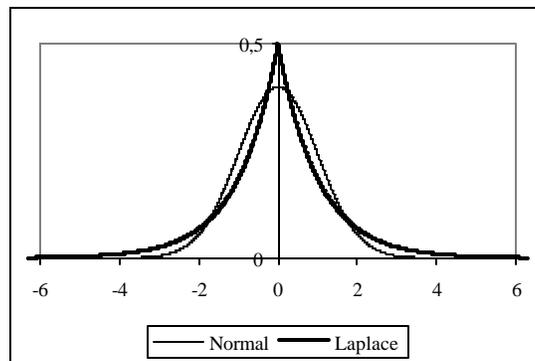
- Si $h = 0$ la aplicación del modelo conduce a una interpolación de las probabilidades de transición anuales observadas, con lo cual el ajuste es máximo pero en cambio el nivel de alisamiento es mínimo.
- Si $h \rightarrow \infty$ el modelo ajusta globalmente la información disponible de forma que el alisamiento es máximo pero el ajuste mínimo.

Las funciones más comúnmente utilizadas como núcleo son las funciones de densidad correspondientes a las distribuciones normales y de Laplace:

$$y_N(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2 \cdot p}}$$

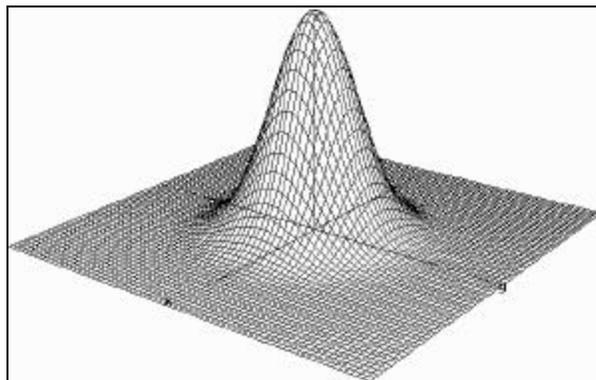
$$y_L(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}$$

Representamos gráficamente los núcleos anteriores:



En el caso de ajustes bivariantes, **Silverman, B.W. (1986)** propone como núcleo la función de densidad correspondiente a una distribución normal bivalente.

$$y(u, v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}}{2p} \quad (18)$$



3.3.2 Núcleo de Copas y Haberman

La estimación de probabilidades de fallecimiento basada en núcleos fue aplicada por primera vez por **Copas, J.B. et al. (1983)** y posteriormente por **Bloomfield, O.S.F. et al. (1987)**, **Gavin, J. et al. (1994)** o **Verrall, R.J. (1996)**. Nosotros sugerimos su generalización a cualquier transición $E_i \mapsto E_j$ a partir de la siguiente expresión.

$$\hat{p}_{x_0}^{ij} = \frac{\sum_{\forall x \in X} N_x^{ij} \cdot \mathbf{y}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)}{\sum_{\forall x \in X} R_x^i \cdot \mathbf{y}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)}$$

3.3.3 Núcleo de Nadaraya-Watson

Los actuarios **Gavin, et al. (1993)** estiman las probabilidades de fallecimiento mediante el estimador de Núcleo de Nadaraya-Watson. A diferencia del estimador de Copas-Haberman, el estimador de Nadaraya-Watson utiliza las probabilidades de transición anuales observadas, no las transiciones ni la exposición inicial. Extendemos su aplicación a cualquier transición $E_i \mapsto E_j$.

$$\hat{p}_{x_0}^{ij} = \frac{\sum_{\forall x \in X} \hat{p}^{ij}(x) \cdot \mathbf{y}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)}{\sum_{\forall x \in X} \mathbf{y}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)}$$

3.3.4 Selección del parámetro de alisamiento

El parámetro de alisamiento h puede ser elegido de forma subjetiva. Alternativamente, **Verrall, R.J. (1996)** propone calcular h a través un proceso de validación cruzada que minimice la siguiente expresión:

$$\sum_{\forall x \in X} \left(\hat{p}_x^{ij} - \hat{p}_x^{ij,(-x)} \right)^2$$

donde $\hat{p}_x^{ij, (-x)}$ representa el valor estimado de p_x^{ij} utilizando todas las probabilidades de transición observadas a excepción de la correspondiente a la edad x .

3.4 Método de Estimación de Whittaker

El método de estimación de **Whittaker, E.T. (1923)** añade al método de mínimos cuadrados ponderados una penalización por falta de alisamiento. Por ello la función objetivo, para una transición $E_i \mapsto E_j$, se define de la siguiente forma.

$$\sum_{\forall x \in X} w_x^{ij} \cdot \left(\dot{f}^{ij}(x) - \hat{f}^{ij}(x) \right)^2 + \mathbf{I} \cdot \sum_{\forall x \in X} \left(\nabla^2 \hat{f}^{ij}(x) \right)^2$$

El sumando de la parte izquierda de la función objetivo representa la suma total de errores al cuadrado. El sumando de la derecha recoge la suma de las diferencias de segundo orden que sirve para penalizar, a través del multiplicador \mathbf{I} , la falta de alisamiento de la estimación.

El valor de w_x^{ij} representa el peso de la edad x que pondera su importancia relativa y $\nabla^2 \hat{f}^{ij}(x)$ representa la segunda diferencia del estimador $\hat{f}^{ij}(x)$.

$$\nabla^2 \hat{f}^{ij}(x) = \hat{f}^{ij}(x) - 2\hat{f}^{ij}(x-1) + \hat{f}^{ij}(x-2)$$

A mayor $\nabla^2 \hat{f}^{ij}(x)$, más diferencias existen entre los valores ajustados de la variable dependiente de las edades próximas a x , lo que va en detrimento de la suavidad del ajuste.

El multiplicador de Whittaker \mathbf{I} , a igual que el parámetro h en los métodos de núcleos, sirve para ponderar el alisamiento de la estimación. A mayor \mathbf{I} , más se penalizará la falta de alisamiento con lo cual la estimación resultante más lo tendrá en cuenta y más suave será.

Obsérvese que en el caso de que no hubiera penalización y, por tanto, I valiera 0 la expresión resultante coincidiría con la función objetivo asociada al método de mínimos cuadrados ponderados, recogida en las expresiones (15) y (17).

Reinsch, C. (1967) demuestra que la estimación de Whittaker es equivalente a la aplicación de un spline cúbico con un nodo para cada edad x .

3.5 Estimación por regresión dinámica

Con este modelo, **Verrall, R.J. (1993)** incorpora la utilización del filtro de Kalman en la estimación de las probabilidades e intensidades de fallecimiento. Nosotros hemos desarrollado su aplicación generalizada a cualquier transición $E_i \mapsto E_j$. Como resultado, obtenemos una función de ajuste cuyos parámetros van variando con la edad. Su aplicación consta de dos etapas fundamentales:

- En una primera etapa del ajuste, para cada una de las edades consideradas, ajustamos los parámetros de la función de ajuste, mediante las siguientes relaciones recurrentes, que únicamente tienen presente la información de las edades anteriores.

$$m_x^{ij} = a_x^{ij} + \frac{P_x \cdot F_x}{v_x} \ln \left(\frac{1 + v_x \cdot N_x^{ij}}{1 + v_x \cdot \bar{R}_x^i \cdot e^{u_x}} \right)$$

$$C_x = P_x - P_x \cdot F \cdot F^T \cdot P_x \frac{N_x^{ij}}{1 + v_x \cdot N_x^{ij}}$$

Donde:

a_x^{ij} : Vector de los parámetros estimadores al principio de la edad x .

m_x^{ij} : Vector de los parámetros estimadores a final de la edad x , donde

$$m_x^{ij} = a_{x+1}^{ij}.$$

B : Matriz diagonal que contiene los valores inversos de los factores de descuento que actúan como indicadores de la cantidad de alisamiento. Los factores de descuento pueden variar entre 0 y 1. A mayor valor de los factores de descuento la estimación resultante es más suave.

P_x : Matriz de varianzas y covarianzas al inicio de la edad x . Se obtiene de la siguiente relación $P_{x+1} = B \cdot C_x \cdot B$.

C_x : Matriz de varianzas y covarianzas al final de la edad x .

F_x : Matriz que contiene las variables de la regresión.

u_x : Vector que se obtiene como $u_x = F^T \cdot a_x^j$

v_x : Vector que se como $v_x = F^T \cdot P_x \cdot F$

- En una segunda etapa, filtramos para cada edad, la información de todas las edades del estudio. Con tal objeto, partimos de la estimación realizada para la última edad para obtener recurrentemente hacia atrás el resto de las estimaciones a través de estas relaciones recurrentes:

$$m_x^{j,tot} = m_x + C_x \cdot P_{x+1}^{-1} \cdot (m_{x+1}^{j,tot} - a_{x+1}^j)$$

$$C_x^{tot} = C_x + C_x \cdot P_{x+1}^{-1} \cdot (P_{x+1} - C_{x+1}^{tot}) \cdot P_{x+1}^{-1} \cdot C_x$$

Donde:

$m_x^{j,tot}$: Vector de estimadores a final de la edad x obtenida de filtrar toda la experiencia.

C_x^{tot} : Matriz de varianzas y covarianzas al final de la edad x obtenida de filtrar toda la experiencia.

3.6 Método de modelización local polinómica

La modelización local polinómica, ampliamente tratada en los trabajos de **Cleveland, W.S. (1979)**. y **Fan, J. et al. (1996)**, consiste en ajustar para cada edad x_0 una función polinómica de grado p , ponderando los valores observados de la variable dependiente en un entorno de la edad, $E_h(x_0)$, mediante un determinado núcleo $\mathbf{y}(u)$.

$$\sum_{\forall x \in E_h(x_0)} \mathbf{y}\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \cdot \left(\dot{f}^{ij}(x) - \hat{f}^{ij}(x)\right)^2$$

El parámetro h actúa de la misma forma que en los métodos basados en núcleos: a mayor valor de h más se ponderan las edades alejadas con lo que el alisamiento es mayor. Este método de estimación presenta mucha similitud con el método de estimación dinámica en un modelo lineal generalizado sugerido por **Verrall, R.J. (1993 a)**.

4 Tests de la estimación

Para valorar los resultados de la estimación, debemos considerar dos aspectos básicos: el ajuste y el alisamiento.

- El ajuste se puede verificar analíticamente mediante tests no paramétricos: test de los signos, test de las rechas, test de correlación, test de X^2 , test de Kolmogorov-Smirnov. Gráficamente, podemos corroborar la bondad del ajuste representando los valores estimados de la variable dependiente y comparándolos con sus valores observados o bien representando los residuos de la estimación.
- La valoración del alisamiento o suavidad del ajuste puede realizarse de forma gráfica, comprobando que la estimación no presente irregularidades ni cambios bruscos en los valores adyacentes.

Benjamin, B. et al. (1980) comparan el nivel de alisamiento de estimaciones distintas mediante las diferencias discretas absolutas de tercer orden, $\Delta^3 \hat{f}^{ij}(x)$. **Barnett, H.A.R. (1985)** y **Bloomfield, O.S.F. (1987) et al.** proponen analizar la evolución de las diferencias discretas de tercer orden pero en términos relativos:

$$\Delta^3 \hat{f}^{ij}(x) / \hat{f}^{ij}(x)$$

En los siguientes subepígrafes plantearemos cómo aplicar los test de la estimación citados anteriormente. Previamente, explicaremos cómo tratar la experiencia, de forma que podamos aplicar los anteriores test no paramétricos.

4.1 Tratamiento de la información muestral

La metodología de contrastación analítica de la estimación que emplearemos está basada en el seguimiento del número de transiciones para cada edad. Su origen lo encontramos en los trabajos de **Price, R. (1792)** y **Sprague, T.B. (1879)**. Su aplicación exige agregar la información muestral de la forma que a continuación explicamos.

4.1.1 Proceso de agrupación en un ajuste univariante

Una vez obtenidos los valores ajustados, procedemos a aplicar una serie de tests no paramétricos con la finalidad de contrastar si la estimación representa de una forma razonable los valores observados del colectivo.

La mayor parte de los tests se fundamenta en la aceptación de que N_x^{ij} se distribuye normalmente, para lo cual **Forfair, D.O. et al. (1988)** exige que $E(N_x^{ij}) \geq 5$. Con tal finalidad, agruparemos las edades iniciales en w intervalos de edades consecutivas, $\{I_m\}_{m=1, \dots, w}$, de tal forma que la suma de transiciones esperadas de las edades que componen cada intervalo sea como mínimo 5.

De cada intervalo I_m , calcularemos su desviación absoluta, $Dev_{I_m}^{ij}$, y relativa o estandarizada, $e_{I_m}^{ij}$.

$$Dev_{I_m}^{ij} = N_{I_m}^{ij} - E(N_{I_m}^{ij})$$

$$e_{I_m}^{ij} = \frac{Dev_{I_m}^{ij}}{\sqrt{Var(N_{I_m}^{ij})}}$$

donde $N_{I_m}^{ij}$ representa el número de transiciones $E_i \mapsto E_j$ agrupadas en el intervalo I_m . Los valores de $E(N_{I_m}^{ij})$ y $Var(N_{I_m}^{ij})$ se obtienen a partir de los valores estimados de la variable dependiente. Adicionalmente, podemos calcular para cada intervalo I_m , el cociente entre el número de transiciones efectivas y el esperado. Designamos a tal cociente como K_{I_m} .

$$K_{I_m} = 100 \cdot \frac{N_{I_m}^{ij}}{E(N_{I_m}^{ij})}$$

Si en la mayor parte de los intervalos, de edades dicho ratio toma un valor comprendido entre el 75% y el 125% el ajuste parece razonablemente correcto.

4.1.2 Proceso de agrupación en un ajuste bivalente

El proceso de agregación que vamos a plantear para un ajuste bivalente es básicamente el mismo que el propuesto para un ajuste univalente. La única diferencia conceptualmente significativa es que la agrupación se realizará tanto para la edad x como para la otra variable z . Consecuentemente, cada grupo que definamos tendrá asociado un intervalo para x y otro para z .

El procedimiento de agregación es muy similar al sugerido anteriormente por **Forfar, D.O. et al. (1988)** y consta de 2 etapas:

- Creamos una tabla de doble entrada en la que cada celda tiene asociada un fila que representa una edad x y una columna que representará un intervalo de valores z . Cada celda contendrá el número de transiciones reales y estimadas asociadas a los valores de x y z .
- A continuación y empezando por los valores iniciales de z , agrupamos las columnas de tal forma que las transiciones esperadas del total de celdas que componen cada columna sumen como mínimo 15, según el **C.M.I.B. (1996)**.

Si resultado de todo el proceso, la última columna contiene menos de 15 transiciones esperadas, traspasaremos el contenido de sus celdas a la columna de su izquierda. De idéntica forma, repetiremos el proceso de agrupación con las filas.

- Por último, agruparemos las celdas de tal forma que cada una de ellas contenga más de 5 transiciones esperadas según **Forfar, D.O. et al. (1988)** u 8 según **C.M.I.B. (1996)**. Para ello, aplicaremos por filas el mismo procedimiento utilizado en las estimaciones univariantes, anteriormente explicado.

4.2 Test de los signos

Este test tiene en consideración el signo de las desviaciones relativas. De acuerdo con este test, la probabilidad de que $e_{l_m}^{ij}$ sea positiva es igual a la probabilidad de que tal desviación relativa presente signo negativo. Es decir, el número de signos positivos que representamos como ND se distribuye siguiendo una ley binomial de parámetros w y $1/2$.

$$ND \approx \text{Binomial}(w, 0.5)$$

En base a la anterior hipótesis, calculamos y representamos por p , la probabilidad del número de errores de signo positivo alcanzado en el estudio.

$$p = \binom{\mathbf{w}}{ND} \cdot 0.5^{\mathbf{w}}$$

Si $0.025 < p < 0.975$ el test resulta satisfactorio. En caso contrario, el número de desviaciones relativas del mismo signo son excesivamente frecuentes lo que indica una bondad de ajuste insuficiente.

4.3 Test de Wald-Wolfowitz

Tal como señalan **Forfar, D.O. et al. (1988)** y **Navarro, E. (1991)**, si aceptamos que N_x^{ij} se distribuye normalmente, las desviaciones relativas, $e_{I_m}^{ij}$, deberían ser independientes y, por tanto, los signos de las desviaciones deberían distribuirse aleatoriamente sin un número excesivamente alto o bajo de cambios de signo.

El Test de Wald-Wolfowitz consiste en calcular el número de rachas o iteraciones de las desviaciones relativas, $e_{I_m}^{ij}$, del mismo signo. Asumimos que existen n_1 residuos positivos y n_2 residuos negativos, siendo $n_1 + n_2 = \mathbf{w}$. Definimos p como la probabilidad de obtener NR rachas. Si $NR = 2k$ (número par), entonces p se obtiene como sigue:

$$p = \frac{2 \cdot (n_1 - 1)!}{(k - 1)! \cdot (n_1 - k)!} \cdot \frac{(n_2 - 1)!}{(k - 1)! \cdot (n_2 - k)!} \cdot \frac{n_1! \cdot n_2!}{\mathbf{w}!}$$

Si $NR = 2k+1$ (número impar), p se obtiene a partir de esta expresión.

$$p = \frac{(n_1 - 1)!}{(k - 1)! \cdot (n_1 - k)!} \cdot \frac{(n_2 - 1)!}{k! \cdot (n_2 - 1 - k)!} \cdot \frac{n_1! \cdot n_2!}{\mathbf{w}!} +$$

$$+ \frac{(n_1 - 1)!}{k! \cdot (n_1 - k - 1)!} \cdot \frac{(n_2 - 1)!}{(k - 1)! \cdot (n_2 - k)!} \cdot \frac{n_1! \cdot n_2!}{\mathbf{w}!}$$

Como bien señala **Forfair, D.O. et al. (1988)**, un valor pequeño de p conlleva un número excesivamente pequeño de rachas que representa poca bondad de ajuste. Un valor alto de p representa un número excesivo de rachas que puede perjudicar su suavidad. Un valor intermedio de p resulta satisfactorio.

4.4 Test de correlación

Vamos a aplicar el test de correlación a los valores de las desviaciones relativas representadas por $e_{I_m}^{ij}$. Si sus valores están distribuidas aleatoriamente, el coeficiente de correlación entre valores sucesivos de $e_{I_m}^{ij}$ está normalmente distribuido con media 0 y varianza $\frac{1}{w}$. La expresión del estadístico p , recogida en el trabajo de **Bloomfield, O.S.F. et al. (1987)**, es la siguiente:

$$p = \frac{\sum_{m=1}^{w-1} (e_{I_m}^{ij} - \bar{e}^{ij}) \cdot (e_{I_{m+1}}^{ij} - \bar{e}_{I_m}^{ij})}{\sum_{m=1}^w (e_{I_m}^{ij} - \bar{e}^{ij})^2}$$

donde $\bar{e}^{ij} = \sum_{r=1}^w e_{I_m}^{ij} / w$. Valores positivos de p muy grandes o valores negativos de p indican una correlación excesiva y, por tanto, una estimación inaceptable.

4.5 Test de X^2

Con el objeto de comprobar si las desviaciones relativas están normalmente distribuidas, construimos el estadístico t que se obtiene como sigue:

$$t = \sum_{i=1}^w (e_r^{ij})^2$$

Si la estimación es paramétrica, el estadístico t se distribuye como una X^2 de $w-m$ grados de libertad, donde m es el número de parámetros utilizados. Si la estimación es no paramétrica, y no incluye una función de ajuste con un determinado número de parámetros, **Bloomfield, O.S.F. et al. (1987)** proponen que el estadístico t se distribuya como una X^2 de $w-1$ grados de libertad.

Si el número de grados de libertad excede de 30 el estadístico $t' = \sqrt{2} \sqrt{t^2 - \sqrt{2} \cdot (w-1)}$ se puede entender distribuido normalmente con media 0 y varianza 1.

Si la probabilidad asociada al estadístico es mayor que aproximadamente 0.05 y la estimación ha pasado los otros contrastes, la estimación se da por buena. Destacamos el estudio sobre la aplicación en operaciones de vida llevado a cabo por **Pollard, J.H. (1971)**

Cuanto mayor sea la probabilidad asociada al estadístico de chi-cuadrado, mejor será la bondad de ajuste de la estimación.

4.6 Test de Kolmogorov-Smirnov

Este test, ampliamente comentado en **Forfair, D.O. et al. (1988)**, considera la distribución del error máximo cometido en las distribuciones de probabilidades acumuladas de las transiciones estimadas y reales. En primer lugar definimos el número total de transiciones reales y estimadas:

$$NT = \sum_{m=1}^w N_{I_m}^{ij}$$

$$ET = \sum_{m=1}^w \sum_{x \in I_m} \bar{R}_x^i \cdot E(m_x^{ij})$$

donde $E_{I_m}^{ij}$ representa el valor esperado de transiciones $E_i \mapsto E_j$ en el intervalo de edades I_m . Seguidamente, definimos las probabilidades acumuladas de transiciones reales y estimadas respectivamente:

$$F(I_m) = \frac{\sum_{\forall r \leq m} N_{I_r}^{ij}}{NT}$$

$$G(I_m) = \frac{\sum_{\forall r \leq m} E_{I_r}^{ij}}{NT}$$

Calculamos la diferencia máxima, en base a la cual se construye el estadístico característico del test de Kolmogorov-Smirnov.

$$D = \underset{\forall m}{Max} |F(I_m) - G(I_m)|$$

$$KS = D \cdot \sqrt{\frac{NT \cdot ET}{NT + ET}}$$

Podemos conocer la probabilidad asociada al estadístico KS consultando las tablas de Kolmogorov. Valores muy grandes del estadístico KS o probabilidades muy bajas del mismo expresan un ajuste insatisfactorio. En la práctica consideramos que el ajuste es satisfactorio cuando la probabilidad del estadístico KS es superior al 90% o equivalentemente cuando KS es inferior a 0.58.

Dada la naturaleza del test de Kolmogorov-Smirnov, su aplicación está especialmente indicada para transiciones a estados absorbentes como son el fallecimiento, en las cuales resulta inmediato obtener la función de distribución.

ANEXO 3-1

Estimación de una intensidad de fallecimiento

Para ejemplificar la estimación de la intensidad de fallecimiento, tomamos la experiencia de la investigación realizada por el C.M.I.B. para el periodo comprendido entre los años 1979 y 1982 y publicada en el trabajo de **Forfar, O. et al. (1988)**. Esta investigación recoge el número de fallecimiento y la exposición inicial en cada una de las edades que forman parte del estudio. Se adopta el criterio de la edad entera alcanzada.

Nomenclatura general

x :	Edad
$R(x)$:	Exposición central para la edad x
$N(x)$:	Número de transiciones de edad x .
$IT(x)$:	Intensidad de transición estimada para la edad x .
$E(x)$:	Número esperado de transiciones para la edad x .
$DEV(x)$:	Diferencia entre el número real y esperado de transiciones para la edad x . Se obtiene como $N(x) - E(x)$.
$e(x)$:	Diferencia relativa para la edad x . Se obtiene como $DEV(x)/DS(x)$, donde $DS(x)$ es la desviación estándar producida entre las edades anteriores.
$CAE(x)$:	Relación porcentual del cociente $N(x)/E(x)$.
L :	Valor de la función objetivo.

Estimación por máxima verosimilitud con distribución de Poisson

En base a este método, ensayamos varias función de ajuste de Gompertz-Makeham de orden (r,s) :

$$GM_x^{ij}(r, s) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \cdot x^k + e^{\sum_{m=0}^{s-1} b_m \cdot x^m}$$

Incorporamos en la misma, polinomios ortogonales de Chebycheff con la siguiente corrección de la edad:

$$t = \frac{x - 70}{50}$$

Los siguientes cuadros recogen los resultados de la estimación para cada función ensayada:

	\hat{a}_0	\hat{a}_1	\hat{b}_0	\hat{b}_1	\hat{b}_2	L
GM (0,2)	---	---	-3.55303	4.31660	---	-3003.21
GM (0,3)	---	---	-3.61853	4.32601	-0.07067	-3003.20
GM (1,2)	-0.00125	---	-3.49000	4.07999	---	-3002.85
GM (1,3)	-0.00402	---	-2.92600	3.63000	0.48920	-3002.68
GM (2,2)	0.00840	0.01550	-3.90500	5.03200	---	2999.99

	Test de los signos	Test de las rachas	Test de Kolmogorov - Smirnov	Test de Chi-Cuadrado
GM (0,2)	0.3776	0.5124	0.4243	0.5019
GM (0,3)	0.3776	0.5124	0.4477	0.4411
GM (1,2)	0.5627	0.1301	0.4991	0.5616
GM (1,3)	0.5000	0.3789	0.4391	0.4623
GM (2,2)	0.3776	0.1799	0.3765	0.1383

Escogemos $GM(0,2)$ porque además de ser la función de ajuste más sencilla proporciona una bondad de ajuste muy similar al resto, tal como reflejan el nivel de verosimilitud y el resultado de los tests. Mantendremos esta función de ajuste para el resto de propuestas de optimización que realicemos.

Los dos parámetros de $GM(0,2)$ son estadísticamente significativos porque sus desviaciones standard, recogidas entre paréntesis, son pequeñas en relación a los valores estimados correspondientes.

$$\hat{b}_0 = -3.55303 \quad (0.039234)$$

$$\hat{b}_1 = 4.31660 \quad (0.196457)$$

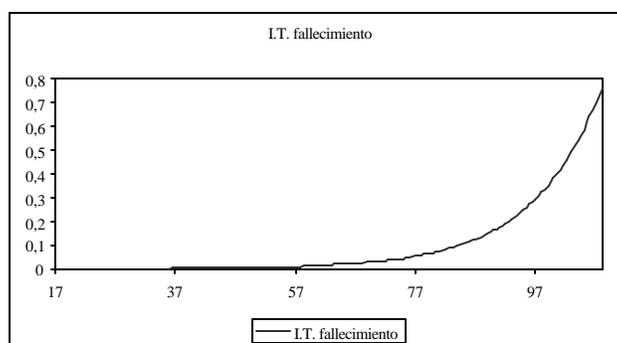
A continuación, recogemos los resultados alcanzados.

CUADRO ESTADISTICO POR EDADES INDIVIDUALES

X	R(x)	N(x)	IT(x)	E(x)
17	.50	0	.00029	.00
18	.00	0	.00032	.00
19	.00	0	.00035	.00
20	4.00	0	.00038	.00
21	4.00	0	.00042	.00
22	3.50	0	.00045	.00
23	4.50	0	.00050	.00
24	10.50	0	.00054	.01
25	16.50	0	.00059	.01
26	13.50	0	.00064	.01
27	20.50	0	.00070	.01
28	29.50	0	.00076	.02
29	36.50	0	.00083	.03
30	36.00	0	.00091	.03
31	44.50	0	.00099	.04
32	50.00	0	.00108	.05
33	64.00	0	.00117	.08
34	73.00	0	.00128	.09
35	79.50	0	.00140	.11
36	80.00	0	.00152	.12
37	93.50	0	.00166	.16
38	106.50	0	.00181	.19
39	122.00	0	.00197	.24
40	115.50	0	.00215	.25
41	127.00	0	.00234	.30
42	157.00	0	.00255	.40
43	184.50	0	.00278	.51
44	191.00	0	.00303	.58
45	206.50	2	.00331	.68
46	219.50	1	.00361	.79
47	265.50	1	.00393	1.04
48	301.50	4	.00429	1.29
49	330.50	3	.00467	1.54
50	378.50	3	.00509	1.93
51	437.50	2	.00555	2.43
52	480.00	3	.00605	2.91

Métodos de ajuste

53	541.50	3	.00660	3.57
54	576.00	2	.00720	4.14
55	671.00	5	.00784	5.26
56	719.50	2	.00855	6.15
57	813.00	7	.00932	7.58
58	879.00	7	.01016	8.93
59	934.00	10	.01108	10.35
60	1029.00	14	.01208	12.43
61	1091.00	14	.01317	14.37
62	1074.50	18	.01435	15.42
63	995.50	20	.01565	15.58
64	963.50	19	.01706	16.44
65	1029.00	21	.01860	19.14
66	1108.50	29	.02028	22.48
67	1130.50	26	.02210	24.99
68	1146.50	30	.02410	27.63
69	1037.00	23	.02627	27.24
70	941.00	21	.02864	26.95
71	908.50	31	.03122	28.36
72	844.50	29	.03404	28.74
73	766.00	24	.03710	28.42
74	682.00	26	.04045	27.59
75	607.00	33	.04410	26.77
76	533.00	21	.04807	25.62
77	500.50	21	.05241	26.23
78	462.50	20	.05713	26.42
79	382.50	21	.06228	23.82
80	323.50	25	.06790	21.97
81	282.00	17	.07402	20.87
82	243.50	21	.08070	19.65
83	213.50	13	.08797	18.78
84	171.00	28	.09591	16.40
85	132.50	11	.10455	13.85
86	99.50	11	.11398	11.34
87	77.50	10	.12426	9.63
88	59.00	12	.13546	7.99
89	42.00	9	.14768	6.20
90	30.50	6	.16099	4.91
91	19.50	2	.17551	3.42
92	8.50	3	.19134	1.63
93	8.00	1	.20859	1.67
94	8.00	4	.22740	1.82
95	4.00	2	.24790	.99
96	2.50	0	.27025	.68
97	2.50	0	.29462	.74
98	.50	1	.32119	.16
99	.50	0	.35015	.18
100	1.00	0	.38172	.38
101	.50	0	.41614	.21
102	.00	0	.45366	.00
103	1.00	0	.49457	.49
104	.00	0	.53916	.00
105	.00	0	.58778	.00
106	.00	0	.64078	.00
107	.00	0	.69855	.00
108	2.00	0	.76154	1.52



Los resultados del tests han sido generados previa agrupación de la experiencia en intervalos de edades consecutivos con un valor mínimo de fallecimientos esperados de 5.

X	R(X)	N(X)	E(X)	DEV(X)	e(x)	CAE(x)
17 - 47	2359.00	4	5.78	-1.776	-.7391	69.2
48 - 51	1448.00	12	7.19	4.806	1.7916	166.8
52 - 53	1021.50	6	6.48	-.480	-.1886	92.6
54 - 55	1247.00	7	9.41	-2.408	-.7850	74.4
56	719.50	2	6.15	-4.153	-1.6742	32.5
57	813.00	7	7.58	-.579	-.2103	92.4
58	879.00	7	8.93	-1.933	-.6468	78.4
59	934.00	10	10.35	-.348	-.1082	96.6
60	1029.00	14	12.43	1.571	.4457	112.6
61	1091.00	14	14.37	-.366	-.0965	97.4
62	1074.50	18	15.42	2.576	.6559	116.7
63	995.50	20	15.58	4.421	1.1202	128.4
64	963.50	19	16.44	2.563	.6321	115.6
65	1029.00	21	19.14	1.862	.4257	109.7
66	1108.50	29	22.48	6.525	1.3763	129.0
67	1130.50	26	24.99	1.012	.2025	104.0
68	1146.50	30	27.63	2.373	.4515	108.6
69	1037.00	23	27.24	-4.241	-.8126	84.4
70	941.00	21	26.95	-5.948	-1.1458	77.9
71	908.50	31	28.36	2.637	.4951	109.3
72	844.50	29	28.74	.257	.0480	100.9
73	766.00	24	28.42	-4.422	-.8294	84.4
74	682.00	26	27.59	-1.587	-.3021	94.2
75	607.00	33	26.77	6.233	1.2048	123.3
76	533.00	21	25.62	-4.623	-.9133	81.9
77	500.50	21	26.23	-5.230	-1.0212	80.1
78	462.50	20	26.42	-6.424	-1.2497	75.7
79	382.50	21	23.82	-2.824	-.5786	88.1
80	323.50	25	21.97	3.034	.6474	113.8
81	282.00	17	20.87	-3.875	-.8480	81.4
82	243.50	21	19.65	1.350	.3046	106.9
83	213.50	13	18.78	-5.783	-1.3343	69.2
84	171.00	28	16.40	11.600	2.8644	170.7
85	132.50	11	13.85	-2.853	-.7666	79.4
86	99.50	11	11.34	-.341	-.1013	96.9
87	77.50	10	9.63	.370	.1192	103.8

Métodos de ajuste

88	59.00	12	7.99	4.008	1.4176	150.1
89	42.00	9	6.20	2.798	1.1233	145.1
90 - 91	50.00	8	8.33	-.333	-.1153	96.0
92 - 94	24.50	8	5.11	2.886	1.2761	156.4
95 -108	14.50	3	5.35	-2.347	-1.0149	56.1
Tot.	28386.50	692	692.0	.000	.0003	100.0

ESTIMACION DE LA I.T.

L= -3003.23021

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 19

Nº DE (-): 22

PROB(+)= .3776

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 21

PROB(RACHAS)= .5124

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

DESVIACION MAXIMA: .0228

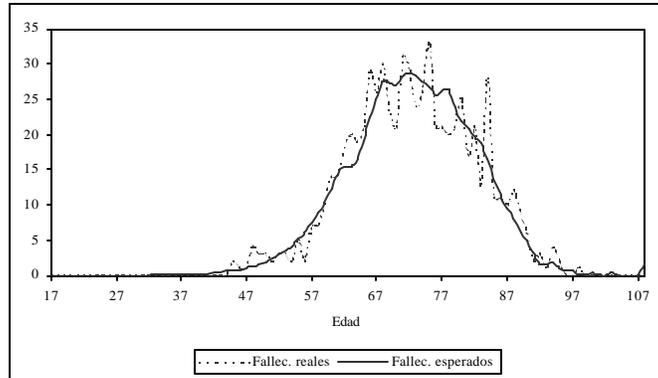
ESTADÍSTICO: .4243

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 38.2940

GRADOS DE LIBERTAD 39

PROB(X^2)= .5019



Estimación por máxima verosimilitud con hipótesis de normalidad

$$\hat{m}_x = e^{-3.58700 + 4.664 \cdot \left(\frac{x-70}{50}\right)} \tag{1}$$

ESTIMACION DE LA I.T.

L= 311.10067

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 23
 Nº DE (-): 18

PROB(+) = .8256

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 20
 PROB(RACHAS) = .4120

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

DESVIACION MAXIMA: .0467
 ESTADÍSTICO: .8652

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 38.9588
 GRADOS DE LIBERTAD 39
 PROB(X^2) = .4717

Estimación por mínimos cuadrados ordinarios

$$\hat{m}_x = e^{-3.51250 + 4.343 \cdot \left(\frac{x-70}{50}\right)} \quad (2)$$

ESTIMACION DE LA I.T.

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 17
Nº DE (-): 24

PROB(+)= .1744

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 19
PROB(RACHAS)= .3233

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

DESVIACION MAXIMA: .0245
ESTADÍSTICO: .4604

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 35.6755
GRADOS DE LIBERTAD 39
PROB(X^2)= .6223

Estimación por máxima verosimilitud con hipótesis de una distribución Gamma

$$\hat{m}_x = e^{-3.54279 + 4.331 \cdot \left(\frac{x-70}{50}\right)} \quad (3)$$

ESTIMACION DE LA I.T.

L= -2995.73451

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 18

Nº DE (-): 23

PROB(+)= .2664

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 21

PROB(RACHAS)= .5376

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

DESVIACION MAXIMA: .0237

ESTADÍSTICO: .4418

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 37.9400

GRADOS DE LIBERTAD 39

PROB(X^2)= .5181

Estimación por regresión dinámica

Suponemos una función GM(0,2)

$$\hat{m}_x = e^{a_x + b_x \cdot \left(\frac{x-70}{50}\right)}$$

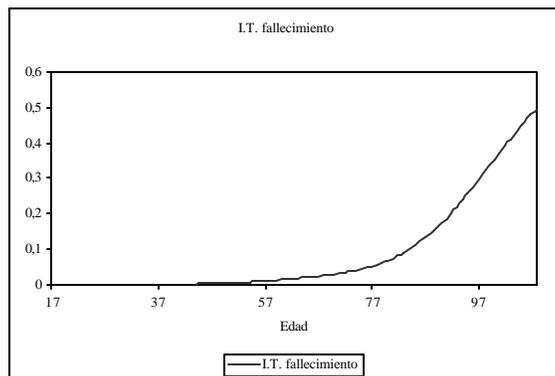
Fijamos un factor de descuento lo suficientemente grande para que el suavizado del ajuste resulte satisfactorio: 0.95. Con tales hipótesis, hemos obtenidos los siguientes valores estimados de los parámetros a_x y b_x :

EDAD	A	B
17	-10.856	11.705
18	-11.118	11.946
19	-11.408	12.212
20	-11.729	12.508
21	-11.925	12.676
22	-12.098	12.818
23	-12.260	12.947
24	-12.409	13.061
25	-12.525	13.142
26	-12.604	13.189
27	-12.663	13.214
28	-12.690	13.210
29	-12.678	13.170
30	-12.626	13.093
31	-12.535	12.982
32	-12.399	12.831
33	-12.213	12.637
34	-11.967	12.393
35	-11.657	12.096
36	-11.276	11.740
37	-10.820	11.322
38	-10.276	10.834
39	-9.634	10.268
40	-8.883	9.615
41	-8.013	8.871
42	-7.011	8.023
43	-5.856	7.059
44	-4.530	5.966
45	-3.016	4.732
46	-3.214	4.301
47	-3.376	3.937
48	-3.115	4.425
49	-3.900	2.771
50	-4.401	1.717
51	-4.665	1.180
52	-4.631	1.305
53	-4.565	1.507
54	-4.455	1.815
55	-4.242	2.371
56	-4.111	2.736
57	-3.881	3.349
58	-3.738	3.746

59	-3.616	4.089
60	-3.535	4.323
61	-3.497	4.430
62	-3.468	4.510
63	-3.461	4.515
64	-3.474	4.446
65	-3.491	4.361
66	-3.507	4.281
67	-3.531	4.156
68	-3.549	4.067
69	-3.565	3.988
70	-3.570	3.973
71	-3.566	4.015
72	-3.567	4.026
73	-3.568	4.033
74	-3.567	4.066
75	-3.566	4.100
76	-3.570	4.089
77	-3.571	4.103
78	-3.571	4.141
79	-3.571	4.205
80	-3.570	4.271
81	-3.570	4.310
82	-3.571	4.363
83	-3.571	4.401
84	-3.571	4.465
85	-3.571	4.466
86	-3.571	4.482
87	-3.570	4.501
88	-3.570	4.518
89	-3.568	4.514
90	-3.565	4.495
91	-3.561	4.470
92	-3.558	4.456
93	-3.553	4.430
94	-3.549	4.410
95	-3.543	4.368
96	-3.534	4.313
97	-3.526	4.262
98	-3.519	4.218
99	-3.509	4.157
100	-3.499	4.093
101	-3.489	4.032
102	-3.479	3.971
103	-3.468	3.904
104	-3.459	3.849
105	-3.449	3.788
106	-3.438	3.720
107	-3.425	3.645
108	-3.411	3.562

x	R(x)	N(x)	IT(x)	E(x)
17	.50	0	.00000	.00
18	.00	0	.00000	.00
19	.00	0	.00000	.00
20	4.00	0	.00000	.00
21	4.00	0	.00000	.00
22	3.50	0	.00000	.00
23	4.50	0	.00000	.00
24	10.50	0	.00000	.00
25	16.50	0	.00000	.00
26	13.50	0	.00000	.00
27	20.50	0	.00000	.00
28	29.50	0	.00000	.00
29	36.50	0	.00000	.00
30	36.00	0	.00000	.00
31	44.50	0	.00000	.00
32	50.00	0	.00000	.00
33	64.00	0	.00000	.00
34	73.00	0	.00000	.00
35	79.50	0	.00000	.00
36	80.00	0	.00000	.00
37	93.50	0	.00000	.00
38	106.50	0	.00000	.00
39	122.00	0	.00000	.00
40	115.50	0	.00000	.00
41	127.00	0	.00000	.00
42	157.00	0	.00001	.00
43	184.50	0	.00006	.01
44	191.00	0	.00048	.09
45	206.50	2	.00460	.95
46	219.50	1	.00510	1.12
47	265.50	1	.00559	1.48
48	301.50	4	.00633	1.91
49	330.50	3	.00632	2.09
50	378.50	3	.00617	2.33
51	437.50	2	.00602	2.63
52	480.00	3	.00609	2.92
53	541.50	3	.00624	3.38
54	576.00	2	.00650	3.74
55	671.00	5	.00706	4.74
56	719.50	2	.00762	5.48
57	813.00	7	.00864	7.02
58	879.00	7	.00969	8.51
59	934.00	10	.01093	10.21
60	1029.00	14	.01228	12.64
61	1091.00	14	.01364	14.88
62	1074.50	18	.01515	16.28
63	995.50	20	.01668	16.61
64	963.50	19	.01817	17.51
65	1029.00	21	.01969	20.27
66	1108.50	29	.02130	23.61
67	1130.50	26	.02280	25.78
68	1146.50	30	.02443	28.01
69	1037.00	23	.02613	27.10
70	941.00	21	.02816	26.50
71	908.50	31	.03064	27.84
72	844.50	29	.03319	28.03
73	766.00	24	.03592	27.52

74	682.00	26	.03909	26.66
75	607.00	33	.04259	25.85
76	533.00	21	.04601	24.52
77	500.50	21	.04995	25.00
78	462.50	20	.05453	25.22
79	382.50	21	.05997	22.94
80	323.50	25	.06615	21.40
81	282.00	17	.07264	20.49
82	243.50	21	.08017	19.52
83	213.50	13	.08833	18.86
84	171.00	28	.09815	16.78
85	132.50	11	.10742	14.23
86	99.50	11	.11810	11.75
87	77.50	10	.13002	10.08
88	59.00	12	.14323	8.45
89	42.00	9	.15682	6.59
90	30.50	6	.17088	5.21
91	19.50	2	.18574	3.62
92	8.50	3	.20247	1.72
93	8.00	1	.21971	1.76
94	8.00	4	.23872	1.91
95	4.00	2	.25700	1.03
96	2.50	0	.27480	.69
97	2.50	0	.29378	.73
98	.50	1	.31450	.16
99	.50	0	.33340	.17
100	1.00	0	.35221	.35
101	.50	0	.37178	.19
102	.00	0	.39149	.00
103	1.00	0	.40991	.41
104	.00	0	.43085	.00
105	.00	0	.45043	.00
106	.00	0	.46805	.00
107	.00	0	.48302	.00
108	2.00	0	.49460	.99



Métodos de ajuste

x	R(x)	A(x)	E(x)	DE(x)	e(x)	CAE(x)
17 - 48	2660.50	8	5.57	2.432	1.0305	143.6
49 - 51	1146.50	8	7.06	.944	.3555	113.3
52 - 53	1021.50	6	6.30	-.302	-.1204	95.2
54 - 55	1247.00	7	8.48	-1.480	-.5082	82.5
56	719.50	2	5.48	-3.482	-1.4872	36.4
57	813.00	7	7.02	-.021	-.0079	99.7
58	879.00	7	8.51	-1.514	-.5188	82.2
59	934.00	10	10.21	-.212	-.0662	97.9
60	1029.00	14	12.64	1.362	.3832	110.7
61	1091.00	14	14.88	-.881	-.2284	94.0
62	1074.50	18	16.28	1.722	.4267	110.5
63	995.50	20	16.61	3.390	.8318	120.4
64	963.50	19	17.51	1.492	.3565	108.5
65	1029.00	21	20.27	.734	.1631	103.6
66	1108.50	29	23.61	5.388	1.1089	122.8
67	1130.50	26	25.78	.222	.0437	100.8
68	1146.50	30	28.01	1.989	.3758	107.1
69	1037.00	23	27.10	-4.099	-.7875	84.8
70	941.00	21	26.50	-5.501	-1.0686	79.2
71	908.50	31	27.84	3.165	.5998	111.3
72	844.50	29	28.03	.973	.1838	103.4
73	766.00	24	27.52	-3.516	-.6703	87.2
74	682.00	26	26.66	-.659	-.1276	97.5
75	607.00	33	25.85	7.146	1.4055	127.6
76	533.00	21	24.52	-3.524	-.7116	85.6
77	500.50	21	25.00	-3.999	-.7999	84.0
78	462.50	20	25.22	-5.222	-1.0397	79.3
79	382.50	21	22.94	-1.939	-.4049	91.5
80	323.50	25	21.40	3.600	.7783	116.8
81	282.00	17	20.49	-3.485	-.7700	82.9
82	243.50	21	19.52	1.478	.3345	107.5
83	213.50	13	18.86	-5.859	-1.3491	68.9
84	171.00	28	16.78	11.216	2.7378	166.8
85	132.50	11	14.23	-3.233	-.8570	77.2
86	99.50	11	11.75	-.751	-.2190	93.6
87	77.50	10	10.08	-.077	-.0242	99.2
88	59.00	12	8.45	3.550	1.2210	142.0
89	42.00	9	6.59	2.413	.9404	136.6
90	30.50	6	5.21	.788	.3453	115.1
91 - 92	28.00	5	5.34	-.343	-.1483	93.5
93 -108	30.50	8	8.38	-.378	-.1306	95.4
Tot.	28386.50	692	688.5	3.529	.1345	100.5

ESTIMACION DE LA I.T.

L= -2994.60751

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 19

Nº DE (-): 22

PROB(+)= .3776

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 18

PROB(RACHAS)= .1799

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

DESVIACION MAXIMA: .0184

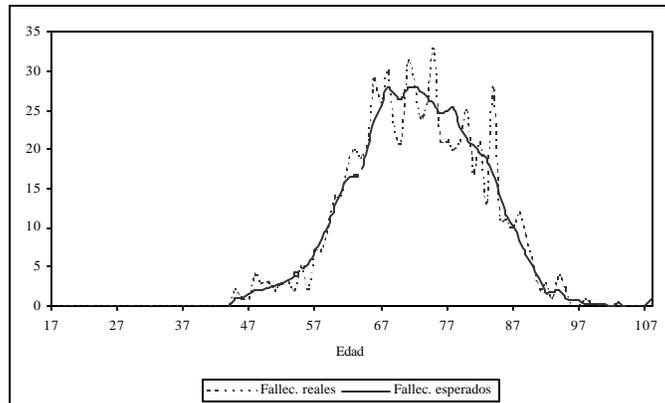
ESTADÍSTICO: .3420

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 27.4765

GRADOS DE LIBERTAD 39

PROB(χ^2)= .9168



Conclusiones

Las conclusiones más relevantes que hemos creído conveniente destacar son las siguientes:

- La propuesta que más acertada nos parece es la basada en la regresión dinámica. Su bondad de ajuste es superior al resto de modelos, tal como pone de manifiesto tanto el estadístico de Chi-Cuadrado como el nivel de verosimilitud. Gráficamente, vemos el ajuste es suave ya que no presenta ni irregularidades importantes ni cambios bruscos.
- La propuesta de estimación basada en la maximización de la verosimilitud con la aceptación de la hipótesis de normalidad no resulta aceptable, porque el estadístico del test de Kolmogorov-Smirnov no resulta satisfactorio porque su probabilidad asociada queda por debajo del 44%. Achacamos este resultado insatisfactorio al escaso número de fallecimientos esperados que invalida su aproximación normal.
- El resto de propuestas, si bien ofrecen frecen menor bondad de ajuste que la basada en la regresión dinámica, resultan aceptables pues verifican los tests propuestos y para la mayor parte de intervalos de edades, el coeficiente $CAE(x)$ toma valores próximos al 100%.

ANEXO 3-2

Estimación de una intensidad de invalidación

La experiencia con la que trabajamos ha sido extraída de la investigación realizada por el **C.M.I.B. (1991)**, recogida en la publicación **C.M.I. n° 12**. Abarca el cuatrienio 1975-1978. Se utiliza el criterio de la edad entera alcanzada. La definición de invalidez a la que está referido tal estudio contempla una carencia o diferimiento de una semana. Las exposiciones centrales están cuantificadas en años.

Estimación por máxima verosimilitud con hipótesis de Poisson.

En primer lugar, escogemos una función Gompertz-Makeham lo más sencilla posible que se ajuste razonablemente bien a la experiencia disponible. Para ello, realizamos varios ensayos.

	\hat{b}_0	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	L
GM (0, 2)	-1.075340	-0.003667	---	---	-24742
GM (0, 3)	1.216299	-0.112999	0.001221	---	-24738
GM (0, 4)	-1.798000	0.080844	-0.002686	0.000025	-24707

	Test de los signos	Test de las rachas	Test de Chi-Cuadrado
GM (0, 2)	0.7796	0.5865	0.0006
GM (0, 3)	0.3220	0.1490	0.0034
GM (0, 4)	0.5612	0.9797	0.3151

Escogemos una GM (0, 4) ya que el resto de funciones llevan asociado un nivel de alisamiento y de bondad de ajuste notablemente inferior. Sus parámetros son individualmente significativos, tal como vemos seguidamente.

$$\hat{b}_0 = -1.798000 (0.614180)$$

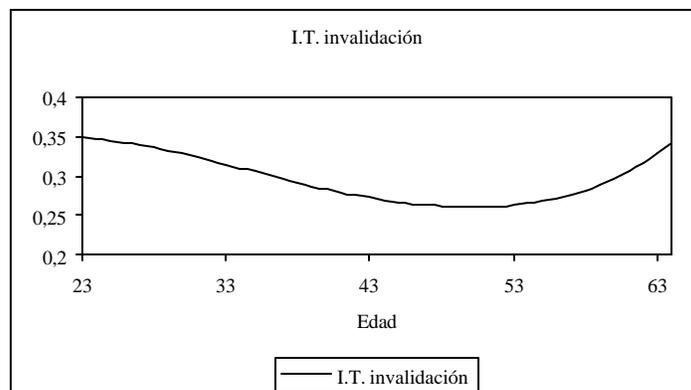
$$\hat{b}_1 = 0.080844 (0.04465)$$

$$\hat{b}_2 = -0.002686 (0.0010392)$$

$$\hat{b}_3 = 0.000025 (0.0000077)$$

Los resultados del ajuste son los siguientes.

x	R(x)	N(x)	IT(x)	E(x)
23	119.30	33.0	.34809	41.53
24	285.60	124.5	.34671	99.02
25	469.60	146.5	.34472	161.88
26	623.90	231.0	.34219	213.49
27	761.30	247.5	.33918	258.22
28	921.60	341.0	.33575	309.43
29	1025.40	350.5	.33197	340.40
30	1102.40	291.5	.32789	361.47
31	1124.30	369.0	.32359	363.81
32	1047.10	311.0	.31910	334.13
33	989.30	304.5	.31450	311.14
34	944.40	263.5	.30984	292.61
35	861.70	288.0	.30516	262.96
36	854.30	272.0	.30052	256.73
37	878.20	282.0	.29595	259.90
38	923.70	244.5	.29151	269.27
39	941.40	283.0	.28722	270.39
40	930.60	249.5	.28314	263.49
41	924.70	279.0	.27929	258.26
42	899.60	223.0	.27570	248.02
43	958.50	275.0	.27242	261.11
44	1011.50	263.0	.26946	272.56
45	1055.20	282.5	.26686	281.59
46	1109.40	265.5	.26466	293.61
47	1133.90	298.0	.26287	298.07
48	1154.10	349.0	.26153	301.83
49	1193.50	314.0	.26068	311.12
50	1240.80	339.5	.26034	323.03
51	1256.50	362.5	.26056	327.39
52	1218.40	279.5	.26137	318.45
53	1205.00	314.0	.26282	316.70
54	1109.10	314.0	.26496	293.87
55	1056.50	267.5	.26785	282.98
56	960.60	275.5	.27155	260.85
57	864.70	186.0	.27614	238.78
58	861.60	229.0	.28170	242.71
59	810.00	223.0	.28833	233.54
60	741.10	258.5	.29614	219.47
61	723.70	230.5	.30527	220.92
62	699.20	208.5	.31587	220.86
63	650.20	207.5	.32813	213.35
64	477.50	191.0	.34225	163.43



Por su parte, la contrastación arroja los siguientes resultados.

x	R(x)	N(x)	E(x)	DEV(x)	e(x)	CAE(x)
23	119.3	33.0	41.53	-8.527	-.8725	79.5
24	285.6	124.5	99.02	25.480	1.6884	125.7
25	469.6	146.5	161.88	-15.382	-.7972	90.5
26	623.9	231.0	213.49	17.505	.7900	108.2
27	761.3	247.5	258.22	-10.720	-.4399	95.8
28	921.6	341.0	309.43	31.569	1.1834	110.2
29	1025.4	350.5	340.40	10.097	.3609	103.0
30	1102.4	291.5	361.47	-69.971	-2.4267	80.6
31	1124.3	369.0	363.81	5.192	.1795	101.4
32	1047.1	311.0	334.13	-23.134	-.8345	93.1
33	989.3	304.5	311.14	-6.639	-.2482	97.9
34	944.4	263.5	292.61	-29.113	-1.1222	90.1
35	861.7	288.0	262.96	25.043	1.0183	109.5
36	854.3	272.0	256.73	15.268	.6283	105.9
37	878.2	282.0	259.90	22.095	.9037	108.5
38	923.7	244.5	269.27	-24.765	-.9952	90.8
39	941.4	283.0	270.39	12.607	.5055	104.7
40	930.6	249.5	263.49	-13.989	-.5683	94.7
41	924.7	279.0	258.26	20.743	.8511	108.0
42	899.6	223.0	248.02	-25.022	-1.0477	89.9
43	958.5	275.0	261.11	13.889	.5667	105.3
44	1011.5	263.0	272.56	-9.559	-.3818	96.5
45	1055.2	282.5	281.59	.906	.0356	100.3
46	1109.4	265.5	293.61	-28.109	-1.0817	90.4
47	1133.9	298.0	298.07	-.066	-.0025	100.0
48	1154.1	349.0	301.83	47.168	1.7902	115.6
49	1193.5	314.0	311.12	2.883	.1078	100.9
50	1240.8	339.5	323.03	16.472	.6043	105.1
51	1256.5	362.5	327.39	35.111	1.2795	110.7
52	1218.4	279.5	318.45	-38.951	-1.4392	87.8
53	1205.0	314.0	316.70	-2.698	-.1000	99.1
54	1109.1	314.0	293.87	20.131	.7743	106.9
55	1056.5	267.5	282.98	-15.485	-.6070	94.5
56	960.6	275.5	260.85	14.647	.5980	105.6
57	864.7	186.0	238.78	-52.778	-2.2521	77.9
58	861.6	229.0	242.71	-13.711	-.5803	94.4

59	810.0	223.0	233.54	-10.545	-.4550	95.5
60	741.1	258.5	219.47	39.031	1.7372	117.8
61	723.7	230.5	220.92	9.577	.4249	104.3
62	699.2	208.5	220.86	-12.357	-.5483	94.4
63	650.2	207.5	213.35	-5.849	-.2640	97.3
64	477.5	191.0	163.43	27.574	1.4222	116.9
Tot.	38119.4	11068.0	11072.4	-4.384	-.0417	100.0

ESTIMACION DE LA I.T.

L= -24707.17271

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 21

Nº DE (-): 21

PROB(+)= .5612

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 28

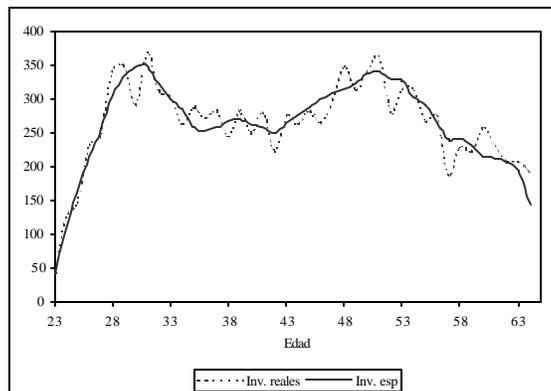
PROB(RACHAS)= .9797

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 41.6445

GRADOS DE LIBERTAD 38

PROB(X^2)= .3151



Estimación por máxima verosimilitud con hipótesis de normalidad

$$\hat{m}_x = e^{-1.8+0.080x - 0.0026x^2 + 0.000025x^3} \quad (4)$$

ESTIMACION DE LA I.T.

L= -146.39604

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 19
Nº DE (-): 23

PROB(+)= .3220

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 28
PROB(RACHAS)= .9834

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 41.4995
GRADOS DE LIBERTAD 38
PROB(X^2)= .3207

Estimación por mínimos cuadrados ordinarios

$$\hat{m}_x = e^{-1.776+0.0790x - 0.00266x^2 + 0.000025^3} \quad (5)$$

ESTIMACION DE LA I.T.

L= 95.08054

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 21

Nº DE (-): 21

PROB(+)= .5612

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 28

PROB(RACHAS)= .9797

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 41.3394

GRADOS DE LIBERTAD 38

PROB(X^2)= .3269

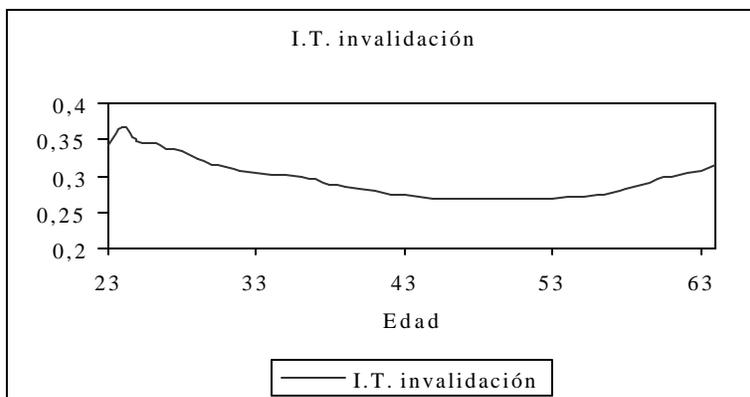
Estimación por regresión dinámica

Utilizamos como función de ajuste una GM(0,2) con parámetros a_x y b_x . Para obtener un suavizado suficiente y una bondad de ajuste alta, asignamos al factor de descuento un valor de 0.935. Seguidamente, recogemos los resultados.

EDAD	A	B
23	-1.756	.030
24	-1.792	.033
25	-.360	-.028
26	-.646	-.016
27	-.595	-.018
28	-.648	-.016
29	-.577	-.019
30	-.528	-.021
31	-.631	-.017
32	-.674	-.016
33	-.726	-.014
34	-.765	-.013
35	-.821	-.011
36	-.837	-.010
37	-.837	-.010
38	-.822	-.011
39	-.834	-.011
40	-.839	-.011
41	-.857	-.010
42	-.864	-.010
43	-.891	-.009
44	-.911	-.009
45	-.940	-.008
46	-.970	-.007
47	-1.018	-.006
48	-1.065	-.005
49	-1.092	-.004
50	-1.123	-.004
51	-1.152	-.003
52	-1.172	-.003
53	-1.213	-.002
54	-1.258	-.001
55	-1.297	.000
56	-1.343	.001
57	-1.384	.002
58	-1.449	.003
59	-1.518	.005
60	-1.586	.006
61	-1.628	.007
62	-1.659	.008
63	-1.691	.008
64	-1.715	.009

CUADRO ESTADISTICO POR EDADES INDIVIDUALES

x	R(x)	N(x)	IT(x)	E(x)
23	119.30	33.0	.34431	41.08
24	285.60	124.5	.36722	104.88
25	469.60	146.5	.34846	163.64
26	623.90	231.0	.34617	215.97
27	761.30	247.5	.33841	257.63
28	921.60	341.0	.33384	307.67
29	1025.40	350.5	.32463	332.87
30	1102.40	291.5	.31484	347.08
31	1124.30	369.0	.31197	350.74
32	1047.10	311.0	.30775	322.24
33	989.30	304.5	.30486	301.60
34	944.40	263.5	.30206	285.27
35	861.70	288.0	.30116	259.51
36	854.30	272.0	.29836	254.89
37	878.20	282.0	.29457	258.69
38	923.70	244.5	.28952	267.43
39	941.40	283.0	.28624	269.47
40	930.60	249.5	.28241	262.82
41	924.70	279.0	.27964	258.58
42	899.60	223.0	.27600	248.29
43	958.50	275.0	.27400	262.63
44	1011.50	263.0	.27159	274.72
45	1055.20	282.5	.27001	284.92
46	1109.40	265.5	.26876	298.16
47	1133.90	298.0	.26918	305.22
48	1154.10	349.0	.27003	311.64
49	1193.50	314.0	.26947	321.61
50	1240.80	339.5	.26938	334.24
51	1256.50	362.5	.26926	338.32
52	1218.40	279.5	.26847	327.10
53	1205.00	314.0	.26956	324.82
54	1109.10	314.0	.27123	300.82
55	1056.50	267.5	.27265	288.05
56	960.60	275.5	.27505	264.21
57	864.70	186.0	.27728	239.77
58	861.60	229.0	.28201	242.98
59	810.00	223.0	.28769	233.03
60	741.10	258.5	.29420	218.03
61	723.70	230.5	.29919	216.52
62	699.20	208.5	.30375	212.38
63	650.20	207.5	.30869	200.71
64	477.50	191.0	.31347	149.68



Completamos el estudio con la confección del cuadro estadístico por edades y el cuadro de resultados de los diferentes contrastes.

CUADRO ESTADISTICO POR GRUPOS DE EDADES

x	R(x)	N(x)	E(x)	DEV(x)	e(x)	CAE(x)
23	119.3	33.0	41.08	-8.076	-.8309	80.3
24	285.6	124.5	104.88	19.621	1.2633	118.7
25	469.6	146.5	163.64	-17.138	-.8834	89.5
26	623.9	231.0	215.97	15.027	.6742	107.0
27	761.3	247.5	257.63	-10.129	-.4161	96.1
28	921.6	341.0	307.67	33.332	1.2530	110.8
29	1025.4	350.5	332.87	17.627	.6370	105.3
30	1102.4	291.5	347.08	-55.580	-1.9672	84.0
31	1124.3	369.0	350.74	18.256	.6427	105.2
32	1047.1	311.0	322.24	-11.240	-.4129	96.5
33	989.3	304.5	301.60	2.901	.1101	101.0
34	944.4	263.5	285.27	-21.770	-.8499	92.4
35	861.7	288.0	259.51	28.493	1.1663	111.0
36	854.3	272.0	254.89	17.112	.7068	106.7
37	878.2	282.0	258.69	23.307	.9555	109.0
38	923.7	244.5	267.43	-22.930	-.9246	91.4
39	941.4	283.0	269.47	13.535	.5437	105.0
40	930.6	249.5	262.82	-13.315	-.5416	94.9
41	924.7	279.0	258.58	20.419	.8373	107.9
42	899.6	223.0	248.29	-25.288	-1.0582	89.8
43	958.5	275.0	262.63	12.370	.5033	104.7
44	1011.5	263.0	274.72	-11.717	-.4661	95.7
45	1055.2	282.5	284.92	-2.418	-.0944	99.2
46	1109.4	265.5	298.16	-32.662	-1.2472	89.0
47	1133.9	298.0	305.22	-7.219	-.2725	97.6
48	1154.1	349.0	311.64	37.363	1.3956	112.0
49	1193.5	314.0	321.61	-7.607	-.2797	97.6
50	1240.8	339.5	334.24	5.257	.1896	101.6
51	1256.5	362.5	338.32	24.176	.8667	107.1
52	1218.4	279.5	327.10	-47.603	-1.7355	85.4

Métodos de ajuste

53	1205.0	314.0	324.82	-10.822	-.3959	96.7
54	1109.1	314.0	300.82	13.179	.5010	104.4
55	1056.5	267.5	288.05	-20.554	-.7985	92.9
56	960.6	275.5	264.21	11.290	.4580	104.3
57	864.7	186.0	239.77	-53.767	-2.2896	77.6
58	861.6	229.0	242.98	-13.979	-.5913	94.2
59	810.0	223.0	233.03	-10.028	-.4332	95.7
60	741.1	258.5	218.03	40.468	1.8071	118.6
61	723.7	230.5	216.52	13.975	.6262	106.5
62	699.2	208.5	212.38	-3.884	-.1758	98.2
63	650.2	207.5	200.71	6.787	.3159	103.4
64	477.5	191.0	149.68	41.318	2.2269	127.6
Tot.	38119.4	11068.0	11059.9	8.088	.0769	100.0

ESTIMACION DE LA I.T.

L= -24705.72948

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 21

Nº DE (-): 21

PROB(+)= .5612

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 30

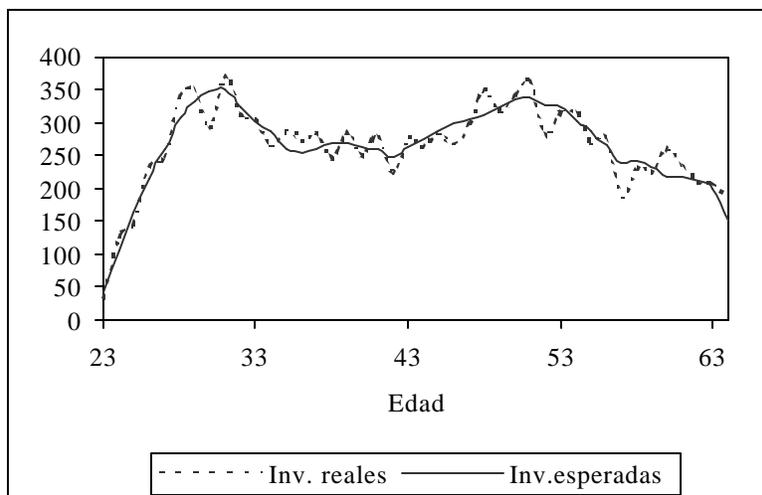
PROB(RACHAS)= .9965

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 40.6117

GRADOS DE LIBERTAD 40

PROB(X^2)= .4433



Conclusiones

Los principales comentarios que merecen los resultados numéricos alcanzados son los siguientes:

- Todas propuestas paramétricas desarrolladas ajustan bien la experiencia porque verifican todos los tests no paramétricos planteados. El único inconveniente que vemos es un número de rachas considerablemente alto aunque no preocupante porque no afecta al suavizado de la estimación que consideramos es totalmente satisfactorio.
- A diferencia de lo que ocurría en la estimación de la intensidad de fallecimiento, la aproximación normal del número de invalidaciones es igualmente satisfactoria que la aceptación de una ley de Poisson. Ello puede ser debido al mayor número esperado de transiciones por edades.
- El ajuste mediante el filtro de Kalman presenta una bondad de ajuste superior a los métodos paramétricos. El suavizado muestra algunas irregularidades en el tramo inferior de edades correspondientes a los 23-24 años, lo cual creemos es achacable al escaso volumen de información disponible en dichas edades. El mayor número de rachas que en los métodos paramétricos confirma la

menor suavidad de la estimación. Un incremento del factor de descuento podría solucionar este problema, a costa de empeorar el ajuste.

- Todas propuestas anteriores son aceptables porque verifican los contrastes no paramétricos aplicados y no presentan irregularidades muy significativas. No obstante, optamos por una estimación paramétrica por su mejor alisamiento.

ANEXO 3-3

Estimación de una intensidad de reactivación

Para desarrollar un ejemplo de estimación de una intensidad de reactivación hemos tomado la información de la publicación **C.M.I.B. (1991)** que abarca el cuatrienio 1975 y 1978. Hemos necesitado del número de reactivaciones y de exposiciones centrales expresadas en días. La definición de invalidez a la que hace referencia tal estudio contempla una carencia o diferimiento de una semana.

Consideramos la doble dependencia de la transición de reactivación: respecto a la edad (x) y la duración de la invalidez (z). Esta circunstancia va a dificultar considerablemente el análisis y puesta en práctica de los métodos de ajuste.

Debido a las características de la información disponible, utilizaremos como variables de estudio: la edad de invalidación (y) y duración de la invalidez (ζ). Nótese que la edad actual, x , se obtendría como suma de la edad de invalidación y la duración de la invalidez:

$$x = y + z.$$

Nomenclatura

x_1 :	Edad inicial de un determinado intervalo de edades.
x_2 :	Edad final de un determinado intervalo de edades.
z_1 :	Duración mínima de la invalidez de un determinado intervalo.
z_2 :	Duración máxima de la invalidez de un determinado intervalo.
$R(x,z)$:	Número de exposiciones asociado a un intervalo de edades (x_1, X_2) y de duración de la invalidez de (Z_1, Z_2) .
$N(x,z)$:	Número de transiciones asociado a un intervalo de edades (X_1, X_2) y de duración de la invalidez de (Z_1, Z_2) .
$IT(x,z)$:	Intensidad de transición estimada para la edad x y duración de

invalidez z .

$E(x,z)$: Número de transiciones asociado a un intervalo de edades (x_1, x_2) y de duración de la invalidez de (Z_1, Z_2) .

$DEV(x,z)$: Diferencia entre el número real y esperado de transiciones para el intervalo de edades (X_1, X_2) y de la duración de la invalidez de (Z_1, Z_2) . Se obtiene como $N(x,z) - E(x,z)$.

$e(x,z)$: Diferencia relativa para el intervalo de edades (X_1, X_2) y de la duración de la invalidez de (Z_1, Z_2) . Se obtiene como $DEV(x,z)/DS(x,z)$.

$CAE(x,z)$: Relación porcentual del cociente $N(x,z)/E(x,z)$.

L : Valor de la función objetivo.

Estimación por máxima verosimilitud con hipótesis de distribución Poisson

Dadas las peculiares características de la estimación, adoptamos como modelo de función de ajuste la expresión propuesta por el **C.M.I.B. (1991)**.

$$m_{x,z} = m_{y+z,z} = \left(a + b \cdot (1 + q \cdot \text{Max}(4 - 52.15z, 0)) \sqrt{Z} \cdot (Y - 50) \right) \cdot e^{-c \cdot \sqrt{z}}$$

donde,

$$Y = \begin{cases} y & \text{si } z \leq 5 \\ y + z - 5 & \text{si } z > 5 \end{cases} \quad Z = \begin{cases} z & \text{si } z \leq 1 \\ 1 + s \cdot (z - 1) & \text{si } 1 < z \leq 5 \\ 1 + 4 \cdot s & \text{si } z > 5 \end{cases}$$

Los resultados alcanzados son los siguientes:

$$\hat{a} = 51.05780 (1.1389)$$

$$\hat{b} = -2.686334 (0.1694)$$

$$\hat{c} = 4.914000 (0.0954)$$

$$\hat{q} = 1.41934 (0.13038)$$

$$\hat{s} = 0.36235000 (0.02360)$$

A nivel individual los valores de los parámetros son estadísticamente significativos porque sus desviaciones estándar son pequeñas en relación a los valores estimados. A continuación, recogemos los valores de las intensidades de transición que en este caso dependerán tanto de la edad de invalidación como de su duración.

VALORES DE LAS INTENSIDADES DE TRANSICION DE REACTIVACION

Z	20	30	40	50	60

semanas					
1	55.570	45.667	35.763	25.860	15.956
2	42.652	34.938	27.224	19.510	11.795
3	30.107	25.310	20.513	15.716	10.919
4	18.821	16.913	15.005	13.097	11.189
5	16.604	14.788	12.971	11.154	9.338
6	14.810	13.089	11.368	9.647	7.926
7	13.321	11.695	10.068	8.441	6.815
8	12.062	10.526	8.991	7.455	5.919
9	10.982	9.533	8.083	6.634	5.184
10	10.045	8.677	7.308	5.940	4.572
11	9.224	7.932	6.640	5.348	4.056
12	8.499	7.279	6.058	4.838	3.617
13	7.855	6.702	5.548	4.394	3.240
14	7.280	6.188	5.097	4.005	2.914
15	6.763	5.730	4.696	3.663	2.630
20	4.818	4.024	3.231	2.437	1.643
25	3.561	2.941	2.321	1.702	1.082
30	2.702	2.211	1.721	1.230	.739
35	2.092	1.699	1.306	.912	.519
40	1.646	1.328	1.009	.691	.373
años					
1	.967	.769	.572	.375	.178
2	.469	.367	.266	.165	.064
3	.247	.192	.136	.080	.025
4	.138	.106	.074	.042	.010
5	.081	.062	.043	.023	.004

Del anterior cuadro observamos que la intensidad de reactivación decrece fuertemente con respecto a la duración de la invalidez. En relación a la edad, el decrecimiento resulta menos intenso.

A efectos de poder plantear los contrastes de la estimación agrupamos la información por grupos de edades e intervalos de duración de invalidez.

X_1	X_2	Z_1	Z_2	$R(x, z)$	$A(x, z)$	$E(x, z)$	$DEV(x, z)$	$e(x, z)$	$CAE(x, z)$
20	29	1	2	3899	495	477.2	17.8	.8	103.7
30	34	1	2	3833	422	401.1	20.9	1.0	105.2
35	39	1	2	3757	342	348.7	-6.7	-.4	98.1
40	44	1	2	4212	309	335.9	-26.9	-1.5	92.0
45	49	1	2	5003	327	339.8	-12.8	-.7	96.2
50	54	1	2	6240	313	346.9	-33.9	-1.8	90.2
55	59	1	2	4905	215	212.2	2.8	.2	101.3
60	64	1	2	4699	168	153.5	14.5	1.2	109.5
20	29	2	3	1820	157	165.0	-8.0	-.6	95.2
30	34	2	3	1860	149	145.6	3.4	.3	102.4
35	39	2	3	2128	150	149.0	1.0	.1	100.7
40	44	2	3	2535	168	154.4	13.6	1.1	108.8
45	49	2	3	3239	166	170.6	-4.6	-.4	97.3
50	54	2	3	4303	203	189.6	13.4	1.0	107.0
55	59	2	3	3626	127	128.7	-1.7	-.1	98.7
60	64	2	3	3655	114	102.7	11.3	1.1	111.0
20	29	3	4	1038	57	64.3	-7.3	-.9	88.6
30	34	3	4	1161	71	64.3	6.7	.8	110.4
35	39	3	4	1383	65	70.5	-5.5	-.7	92.1
40	44	3	4	1716	73	79.2	-6.2	-.7	92.1
45	49	3	4	2382	97	99.6	-2.6	-.3	97.4
50	54	3	4	3292	107	122.6	-15.6	-1.4	87.3
55	59	3	4	2935	83	95.9	-12.9	-1.3	86.5
60	64	3	4	3007	75	86.5	-11.5	-1.2	86.7
20	29	4	5	695	37	31.8	5.2	.9	116.3
30	34	4	5	762	38	32.1	5.9	1.0	118.5
35	39	4	5	995	43	39.5	3.5	.6	109.0
40	44	4	5	1259	41	46.5	-5.5	-.8	88.1
45	49	4	5	1807	65	62.3	2.7	.3	104.3
50	54	4	5	2611	70	83.4	-13.4	-1.5	83.9
55	59	4	5	2339	77	68.8	8.2	1.0	112.0
60	64	4	5	2537	57	69.0	-12.0	-1.4	82.6
20	29	5	6	504	22	20.4	1.6	.4	107.9
30	34	5	6	525	26	19.4	6.6	1.5	133.9
35	39	5	6	783	19	27.1	-8.1	-1.6	70.0
40	44	5	6	1003	33	32.2	.8	.1	102.6
45	49	5	6	1429	52	42.5	9.5	1.5	122.3
50	54	5	6	2186	51	59.8	-8.8	-1.1	85.3
55	59	5	6	1965	42	49.0	-7.0	-1.0	85.8
60	64	5	6	2219	41	50.7	-9.7	-1.4	80.9
20	29	6	7	389	12	14.1	-2.1	-.5	85.4
30	34	6	7	399	14	13.1	.9	.2	106.9
35	39	6	7	645	26	19.8	6.2	1.4	131.6
40	44	6	7	811	22	22.9	-.9	-.2	96.2

45 49	6 7	1136	28	29.5	-1.5	-.3	94.8
50 54	6 7	1813	47	43.0	4.0	.6	109.3
55 59	6 7	1667	30	35.7	-5.7	-1.0	84.0
60 64	6 7	1937	39	37.7	1.3	.2	103.5
20 29	7 8	313	9	10.2	-1.2	-.4	88.4
30 34	7 8	300	9	8.8	.2	.1	102.0
35 39	7 8	459	19	12.5	6.5	1.8	151.5
40 44	7 8	703	16	17.6	-1.6	-.4	90.9
45 49	7 8	964	27	22.1	4.9	1.0	122.0
50 54	7 8	1555	35	32.3	2.7	.5	108.3
55 59	7 8	1449	31	27.0	4.0	.8	114.9
60 64	7 8	1688	26	28.3	-2.3	-.4	91.9
20 29	8 9	701	16	20.6	-4.6	-1.0	77.5
30 34	8 9	891	27	23.6	3.4	.7	114.3
35 39	8 9	1154	22	28.3	-6.3	-1.2	77.7
40 44	8 9	1406	31	31.5	-.5	-.1	98.5
45 49	8 9	1882	35	38.4	-3.4	-.6	91.1
50 54	8 9	2422	50	44.5	5.5	.8	112.3
55 59	8 9	2114	38	34.5	3.5	.6	110.0
60 64	8 9	2002	32	29.2	2.8	.5	109.6
20 29	9 10	582	18	15.6	2.4	.6	115.3
30 34	9 10	715	23	17.2	5.8	1.4	133.8
35 39	9 10	1003	12	22.3	-10.3	-2.2	53.9
40 44	9 10	1264	19	25.5	-6.5	-1.3	74.6
45 49	9 10	1615	34	29.5	4.5	.8	115.1
50 54	9 10	2080	36	34.0	2.0	.3	105.8
55 59	9 10	1909	23	27.6	-4.6	-.9	83.5
60 64	9 10	1809	19	23.1	-4.1	-.9	82.2
20 29	10 11	505	11	12.4	-1.4	-.4	88.8
30 34	10 11	599	13	13.1	-.1	.0	99.1
35 39	10 11	881	18	17.8	.2	.1	101.4
40 44	10 11	1078	28	19.6	8.4	1.9	142.5
45 49	10 11	1435	12	23.6	-11.6	-2.4	50.8
50 54	10 11	1885	27	27.6	-.6	-.1	97.7
55 59	10 11	1734	22	22.3	-.3	-.1	98.8
60 64	10 11	1676	17	18.9	-1.9	-.4	90.0
20 29	11 13	839	12	18.1	-6.1	-1.4	66.2
30 34	11 13	951	21	18.3	2.7	.6	115.1
35 39	11 13	1494	21	26.3	-5.3	-1.0	79.9
40 44	11 13	1801	30	28.5	1.5	.3	105.3
45 49	11 13	2536	35	36.0	-1.0	-.2	97.1
50 54	11 13	3186	48	40.0	8.0	1.3	120.1
55 59	11 13	3052	36	33.2	2.8	.5	108.5
60 64	11 13	2968	33	28.0	5.0	.9	117.8
20 29	13 15	672	11	12.4	-1.4	-.4	88.8
30 34	13 15	739	5	12.0	-7.0	-2.0	41.5
35 39	13 15	1234	12	18.3	-6.3	-1.5	65.5
40 44	13 15	1389	16	18.4	-2.4	-.6	86.8
45 49	13 15	2116	26	25.0	1.0	.2	103.8
50 54	13 15	2531	39	26.2	12.8	2.5	149.0
55 59	13 15	2633	21	23.3	-2.3	-.5	90.2
60 64	13 15	2585	22	19.5	2.5	.6	112.6
20 29	15 18	915	11	14.0	-3.0	-.8	78.4
30 34	15 18	1181	12	15.9	-3.9	-1.0	75.5
35 39	15 18	1820	22	22.2	-.2	.0	99.0
40 44	15 18	2165	19	23.4	-4.4	-.9	81.1
45 49	15 18	3025	41	29.0	12.0	2.2	141.6
50 54	15 18	3570	36	29.5	6.5	1.2	121.9
55 59	15 18	3873	23	27.0	-4.0	-.8	85.2
60 64	15 18	3571	24	20.9	3.1	.7	115.0

Métodos de ajuste

20	29	18	22	1310	12	15.9	-3.9	-1.0	75.7
30	34	18	22	1790	12	18.9	-6.9	-1.6	63.6
35	39	18	22	2643	23	25.1	-2.1	-.4	91.6
40	44	18	22	3319	28	27.7	.3	.1	101.1
45	49	18	22	4480	33	32.7	.3	.1	100.9
50	54	18	22	5056	43	31.4	11.6	2.1	136.8
55	59	18	22	5591	26	28.7	-2.7	-.5	90.7
60	64	18	22	5033	14	21.1	-7.1	-1.5	66.3
20	29	22	26	941	14	8.9	5.1	1.7	157.6
30	34	22	26	1395	12	11.4	.6	.2	105.4
35	39	22	26	2089	18	15.3	2.7	.7	118.0
40	44	22	26	2590	17	16.5	.5	.1	103.2
45	49	22	26	3894	18	21.4	-3.4	-.7	83.9
50	54	22	26	4151	28	19.2	8.8	2.0	146.1
55	59	22	26	4749	15	17.7	-2.7	-.6	84.8
60	64	22	26	4653	12	13.8	-1.8	-.5	87.1
20	29	26	30	728	4	5.5	-1.5	-.6	73.2
30	34	26	30	1106	11	7.1	3.9	1.5	154.4
35	39	26	30	1750	11	10.0	1.0	.3	109.6
40	44	26	30	2104	13	10.4	2.6	.8	124.7
45	49	26	30	3351	19	14.2	4.8	1.3	133.5
50	54	26	30	3525	14	12.4	1.6	.5	113.1
55	59	26	30	4164	15	11.6	3.4	1.0	129.8
60	64	26	30	4233	14	9.1	4.9	1.6	154.4
20	29	30	39	2062	14	11.0	3.0	.9	127.6
30	34	30	39	2594	15	11.7	3.3	.9	127.7
35	39	30	39	4023	18	16.1	1.9	.5	111.8
40	44	30	39	5965	20	20.4	-.4	-.1	98.1
45	49	30	39	8286	25	23.9	1.1	.2	104.4
50	54	30	39	10341	21	24.2	-3.2	-.7	86.8
55	59	30	39	11843	17	21.2	-4.2	-.9	80.2
60	64	30	39	10934	12	14.4	-2.4	-.6	83.3
20	29	39	52	2230	3	7.1	-4.1	-1.5	42.5
30	34	39	52	2814	9	7.5	1.5	.5	120.1
35	39	39	52	4630	17	10.8	6.2	1.9	157.7
40	44	39	52	7763	10	15.2	-5.2	-1.3	65.8
45	49	39	52	8987	17	14.6	2.4	.6	116.5
50	54	39	52	12872	15	16.4	-1.4	-.3	91.4
55	59	39	52	16098	9	14.9	-5.9	-1.5	60.4
60	64	39	52	13969	7	8.7	-1.7	-.6	80.2
20	29	52	126	5012	16	8.2	7.8	2.7	195.4
30	34	52	126	6518	13	8.8	4.2	1.4	147.0
35	39	52	126	11016	24	12.9	11.1	3.1	185.8
40	44	52	126	21781	18	21.1	-3.1	-.7	85.3
45	49	52	126	25294	28	19.8	8.2	1.8	141.1
50	54	52	126	38879	25	23.0	2.0	.4	108.6
55	59	52	126	58823	12	23.5	-11.5	-2.4	51.0
60	64	52	126	40671	15	9.5	5.5	1.8	157.2
20	34	126	572	19117	8	6.1	1.9	.8	130.9
35	44	126	572	25051	3	5.1	-2.1	-.9	58.5
45	49	126	572	65216	7	9.3	-2.3	-.7	75.6
50	54	126	572	69165	12	6.8	5.2	2.0	177.3
55	64	126	572	299352	19	9.3	9.7	3.2	204.6
		Tot		1086614	7571	7586.3	-15.3	-.2	100.0

Los tests correspondientes arrojan los siguientes resultados.

ESTIMACION DE LA I.T.

L= 10940.42420

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 80

Nº DE (-): 77

PROB(+)= .6252

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 75

PROB(RACHAS)= .2622

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 195.6979

GRADOS DE LIBERTAD 152

PROB(X^2)= .0097

Estimación por máxima verosimilitud con hipótesis de normalidad

Los resultados son sumamente similares.

$$\hat{a} = 51.00031$$

$$\hat{b} = -2.766245$$

$$\hat{c} = 4.9231$$

$$\hat{q} = 1.42464$$

$$\hat{s} = 0.35121$$

ESTIMACION DE LA I.T.

L= -15427.92342

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 80
Nº DE (-): 77

PROB(+)= .6252

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 75
PROB(RACHAS)= .2622

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 196.5832
GRADOS DE LIBERTAD 152
PROB(X^2)= .0087

Estimación por mínimos cuadrados ordinarios

$$\hat{a} = 51.06123$$

$$\hat{b} = -2.62121$$

$$\hat{c} = 4.90101$$

$$\hat{q} = 1.42464$$

$$\hat{s} = 0.35912$$

ESTIMACION DE LA I.T.

L= 201.33460

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 80
 Nº DE (-): 77

PROB(+)= .6252

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 75
 PROB(RACHAS)= .2622

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 191.7156
 GRADOS DE LIBERTAD 152
 PROB(X^2)= .0161

Estimación por máxima verosimilitud a través de polinomios fraccionados

En busca de una función de ajuste más sencilla y fácil de deducir, **Renshaw, A.E. y Haberman, S. (1995)** proponen la utilización de polinomios fraccionados, obteniendo los siguientes resultados.

$$m_{x,z} = m_{y+z,z} = e^{b_0 + b_1 \cdot y + b_2 \cdot z + b_3 \cdot \sqrt{z} + b_4 \cdot y \cdot z + b_5 \cdot y \sqrt{z}} \quad (6)$$

$$\hat{b}_0 = 6.0006 (0.015)$$

$$\hat{b}_1 = -0.04076560 (0.003469)$$

$$\hat{b}_2 = 0.05844790 (0.01050)$$

$$\hat{b}_3 = -1.1544460 (0.1033)$$

$$\hat{b}_4 = -0.00087408 (0.0002436)$$

$$\hat{b}_5 = 0.0079660 (0.002261)$$

ESTIMACION DE LA I.T.

L= 10903.77659

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 78
 Nº DE (-): 77

PROB(+)= .5638
 TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 70
 PROB(RACHAS)= .0987

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 287.4925
 GRADOS DE LIBERTAD 149
 PROB(X^2)= .0000

Nosotros hemos propuesto un polinomio fraccionado que tiene una forma distinta cuyos parámetros igualmente hemos obtenido por maximización de la verosimilitud. Seguidamente, recogemos los resultados.

$$m_{x,z} = m_{y+z,z} = e^{b_0 + b_1 \cdot y + b_2 \cdot z + b_3 \cdot z^{0.62} + b_4 \cdot y \cdot z + b_5 \cdot y \cdot z^{0.62}} \quad (7)$$

$$\hat{b}_0 = 5.41160900 (0.0964)$$

$$\hat{b}_1 = -0.04076560 (0.0021)$$

$$\hat{b}_2 = 0.05844790 (0.00739)$$

$$\hat{b}_3 = -1.1544460 (0.0482)$$

$$\hat{b}_4 = -0.00087408 (0.0002)$$

$$\hat{b}_5 = 0.0079660 (0.0011)$$

Seguidamente, recogemos los valores de las intensidades de transición a que da lugar la anterior estimación.

z	20	30	40	50	60

semanas					
1	62.226	45.541	33.330	24.393	17.852
2	46.096	34.039	25.135	18.561	13.706
3	36.474	27.102	20.138	14.964	11.119
4	29.921	22.339	16.678	12.452	9.296
5	25.140	18.840	14.119	10.581	7.929
6	21.494	16.157	12.146	9.130	6.863
7	18.628	14.038	10.579	7.972	6.007
8	16.321	12.324	9.307	7.028	5.307
9	14.430	10.915	8.256	6.245	4.723
10	12.857	9.738	7.376	5.587	4.231
11	11.531	8.744	6.630	5.027	3.812
12	10.403	7.895	5.991	4.547	3.451
13	9.434	7.164	5.440	4.131	3.137
14	8.595	6.530	4.961	3.769	2.863
15	7.863	5.975	4.541	3.451	2.622
20	5.303	4.027	3.058	2.322	1.764
25	3.817	2.888	2.186	1.654	1.252
30	2.880	2.168	1.632	1.229	.925
35	2.254	1.685	1.260	.942	.704
40	1.818	1.348	1.000	.742	.550
años					
1	1.190	.863	.625	.453	.328
2	.463	.293	.185	.117	.074
3	.386	.206	.110	.059	.031
4	.490	.217	.097	.043	.019
5	.820	.299	.109	.040	.014

Para proceder a su posterior contrastación, agrupamos la información muestral en el siguiente cuadro de edades.

CUADRO ESTADISTICO POR GRUPOS DE EDADES

X ₁	X ₂	Z ₁	Z ₂	R(x, z)	A(x, z)	E(x, z)	DE(x, z)	e(x, z)	CAE(x, z)
20	29	1	2	3899	495	484.6	10.4	.5	102.1
30	34	1	2	3833	422	381.9	40.1	2.1	110.5
35	39	1	2	3757	342	323.0	19.0	1.1	105.9
40	44	1	2	4212	309	307.7	1.3	.1	100.4
45	49	1	2	5003	327	315.3	11.7	.7	103.7
50	54	1	2	6240	313	337.3	-24.3	-1.3	92.8
55	59	1	2	4905	215	227.4	-12.4	-.8	94.5

Métodos de ajuste

60 64	1 2	4699	168	190.9	-22.9	-1.7	88.0
20 29	2 3	1820	157	174.9	-17.9	-1.4	89.8
30 34	2 3	1860	149	144.0	5.0	.4	103.5
35 39	2 3	2128	150	142.7	7.3	.6	105.1
40 44	2 3	2535	168	145.0	23.0	1.9	115.9
45 49	2 3	3239	166	160.4	5.6	.4	103.5
50 54	2 3	4303	203	183.4	19.6	1.4	110.7
55 59	2 3	3626	127	133.1	-6.1	-.5	95.5
60 64	2 3	3655	114	117.9	-3.9	-.4	96.7
20 29	3 4	1038	57	80.7	-23.7	-2.6	70.6
30 34	3 4	1161	71	73.1	-2.1	-.2	97.2
35 39	3 4	1383	65	75.6	-10.6	-1.2	86.0
40 44	3 4	1716	73	80.2	-7.2	-.8	91.0
45 49	3 4	2382	97	96.7	.3	.0	100.4
50 54	3 4	3292	107	115.3	-8.3	-.8	92.8
55 59	3 4	2935	83	88.7	-5.7	-.6	93.6
60 64	3 4	3007	75	80.1	-5.1	-.6	93.7
20 29	4 5	695	37	45.0	-8.0	-1.2	82.2
30 34	4 5	762	38	40.1	-2.1	-.3	94.9
35 39	4 5	995	43	45.5	-2.5	-.4	94.5
40 44	4 5	1259	41	49.4	-8.4	-1.2	83.1
45 49	4 5	1807	65	61.6	3.4	.4	105.5
50 54	4 5	2611	70	77.0	-7.0	-.8	90.9
55 59	4 5	2339	77	59.7	17.3	2.2	129.0
60 64	4 5	2537	57	57.1	-.1	.0	99.8
20 29	5 6	504	22	27.7	-5.7	-1.1	79.3
30 34	5 6	525	26	23.5	2.5	.5	110.6
35 39	5 6	783	19	30.5	-11.5	-2.1	62.2
40 44	5 6	1003	33	33.6	-.6	-.1	98.2
45 49	5 6	1429	52	41.7	10.3	1.6	124.6
50 54	5 6	2186	51	55.3	-4.3	-.6	92.2
55 59	5 6	1965	42	43.1	-1.1	-.2	97.5
60 64	5 6	2219	41	43.0	-2.0	-.3	95.4
20 29	6 7	389	12	18.5	-6.5	-1.5	65.0
30 34	6 7	399	14	15.4	-1.4	-.4	90.7
35 39	6 7	645	26	21.8	4.2	.9	119.4
40 44	6 7	811	22	23.5	-1.5	-.3	93.4
45 49	6 7	1136	28	28.8	-.8	-.1	97.3
50 54	6 7	1813	47	39.8	7.2	1.1	118.0
55 59	6 7	1667	30	31.8	-1.8	-.3	94.4
60 64	6 7	1937	39	32.7	6.3	1.1	119.3
20 29	7 8	313	9	13.0	-4.0	-1.1	69.4
30 34	7 8	300	9	10.1	-1.1	-.4	88.7
35 39	7 8	459	19	13.6	5.4	1.5	140.2
40 44	7 8	703	16	17.9	-1.9	-.4	89.5
45 49	7 8	964	27	21.4	5.6	1.2	126.1
50 54	7 8	1555	35	30.0	5.0	.9	116.7
55 59	7 8	1449	31	24.3	6.7	1.4	127.7
60 64	7 8	1688	26	25.1	.9	.2	103.8
20 29	8 9	701	16	25.6	-9.6	-1.9	62.6
30 34	8 9	891	27	26.6	.4	.1	101.6
35 39	8 9	1154	22	30.1	-8.1	-1.5	73.1
40 44	8 9	1406	31	31.6	-.6	-.1	98.1
45 49	8 9	1882	35	37.0	-2.0	-.3	94.6
50 54	8 9	2422	50	41.4	8.6	1.3	120.8
55 59	8 9	2114	38	31.4	6.6	1.2	121.0
60 64	8 9	2002	32	26.4	5.6	1.1	121.4
20 29	9 10	582	18	18.9	-.9	-.2	95.4
30 34	9 10	715	23	19.0	4.0	.9	121.3
35 39	9 10	1003	12	23.3	-11.3	-2.3	51.6

40	44	9	10	1264	19	25.3	-6.3	-1.3	75.1
45	49	9	10	1615	34	28.3	5.7	1.1	120.2
50	54	9	10	2080	36	31.7	4.3	.8	113.6
55	59	9	10	1909	23	25.3	-2.3	-.5	90.9
60	64	9	10	1809	19	21.3	-2.3	-.5	89.3
20	29	10	11	505	11	14.6	-3.6	-1.0	75.1
30	34	10	11	599	13	14.2	-1.2	-.3	91.4
35	39	10	11	881	18	18.3	-.3	-.1	98.3
40	44	10	11	1078	28	19.4	8.6	2.0	144.7
45	49	10	11	1435	12	22.5	-10.5	-2.2	53.2
50	54	10	11	1885	27	25.8	1.2	.2	104.7
55	59	10	11	1734	22	20.6	1.4	.3	106.5
60	64	10	11	1676	17	17.7	-.7	-.2	96.0
20	29	11	13	839	12	20.8	-8.8	-1.9	57.6
30	34	11	13	951	21	19.3	1.7	.4	108.6
35	39	11	13	1494	21	26.6	-5.6	-1.1	78.9
40	44	11	13	1801	30	27.7	2.3	.4	108.2
45	49	11	13	2536	35	34.2	.8	.1	102.3
50	54	11	13	3186	48	37.4	10.6	1.7	128.2
55	59	11	13	3052	36	31.2	4.8	.9	115.3
60	64	11	13	2968	33	27.0	6.0	1.2	122.3
20	29	13	15	672	11	13.8	-2.8	-.7	79.8
30	34	13	15	739	5	12.4	-7.4	-2.1	40.2
35	39	13	15	1234	12	18.2	-6.2	-1.5	65.9
40	44	13	15	1389	16	17.7	-1.7	-.4	90.3
45	49	13	15	2116	26	23.6	2.4	.5	110.0
50	54	13	15	2531	39	24.7	14.3	2.9	158.2
55	59	13	15	2633	21	22.4	-1.4	-.3	94.0
60	64	13	15	2585	22	19.5	2.5	.6	112.8
20	29	15	18	915	11	15.1	-4.1	-1.1	72.7
30	34	15	18	1181	12	16.0	-4.0	-1.0	74.9
35	39	15	18	1820	22	21.7	.3	.1	101.6
40	44	15	18	2165	19	22.3	-3.3	-.7	85.3
45	49	15	18	3025	41	27.3	13.7	2.6	150.3
50	54	15	18	3570	36	28.1	7.9	1.5	128.3
55	59	15	18	3873	23	26.5	-3.5	-.7	86.6
60	64	15	18	3571	24	21.8	2.2	.5	110.3
20	29	18	22	1310	12	16.6	-4.6	-1.1	72.4
30	34	18	22	1790	12	18.6	-6.6	-1.5	64.6
35	39	18	22	2643	23	24.0	-1.0	-.2	95.7
40	44	18	22	3319	28	26.1	1.9	.4	107.3
45	49	18	22	4480	33	30.9	2.1	.4	107.0
50	54	18	22	5056	43	30.3	12.7	2.3	141.7
55	59	18	22	5591	26	29.2	-3.2	-.6	88.9
60	64	18	22	5033	14	23.4	-9.4	-1.9	59.9
20	29	22	26	941	14	9.1	4.9	1.6	153.8
30	34	22	26	1395	12	11.0	1.0	.3	108.6
35	39	22	26	2089	18	14.5	3.5	.9	124.3
40	44	22	26	2590	17	15.5	1.5	.4	109.7
45	49	22	26	3894	18	20.4	-2.4	-.5	88.3
50	54	22	26	4151	28	18.9	9.1	2.1	148.1
55	59	22	26	4749	15	18.8	-3.8	-.9	79.7
60	64	22	26	4653	12	16.4	-4.4	-1.1	73.3
20	29	26	30	728	4	5.6	-1.6	-.7	72.0
30	34	26	30	1106	11	6.9	4.1	1.6	159.7
35	39	26	30	1750	11	9.5	1.5	.5	115.5
40	44	26	30	2104	13	9.9	3.1	1.0	131.9
45	49	26	30	3351	19	13.7	5.3	1.4	138.5
50	54	26	30	3525	14	12.5	1.5	.4	111.7
55	59	26	30	4164	15	12.9	2.1	.6	116.6

Métodos de ajuste

60	64	26	30	4233	14	11.6	2.4	.7	120.9
20	29	30	39	2062	14	11.3	2.7	.8	124.3
30	34	30	39	2594	15	11.5	3.5	1.0	130.4
35	39	30	39	4023	18	15.5	2.5	.6	116.0
40	44	30	39	5965	20	19.7	.3	.1	101.4
45	49	30	39	8286	25	23.8	1.2	.2	104.8
50	54	30	39	10341	21	25.7	-4.7	-.9	81.6
55	59	30	39	11843	17	25.5	-8.5	-1.7	66.7
60	64	30	39	10934	12	20.8	-8.8	-1.9	57.7
20	29	39	52	2230	3	7.7	-4.7	-1.7	38.9
30	34	39	52	2814	9	7.8	1.2	.4	115.4
35	39	39	52	4630	17	11.1	5.9	1.8	153.7
40	44	39	52	7763	10	15.7	-5.7	-1.4	63.5
45	49	39	52	8987	17	15.7	1.3	.3	108.1
50	54	39	52	12872	15	19.3	-4.3	-1.0	77.8
55	59	39	52	16098	9	20.7	-11.7	-2.6	43.5
60	64	39	52	13969	7	15.7	-8.7	-2.2	44.6
20	29	52	126	5012	16	7.3	8.7	3.2	218.2
30	34	52	126	6518	13	7.2	5.8	2.1	179.8
35	39	52	126	11016	24	10.2	13.8	4.3	236.3
40	44	52	126	21781	18	16.4	1.6	.4	109.9
45	49	52	126	25294	28	15.8	12.2	3.1	177.1
50	54	52	126	38879	25	20.1	4.9	1.1	124.7
55	59	52	126	58823	12	25.0	-13.0	-2.6	47.9
60	64	52	126	40671	15	14.7	.3	.1	102.3
20	34	126	572	19117	8	14.5	-6.5	-1.7	55.1
35	44	126	572	25051	3	6.6	-3.6	-1.4	45.3
45	49	126	572	65216	7	9.7	-2.7	-.9	72.3
50	54	126	572	69165	12	6.8	5.2	2.0	175.5
55	59	126	572	120962	8	8.0	.0	.0	100.4
60	64	126	572	178390	11	8.3	2.7	.9	132.7
Tot				1086614	7571	7557.1	13.9	.2	100.0

A partir del anterior cuadro efectuamos los contrastes de hipótesis que arrojan los siguientes valores:

ESTIMACION DE LA I.T.

L= 10912.66285

TEST DE LOS SIGNOS

Nº DE (+): 79

Nº DE (-): 79

PROB(+)= .5317

TEST DE LAS RACHAS

Nº DE RACHAS: 67
PROB(RACHAS)= .0228

TEST DE CHI-CUADRADO

ESTADÍSTICO: 254.3912
GRADOS DE LIBERTAD 152
PROB(X^2)= .0001

Conclusiones

Los principales comentarios a realizar son los siguientes:

- En general, todas estimaciones verifican los tests de rachas y de los signos. El estadístico Chi-cuadrado proporciona un valor bastante alto con una probabilidad de significación que no alcanza al 5%. Achacamos el valor tan alto alcanzado por el estadístico de Chi-cuadrado a errores de la información muestral disponible.

Lo anterior no significa que las estimaciones no sean aceptables, pues si se verifica el resto de los tests y el coeficiente del $CAE(x,z)$ oscila principalmente entre el 75% y el 125%, podemos aceptar la estimación (**Forfair, D.O. (1988)**).

- La estimación basada en la función de ajuste adoptada por el C.M.I.B. es la que mayor bondad de ajuste. Su suavizado es muy aceptable pues únicamente presenta algún comportamiento irregular en los tramos superiores de edades, coincidiendo con periodos cortos de invalidación. Citamos como principal inconveniente la dificultad de su expresión.
- Con el objeto de encontrar una función de ajuste más sencilla hemos desarrollado una propuesta de estimación basada en un polinomio fraccionado. Los resultados obtenidos mejoran los alcanzados por **Renshaw, A.E. y Haberman, S. (1995)**, tal como reflejan el nivel de verosimilitud y el

estadístico de Chi-Cuadrado conseguidos. Como, además, el coeficiente $CAE(x,z)$ en la mayor parte de los casos toma valores aceptables, podemos dar esta estimación como satisfactoria.

- Resumiendo, la estimación que mejor ajuste y suavidad presente es la basada en la función propuesta por el C.M.I.B. Nuestra propuesta de ajuste basada en una función más simple como es un polinomio fraccionado, arroja unos resultados razonablemente satisfactorios

Capítulo 4

Cálculo de las probabilidades de transición

Este capítulo tiene como finalidad explicar cómo obtener las probabilidades de transición asociadas a un proceso estocástico continuo a partir de la estimación de las correspondientes intensidades de transición.

Las probabilidades temporales de transición de un proceso estocástico discreto no las trataremos puesto que pueden conocerse fácilmente sustituyendo iterativamente las probabilidades anuales estimadas en su ecuación general.

Describiremos dos formas de obtener las probabilidades de transición de un proceso estocástico continuo: de forma exacta a partir de la aceptación de ciertas hipótesis y de forma aproximada por aplicación de algoritmos numéricos.

1 Introducción

La ecuación general de un proceso o semiproceso estocástico continuo relaciona las intensidades de transición con las probabilidades de transición correspondientes. Por tanto, su resolución proporciona los valores de las probabilidades de transición. Las características de la operación con múltiples estados condicionan la complejidad de la resolución.

En este capítulo describiremos dos formas de obtener las probabilidades de transición de general aplicación a cualquier operación con múltiples estados:

- Obtención de forma exacta de las probabilidades de transición a partir de la aceptación de unas determinadas hipótesis restrictivas.
- Obtención aproximada de las probabilidades de transición a partir de la aplicación de algoritmos numéricos.

Desarrollaremos ambos enfoques para el caso de un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo. En el caso de un semiproceso estocástico de Markov continuo la obtención de un procedimiento generalizado sería considerablemente más compleja (Scott, W.F. (1995) y (1996)).

2 Métodos exactos

En este epígrafe desarrollaremos varias propuestas orientadas a la obtención exacta de las probabilidades de transición. Para ello, asumiremos determinadas hipótesis concernientes a las funciones (probabilidades e intensidades) de transición.

2.1 Intensidad de transición constante

Asumimos $\mathbf{m}_x^j(t) = \mathbf{m}_x^j$ para todo t y para toda transición $E_i \rightarrow E_j$. Esta hipótesis conduce al conocido proceso estocástico de Markov homogéneo:

$$\Pr(S(x+t) = j / S(x) = i) = {}_iP^{ij}$$

Como resultado de la anterior definición, las matrices de probabilidades e intensidades de transición no dependen de la edad x .

$$P(t) = \begin{pmatrix} {}_iP^{11} & {}_iP^{12} & \dots & {}_iP^{1n} \\ {}_iP^{21} & {}_iP^{22} & \dots & {}_iP^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}_iP^{n1} & {}_iP^{n2} & \dots & {}_iP^{nn} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^{11} & \mathbf{m}^{12} & \dots & \mathbf{m}^{1n} \\ \mathbf{m}^{21} & \mathbf{m}^{22} & \dots & \mathbf{m}^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{m}^{n1} & \mathbf{m}^{n2} & \dots & \mathbf{m}^{nn} \end{pmatrix}$$

En los trabajos de **Jones, B.L. (1993)**, **Cox, D. et al. (1965)**, la matriz $P(t)$ se obtiene, previa diagonalización de $\ddot{\mathbf{E}}$, a través de la siguiente expresión:

$$P(t) = A \cdot e^{tD} \cdot A^{-1}$$

Donde D es una matriz diagonal que recoge los valores propios y A una matriz que recoge por columna los vectores propios de la matriz $\ddot{\mathbf{E}}$. De esta forma, el cálculo de las probabilidades de transición se reduce a calcular los valores y vectores propios de $\ddot{\mathbf{E}}$. El inconveniente que tiene este método es que la hipótesis de homogeneidad en que se basa su aplicación es actuarialmente inconsistente.

2.2 Intensidad de transición definida a tramos constantes

El trabajo de **Jones, B.L. (1993)** conserva la hipótesis de no-homogeneidad en el tiempo al definir la intensidad de transición como una función escalonada definida a tramos de intensidad constante. Como resultado, obtendremos una propuesta actuarialmente mucho más coherente que la anterior.

Sea un intervalo temporal $[0, t]$ dividido en m subintervalos, $[t_{k-1}, t_k]$, siendo $t_{k-1} < t_k$, $k = 1, \dots, m$ donde $t_0=0$ y $t_m = t$,

$$[0, t] = \bigcup_{k=1}^m [t_{k-1}, t_k]$$

La intensidad de transición entre dos estados cualesquiera E_i, E_j es constante en cada uno de los intervalos $[t_{k-1}, t_k]$

$$\forall t_{k-1} < t < t_k \quad \mathbf{m}_{x+t}^{ij} = \mathbf{m}_x^{ij,(k)}$$

Representamos la correspondiente matriz de intensidades de transición como $\mathbf{\dot{E}}^{(k)}$. Sea $\mathbf{P}_x^{(k)}(t)$ la matriz que recoge las probabilidades de transición de temporalidad t en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$. Podemos determinar sus valores, siguiendo el procedimiento descrito en el anterior subepígrafe.

$$\mathbf{P}_x^{(k)}(t) = \mathbf{A}^{(k)} \cdot e^{t \cdot \mathbf{D}} \cdot \mathbf{A}^{(k)-1}$$

A través de la ecuación de Chapman-Kolmogorov y posterior sustitución de la anterior expresión, llegamos a una expresión recurrente que nos permite obtener $\mathbf{P}_x(t)$.

$$\mathbf{P}_x(t) = \mathbf{P}_x(t_{m-1}) \cdot \mathbf{P}_{x+t_{m-1}}(t - t_{m-1})$$

$$\mathbf{P}_x(t) = \mathbf{P}_x(t_{m-1}) \cdot \mathbf{P}_x^{(m)}(t - t_{m-1})$$

$$\mathbf{P}_x(t) = \mathbf{P}_x(t_{m-1}) \cdot \mathbf{A}^{(m)} \cdot e^{(t-t_{m-1}) \mathbf{D}^{(m)}} \cdot \mathbf{A}^{(m)-1}$$

Siendo $D^{(m)}$ la matriz diagonal correspondiente al intervalo $[t_{m-1}, t_m] = [t_{m-1}, t]$ que recoge en la diagonal principal los valores propios y $A^{(m)}$ la correspondiente matriz de vectores propios.

2.3 Intensidad de transición continua

Este enfoque debido a **Wolthuis, H. (1994)** permite obtener las probabilidades de transición, suponiendo las intensidades de transición continuas en todo el intervalo considerado, a partir de las correspondientes probabilidades de transición en n etapas, ${}_t P_x^{ij, (n)}$. Si $k = 1$, se cumple:

$${}_t P_x^{ij, (0)} = d_{ij} \cdot e^{-\int_0^t m_j(z) dz}$$

Si $k \geq 1$ se verifican las siguientes relaciones recurrentes:

$${}_t P_x^{ij, (k)} = \sum_{\forall h \neq j} \int_0^t {}_{/w} P_x^{ih, (k-1)} \cdot \mathbf{m}_{x+w}^{hj} \cdot {}_{/t-w} P_{x+w}^{\bar{j}} \cdot dw$$

$${}_t P_x^{ij, (k)} = \sum_{\forall h \neq j} \int_0^t {}_{/w} P_x^{\bar{i}} \cdot \mathbf{m}_{x+w}^{ih} \cdot {}_{/t-w} P_{x+w}^{hj, (k-1)} \cdot dw$$

siendo

$${}_t P_x^{\bar{j}} = e^{-\int_0^t m_j(w) dw}$$

$${}_t P_x^{\bar{i}} = e^{-\int_0^t m_i(w) dw}$$

Las probabilidades de transición se pueden expresar como suma de las infinitas probabilidades de transición en n etapas.

$${}_t P_x^{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} {}_t P_x^{ij, (k)}$$

3 Métodos numéricos.

Existen métodos clásicos de aproximación de ecuaciones diferenciales que podemos aplicar al sistema de ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov: método de Picard, desarrollo por serie de Taylor, método de Euler o el método de Runge-Kutta.

Alternativamente, disponemos de otros métodos numéricos cuyo ámbito de aplicación se limita al de una operación actuarial con múltiples estados. Seguidamente desarrollamos estos últimos.

3.1 Método numérico basado en el teorema del valor medio

Esta propuesta desarrollada por **Waters, H.R. (1984)** está basada en la aplicación del teorema del valor medio. Destacamos su aplicabilidad tanto a procesos como semiprocesos estocásticos. Recordamos la formulación del teorema del valor medio:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+c), \quad 0 \leq c \leq h$$

Para aplicar este método realizaremos una partición de la temporalidad de las probabilidades de transición en subintervalos de amplitud h . Igualmente, supondremos conocidos los valores iniciales de todas las probabilidades de transición. Por aplicación del teorema del valor medio, obtenemos la siguiente expresión de cada una de las probabilidades de transición:

$${}_{/h}P_x^{ij} = {}_{/0}P_x^{ij} + \left(\frac{d({}_{/u}P_x^{ij})}{du} \right)_{u=m}$$

Como desconocemos a priori el valor de m , realizamos la siguiente aproximación.

$${}_{/h}P_x^{ij} \cong {}_{/0}P_x^{ij} + \frac{h}{2} \cdot \left[\left(\frac{d({}_{/u}P_x^{ij})}{du} \right)_{u=h} + \left(\frac{d({}_{/u}P_x^{ij})}{du} \right)_{u=0} \right] \quad (1)$$

Tomamos la definición de las probabilidades de transición dada por las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov.

$$\frac{d\left({}_{/t}P_x^{ij}\right)}{dt} = \sum_{k \neq j} {}_{/t}P_x^{ik} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{kj} - {}_{/t}P_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^j$$

Sustituimos esta última relación en la expresión (1).

$${}_{/h}P_x^{ij} \cong {}_{/0}P_x^{ij} + \frac{h}{2} \sum_{k \neq j} {}_{/h}P_x^{ik} \cdot \mathbf{m}_{x+h}^{kj} \cdot {}_{/h}P_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+h}^j + \frac{h}{2} \sum_{k \neq j} {}_{/0}P_x^{ik} \cdot \mathbf{m}_x^{kj} - {}_{/0}P_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_x^j$$

Repetimos el anterior procedimiento con todas probabilidades de transición, obteniendo como resultado un sistema lineal compatible determinado. Iterativamente iremos calculando el resto de las probabilidades de transición de la misma forma.

3.2 Método numérico basado en la integración por producto

Este método propone la obtención aproximada de la matriz $\mathbf{P}_x(t)$ a partir de las matrices de intensidad de transición de cada uno de los subintervalos que resultan de una partición de la temporalidad $[0, t]$. Suponemos que la misma está dividida en m subintervalos, $[t_{k-1}, t_k]$, $t_{k-1} < t_k$, $k = 1, \dots, m$ donde $t_0 = 0$ y $t_m = t$.

$$[0, t] = \bigcup_{k=1}^m [t_{k-1}, t_k]$$

Representamos la amplitud máxima de los subintervalos como sigue:

$$\mathbf{d} = \max_{1 \leq k \leq m} \{ (t_k - t_{k-1}) \}$$

Cuanto más pequeña sea δ mejor resultará la aproximación. Como hipótesis adicional, consideramos que las intensidades de transición permanecen constantes en cada uno de los subintervalos, obteniéndose su valor como semisuma de las intensidades de transición de los extremos.

$$\forall t \in [t_{k-1}, t_k], \mathbf{m}_x^{h,h_j}(t) = \frac{\mathbf{m}_x^{h,h_j}(t_{k-1}) + \mathbf{m}_x^{h,h_j}(t_k)}{2}$$

Podemos expresar $P_x(t)$ a través de la siguiente expresión propuesta por **Iosifescu, et al. (1973)**.

$$P_x(t) = I + \sum_{k=1}^m \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} \ddot{E}_{x+t_k} \cdots \ddot{E}_{x+t_1} dt_k \cdots dt_1 \quad (2)$$

La expresión (2) resulta poco operativa por la complejidad que representa el cálculo de la anterior integral múltiple. Únicamente podemos obtener su valor bajo determinadas hipótesis muy restrictivas como la de suponer que la intensidad de transición se mantiene constante durante todo la temporalidad.

Desde un punto de vista actuarial, esta hipótesis resulta más coherente, si relajamos su aplicación a los subintervalos resultantes de la partición $[t_{k-1}, t_k]$.

$$P_{x+t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \cong I + \ddot{E}_{x+\hat{i}_k} \cdot (t_k - t_{k-1}) + \ddot{E}_{x+\hat{i}_k}^2 \cdot \frac{(t_k - t_{k-1})^2}{2i} + \cdots + \ddot{E}_{x+\hat{i}_k}^n \cdot \frac{(t_k - t_{k-1})^n}{ni}$$

$$P_{x+t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \cong I + \sum_{k=1}^n \ddot{E}_{x+\hat{i}_k}^k \cdot \frac{(t_k - t_{k-1})^k}{k!} \quad (3)$$

Por aplicación generalizada de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, podemos expresar matricialmente, $P_x(t)$, como productorio de las matrices de transición de los subintervalos incluidos en $[0, t]$.

$$P_x(t) \cong \prod_{k=1}^m P_{x+t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \quad (4)$$

Sustituyendo la expresión (3) en la (4) podemos obtener una expresión que permite calcular la matriz de transición objeto de cálculo.

$$P_x(t) \cong \prod_{k=1}^m \left(I + \sum_{k=1}^n \ddot{E}_{x+\hat{i}_k}^k \cdot \frac{(t_k - t_{k-1})^k}{k!} \right) \quad (5)$$

Johansen, S. obtiene por simplificación y aproximación de la expresión (5) la siguiente fórmula de cálculo de $P_x(t)$ que facilita muy notablemente su cálculo.

$$P_x(t) \cong \prod_{k=1}^m [\dot{\mathbf{E}}_{x+t_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1})] \quad (6)$$

Alternativamente, **Möller C.M. (1992)** propone un desarrollo de Taylor de segundo orden de la matriz (3).

$$T_{x+t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) = I + \ddot{\mathbf{E}}_{x+t_{k-1}}^k \cdot (t_k - t_{k-1}) + \left(\frac{\dot{\mathbf{E}}_{x+t_{k-1}}^2 + \ddot{\mathbf{E}}_{x+t_{k-1}}}{2} \right) \cdot (t_k - t_{k-1})^2 \quad (7)$$

Möler C.M. (1992) sustituye la expresión (7) en la expresión (4) obteniendo la siguiente expresión aproximada de $P_x(t)$ que mejora la expresión (6).

$$P_x(t) \cong \prod_{k=1}^m T_{x+t_{k-1}}(t_k - t_{k-1})$$

$$P_x(t) \cong \prod_{k=1}^m \left[I + \ddot{\mathbf{E}}_{x+t_{k-1}}^k \cdot (t_k - t_{k-1}) + \left(\frac{\dot{\mathbf{E}}_{x+t_{k-1}}^2 + \ddot{\mathbf{E}}_{x+t_{k-1}}}{2} \right) \cdot (t_k - t_{k-1})^2 \right]$$

Capítulo 5

Aplicación a la valoración financiero-actuarial

En este capítulo explicaremos cómo valorar financiero-actuarialmente una operación con múltiples estados, modelizada a través de alguno de los procesos estocásticos tratados con anterioridad. La notación vectorial de las rentas y la notación matricial de los seguros que aplicaremos, facilitará y agilizará el cálculo actuarial.

Valoraremos las operaciones actuariales de rentas y seguros más comunes en la práctica aseguradora. La valoración del resto de operaciones será análoga.

Definiremos reserva matemática y describiremos su dinámica mediante la ecuación diferencial de Thiele. Finalmente, valoraremos estocásticamente, de acuerdo a sus probabilidades de transición, una operación aseguradora cualquiera. Para ello, definiremos y calcularemos las funciones de pérdida agregada y anual.

1 Introducción

En la tesis, adoptamos una estructura financiera determinista, asumiendo un régimen exponencial de interés compuesto, caracterizado por una tasa instantánea de interés δ cuyo tanto efectivo anual de interés equivalente lo representamos como I_1 . Indicamos el factor financiero de descuento para un periodo de t años de la siguiente forma:

$$v^t = (1 + I_1)^{-t} = e^{-d \cdot t}$$

Asumiremos las siguientes hipótesis adicionales:

- Inicialmente, el asegurado tiene edad x y se encuentra en el estado E_i
- Las rentas y los seguros son diferidos y temporales, siendo d y m su diferimiento y temporalidad correspondientes.
- Las rentas discretas tienen una periodicidad anual.
- Las cuantías de las rentas y los seguros las suponemos variables en el tiempo.
- Las rentas discretas pueden ser vencidas o anticipadas. Los seguros discretos resultan pagaderos al final del año de ocurrencia del evento asegurado.

2 Operaciones discretas

Las operaciones discretas pueden definirse mediante un proceso estocástico discreto o continuo en el tiempo. Para un asegurado, inicialmente de edad x y estado E_i , definimos las siguientes funciones económicas:

- $b^j(t)$: Término de la renta en el estado E_j correspondiente al año t -ésimo.
- $c^{jk}(t)$: Cuantía del seguro asociada a la transición $E_j \rightarrow E_k$, siendo $j \neq k$, del año t -ésimo.

2.1 Valoración de rentas actuariales

Los valores actuales actuariales de las rentas anticipadas y vencidas, con temporalidad m y diferimiento d , asociados a la permanencia en un determinado estado $E_j \in E$, se obtienen de la siguiente forma:

$$d/m \text{v}\ddot{a}_x^{ij} = \sum_{t=d}^{d+m-1} b^j(t+1) \cdot {}_tP_x^{ij} \cdot v^t$$

$$d/m \text{v}a_x^{ij} = \sum_{t=d+1}^{d+m} b^j(t) \cdot {}_tP_x^{ij} \cdot v^t$$

Recogemos en sendos vectores, los valores actuales actuariales de las diferentes rentas que podemos definir.

$$d/m \text{v}\ddot{a}_x = (d/m \text{v}\ddot{a}_x^{i1}, \dots, d/m \text{v}\ddot{a}_x^{in}) = \sum_{t=d}^{d+m-1} \mathbf{m}_x^i(t) \cdot \mathbf{B}(t+1) \cdot v^t$$

$$d/m \text{v}a_x = (d/m \text{v}a_x^{i1}, \dots, d/m \text{v}a_x^{in}) = \sum_{t=d+1}^{d+m} \mathbf{m}_x^i(t) \cdot \mathbf{B}(t) \cdot v^t$$

Donde la matriz $\mathbf{B}(t)$ recoge en su diagonal principal los términos de la renta correspondientes al año t -ésimo.

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} b^1(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b^n(t) \end{pmatrix}$$

2.2 Valoración de seguros

La valoración de los seguros dependerá de la naturaleza del proceso estocástico con el que modelicemos la operación con múltiples estados.

2.2.1 Valoración de seguros en procesos estocásticos discretos

Dada la naturaleza discreta del proceso estocástico, únicamente consideraremos una posible transición por año. El valor actual actuarial de un seguro, con temporalidad m y diferimiento d , pactado por un asegurado de edad x , inicialmente en el estado E_i , pagadero al final de año de ocurrencia de la transición $E_j \rightarrow E_k$ se define como sigue:

$$d/m VA_x^{i,jk} = \sum_{t=d}^{d+m-1} c^{jk}(t+1) \cdot {}_{|t}P_x^{ij} \cdot P_{x+t}^{jk} \cdot v^{t+1}$$

Agrupamos los seguros asociados a las distintas transiciones posibles en la matriz $d/m VA_x$. Ésta se caracteriza porque los elementos de su diagonal principal toman valor 0 pues no indican ningún cambio de estado.

$$d/m VA_x = \begin{pmatrix} 0 & \dots & d/m VA_x^{i,ln} \\ \dots & \dots & \dots \\ d/m VA_x^{i,nl} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos construir esta matriz a partir de la siguiente expresión.

$$VA_x = \sum_{t=0}^{\infty} M(t) \cdot (C(t+I) \otimes P_{x+t}) \cdot v^{t+1} \quad (1)$$

Donde la matriz $C(t)$ recoge las cuantías de los seguros del año t -ésimo. La matriz $M(t)$ es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal coinciden con las

componentes del vector de estado de la Cadena de Markov, $\mathbf{m}_x^i(t)$. El símbolo \otimes representa el producto de Kronecker o de elemento a elemento de dos matrices del mismo orden.

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & c^{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{n1}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_x^i(t) = \begin{pmatrix} {}_{/t}P_x^{i1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {}_{/t}P_x^{in} \end{pmatrix}$$

Demostración de (1)

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{M}(t) \cdot (\mathbf{C}(t+1) \otimes \mathbf{P}_{x+t}) \cdot v^{t+1} = \\ & = \sum_{t=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & \dots & c^{1n}(t+1) \cdot {}_{/t}P_x^{i1} \cdot P_{x+t}^{1n} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ c^{n1}(t+1) \cdot {}_{/t}P_x^{in} \cdot P_{x+t}^{n1} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot v^{t+1} = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \dots & VA_x^{i1n} \\ \dots & 0 & \dots \\ VA_x^{in1} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{VA}_x \end{aligned}$$

2.2.2 Valoración de seguros en procesos estocásticos continuos

Dada la naturaleza continua del proceso estocástico considerado, puede producirse más de una transición por año. Cada una de ellas, da lugar al pago de un capital que se hace efectivo al final del año.

Para un asegurado de edad x y estado E_i , hallamos el valor actual actuarial de un seguro de estas características, con temporalidad m y diferimiento d , asociado a la transición $E_j \rightarrow E_k$ a partir de la siguiente expresión.

$$d/m VA_x^{i,jk} = \sum_{t=d}^{d+m-1} c^{jk}(t+1) \cdot v^{t+1} \cdot {}_{t/1}q_x^{i,jk}$$

o equivalentemente,

$$d/m VA_x^{i,jk} = \sum_{t=d}^{d+m-1} c^{jk}(t+1) \cdot v^{t+1} \cdot \int_0^1 {}_{t/u}P_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t+u}^{jk} \cdot du$$

La matriz $d/m VA_x$ recoge a partir de la siguiente expresión los diferentes seguros que podemos definir.

$$d/m VA_x = \sum_{t=d}^{d+m-1} v^{t+1} \cdot \mathbf{C}(t+1) \otimes \int_0^1 \mathbf{M}(t+u) \cdot \ddot{\mathbf{E}}_{x+t+u} \cdot du \quad (2)$$

Demostración de (2):

$$\begin{aligned} & \sum_{t=d}^{d+m-1} v^{t+1} \cdot \mathbf{C}(t+1) \otimes \int_0^1 \mathbf{M}(t+u) \cdot \ddot{\mathbf{E}}_{x+t+u} \cdot du = \\ & = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & c^{1n}(t+1) \cdot v^{t+1} \cdot \int_0^1 {}_{t/u}P_x^{i1} \cdot \mathbf{m}_{x+t+u}^{1n} du \\ \cdots & 0 & \cdots \\ c^{n1}(t+1) \cdot v^{t+1} \int_0^1 {}_{t/u}P_x^{in} \cdot \mathbf{m}_{x+t+u}^{n1} du & \cdots & 0 \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & d/m VA_x^{i1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d/m VA_x^{in1} & \cdots & 0 \end{array} \right) = d/m VA_x \end{aligned}$$

En un semiproceso estocástico de markov continuo en el tiempo, la obtención del valor actual actuarial correspondiente es similar.

$$d/m VA_{x,z}^{i:jk} = \sum_{t=d}^{d+m-1} c^{jk}(t+1) \cdot v^{t+1} \cdot {}_{t/1}q_{x,z}^{i:jk}$$

$$d/m VA_{x,z}^{i:jk} = \sum_{t=d}^{d+m-1} c^{jk}(t+1) \cdot v^{t+1} \cdot \int_z^1 \int_0^{1-t+u} P_{x,v}^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t+u,z+v}^{jk} du dv$$

3 Operaciones continuas en el tiempo

Las operaciones definidas de forma continua en el tiempo requieren de la aplicación de un proceso estocástico continuo. Para un asegurado, inicialmente de edad x y estado E_j , definimos las siguientes funciones económicas:

- $b^j(t)$: Intensidad de cuantía de la renta relativa al estado E_j correspondiente al instante t .
- $c^{jk}(t)$: Cuantía del seguro asociada a la transición $E_j \rightarrow E_k$, siendo $j \neq k$, en el instante t .

3.1 Valoración de rentas actuariales.

Una renta continua en un determinado estado $E_j \in E$ resulta pagadera mientras el asegurado ocupe dicho estado. Así, el valor actual actuarial de una renta pagadera en el estado E_j , con temporalidad m y diferimiento d , se determina mediante la siguiente expresión:

$$d/m \overline{va}_x^{ij} = \int_d^{d+m} b^j(t) \cdot {}_{t/1}p_x^{ij} \cdot v^t dt$$

Recogemos en un solo vector los valores actuales actuariales de diferentes estados a partir de la siguiente expresión.

$$d/m \overline{va}_x = \left(d/m \overline{va}_x^1, \dots, d/m \overline{va}_x^n \right) = \int_d^{d+m} \mathbf{m}_x^i(t) \cdot \mathbf{B}(t) \cdot v^t dt$$

Donde la matriz $\mathbf{B}(t)$ es una matriz diagonal cuyos elementos no nulos recogen las intensidades de cuantía de las diferentes rentas.

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} b^1(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b^n(t) \end{pmatrix}$$

En un semiproceso Markoviano la expresión del valor actual actuarial no cambia sustancialmente.

$$d/m \overline{va}_{x,z}^{ij} = \int_z \int_d^{d+m} b^j(t) \cdot {}_tP_{x,v}^{ij} \cdot v^t dt dv$$

3.2 Valoración de seguros

Un seguro continuo se caracteriza porque se paga en el mismo instante en que acontece el evento asegurado. Para un asegurado de edad x y estado E_i , el valor actual actuarial de un seguro de estas características, con temporalidad m y diferimiento d , asociado a la transición $E_j \rightarrow E_k$, se obtiene como sigue:

$$d/m \overline{VA}_x^{i,jk} = \int_d^{d+m} c^{jk}(t) \cdot {}_tP_x^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{jk} \cdot v^t \cdot dt$$

Matricialmente, recogemos los valores actuales actuariales de los diferentes seguros.

$$d/m \overline{VA}_x = \int_d^{d+m} \mathbf{M}(t) \cdot (\mathbf{C}(t) \otimes \ddot{\mathbf{E}}_{x+t}) \cdot v^t \cdot dt \quad (3)$$

donde la matriz $\mathbf{C}(t)$ recoge las diferentes cuantías de los seguros en el instante t .

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & c^{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{n1}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración de (3):

$$\begin{aligned} & \int_d^{d+m} \mathbf{M}(t) \cdot (\mathbf{C}(t) \otimes \ddot{\mathbf{E}}_{x+t}) \cdot v^t \cdot dt = \\ & = \int_d^{d+m} \begin{pmatrix} 0 & \dots & c^{1n}(t) \cdot v^t \cdot {}_{/t}P_x^{i1} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{1n} v \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ c^{n1}(t) \cdot v^t \cdot {}_{/t}P_x^{in} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{n1} v & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot v^t \cdot dt = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \dots & d/m \overline{VA}_x^{i1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d/m \overline{VA}_x^{in1} & \dots & 0 \end{pmatrix} = d/m \overline{VA}_x \end{aligned}$$

La introducción de un semiproceso estocástico no ofrece diferencias destacables.

$$d/m \overline{VA}_{x,z}^{ijk} = \int_z \int_d^{d+m} c^{jk}(t) \cdot {}_{/t}P_{x,w}^{ij} \cdot \mathbf{m}_{x+t,w}^{jk} \cdot v^t \cdot dt \cdot dw$$

4 Cálculo de la reserva matemática

Una vez definida la operación, debemos imponer un criterio en base al cual determinar las primas, dadas las prestaciones o, viceversa, en base al cual determinar las prestaciones, fijadas las primas. Adoptamos como criterio actuarial, el principio de equilibrio individual según el cual para cada contrato de seguro, las primas deben determinarse de modo tal que su valor actuarial actual sea igual al valor actuarial actual de las prestaciones.

A fin de evitar que el asegurador deba anticipar el coste de las prestaciones, éste previamente debe cobrar las primas. Las primas por sí solas resultan insuficientes para cubrir las prestaciones futuras. Por tal razón, el asegurador deberá proceder a constituir un fondo a partir de las primas cobradas: la reserva matemática o provisión matemática. La reserva matemática entendida de esta forma, expresa la deuda contraída por el asegurador con el asegurado (**Pittaco, E. et al. (1997)**)

La reserva puede definirse prospectivamente como la diferencia entre el valor actuarial de las prestaciones futuras y el de las primas pendientes. De forma similar, la reserva matemática, calculada de forma retrospectiva, puede entenderse como el valor actual acumulado de las primas cobradas menos el valor actual acumulado de las prestaciones pasadas devengadas (**Wolthuis, H. 1994**).

En una operación actuarial, la reserva no es un fondo generado necesariamente a través de un proceso financiero sino que está afectado por la historia del riesgo asegurado y su aleatoriedad. Por ello, si la historia no es suficientemente representativa, el cálculo de la reserva retrospectiva puede estar distorsionado. Para evitar esta problemática, optaremos por calcular la reserva prospectivamente.

Para calcular la reserva de forma prospectiva vamos a utilizar un método recurrente propuesto por **Wolthuis, H. (1994)** que consiste en calcular las reservas matemáticas sucesivamente hacia atrás comenzando por la reserva del último año. La principal ventaja que ofrece este algoritmo de cálculo de la reserva matemática es su fácil y eficiente implementación informática.

La reserva de cada año se calculará de forma prospectiva a partir de las primas, prestaciones y reservas matemáticas del año siguiente. Para un asegurado, inicialmente de edad x y estado E_i , la reserva matemática en el estado E_j al final del año t -ésimo se obtendrá de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} res^j(t) = & \sum_{\forall k} (res^k(t+1) \cdot p_{x+t}^{jk} \cdot v) + \\ & + \sum_{\forall k} (b^k(t+1) \cdot p_{x+t}^{jk} \cdot v) + \sum_{\forall k \neq j} (c^{ik}(t+1) \cdot p_{x+t}^{jk} \cdot v) - \mathbf{p}^j(t+1) \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{p}^j(t+1)$ representa la prima del año $(t+1)$ -ésimo en el estado E_j . Si la renta y el seguro de la operación son continuas, la expresión de la reserva matemática queda modificada:

$$\begin{aligned} res^j(t) = & \sum_{\forall k \in E} (res^k(t+1) \cdot p_{x+t}^{jk} \cdot v) + \\ & + \sum_{\forall k \in E} \sum_{\forall l \in E} \int_0^1 c^{kl}(t+u) \cdot {}_{/u}p_{x+t}^{jk} \cdot \mathbf{m}_{x+u}^{kl} \cdot v^u \cdot du + \\ & + \sum_{\forall k \in E} \int_0^1 (b^k(t+u) - \mathbf{p}^k(t+u)) \cdot {}_{/u}p_{x+t}^{jk} \cdot v^u \cdot du \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{p}^k(t)$ representa la intensidad de cuantía de la prima en el instante t y estado E_k .

5 Ecuación diferencial de Thiele

Formulamos para un asegurado, inicialmente de edad x y estado E_i , la ecuación diferencial de Thiele (Wolthuis, H. 1994) en el instante t y estado E_j , suponiendo un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

$$d \text{res}^j(t) = \mathbf{d} \cdot \text{res}^j(t) \cdot dt - \sum_{k=1}^n [c^{jk}(t) + \text{res}^k(t) - \text{res}^j(t)] \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{jk} \cdot dt + \\ + (\mathbf{p}^j(t) - b^j(t)) \cdot dt$$

Si excluimos, por poco probable, el pago de una prestación de renta y cobro de una prima al mismo tiempo, simplificaremos la anterior expresión, prescindiendo del término $b^j(t)$ del segundo sumando. De esta forma, si $\mathbf{p}^j(t) \cdot dt > 0$ entenderemos que el asegurador ingresa prima, si $\mathbf{p}^j(t) \cdot dt < 0$ éste debe pagar prestación de renta.

$$d \text{res}^j(t) = \mathbf{d} \cdot \text{res}^j(t) \cdot dt - \sum_{k=1}^n [c^{jk}(t) + \text{res}^k(t) - \text{res}^j(t)] \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{jk} \cdot dt + \mathbf{p}^j(t) \cdot dt$$

Observamos que en caso de que se produzca la transición $E_j \rightarrow E_k$, el asegurador debe satisfacer $c^{jk}(t)$ y dotar la nueva reserva matemática, $\text{res}^k(t)$. Por otro lado, la salida del estado E_j permite la recuperación de la reserva constituida con anterioridad, $\text{res}^j(t)$.

La cantidad $c^{jk}(t) + \text{res}^k(t) - \text{res}^j(t)$ que denominamos capital de riesgo de la transición $E_j \rightarrow E_k$ representa el coste neto de esta transición. Según la ecuación diferencial de Thiele, la variación de la reserva matemática $\text{res}^j(t)$ en un intervalo infinitesimal $[t, t + dt)$ es imputable a las siguientes causas:

- Interés generado por la capitalización de la reserva matemática $\text{res}^j(t)$.

$$\mathbf{d} \cdot \text{res}^j(t) \cdot dt$$

- Ingreso de la prima (pago de la renta) por permanecer en el estado E_j .

$$\mathbf{p}^j(t) \cdot dt$$

- Coste neto de la salida del estado E_j :

$$\sum_{k=1}^n [c^{jk}(t) + res^k(t) - res^j(t)] \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{jk} \cdot dt$$

La ecuación diferencial de Thiele se puede expresar como sigue:

$$\mathbf{p}^j(t) \cdot dt = [d res^j(t) - \mathbf{d} \cdot res^j(t) \cdot dt] + \left[\sum_{k=1}^n [c^{jk}(t) + res^k(t) - res^j(t)] \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{jk} \cdot dt \right]$$

La prima cobrada (renta pagada) relativa al estado E_j en el intervalo $[t, t + dt)$ puede dividirse en dos componentes:

- La prima de ahorro que corresponde con el primer paréntesis y que representamos como $\mathbf{p}_s^j(t)$.

$$\mathbf{p}_s^j(t) \cdot dt = d res^j(t) - \mathbf{d} \cdot res^j(t) \cdot dt$$

- La prima de riesgo que corresponde con el segundo paréntesis y la indicamos como $\mathbf{p}_R^j(t)$.

$$\mathbf{p}_R^j(t) \cdot dt = \left[\sum_{k=1}^n [c^{jk}(t) + res^k(t) - res^j(t)] \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{jk} \cdot dt \right]$$

De esta forma, podemos expresar la ecuación diferencial de Thiele del siguiente modo:

$$\mathbf{p}^j(t) \cdot dt = \mathbf{p}_s^j(t) \cdot dt + \mathbf{p}_R^j(t) \cdot dt$$

De su definición, deducimos que la prima de riesgo es la componente de la prima destinada a cubrir los capitales de riesgo del periodo $[t, t + dt)$ asociados a cada transición.

En cambio, la prima de ahorro constituye la componente de la prima destinada a alimentar la reserva matemática, excluyendo los interesados generados en el periodo $[t, t + dt)$ por capitalización de la reserva matemática anterior.

Como bien apuntan **Pittaco, E. et al. (1997)**, si $p^j(t) < 0$ la prima de riesgo y de ahorro representan con signo menos las fuentes de financiación de la renta pagada por el asegurador.

El estudio de la ecuación diferencial de Thiele resulta especialmente importante en el análisis del beneficio actuarial asociado a una operación de vida. En esta línea de investigación merecen destacarse los trabajos llevados a cabo por **Waters, H.R. (1990)**, **Wolthuis, H. (1994)**, **Linnemann, P. (1993)**, **Möller, M.C. (1993)**, **Milbrodt, H. (1997)**.

6 Función de pérdida agregada

Sea una operación con múltiples estados modelizada a través de un proceso estocástico de Markov continuo en la que los estados son o bien transitivos fuertes o bien absorbentes. La función de pérdida, $L^j(t)$, viene definida como el saldo entre las prestaciones y las primas futuras. La función $L^j(t)$ registra el valor actuarial en t de las pérdidas futuras de la operación de un asegurado que se encuentra en el estado E_j en tal instante.

En la construcción de la función $L^j(t)$, asumimos como hipótesis que la primera transición del estado E_j se producirá en el instante t , siendo E_k el nuevo estado alcanzado después de dicha transición. Obviamente, los valores tanto de t como E_k son aleatorios.

Consecuentemente, definiremos para un asegurado, inicialmente de edad x y estado E_i la función de pérdida teniendo en cuenta los siguientes elementos de valoración :

- Las primas y prestaciones de renta devengadas durante la permanencia del asegurado en el estado E_j .
- La prestación derivada de la transición $E_j \rightarrow E_k$, así como las prestaciones y primas posteriores, recogidas en la reserva matemática $res^k(\mathbf{t})$.

El resultado de la anterior definición es esta función:

$$L^j(t) = \left[\int_t^{\mathbf{t}} v^{u-t} \cdot (b^j(u) - p^j(u)) ds \right] + v^{t-t} \cdot [c^{jk}(\mathbf{t}) + res^k(\mathbf{t})]$$

Donde el primer sumando indica el valor en t de las primas y prestaciones durante la permanencia en E_j . El segundo sumando representa la prestación derivada de la transición $E_j \rightarrow E_k$ juntamente con las prestaciones y primas posteriores, recogidas en $res^k(\mathbf{t})$. La función $L^j(t)$ también se denomina función de pérdida agregada porque tiene en cuenta la duración entera de la operación a partir del instante de valoración t :

- En primer lugar considera el periodo comprendido entre los instante t y \mathbf{t} en el que asegurado permanece en E_j .
- Posteriormente trata el periodo residual de la operación, desde el instante \mathbf{t} hasta el final de la operación.

Dada la aleatoriedad de \mathbf{t} y E_k , la función $L^j(t)$ puede definirse como una variable aleatoria. Tal como queda demostrado en el trabajo de **Pittaco, E. et al. (1997)**, su esperanza matemática coincide con la reserva matemática $res^j(t)$.

$$E(L^j(t)) = res^j(t)$$

Por lo que atañe al cálculo de la varianza de $L^j(t)$, conviene, antes de nada, proceder a una descomposición anual de la pérdida agregada. Con tal fin, definiremos en el siguiente epígrafe la función de pérdida anual.

7 Función de pérdida anual

La función de pérdida anual correspondiente al año t -ésimo y estado E_j , que indicamos como $\Omega^j(t)$, expresa el valor actual actuarial de los desembolsos menos los ingresos del periodo $(t-1, t]$, incluyendo los cambios de la reserva matemática.

Por simplicidad, trataremos el caso de un seguro de fallecimiento a vida entera, recogido en el trabajo de **Pittaco, E. et al. (1997)**.

$$\Omega(t) = \begin{cases} 0 & t < t-1 \\ c \cdot v^t - \int_{t-1}^t \mathbf{p} \cdot v^u \, du - \text{res}(t-1) v^{t-1} & t-1 \leq t \leq t \\ \text{res}(t) \cdot v^t - \text{res}(t-1) v^{t-1} - \int_{t-1}^t \mathbf{p} \cdot v^u \, du & t \geq t \end{cases}$$

Donde c representa la cuantía del seguro de fallecimiento, \mathbf{p} la prima pagada por el asegurado, $\text{res}(t)$ la reserva matemática en t en caso de supervivencia del asegurado. Cada uno de los tramos de la función $\Omega(t)$ recoge un escenario distinto.

- En el primer caso, el fallecimiento tiene lugar antes del año t -ésimo. Por ello, durante el año $(t-1, t]$ no tiene lugar ningún pago.
- En el segundo caso, el fallecimiento tiene lugar durante el año $(t-1, t]$. En consecuencia, el asegurador debe pagar la suma asegurada. Para hacer frente a este pago, dispone de la reserva matemática constituida al principio de año y de las primas abonadas por el asegurado durante la parte del año que vive.

- En el último caso, el asegurado fallece después del año $(t-1, t]$. Por ello, el asegurador dispone, además de la reserva constituida a principio de año, de las primas devengadas durante todo el año. Con tales recursos, debe financiar la reserva de final de año.

Wolthuis, H. (1994) demuestra las siguientes las siguientes relaciones:

$$L^j(0) = \sum_{t=1}^{\infty} \Omega^j(t)$$

$$E(\Omega^j(t)) = 0$$

$$Cov(\Omega^j(s), \Omega^j(t)) = 0 \quad s \neq t$$

8 Teorema de Hattendorff

El teorema de Hattendorff establece que la varianza de la pérdida agregada puede ser calculada como suma de las varianzas de las funciones de pérdida anual.

$$Var(L^j(0)) = \sum_{t=0}^{\infty} Var(\Omega^j(t))$$

La consecuencia más importante del teorema de Hattendorff es que el estudio del riesgo de una operación actuarial vida se puede estudiar desglosadamente en años. En el estudio y generalización del teorema de Hattendorff destacan, entre otros **Ramlau-Hansen, H. (1988)** y **Norberg, R. (1992)**.

TEMA II

INVALIDEZ

El objetivo de esta tema es abordar el tratamiento actuarial del riesgo de invalidez, tanto permanente como temporal. Para ello, en una primera parte del tema ofreceremos una visión general, explicando los principales métodos de invalidez utilizados en la práctica actuarial tradicional: método clásico (centrado en el cálculo de probabilidades de transición), método de Manchester-Unity (basado en la frecuencia de invalidez) y el método de las tablas de persistencia (fundamentado en el cálculo de probabilidades que conjuntamente se refieren a la invalidación y a la duración de la invalidez posterior).

Posteriormente, desarrollaremos varios modelos de invalidez estocásticos centrados en la obtención de las correspondientes probabilidades de transición (enfoque clásico). Cada uno de ellos, dependiendo de su naturaleza y complejidad, se inspirará en alguno de los procesos y semiprosesos estocásticos de Markov vistos en el tema I.

El tema, así planteado, consta de 4 capítulos:

- El capítulo 6 tiene un claro carácter introductorio. En una primera parte del mismo definiremos qué entendemos por invalidez e introduciremos la problemática que representa su aseguramiento. Posteriormente describiremos los métodos de estudio de la invalidez más difundidos: método clásico, método de Manchester-Unity y método de las tablas de persistencia.
- El capítulo 7 desarrolla un modelo estocástico de invalidez temporal (con reactivación) basado en la aplicación de un semiproseso estocástico de Markov continuo en el tiempo. Enfocaremos su estudio a partir de la ecuación general del proceso estocástico, que tal como demostraremos, responde a un sistema de ecuaciones integro-diferencial.
- En el capítulo 8 veremos un modelo estocástico de invalidez permanente construido a partir de la aplicación de un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo. Su ecuación general constituye un sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución nos permitirá conocer de forma exacta los valores de las probabilidades de transición.

- En el capítulo 9 analizaremos un modelo estocástico que combina la invalidez temporal con la permanente. Basamos su construcción en la aplicación de un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo con un split del estado de invalidez. De esta forma, podremos contemplar diferentes estados de invalidez según la duración de la misma.

Capítulo 6

Tratamiento actuarial del riesgo de invalidez

En este capítulo explicaremos y discutiremos la problemática que conlleva el aseguramiento del riesgo de invalidez. Analizaremos las principales variables socioeconómicas que intervienen en su valoración y citaremos las dificultades, tanto técnicas como administrativas que plantea su gestión.

Seguidamente, describiremos cómo se gestó el desarrollo de la ciencia actuarial de la invalidez en Inglaterra y Europa central durante los siglos XVIII y XIX, coincidiendo con el desarrollo del mutualismo.

La técnica actuarial de invalidez se ha ido perfeccionando con el tiempo, dando lugar a la aparición de tres modelos de invalidez que se han aplicado con carácter general durante el siglo XX: Método clásico, Método de Manchester-Unity y Método de las tablas de persistencia. Explicaremos cada uno de ellos.

Finalmente, haremos una mención especial al tratamiento de la invalidez dado en España, describiendo su marco legal y citando las aportaciones en el terreno actuarial más relevantes.

1. Introducción

Las operaciones aseguradoras de invalidez cubren al asegurado de posibles disminuciones de ingresos provenientes de una inhabilitación laboral del asegurado, motivada por un accidente o enfermedad. Tal como señala **Courant, S.T. (1984)**, las prestaciones de invalidez benefician además del asegurado a su entorno familiar más próximo.

La cobertura de la invalidez puede llevarse a cabo públicamente a través de la Seguridad Social o bien de forma privada. Idealmente, corresponde a la Seguridad social asumir la principal carga de la cobertura y a la iniciativa privada complementar las prestaciones públicas.

El riesgo de invalidez, a diferencia del riesgo de fallecimiento, es un riesgo con gran carga subjetiva dado que su evaluación está sujeta a apreciaciones personales de los agentes e instituciones que intervienen en su cualificación.

- Marco legislativo.
- El asegurador.
- Las evaluaciones y dictámenes médicos.
- Las decisiones judiciales.
- La actitud moral y predisposición de los mismos asegurados (riesgo por azar moral).

Con el objeto de poder describir y comparar bajo una misma óptica, los principales modelos actuariales de invalidez, adoptamos una definición genérica del concepto de invalidez que sea igualmente aplicable en cualquier caso.

Así, entendemos por invalidez aquella contingencia por la que un trabajador, dependiente o autónomo, resulta imposibilitado para desarrollar su actividad profesional

habitual o la que por su formación se encuentra capacitado, a causa bien de una lesión corporal producida o no por un accidente laboral, o bien de una enfermedad común o profesional. Ambas circunstancias deben preceder de un dictamen médico o una resolución judicial que reconozca la incapacidad laboral del asegurado.

Si la causa que provoca la invalidez reviste un carácter definitivo e irreversible diremos que la invalidez es permanente. Si por el contrario, la lesión o enfermedad que causa la invalidación es curable la invalidez es temporal.

2. Factores socioeconómicos influyentes en la invalidez

La incidencia de la invalidez viene condicionada por factores socioeconómicos. Al respecto, los trabajos de **Jackson P.H. (1980)**, y **Hamilton, J. (1972)** destacan los siguientes factores.

- **Edad:** La invalidez es un riesgo cuya incidencia aumenta de forma muy apreciable con la edad. **Jackson, P.H. (1980)** señala que la tasa de invalidez a los 65 años podría ser 40 veces la de los 20 años.
- **Sexo:** La incidencia de la invalidez en las mujeres suele ser menor que en los hombres.
- **Coyuntura económica:** En épocas de recesión económica y de alta tasa de desempleo, el riesgo por azar moral es mayor y, por tanto, la incidencia de la invalidez aumenta.
- **Legislación sobre invalidez:** Cuanto más permisiva sea la definición de invalidez y menos exigente su reconocimiento, mayor será su incidencia.

- Cuantías de las prestaciones de invalidez: Si el nivel de cobertura de la invalidez es elevado y las prestaciones cuantiosas, el riesgo por azar moral aumenta, lo mismo que las declaraciones de invalidez.
- Legislación sobre jubilación: Dada la alta tasa de siniestralidad de las personas con edad avanzada, cuanto mayor sea la edad máxima de jubilación y cuanto menos accesible sea la jubilación anticipada, mayor será la incidencia de invalidez.
- Clase de trabajador: La experiencia demuestra que la incidencia de la invalidez en los trabajadores autónomos es mayor que en los dependientes. **Kahane, Y. (1980)** achaca este comportamiento a que el trabajo por cuenta propia está menos controlado que el dependiente.
- Estado civil: Aquellas personas que tienen adquiridas más responsabilidades familiares (están casados y tienen hijos) poseen más necesidades económicas. El riesgo de azar moral de estas personas es mayor pues su invalidación puede favorecerles, al permitirles disponer de más tiempo para atender sus obligaciones familiares, al mismo tiempo que reciben las prestaciones económicas derivadas de su invalidez.
- Localización geográfica: En aquellas zonas con menor nivel de vida y más desempleo la incidencia de la invalidez es mayor debido al azar moral.
- Ocupación profesional: Obviamente, aquellas profesiones con mayor índice de peligrosidad y nivel de estrés emocional también sufren una incidencia de invalidez mayor.
- Fiscalidad: Cuanto más atractiva sea la fiscalidad de las prestaciones y contraprestaciones de invalidez, el riesgo por azar moral será mayor, a igual que la incidencia de invalidez.

3. Problemática del aseguramiento del riesgo de invalidez

Dada la complejidad del riesgo de invalidez, su aseguramiento comporta problemas. A continuación, señalamos los más importantes a nuestro entender.

- Tratamiento actuarial de la operación: Una operación de invalidez incluye como mínimo tres estados: Actividad, invalidez y fallecimiento. Por ello, su valoración exige la aplicación de un modelo actuarial con múltiples estados, lo cual dificulta su tratamiento.

Los modelos que contemplan la invalidez temporal aún resultan más complejos porque requieren de la incorporación y tratamiento de una transición adicional: la reactivación.

Empíricamente, se ha comprobado que la duración de la invalidez influye de forma significativa sobre las probabilidades de fallecimiento como inválido y de reactivación. Su inclusión puede complicar aún más la modelización del riesgo de invalidez temporal.

- Tratamiento estadístico: La recogida de la información concerniente a la estimación de las probabilidades e intensidades de transición de una operación de invalidez, ofrece una dificultad considerable por los siguientes motivos:
 - La diversidad de información que debemos clasificar.
 - Heterogeneidad del colectivo asegurado
 - Insuficiencia del número observado de invalidaciones, reactivaciones y fallecimientos.
 - Falta de homogeneidad de la información que disponemos.
 - Duplicidad de registros

Por su parte, el proceso de estimación de las probabilidades e intensidades de transición es igualmente complicado porque exige la aplicación de métodos estadísticos de ajuste, de considerable dificultad.

- Subjetividad de la definición de invalidez: La definición legal de invalidez y su interpretación está llena de prejuicios y apreciaciones personales que influyen en su mayor o menor incidencia. Esto dificulta la comparación de tablas y probabilidades de invalidez estimadas en países y legislaciones distintos. No así, los modelos actuariales aplicados en la construcción de estas tablas, que se inspiran en principios actuariales generalmente aceptados.

- Redacción de la póliza: Las pólizas deben exponer con suma claridad las condiciones y cláusulas pactadas. Al respecto, merecen especial atención los siguientes aspectos:
 - Condiciones de validez de la póliza. Puede exigirse al asegurado pasar por un examen médico previo o realizar una declaración jurada sobre su estado de salud.

 - Establecimiento o no de un periodo de carencia o periodo de espera, transcurrido el cual se inicia el cobro de la prestación de invalidez.

- Forma de las prestaciones:

Tal como remarca **Courant, S.T. (1984)**, el riesgo de invalidez temporal se suele cubrir con rentas de invalidez. En cambio, la invalidez permanente suele pactarse con un seguro.

Courant, S.T. (1984) destaca como principales inconvenientes de los seguros de invalidez permanente los siguientes aspectos:

- Si el seguro incluye un periodo de espera o carencia, durante dicho plazo el seguro no atiende la necesidad financiera surgida al asegurado.

- El seguro de invalidez carece de atractivo para el asegurado porque las circunstancias que propician su cobro resultan del todo indeseables.

En contrapartida, el mismo **Courant, S.T. (1984)** reconoce como aspectos más ventajosos de los seguros de invalidez su bajo precio y su tratamiento fiscal. En definitiva, **Courant, S.T. (1984)** sugiere su inclusión como prestación complementaria de otros productos de vida (pensiones de supervivencia o seguros de fallecimiento).

En cuanto al tipo de prestación por invalidez, disponemos de un amplio abanico de posibilidades, tal como **Alegre, A. (1990)** pone de manifiesto en su obra.

- Riesgo por azar moral: El asegurador debe seleccionar lo mejor posible su cartera asegurada para evitar en la medida de lo posible la suscripción de pólizas que presenten especial riesgo por azar moral, por la predisposición que pueda tener el asegurado a declararse inválido. **Courant, S.T. (1984)** advierte del riesgo por azar moral en las siguientes circunstancias:
 - Estados cuya legislación social prevea elevadas prestaciones públicas por invalidez.
 - Matrimonios con abundantes obligaciones económicas.
 - Situaciones de recesión económica.
 - etc.

Hecha esta introducción sobre la invalidez, a continuación explicaremos los principales modelos de invalidez que vienen aplicándose en la práctica actuarial. Basándonos en el trabajo de **Seegerer, G (1993)**, nos centraremos en tres modelos: el modelo clásico, el modelo de Mánchester-Unity y el modelo de tablas de persistencia.

4. Método clásico

El método de invalidez clásico se basa en la obtención de las probabilidades de las transiciones objeto de estudio: invalidación, reactivación y fallecimiento. Situamos su origen en los estados centroeuropeos de Alemania y Austria durante la segunda mitad del siglo XIX, momento en el que el proceso de industrialización era realmente intenso. Esto propició un crecimiento espectacular de la clase obrera que vivía en condiciones de pobreza e inseguridad laboral.

Como respuesta a este crecimiento industrial, se constituyeron sociedades mutualistas integradas por trabajadores entre las que destacamos las mutuas de los trabajadores de las minas alemanas (Knappschaftskassen) y austríacas (Brudergesellschaften). Estas mutuas proporcionaban a sus miembros cobertura frente a los riesgos de fallecimiento e invalidez permanente, excluyendo el riesgo de invalidez temporal por considerar su incidencia escasamente significativa.

Los gobiernos, primero de Prusia y después del resto de los estados alemanes y austríacos, tomaron conciencia del problema social que representaba para la clase obrera el incipiente desarrollo industrial. Esta actitud se tradujo en leyes, de marcado carácter social, que intentaban proteger los derechos e intereses del trabajador:

- En 1854, el gobierno de Prusia elaboró un reglamento que regulaba la actividad y funcionamiento de las mutuas. A partir de ese momento, las mutuas alemanas y austríacas asumieron un gran protagonismo en la investigación actuarial de la invalidez permanente.
- A partir de 1871, el estado alemán responsabiliza por ley a los propietarios de empresas de ferrocarriles, minas y fábricas de las lesiones y muertes de sus empleados ocurridas por accidentes laborales.

- Posteriormente, en 1889 el seguro de invalidez permanente se declaró obligatorio y las compañías aseguradoras comenzaron a comercializar pólizas que cubrían este riesgo.

Consecuencia del crecimiento del fenómeno mutualista y de la concienciación social por la precariedad de vida del proletariado, surgió en Alemania durante la segunda mitad del siglo XIX, una escuela actuarial que desarrolló el tratamiento actuarial de la invalidez permanente.

De esta escuela actuarial, destacó inicialmente la figura **Heym, K.F.** quien en 1855 publicó un estudio sobre las mutuas alemanas en las que sugería una tabulación de las primas en función de la edad de entrada del asegurado, a través de la siguiente expresión de la probabilidad de invalidación.

$$i_x = 0.001 + 50.000 \frac{x}{79} - 1$$

Donde la probabilidad de invalidación, i_x , definida para las edades comprendidas entre los 20 y 79 años, varía aproximadamente entre 0.001 y 1. En 1866 **Heym, K.F.** dedujo esta fórmula, suponiendo que la evolución de la probabilidad de invalidación era muy similar a la de fallecimiento. Esta fórmula se utilizó posteriormente en la preparación de las leyes alemanas de seguridad social sobre invalidez permanente.

Por la novedad de su aportación, **Heym, K.F.** ha sido considerado el precursor de la ciencia actuarial de invalidez por destacados actuarios de invalidez como **Seal, H. (1977)** o **Mattsson, P. (1977)**. Con posterioridad a **Heym, K.F.**, se realizaron otras propuestas sobre la forma que debía adoptar la función de probabilidad de invalidación:

- **Lewin (1872)** modificó la fórmula de **Heym, K.F.**, de modo que la probabilidad de invalidación permanente a los 75 años valiera exactamente 1.

$$i_x = 0.001 + \frac{49.950 \frac{x}{75}}{50.000}$$

- En 1873, **Behm** construyó una fórmula de la probabilidad de invalidación que valía 0.00019036 para los 20 años y que doblaba su valor cada 5 años.

$$i_x = 2^{\frac{x-20}{5}} \cdot 0.00019036$$

- En 1897, **Weber** propuso una fórmula con una constante, w , relacionada con la profesión del asegurado, más una progresión geométrica que dependía de la edad y cuyos parámetros, α y β , debían estimarse a partir de la experiencia disponible.

$$i_x = w + a \cdot b^x$$

Wittstein, T. (1862) propuso estimar las probabilidades de invalidación y fallecimiento a partir de la experiencia observada acumulada en un año, mediante las siguientes expresiones aproximadas:

$$q_x \cong \frac{D}{A + \frac{B-C}{2}}$$

$$i_x \cong \frac{J}{A + \frac{B-C}{2}}$$

donde

A: Número de personas activas de edad x al inicio del año de observación.

B: Número de nuevas entradas de edad x durante el año de observación.

C: Número de salidas voluntarias de personas activas de edad x durante el año de observación.

D: Número de fallecimientos de personas de edad x durante el año de observación

J: Número de invalidaciones de personas de edad x durante el año de observación

La expresión aproximada de q_x fue objeto de críticas porque estimaba la probabilidad de fallecimiento, sin diferenciar el estado del asegurado.

Una vez publicado el trabajo de **Makeham, W.M. (1875)** en el que éste desarrollaba los principios básicos de la teoría de los decrementos, el actuario alemán **Karup, J. (1893)** se adhirió inmediatamente a ella, proponiendo un modelo de invalidez permanente por decrementos. En él introdujo dos decrementos o salidas para personas activas: fallecimiento e invalidación y un solo decremento para las personas inválidas: el fallecimiento.

El modelo de **Karup, J. (1893)** se apoyó en la estimación de las probabilidades independientes de fallecimiento como activo, q_x^{*aa} y de invalidación i_x^* , a partir de las siguientes expresiones aproximadas:

$$q_x^{*aa} \cong \frac{D}{A - \frac{I}{2}}$$

$$i_x^* \cong \frac{J}{A - \frac{D}{2}}$$

Karup, J. (1893) obtuvo los valores de p_x^{aa} por aplicación de la ley multiplicativa de las probabilidades independientes q_x^{*aa} e i_x^* , estimadas anteriormente.

$$p_x^{aa} = (1 - q_x^{*aa}) \cdot (1 - i_x^*)$$

La publicación del trabajo de **Karup, J. (1893)** suscitó gran polémica porque su utilización de las probabilidades independientes fue acogida con gran escepticismo por la comunidad de actuarios. Años más tarde, **Richard, P.J. (1946)** señaló en su obra que las probabilidades independientes o absolutas utilizadas por **Karup, J. (1893)** solamente tenían interés teórico, pues la probabilidad de fallecimiento independiente, libre de invalidez, carecía de consistencia actuarial.

En 1900, el actuario ruso **Hamza, E. (1900)**, presentó en el Tercer Congreso Internacional de actuarios un trabajo sobre invalidez, basado en la experiencia alemana.

Este trabajo tuvo una gran significación porque logró sistematizar toda la experiencia anterior sobre técnicas actuariales de invalidez y sentó las bases modernas del modelo de invalidez clásico.

La propuesta de **Hamza, E. (1900)** se basaba en dividir el numero total de personas vivas, l_x , en personas activas, l_x^{aa} , e invalidas, l_x^{ii} . A diferencia de la propuesta de **Karup, J.**, consideraba probabilidades dependientes, en el sentido clásico del término. En base a dicha hipótesis, **Hamza, E. (1900)** definió las siguientes relaciones de probabilidades:

$$p_x^{aa} + p_x^{ai} + q_x^{aa} + q_x^{ai} = 1 \quad (1)$$

$$p_x^i + q_x^i = 1 \quad (2)$$

$$p_x^a = p_x^{aa} + p_x^{ai} \quad (3)$$

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai} \quad (4)$$

$$p_x^{ai} + q_x^{ai} = i_x \quad (5)$$

donde:

i_x : probabilidad de invalidación entre las edades x y $x+1$.

p_x^i : probabilidad de permanecer en invalidez entre las edades x y $x+1$.

q_x^i : probabilidad de fallecimiento de una persona invalida entre las edades x y $x+1$.

p_x^{aa} : probabilidad de permanecer en actividad entre las edades x y $x+1$.

q_x^{aa} : probabilidad de fallecimiento en actividad de una persona activa entre las edades x y $x+1$.

p_x^{ai} : probabilidad de que una persona activa de edad x llegue inválida a la edad $x+1$.

q_x^{ai} : probabilidad de fallecimiento como inválido de una persona inicialmente activa entre las edades x y $x+1$.

p_x^a : probabilidad de supervivencia de una persona inicialmente activa entre las edades x y $x + 1$.

q_x^a : probabilidad de fallecimiento de una persona inicialmente activa entre las edades x y $x + 1$.

Combinando las expresiones (1) y (5), **Hamza, E. (1900)** obtuvo la relación (6). De la misma forma, asumiendo la hipótesis de que la invalidación se distribuía uniformemente a lo largo del año, dedujo las expresiones aproximadas (7) y (8).

$$p_x^{aa} + q_x^{aa} = 1 - i_x \quad (6)$$

$$p_x^{ai} \cong i_x \cdot \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) \quad (7)$$

$$q_x^{ai} \cong \frac{i_x \cdot q_x^i}{2} \quad (8)$$

Además de las anteriores relaciones, **Hamza, E. (1900)** introdujo estas otras:

$$p_x^{ai} = \frac{l_x}{l_x^{aa}} (p_x - p_x^i) - (p_x^{aa} - p_x^i)$$

$$q_x^{ai} = \frac{l_x}{l_x^{aa}} (q_x - q_x^i) - (q_x^{aa} - q_x^i)$$

$$p_x^a = \frac{l_x}{l_x^{aa}} (p_x - p_x^i) + p_x^i$$

$$q_x^a = \frac{l_x}{l_x^{aa}} (q_x - q_x^i) + q_x^i$$

Las probabilidades multianuales se definen igual que las anuales, verificando sus mismas relaciones. Su aplicación permite valorar rentas y seguros. Como ejemplo,

definimos el valor actual actuarial de una renta de invalidez de una persona inicialmente activa, anual, vencida, unitaria, inmediata y temporal.

$${}_t a_x^{ai} = \sum_{r=1}^t {}_t p_x^{ai} \cdot v^r$$

donde ${}_t p_x^{ai}$ representa la probabilidad de que una persona activa de edad x se encuentre inválida en la edad $x+t$. Para introducir la valoración continua, **Hamza, E. (1900)** definió las tasas instantáneas de invalidación, m_x^{ai} , de fallecimiento como activo, m_x^{am} y de fallecimiento como invalido, m_x^{im} .

En el Noveno Congreso Internacional de Actuarios de 1930, **Mattsson, P. (1930)** desarrolló el modelo de **Hamza, E. (1900)** para el campo continuo:

- Invalidez sin reactivación:

Mattsson, P. (1930) describió la variación infinitesimal de la función de supervivencia de inválidos, l_x^{ii} , manteniendo la hipótesis asumida por **Hamza, E. (1900)** de que la invalidez tenía carácter permanente y, por tanto, estaba exenta de reactivación.

$$\frac{d l_x^{ii}}{d x} = l_x^{aa} \cdot m_x^{ai} - l_x^{ii} \cdot m_x^{im}$$

$$\frac{d l_x^{ii}}{d x} = (l_x - l_x^{ii}) \cdot m_x^{ai} - l_x^{ii} \cdot m_x^{im}$$

$$\frac{d l_x^{ii}}{d x} = l_x \cdot m_x^{ai} - (m_x^{im} + m_x^{ai}) \cdot l_x^{ii} \quad (9)$$

Adoptando las condiciones iniciales x_0 y $l_{x_0}^{ii} = 0$, solucionó la ecuación diferencial anterior.

$$l_x^{ii} = \int_{x_0}^x m_t^{ai} \cdot l_t \cdot e^{-\int_t^x (m_s^{im} + m_s^{ai}) ds} \cdot dt \quad (10)$$

- Invalidez con reactivación univariante

En este modelo **Mattsson, P. (1930)** incorporó la posibilidad de reactivación, considerando que su probabilidad dependía únicamente de la edad. El resultado fue la ecuación diferencial (11).

$$\begin{aligned} \frac{d l_x^{ii}}{d x} &= l_x^{aa} \cdot m_x^{ai} - l_x^{ii} \cdot (m_x^{im} - m_x^{ia}) \\ \frac{d l_x^{ii}}{d x} &= (l_x - l_x^{ii}) \cdot m_x^{ai} - l_x^{ii} \cdot (m_x^{im} + m_x^{ia}) \\ \frac{d l_x^{ii}}{d x} &= l_x \cdot m_x^{ai} - l_x^{ii} \cdot (m_x^{im} + m_x^{ia} + m_x^{ai}) \end{aligned} \quad (11)$$

Fijadas unas determinadas condiciones iniciales, x_0 y $l_{x_0}^{ii} = 0$, obtuvo la siguiente solución:

$$l_x^{ii} = \int_{x_0}^x m_t^{ai} \cdot l_t \cdot e^{-\int_t^x (m_s^{ia} + m_s^{im} + m_s^{ai}) ds} \cdot dt \quad (12)$$

De esta forma, se añadía la reactivación al modelo construido por **Hamza, E. (1900)**.

- Invalidez con reactivación bivalente

Tal como apunta **Mattsson, P. (1930)**, las transiciones del estado de invalidez: reactivación y fallecimiento, dependen además de la edad, de la duración de la invalidez. Para captar esta doble dependencia, **Mattsson, P. (1930)**, definió las siguientes intensidades de transición:

- $m_{[y]_{+t}}^{im}$: Intensidad de transición por fallecimiento de una persona de que se invalida a la edad y , permaneciendo en tal estado durante los t años siguientes.

- $m_{[y]+t}^{ia}$: Intensidad de reactivación de una persona de que se invalida a la edad y , permaneciendo en tal estado durante los t años siguientes.

Mattsson, P. (1930) substituyó las anteriores intensidades de transición en la ecuación (11), obteniendo como resultado la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d l_x^{ii}}{d x} = m_x^{ai} \cdot l_x - \int_{x_0}^x (m_{[x-t]+t}^{ia} + m_{[x-t]+t}^{im} + m_x^{ai}) \cdot l_{[x-t]+t}^{ii} dt \quad (13)$$

Donde $l_{[y]+t}^{ii}$ representa el número de personas que se invalidan con edad y que durante los t años siguientes permanecen invalidas. Para unas condiciones iniciales x_0 y $l_{x_0}^{ii} = 0$, **Mattsson, P. (1930)** obtuvo la siguiente solución.

$$l_x^{ii} = \int_{x_0}^x m_x^{ai} \cdot l_x \cdot e^{-\int_t^x (m_{[x-t]+t}^{ia} + m_{[x-t]+t}^{im} + m_x^{ai}) ds} dt \quad (14)$$

La dificultad matemática que presenta este modelo es la misma que la del modelo de reactivación univariante pues la ecuación diferencial que describe la variación infinitesimal de l_x^{ii} y su solución son iguales. No obstante, su complejidad estadística sí que es considerablemente superior debido a que la estimación de las intensidades de transición $m_{[y]+t}^{im}$ y $m_{[y]+t}^{ia}$ requiere desagregar la experiencia disponible, por edad de invalidación y duración de la misma.

Los países escandinavos han desarrollado variantes del modelo de invalidez clásico que destacan por su alta sofisticación, tanto actuarial como estadística. Citamos las siguientes propuestas:

- Modelo noruego (**Ore, T.K. et al. (1964)**): Utilizan un sistema de valoración actuarial centrado en la estimación de la función $j_{[x]+r}$, que representa la probabilidad condicionada de que una persona activa de edad x y viva en la

edad $x+r$, se halle invalida en tal edad. Una renta de invalidez de una persona inicialmente activa, continua, unitaria, inmediata y temporal y unitaria que cesa con el fallecimiento o la reactivación del asegurado se define del siguiente modo:

$${}_{/t} \bar{a}_x^{-ai} = \int_0^t \frac{l_{x+r}}{l_x} \cdot j_{[x]+r} \cdot v^r \cdot dr$$

- Modelo sueco **Dillner, C.G. (1969)**): La valoración actuarial que emplean se centra en dos funciones a estimar: $I_{[x]+t}$ y m_{x+t}^{ai} . La primera de ellas, representa la probabilidad de que una persona que se invalida a la edad x , permanezca en tal estado durante los t años siguientes:

$$I_{[x]+t} = {}_{/t} p_{x,0}^{\bar{ii}}$$

El valor actual actuarial de una renta de invalidez de una persona inicialmente activa, continua, unitaria, temporal, con un periodo de carencia de f años, cobrable mientras el asegurado permanece inválido, se calcula del siguiente modo:

$${}_{/n(f)} \bar{a}_x^{-ai} = \int_0^{n-f} \frac{l_{x+r}}{l_x} \cdot m_{x+r}^{ai} \cdot I_{[x+r]+f} \cdot v^{u+f} \cdot \int_{u+f}^u \frac{I_{[x+u]+t-u}}{I_{[x+u]+f}} \cdot v^{t-u-f} dt du$$

Además de los países nórdicos, el modelo de invalidez clásico ha tenido una amplia aceptación en otros países europeos. **Segerer, G. (1993)** destaca las peculiaridades de algunos de ellos:

- Alemania: Se define el valor actual de un renta de invalidez de una persona inicialmente activa, anual, vencida, unitaria, inmediata y temporal que cesa con el fallecimiento o la reactivación del asegurado, de la siguiente forma.

$${}_{/t} a_x^{ai} = \sum_{h=0}^{t-1} v^{h+\frac{1}{2}} \cdot {}_{/h} p_x^{aa} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+h}^{aa}\right) \cdot i_{x+h}^* \cdot \frac{1}{2} \cdot \left({}_{/t-h} \ddot{a}_{x+h}^i + {}_{/t-h-1} \ddot{a}_{x+h+1}^i\right)$$

donde i_{x+h}^* representa la probabilidad independiente de invalidación entre las edades $x+h$ y $x+h+1$. Según **Haberman, S. et al. (1999)**, ésta verifica la siguiente relación:

$$i_{x+h} = i_{x+h}^* \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+h}^{aa}\right)$$

La expresión ${}_{/t-h}\ddot{a}_{x+h}^i$ representa el valor actual actuarial de una renta de invalidez de una persona inicialmente inválida, anual, anticipada, unitaria, inmediata y temporal.

$${}_{/t-h}\ddot{a}_{x+h}^i = \sum_{k=0}^{t-h-1} v^k \cdot {}_{/k}p_x^{\bar{i}}$$

- Austria: Para el mismo tipo de renta anterior, con la única diferencia de que el periodo máximo de cobro de la renta es de m años, se aplica la siguiente fórmula.

$${}_{/t}a_x^{ai} = \sum_{h=0}^{t-1} v^{h+\frac{1}{2}} \cdot {}_{/h}p_x^{aa} \cdot i_{x+h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left({}_{/m-h}\ddot{a}_{x+h}^i + {}_{/m-h-1}\ddot{a}_{x+h+1}^i\right)$$

Se omite el factor $\left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+h}^{aa}\right)$ porque se utilizan probabilidades de invalidación del tipo i_{x+h} .

- Suiza: En la valoración del mismo tipo de renta, introduce un factor g_{x+h} que refleja el grado medio de invalidez de la edad $x+h$.

$${}_{/t}a_x^{ai} = \sum_{h=0}^{t-1} v^{h+\frac{1}{2}} \cdot {}_{/h+\frac{1}{2}}p_x^{aa} \cdot i_{x+h}^* \cdot g_{x+h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left({}_{/t-h}\ddot{a}_{x+h}^i + {}_{/t-h-1}\ddot{a}_{x+h+1}^i\right)$$

5. Método de invalidez de Manchester-Unity

El método de invalidez de Manchester-Unity es el método que tradicionalmente se ha aplicado en Inglaterra para valorar financiero-actuarialmente el riesgo de invalidez hasta prácticamente la publicación del **C.M.I.B (1991)**, tal como recuerdan **Haberman, S. et al. (1999)**. Tal como describe **Haberman, S. (1988)**, la aplicación de este método se basa en la estimación de la tasa central de invalidez, cuantificada en número de semanas en invalidez por persona y año.

El origen del método de invalidez de Manchester-Unity se encuentra en las friendly societies, mutuas de trabajadores entre cuyas coberturas incluían la invalidez temporal. Las primeras de ellas se constituyeron durante los siglos XIII y XIV.

El objeto social de las friendly societies era proporcionar a sus miembros cobertura para hacer frente a los riesgos de invalidez y jubilación así como costear otros gastos como los derivados del enterramiento. A diferencia de las mutuas continentales, las friendly societies trataban la invalidez temporal, no la permanente.

Las friendly societies experimentaron un extraordinario auge durante los siglos XVIII y especialmente XIX, coincidiendo con la consolidación del proceso de industrialización que sigue a la revolución industrial y con la explosión demográfica de su población. Ambos factores explican el crecimiento de una clase obrera que vive en pésimas condiciones. Las friendly societies desempeñaron una función fundamental como institución social encargada de velar por la seguridad laboral y estabilidad económica de las familias trabajadoras con menos recursos.

Las prestaciones ofrecidas por las friendly societies se financiaban con las aportaciones pagadas por sus miembros, las cuales resultaban del reparto uniforme del coste total estimado de siniestralidad. Por falta de rigor actuarial, numerosas friendly societies quebraron.

El primer intento serio de elaborar unas tasas de invalidez que tuvieran en cuenta la edad fue llevado a cabo por **Price, R. (1792)**, quien elaboró unas tablas que recogían las

primas asociadas a determinadas coberturas de incapacidad temporal. Las hipótesis teóricas en las que basaba tales tablas contemplaban la existencia de similitud entre las probabilidades de invalidación y las de fallecimiento.

La **Highland Society of Scotland** obtuvo a partir de una experiencia disponible, unas tablas que recogían por intervalos de edades el número de semanas de invalidez por persona y año. Este trabajo constituye el primer precedente relevante del método de invalidez de Manchester-Unity.

En 1846 **Neison, F.G.P.** construyó una tabla con los diferentes valores que toma la función semanas de invalidez por año y persona. La aportación de **Neison, F.G.P** fue fundamental porque estableció el rasgo diferenciador del tratamiento del riesgo de invalidez dado en Inglaterra:

- En Inglaterra, se estudiaba el riesgo de invalidez temporal a través de la tasa central de invalidez (semanas de invalidez por persona y año).
- Europa Continental opta por valorar el riesgo de invalidez permanente a través del estudio de las correspondientes probabilidades de transición.

De máxima importancia podemos catalogar la obra del actuario inglés **Watson, A.W. (1903)** en la que realiza un detallado estudio de la tasa central de invalidez según diferentes factores como son la edad, ocupación laboral y región, a partir de la experiencia disponible, extraída de una friendly society: The independent Order of Oddfellows Manchester Unity. Algunos de los valores tabulados han permanecido vigentes hasta prácticamente nuestros días.

La función Z_x recoge el estudio de la tasa central de invalidez entre las edades x y $x+1$. Formalmente, se define como sigue:

$$Z_x = 52.18 \cdot \frac{\int_0^1 l_{x+t} \cdot \bar{Z}_{x+t} \cdot dt}{\int_0^1 l_{x+t} \cdot dt}$$

Siendo \bar{Z}_{x+t} la proporción de personas invalidas de edad $x+t$ entre toda la población. El factor 52.18 representa el número de semanas por año. **Waters, H.R.** propone su aproximación mediante esta expresión:

$$\bar{Z}_x \cong \frac{{}_{/x-x_0}P_{x_0}^{ai}}{{}_{/x-x_0}P_{x_0}^{aa} + {}_{/x-x_0}P_{x_0}^{ai}}$$

Donde x_0 indica la edad inicial que se toma como referencia. **Pittacco, E. (1995)** sugiere la valoración de una renta de invalidez de una persona inicialmente activa, anual, vencida, de una unidad monetaria por semana de invalidez, inmediata y temporal mediante la siguiente expresión aproximada:

$${}_t a_x^{ai} \cong \sum_{h=1}^t \frac{l_{x+h-1/2}}{l_x} \cdot v^{h-1/2} \cdot Z_{x+h-1}$$

Podemos añadir la influencia de la duración de la invalidez a través de la función $Z_x^{m/n}$ que recoge el número esperado de semanas en invalidez con una duración comprendida entre m y $m+n$ años entre las edades x y $x+1$. Analíticamente se obtiene como sigue:

$$Z_x^{m/n} = 52.18 \cdot \frac{\int_0^1 l_{x+t} \cdot \bar{Z}_{x+t}^{m/n} \cdot dt}{\int_0^1 l_{x+t} \cdot dt}$$

donde $\bar{Z}_x^{m/n}$ representa la proporción de personas de edad x que llevan inválidas entre m y $m+n$ semanas. Obviamente, la suma de los posibles valores de $Z_x^{m/n}$ para una misma edad x según las diferentes duraciones de la invalidez consideradas será igual a Z_x .

$$Z_x = Z_x^{0/1} + Z_x^{1/26} + Z_x^{26/52} + \dots + Z_x^{52/\infty}$$

Waters, H.R. (1984) sugiere la aproximación de $\bar{Z}_x^{m/n}$ mediante la siguiente expresión:

$$\bar{Z}_x^{m/n} \cong \frac{{}_{/x-x_0}P_{x_0}^{ai}(m) - {}_{/x-x_0}P_{x_0}^{ai}(m+n)}{{}_{/x-x_0}P_{x_0}^{aa} + {}_{/x-x_0}P_{x_0}^{ai}}$$

donde ${}_{/x-x_0}p_{x_0}^{ai}(m)$ representa la probabilidad de que una persona activa en la edad inicial x_0 se encuentre inválida en la edad x con una duración de la invalidez de menso de m años.

6. Método de las tablas de persistencia

El método de invalidez de las tablas de persistencia recoge simultáneamente la probabilidad de invalidación y la de su duración. Este método de invalidez tiene su origen en Estados Unidos y se caracteriza porque considera tanto la incidencia de la invalidez como la duración de la misma, lo que exige una amplia base estadística y largos cálculos numéricos (**Prime, C.M. 1980**). Las tablas generadas por dicho modelo reciben el nombre de tablas de persistencia. El método de las tablas de persistencia de la invalidez, también llamado ‘Continuance tables’, fue introducido en Estados Unidos a inicios del siglo XX, momento en el que la cobertura del riesgo de invalidez todavía correspondía a compañías aseguradoras de no vida.

El actuario estadounidense **Hunter, A.** estudió el trabajo que con anterioridad había publicado **Hamza, E. (1900)** y en base a él elaboró unas tablas de decrementos de invalidez permanente. Paralelamente, **Hunter, A.** construyó unas tablas de primas y reservas matemáticas referenciadas según el nivel de prestaciones. Su trabajo tuvo una gran repercusión posterior, lo que le sirvió para ser reconocido internacionalmente como un actuario de gran prestigio.

En un inicio, en Estados Unidos, las rentas de invalidez no se extinguían con la jubilación sino que se transformaban en rentas de jubilación que el asegurado cobraba de forma vitalicia hasta su fallecimiento. Por esta razón, **Hunter, A.** definió la renta de invalidez como vitalicia:

$$\bar{a}_x^{ai} = \frac{1}{l_x^{aa}} \int_0^{\infty} l_{x+t}^{aa} \cdot m_{x+t}^{ai} \cdot \bar{a}_{x+t}^{-i} \cdot v^t dt \quad (15)$$

donde \bar{a}_{x+t}^{-i} representa el valor actuarial de una renta de invalidez de una persona inicialmente inválida, continua, unitaria, inmediata y vitalicia.

Durante el periodo 1900-1930, la gestión del riesgo de invalidez llevada a cabo por las compañías norteamericanas arrojó muy malos resultados lo que llevó a que muchas compañías de seguros se vieran en la obligación de suspender su actividad por quiebra técnica. **Rhodes, E.E. (1932)** y **Hamilton, J. (1972)** achacaron este hecho a factores económicos y sociales que confluyeron a finales de los años 30.

- La crisis económica del 29 colaboró a que creciera el desempleo y se contrajera la actividad económica lo que contribuyó a que muchas personas prefirieran declararse inválidas a buscar empleo.
- La alta competitividad del sector asegurador impulsó a que las compañías aseguradoras adoptaran precios muy competitivos, pero técnicamente insuficientes.
- Resoluciones judiciales excesivamente favorables a los intereses asegurados, que provocaron un aumento no previsto de las prestaciones pagadas por parte de los aseguradores, que se reflejó en sus resultados.
- La duración ilimitada de la cobertura de las prestaciones de invalidez que comercializaban las compañías aseguradoras en una época con altas tasas de desempleo, provocó un aumento del riesgo de azar moral.

A raíz de estos pésimos resultados, a partir del año 1930 las compañías aseguradoras cambiaron de política, imponiendo precios menos competitivos pero técnica y actuarialmente más ajustados.

En 1920, **Philips, A.R.** propuso aproximar la función de supervivencia de los activos, l_x^{aa} por l_x . En 1930, **Hunter, A. et al. (1932)** desarrollaron definitivamente su modelo de invalidez. La principal diferencia de su modelo con respecto el de **Hamza, E. (1900)** fue que la propuesta de **Hunter, A. et al. (1932)** hacía más hincapié en la valoración de

las prestaciones por invalidez que la estimación de las probabilidades en sí. Este rasgo diferenciador constituye una de las características principales del desarrollo de la ciencia actuarial en Estados Unidos. En 1952 **Medin, K.** incorporó al modelo inicial propuesto por **Hunter, A. et al. (1932)** la posibilidad de reactivación. Para ello reformuló la expresión (15) en los siguientes términos.

$$\bar{a}_x^{ai} = \frac{1}{l_x^{aa}} \int_0^{w-x} l_{x+t}^{aa} \cdot m_{x+t}^{ai} \cdot \bar{a}_{[x+t]}^i \cdot v^t \cdot dt$$

donde $\bar{a}_{[y]}^i$, siendo $y = x + t$, expresa el valor actual actuarial de una renta de invalidez de una persona que se ha invalidado justamente en y , pagadera mientras éste permanezca inválido.

$$\bar{a}_{[y]}^i = \frac{1}{l_{[y]}^i} \cdot \int_0^{\infty} l_{[y]+t}^i \cdot v^t \cdot dt$$

donde $l_{[y]+t}^i$ representa el número de personas que se invalidan en la edad y que todavía permanecen en dicho estado transcurrido un periodo de t años. La función $l_{[y]+t}^i$ a su vez se puede deducir de la siguiente expresión:

$$l_{[y]+t}^i = l_{[y]}^i \cdot e^{-\int_0^t m_{[y]+r}^{ia} + m_{[y]+r}^{im} dr}$$

donde:

$m_{[y]+r}^{ia}$: Tasa instantánea de transición por reactivación de aquellas personas que se invalidaron a edad y y que durante los r años siguientes permanecen en tal estado.

$m_{[y]+r}^{im}$: Tasa instantánea por fallecimiento de aquellas personas que se invalidaron a edad y y que han permanecido invalidas r años más.

Destacamos las tablas de probabilidades de persistencia, en función de la edad y de la duración de la invalidez, elaboradas por **Minor, E.H.** para el congreso de Munich en 1968 y recogidas posteriormente por **Hamilton, J. (1972)**.

7. Tratamiento del riesgo de invalidez en España

En España el riesgo de invalidez viene definido por la ley general de la seguridad social del año 1974. En virtud de dicha ley se distinguen tres tipos de invalidez: incapacidad laboral transitoria, invalidez provisional e invalidez permanente.

El artículo 126 de la **LGSS (1974)**, define la incapacidad laboral transitoria (ILT) como el estado de invalidez de carácter no definitivo de duración máxima de 18 meses.

El artículo 132.2 de la **LGSS (1974)** define invalidez provisional como el estado de invalidez de carácter no definitivo cuya duración excede de los plazos establecidos para la ILT. Su duración máxima es 6 años contabilizados desde la fecha de la declaración de la ILT.

La invalidez permanente está regulada por el artículo 135 de la **LGSS(1974)**. Se accede a ella, una vez transcurrido el plazo previsto para la invalidez provisional. Alternativamente, se puede reconocer la invalidez permanente sin necesidad de que transcurra el plazo legal de 6 años, si previamente la lesión o enfermedad que ha dado lugar a la invalidez se cualifican como irreversibles.

La invalidez permanente, cualquiera que sea su causa determinante, se clasifica con arreglo a los siguientes grados:

- Incapacidad permanente parcial para la profesión habitual (art. 135.3 LGSS): Es aquel estado de invalidez que, sin alcanzar el grado de total, ocasiona al trabajador afectado, una disminución no inferior al 33% en su rendimiento para su profesión habitual, sin impedirle la realización de las tareas fundamentales de la misma.
- Incapacidad permanente total para la profesión habitual (art. 135.4 LGSS): Es aquel estado de invalidez que impide la realización de todas o de las fundamentales tareas de la profesión habitual del accidentado, siempre y cuando pueda dedicarse a otra distinta.

- Incapacidad permanente absoluta para todo trabajo (art. 135.5 **LGSS**): Es aquel estado de invalidez que impide por completo al trabajador la realización de cualquier profesión u oficio.
- Gran invalidez (art. 135.6 **LGSS**): Es aquel estado de invalidez en el que el invalido precisa de la asistencia de una tercera persona para realizar los actos más elementales de la vida diaria tales como vestirse, desplazarse, comer o análogos.

El modelo de invalidez con más aceptación y más utilizado en la práctica aseguradora es el modelo de invalidez clásico. En esta línea cabe destacar la obra de **Alegre, A. (1990)**. En ella se incluye un estudio pormenorizado de la valoración actuarial de los diversos tipos de prestaciones por invalidación, tanto rentas como seguros. Mediante la aplicación del álgebra de Boole, **Alegre, A (1990)** amplía el estudio de las operaciones de invalidez de una cabeza a operaciones definidas sobre dos cabezas.

Paralelamente a la definición de dichas operaciones **Alegre, A. (1990)** realiza una clasificación de las rentas obteniendo las siguientes categorías fundamentales.

- Rentas pagaderas hasta la disolución del grupo.
- Rentas pagaderas hasta la extinción del grupo.
- Rentas de supervivencia.

Igualmente, destacamos la rigurosidad y el extraordinario esfuerzo de sistematización de las operaciones definidas sobre dos cabezas: primero por fallecimiento y posteriormente por invalidación.

El **R.D. 2486/1998** y la **O.M. del 23/12/98**, con la clara intención de adaptarse a la normativa comunitaria, establece que el final del período de observación considerado en las tablas tanto de mortalidad como de invalidez no podrá ser anterior en más de 20 años a la fecha de cálculo de la provisión. Transitoriamente podrán utilizarse para los seguros de supervivencia las tablas GR-80 con dos años menos de edad actuarial, y para los seguros de fallecimiento las tablas GKM80 y GKF80

La misma normativa contempla que se utilicen tablas basadas en la experiencia del propio colectivo si la información estadística cumple los requisitos de homogeneidad y representatividad del riesgo, y se dispone de información suficiente que permita una inferencia estadística.

Si se constatará la inadecuación de las tablas al comportamiento real del colectivo asegurado, si existe información suficiente para permitir una inferencia estadística, se efectuará si procede una sobredotación de la provisión.

Capítulo 7

Modelo de invalidez temporal

En este capítulo vamos a modelizar una operación de invalidez temporal a través de un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, en el que las probabilidades de transición del estado de invalidez dependerán además de la edad, de la duración de la invalidez.

Desarrollaremos el estudio del semiproceso estocástico de Markov a través de su ecuación general que, tal como demostraremos, constituye un sistema de ecuaciones integro-diferenciales. Su resolución aproximada mediante métodos numéricos permitirá conocer las probabilidades de transición de la operación.

Finalmente, realizaremos una pequeña aplicación numérica del modelo desarrollado. Los resultados obtenidos han sido publicados en el XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, (Pociello, E. (1998)).

1 Aproximación al problema

Como primera aproximación al problema que representa la modelización de una operación de invalidez temporal, vamos a aplicar un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo. En el siguiente epígrafe, acometeremos la aplicación de un semiproceso estocástico de Markov.

Sea un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, $\{S(x), x \in R\}$, definido sobre el espacio de estados $E = \{a, i, m\}$, donde 'a', 'i' y 'm' representan respectivamente los estados de actividad, invalidez y muerte y $S(x)$ recoge el estado de un asegurado de edad x . Consecuentemente, $\forall t > 0$ y $\forall d_1 \leq \dots \leq d_n$ se cumple la expresión (1).

$$\begin{aligned} \Pr(S(x+t) = s_{x+t} / S(x) = s_x \wedge S(x-d_1) = s_{x-d_1} \wedge \dots \wedge S(x-d_n) = s_{x-d_n}) &= (1) \\ &= \Pr(S(x+t) = s_{x+t} / S(x) = s_x) \end{aligned}$$

Donde $s_0, s_1, \dots, s_{x-t}, s_x, s_{x+t} \in E$. A continuación, definimos las probabilidades de transición que intervienen en la operación.

$${}_t P_x^{aa} = P(S(x+t) = a / S(x) = a) \quad (2)$$

$${}_t P_x^{ai} = P(S(x+t) = i / S(x) = a) \quad (3)$$

$${}_t P_x^{am} = P(S(x+t) = m / S(x) = a) \quad (4)$$

$${}_t P_x^{ia} = P(S(x+t) = a / S(x) = i) \quad (5)$$

$${}_t P_x^{im} = P(S(x+t) = m / S(x) = i) \quad (6)$$

$${}_t P_x^{ii} = P(S(x+t) = i / S(x) = i) \quad (7)$$

$${}_t P_x^{im} = P(S(x+t) = m / S(x) = i) \quad (8)$$

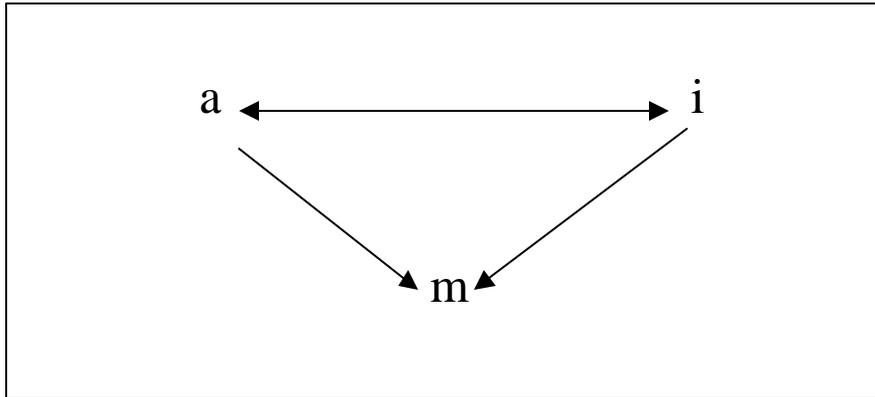
$${}_t \bar{P}_x^{aa} = P(S(x+u) = a \quad \forall u \in [0, t] / S(x) = a) \quad (9)$$

$${}_t \bar{P}_x^{ii} = P(S(x+u) = i \quad \forall u \in [0, t] / S(x) = i) \quad (10)$$

Su matriz de probabilidades de transición tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{P}_x(t) = \begin{pmatrix} {}_{/t}P_x^{aa} & {}_{/t}P_x^{ai} & {}_{/t}P_x^{am} \\ {}_{/t}P_x^{ia} & {}_{/t}P_x^{ii} & {}_{/t}P_x^{im} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Describimos gráficamente la operación, a través de su esquema de transiciones.



Tal como explicamos en el capítulo 2, por diferenciación de las probabilidades de transición, obtenemos las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov que definen la ecuación general del proceso estocástico.

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{aa})}{dt} = {}_{/t}P_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ia} - {}_{/t}P_x^{aa} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}) \quad (12)$$

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{ai})}{dt} = {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - {}_{/t}P_x^{ai} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t}^{im}) \quad (13)$$

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{am})}{dt} = {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + {}_{/t}P_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{im} \quad (14)$$

$$\frac{d({}_t p_x^{ia})}{dt} = {}_t p_x^{ii} \cdot m_{x+t}^{ia} - {}_t p_x^{ia} \cdot (m_{x+t}^{ai} + m_{x+t}^{am}) \quad (15)$$

$$\frac{d({}_t p_x^{ii})}{dt} = {}_t p_x^{ia} \cdot m_{x+t}^{ai} - {}_t p_x^{ii} \cdot (m_{x+t}^{ia} + m_{x+t}^{im}) \quad (16)$$

$$\frac{d({}_t p_x^{im})}{dt} = {}_t p_x^{ii} \cdot m_{x+t}^{im} + {}_t p_x^{ai} \cdot m_{x+t}^{am} \quad (17)$$

Estimadas las intensidades de transición que intervienen en las anteriores ecuaciones, sugerimos dos formas de hallar sus probabilidades de transición:

- Resolviendo numéricamente las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Tal como propone **Pitacco, E. (1995)**, aprovechando que las ecuaciones (12) y (13) son ecuaciones diferenciales simultaneas con dos funciones desconocidas: ${}_t p_x^{aa}$ y ${}_t p_x^{ai}$, podemos obtener sus valores de forma aproximada, resolviendo la ecuación diferencial de segundo grado que se obtiene por sustitución y diferenciación de las ecuaciones (12) y (13).

Análogamente, pueden hallarse los valores de ${}_t p_x^{ia}$ y ${}_t p_x^{ii}$ a partir de las ecuaciones (15) y (16).

- Aplicando el método numérico basado en la integración por producto introducido por **Möller, C.M. (1992)**, ya explicado en el capítulo 4.

Encontramos referencias a este modelo de invalidez en los trabajos de **Waters, H.R. (1984)**, **Haberman, S. (1984)**, **Pitacco, E. (1995)** y **Haberman, S. et al. (1999)**. La aplicación de este modelo de invalidez presenta el inconveniente que no considera la dependencia de las transiciones del estado de invalidez respecto la duración de la invalidez, factor cuya influencia, según **Starke, G.K. (1980)**, es determinante.

2 Modelo teórico

Para incorporar el efecto de la duración de la invalidez sobre las probabilidades e intensidades de transición del estado de invalidez, aplicaremos un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

El **C.M.I.B (1991)** ha utilizado este modelo. Los trabajos de **Sanson, R.J. et al. (1988)** y de **Hertzman, E. (1993)** recogen la metodología seguida. Nosotros desarrollaremos su aplicación a partir de la obtención y posterior resolución numérica de su ecuación general.

Formalmente, definimos un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo como un proceso estocástico bidimensional, $\{S(x), Z(x), x \geq 0\}$ definido sobre el espacio de estados $E = \{a, i, m\}$ donde a representa el estado de actividad, i el estado de invalidez temporal y m el fallecimiento.

$S(x)$ representa el estado del proceso para la edad x y $Z(x)$ la duración de la invalidez para dicha edad del asegurado si éste se encuentra inválido.

La definición genérica de las probabilidades de transición, $\forall t, d_0 \geq 0$, asociadas al semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo es la siguiente:

$$\text{Prob}(S(x+t)=s_{x+t} \wedge Z(x+t)=z_{x+t} / S(x)=s_x \wedge Z(x)=z_x \cdots \wedge S(x-d_0)=s_{x-d_0} \wedge Z(x-d_0)=z_{x-d_0} \cdots) =$$

$$\text{Prob}(S(x+t)=s_{x+t} \wedge Z(x+t)=z_{x+t} / S(x)=s_x \wedge Z(x)=z_x)$$

Las probabilidades de transición que definimos son las siguientes:

$${}_t P_x^{aa} = P(S(x+t) = a / S(x) = a) \quad (18)$$

$${}_t P_x^{ai} = P(S(x+t) = i / S(x) = a) \quad (19)$$

$${}_t P_x^{am} = P(S(x+t) = m / S(x) = a) \quad (20)$$

$${}_tP_{x,z}^{ia} = P(S(x+t) = a / S(x) = i \wedge Z(x) = z) \quad (21)$$

$${}_tP_{x,z}^{ii} = P(S(x+t) = i / S(x) = i \wedge Z(x) = z) \quad (22)$$

$${}_tP_{x,z}^{im} = P(S(x+t) = m / S(x) = i \wedge Z(x) = z) \quad (23)$$

$${}_tP_{x,z}^{\bar{aa}} = P(S(x+t) = a \wedge Z(x+t) \geq t / S(x) = a) \quad (24)$$

$${}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} = P(S(x+t) = i \wedge Z(x+t) \geq z+t / S(x) = a) \quad (25)$$

$${}_{/w,t}P_x^{ai} = P(S(x+t) = i \wedge Z(x+t) \leq w / S(x) = a) \quad (26)$$

Las expresiones (18), (19), (20), (24) y (26) hacen referencia a las probabilidades de transición del estado de actividad y como tales únicamente dependen de la edad inicial, x . Las expresiones (21), (22), (23) y (25) son las probabilidades de transición del estado de invalidez que, además de la edad, dependen de la duración de la invalidez, z .

Las expresiones (24) y (25) hacen referencia a las probabilidades de permanencia ininterrumpida en los estados de actividad e invalidez respectivamente. La expresión (26), a diferencia de la expresión (19), añade la duración máxima de la invalidez en años, w como condición adicional a la invalidación en sí. Las tasas instantáneas de transición derivadas de estas probabilidades de transición son éstas:

$$\mathbf{m}_x^{ai} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_tP_x^{ai}}{t} \quad (27)$$

$$\mathbf{m}_x^{am} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_tP_x^{am}}{t} \quad (28)$$

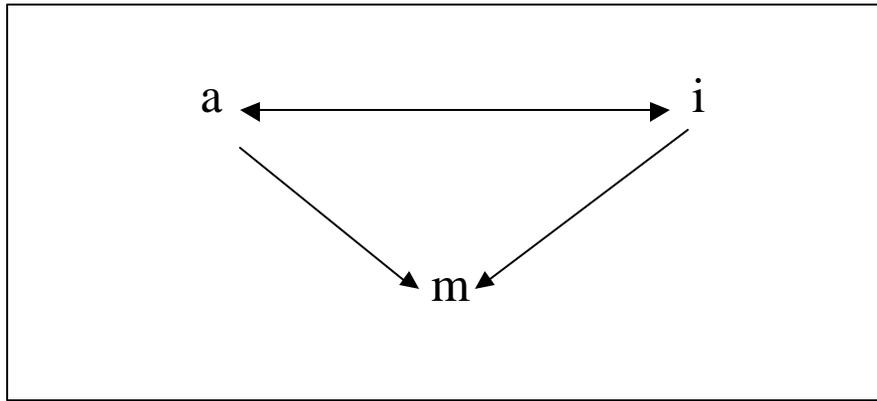
$$\mathbf{m}_{x,z}^{ia} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_tP_{x,z}^{ia}}{t} \quad (29)$$

$$\mathbf{m}_{x,z}^{im} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_tP_{x,z}^{im}}{t} \quad (30)$$

Las expresiones (27) y (29) representan las tasas instantáneas de invalidación y reactivación respectivamente. Las tasas instantáneas de fallecimiento como activo e invalido vienen dadas por las expresiones (28) y (30). Observamos que las tasas

instantáneas del estado de actividad solamente dependen de la edad, x . No así las del estado de invalidez, que, además, dependen de la duración de la invalidez, z .

Asumimos que los anteriores límites existen y que las intensidades de transición son funciones continuas en x y en x y z , según sean de actividad o de invalidez respectivamente. Representamos gráficamente las transiciones del semiproceto estocástico a través del siguiente esquema de transiciones.



2.1 Propiedades de las probabilidades de transición

En este subepígrafe deducimos una serie de propiedades de las probabilidades de transición cuyo conocimiento resulta primordial para después poder construir el sistema de ecuaciones integro-diferenciales que define la ecuación general del semiproceto estocástico de Markov.

Estas propiedades se desprenden de la escisión del periodo de su temporalidad s , en dos subperiodos: r y $(s-r)$, siendo $r < s$.

$${}_{/s}P_x^{aa} = {}_{/r}P_x^{aa} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r}^{aa} + \int_0^r {}_{/r-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r,u}^{ia} du \quad (31)$$

$${}_{/s}P_x^{ai} = {}_{/r}P_x^{aa} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r}^{ai} + \int_0^r {}_{/r-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r,u}^{ii} du \quad (32)$$

$${}_l s P_x^{am} = {}_l r P_x^{am} + {}_l r P_x^{aa} \cdot {}_l s-r P_{x+r}^{am} + \quad (33)$$

$$+ \int_0^r {}_l r-u P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_l u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,u}^{im} du$$

$${}_l s P_{x,z}^{ia} = {}_l r P_{x,z}^{ia} \cdot {}_l s-r P_{x+r}^{aa} + {}_l r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,z+r}^{ia} + \quad (34)$$

$$+ \int_0^r {}_l r-u P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_l u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,u}^{ia} du$$

$${}_l s P_{x,z}^{ii} = {}_l r P_{x,z}^{ia} \cdot {}_l s-r P_{x+r}^{ai} + {}_l r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,z+r}^{ii} + \quad (35)$$

$$+ \int_0^r {}_l r-u P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_l u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,u}^{ii} du$$

$${}_l s P_{x,z}^{im} = {}_l r P_{x,z}^{im} + {}_l r P_{x,z}^{ia} \cdot {}_l s-r P_{x+r}^{am} + {}_l r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,z,r}^{im} \quad (36)$$

$$+ \int_0^r {}_l r-u P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_l u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,u}^{im} du$$

$${}_l s P_x^{\bar{aa}} = {}_l r P_x^{\bar{aa}} \cdot {}_l s-r P_{x+r}^{\bar{aa}} \quad (37)$$

$${}_l s P_{x,z}^{\bar{ii}} = {}_l r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_l s-r P_{x+r,z+r}^{\bar{ii}} \quad (38)$$

$${}_l s,t P_x^{ai} = {}_l r,t P_x^{ai} + {}_l t-s P_x^{aa} \cdot {}_l s-r,s-r P_{x+t-s}^{ai} \cdot {}_l r P_{x+t-r,u}^{\bar{ii}} \quad (39)$$

Demostración de (31).

La expresión (31) se obtiene como resultado de descomponer su temporalidad, $[0, s]$, en dos subperiodos: $[0, r]$ y $[s - r, s]$, donde $s > r$ y de definir ${}_r P_x^{ai}$ como una expresión integral que recoge la duración de la invalidez, u , siendo $0 < u < r$.

$$\begin{aligned}
 {}_s P_x^{aa} &= {}_r P_x^{aa} \cdot {}_{s-r} P_{x+r}^{aa} + {}_r P_x^{ai} \cdot {}_{s-r} P_{x+r,u}^{ia} \\
 \left\{ {}_r P_x^{ai} &= \int_0^r {}_{r-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} du \right\} \\
 {}_s P_x^{aa} &= {}_r P_x^{aa} \cdot {}_{s-r} P_{x+r}^{aa} + \int_0^r {}_{r-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r} P_{x+r,u}^{ia} du
 \end{aligned}$$

Demostración de (32)

La propiedad (32) se obtiene como resultado de descomponer la temporalidad de la probabilidad de transición en dos subperiodos: $[0, r]$ y $[s - r, s]$ y de repetir el proceso anterior con la probabilidad de transición ${}_r P_x^{ai}$.

$$\begin{aligned}
 {}_s P_x^{ai} &= {}_r P_x^{aa} \cdot {}_{s-r} P_{x+r}^{ai} + {}_r P_x^{ai} \cdot {}_{s-r} P_{x+r,u}^{ii} \\
 \left\{ {}_r P_x^{ai} &= \int_0^r {}_{r-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} du \right\} \\
 {}_s P_x^{ai} &= {}_r P_x^{aa} \cdot {}_{s-r} P_{x+r}^{ai} + \int_0^r {}_{r-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_u P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r} P_{x+r,u}^{ii} du
 \end{aligned}$$

Demostración de (33)

Obtenemos la expresión (33) después de descomponer su temporalidad en dos subperiodos: $[0, r]$ y $[s - r, s]$, donde $s > r$ y de sustituir ${}_r P_x^{ai}$ de la misma forma que en las demostraciones (31) y (32).

$${}_s P_x^{am} = {}_r P_x^{am} + {}_r P_x^{aa} \cdot {}_{s-r} P_{x+r}^{am} + {}_r P_x^{ai} \cdot {}_{s-r} P_{x+r,u}^{im}$$

$$\left\{ {}_tP_x^{ai} = \int_0^r {}_{t-r-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_tP_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} du \right\}$$

$${}_sP_x^{am} = {}_tP_x^{am} + {}_tP_x^{aa} \cdot {}_{s-r}P_{x+r}^{am} +$$

$$+ \int_0^r {}_{t-r-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_tP_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r}P_{x+r,u}^{im} du$$

Demostración de (34)

Obtenemos la expresión (34) después de descomponer su temporalidad en dos subperiodos: $[0, r]$ y $[s - r, s]$, donde $s > r$ y sustituir ${}_tP_{x,z}^{ii}$ por una expresión integral que recoja explícitamente el tratamiento de la duración de la invalidez, u , donde $u \in (0, r) \cup \{r+z\}$.

$${}_sP_{x,z}^{ia} = {}_tP_{x,z}^{ia} \cdot {}_{s-r}P_{x+r}^{aa} + {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r}P_{x+r,u}^{ia}$$

$$\left\{ {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} = \int_0^r {}_{t-r-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_tP_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} du + {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} \right\}$$

$${}_sP_{x,z}^{ia} = {}_tP_{x,z}^{ia} \cdot {}_{s-r}P_{x+r}^{aa} + {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r}P_{x+r,z+r}^{ia} +$$

$$+ \int_0^r {}_{t-r-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_tP_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r}P_{x+r,u}^{ia} du$$

Demostración de (35)

Obtenemos la expresión (35) tras descomponer su temporalidad en dos subperiodos: $[0, r]$ y $[s - r, s]$, donde $s > r$ y sustituir ${}_tP_{x,z}^{ii}$ por una expresión integral que recoja la duración de la invalidez, u , donde $u \in (0, r) \cup \{r+z\}$.

$${}_sP_{x,z}^{\bar{ii}} = {}_tP_{x,z}^{ia} \cdot {}_{s-r}P_{x+r}^{ai} + {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r}P_{x+r,u}^{\bar{ii}}$$

$$\left\{ {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} = \int_0^r {}_{t-r-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_tP_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} du + {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} \right\}$$

$${}_sP_{x,z}^{\bar{ii}} = {}_tP_{x,z}^{ia} \cdot {}_{s-r}P_{x+r}^{ai} + {}_tP_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r}P_{x+r,z+r}^{\bar{ii}} +$$

$$+ \int_0^r {}_{t-r-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_tP_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{s-r}P_{x+r,u}^{\bar{ii}} du$$

Demostración de (36)

Repetimos el proceso anterior.

$$\begin{aligned} {}_{/s}P_{x,z}^{im} &= {}_{/r}P_{x,z}^{im} + {}_{/r}P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r}^{am} + {}_{/r}P_{x,z}^{ii} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r,u}^{im} \\ \left\{ {}_{/r}P_{x,z}^{ii} \right. &= \left. \int_0^r {}_{/r-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} du + {}_{/r}P_x^{\bar{ii}} \right\} \\ {}_{/s}P_{x,z}^{im} &= {}_{/r}P_{x,z}^{im} + {}_{/r}P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r}^{am} + {}_{/r}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r,z,r}^{im} \\ &+ \int_0^r {}_{/r-u}P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r,u}^{im} du \end{aligned}$$

Demostración de (39):

Deducimos la propiedad (39) a partir de la interpretación de la diferencia de probabilidades ${}_{/s,t}P_x^{ai}$ y ${}_{/r,t}P_x^{ai}$, donde $r \leq s \leq t$, como la probabilidad de llevar inválido en la edad $x+r$ entre r y s años:

$${}_{/s,t}P_x^{ai} - {}_{/r,t}P_x^{ai} = {}_{/t-s}P_x^{aa} \cdot {}_{/s-r}P_{x+t-s}^{ai} \cdot {}_{/r}P_{x+t-r,u}^{\bar{ii}}$$

siendo $0 \leq u \leq s-r$. A continuación, reordenando la expresión, obtenemos la relación (39).

$${}_{/s,t}P_x^{ai} = {}_{/r,t}P_x^{ai} + {}_{/t-s}P_x^{aa} \cdot {}_{/s-r}P_{x+t-s}^{ai} \cdot {}_{/r}P_{x+t-r,u}^{\bar{ii}}$$

Las fórmulas (37) y (38) se deducen directamente de la escindibilidad implícita en la naturaleza de las probabilidades de permanencia ininterrumpida ${}_{/s}P_x^{\bar{aa}}$ y ${}_{/s}P_x^{\bar{ii}}$.

2.2 Ecuación general del semiproceso estocástico de Markov

A partir de las anteriores propiedades, vamos a deducir el conjunto de ecuaciones integro-diferenciales que constituye la ecuación general del semiproceso estocástico de Markov, que relaciona las probabilidades e intensidades de transición.

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{aa})}{dt} = -{}_{/t}P_x^{aa} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}) + \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} du \quad (40)$$

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{ai})}{dt} = {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t,u}^{im}) du \quad (41)$$

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{am})}{dt} = {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{ia})}{dt} &= -{}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}) + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{ia} + \\ &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} du \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{ii})}{dt} &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t}^{im}) \\ &- \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t}^{im}) du \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{im})}{dt} &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{im} + \\ &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du \end{aligned} \quad (45)$$

$${}_{/t}P_x^{\bar{aa}} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+s}^{am} + \mathbf{m}_{x+s}^{ai} ds} \quad (46)$$

$${}_{/t}P_{x,x}^{\bar{ii}} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+s,z+s}^{im} + \mathbf{m}_{x+s,z+s}^{ia} ds} \quad (47)$$

$${}_{/w,t}P_x^{ai} = \int_0^t {}_{/u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+u}^{ai} \cdot {}_{/t-u}P_{x+u,0}^{\bar{ii}} du \quad (48)$$

Demostración de (40)

Diferenciamos respecto al tiempo la probabilidad de transición ${}_t P_x^{aa}$, posteriormente sustituimos ${}_{/\Delta t+t} P_x^{aa}$ por la expresión (31). Finalmente simplificamos.

$$\begin{aligned}
 \frac{d({}_t P_x^{aa})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t} P_x^{aa} - {}_t P_x^{aa}}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_x^{aa} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{aa} + \int_0^t {}_{/t-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ia} du - {}_t P_x^{aa}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_x^{aa} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{aa} - {}_t P_x^{aa}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t {}_{/t-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ia} du}{\Delta t} \\
 &= -{}_t P_x^{aa} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{aa}}{\Delta t} + \int_0^t {}_{/t-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ia}}{\Delta t} du \\
 &= -{}_t P_x^{aa} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}) + \int_0^t {}_{/t-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} du
 \end{aligned}$$

Demostración de (41)

Diferenciamos respecto al tiempo la probabilidad de transición ${}_t P_x^{ai}$, posteriormente sustituimos ${}_{/\Delta t+t} P_x^{ai}$ por la expresión (32).

$$\begin{aligned}
 \frac{d({}_t P_x^{ai})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t} P_x^{ai} - {}_t P_x^{ai}}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_x^{aa} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{ai} + \int_0^t {}_{/t-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ii} du - {}_t P_x^{ai}}{\Delta t} =
 \end{aligned}$$

Seguidamente sustituimos la probabilidad de transición ${}_{/t}P_x^{ai}$ por su expresión integral equivalente, ${}_{/t}P_x^{ai} = \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} du$ y procedemos a simplificar la expresión resultante.

$$\begin{aligned}
 &= {}_{/t}P_x^{aa} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/t}P_x^{ai}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (1 - {}_{/\Delta t}P_{x+t,u}^{ii}) du}{\Delta t} = \\
 &= {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(1 - {}_{/\Delta t}P_{x+t,u}^{ii})}{\Delta t} du \\
 &= {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t,u}^{im}) du
 \end{aligned}$$

Demostración de (42)

Diferenciamos respecto al tiempo la probabilidad de transición ${}_{/t}P_x^{am}$, posteriormente sustituimos ${}_{/\Delta t+t}P_x^{am}$ por la expresión (33). Finalmente, simplificamos.

$$\begin{aligned}
 \frac{d({}_{/t}P_x^{am})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t}P_x^{am} - {}_{/t}P_x^{am}}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/t}P_x^{am} + {}_{/t}P_x^{aa} \cdot {}_{/\Delta t}P_{x+t}^{am} + \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t}P_{x+t,u}^{im} du - {}_{/t}P_x^{am}}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/t}P_x^{aa} \cdot {}_{/\Delta t}P_{x+t}^{am}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t}P_{x+t,u}^{im} du}{\Delta t} = \\
 &= {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t}P_{x+t,u}^{im}}{\Delta t} du = \\
 &= {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du
 \end{aligned}$$

Demostración de (43)

Diferenciamos respecto al tiempo la probabilidad de transición ${}_t P_{x,z}^{ia}$, seguidamente sustituimos ${}_{/\Delta t+t} P_{x,z}^{ia}$ por la expresión (34). Finalmente simplificamos.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left({}_t P_{x,z}^{ia}\right)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t} P_{x,z}^{ia} - {}_t P_{x,z}^{ia}}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{aa} + {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,z+t}^{ia} - {}_t P_x^{ia}}{\Delta t} + \\
 &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ia} du}{\Delta t} = \\
 &= - {}_t P_{x,z}^{ia} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{aa}}{\Delta t} + {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t} P_{x+t,z+t}^{ia}}{\Delta t} + \\
 &+ \int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ia}}{\Delta t} du = \\
 &= - {}_t P_{x,z}^{ia} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}\right) + {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{ia} + \int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} du
 \end{aligned}$$

Demostración de (44)

Diferenciamos respecto al tiempo la probabilidad de transición ${}_t P_{x,z}^{ii}$, posteriormente sustituimos ${}_{/\Delta t+t} P_{x,z}^{ii}$ por la expresión (35).

$$\frac{d\left({}_t P_{x,z}^{ii}\right)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t} P_{x,z}^{ii} - {}_t P_{x,z}^{ii}}{\Delta t} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{ai} + {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,z+t}^{ii} - {}_t P_{x,z}^{ii}}{\Delta t} + \\
 &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ii} du}{\Delta t} =
 \end{aligned}$$

A continuación sustituimos la probabilidad de transición ${}_t P_{x,z}^{ii}$ por su expresión integral equivalente, $\int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot du$ y procedemos a simplificar y reordenar la expresión resultante.

$$\begin{aligned}
 &= {}_t P_{x,z}^{ia} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t} P_{x+t}^{ai}}{\Delta t} + {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t} P_{x+t,z+t}^{ii}}{\Delta t} + \\
 &- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (1 - {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ii}) du}{\Delta t} = \\
 &= {}_t P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t}^{im}) + \\
 &- \int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{ii}) du =
 \end{aligned}$$

Demostración de (45)

Diferenciamos respecto al tiempo la probabilidad de transición ${}_t P_{x,z}^{im}$, posteriormente sustituimos ${}_{/\Delta t+t} P_{x,z}^{im}$ por la expresión (36). Por último, simplificamos.

$$\begin{aligned}
 \frac{d({}_t P_{x,z}^{im})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t} P_{x,z}^{im} - {}_t P_{x,z}^{im}}{\Delta t} = \\
 \left(\frac{d({}_t P_{x,z}^{im})}{dt} \right) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_{x,z}^{im} + {}_t P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t}^{am} + {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,z+t}^{im} - {}_t P_{x,z}^{im}}{\Delta t} + \\
 &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t} P_{x+t,u}^{im} du}{\Delta t} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t}P_{x+t}^{am}}{\Delta t} + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t}P_{x+t,z+t}^{im}}{\Delta t} + \\
 &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t}P_{x+t,u}^{im}}{\Delta t} du \\
 &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{im} + \int_0^t {}_{/t-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du
 \end{aligned}$$

Demostración de (46)

Deducimos la ecuación (46) por diferenciación de ${}_{/t}P_x^{\bar{aa}}$ y posterior aplicación en la expresión resultante de la propiedad de escindibilidad de ${}_{/t}P_x^{\bar{aa}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left({}_{/t}P_{x,z}^{\bar{aa}}\right)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t}P_x^{\bar{aa}} - {}_{/t}P_x^{\bar{aa}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/t}P_x^{\bar{aa}} \cdot {}_{/\Delta t}P_{x+t}^{\bar{aa}} - {}_{/t}P_x^{\bar{aa}}}{\Delta t} = \\
 &= -{}_{/t}P_x^{\bar{aa}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(1 - {}_{/\Delta t}P_{x+t}^{\bar{aa}}\right)}{\Delta t} = -{}_{/t}P_x^{\bar{aa}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t}^{am} + \mathbf{m}_{x+t}^{ai}\right) \\
 {}_{/t}P_x^{\bar{aa}} &= e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+s}^{am} + \mathbf{m}_{x+s}^{ai} ds}
 \end{aligned}$$

Demostración de (47)

Obtenemos (47) de la misma forma que la expresión anterior.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left({}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}}\right)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta t+t}P_{x,z}^{\bar{ii}} - {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/\Delta t}P_{x+t,z+t}^{\bar{ii}} - {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}}}{\Delta t} = \\
 &= -{}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(1 - {}_{/\Delta t}P_{x+t,z+t}^{\bar{ii}}\right)}{\Delta t} = -{}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t,z+t}^{im} + \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{ia}\right) \\
 {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} &= e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+s,z+s}^{im} + \mathbf{m}_{x+s,z+s}^{ia} ds}
 \end{aligned}$$

Demostración de (48)

Diferenciamos la probabilidad de transición ${}_{/w,t}P_x^{ai}$ respecto a la variable w ; posteriormente sustituimos ${}_{/w+\Delta w,t}P_x^{ai}$ por la expresión (39). Finalmente resolvemos y simplificamos el límite resultante de la anterior operación.

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/w,t}P_x^{ai})}{dw} &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{{}_{/w+\Delta w,t}P_x^{ai} - {}_{/w,t}P_x^{ai}}{\Delta w} = \\ &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{{}_{/w,t}P_x^{aa} + {}_{/t-w-\Delta w}P_x^{aa} \cdot {}_{/\Delta w}P_{x+t-w-\Delta w}^{ai} \cdot {}_{/w}P_{x+t-w,u}^{\bar{ii}} - {}_{/w,t}P_x^{ai}}{\Delta w} = \end{aligned}$$

donde $0 < u < \Delta w \rightarrow 0$.

$$= {}_{/t-w}P_x^{aa} \cdot {}_{/w}P_{x+t-w,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{{}_{/\Delta w}P_{x+t-w-\Delta w}^{ai}}{\Delta w}$$

Por integración, obtenemos el valor de ${}_{/w,t}P_x^{ai}$

$${}_{/w,t}P_x^{ai} = \int_{t-w}^t {}_{/u}P_x^{aa} \cdot m_{x+u}^{ai} \cdot {}_{/t-u}P_{x+u,0}^{\bar{ii}} du$$

3 Estimación y ajuste de las intensidades de transición

Una vez expuesto el modelo teórico, necesitamos estimar las intensidades de transición para posteriormente poder calcular las probabilidades de transición correspondientes. Para ello, aplicaremos el mismo proceso de estimación explicado de forma generalizada en el capítulo 3. Únicamente destacamos las siguientes singularidades:

- Las exposiciones centrales y transiciones asociadas al estado de actividad se clasificarán exclusivamente atendiendo a la edad. En cambio, las exposiciones centrales y las transiciones del estado de invalidez se ordenan por edad e intervalos de duración de la invalidez.

- En el caso que optemos por un ajuste paramétrico de los valores de las intensidades de transición, recogemos las siguientes propuestas de funciones de ajuste.

- Como función de ajuste, el **C.M.I.B. (1991)** propone la utilización de funciones de Gompertz-Makeham para las intensidades de transición univariantes de invalidación y fallecimiento. En cambio, para las intensidades de transición de reactivación y fallecimiento como inválido, el **C.M.I.B. (1991)** se decanta por las siguientes funciones de ajuste:

$$m_{x,z}^{ia} = (a + b\sqrt{z} \cdot (x - z - 50)) \cdot e^{-c\sqrt{z}} \quad (49)$$

$$m_{x,z}^{im} = (a_0 + a_1 \cdot x \cdot a_2 \cdot x^2) \cdot \frac{e^{-b/(z+c)^r}}{(z+c)^{n+1}} + r \cdot e^{s(x+z)} \quad (50)$$

- Para las dos anteriores funciones de ajuste bivalente, **Renshaw, A.E. et al. (1995)** se inclinan por la utilización de polinomios fraccionados.
- Si recurrimos a métodos de ajuste no paramétrico, para las intensidades de transición univariante nos parecen muy adecuados el método de Whittaker, la modelización local polinómica y el filtro de Kalman. En cambio, para funciones de ajuste bivalente, escogemos los dos primeros métodos.

4 Obtención numérica de las probabilidades de transición

Suponiendo conocidos los valores estimados de m_x^{ai} , m_x^{am} , $m_{x,z}^{ia}$ y $m_{x,z}^{im}$ procedemos a calcular las correspondientes probabilidades de transición. Con tal objeto, el **C.M.I.B. (1991)** aplica un método numérico, propuesto anteriormente por **Waters, H.R. (1984)**, inspirado en la aproximación de las probabilidades de transición mediante el teorema del valor medio.

Nosotros desarrollamos un método alternativo basado en la resolución numérica de las ecuaciones integro-diferenciales asociadas al semiproceso estocástico de Markov ((**Pocielo, E. 1998**)).

Éste último, si bien resulta numéricamente más complejo, cuenta a su favor con que permite aproximar todas las probabilidades de transición que intervienen en el proceso estocástico, no solamente las derivadas del estado de actividad, como sucede en la propuesta del **C.M.I.B. (1991)**.

Ambas metodologías requieren dividir la temporalidad de la probabilidad de transición en subintervalos de amplitud de h años. Cuanto más pequeña sea h , mayor será la precisión de la aproximación.

Cada subintervalo de tiempo, t_i , lo expresaremos como $t_i = i \cdot h$, de tal forma que la temporalidad total $[0, t]$ puede representarse como sigue.

$$[0, t] = \bigcup_{k=1}^m [t_{k-1}, t_k]$$

Fijamos las siguientes condiciones iniciales de las probabilidades de transición:

$${}_{/t_0} p_x^{aa} = 1$$

$${}_{/t_0} p_{x,z}^{ii} = 1$$

$${}_{/t_0}P_x^{ai} = 0$$

$${}_{/t_0}P_{x,z}^{am} = 0$$

$${}_{/t_0}P_{x,z}^{ia} = 0$$

$${}_{/t_0}P_{x,z}^{im} = 0$$

A partir de éstas, obtendremos recurrentemente las probabilidades de transición asociadas a los sucesivos subintervalos.

4.1 Método basado en la aplicación del teorema del valor medio.

El método de **Waters, H.R.**, ampliamente explicado en el **C.M.I.R. 12**, incluye las siguientes expresiones recurrentes:

$${}_{/t_{m+1}, t_{n+1}}P_x^{ai} \cong {}_{/t_m, t_n}P_x^{ai} \frac{{}_{/t_m, t_n}P_x^{ai} \cdot \left(1 - \frac{h}{2} \cdot (\mathbf{m}_{x+t_n, t_m}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n, t_m}^{im})\right)}{1 + \frac{h}{2} \cdot (\mathbf{m}_{x+t_{n+1}, t_{m+1}}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_{n+1}, t_{m+1}}^{im})} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} {}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} &\cong {}_{/t_n}P_x^{aa} - \frac{h}{2} \left[{}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot (\mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t_n}^{am}) + {}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} \cdot (\mathbf{m}_{x+t_{n+1}}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t_{n+1}}^{am}) \right] + \\ &+ \frac{h}{2} \sum_{m=1}^N \left[{}_{/t_m, t_n}P_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n, t_m}^{ia} + {}_{/t_{m+1}, t_{n+1}}P_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n+1}, t_m}^{ia} \right] + \\ &+ \frac{h}{2} \left({}_{/t_{N+}, t_n}P_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n, t_N}^{ia} + {}_{/t_{N+}, t_{n+1}}P_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n+1}, t_N}^{ia} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} + {}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n+1}}^{ai} \right) \cong {}_{/t_1, t_{n+1}}P_x^{ai} \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot (\mathbf{m}_{x+t_{n+1}, t_1}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_{n+1}, t_1}^{im}) \right) \quad (53)$$

$${}_{/t_{n+1}}P_x^{am} \cong {}_{/t_n}P_x^{aa} + \frac{h}{2} \left({}_{/t_n}P_x^{am} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} + {}_{/t_{n+1}}P_x^{am} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n+1}}^{am} \right) \quad (54)$$

donde N representa el número de periodos de duración de la invalidez a partir de los cuales **Waters, H.R.** considera que no se modifican las respectivas tasas instantáneas de fallecimiento y de reactivación.

$$\forall m \geq N, \mathbf{m}_{x+t_m, z}^{ia} = \mathbf{m}_{x+t_N, z}^{ia}, \mathbf{m}_{x+t_m, z}^{im} = \mathbf{m}_{x+t_N, z}^{im}.$$

Igualmente, definimos ${}_{/t_{N^+}, t_n} P_x^{ai}$ como la probabilidad de que llegue inválido al final del periodo con más de N periodos en invalidez.

$${}_{/t_{N^+}, t_n} P_x^{ai} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{/t_{N+k}, t_n} P_x^{ai} \quad (55)$$

Combinando las ecuaciones iterativas (51), (52), (53), (54) y (55) podemos obtener los valores aproximados de las probabilidades de transición objeto de cálculo.

4.2 Método basado en la resolución numérica de la ecuación general

Para aproximar las soluciones del sistema integro-diferencial asociado al semiproceso estocástico de Markov, recurrimos a aproximar numéricamente sus derivadas parciales e integrales definidas, mediante su definición (Aubanell, A. et al. (1991)) y la fórmula de los trapecios, respectivamente. El resultado es el siguiente conjunto de expresiones recurrentes:

$$\begin{aligned} {}_{/t_{n+1}} P_x^{aa} &\cong \left(1 - h \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t_n}^{am}\right)\right) \cdot {}_{/t_n} P_x^{aa} + \frac{h^2}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n, t_n}^{ja} + \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} \left({}_{/t_n - t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n - t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n - t_r, 0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n, t_r}^{ja} \cdot h^2 \right) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} {}_{/t_{n+1}} P_x^{ai} &\cong {}_{/t_n} P_x^{ai} + h \cdot {}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} - \frac{h^2}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n, t_n}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t_n, t_n}^{jm}\right) + \\ &- \sum_{r=1}^{i-1} \left[{}_{/t_n - t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n - t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n - t_r, 0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n, t_r}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t_n, t_r}^{jm}\right) \cdot h^2 \right] \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} {}_{/t_{n+1}} P_x^{am} &\cong {}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} \cdot h + {}_{/t_n} P_x^{am} + \frac{h^2}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n, t_n}^{jm} + \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n - t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n - t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n - t_r, 0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n, t_r}^{jm} \cdot h^2 \right] \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{ia} &\cong \left(1 - h \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am})\right) \cdot {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} + {}_{/t_n}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,z+t_n}^{ja} + \\
 &+ \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ja} \cdot h^2 \right]
 \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{ii} &\cong {}_{/t_n}P_{x,z}^{ii} + {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot h - {}_{/t_n}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t,z+t}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{im}) \cdot h + \\
 &- \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im}) \cdot h^2 \right]
 \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{im} &\cong {}_{/t_n}P_{x,z}^{im} + {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} \cdot h + {}_{/t_n}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,z+t_n}^{jm} \cdot h + \\
 &+ \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{jm} \cdot h^2 \right]
 \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_m,t_n}P_x^{ai} &\cong \sum_{r=n-m+1}^{n-1} \left[{}_{/t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_n-t_r}P_{x+t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot h \right] + \\
 &+ \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_{n-m}}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n-m}}^{ai} \cdot {}_{/t_m}P_{x+t_{n-m},0}^{\bar{ii}} + {}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \right)
 \end{aligned} \tag{62}$$

Demostración de (56)

Aproximamos numéricamente la derivada y la integral definida de la ecuación integro-diferencial (40).

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d({}_{/t}P_x^{aa})}{dt} \right]_{t=t_n} &\cong \frac{{}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} - {}_{/t_n}P_x^{aa}}{h} \\
 \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ja} du &\cong \\
 &\cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ja} \cdot h \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot {}_{/0}P_{x+t_n,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,0}^{ja} + {}_{/0}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ja} \right) \cong \\
 & \cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ja} \cdot h \right] + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ja}
 \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación y simplificamos.

$$\begin{aligned}
 \frac{{}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} - {}_{/t_n}P_x^{aa}}{h} & \cong -\left(\mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t_n}^{am}\right) \cdot {}_{/t_n}P_x^{aa} + \\
 & + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ja} \cdot h \right] + \\
 & + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ja} \\
 {}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} & \cong \left(1 - h \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t_n}^{am}\right)\right) \cdot {}_{/t_n}P_x^{aa} + \frac{h^2}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ja} + \\
 & + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ja} \cdot h^2 \right]
 \end{aligned}$$

Demostración de (57)

Aproximamos numéricamente la derivada e integral definida contenida en la ecuación (41) del sistema de ecuaciones integro-diferencial del semiproceso estocástico de Markov.

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d({}_{/t}P_x^{ai})}{dt} \right]_{t=t_n} & \cong \frac{{}_{/t_{n+1}}P_x^{ai} - {}_{/t_n}P_x^{ai}}{h} \\
 \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t,u}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t,u}^{jm}\right) du & \cong \\
 \cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{jm}\right) \cdot h \right] + \\
 & + \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot {}_{/0}P_{x+t_n,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,0}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t_n,0}^{jm}\right) + \right. \\
 & \left. + {}_{/0}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{jm}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{im} \right) \cdot h \right] + \\ &+ \frac{h}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \right) \end{aligned}$$

A continuación sustituimos en la segunda ecuación integro-diferencial y posteriormente la reordenamos.

$$\begin{aligned} \frac{{}_{/t_{n+1}} P_x^{ai} - {}_{/t_n} P_x^{ai}}{h} &\cong {}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} + \\ &- \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{im} \right) \cdot h \right] + \\ &- \frac{h}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \right) \\ {}_{/t_{n+1}} P_x^{ai} &\cong {}_{/t_n} P_x^{ai} + h \cdot {}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} - \frac{h^2}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \right) + \\ &- \sum_{r=1}^{i-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_n-t_r} P_x^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{im} \right) \cdot h^2 \right] \end{aligned}$$

Demostración de (58)

Aproximamos numéricamente la ecuación (42)

$$\begin{aligned} \left[\frac{d({}_{/t} P_x^{am})}{dt} \right]_{t=t_n} &\cong \frac{{}_{/t_{n+1}} P_x^{am} - {}_{/t_n} P_x^{am}}{h} \\ &\int_0^t {}_{/t-u} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du \cong \\ &\cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h \right] + \\ &+ \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot {}_{/0} P_{x+t_n,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,0}^{im} + {}_{/0} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \right) \cong \\ &\cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h \right] + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación original y simplificamos.

$$\begin{aligned}
 \frac{{}_{/t_{n+1}}P_x^{am} - {}_{/t_n}P_x^{am}}{h} &\cong {}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} + \\
 &+ \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h \right] + \frac{h}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \\
 {}_{/t_{n+1}}P_x^{am} &\cong {}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} \cdot h + {}_{/t_n}P_x^{am} + \frac{h^2}{2} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} + \\
 &+ \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h^2 \right]
 \end{aligned}$$

Demostración de (59)

Derivamos e integramos numéricamente la ecuación integro-diferencial (43)

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{ia})}{dt} \right]_{t=t_n} &\cong \frac{{}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{ia} - {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia}}{h} \\
 \int_0^t {}_{/t-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} du &\cong \\
 \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} \cdot h \right] + \\
 + \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot {}_{/0}P_{x+t_n,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,0}^{ia} + {}_{/0}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ia} \right) &\cong \\
 \cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} \cdot h \right]
 \end{aligned}$$

Sustituimos, a continuación, en la anterior ecuación.

$$\frac{{}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{ia} - {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia}}{h} \cong -{}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} \right) + {}_{/t_n}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,z+t_n}^{ia} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} \cdot h \right] \\
 & {}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{ia} \cong \left(1 - h \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am} \right) \right) \cdot {}_{/t_n} P_{x,z}^{ia} + {}_{/t_n} P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,z+t_n}^{ia} + \\
 & \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} \cdot h^2 \right]
 \end{aligned}$$

Demostración de (60)

Derivamos e integramos numéricamente la derivada e integral definida de la ecuación integro-diferencial (44)

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{d({}_{/t} P_{x,z}^{ii})}{dt} \right]_{t=t_n} \cong \frac{{}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{ii} - {}_{/t_n} P_{x,z}^{ii}}{h} \\
 & \int_0^t {}_{/t-u} P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t,u}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} \right) du \cong \\
 & \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \right) \cdot h \right] + \\
 & + \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_n} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot {}_{/0} P_{x+t_n,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,0}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,0}^{im} \right) + \right. \\
 & \left. + {}_{/0} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \right) \right) \\
 & \cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \right) \cdot h \right]
 \end{aligned}$$

A continuación, sustituimos las anteriores aproximaciones en las ecuaciones integro-diferencial correspondiente.

$$\frac{{}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{ii} - {}_{/t_n} P_{x,z}^{ii}}{h} \cong {}_{/t} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - {}_{/t} P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t,z+t}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{im} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \right) \cdot h \right] \\
 & {}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{ii} \cong {}_{/t_n} P_{x,z}^{ii} + {}_{/t_n} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot h - {}_{/t} P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t,z+t}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{im} \right) \cdot h + \\
 & - \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \left(\mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{ia} + \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \right) \cdot h^2 \right]
 \end{aligned}$$

Demostración de (61)

Integramos y derivamos numéricamente la ecuación (45)

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{d \left({}_{/t} P_{x,z}^{im} \right)}{dt} \right]_{t=t_n} \cong \frac{{}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{im} - {}_{/t_n} P_{x,z}^{im}}{h} \\
 & \int_0^t {}_{/t-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du \cong \\
 & \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h \right] + \\
 & + \frac{h}{2} \left({}_{/t_n} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot {}_{/0} P_{x+t_n,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,0}^{im} + {}_{/0} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_x^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_n}^{im} \right) \cong \\
 & \cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos las anteriores aproximaciones y simplificamos la expresión resultante

$$\begin{aligned}
 & \frac{{}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{im} - {}_{/t_n} P_{x,z}^{im}}{h} \cong {}_{/t_n} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} + {}_{/t_n} P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,z+t_n}^{im} + \\
 & + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h \right] \\
 & {}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{im} \cong {}_{/t_n} P_{x,z}^{im} + {}_{/t_n} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{am} \cdot h + {}_{/t_n} P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,z+t_n}^{im} \cdot h + \\
 & + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r} P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r} P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h^2 \right]
 \end{aligned}$$

Demostración de (62)

Aproximamos numéricamente la integral definida de la ecuación (48)

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_m, t_n} P_x^{ai} &\cong \sum_{r=n-m+1}^{n-1} \left[{}_{/t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_n-t_r} P_{x+t_r, 0}^{\bar{ii}} \cdot h \right] + \\
 &+ \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_{n-m}} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n-m}}^{ai} \cdot {}_{/t_m} P_{x+t_{n-m}, 0}^{\bar{ii}} + {}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \cdot {}_{/0} P_{x+t_n, 0}^{\bar{ii}} \right) \cong \\
 &\cong \sum_{r=n-m+1}^{n-1} \left[{}_{/t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_n-t_r} P_{x+t_r, 0}^{\bar{ii}} \cdot h \right] + \\
 &+ \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_{n-m}} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n-m}}^{ai} \cdot {}_{/t_m} P_{x+t_{n-m}, 0}^{\bar{ii}} + {}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \right) \cong \\
 {}_{/t_m, t_n} P_x^{ai} &\cong \sum_{r=n-m+1}^{n-1} \left[{}_{/t_r} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_n-t_r} P_{x+t_r, 0}^{\bar{ii}} \cdot h \right] + \\
 &+ \frac{h}{2} \cdot \left({}_{/t_{n-m}} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_{n-m}}^{ai} \cdot {}_{/t_m} P_{x+t_{n-m}, 0}^{\bar{ii}} + {}_{/t_n} P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t_n}^{ai} \right)
 \end{aligned}$$

Las anteriores relaciones son actuarialmente consistentes porque las aproximaciones de las probabilidades de transición del estado de actividad (56), (57) y (58) suman la unidad, lo mismo que sucede con los valores aproximados de las probabilidades de transición del estado de invalidez. Ello nos permite calcular las probabilidades de transición ${}_{/t_{n+1}} P_x^{am}$ y ${}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{im}$ como sigue:

$${}_{/t_{n+1}} P_x^{am} = 1 - {}_{/t_{n+1}} P_x^{ai} - {}_{/t_{n+1}} P_x^{aa} \tag{63}$$

$${}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{im} = 1 - {}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{ii} - {}_{/t_{n+1}} P_{x,z}^{ia} \tag{64}$$

Las expresiones (56) y (60) generan recurrentemente los valores aproximados de ${}_{/t_n} P_x^{aa}$ y ${}_{/t_n} P_x^{ii}$. Su sustitución en las ecuaciones (57) y (59) permite obtener posteriormente de forma aproximada ${}_{/t_n} P_x^{ai}$ y ${}_{/t_n} P_{x,z}^{ia}$, respectivamente.

5 Valoración financiero-actuarial

En primer lugar, vamos a expresar los valores actuales actuariales de las rentas que consideramos más relevantes:

- Renta de actividad de una persona inicialmente activa y de edad x , unitaria, diferida d años y temporal m años, pagadera mientras el asegurado permanezca activo. Las expresiones (65) y (66) reflejan los valores actuales actuariales de las rentas de tales características, continuas y pagaderas de forma anticipada k veces al año, respectivamente:

$${}_{d/m}\bar{a}_x^{aa} = \int_d^{d+m} {}_{/t}p_x^{aa} \cdot v^t \cdot dt \quad (65)$$

$${}_{d/m}\ddot{a}_x^{aa,(k)} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \sum_{n=0}^{k-1} {}_{/t+\frac{n}{k}}p_x^{aa} \cdot v^{-(t+\frac{n}{k})} \quad (66)$$

- Renta de actividad de una persona inicialmente activa y de edad x , unitaria, diferida d años y temporal m años, interrumpida tras el fallecimiento o invalidación del asegurado. Las expresiones (67) y (68) incorporan los valores actuales actuariales de las rentas de tales características, continuas y pagaderas de forma anticipada k veces al año, respectivamente:

$${}_{d/m}\bar{a}_x^{\bar{aa}} = \int_d^{d+m} {}_{/t}p_x^{\bar{aa}} \cdot v^t \cdot dt \quad (67)$$

$${}_{d/m}\ddot{a}_x^{\bar{aa},(k)} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \sum_{n=1}^k {}_{/t+\frac{n}{k}}p_x^{\bar{aa}} \cdot v^{-(t+\frac{n}{k})} \quad (68)$$

- Renta de invalidez de una persona inicialmente activa y de edad x , unitaria, diferida d años y temporal m años, pagadera mientras el asegurado se halle inválido. Las expresiones (69) y (70) representan los valores actuales

actuariales de las rentas de tales características, continuas y pagaderas de forma vencida k veces al año, respectivamente:

$${}_{d/m}\bar{a}_x^{ai} = \int_d^{d+m} {}_{/t}P_x^{ai} \cdot v^t \cdot dt \quad (69)$$

$${}_{d/m}a_x^{ai,(k)} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \sum_{n=1}^k {}_{/t+\frac{n}{k}}P_x^{ai} \cdot v^{-(t+\frac{n}{k})} \quad (70)$$

- Renta de invalidez de una persona inicialmente activa y de edad x , unitaria, diferida d años y temporal m años, pagadera cuando el asegurado lleve inválido entre d_1 y $d_1 + d_2$ años. Las siguientes expresiones reflejan los valores actuales actuariales de las rentas de tales características, continuas y pagaderas de forma vencida k veces al año, respectivamente:

$${}_{d/m}\bar{a}_x^{ai,d_1/d_2} = \int_d^{d+m} ({}_{/d_1+d_2,t}P_x^{ai} - {}_{/d_1,t}P_x^{ai}) \cdot v^t \cdot dt \quad (71)$$

$${}_{d/m}a_x^{ai,d_1/d_2,(k)} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \sum_{n=1}^k ({}_{/d_1+d_2,t+\frac{n}{k}}P_x^{ai} - {}_{/d_1,t+\frac{n}{k}}P_x^{ai}) \cdot v^{-(t+\frac{n}{k})} \quad (72)$$

- Renta de invalidez de una persona inicialmente inválida y de edad x , unitaria, diferida d años y temporal m años, que cesa con el fallecimiento o la reactivación del asegurado. Las expresiones (73) y (74) reflejan los valores actuales actuariales de las rentas de tales características, continuas y pagaderas de forma vencida k veces al año, respectivamente:

$${}_{d/m}\bar{a}_{x,z}^{\bar{ii}} = \int_d^{d+m} {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot v^t \cdot dt \quad (73)$$

$${}_{d/m}a_{x,z}^{\bar{ii},(k)} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \sum_{n=1}^k {}_{/t+\frac{n}{k}}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot v^{(t+\frac{n}{k})} \quad (74)$$

- Renta de supervivencia de una persona inicialmente activa y de edad x , unitaria, diferida d años y temporal m años. Las siguientes expresiones calculan los valores actuales actuariales de las rentas de tales características, continuas y pagaderas de forma vencida k veces al año, respectivamente:

$${}_{d/m}\bar{a}_x^a = \int_d^{d+m} \left({}_{/t}p_x^{ai} + {}_{/t}p_x^{aa} \right) \cdot v^t \cdot dt \quad (75)$$

$${}_{d/m}a_x^{a,(k)} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \sum_{n=1}^k \left({}_{/t+\frac{n}{k}}p_x^{ai} + {}_{/t+\frac{n}{k}}p_x^{aa} \right) \cdot v^{(t+\frac{n}{k})} \quad (76)$$

En relación a los seguros, **Bull, O. (1980)** considera un seguro de invalidación de una persona inicialmente activa de edad x , continuo en el tiempo, de cuantía unitaria, con una carencia de d años y temporalidad de m años, durante los cuales si el asegurado se invalida, posteriormente tiene derecho a cobrar el seguro si permanece inválido el tiempo mínimo establecido en la carencia.

$${}_{/m,d}\bar{A}_x^{a,ai} = \int_0^m {}_{/t}p_x^{aa} \cdot m_{x+t}^{ai} \cdot {}_{/d}p_{x+t,0}^{\bar{ii}} \cdot v^{t+d} \cdot dt \quad (77)$$

Las expresiones integrales anteriores pueden determinarse numéricamente por aplicación de algún método de integración numérica, como por ejemplo la fórmula de los trapecios o la fórmula de Simpson.

ANEXO 7-1
Cálculo numérico de las
probabilidades de transición

Partimos de una operación de invalidez temporal, modelizada a través de un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, de la cual suponemos conocidas unas determinadas intensidades de transición. Generaremos varias tablas de probabilidad como resultado de aplicar el algoritmo de cálculo de probabilidades de transición propuesto en la tesis, basado en la resolución aproximada y recurrente de la ecuación general del proceso estocástico.

Intensidades de transición

Para generar las diversas tablas de probabilidades, utilizaremos las intensidades de transición estimadas por el **C.M.I.B. (1991)**, para el cuatrienio 1975-78:

- $m_x^{ai} = e^{-1.798 + 0.080844 \cdot x - 0.002686 \cdot x^2 + 0.000025 \cdot x^3}$
- $m_x^{am} = -0.00465192 - 0.00452546 \cdot \left(\frac{x-70}{50}\right) + e^{-3.985723 + 3.185063 \cdot \left(\frac{x-70}{50}\right)}$
- $m_{x,z}^{ia} = m_{y+z,z}^{ia} = (51.0578 - 2.686334 \cdot (1 + 1.41934 \cdot \max(4 - 52.15 \cdot z, 0))) \cdot \sqrt{z} \cdot (Y - 50) \cdot e^{-4.9144 \cdot \sqrt{z}}$

donde

$$Y = \begin{cases} y & z \leq 5 \\ y + z - 5 & z > 5 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} z & z \leq 1 \\ 1 + 0.36235 \cdot (z - 1) & 1 < z \leq 5 \\ 1 + 4 \cdot 0.36235 & z > 5 \end{cases}$$

- $m_{x,z}^{im} = m_{y+z,z}^{im} = (0.237884 - 0.0048 \cdot Y + 0.00009 \cdot Y^2) \cdot \frac{e^{\frac{-0.8747}{(Z + 0.3573) \cdot 2.613917}}}{(Z + 0.357384)^{2.613917}} + r \cdot e^{s \cdot (Y+Z)}$

donde

$$Y = \begin{cases} y & \text{si } z \leq 5 \\ y + z - 5 & z > 5 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} z & z \leq 5 \\ 5 & z > 5 \end{cases}$$

Tabla de probabilidades anuales de invalidación

x	p_x^{ai}
30	.00926
35	.01098
40	.01314
45	.01617
50	.02087
55	.02877
60	.04311

Tablas de tasas anuales de invalidación

Las tasas anuales de invalidación, q_x^{aai} , recogen el número esperado de invalidaciones de un asegurado activo entre las edades x y $x+1$. Sus valores, se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$q_x^{aai} = \int_0^1 /tp_x^{aa} \cdot m_{x+t}^{ai} \cdot dt$$

x	q_x^{aai}
30	.32266
35	.29963
40	.27782
45	.26197
50	.25582
55	.26333
60	.29050

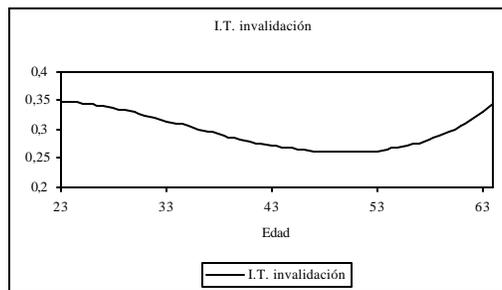
Tablas de probabilidades anuales de reactivación

x	$P_{x, 0.5/12}^{ia}$	$P_{x, 1/12}^{ia}$	$P_{x, 2/12}^{ia}$
30	.83151	.79534	.72105
35	.81053	.76838	.68835
40	.78584	.73711	.65032
45	.75617	.70034	.60567
50	.71971	.65647	.55281
55	.67381	.60333	.48967
60	.61418	.53783	.41366

Conclusiones

Las conclusiones más relevantes a que hemos llegado son las siguientes:

- El cuadro de valores de p_x^{ai} recoge una tendencia claramente creciente de los mismos, especialmente, a partir de las últimas edades registradas.
- La tasa anual de invalidación, $q_x^{a:ai}$, sigue una evolución muy similar a la de la intensidad de transición de invalidación, m_x^{ai} , cuya evolución mostramos gráficamente a continuación.



Los valores de $q_x^{a:ai}$ decrecen hasta llegar a los 50 años. A partir de esta edad, coincidiendo con el aumento de la tasa de crecimiento p_x^{ai} , observamos un cambio de tendencia, pues los valores de $q_x^{a:ai}$ comienzan a crecer.

- Las probabilidades de reactivación, $p_{x,z}^{ia}$ son claramente decrecientes, tanto respecto la edad como respecto la duración de la invalidez. A mayor edad el efecto de la duración se intensifica, pues la probabilidad de reactivación disminuye más rápidamente con el aumento de la duración de invalidez.
- Los resultados alcanzados por aplicación del método desarrollado basado en la resolución numérica de la ecuación general del semiproceto estocástico son muy similares a los obtenidos por el **C.M.I.B. (1991)**.

Capítulo 8

Modelo de invalidez permanente

En el presente capítulo vamos a recoger un modelo de invalidez permanente basado en la aplicación de un proceso estocástico de markov continuo en el tiempo. Obtendremos los valores exactos de sus probabilidades de transición a partir de la resolución exacta de su ecuación general, la cual constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov.

Al final del capítulo, realizaremos una aplicación práctica consistente en generar algunas tablas de probabilidad. Los resultados básicos alcanzados en el capítulo han sido expuestos en el Congreso de Matemática de las operaciones financieras '97 (Pociello, E. et al. (1997)).

1 Modelo teórico

Sea un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, $\{S(x), x \geq 0\}$, definido sobre el espacio de estados $E = \{a, i, m\}$ en el que $S(x)$ recoge el estado del asegurado en una edad cualquiera x . Las probabilidades de transición que intervienen en el proceso estocástico son las siguientes.

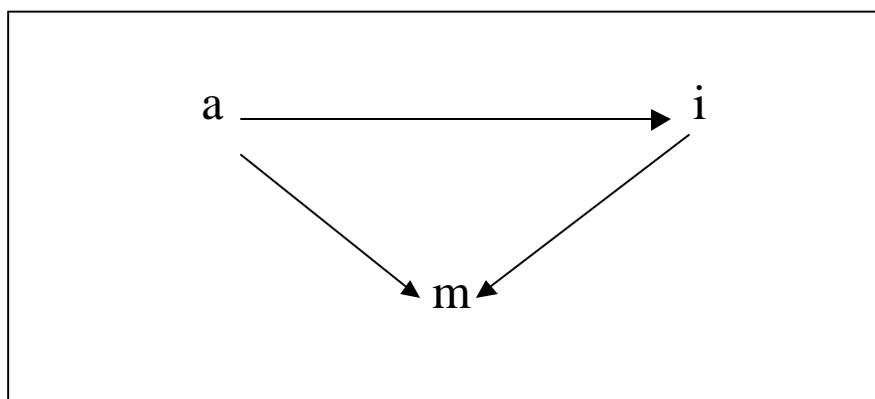
$${}_{/t}P_x^{aa} = P(S(x+t) = a / S(x) = a)$$

$${}_{/t}P_x^{am} = P(S(x+t) = m / S(x) = a)$$

$${}_{/t}P_x^{ii} = P(S(x+t) = i / S(x) = i)$$

$${}_{/t}P_x^{im} = P(S(x+t) = m / S(x) = i)$$

A continuación representamos gráficamente el esquema de transiciones de la operación:



Nótese que, dada la naturaleza de la invalidez permanente, excluimos la transición por reactivación. Por consiguiente, hemos de entender ${}_{/t}P_x^{aa}$ y ${}_{/t}P_x^{ii}$ como probabilidades de permanencia ininterrumpida. La matriz de transición vendrá dada de la siguiente forma.

$$P_x(t) = \begin{pmatrix} {}_{/t}P_x^{aa} & {}_{/t}P_x^{ai} & {}_{/t}P_x^{am} \\ 0 & {}_{/t}P_x^{ii} & {}_{/t}P_x^{im} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, recogemos las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov, que al mismo tiempo constituyen la ecuación general del proceso estocástico utilizado. Su obtención se ha realizado de acuerdo al procedimiento general indicado en el capítulo 2.

$$\frac{d({}_{/t}p_x^{aa})}{dt} = -{}_{/t}p_x^{aa} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}) \quad (1)$$

$$\frac{d({}_{/t}p_x^{ai})}{dt} = {}_{/t}p_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - {}_{/t}p_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{im} \quad (2)$$

$$\frac{d({}_{/t}p_x^{am})}{dt} = {}_{/t}p_x^{ai} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{im} + {}_{/t}p_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} \quad (3)$$

$$\frac{d({}_{/t}p_x^{ii})}{dt} = -{}_{/t}p_x^{ii} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{im} \quad (4)$$

$$\frac{d({}_{/t}p_x^{im})}{dt} = {}_{/t}p_x^{ii} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{im} \quad (5)$$

2 Estimación y ajuste de las intensidades de transición

El proceso de estimación y ajuste del modelo de invalidez permanente que estamos exponiendo en el presente capítulo no presenta ninguna novedad significativa con respecto al modelo general expuesto en el capítulo 3.

Únicamente señalar que las funciones de ajuste más utilizadas en los trabajos que tratan este modelo de **Möller, C. M. (1992)**, **Pittaco, E. et al. (1997)** y **Haberman, S. et al. (1999)**, son funciones de Gompertz-Makeham.

3 Obtención exacta de las probabilidades de transición

Podemos hallar numéricamente las diferentes probabilidades de transición. Entre los diversos métodos aplicables, destacamos por su eficiencia y sencillez el método numérico basado en la integración por producto, introducido por **Möller, C.M. (1992)**.

Alternativamente, podemos hallar las expresiones exactas de las probabilidades de transición, resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov.

- Deducimos el valor de la probabilidad de transición ${}_t p_x^{aa}$ a través de la ecuación (1) e imponiendo la condición inicial de que ${}_0 p_x^{aa} = 1$.

$$\frac{d \left({}_t p_x^{aa} \right)}{{}_t p_x^{aa}} = - \left(\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am} \right) \cdot dt$$

$$d \ln {}_t p_x^{aa} = - \left(\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am} \right) \cdot dt$$

$$\int_0^t d \ln {}_u p_x^{aa} = - \int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{ai} + \mathbf{m}_{x+u}^{am} du$$

$$\ln {}_t p_x^{aa} = - \int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{ai} + \mathbf{m}_{x+u}^{am} du$$

$${}_t p_x^{aa} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{ai} + \mathbf{m}_{x+u}^{am} du}$$

- Obtenemos la expresión de ${}_t p_x^{ii}$, por integración de la ecuación (4) y aplicando la condición inicial de que ${}_0 p_x^{ii} = 1$.

$$\frac{d \left({}_t p_x^{ii} \right)}{{}_t p_x^{ii}} = - \mathbf{m}_{x+t}^{im} \cdot dt$$

$$d \ln {}_t p_x^{ii} = - \mathbf{m}_{x+t}^{im} \cdot dt$$

$$\int_0^t d \ln {}_{/u}P_x^{ii} = - \int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{im} du$$

$$\ln {}_{/t}P_x^{ii} = - \int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{im} du$$

$${}_{/t}P_x^{ii} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{im} du}$$

- La probabilidad de transición de invalidación, ${}_{/t}P_x^{ai}$, puede deducirse directamente de su misma definición, tal como así muestra **Pitacco, E. et al. (1997)**.

$${}_{/t}P_x^{ai} = \int_0^t {}_{/u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+u}^{ai} \cdot {}_{/t-u}P_{x+u}^{aa} \cdot du$$

Si imponemos la condición de que la mortalidad de activos y de inválidos es la misma y, por tanto, $\mathbf{m}_{x+t}^{am} = \mathbf{m}_{x+t}^{im}$ obtendremos una expresión de ${}_{/t}P_x^{ai}$ más sencilla, sumando previamente las ecuaciones diferenciales simultaneas (1) y (2).

$$d({}_{/t}P_x^{aa} + {}_{/t}P_x^{ai}) = -({}_{/t}P_x^{aa} + {}_{/t}P_x^{ai}) \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} \cdot dt$$

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{aa} + {}_{/t}P_x^{ai})}{({}_{/t}P_x^{aa} + {}_{/t}P_x^{ai})} = d \ln({}_{/t}P_x^{aa} + {}_{/t}P_x^{ai}) = -\mathbf{m}_{x+t}^{am} \cdot dt$$

$$\int_0^t d \ln({}_{/u}P_x^{aa} + {}_{/u}P_x^{ai}) = - \int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{am} \cdot du$$

$$\ln({}_{/t}P_x^{aa} + {}_{/t}P_x^{ai}) = - \int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{am} \cdot du$$

$${}_{/t}P_x^{aa} + {}_{/t}P_x^{ai} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{am} \cdot du}$$

$${}_{/t}P_x^{ai} = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{am} \cdot du} \cdot \left(1 - e^{-\int_0^t \mathbf{m}_{x+u}^{ai} \cdot du} \right)$$

- Obtenemos la expresión asociada a la probabilidad de transición ${}_tP_x^{am}$, sumando las ecuaciones (1), (2) y (3) sabiendo, además, que ${}_0P_x^{am} = 0$.

$$d({}_tP_x^{aa} + {}_tP_x^{ai} + {}_tP_x^{am}) = 0$$

$$d({}_tP_x^{aa} + {}_tP_x^{ai}) = -d({}_tP_x^{am})$$

$$\int_0^t d({}_uP_x^{aa} + {}_uP_x^{ai}) = -\int_0^t d({}_uP_x^{am})$$

$${}_tP_x^{aa} + {}_tP_x^{ai} - 1 = -{}_tP_x^{am}$$

$${}_tP_x^{am} = 1 - {}_tP_x^{aa} - {}_tP_x^{ai}$$

$${}_tP_x^{am} = 1 - e^{-\int_0^t m_{x+u}^{am} \cdot du}$$

- Conseguimos una expresión explícita de la probabilidad de fallecimiento en estado de invalidez, sumando las ecuaciones (4) y (5) junto con la aplicación de las condiciones iniciales: ${}_0P_x^{ii} = 1$ y ${}_0P_x^{im} = 1$.

$$d({}_tP_x^{ii} + {}_tP_x^{im}) = 0$$

$$d({}_tP_x^{ii}) = -d({}_tP_x^{im})$$

$$\int_0^t d({}_uP_x^{ii}) = -\int_0^t d({}_uP_x^{im})$$

$${}_tP_x^{ii} - 1 = -{}_tP_x^{im}$$

$${}_tP_x^{im} = 1 - {}_tP_x^{ii} = 1 - e^{-\int_0^t m_{x+u}^{im} \cdot du}$$

4 Valoración financiero-actuarial

La valoración financiero-actuarial de las operaciones derivadas de este modelo no presenta dificultad especial. A modo de ejemplo, definimos un seguro y una renta:

- Renta de invalidez de una persona inicialmente activa y de edad x , unitaria, diferida d años y temporal m años, pagadera mientras el asegurado se halle inválido. Las expresiones (6) y (7) representan los valores actuales actuariales de las rentas de tales características, continuas y pagaderas de forma vencida k veces al año, respectivamente:

$${}_{d/m}\bar{a}_x^{ai} = \int_d^{d+m} {}_{/t}P_x^{ai} \cdot v^t \, dt \quad (6)$$

$${}_{d/m}a_x^{ai,(k)} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \sum_{n=1}^k {}_{/t+\frac{n}{k}}P_x^{ai} \cdot v^{-(t+\frac{n}{k})} \quad (7)$$

- Seguro de invalidación de una persona inicialmente activa de edad x , continuo en el tiempo, de cuantía unitaria, sin carencia y temporalidad de m años. La expresión (8) recoge el valor actual actuarial de dicho seguro si éste se paga al final del año de la invalidación. La expresión (9) representa el valor actual actuarial de un seguro pagadero en el mismo instante de la invalidación

$${}_{/m}A_x^{a:ai} = \sum_{t=d}^{d+m-1} \int_0^1 {}_{/u}P_{x+t}^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t+u}^{ai} \cdot v^{t+1} \cdot du \quad (8)$$

$${}_{/m}\bar{A}_x^{a:ai} = \int_d^{d+m} {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} \cdot v^t \cdot dt \quad (9)$$

ANEXO 8-1
Cálculo numérico de las
probabilidades de transición

Partimos de una operación de invalidez permanente modelizada a través de un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, de la cual asumimos que conocemos sus intensidades de transición. Calcularemos varias tablas de probabilidad mediante la aplicación de las dos metodologías propuestas en la tesis:

- Resolviendo de forma exacta el sistema de chapman-kolmogorov.
- Aproximando los valores de las probabilidades a través del método de producto-integración.

Ambos métodos producen diferencias mínimas inferiores a 0.0001. No obstante, por su mayor facilidad de implementación informática, utilizamos la primera de ellas.

Intensidades de transición

Las intensidades de transición utilizadas provienen del modelo danés G82 (**Haberman, S. et al. (1999)**).

$$m_x^{ai} = 0.0004 + 10^{0.006 \cdot x - 5.46}$$

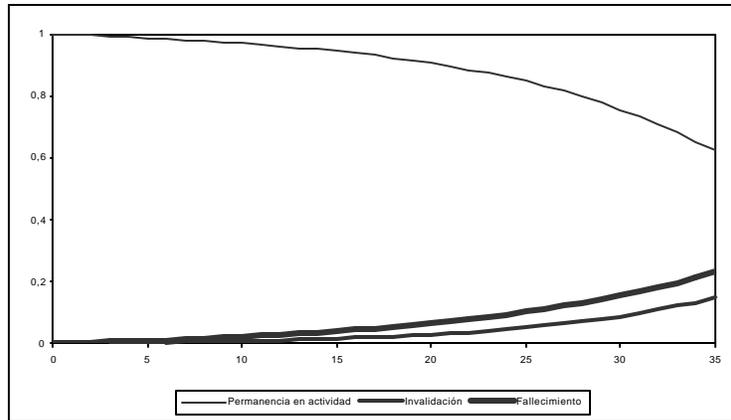
$$m_x^{am} = m_x^{im} = 0.0005 + 10^{0.038 \cdot x - 4.12}$$

Tabla de probabilidades de invalidación anuales

x	P_x^{ai}
30	0.00063
35	0.00087
40	0.00133
45	0.00225
50	0.00408
55	0.00771
60	0.01485

Tabla de probabilidades de transición del estado de actividad

t	${}_tP_{30}^{aa}$	${}_tP_{30}^{ai}$	${}_tP_{30}^{am}$
0	1	0	0
1	0,997774	0,000633	0,001593
2	0,995418	0,001299	0,003283
3	0,992920	0,002001	0,005079
4	0,990264	0,002745	0,006991
5	0,987436	0,003537	0,009027
6	0,984416	0,004385	0,011200
7	0,981185	0,005295	0,013521
8	0,977721	0,006276	0,016002
9	0,974001	0,007340	0,018659
10	0,969998	0,008496	0,021506
11	0,965682	0,009759	0,024559
12	0,961022	0,011142	0,027836
13	0,955982	0,012662	0,031356
14	0,950523	0,014338	0,035139
15	0,944602	0,016191	0,039207
16	0,938173	0,018243	0,043584
17	0,931184	0,020521	0,048294
18	0,923580	0,023054	0,053366
19	0,915299	0,025873	0,058828
20	0,906275	0,029015	0,064710
21	0,896436	0,032518	0,071046
22	0,885706	0,036424	0,077870
23	0,874001	0,040780	0,085219
24	0,861234	0,045634	0,093131
25	0,847312	0,051040	0,101648
26	0,832137	0,057051	0,110812
27	0,815608	0,063725	0,120667
28	0,797622	0,071119	0,131259
29	0,778077	0,079289	0,142634
30	0,756871	0,088288	0,154841
31	0,733908	0,098164	0,167928
32	0,709103	0,108954	0,181943
33	0,682384	0,120682	0,196934
34	0,653699	0,133355	0,212946
35	0,623025	0,146952	0,230023



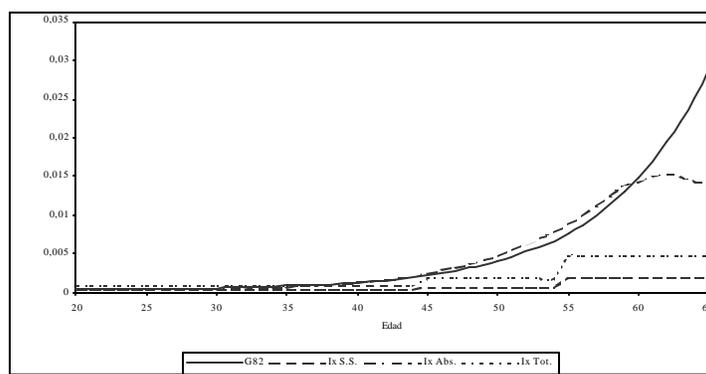
Estudio comparativo con las tablas utilizadas en España

Efectuamos un análisis comparativo de las probabilidades anuales de invalidación derivadas del modelo G82 con las utilizadas en España (**William Mercer**): Ix S.S., Ix Abs y Ix Tot.

X	G82	Ix S.S.	Ix Abs.	Ix Tot.
20	0,00046	0,0001669	0,000368	0,00092000
21	0,00047	0,0001831	0,000368	0,00092000
22	0,00048	0,0002009	0,000368	0,00092000
23	0,00049	0,0002205	0,000368	0,00092000
24	0,00050	0,0002422	0,000368	0,00092000
25	0,00052	0,0002662	0,000368	0,00092000
26	0,00053	0,0002928	0,000368	0,00092000
27	0,00055	0,0003223	0,000368	0,00092000
28	0,00058	0,0003552	0,000368	0,00092000
29	0,00060	0,0003920	0,000368	0,00092000
30	0,00063	0,0004330	0,000368	0,00092000
31	0,00067	0,0004790	0,000368	0,00092000
32	0,00071	0,0005306	0,000368	0,00092000
33	0,00075	0,0005886	0,000368	0,00092000
34	0,00081	0,0006540	0,000368	0,00092000
35	0,00087	0,0007277	0,000368	0,00092000
36	0,00093	0,0008110	0,000368	0,00092000
37	0,00101	0,0009054	0,000368	0,00092000
38	0,00110	0,0010125	0,000368	0,00092000
39	0,00121	0,0011342	0,000368	0,00092000

40	0,00133	0,0012728	0,000368	0,00092000
41	0,00147	0,0014309	0,000368	0,00092000
42	0,00162	0,0016115	0,000368	0,00092000
43	0,00180	0,0018184	0,000368	0,00092000
44	0,00201	0,0020556	0,000368	0,00092000
45	0,00225	0,0024360	0,000736	0,00184000
46	0,00252	0,0027980	0,000736	0,00184000
47	0,00284	0,0032060	0,000736	0,00184000
48	0,00320	0,0036660	0,000736	0,00184000
49	0,00361	0,0041820	0,000736	0,00184000
50	0,00408	0,0047590	0,000736	0,00184000
51	0,00462	0,0054050	0,000736	0,00184000
52	0,00525	0,0061230	0,000736	0,00184000
53	0,00596	0,0069220	0,000736	0,00184000
54	0,00677	0,0078080	0,000736	0,00184000
55	0,00771	0,0087880	0,00184	0,00460000
56	0,00878	0,0098690	0,00184	0,00460000
57	0,01001	0,0110590	0,00184	0,00460000
58	0,01141	0,0123650	0,00184	0,00460000
59	0,01302	0,0137970	0,00184	0,00460000
60	0,01485	0,0143220	0,00184	0,00460000
61	0,01696	0,0149470	0,00184	0,00460000
62	0,01936	0,0152210	0,00184	0,00460000
63	0,02210	0,0150560	0,00184	0,00460000
64	0,02523	0,0143670	0,00184	0,00460000
65	0,02880	0,0143670	0,00184	0,00460000

Las probabilidades I_x Abs y I_x Tot. se caracterizan porque están definidas en tres tramos de edades: 20-44, 45-54, 55-65 años. No así las probabilidades de I_x S.S., que a igual que las del modelo G82, son totalmente variables con la edad. Para ver mejor su evolución, procedemos a su representación gráfica.



Conclusiones

Seguidamente recogemos las principales conclusiones alcanzadas:

- Ambos métodos producen diferencias mínimas inferiores a 0.0001 por lo que son igualmente eficientes. No obstante, optamos por el método basado en la resolución exacta del sistema de ecuaciones diferencias de Chapman-Kolmogorov, por su mayor comodidad de implementación informática.
- En la anterior gráfica podemos apreciar que el modelo G82 se ajusta muy bien a la tabla Ix S.S. hasta los últimos años en los que sus probabilidades anuales dejan de crecer, a diferencia de lo que sucede en el modelo G82.

Las otras dos tablas de invalidación quedan claramente por debajo del modelo G82, existiendo entre ellas una evolución paralela en los 3 tramos de edades definidos.

Capítulo 9

Modelo de invalidez mixta

En este capítulo trataremos un modelo estocástico de invalidez mixta que se caracteriza por incluir prestaciones tanto para la invalidez temporal como la permanente. Su modelización estará basada en la aplicación de un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo.

Introduciremos el efecto de la duración de la invalidez sobre sus probabilidades de transición mediante un split de dicho estado que permita incorporar varios estados de invalidez, cada uno de ellos con una duración de la misma distinta. Finalizaremos el capítulo con una aplicación práctica del modelo propuesto en la que generaremos varias tablas de probabilidad.

1 Aproximación al problema

Una primera propuesta de modelización de una operación que combine prestaciones de invalidez temporal y permanente podría inspirarse en el modelo estocástico de invalidez temporal desarrollado en el capítulo 7. Para llevarla a cabo, definiríamos un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, que consideraría que la invalidez que excediera de una determinada duración sería permanente. Consecuentemente, la intensidad de transición de reactivación, $m_{x,z}^{ia}$, valdría 0, a partir de un determinado valor de z .

Desde un punto de vista estadístico y numérico, este planteamiento puede parecer demasiado ambicioso y complicado de llevar a la práctica, pues el número de probabilidades de transición a calcular, y el volumen de información a tratar parecen excesivos.

Para disponer de un modelo más sencillo que al mismo tiempo contemple la dependencia de las probabilidades del estado de invalidez respecto a su duración, podemos realizar un split del estado de invalidez: proceso que consiste en desdoblar el estado inicial de invalidez en varios estados atendiendo a la duración de la misma (**Pittaco, E. et al. (1997)**).

De esta forma, si en lugar del semiproceso estocástico de Markov inicialmente propuesto, utilizamos un proceso de Markov con un split del estado de invalidez, el tratamiento del modelo ganará en sencillez sin perder consistencia actuarial. Si, además, el proceso estocástico es discreto, la dificultad todavía será menor.

Por tal razón, dada la complejidad de una operación de invalidez mixta, hemos creído conveniente modelizarla a través de un proceso estocástico de Markov, discreto en el tiempo con un split del estado de invalidez. Con anterioridad, **Urciuoli, V. (1975)**, **Amsler, M.H. (1988)**, **ASTIN Nederland (1990)**, **Gregorius, F.K. (1993)** y **Wolthuis, H.(1994)** han llevado a cabo la puesta en práctica de este modelo.

2 Modelo teórico

Sea $\{S(x), x \in N\}$ un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo definido sobre el espacio de estados $E = \{a, i_1, i_2, \dots, i_j, i_{j+1}, m\}$. Se cumple que $\forall x \in N$ y $\forall s_t \in E$, las probabilidades de transición verifican la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Pr(S(x+1) = s_{x+1} / S(x) = s_x \wedge S(x-1) = s_{x-1} \wedge \dots \wedge S(0) = s_0) = \\ = \Pr(S(x+1) = s_{x+1} / S(x) = s_x) \end{aligned}$$

Con el objeto de introducir la dependencia de las probabilidades de transición del estado de invalidez respecto la duración de la misma, además de considerar los estados de actividad, 'a' y fallecimiento, m, definiremos una sucesión de estados de invalidez, ordenados según su duración.

i_1 : El asegurado lleva inválido menos de 1 año.

i_2 : El asegurado lleva inválido entre 1 y 2 años.

.....

i_j : El asegurado lleva inválido entre $j-1$ y j años.

i_{j+1} : El asegurado lleva inválido más de j años.

Consideramos que si la duración de la invalidez excede de j años, ésta es permanente. Consecuentemente $\{i_1, i_2, \dots, i_j\}$ son estados de invalidez temporal y i_{j+1} de invalidez permanente. En relación a las transiciones a registrar, el modelo considera las siguientes hipótesis:

- Si un asegurado se reactiva durante un determinado año, éste no puede invalidarse dentro del mismo año. De esta forma, se evitan transiciones anuales del tipo $i_z \rightarrow i_1$, siendo $z = 1, \dots, j+1$.

- Si durante un determinado año, el asegurado se invalida pero posteriormente fallecido dentro del mismo año, el modelo únicamente reconocerá la transición $a \rightarrow m$.
- De la misma forma si un asegurado se reactiva y fallece durante el mismo año, el modelo únicamente reconoce la transición $i \rightarrow m$.

Una vez definidas las características de los estados que forman el espacio de estados de la cadena de Markov, procedemos a su caracterización, primero a través de su matriz de transición y posteriormente de forma gráfica a través de su esquema de transiciones. La matriz de transición anual viene representada por la siguiente matriz estocástica:

$$P_{x+t} = \begin{pmatrix} p_{x+t}^{aa} & p_{x+t}^{ai_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & p_{x+t}^{am} \\ p_{x+t}^{i_1a} & 0 & p_{x+t}^{i_1i_2} & \dots & 0 & 0 & p_{x+t}^{i_1m} \\ p_{x+t}^{i_2a} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_{x+t}^{i_2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{x+t}^{i_ja} & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{x+t}^{i_ji_{j+1}} & p_{x+t}^{i_jm} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{x+t}^{i_{j+1}i_{j+1}} & p_{x+t}^{i_{j+1}m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las probabilidades no nulas de la matriz de transición reflejan los cambios de estados o transiciones entre las edades x y $x+1$ permitidas por el modelo:

p_x^{aa} : Probabilidad de permanecer activo.

$p_x^{ai_1}$: Probabilidad de invalidarse temporalmente.

$p_x^{i_z a}$: Probabilidad de reactivarse, siendo $z = \{1, \dots, j\}$.

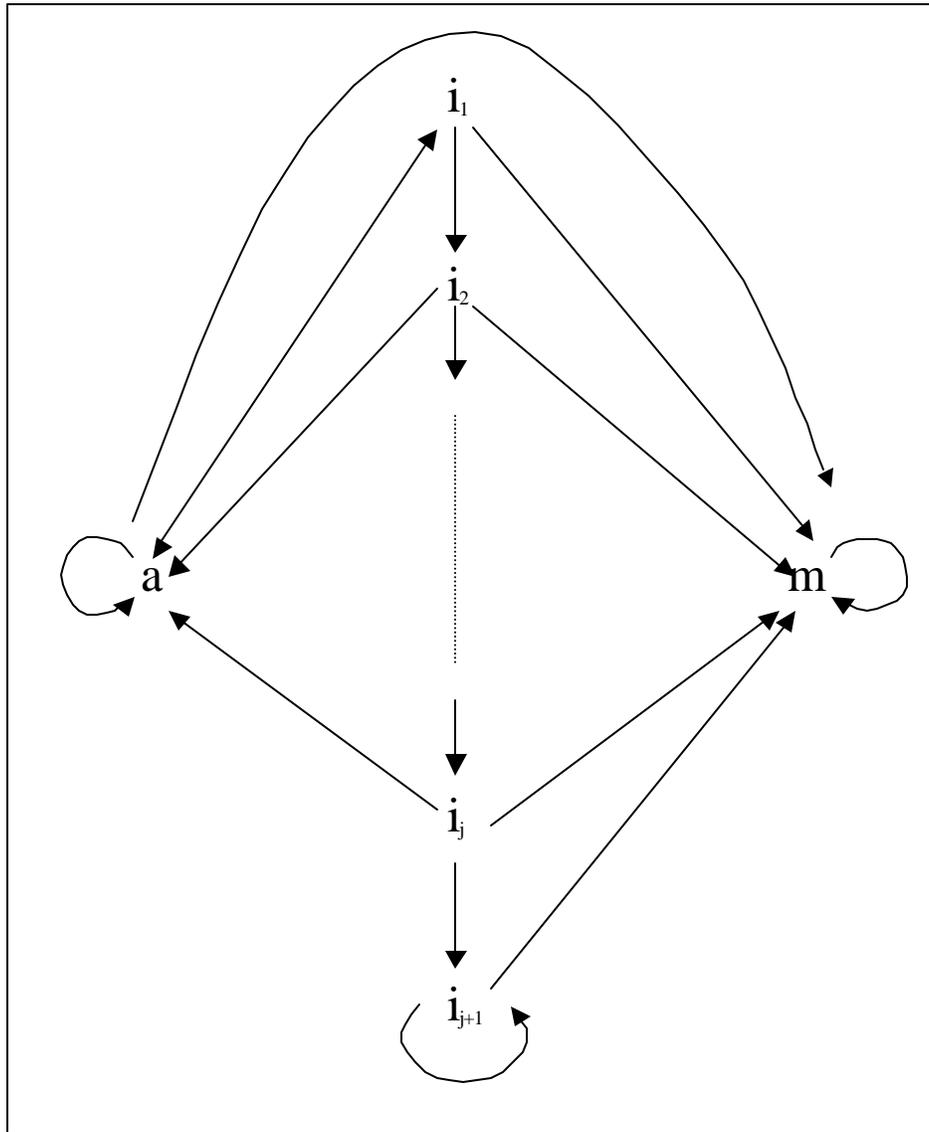
$p_x^{i_z i_{z+1}}$: Probabilidad de permanecer inválido temporal, siendo $z = \{1, \dots, j\}$.

$p_x^{i_j i_{j+1}}$: Probabilidad de invalidarse de forma permanente.

$p_x^{i_{j+1} i_{j+1}}$: Probabilidad de permanecer inválido permanente.

p_x^{am} : Probabilidad de transición de fallecer como activo.

$p_x^{i_z m}$: Probabilidad de transición de fallecer como inválido, $z = \{1, \dots, j+1\}$.



A efectos de favorecer la claridad de exposición de la tesis, tomamos como periodo de referencia el año. No obstante para operaciones de invalidez mixta de menor duración podríamos tomar un periodo menor (día, semana, mes, semestre, etc.), tal como así lo confirma **Urciuoli, V. (1975)**

3 Estimación y ajuste

Gregorius, F.K. (1993) estima las probabilidades anuales de transición por minimización de la suma ponderada de errores cuadrados. Destacamos de su propuesta, posteriormente adoptada por **Wolthuis, H.(1994)**, la sencillez de sus planteamientos e hipótesis.

- Para no dispersar la información muestral referente a la mortalidad, considera que la probabilidad anual de fallecimiento sólo depende de la edad del asegurado. La estimación así planteada no es problemática pues puede aplicarse cualquiera de los métodos de ajuste vistos en el capítulo 3.
- La estimación de las probabilidades anuales de invalidación, a igual que las de fallecimiento, no es especialmente difícil. Al respecto **Gregorius, F.K. (1993)** propone una función de ajuste exponencial.
- Las probabilidades anuales de reactivación son decrecientes respecto la edad y la duración de la invalidez. Ello impone al proceso de ajuste de $p_x^{i,a}$ las siguientes condiciones:

$$\forall z \leq j \text{ y } \forall x \Rightarrow \hat{p}_x^{i,z,a} > \hat{p}_x^{i,z+1,a} \quad (1)$$

$$\forall x > y \text{ y } \forall z \leq j \Rightarrow \hat{p}_x^{i,z,a} < \hat{p}_y^{i,z,a}. \quad (2)$$

Con el objeto de facilitar el cumplimiento de las anteriores restricciones **Gregorius, F.K. (1993)** utiliza una función de ajuste lineal distinta para cada estado i_z , no negativa y con pendiente negativa.

$$\hat{p}_x^{i,z,a} = \text{Max}\{\hat{a}_z - \hat{b}_z \cdot x, 0\} \quad z = 1, \dots, j$$

donde $\hat{a}_z \geq 0$ y $\hat{b}_z \geq 0$. La linealidad de las funciones de ajuste permite que la restricción (1) únicamente deba verificarse para las edades extremas de la investigación: x_0 y x_N . La negatividad de la pendiente de las funciones de ajuste asegura que las probabilidades anuales de reactivación sean decrecientes respecto la edad. Consecuentemente las restricciones inicialmente planteadas (1) y (2) quedan reducidas a:

$$\hat{a}_z \geq 0, \hat{b}_z \geq 0$$

$$\hat{a}_z - \hat{b}_z \cdot x_0 \geq \hat{a}_{z+1} - \hat{b}_{z+1} \cdot x_0 \quad \forall z = 1, \dots, j-1$$

$$\hat{a}_s - \hat{b}_s \cdot x_N \geq \hat{a}_{s+1} - \hat{b}_{s+1} \cdot x_N \quad \forall s = 1, \dots, j-1$$

Gregorius, F.K. (1993) plantea la optimización, de forma global, a partir de la siguiente función objetivo:

$$\sum_{z=1}^j \sum_{\forall x} u_x^{i_z} \cdot (\hat{a}_z - \hat{b}_z \cdot x - \hat{p}_x^{i_z^a})^2$$

donde $u_x^{i_z}$ representa el peso asignado a la probabilidad anual de reactivación del estado i_z y edad x y $\hat{p}_x^{i_z^a}$ el valor observado correspondiente. Una función de ajuste más compleja y con más parámetros dificulta el proceso de ajuste así planteado.

- **Wolthuis, H. (1994)** estima el resto de las probabilidades anuales: \hat{p}_x^{aa} , $\hat{p}_x^{i_z^{z+1}}$, $\hat{p}_x^{i_{j+1}^{j+1}}$ como probabilidades complementarias de cada una de las filas de la matriz de transición P_x :

$$\hat{p}_x^{aa} = 1 - \hat{p}_x^{a1} - \hat{p}_x^{am}$$

$$\hat{p}_x^{i_z^{z+1}} = 1 - \hat{p}_x^{i_z^a} - \hat{p}_x^{i_z^m} \quad z = 1, \dots, j$$

$$\hat{p}_x^{i_{j+1}^{j+1}} = 1 - \hat{p}_x^{i_{j+1}^m}$$

4 Valoración financiero-actuarial

Definimos dos tipos de renta de invalidez:

- Renta de invalidez temporal de una persona inicialmente activa y de edad x , anual, unitaria, diferida d años y temporal m años, pagadera por vencido mientras el asegurado se halle inválido temporal. Su valor actual actuarial se corresponde con la siguiente expresión.

$${}_{d/m}a_x^{ai} = \sum_{t=d+1}^{d+m} \sum_{z=1}^j {}_{/t}p_x^{ai_z} \cdot v^t$$

- Renta de invalidez permanente de una persona inicialmente activa y de edad x , anual, unitaria, diferida d años y temporal m años, pagadera por vencido mientras el asegurado se halle inválido permanente. Su valor actual actuarial queda recogido en la siguiente expresión.

$${}_{d/m}a_x^{ai_{j+1}} = \sum_{t=d+1}^{d+m} {}_{/t}p_x^{ai_{j+1}} \cdot v^t$$

Seguidamente, definimos tres clases de seguros relacionados con la invalidez:

- Seguro de invalidación temporal de una persona inicialmente activa de edad x , de cuantía unitaria, sin carencia y temporalidad de m años, cobrable al final del año en que tiene lugar la invalidación permanente. Seguidamente expresamos su valor actual actuarial.

$${}_{/m}A_x^{a:ai} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_{/t}p_x^{aa} \cdot p_{x+t}^{ai} \cdot v^{t+1}$$

- Seguro de una persona inicialmente activa de edad x , de cuantía unitaria, sin carencia y temporalidad de m años, cobrable por permanecer inválido un año más al final del año, siendo $z < j$. Su valor actual actuarial se corresponde con la siguiente expresión.

$${}_{/m}A_x^{aijz+1} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_{/t}P_x^{ai_z} \cdot P_{x+t}^{ijz+1} \cdot v^{t+1}$$

- Seguro de invalidación permanente de una persona inicialmente activa de edad x , de cuantía unitaria, sin carencia y temporalidad de m años, cobrable al final del año en que tiene lugar la invalidación permanente. Seguidamente, calculamos su valor actual actuarial.

$${}_{/m}A_x^{aij_{j+1}} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_{/t}P_x^{ai_j} \cdot P_{x+t}^{ij_{j+1}} \cdot v^{t+1}$$

De la misma forma, definimos los seguros de fallecimiento de personas inicialmente activas y de edad x .

- Seguro de fallecimiento como activo de cuantía unitaria, sin carencia y temporalidad de m años, cobrable al final del año en que tiene lugar la invalidación permanente. Recogemos su valor actual actuarial.

$${}_{/m}A_x^{a:am} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_{/t}P_x^{aa} \cdot P_{x+t}^{am} \cdot v^{t+1}$$

- Seguro de fallecimiento como inválido temporal de cuantía unitaria, sin carencia y temporalidad de m años, cobrable al final del año en que tiene lugar la invalidación permanente. Su valor actual actuarial se corresponde con la siguiente expresión.

$${}_{/m}A_x^{a:im} = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{z=1}^j {}_{/t}P_x^{ai_z} \cdot P_{x+t}^{i_zm} \cdot v^{t+1}$$

- Seguro de fallecimiento como inválido permanente de cuantía unitaria, sin carencia y temporalidad de m años, cobrable al final del año en que tiene lugar la invalidación permanente. Su valor actual actuarial se calcula como sigue.

$${}_{/m}A_x^{a:i_{j+1}m} = \sum_{t=0}^{m-1} {}_{/t}P_x^{a:i_{j+1}} \cdot P_{x+t}^{i_{j+1}m} \cdot v^{t+1}$$

Podemos recoger todos los seguros en la siguiente matriz.

$${}_{d/m}A_x = \begin{pmatrix} 0 & {}_{d/m}A_x^{a:i_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & {}_{d/m}A_x^{am} \\ {}_{d/m}A_x^{i_1^a} & 0 & {}_{d/m}A_x^{i_1^i} & \dots & 0 & 0 & {}_{d/m}A_x^{i_1^m} \\ {}_{d/m}A_x^{i_2^a} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & {}_{d/m}A_x^{i_2^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}_{d/m}A_x^{i_j^a} & 0 & 0 & \dots & 0 & {}_{d/m}A_x^{i_j^i} & {}_{d/m}A_x^{i_j^m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & {}_{d/m}A_x^{i_{j+1}^m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada elemento no nulo de la anterior matriz representa el valor actual actuarial de un seguro distinto definido para la transición que represente su posición.

ANEXO 9-1
Cálculo numérico de las
probabilidades de transición

Construimos una operación de invalidez permanente modelizada a través de un proceso estocástico de Markov discreto en el que introducimos un split en el estado de invalidez, considerando de esta forma estados de invalidez de diferente duración. Partiendo de unas probabilidades anuales supuestamente conocidas, generaremos varias tablas de probabilidad.

Probabilidades anuales

Utilizaremos las probabilidades anuales recogidas en el trabajo de **Amsler, M.H. (1988)**:

- $p_x^{ai} = 0.00002373 \cdot e^{0.1073 \cdot x}$
- $p_x^{am} = \begin{cases} 0.00106 & \text{si } x < 35 \\ 0.00003924 \cdot e^{0.09259 \cdot x} & \text{si } x \geq 35 \end{cases}$
- $p_x^{ia} = \begin{cases} 0.013 \cdot (50.6 - 0.8 \cdot x) & \text{si } z = 1 \\ 0.006 \cdot (50.6 - 0.8 \cdot (x-1)) & \text{si } z = 2 \\ 0.001 \cdot (50.6 - 0.8 \cdot (x+1-z)) & \text{si } 2 < z < 6 \\ 0 & \text{si } z \geq 6 \end{cases}$
- $p_x^{im} = \begin{cases} 0.0023 \cdot (7 + 0.666 \cdot x) & \text{si } z = 1 \\ 0.0015 \cdot (7 + 0.666 \cdot (x-1)) & \text{si } z = 2 \\ 0.0010 \cdot (7 + 0.666 \cdot (x+1-z)) & \text{si } z > 2 \end{cases}$

Cálculo de probabilidades anuales de invalidación y reactivación

x	p_x^{ai}
30	.00068
35	.00117
40	.00200
45	.00341
50	.00584
55	.00998
60	.01707

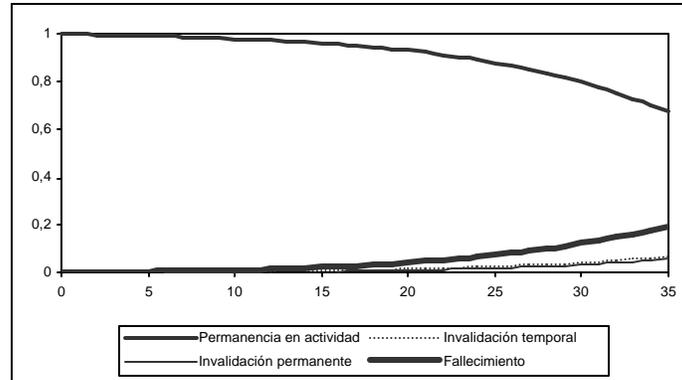
Cálculo de probabilidades anuales de reactivación

x	$p_x^{i_1^a}$	$p_x^{i_2^a}$	$p_x^{i_3^a}$
30	.34580	.16440	.02820
35	.29380	.14040	.02420
40	.24180	.11640	.02020
45	.18980	.09240	.01620
50	.13780	.06840	.01220
55	.08580	.04440	.00820
60	.03380	.02040	.00420

Tabla de probabilidades temporales

t	${}_t P_{30}^{aa}$	$\sum_{z=1}^5 {}_t P_{30}^{ai_z}$	${}_t P_{30}^{ai_6}$	${}_t P_{30}^{am}$
0	1	0	0	0
1	0,998257	0,000683	0	0,001060
2	0,996670	0,001169	0	0,002162
3	0,995080	0,001636	0	0,003284
4	0,993431	0,002145	0	0,004424
5	0,991715	0,002702	0	0,005583
6	0,989921	0,003036	0,000280	0,006763
7	0,987994	0,003410	0,000589	0,008008
8	0,985853	0,003830	0,000931	0,009386
9	0,983477	0,004300	0,001312	0,010911
10	0,980839	0,004827	0,001734	0,012599
11	0,977912	0,005418	0,002204	0,014467
12	0,974662	0,006079	0,002727	0,016532
13	0,971057	0,006818	0,003310	0,018815
14	0,967056	0,007644	0,003960	0,021339
15	0,962620	0,008567	0,004686	0,024127
16	0,957700	0,009597	0,005496	0,027207
17	0,952247	0,010745	0,006401	0,030606
18	0,946206	0,012023	0,007413	0,034358
19	0,939515	0,013448	0,008542	0,038496
20	0,932110	0,015030	0,009804	0,043056
21	0,923919	0,016785	0,011213	0,048083
22	0,914866	0,018730	0,012787	0,053617
23	0,904869	0,020882	0,014543	0,059705
24	0,893840	0,023258	0,016503	0,066399
25	0,881686	0,025875	0,018687	0,073752
26	0,868309	0,028751	0,021120	0,081819
27	0,853608	0,031903	0,023828	0,090661
28	0,837476	0,035346	0,026838	0,100340

29	0,819807	0,039093	0,030179	0,110920
30	0,800495	0,043156	0,033883	0,122465
31	0,779437	0,047540	0,037982	0,135041
32	0,756533	0,052246	0,042509	0,148713
33	0,731696	0,057265	0,047497	0,163541
34	0,704854	0,062582	0,052981	0,179584
35	0,676087	0,068031	0,058991	0,196890



Conclusiones

Destacamos las conclusiones más relevantes de los resultados obtenidos en el anexo:

- Las probabilidades anuales se estiman directamente de la información disponible. Tal como vimos en el capítulo 2, las probabilidades temporales del modelo se obtienen a partir del siguiente productorio matricial.

$$P_x(t) = \prod_{r=0}^t P_{x+r}$$

- A igual que sucedía en el modelo de invalidez temporal, la probabilidad anual de invalidez aumenta con la edad. La probabilidad anual de reactivación disminuye con la edad y especialmente con la duración de la invalidez.
- La probabilidad de invalidez temporal es superior a la de invalidez permanente.

TEMA III

REASEGURO

Partimos de un colectivo de asegurados que autogestiona la cobertura de los riesgos derivados de una operación con múltiples estados. Con el objeto de facilitar la explicación, asumiremos que a nivel teórico modelizamos dicha operación mediante un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo, tal como vimos en el tema I. A nivel práctico adoptaremos uno de los modelos de invalidez vistos en el tema II: el modelo de invalidez mixta.

Realizaremos un análisis del riesgo derivado de las desviaciones adversas de la siniestralidad a partir del cual propondremos la aplicación de un reaseguro que, considerando como única fuente de ingresos del colectivo las primas de sus miembros, garantice totalmente su solvencia: el reaseguro de diferencia de siniestralidad.

En primer lugar estudiaremos la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un colectivo cerrado. Posteriormente, extenderemos el análisis a un colectivo abierto a entradas de asegurados a lo largo de toda su existencia.

El tema se estructura en 3 capítulos:

- En el capítulo 10 explicaremos las principales modalidades de reaseguro vida utilizadas con mayor frecuencia en la práctica actuarial, tanto proporcionales como no proporcionales.
- El capítulo 11 desarrolla la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un colectivo cerrado. Explicaremos cómo calcular la prima de reaseguro y finalmente propondremos una estrategia óptima que minimice el coste total de la cobertura del colectivo: primas de la operación aseguradora más las primas de reaseguro.
- El capítulo 12 lleva a cabo la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un colectivo abierto en el que consideramos entradas de asegurados. Propondremos estrategia de actuación que permitan imputar los efectos beneficiosos generados por las entradas de los nuevos asegurados a las primas de reaseguro o, alternativamente, a las prestaciones de los asegurados.

Capítulo 10

Reaseguro de vida: Introducción y modalidades

En el presente capítulo realizaremos un estudio del reaseguro en el ramo de vida con carácter general. Con tal fin, definiremos en primer lugar qué entendemos por reaseguro y porqué la necesidad de su aplicación en el caso de una operación de vida. Seguidamente, realizaremos una revisión histórica del reaseguro, haciendo especial hincapié en su utilización en el ramo de vida.

Explicaremos las características y funciones que cumple el reaseguro de vida, las cuales vendrán dadas por la peculiar naturaleza de las operaciones aseguradoras de vida. Por último, estudiaremos las modalidades más importantes de reaseguro en este ramo, analizando sus ventajas e inconvenientes.

1 Introducción

La principal función del reaseguro es hacer frente al riesgo actuarial derivado de los aumentos imprevistos en las indemnizaciones. Éstos pueden venir dados por las siguientes causas no excluyentes entre sí:

- Concentración de riesgos derivada de la ocurrencia de un mismo suceso que afecte simultáneamente a varios asegurados a la vez.
- Fluctuaciones aleatorias en la siniestralidad debidas al reducido tamaño del colectivo asegurado (planes de pensiones, mutuas, etc).
- Alteraciones en variables externas, de carácter principalmente cualitativo, no contempladas en la estimación de las probabilidades pero que indirectamente pueden afectar a la incidencia de los riesgos asegurados: condiciones climáticas, alteraciones del orden social establecido, crisis económicas, etc.
- Utilización de tablas de probabilidades no ajustadas a las características del colectivo.

El riesgo actuarial derivado de la utilización de unas tablas de probabilidad inadecuadas, puede ser corregido de diferentes formas:

- Afectando las probabilidades mediante la aplicación de algún tipo de coeficiente corrector.
- Ajustando las probabilidades del colectivo a partir de una experiencia del mismo. Si el tamaño del colectivo es demasiado pequeño para que la estimación produzca resultados eficientes, agregaremos varios colectivos de características semejantes.

En general, el riesgo actuarial derivado de su aseguramiento puede ser contrarrestado mediante aplicación de algún tipo de reaseguro. Podemos definir el reaseguro como un contrato o instrumento por el cual una entidad aseguradora (reasegurador), toma a su cargo total o parcialmente un riesgo ya cubierto por otro asegurador (cedente), sin alterar lo convenido entre este y sus asegurados. El reasegurador desempeña una función técnica fundamental como es la de proteger a los aseguradores del riesgo de quiebra, al limitar la variabilidad de sus costes. Otras definiciones de reaseguro son las siguientes:

- **Dinsdale, W.A. (1963)** define reaseguro como una operación en la que un asegurador, traslada a otro asegurador (reasegurador) parte de un riesgo o responsabilidad aceptada.
- Para **Golding, C.E. (1965)**, el reaseguro constituye una operación por la cual un asegurador distribuye sus riesgos, cediendo parte de los mismos a otra u otras entidades reaseguradoras, con el objeto de reducir el volumen de las pérdidas a unos límites soportables por la entidad aseguradora.
- **Carter, R.L. (1979)** considera el reaseguro como una modalidad de seguro, en la medida en que lo que interesa al reasegurador es lo mismo que a los aseguradores, la cobertura de acontecimientos futuros e inciertos que producen pérdidas.

Más formalmente, define reaseguro como una modalidad de seguro de responsabilidades contractuales derivadas de los contratos de seguro directo o en el caso de retrocesión, de los contratos de reaseguro.

- Más recientemente, **Nieto de Alba, U. et al. (1993)** define el reaseguro como una componente del subsistema de estabilidad de la empresa aseguradora que se encuadra dentro de las medidas que pueden adoptarse para conseguir la solvencia del ente asegurador.

2 Antecedentes históricos

La utilización del reaseguro como instrumento de cobertura es tan antigua como el seguro mismo. Se desconoce exactamente, cuándo los suscriptores de seguros comenzaron a recurrir a la práctica reaseguradora. Es de suponer que los primeros aseguradores limitasen los riesgos suscritos a niveles plenamente asumibles por ellos mismos, sin necesidad de tener que reasegurar.

Los primeros tratados de reaseguro datan del siglo XIV. En particular cabe destacar como fecha pionera conocida, el 12 de julio de 1370, fecha de la que se conservan documentos sobre un contrato de reaseguro marítimo redactado en latín, que amparaba al asegurador de un barco de la parte más peligrosa del viaje entre Génova y Sluys.

Los documentos demuestran que el reaseguro en su sentido verdadero, era un procedimiento generalmente aceptado entre los suscriptores de seguros marítimos a finales del siglo XVII. Los primeros reaseguros fueron todos ellos de carácter facultativo (se reasegura caso a caso, previa emisión de la póliza, de tal forma que la cedente propone el reaseguro a la futura reaseguradora y ésta decide tomarlo o no) y para casos individuales.

En el siglo XIX empezaron a desarrollarse los primeros tratados de reaseguro obligatorios (acuerdos únicos para un período de uno o más años en virtud de los cuales, la cedente se obliga a ceder y la reaseguradora a aceptar en los términos del contrato, todos los seguros que realice la compañía cedente).

El creciente desarrollo del seguro a finales del siglo XIX y durante todo el siglo XX, hizo caer en desuso el método facultativo, en beneficio del reaseguro obligatorio. Inicialmente, los primeros reaseguros obligatorios estaban negociados sobre bases proporcionales. En relación a las modalidades de reaseguro no proporcionales: excess-loss y stop-loss, **Gerathewohl, K. (1993)** sitúa su origen en 1857 y 1861, respectivamente.

Localizamos el origen del reaseguro vida en la primera mitad del siglo XIX, coincidiendo con el aumento de la demanda de seguros de vida, que da lugar a la aparición de nuevas compañías de seguros de vida de cada vez mayor dimensión.

Hacia 1849 la práctica reaseguradora en vida empezó a extenderse entre compañías aseguradoras escocesas bajo la modalidad de reaseguro proporcional de prima de tarifa. Se conservan testimonios de tratados de reaseguros de vida de los años 1858 y 1865 suscritos con las reaseguradoras “Frankfuter Reinsurance” y “Suiza de Reaseguro” respectivamente.

En un principio, no existía una reglamentación única que regulase la actividad reaseguradora lo que generó problemas derivados de aplicación de tarifas de reaseguro diferentes, ocultación de información por parte de los aseguradores, etc. En 1849, un grupo de compañías escocesas de seguros de vida decidió poner fin a esta situación, firmando un convenio que regulaba las actividades del reaseguro y crear algunos procedimientos normalizados de general aceptación.

Hasta aquel momento los reaseguros de vida eran contratados únicamente de manera facultativa y el pacto incluía, entre otros aspectos, las tarifas de primas, retenciones y rescates. En 1873 se cerró un acuerdo adicional que regulaba las retenciones, primas extraordinarias y escalas de comisiones a aplicar. El acuerdo fue revisado y ampliado en 1887 para tratar con mayor amplitud los rescates.

En 1900, 46 compañías de seguros de vida británicas firmaron un pacto semejante al escocés. Este pacto, denominado “Acuerdo sobre el reaseguro facultativo de vida” regulaba los procedimientos de los reaseguros de vida contratados de manera facultativa.

El ánimo que perseguía el acuerdo era lograr que el reasegurador compartiera la fortuna de la compañía cedente, debiendo ser la posición de ésta respecto al reasegurador, análoga a la de un asegurado de vida con su entidad aseguradora. En este acuerdo se contemplaba la circunstancia de que el reaseguro pudiera contratarse en los términos y

condiciones de la cedente o del reasegurador. Paralelamente, se acuerda conceder a la cedente el derecho a rescindir el reaseguro, aunque la póliza original continúe en vigor.

En Inglaterra, el reaseguro de vida tomó un impulso definitivo con la compañía “Mercantil and General” que en 1927 introdujo el sistema de tarificación de primas de riesgo.

A lo largo del siglo XX, se han utilizado en la práctica aseguradora de vida modalidades de reaseguro no proporcionales (excess-loss y stop-loss) aunque no con tanto éxito como en el negocio asegurador de no vida. Inicialmente, la finalidad de su utilización era amortiguar los efectos de los grandes siniestros.

Posteriormente su aplicación fue extendiéndose a cualquiera cartera de siniestros, convirtiéndose en una forma de asegurar la estabilidad futura del asegurador y por consiguiente de limitar sus pérdidas.

Al aumentar el riesgo a que están expuestas las aseguradoras, debido a la acumulación de posibles pérdidas por accidentes o desastres naturales, los reaseguros no proporcionales han pasado a ser cada vez más solicitados con la finalidad de evitar o limitar tales pérdidas.

En la actualidad, la necesidad de reducir gastos administrativos ha motivado que los reaseguros facultativos fueran sustituidos por contratos automáticos u obligatorios, de modo que la mayor parte de los reaseguros de vida se realizan con compañías especializadas en reaseguro.

Tal como recoge **Nieto de Alba, U. et al. (1993)**, los resultados deficitarios de los reaseguros han obligado no sólo a tomar medidas severas de restricción por parte de los reaseguradores profesionales, sino también a adoptar en los mercados de reaseguros nuevas fórmulas contractuales.

3 Funciones y características del reaseguro vida

Las características del reaseguro en vida provienen de la naturaleza de las correspondientes operaciones aseguradoras; a continuación citamos las más reseñables a nuestro entender

- La duración de la cobertura proporcionada por el reaseguro debe coincidir con la duración de la operación aseguradora de vida. Normalmente, las operaciones de vida se contratan a medio-largo plazo, lo que significa que la cobertura del reaseguro también tiene que ser a medio-largo plazo.

Si la vigencia del reaseguro fuese menor que la de la operación aseguradora, al finalizar la misma, el asegurador o bien perdería la misma o bien debería renegociar las condiciones del contrato de reaseguro a un nuevo precio: si la siniestralidad real respecto la esperada hubiera aumentado, el reasegurador podría solicitar un incremento en el precio de la renovación del reaseguro. Todo ello en su conjunto, crea una incertidumbre no deseada por el asegurador.

- Todas las operaciones de vida tienen una componente de ahorro (capitalización de las primas de ahorro) y otra de riesgo (capital en riesgo). Por ello, el capital reasegurado no necesariamente debe coincidir con la suma asegurada, sino que también puede relacionarse con el capital en riesgo.

Esta distinción entre capital en riesgo y suma asegurada resulta especialmente importante en contratos de seguro a prima única, en los que el capital de riesgo es sustancialmente menor que la suma asegurada.

Las principales funciones que cumple el reaseguro vida son éstas:

- Como en cualquier otra operación reaseguradora y con el objetivo final de conseguir la estabilización técnica de la empresa aseguradora, la aplicación del reaseguro busca limitar las fluctuaciones de siniestralidad en la cartera retenida por el asegurador y mantener una cartera asegurada más homogénea.
- Proteger al asegurador de riesgos particulares, como la invalidez, que por sus características singulares e incidencia irregular, resultan especialmente difíciles de asegurar.
- Aportar financiación al asegurador. El reasegurador puede contribuir a financiar el negocio de la empresa aseguradora vía comisiones o cláusulas que se establezcan al respecto. En este sentido, la utilización del reaseguro contribuye a extender el volumen de negocios del asegurador.
- Suministrar asesoramiento técnico y servicios de gestión al asegurador.

4 Modalidades de reaseguro proporcional

Las modalidades de reaseguro proporcionales o de sumas se caracterizan porque el reasegurador recibe una cierta proporción acordada de la prima original, pagando la misma proporción de todas las pérdidas.

Esta modalidad de reaseguro es la más utilizada en el ramo de vida porque proporciona una cobertura a medio-largo plazo que es la duración más frecuente de las operaciones de vida.

Los reaseguros en vida realizados bajo modalidades proporcionales, se caracterizan por ser incancelables por las partes contratantes mientras los riesgos asegurados sigan vigentes. Es decir, la cesión del riesgo al reasegurador no puede cancelarse sino al

término del mismo por anulación, rescate o vencimiento de la póliza. Pueden establecerse casos particulares en los que exista la posibilidad de rescindir el reaseguro, tales como por ejemplo modificaciones de la póliza.

El reaseguro proporcional garantiza un completo reparto de los resultados entre asegurador y reasegurador a lo largo de la duración de toda la operación, dado que la distribución de riesgos permanece constante hasta la finalización de la vigencia de la póliza. Ello facilita el acuerdo y la cooperación entre ambos.

En el resto de epígrafe explicaremos las particularidades que presentan las principales modalidades de reaseguro proporcionales aplicadas en operaciones de vida: reaseguro de prima tarifa o a condiciones originales, reaseguro a prima de riesgo.

4.1 Reaseguro a prima de tarifa

La modalidad de reaseguro a prima de tarifa o a condiciones originales se caracteriza porque el reasegurador, a cambio de aceptar la responsabilidad de la parte convenida de un seguro, recibe una parte proporcional de las primas originales.

Esta modalidad de reaseguro está basada en un “coaseguro” de los riesgos contratados por el asegurador dado que el reasegurador participa directamente en la cobertura y gestión de dichos riesgos juntamente con el asegurador.

El reasegurador queda obligado a constituir las provisiones matemáticas y hacer frente a todos los desembolsos derivados de los pagos de los siniestros, rescates y vencimientos de las pólizas, en las proporciones reaseguradas.

Dependiendo básicamente de las normativas de cada país, el reasegurador puede conservar el derecho de disponer libremente de la provisión matemática constituida para cubrir la proporción del riesgo reasegurado o bien verse obligado a cederla al asegurador para que sea éste último quien disponga de ella efectivamente.

- Si el reasegurador dispone libremente de la provisión matemática, éste participa en la cobertura del riesgo de la mismas forma y en las mismas condiciones que lo hace el asegurador.

La ley puede limitar la libertad del reasegurador, obligándole a invertir los fondos destinados a cubrir la provisión matemática en depósitos considerados de poco riesgo y de fácil realización.

- En caso de que el reasegurador esté obligado a ceder al asegurador la provisión matemática constituida por el reaseguro aceptado, al asegurador dispondrá de ella juntamente con la provisión por él mismo establecida.

Por norma general, el asegurador retribuye al reasegurador por la cesión de su provisión matemática, con parte de la rentabilidad generada por ésta, conservando él mismo el resto de rentabilidad obtenida. Particularmente en épocas de inflación, el asegurador utiliza este exceso de rentabilidad para cubrir los gastos de gestión y administración en los que incurre. **Gerathewohl, K. (1993)** se refiere a esta modalidad particular de reaseguro de prima de tarifa con el nombre de coaseguro modificado.

Resulta usual en el coaseguro modificado el pago a la cedente de comisiones otorgadas por el reasegurador, que sirven para financiar el esfuerzo comercial del asegurador (pagar las comisiones de los agentes) . Por ello, el coaseguro modificado se utiliza muchas veces como fórmula para extender y desarrollar el negocio asegurador de vida. Las comisiones pagadas por el reasegurador suelen ser mucho más elevada durante el primer año que en los siguientes.

Los numerosos factores y los largos períodos que se tienen que considerar exigen cálculos actuariales muy complejos y sumamente laboriosos que implican un gran número de variables y magnitudes actuariales: prima de reaseguro, prestaciones de la operación aseguradora, provisiones matemáticas, comisiones, interés fijo a pagar al reasegurador y fijado por el asegurador, gastos de gestión tanto del asegurador como del reasegurador, tablas de probabilidades, etc.

La gestión de esta modalidad de reaseguro resulta sumamente laboriosa dado que deben fijarse las comisiones otorgadas cada año por el reasegurador a favor del asegurador. Asimismo, el asegurador debe mantener informado periódicamente al reasegurador sobre todo lo concerniente a las pólizas individuales y al total de la cartera afectada por el reaseguro (describir el riesgo, tener acceso a las primas y comisiones del reaseguro).

Los reaseguros a prima de tarifa se establecen mediante contratos de cuota parte o de excedentes, siendo ésta última modalidad la más usual.

4.1.1 Reaseguro a prima de tarifa a cuota parte

El reaseguro a cuota parte es la modalidad de reaseguro más sencilla. En virtud de su aplicación, se transfiere al reasegurador un coeficiente preestablecido de la cartera del asegurador o bien de los riesgos asumidos por éste. Este coeficiente sirve asimismo para determinar la participación del reaseguro en las indemnizaciones, gastos y constitución de reservas.

Si denotamos por k , siendo $0 < k < 1$, la cuota de retención de la aseguradora y por tanto $(1-k)$ la cuota cedida en reaseguro, para una suma asegurada S tenemos:

- $k \cdot S$ es asumido por la entidad aseguradora (cedente).
- $(1-k) \cdot S$ irá a cargo del reasegurador.

Las principales ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son las siguientes:

- Sencillez de cálculo de la prima de reaseguro que redundará en unos bajos gastos de gestión y administración.
- El reasegurador, al recibir una parte de todos los riesgos, tendrá una cartera equilibrada.

Los inconvenientes de los contratos a cuota parte son los siguientes:

- No logra reducir las fluctuaciones de los resultados.
- Priva al asegurador de una suma de primas nada despreciable y de los consiguientes beneficios que podrían derivarse de la misma.
- Presenta un riesgo grave en caso de primas insuficientes.

Los contratos cuota parte, en general, son utilizados para reasegurar planes de seguros colectivos de vida, porque en estos casos, al reasegurar una cuota parte de la totalidad del seguro, la cartera de riesgos reasegurada es equilibrada y en consecuencia el reasegurador evita una selección adversa de riesgos.

4.1.2 Reaseguro de prima de tarifa por excedentes

El reaseguro de excedentes es una modalidad de reaseguro proporcional en la que el reasegurador acepta cierta participación en un riesgo, cobrando una proporción equivalente de las primas e indemnizando los siniestros en la misma proporción.

Se diferencia del reaseguro cuota parte en que el cedente reasegura únicamente aquella parte de los riesgos asegurados que superen su pleno de retención. Si representamos la suma asegurada de un determinado riesgo γ como S_i y el pleno de retención como M . La cuota de retención de la cedente k para el riesgo γ viene dada por:

$$k_i = \begin{cases} 1 & \text{si } S_i \leq M \\ \frac{M}{S_i} & \text{si } S_i > M \end{cases} \quad (1)$$

siendo la cuota cedida al reasegurador:

$$1 - k_i = \begin{cases} 0 & \text{si } S_i \leq M \\ 1 - \frac{M}{S_i} & \text{si } S_i > M \end{cases} \quad (2)$$

Por tanto, el reaseguro de excedentes no es más que un reaseguro de cuota parte con cuota variable. La principal ventaja que ofrece esta modalidad de reaseguro es que permite homogeneizar la cartera de pólizas retenida por el asegurador. En su contra, pesan estos inconvenientes:

- La cartera de los riesgos reasegurados puede hallarse desequilibrada
- Los costes de administración de los contratos de excedentes, tanto de la compañía cedente como del reasegurador, suelen ser mayores que en el reaseguro cuota parte, ya que la compañía necesita comparar las sumas aseguradas de cada riesgo suscrito con su límite de retención, para calcular qué cantidad ceder.
- La modalidad de excedentes a igual que la de cuota parte no suministran una protección perfecta contra la acumulación accidental de siniestros.

Por norma general, los reaseguros de vida a condiciones originales se establecen mediante contratos de excedentes. Los seguros colectivos de vida no se reasegulan a través de esta modalidad porque los riesgos cedidos al reasegurador tenderían a concentrarse en los miembros más antiguos y o menos saludables integrados en el colectivo.

4.2 Reaseguro basado en la prima de riesgo

Esta modalidad ha sido diseñada para cubrir el riesgo de muerte anual al que está sometido la cedente en las operaciones de seguros. No obstante, su aplicación puede generalizarse a cualquier otro seguro, como por ejemplo un seguro por invalidación.

Esta modalidad se caracteriza porque el reasegurador, a cambio de aceptar la responsabilidad de la parte convenida del capital en riesgo, recibe una parte proporcional de las primas de riesgo. En caso de registrarse la contingencia asegurada, el reasegurador participa en la indemnización en esa misma proporción.

En esta modalidad de reaseguro el capital reasegurado en t , que representamos Z_t puede definirse de diferentes formas:

$$Z_t = R_t$$

$$Z_t = (1 - k) \cdot R_t$$

$$Z_t = R_t - M$$

donde M representa el pleno de retención de la cedente, S la suma asegurada, R_t el capital de riesgo en el año t y k la cuota de retención del asegurador. La prima de reaseguro en t , que designamos por Π_t , asociada a un asegurado de edad x , suponiendo distribución uniforme de la transición $E_j \rightarrow E_k$, se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$\Pi_t = p_x^{jk} \cdot Z_t \cdot (1+i)^{-t} \quad (3)$$

donde i representa el tipo de interés técnico, p_x^{jk} la probabilidad de transición $E_j \rightarrow E_k$. El método de la prima de riesgo presenta dos tipos de desventajas con respecto al reaseguro de prima de tarifa:

- La continua variación en el tiempo que experimentan tanto los capitales en riesgo como las primas de riesgo exige que la prima de reaseguro se revise periódicamente. Por otra parte, para que la gestión del reaseguro sea eficiente, el asegurador debe informar al reasegurador de la evolución de cada una de las pólizas cedidas: describir el riesgo, tener acceso a las primas y a las comisiones del reaseguro. Todo ello representa un encarecimiento de la administración y gestión del reaseguro.
- Los reaseguradores no suelen otorgar comisiones por los reaseguros sobre las primas de riesgo, porque la comisión pagada a los agentes sobre las primas originales no influye directamente sobre el cálculo de las tarifas de la prima de riesgo.

- El método de reaseguro de la prima de riesgo exige que cada año se tenga que calcular de nuevo la prima de reaseguro, para tener en cuenta las variaciones en el riesgo que ha sido reasegurado. Ello encarece y dificulta la gestión.

5 Modalidades de reaseguro no proporcional

Las modalidades de reaseguro no proporcionales, también llamadas por **Ammeter, H. (1955)** semicolectivas o completamente colectivas, según se trate del excess-loss o el stop-loss respectivamente, se caracterizan porque la participación del reasegurador en las indemnizaciones no se realiza, tomando como referencia su participación respectiva en la prima, sino sobre una base determinada por la cuantía de la reclamación.

Tal como recoge **Sarrasí, F.J. (1993)**, cabe hacer referencia a la noción de reclamación, cuya interpretación es distinta según consideremos el reaseguro excess-loss o el stop-loss:

- En la modalidad de excess-loss, entendemos por reclamación la cantidad a pagar como consecuencia de la ocurrencia de un siniestro asegurado.
- En la modalidad de stop-loss, la reclamación coincide el importe total de las indemnizaciones correspondientes al total de los siniestros acaecidos en un cierto período de tiempo para el conjunto de los riesgos reasegurados.

Los objetivos que se desean conseguir con las modalidades no proporcionales son, por un lado evitar el riesgo derivado de la acumulación de siniestros y por otro lado reducir las cargas administrativas que llevan consigo las modalidades proporcionales.

Las modalidades de reaseguro no proporcional no ofrecen una cobertura a medio-largo plazo, normalmente exigida por las operaciones de vida, porque la prima de reaseguro debe calcularse periódicamente para así reflejar la variación del colectivo objeto de cobertura cuya composición condiciona la prima de reaseguro. Esto provoca, a

diferencia de las modalidades de reaseguro proporcionales, una incerteza en cuanto al coste futuro del reaseguro.

Por todo ello, a pesar de que la popularidad de las formas de reaseguro no proporcional se ha extendido considerablemente en los mercados de no vida, no ha sucedido lo mismo en vida donde las modalidades proporcionales siguen siendo las más utilizadas. Las modalidades de reaseguro no proporcional que estudiaremos en los siguientes subepígrafes son el excess-loss y el stop-loss.

5.1 Reaseguro de Excess-loss

El reaseguro de Excess-loss es una modalidad de reaseguro no proporcional en virtud de la cual el reasegurador cubre aquella parte del siniestro que excede del pleno fijado por la cedente para cada siniestro.

A diferencia de la modalidad de excedentes, la cuantía del excedente viene dada a posteriori por referirse a la cantidad del siniestro que excede del pleno por siniestro y no a la suma asegurada.

- Si $X \leq M$ no hay reaseguro, todo va a cargo del asegurador directo.
- Si $X > M$ hay reaseguro y $(X - M)$ es asumida por el reaseguro.

siendo X la cuantía de un siniestro determinado. La prima pura de reaseguro se obtiene a través de la función de distribución del coste por siniestro de la entidad aseguradora que representaremos como $V(X)$.

$$\Pi = \bar{n}_{xL} \cdot \int_M^{\infty} (X - M)^+ dV(X) \quad (4)$$

donde \bar{n}_{xL} es el número medio de siniestros asociados a la cesión de excess-loss. Las ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- La modalidad de reaseguro de excess-loss resulta relativamente fácil de administrar, al ser muy raras las reclamaciones que superan las cifras de retención normalmente utilizadas.
- Como el reasegurador no indemniza los siniestros pequeños y más frecuentes, cuyo coste es inferior al límite más bajo establecido por el reaseguro de excess-loss, la cedente retiene por cuenta una proporción más elevada de las primas brutas suscritas.
- Reduce la variabilidad del coste de los siniestros para la cedente con respecto a las modalidades proporcionales.

Las desventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- El reaseguro de excess-loss protege a la cedente principalmente contra la gravedad de los siniestros, pero no contra la frecuencia de los mismos. En particular si éstos se dan por debajo del límite de propia retención que ha elegido el cedente.
- No cubre el riesgo de ruina de la empresa.
- El reaseguro excess-loss, a igual que el stop-loss, contribuye en menor medida a financiar la actividad aseguradora de la cedente que las modalidades de reaseguros proporcionales. Es más, generalmente la cedente tendrá que pagar la prima de reaseguro en depósito antes de cobrar las primas correspondientes al año o período de cobertura. El reasegurador, para paliar parcialmente esta circunstancia, cobra una prima en depósito inferior a la prima definitiva prevista.

El reaseguro Excess-loss resulta especialmente recomendable en ciertas operaciones de vida en las que la suma asegurada no es fija:

- Operaciones definidas sobre varias cabezas. En este caso, el reasegurador protege a la cedente de siniestros múltiples derivados de un mismo evento, que afecta simultáneamente a un mínimo de vidas (usualmente tres o más de tres), y excedan de un límite determinado previamente por el asegurador. El reasegurador pagará el exceso hasta llegar al límite máximo establecido.

En este caso, el reaseguro afecta conjuntamente a varios asegurados. Por tal motivo, el excess-loss también es conocido como reaseguro semicolectivo.

En este tipo de contratos suelen fijarse ciertas limitaciones referentes a la concentración de riesgos: número máximo de vidas aseguradas en el caso que se reasegure planes de pensiones o seguros colectivos, causas determinantes del siniestro (suelen estar excluidos los riesgos originados por guerra, motín y riesgos nucleares, además de los que se establezcan en el contrato).

- Rentas en las que el período de pago resultado indeterminado porque depende de la supervivencia o duración del evento asegurado. Un ejemplo de este tipo de operación sería una renta de invalidez. En tal caso el asegurador asume el pago total de la renta de invalidez hasta alcanzar un fecha límite o una cuantía máxima; el resto se traspasa al reasegurador.

5.2 Reaseguro de Stop-loss

El reaseguro de stop-loss se define como una modalidad de reaseguro no proporcional en donde el reasegurador se obliga a cubrir total o parcialmente el montante de las indemnizaciones correspondientes a un período de tiempo dado, siempre y cuando éste supere un determinado límite o bien, que la relación entre siniestros y primas del período considerado supere un coeficiente preestablecido. Por el hecho de referirse a toda la cartera en su conjunto también se le llama reaseguro totalmente colectivo.

La prima pura de reaseguro stop-loss, a diferencia del excess-loss vendrá dada por la función de distribución del coste total $F(Z)$.

$$\Pi = E \left[(Z - M)^+ \right] = \int_M^{\infty} (Z - M) \cdot dF(Z) \quad (5)$$

siendo Z la variable asociada al montante total de las indemnizaciones. Un contrato de stop-loss extiende su cobertura a toda la cartera y a todo tipo de riesgo. Por ello, muchos autores coinciden en opinar que el reaseguro de stop-loss proporciona la cobertura óptima desde el punto de vista del asegurador.

Gerathewohl, K. (1993) recomienda la aplicación del reaseguro stop-loss en los siguientes casos:

- En aquellas clases de negocios o mercados en los cuales resulte sumamente complicado elaborar o aplicar tablas de probabilidad suficientemente fiables por lo que cabe esperar que existan fluctuaciones importantes.
- Aseguradores que deseen incrementar su retención de cartera hasta niveles tan elevados que pongan en peligro su propia estabilidad. En esta categoría incluiríamos los aseguradores jóvenes o recién ubicados en el mercado.

Las ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- Cubre la entidad aseguradora de las fluctuaciones provocadas, tanto por grandes siniestros como por un gran número de siniestros pequeños, evitando de esta forma la desventaja del excess-loss.
- Es la única fórmula de reaseguro que elimina el riesgo de ruina de la empresa.

La gestión y aplicación del reaseguro stop-loss puede presentar los siguientes inconvenientes:

- Dificultades técnicas derivadas del gran número de cálculos actuariales y estadístico que comporta la aplicación del stop-loss. Al respecto, destacamos la dificultad que entraña estimar la función de distribución de las pérdidas totales anuales del asegurador.
- En el contrato de stop-loss el reasegurador puede limitar la cantidad máxima del exceso de pérdida que está dispuesto a asumir, retornando al asegurador toda la pérdida que supere esta cuantía.

Para que la cobertura mediante stop-loss sea efectiva este límite ha de ser considerablemente alto, lo cual supone un encarecimiento de la operación del reaseguro que muchas veces impedirá que el reaseguro de la misma se realice mediante un contrato stop-loss.

- La cobertura stop-loss excluye algunos riesgos agravados que no se prestan a un tratamiento estadístico, tales como siniestros causados por actos de guerra.
- El reaseguro stop-loss, a igual que el excess-loss, rompe el equilibrio de riquezas que existe en el reaseguro proporcional (asegurador y reasegurador participan en la misma proporción de los ingresos vía primas y los gastos vía pago de siniestros). Esto provoca problemas y tensiones entre asegurador y reasegurador.

6 Otras modalidades de reaseguro

En este epígrafe vamos a describir dos modalidades de reaseguro que no pueden considerarse ni proporcionales ni no proporcionales: reaseguro de riesgo de ruina y reaseguro de diferencia de siniestralidad. Estas modalidades están pensadas para ser aplicadas en colectivos.

6.1 Reaseguro de riesgo de ruina

Esta modalidad de reaseguro se debe a **Amsler, M.H. (1991)** y tiene como objetivo reasegurar el riesgo de ruina del asegurador provocado por las fluctuaciones aleatorias de los siniestros. Esta modalidad de reaseguro está pensada sobre todo para planes de pensiones, donde el riesgo de ruina es mayor si el número de partícipes que lo forman no es muy elevado.

Amsler, M.H.(1991) define las provisiones de fluctuación o de estabilización del año t , representadas como R_t , a partir de la siguiente expresión:

$$R_t = R_0 + t \cdot P_t - \sum_{s=1}^t X_s \quad (7)$$

donde

X_t : Coste anual de siniestros asociados al periodo t .

P_t : Volumen de primas anuales asociadas al periodo t .

R_0 Provisión de fluctuación inicial.

La modalidad de reaseguro de riesgo de ruina tiene como objetivo cubrir las contingencias originadas por las siguientes situaciones:

- Durante la duración del contrato, la entidad entra en situación de ruina en el periodo t , es decir $R_t < 0$. El reasegurador reembolsará, a la cedente, al año siguiente un préstamo de cuantía $\|R_t\|$.

- Al finalizar el contrato (al cabo de n periodos), la provisión de fluctuación es inferior a la que había inicialmente. En tal caso, el reasegurador dotará los fondos necesarios para que $R_n = R_0$.

La prima de reaseguro se obtendrá a partir de la siguiente expresión:

$$\Pi = i' \cdot \sum_{t=0}^{n-1} E(\|R_t^-\|) \cdot v^t + E[(R_0 - R_n)^+] \cdot v^n \quad (6)$$

donde:

i' : tipo de interés del préstamo

R_t^- : cantidad negativa de la provisión de fluctuación en t .

v^t : factor financiero de descuento al tipo de interés técnico i .

El primer sumando de la expresión (6) refleja en términos esperados la carga financiera derivada de los préstamos otorgados por la entidad reaseguradora a la cedente. El segundo sumando expresa en términos esperados la dotación de fondos llevada a cabo por el reasegurador al final de la operación.

6.2 Reaseguro de diferencia de siniestralidad

Esta modalidad de reaseguro ha sido introducida por **Sarrasí, F.J. (1993)** y **(1995)**. El Reaseguro de diferencia de siniestralidad es una modalidad de reaseguro en la que el reasegurador se compromete a cubrir periódicamente las provisiones matemáticas, los capitales de riesgo y los márgenes de solvencia que pudieran establecerse.

En esta modalidad, el cálculo de la prima de reaseguro se fundamenta en el estudio de la distribución de probabilidad de las siguientes variables aleatorias:

- La variable aleatoria \mathbf{x}_c^{pr} que representa el valor actual financiero de las prestaciones a satisfacer por parte del reasegurador del colectivo C . Sus realizaciones dependerán fundamentalmente de la evolución prevista de estado de las personas integrantes del colectivo y del tipo de interés técnico utilizado por la entidad reaseguradora.
- La variable aleatoria \mathbf{x}_c^P que representa el valor actual financiero de las primas de reaseguro que abona el colectivo C . A igual que en la variable aleatoria anterior dependerá de la evolución prevista del colectivo y del tipo de interés técnico aplicado por el reasegurador.
- La variable aleatoria \mathbf{x}_c^L que representa el valor actual financiero de la pérdida del reasegurador. Se obtiene como diferencia de las anteriores.

$$\mathbf{x}_c^L = \mathbf{x}_c^{pr} - \mathbf{x}_c^P \quad (8)$$

En esta modalidad de reaseguro resulta primordial conocer la evolución estocástica del colectivo, no únicamente en términos esperados sino en términos de su distribución de probabilidad. Como la obtención de la misma resulta tan sumamente complicada, por el número tan elevado de convoluciones que exige considerar, el problema se soluciona por simulación de Montecarlo.

La aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad resulta ideal en colectivos que gestionen de forma autosuficiente la cobertura de los riesgos que afectan a sus miembros.

Capítulo 11

Reaseguro de Diferencia de Siniestralidad aplicado en Colectivos Cerrados con Múltiples estados

En este capítulo, vamos a plantear la aplicación de la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad a un colectivo cerrado sobre el que se definen múltiples estados.

Para su estudio, asumiremos una serie de hipótesis que enunciaremos al principio del capítulo. Seguidamente, explicaremos las peculiaridades del proceso de simulación que exige la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad a un colectivo con múltiples estados.

Desarrollaremos las diferentes etapas por las cuales transcurre la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un colectivo con múltiples estados, hasta finalmente llegar a obtener la prima pura de reaseguro. Completaremos el capítulo con un anexo, en el que desarrollamos una aplicación numérica en la que cuantificaremos diferentes aspectos concernientes a la puesta en práctica del reaseguro de diferencia de siniestralidad.

1 Hipótesis y características de la operación aseguradora

Sea un colectivo cerrado¹ C formado por n_c asegurados, siendo $Card(C) = n_c$, sobre el cual definimos una operación aseguradora con múltiples estados en el espacio de estados $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$. A efectos de simplificar su tratamiento formal y estudio, supondremos las siguientes hipótesis:

- La operación con múltiples estados está modelizada como un proceso estocástico discreto en el tiempo con periodos anuales. Trataremos cada uno de los asegurados integrantes de C como una realización independiente del proceso estocástico. Supondremos que en el origen todos los asegurados se encuentran en el estado inicial, E_1 .
- Las tablas o funciones de probabilidad de transición utilizadas están ajustadas a las características del colectivo. Su evolución esperada se adapta a las mismas.
- El tipo de interés técnico utilizado es conocido y lo representaremos como I_T . Supondremos que el tipo de interés técnico es igual o ligeramente inferior a la rentabilidad que generan los fondos propios del colectivo que simbolizamos por I_F y cuyo valor asumiremos que viene dado por el tipo de interés de mercado. El tipo de interés técnico utilizado por el reasegurador, I_R , no necesariamente debe coincidir con el utilizado por el colectivo C .
- La operación aseguradora seguirá en vigor hasta la misma extinción del colectivo que tendrá lugar m años después de su constitución.
- La única vía de financiación de la cobertura de riesgos con que cuenta el colectivo viene dada por las primas satisfechas por sus asegurados.

¹ Según **Lecina, J.M. (1990)**, colectivo cerrado se define como un colectivo en el que consideramos únicamente los miembros existentes en la fecha de valoración, teniendo en cuenta las posibles salidas pero asumiendo que no se producirán nuevas entradas al mismo.

- Establecemos como origen de tiempo, el momento en el que se constituye el colectivo C . Cuando hablemos del año u -ésimo, nos estamos refiriendo a u años después de la constitución de C .

Las prestaciones de los asegurados se pactan individualmente en el origen de la operación. Al respecto, contemplaremos dos tipos de prestaciones para un asegurado i -ésimo cualquiera:

- Renta vencida y anual a cobrar por hallarse en un determinado estado $E_k \in E$. Sus términos se expresan como $b_i^k(t)$, siendo $t = 1, \dots, m$ el año a que hacen referencia.
- Seguro anual pagadero al final del año de producirse la transición correspondiente a la contingencia asegurada, $E_k \rightarrow E_l$. Designamos a sus cuantías por $c_i^{kl}(t)$, siendo $t = 1, \dots, m$ el año a que hace referencia cada una de ellas.

La prima total de un asegurado del colectivo cualquiera \mathcal{I} , a pagar al inicio de un año t se desglosa en 2 componentes: prima de la operación aseguradora, y prima de reaseguro

$$\mathbf{p}_i^{tot}(t) = \mathbf{p}_i^{aseg,rec}(t) + \mathbf{p}_i^{rea,rec}(t) \quad t = 1, \dots, \mathbf{h}_i$$

donde,

$\mathbf{p}_i^{tot}(t)$: prima total

$\mathbf{p}_i^{aseg,rec}(t)$: prima de la operación aseguradora

$\mathbf{p}_i^{rea,rec}(t)$: prima de reaseguro

\mathbf{h}_i : temporalidad de las primas

Supondremos que las primas de la operación aseguradora incluyen un recargo de seguridad $\mathbf{I}^{aseg} \geq 0$.

$$\mathbf{p}_i^{aseg,rec}(t) = \mathbf{p}_i^{aseg}(t) \cdot (1 + \mathbf{I}^{aseg}) \quad t = 1, \dots, \mathbf{h}_i$$

donde $p_i^{aseg}(t)$ representa la prima pura de la operación aseguradora del año t . Las primas puras del asegurado ‘i’ se calculan conjuntamente de forma que su valor actual actuarial coincida con el de las prestaciones. De forma similar, obtenemos las primas de reaseguro aplicando a la prima pura de reaseguro un recargo de seguridad $I^{rea} \geq 0$.

$$p_i^{rea,rec}(t) = p_i^{rea}(t) \cdot (1 + I^{rea}) \quad t = 1, \dots, h_i$$

donde $p_i^{rea}(t)$ representa la prima pura de reaseguro correspondiente al año t cuyo cálculo abordaremos al final del capítulo. Adicionalmente, impondremos a las primas las siguientes condiciones:

- Únicamente contemplaremos pago de primas en el estado inicial E_1 . Fuera de éste, el asegurado no deberá abonar prima alguna.
- Las primas totales, las primas de la operación aseguradora y las primas de reaseguro individuales para un determinado asegurado “i”, seguirán una misma ley de variación $f_i(t)$ con parámetros conocidos.
 - Si las primas son constantes $f_i(t) = 1$
 - Si las primas varían linealmente, $f_i(t) = 1 + b \cdot (t - 1)$
 - Si las primas varían según un polinomio de grado n,
 $f_i(t) = 1 + b_1 \cdot (t - 1) + \dots + b_n \cdot (t - 1)^n$
 - Si las primas siguen una variación exponencial, $f_i(t) = b^{t-1}$

Consecuentemente, se verificarán las siguientes relaciones:

$$p_i^{tot}(t+1) = p_i^{tot}(t) \cdot f_i(t) \quad t = 1, \dots, h_i - 1$$

$$p_i^{aseg,rec}(t+1) = p_i^{aseg,rec}(t) \cdot f_i(t) \quad t = 1, \dots, h_i - 1$$

$$p_i^{rea,rec}(t+1) = p_i^{rea,rec}(t) \cdot f_i(t) \quad t = 1, \dots, h_i - 1$$

El colectivo *C*, adquiere el compromiso con sus integrantes de garantizarles el pago de las prestaciones pactadas y de mantener las provisiones matemáticas y márgenes de solvencia, establecidos por ley o por la misma reglamentación del colectivo. Para cumplir con tal función, se constituye el fondo del colectivo en el que las primas de la operación aseguradora² satisfechas por los asegurados se capitalizan anualmente y a cargo del cual se efectúan los pagos por prestaciones devengadas.

Si el fondo del colectivo es incapaz de atender los anteriores compromisos, diremos que el colectivo *C* resulta insolvente. El riesgo de insolvencia puede venir producido por dos contingencias:

- Desequilibrios producidos porque el fondo del colectivo, no puede atender el pago de las prestaciones pactadas con los asegurados devengadas en el año en curso.
- Desequilibrios derivado de que el fondo no alcanza a cubrir al final del año la suma de la provisión matemática más los márgenes de solvencia establecidos.

Por las hipótesis asumidas, supondremos que las causas que han originado ambos tipos de desequilibrio han sido desviaciones de las tasas de siniestralidad reales respecto a las esperadas. Por tal motivo, denominamos diferencias de siniestralidad a las cuantías de los anteriores desequilibrios. Su aseguramiento (reaseguramiento) dará lugar al reaseguro de diferencia de siniestralidad.

En los siguientes epígrafes, explicaremos las diferentes etapas de que consta la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad que culminará con el cálculo de las primas de reaseguro.

²La componente de prima de reaseguro que compone la prima total no se capitaliza en el fondo sino que se abona directamente al reasegurador.

2 Simulación estocástica del colectivo

Para identificar las posibles diferencias de siniestralidad, resulta primordial conocer la evolución estocástica del colectivo C , no únicamente en términos esperados sino en términos de su distribución de probabilidad. Como la obtención de la misma resulta sumamente complicada y laboriosa, por el elevado número de convoluciones que exige realizar, la generaremos por simulación de Montecarlo (Pitacco, E. (1986), Tomassetti, A. (1986) y (1987))

Adoptaremos una técnica de simulación que se adapte a una operación con múltiples estados cualquiera, permitiendo así generar w trayectorias de simulación de la evolución de estado de cada uno de los n_c asegurados durante los m años en que efectuamos el seguimiento del mismo. Con tal objeto, definiremos m variables aleatorias, para cada uno de los n_c asegurados del colectivo:

$$\{H_{i,1}, \dots, H_{i,r}, H_{i,r+1}, \dots, H_{i,m}\} \quad i = 1, \dots, n_c$$

donde $H_{i,r+1}$ representa el estado del asegurado i en el año $(r+1)$ -ésimo. Su distribución de probabilidad condicionada a su estado anterior, $H_{i,r} = E_j$, viene dada por las probabilidades recogida por la fila j -ésima de la matriz de transición entre las edades $x_i + r$ y $x_i + r + 1$, siendo x_i la edad inicial del asegurado ' i '.

$$\text{Prob}(H_{i,r+1} = E_k) = p_{x_i+r}^{jk} \quad k = 1, \dots, n$$

Para simular la variable aleatoria $H_{i,r+1}$ definiremos w variables aleatorias $H_{i,r+1}^{S_g}$, siendo $g = 1, \dots, w$, como sigue:

$$H_{i,r+1}^{S_g} = E_k \quad \text{si} \quad \sum_{s=1}^{k-1} p_{x_i+r}^{js} < U \leq \sum_{s=1}^k p_{x_i+r}^{js} \quad k = 1, \dots, n \quad g = 1, \dots, w$$

donde U es un número pseudo-aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1 obtenido por simulación. Obsérvese que $H_{i,r+1}^{s_g}$ siendo $g = 1, \dots, w$ sirve para simular la variable aleatoria $H_{i,r+1}$ porque tienen la misma distribución de probabilidad.

$$\begin{aligned} \text{Prob}(H_{i,r+1}^{s_g} = E_k) &= \text{Prob}\left(\sum_{s=1}^{k-1} p_{x_i+r}^{js} < U \leq \sum_{s=1}^k p_{x_i+r}^{js}\right) = \\ &= \sum_{s=1}^k p_{x_i+r}^{js} - \sum_{s=1}^{k-1} p_{x_i+r}^{js} = p_{x_i+r}^{jk} = \text{Prob}(H_{i,r+1} = E_k) \end{aligned}$$

Repetimos el anterior proceso para cada uno de los asegurados, obteniendo de esta forma w realizaciones del estado ocupado por cada uno ellos, en el año $r+1$. Si agrupamos las realizaciones de todos los asegurados correspondientes a un mismo año, obtendremos w realizaciones del colectivo C proyectado $r+1$ años.

$$\tilde{C}_{r+1}^{s_g} = \bigcup_{i=1}^{n_c} H_{i,r+1}^{s_g} \quad g = 1, \dots, w$$

donde $\tilde{C}_{r+1}^{s_g}$ representa la realización g -ésima del colectivo C después de $r+1$ años de su constitución. Si generalizamos el anterior proceso a todo el periodo de estudio del colectivo C , obtendremos w trayectorias de su evolución que recogemos matricialmente del siguiente modo:

$$SIM_c = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^{s_1} & \dots & \tilde{C}_r^{s_1} & \dots & \tilde{C}_m^{s_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{C}_1^{s_g} & \dots & \tilde{C}_r^{s_g} & \dots & \tilde{C}_m^{s_g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{C}_1^{s_w} & \dots & \tilde{C}_r^{s_w} & \dots & \tilde{C}_m^{s_w} \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde cada fila representa una trayectoria de la evolución del colectivo C generada por simulación de Montecarlo.

3 Modelización estocástica

En este subepígrafe definimos las variables aleatorias fundamentales que nos permitirán calcular las primas de reaseguro:

- \mathbf{x}_c^{pr} : Valor actual financiero de las prestaciones del reasegurador.
- \mathbf{x}_c^p : Valor actual financiero de las primas de reaseguro.
- \mathbf{x}_c^L : Valor actual financiero de la pérdida del reasegurador.

La caracterización de estas tres variables aleatorias pasará por la matriz SIM_c que contiene w realizaciones del colectivo C .

3.1 Variable aleatoria “Valor actual financiero de las prestaciones”

El objetivo del presente subepígrafe es definir y modelizar estocásticamente la variable aleatoria “Valor actual financiero de las prestaciones del reasegurador”, que representamos como \mathbf{x}_c^{pr} , a partir del seguimiento estocástico de la evolución del colectivo C , recogida en la matriz SIM_c . Estudiaremos las diferentes etapas por las que transcurre la definición de la variable aleatoria \mathbf{x}_c^{pr} .

3.1.1 Provisión matemática del colectivo

Definimos la provisión matemática del colectivo al final de un determinado año como suma de las correspondientes provisiones individuales de los asegurados que lo componen en dicho momento. Analizaremos su evolución estocástica a través de cada una de las w trayectorias del colectivo obtenidas por simulación y recogidas en SIM_c .

La matriz RES_c expresa la evolución estocástica de la provisión o reserva matemática para cada trayectoria de simulación del colectivo.

$$RES_c = \begin{pmatrix} RES_{c,1}^{s_1} & \cdots & RES_{c,r}^{s_1} & \cdots & RES_{c,m}^{s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ RES_{c,1}^{s_g} & \cdots & RES_{c,r}^{s_g} & \cdots & RES_{c,m}^{s_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ RES_{c,1}^{s_w} & \cdots & RES_{c,r}^{s_w} & \cdots & RES_{c,m}^{s_w} \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde $RES_{c,r}^{s_g}$ representa la reserva matemática calculada al final del año r ésimo según la trayectoria de simulación g -ésima. Su valor se obtiene por suma de las reservas matemáticas individuales:

$$RES_{c,r}^{s_g} = \sum_{i=1}^{n_c} res_{x_i}^{H_{i,r}^{s_g}}(r) \quad (3)$$

donde $res_{x_i}^{H_{i,r}^{s_g}}(r)$ expresa el valor de la reserva del asegurado i ésimo al final del año r ésimo, según el estado generado por la simulación g -ésima y calculado de acuerdo a lo explicado en el tema I.

3.1.2 Definición y obtención del Valor mínimo del fondo del colectivo

Para que el colectivo se encuentre técnicamente equilibrado, el fondo del colectivo, tras satisfacer el pago de las prestaciones corrientes, debe alcanzar a cubrir las provisiones matemáticas más los márgenes de solvencia establecidos.

Con tal fin, definimos el valor mínimo del fondo del colectivo en cada año como la suma de la provisión matemática más el margen de solvencia correspondientes. Supondremos, para simplificar, que el margen de solvencia viene dado por una tasa $I_{ms} \geq 0$ de la provisión matemática.

Recogemos su variación de acuerdo a la evolución estocástica del colectivo en la siguiente matriz.

$$VM_c = \begin{pmatrix} VM_{c,1}^{s_1} & \cdots & VM_{c,r}^{s_1} & \cdots & VM_{c,m}^{s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ VM_{c,1}^{s_g} & \cdots & VM_{c,r}^{s_g} & \cdots & VM_{c,m}^{s_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ VM_{c,1}^{s_w} & \cdots & VM_{c,r}^{s_w} & \cdots & VM_{c,m}^{s_w} \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde $VM_{c,r}^{s_g}$ representa el valor mínimo del fondo del colectivo al final del año r ésimo según la trayectoria de simulación g -ésima de la evolución de C . Su valor se determinará como sigue:

$$VM_{c,r}^{s_g} = RES_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_{ms}) \quad (5)$$

3.1.3 Definición y obtención del fondo del colectivo sin reasegurar

A efectos de poner de manifiesto la necesidad de reaseguro, realizaremos un seguimiento del fondo del colectivo, de acuerdo a su evolución estocástica, sin incluir la intervención del reasegurador. Expresamos su evolución en la siguiente matriz.

$$F_c = \begin{pmatrix} F_{c,1}^{s_1} & \cdots & F_{c,r}^{s_1} & \cdots & F_{c,m}^{s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{c,1}^{s_g} & \cdots & F_{c,r}^{s_g} & \cdots & F_{c,m}^{s_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{c,1}^{s_w} & \cdots & F_{c,r}^{s_w} & \cdots & F_{c,m}^{s_w} \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde $F_{c,r}^{s_g}$ representa el valor del fondo sin reasegurar del colectivo C al final del año r ésimo, después de satisfacer las prestaciones devengadas. Su valor se obtiene capitalizando al tipo de interés de mercado I_F , el valor del fondo del año anterior,

$F_{c,r-1}^{s_g}$, juntamente con las primas de la operación aseguradora satisfechas y detrayendo del mismo las prestaciones pagadas.

$$F_{c,r}^{s_g} = F_{c,r-1}^{s_g} \cdot (1 + I_F) + \Pi_r^{aseg.rec,s_g} \cdot (1 + I_F) - B_{c,r}^{s_g} - C_{c,r}^{s_g} \quad (7)$$

donde $\Pi_r^{aseg.rec,s_g}$, $B_{c,r}^{s_g}$ y $C_{c,r}^{s_g}$ representan las primas de la operación aseguradora, los términos de la rentas y los seguros de pagados en el año r , siendo $F_{c,0}^{s_g}$ igual a las primas inicialmente abonadas por los asegurados.

Los valores del fondo del colectivo sin reasegurar ponen de manifiesto el riesgo de ruina que dan lugar a las diferencias de siniestralidad que debemos asegurar (reasegurar):

- Si $F_{c,r}^{s_g} < 0$ el fondo de colectivo no es capaz de satisfacer las prestaciones devengadas en el año en curso
- Si $0 \leq F_{c,r}^{s_g} < VM_{c,r}^{s_g}$ el fondo no alcanza a cubrir las provisiones matemáticas más los márgenes de solvencia establecidos.

Estas posibles diferencias de siniestralidad justifican la introducción y aplicación de la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad.

3.1.4 Definición y valoración del fondo reasegurado del colectivo

En este apartado incorporaremos al seguimiento del fondo del colectivo realizado en el anterior apartado, la intervención del reasegurador para cubrir las posibles diferencias de siniestralidad que puedan surgir. Recogemos su evolución en la siguiente matriz:

$$FR_c = \begin{pmatrix} FR_{c,1}^{s_1} & \cdots & FR_{c,r}^{s_1} & \cdots & FR_{c,m}^{s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ FR_{c,1}^{s_g} & \cdots & FR_{c,r}^{s_g} & \cdots & FR_{c,m}^{s_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ FR_{c,1}^{s_w} & \cdots & FR_{c,r}^{s_w} & \cdots & FR_{c,m}^{s_w} \end{pmatrix} \quad (8)$$

donde $FR_{c,r}^{S_g}$ representa el valor del fondo reasegurado del colectivo C tras r años de su constitución, según la trayectoria de simulación g -ésima. Determinamos su valor como sigue:

$$FR_{c,r}^{S_g} = \text{Max} \left\{ F_{c,r-1}^{S_g} \cdot (1 + I_F) + \Pi_r^{aseg,rec,S_g} \cdot (1 + I_F) - B_{c,r}^{S_g} - C_{c,r}^{S_g}, VM_{c,r}^{S_g} \right\} \quad (9)$$

Si $F_{c,r-1}^{S_g} \cdot (1 + I_F) + \Pi_r^{aseg,rec,S_g} \cdot (1 + I_F) - B_{c,r}^{S_g} - C_{c,r}^{S_g} \geq VM_{c,r}^{S_g}$ el fondo del colectivo es plenamente solvente y por lo tanto no es necesario que intervenga el reasegurador.

Si $F_{c,r-1}^{S_g} \cdot (1 + I_F) + \Pi_r^{aseg,rec,S_g} \cdot (1 + I_F) - B_{c,r}^{S_g} - C_{c,r}^{S_g} < VM_{c,r}^{S_g}$ el fondo del colectivo tiene una diferencia de siniestralidad que el reasegurador debe cubrir para así restituir el equilibrio de forma que $FR_{c,r}^{S_g} = VM_{c,r}^{S_g}$.

3.1.5 Prestaciones del reasegurador

Para hallar el valor actual financiero de las prestaciones, antes necesitamos conocer las prestaciones que debe satisfacer el reasegurador cada año, de acuerdo a la evolución estocástica del colectivo, recogida en la matriz SIM_c . En este apartado, efectuaremos un seguimiento anual de estas prestaciones que representaremos en la siguiente matriz.

$$PR_c = \begin{pmatrix} PR_{c,1}^{S_1} & \cdots & PR_{c,r}^{S_1} & \cdots & PR_{c,m}^{S_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ PR_{c,1}^{S_g} & \cdots & PR_{c,r}^{S_g} & \cdots & PR_{c,m}^{S_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ PR_{c,1}^{S_w} & \cdots & PR_{c,r}^{S_w} & \cdots & PR_{c,m}^{S_w} \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde $PR_{c,r}^{S_g}$ representa la prestación del reasegurador satisfecha al final del año r -ésimo de acuerdo a la trayectoria estocástica del colectivo g -ésima. Su valor se obtiene como sigue:

$$PR_{c,r}^{S_g} = \text{Max} \left\{ VM_{c,r}^{S_g} + \Pi_r^{aseg,rec,S_g} \cdot (1 + I_F) - B_{c,r}^{S_g} - C_{c,r}^{S_g}, 0 \right\} \quad (11)$$

Si el fondo resulta totalmente solvente, no existe necesidad de reaseguro y por tanto la prestación del reasegurador es 0. En caso contrario, intervendrá el reasegurador para restituir el equilibrio que se alcanzará con $VM_{c,r}^{s_g}$, satisfaciendo una aportación que se corresponderá con la diferencia entre el valor del fondo antes de intervenir el reasegurador y el valor mínimo que debería tener, $VM_{c,r}^{s_g}$:

$$VM_{c,r}^{s_g} - FR_{c,r-1}^{s_g} \cdot (1 + I_F) + \Pi_r^{aseg,rec,s_g} \cdot (1 + I_F) - B_{c,r}^{s_g} - C_{c,r}^{s_g} \quad (12)$$

3.1.6 Obtención de la variable aleatoria “Valor actual financiero de las prestaciones del reasegurador”

En este apartado vamos a obtener w realizaciones de la variable aleatoria “Valor actual financiero de las prestaciones del reasegurador” a partir de la matriz PR_c . Para ello, actualizaremos las prestaciones del reasegurador registradas en cada una de las w trayectorias estocásticas del colectivo, generadas por simulación y recogidas en la matriz PR_c .

$$VAC_c^{pr,s_g} = \sum_{r=1}^m PR_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r} \quad g = 1, \dots, w$$

El valor de VAC_c^{pr,s_g} constituye la realización de la variable aleatoria \mathbf{x}_c^{pr} de acuerdo a la trayectoria de simulación g -ésima. Cada una de las w realizaciones de \mathbf{x}_c^{pr} obtenidas de este modo son equiprobables.

$$Prob(\mathbf{x}_c^{pr} = VAC_c^{pr,s_g}) = \frac{1}{w} \quad g = 1, \dots, w$$

La distribución de probabilidad de \mathbf{x}_c^{pr} se podrá deducir a partir de las w realizaciones que disponemos de la misma. Su esperanza matemática se determina como media aritmética de sus w realizaciones:

$$E(\mathbf{x}_c^{pr}) = \frac{1}{w} \sum_{g=1}^w VAC_c^{pr,s_g} \quad (13)$$

equivalentemente,

$$E(\mathbf{x}_c^{pr}) = \frac{1}{\mathbf{w}} \sum_{g=1}^{\mathbf{w}} \sum_{r=1}^m PR_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r} \quad (14)$$

La varianza se podrá obtener a partir de su misma definición:

$$Var(\mathbf{x}_c^{pr}) = E(\mathbf{x}_c^{pr^2}) - E(\mathbf{x}_c^{pr})^2 \quad (15)$$

donde $E(\mathbf{x}_c^{pr^2})$ se calcula como sigue:

$$E(\mathbf{x}_c^{pr^2}) = \frac{1}{\mathbf{w}} \sum_{g=1}^{\mathbf{w}} \sum_{r=1}^m \left(PR_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r} \right)^2$$

En caso que todos asegurados pactasen prima únicas, la prima pura de reaseguro se obtendría de acuerdo al criterio de la esperanza matemática de forma inmediata.

$$\Pi^{rea} = E(\mathbf{x}_c^{pr}) \quad (16)$$

3.2 Definición de la variable aleatoria “Valor actual financiero de las primas puras de reaseguro”

El objetivo del presente subepígrafe es definir la variable aleatoria “Valor actual financiero de las primas de reaseguro” que representamos como \mathbf{x}_c^p , a partir de la evolución estocástica del colectivo recogida en la matriz \mathbf{SIM}_c .

Para ello, analizaremos para cada una de las \mathbf{w} trayectorias del colectivo, la evolución de las primas de reaseguro pagadas por el colectivo, que se obtendrán para cada año, sumando las individuales. Recogeremos su evolución en la matriz \mathbf{D}_c .

$$\mathbf{D}_c = \begin{pmatrix} \Pi_{c,1}^{s_1} & \cdots & \Pi_{c,r}^{s_1} & \cdots & \Pi_{c,m}^{s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Pi_{c,1}^{s_g} & \cdots & \Pi_{c,r}^{s_g} & \cdots & \Pi_{c,m}^{s_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Pi_{c,1}^{s_w} & \cdots & \Pi_{c,r}^{s_w} & \cdots & \Pi_{c,m}^{s_w} \end{pmatrix} \quad (17)$$

donde $\Pi_{c,r}^{s_g}$ representa la prima de reaseguro del año r-ésimo pagada por el colectivo, según la trayectoria g-ésima. Su valor se obtiene por agregación de las primas de reaseguro individuales, tal como refleja la siguiente fórmula:

$$\Pi_{c,r}^{s_g} = \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{\substack{\forall i \text{ t.q.} \\ H_{i,r-1}^{s_g} = E_1 \wedge r \leq h_i}} p_i^{rea}(r) \quad (18)$$

Definiremos la variable aleatoria “Valor actual financiero de las primas de reaseguro” a partir de la matriz \mathbf{D}_c ya que la actualización de los elementos que componen cada una de sus filas constituye una realización de \mathbf{x}_c^P .

$$VAC_c^{P, s_g} = \sum_{r=1}^m \Pi_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r+1} \quad g = 1, \dots, w$$

donde VAC_c^{P, s_g} representa el valor actual de todas las primas puras de reaseguro cobradas por el reasegurador según la trayectoria estocástica g-ésima del colectivo. Cada una de las w realizaciones de \mathbf{x}_c^P obtenidas de este modo son equiprobables.

$$Prob(\mathbf{x}_c^P = VAC_c^{P, s_g}) = \frac{1}{w} \quad g = 1, \dots, w$$

A partir de las w realizaciones de \mathbf{x}_c^P podremos obtener su distribución de probabilidad y calcular sus momentos principales. Por ejemplo, su esperanza matemática se determinará del siguiente modo:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}_c^P) &= \frac{1}{w} \sum_{g=1}^w VAC_c^{P, s_g} = \\ &= \frac{1}{w} \sum_{g=1}^w \sum_{r=1}^m \Pi_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r+1} = \\ &= \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\forall i \text{ t.q.} \\ H_{i,r-1}^{s_g} = E_1 \wedge r \leq h_i}} p_i^{rea}(r) \cdot (1 + I_R)^{-r+1} \end{aligned} \quad (19)$$

La varianza se podrá obtener a través de su propia definición.

$$Var(\mathbf{x}_c^p) = E(\mathbf{x}_c^{p^2}) - E(\mathbf{x}_c^p)^2 \quad (20)$$

donde $E(\mathbf{x}_c^{p^2})$ se calcula como sigue:

$$E(\mathbf{x}_c^{p^2}) = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\forall i \text{ t. q.} \\ H_{i,r-1}^s = E_i \wedge r \leq h_i}} (\mathbf{p}_i^{rea}(r) \cdot (1 + I_R)^{-r+1})^2$$

3.3 Definición y obtención de la variable aleatoria “Valor actual financiero de la pérdida del reasegurador”

El objetivo del presente subepígrafe es definir la variable aleatoria “Valor actual financiero de la pérdida del reasegurador” que representamos como \mathbf{x}_c^L como la diferencia de las variables aleatorias \mathbf{x}_c^{pr} y \mathbf{x}_c^p .

$$\mathbf{x}_c^L = \mathbf{x}_c^{pr} - \mathbf{x}_c^p \quad (21)$$

Dada la definición anterior, podremos deducir sus w realizaciones a partir de las de \mathbf{x}_c^{pr} y \mathbf{x}_c^p , ya calculadas con anterioridad.

$$VAC_c^{L, s_g} = \sum_{r=1}^m PR_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r} - \sum_{r=1}^m \Pi_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r+1} \quad g = 1, \dots, w$$

siendo cada una de ellas equiprobables.

$$Prob(\mathbf{x}_c^L = VAC_c^{L, s_g}) = \frac{1}{w} \quad g = 1, \dots, w$$

Su esperanza matemática se obtendrá por diferencia de las esperanzas matemáticas de \mathbf{x}_c^{pr} y \mathbf{x}_c^p .

$$E(\mathbf{x}_c^L) = E(\mathbf{x}_c^{pr}) - E(\mathbf{x}_c^p) \quad (22)$$

El resto de momentos de \mathbf{x}_c^L se obtendrá de la misma forma que en las variables aleatorias \mathbf{x}_c^{pr} y \mathbf{x}_c^p . A partir de la distribución de probabilidad de \mathbf{x}_c^L podremos calcular las primas de reaseguro.

4 Cálculo de las primas puras de reaseguro

Para calcular las primas puras de reaseguro, adoptaremos el criterio de la esperanza matemática. En virtud de su aplicación, impondremos como condición que la esperanza matemática del valor actual de la pérdida reaseguradora sea 0.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}_c^L) &= 0 \\ E(\mathbf{x}_c^{pr}) &= E(\mathbf{x}_c^p) \end{aligned} \quad (23)$$

Inicialmente la anterior ecuación tiene $\mathbf{h}_1 + \dots + \mathbf{h}_{n_c}$ incógnitas, tantas como primas de reaseguro puras individuales hayamos definido. En consecuencia su solución resulta indeterminada.

Resolvemos esta indeterminación, introduciendo en la ecuación (23) algún tipo de relación que, responda a un determinado criterio actuarial de reparto del coste total entre los asegurados. Con tal fin, definimos la prima de reaseguro como sigue:

$$\mathbf{p}_i^{rea}(r) = \mathbf{d}_c \cdot \mathbf{p}_i^{rea*}(r) \quad i = 1, \dots, n_c \quad r = 1, \dots, \mathbf{h}_i \quad (24)$$

donde

$\mathbf{p}_i^{rea*}(r)$: Prima de reaseguro básica del asegurado 'i' y año r-ésimo.

\mathbf{d}_c : Coeficiente de reaseguro.

Las primas de reaseguro básicas asociadas a un determinado asegurado “ i ”, definidas con las mismas características (temporalidad, estados, frecuencia, ley de variación, etc.) que las primas de reaseguro originales, se obtienen de cubrir las diferencias de siniestralidad generadas por un colectivo supuestamente formado por dicho asegurado.

Las primas de reaseguro básicas, cuyos valores podrán conocerse individualmente, como después veremos, sirven para evaluar el riesgo individual que representa cada asegurado. Por tanto, el criterio de reparto que define la ecuación (23) supone imputar el coste total de reaseguro de forma directamente proporcional al riesgo individual representado por las primas básicas.

El coeficiente de reaseguro resulta de común aplicación a todos los asegurados del colectivo. Su valor, comprendido entre 0 y 1, depende de la estructura de C . Por ejemplo, si el colectivo es homogéneo, a mayor tamaño del mismo, menor será d_c , dado que se registrarán menos diferencias de siniestralidad porque el comportamiento del colectivo se adecuará en mayor medida al previsto por las tablas de probabilidad.

En los supuestos extremos, $d_c = 1$ el colectivo está formado únicamente por un asegurado. Si el número de asegurados es muy elevado, d_c tiende a 0. Tras obtener los valores las primas de reaseguro básicas y sustituirlos en (23), dicha ecuación pasa a tener una única incógnita: d_c cuyo valor puede obtenerse tal como describimos seguidamente:

$$\frac{1}{w} \sum_{g=1}^w \sum_{r=1}^m PR_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\forall i.t.q. \\ H_{i,r-1}^s = E_i \wedge r \leq h_i}} d_c \cdot p_i^{rea^*}(r) \cdot (1 + I_R)^{-r+1}$$

$$d_c = \frac{\sum_{g=1}^w \sum_{r=1}^m PR_{c,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r}}{\sum_{i=1}^{n_c} \sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\forall i.t.q. \\ H_{i,r-1}^s = E_i \wedge r \leq h_i}} p_i^{rea^*}(r) \cdot (1 + I_R)^{-r+1}} \quad (25)$$

Conocidas las primas de reaseguro básicas y el coeficiente de reaseguro, podremos obtener las primas de reaseguro, tras sustituir sus valores en la expresión (24).

5 Cálculo de las primas de reaseguro básicas

Las primas de reaseguro básicas de un asegurado i son aquellas primas de reaseguro de diferencia de siniestralidad que se obtienen de considerar un colectivo formado únicamente por ese asegurado. Por ello, definiremos las variables aleatorias del modelo de forma individual.

- \mathbf{x}_i^{pr} : Valor actual financiero de las prestaciones del reasegurador.
- \mathbf{x}_i^p : Valor actual financiero de las primas de reaseguro.
- \mathbf{x}_i^L : Valor actual financiero de la pérdida del reasegurador.

A igual que hicimos con C , describiremos la evolución de estado del asegurado i generando por simulación w trayectorias de su evolución para cada uno de los m_i años que consideramos hasta su salida del colectivo. Recogeremos matricialmente y por filas cada una de las trayectorias de simulación así generadas.

$$SIM_i = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{i,1}^{s_1} & \dots & \tilde{H}_{i,r}^{s_1} & \dots & \tilde{H}_{i,m_i}^{s_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{H}_{i,1}^{s_g} & \dots & \tilde{H}_{i,r}^{s_g} & \dots & \tilde{H}_{i,m_i}^{s_g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{H}_{i,1}^{s_w} & \dots & \tilde{H}_{i,r}^{s_w} & \dots & \tilde{H}_{i,m_i}^{s_w} \end{pmatrix} \quad (26)$$

donde la obtención de cada uno de sus elementos ya explicamos en el epígrafe 2. El criterio de cálculo de las primas de reaseguro básicas es el criterio de la esperanza matemática, por lo que impondremos la siguiente ecuación:

$$E(\mathbf{x}_i^L) = 0 \quad (27)$$

La anterior ecuación inicialmente cuenta con w_i incógnitas, tantas como primas de reaseguro tengamos. No obstante, puede reducirse a una ecuación con una sola incógnita, $\mathbf{p}_i^{rea^*}(1)$, si consideramos la ley de variación de las primas de reaseguro

$$\mathbf{p}_i^{rea^*}(r) = \mathbf{p}_i^{rea^*}(1) \cdot f_i(r) \quad (28)$$

Por lo tanto la resolución de la ecuación es determinada, sin necesidad de introducir restricciones adicionales.

$$E(\mathbf{x}_i^{pr}) = E(\mathbf{x}_i^p)$$

$$\frac{1}{\mathbf{w}} \sum_{g=1}^{\mathbf{w}} \sum_{r=1}^m PR_{i,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r} = \frac{1}{\mathbf{w}} \sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\forall i \text{ l.q.} \\ H_{i,r-1}^s = E_1 \wedge r \leq \mathbf{h}_i}} \mathbf{p}_i^{rea^*}(r) \cdot (1 + I_R)^{-r+1}$$

$$\frac{1}{\mathbf{w}} \sum_{g=1}^{\mathbf{w}} \sum_{r=1}^m PR_{i,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r} = \frac{1}{\mathbf{w}} \sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\forall i \text{ l.q.} \\ H_{i,r-1}^s = E_1 \wedge r \leq \mathbf{h}_i}} \mathbf{p}_i^{rea^*}(1) \cdot f(r) \cdot (1 + I_R)^{-r+1}$$

$$\mathbf{p}_i^{rea^*}(1) = \frac{\sum_{g=1}^{\mathbf{w}} \sum_{r=1}^m PR_{i,r}^{s_g} \cdot (1 + I_R)^{-r}}{\sum_{r=1}^m \sum_{\substack{\forall i \text{ l.q.} \\ H_{i,r-1}^s = E_1 \wedge r \leq \mathbf{w}_i}} \mathbf{p}_i^{rea^*}(1) \cdot f(r) \cdot (1 + I_R)^{-r+1}} \quad (29)$$

Conocida las prima de reaseguro básica inicial, podemos conocer el resto a partir de su ley de variación anual correspondiente.

6 Análisis del coste total de la cobertura

En este epígrafe vamos a analizar el coste total que genera la cobertura del colectivo C . Diferenciaremos dos componentes del coste: un coste interno que viene dado por las primas de la operación aseguradora y un coste externo derivado de las primas de reaseguro.

6.1 Definición del coste total de la operación

Definimos el coste total de la operación como el coste actuarial de la cobertura llevada a cabo por el colectivo. Éste se obtiene como suma de los valores actuariales de las primas pagadas por los asegurados, tanto de la operación aseguradora como de reaseguro:

$$CT = CE + CI \quad (30)$$

donde,

CT : Coste total.

CE : Coste externo.

CI : Coste interno.

El coste interno viene dado por el valor actual actuarial de las primas de la operación asegurada pactadas por cada uno de los asegurados dentro del colectivo. Obtendremos el coste externo como el valor actual actuarial de las primas de reaseguro. Consecuentemente.

$$CT = f(I_T, I_F, I_R, I^{aseg}, I^{rea}, I_{ms}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (31)$$

La función coste total de la operación es una función de varias variables, cada una de las cuales se determina de distinta forma:

- El interés técnico aplicado por el colectivo, I_T , y la rentabilidad de su fondo, I_F , vienen dadas principalmente por las condiciones externas del ambiente financiero.
- El reasegurador, en función de la rentabilidad de su política de riesgos y del ambiente financiero, fijará los valores de su interés técnico, I_R , y de su recargo de seguridad, I^{rea} .

- El margen de solvencia, I_{ms} , vendrá dado por la legislación vigente y por la reglamentación interna del colectivo. Las características de la operación en cuanto a estructura de edades, x , prestaciones de renta, b , y seguros c viene dada por la estructura del colectivo C .
- La única variable que puede controlar el gestor del colectivo es el recargo de seguridad de las primas de la operación aseguradora, I^{aseg} .

A excepción de I^{aseg} , el resto de variables del coste total son exógenas porque vienen dadas por el ambiente financiero, la estructura del colectivo y por la política de riesgos del reasegurador. Consecuentemente, podemos expresar la función (34) del siguiente modo:

$$CT = f(\bar{I}_T, \bar{I}_F, \bar{I}_R, I^{aseg}, \bar{I}^{rea}, \bar{I}_{ms}, \bar{x}, \bar{b}, \bar{c}) \quad (32)$$

donde $\bar{I}_T, \bar{I}_F, \bar{I}_R, \bar{I}^{rea}, \bar{I}_{ms}, \bar{x}, \bar{b}, \bar{c}$ son variable determinadas de forma exógena y únicamente la variable I^{aseg} tiene carácter endógeno y por tanto es susceptible de variación por parte del gestor del colectivo.

Los incrementos de I^{aseg} , provocarán un aumento en el coste interno soportado por las primas de la operación. No obstante, ejercerá un efecto contrario sobre el coste externo, dado que al aumentar las primas de la operación de la operación aseguradora y por tanto el valor del fondo, las diferencias de siniestralidad a reasegurar disminuyen. El resultado final sobre el coste total de la operación es incierto y en última instancia dependerá de las características de la operación.

6.2 Definición y obtención de la estrategia óptima recargo-reaseguro

Hemos visto que el coste total actuarial de la operación depende de una serie de variables de las cuales el colectivo únicamente puede controlar con libertad el recargo de seguridad de las primas de la operación aseguradora, I^{aseg} .

Nuestro objetivo en este epígrafe es determinar qué estrategia recargo-reaseguro es la adecuada para minimizar el coste de la operación. Hallaremos esta estrategia calculando aquel recargo de seguridad que minimiza el valor actual actuarial del coste total. El recargo de seguridad óptimo que obtengamos lo simbolizaremos como I^{aseg^*} .

El recargo de seguridad óptimo está acotado inferiormente por un recargo de seguridad mínimo y superiormente por un recargo de seguridad máxima. El recargo de seguridad mínimo, I_{min} , es 0.

El recargo de seguridad máximo, I_{max} , es aquél cuya aplicación sobre las primas de la operación convierte la cobertura de las prestaciones en financiera al tipo de interés técnico aplicado.

Para hallar I^{aseg^*} tendremos que resolver el siguiente programa de optimización matemática:

$$\text{Min } CT = f(\bar{I}_T, \bar{I}_F, \bar{I}_R, I^{aseg}, \bar{I}^{rea}, \bar{I}_{ms}, \bar{x}, \bar{b}, \bar{c})$$

$$\text{sujeto } a : I_{min} \leq I^{aseg^*} \leq I_{max}$$

o equivalentemente,

$$\text{Min } CT(I^{aseg^*})$$

$$\text{sujeto } a : I_{min} \leq I^{aseg^*} \leq I_{max}$$

El valor de I^{aseg^*} dependerá tanto de las variables independientes de la función de costes totales, tanto exógenas como endógenas. Obtendremos su valor dando valores al recargo de seguridad dentro de una banda de fluctuación preestablecida.

6.3 Análisis de la sensibilidad del coste total de la operación

En este epígrafe vamos a realizar un análisis de sensibilidad de las principales variables exógenas, del modelo que previamente hemos desarrollado. Para ello, analizaremos los principales efectos derivados de la variación de sus valores, permaneciendo constante el resto de variables:

- Un incremento del tipo de interés técnico de la operación aseguradora, I_T , produce un abaratamiento de las primas puras de la operación aseguradora respecto a las de reaseguro. Esto induce a recargar más con lo que el recargo de seguridad óptimo aumenta. Paralelamente, el coste total de la operación experimenta una disminución.
- Un aumento del tipo de interés técnico del reasegurador, I_R , produce un abaratamiento de las primas de reaseguro en relación con las primas recargadas de la operación aseguradora. Ello motiva que cubramos más riesgo con el reaseguro y, en consecuencia, recarguemos menos, con lo que el recargo de seguridad ve disminuir su valor óptimo.

Paralelamente, el coste total de la operación así como sus dos componentes disminuyen: el coste interno, por la disminución del recargo óptimo y el externo derivado del incremento del interés técnico reasegurador.

- Un incremento del margen de solvencia, I_{ms} , repercute directamente en un incremento sustancial del coste total de la operación, dado que el nivel de cobertura exigido también es mayor.
- Una mayor rentabilidad financiera del fondo, I_F , provoca un descenso de las diferencias de siniestralidad registradas por el colectivo, con lo que el coste del reaseguro disminuye de la misma forma que lo hace el coste total.
- Un incremento del recargo de seguridad del reaseguro, I^{rea} , encarece la cobertura del reaseguro con relación a la cobertura realizada con las primas de

la operación aseguradora recargadas. Esta circunstancia induce a que recarguemos más con lo que el recargo óptimo también aumenta.

El coste total de la operación se incrementa, tanto por el lado asegurador al aplicar un recargo de seguridad a las primas de la operación mayor, como por el lado reasegurador, al aumentar el recargo de seguridad de sus primas.

ANEXO 11-1

Cálculo de la prima de reaseguro

En este anexo, vamos a analizar varios aspectos referentes al cálculo de la prima de reaseguro de diferencia de siniestralidad. Para ello, supondremos distintas operaciones de vida que combinan prestaciones de invalidez temporal y permanente, seguros por fallecimientos y rentas de jubilación.

Hipótesis

Utilizaremos un modelo de invalidación mixta basado en la aplicación de un proceso de markov discreto en el tiempo. Las probabilidades de invalidación, reactivación y fallecimiento aplicadas son las estimadas por **Amsler, M.H. (1988)**, ya recogidas con anterioridad en el capítulo 11 de la tesis. Inicialmente, asumiremos las siguientes hipótesis actuariales:

- Interés técnico del colectivo: 3%
- Rentabilidad del fondo: 3%
- Interés técnico del reasegurador: 3%

- Recargo de seguridad de la operación aseguradora: 2%
- Recargo del reasegurador: 0%
- Margen de seguridad: 4%

A efectos de simplificar el análisis de los resultados, supondremos un colectivo homogéneo compuesto por asegurados con la misma edad y prestaciones. Las prestaciones de renta son anuales y vencidas y los seguros pagaderos al final del año. Las prestaciones de invalidez se cobrarán hasta la jubilación y las prestaciones de

Las prestaciones propuestas son inmediatas y discretas en el tiempo, de forma que las rentas que definamos serán anuales y vencidas y los seguros pagaderos al final del año. Las prestaciones de invalidez se cobrarán hasta la jubilación del asegurado. Los seguros de fallecimiento y las rentas de jubilación tendrán carácter vitalicio.

En relación a las primas, se establece para cada asegurado un periodo de pago en actividad de 10 años. El pago de las mismas se efectúa anualmente y de forma anticipada al principio de cada año. Las cuantías tanto de las prestaciones como de las primas son constantes en el tiempo.

Los ejemplos desarrollados han sido obtenidos mediante aplicación de 5 procesos de simulación con 10.000 simulaciones cada uno, eligiendo como resultado el promedio de los 5 procesos. Dada la complejidad del proceso de simulación que requiere la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad, el tiempo de ejecución de los programas desarrollados es muy considerable.

Influencia del tamaño del colectivo sobre la prima de reaseguro

Para efectuar la comprobación de cómo influye el tamaño del colectivo sobre la prima de reaseguro, definiremos varias operaciones de invalidez y para cada una de ellas examinaremos la evolución de la prima de reaseguro y del factor de reaseguro correspondiente.

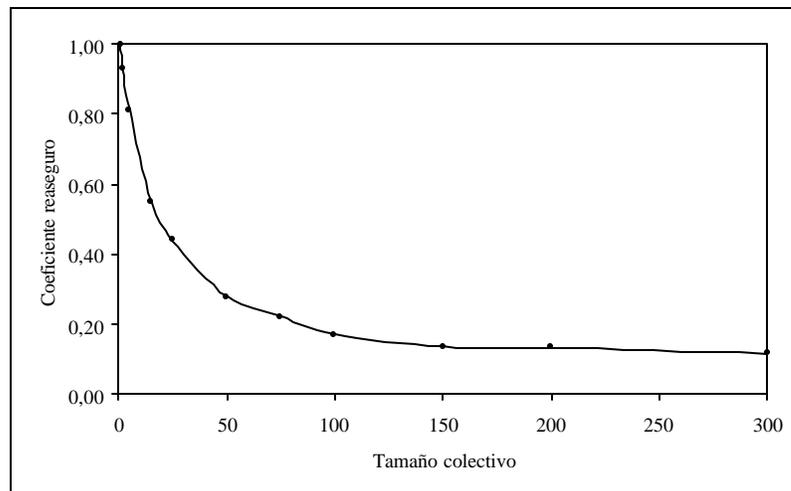
- Operación I: Seguro por invalidación permanente

Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación:65 años.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.04161	0.04514	1.00000	0.04514	0.08675
2	0.04161	0.04514	0.93281	0.04211	0.08371
5	0.04161	0.04514	0.81244	0.03667	0.07828
15	0.04161	0.04514	0.54864	0.02477	0.06637
25	0.04161	0.04514	0.43955	0.01984	0.06145
50	0.04161	0.04514	0.27761	0.01253	0.05414
75	0.04161	0.04514	0.22226	0.01003	0.05164
100	0.04161	0.04514	0.17127	0.00773	0.04934
150	0.04161	0.04514	0.13647	0.00616	0.04777
200	0.04161	0.04514	0.13432	0.00606	0.04767
300	0.04161	0.04514	0.11653	0.00526	0.04687



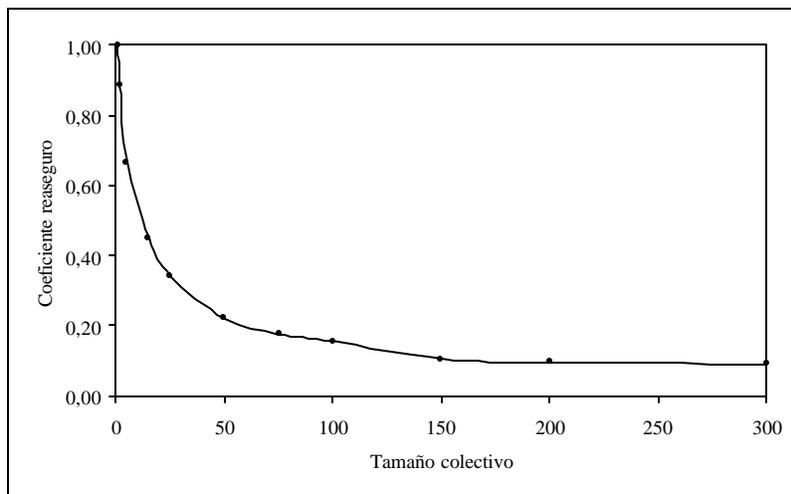
- Operación II: Renta de invalidez temporal

Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coefficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.03817	0.03191	1.00000	0.03191	0.07008
2	0.03817	0.03191	0.88285	0.02817	0.06634
5	0.03817	0.03191	0.66443	0.02120	0.05937
15	0.03817	0.03191	0.44943	0.01434	0.05251
25	0.03817	0.03191	0.34009	0.01085	0.04902
50	0.03817	0.03191	0.22023	0.00703	0.04520
75	0.03817	0.03191	0.17670	0.00564	0.04381
100	0.03817	0.03191	0.15475	0.00494	0.04311
150	0.03817	0.03191	0.10601	0.00338	0.04155
200	0.03817	0.03191	0.09648	0.00308	0.04125
300	0.03817	0.03191	0.09182	0.00293	0.04110



- Operación III: Seguro mixto de invalidación permanente y fallecimiento

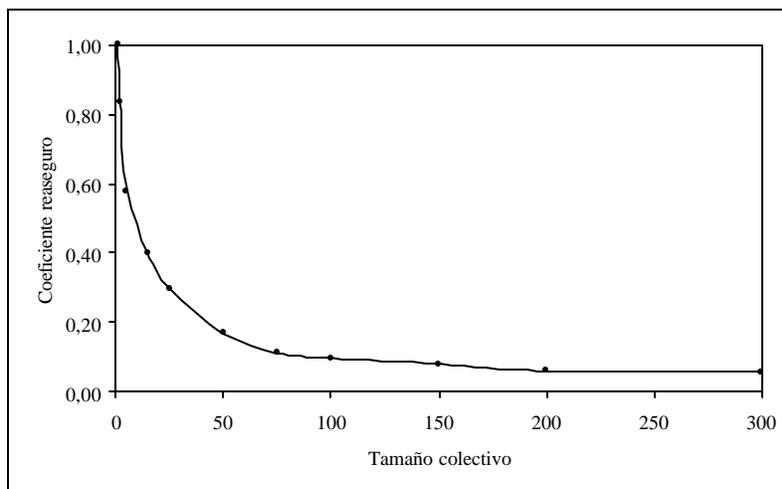
Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Cuantía del seguro de fallecimiento: 10 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.36145	0.07914	1.00000	0.07914	0.44059
2	0.36145	0.07914	0.83667	0.06621	0.42766
5	0.36145	0.07914	0.58018	0.04592	0.40736
15	0.36145	0.07914	0.40011	0.03166	0.39311
25	0.36145	0.07914	0.29694	0.02350	0.38495
50	0.36145	0.07914	0.16844	0.01333	0.37478
75	0.36145	0.07914	0.11127	0.00881	0.37025
100	0.36145	0.07914	0.09716	0.00769	0.36914
150	0.36145	0.07914	0.08134	0.00644	0.36788
200	0.36145	0.07914	0.06081	0.00481	0.36626
300	0.36145	0.07914	0.05636	0.00446	0.36591



- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente

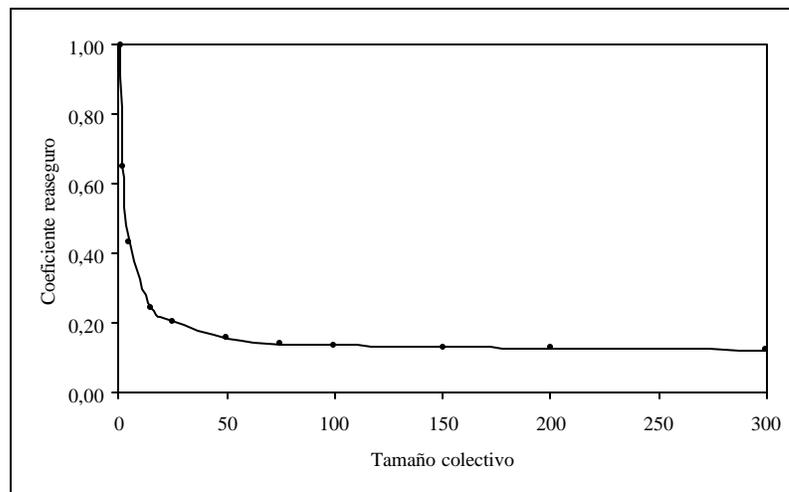
Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de jubilación: 1 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coefficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.46245	0.25198	1.00000	0.25198	0.71443
2	0.46245	0.25198	0.65238	0.16439	0.62683
5	0.46245	0.25198	0.43231	0.10893	0.57138
15	0.46245	0.25198	0.24146	0.06084	0.52329
25	0.46245	0.25198	0.20478	0.05160	0.51405
50	0.46245	0.25198	0.15685	0.03952	0.50197
75	0.46245	0.25198	0.14135	0.03562	0.49806
100	0.46245	0.25198	0.13699	0.03452	0.49697
150	0.46245	0.25198	0.13147	0.03313	0.49558
200	0.46245	0.25198	0.12957	0.03265	0.49510
300	0.46245	0.25198	0.12251	0.03087	0.49332



- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento

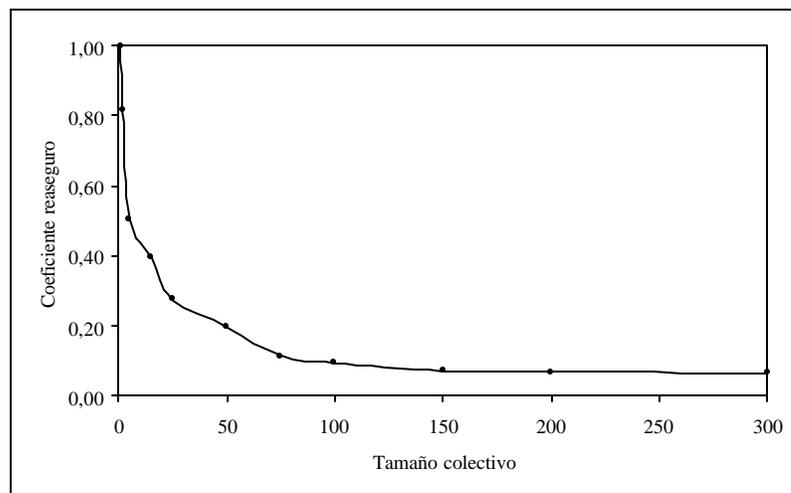
Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Cuantía del seguro de fallecimiento: 10 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.35789	0.05172	1.00000	0.05172	0.40961
2	0.35789	0.05172	0.81446	0.04212	0.40001
5	0.35789	0.05172	0.50312	0.02602	0.38391
15	0.35789	0.05172	0.39415	0.02039	0.37827
25	0.35789	0.05172	0.27441	0.01419	0.37208
50	0.35789	0.05172	0.19566	0.01012	0.36801
75	0.35789	0.05172	0.11248	0.00582	0.36370
100	0.35789	0.05172	0.09451	0.00489	0.36278
150	0.35789	0.05172	0.07244	0.00375	0.36163
200	0.35789	0.05172	0.06818	0.00353	0.36141
300	0.35789	0.05172	0.06574	0.00340	0.36129



- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación

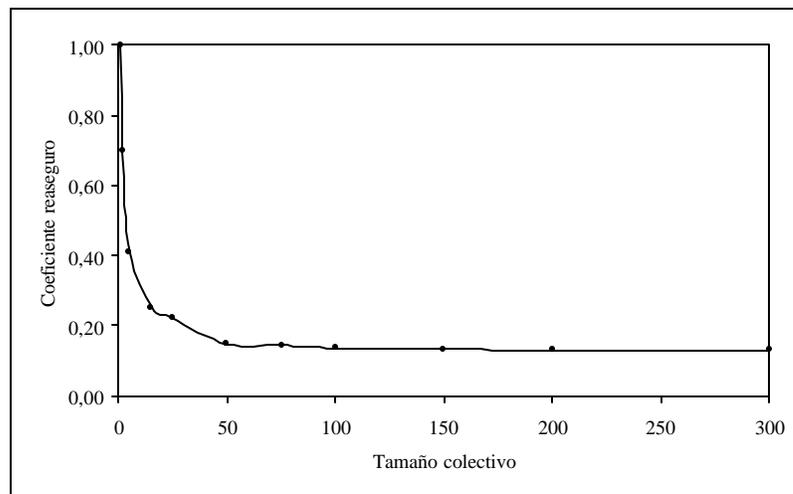
Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Término de la renta de jubilación: 1 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coefficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.45889	0.24313	1.00000	0.24313	0.70202
2	0.45889	0.24313	0.69745	0.16957	0.62846
5	0.45889	0.24313	0.40856	0.09933	0.55822
15	0.45889	0.24313	0.25167	0.06119	0.52008
25	0.45889	0.24313	0.21966	0.05341	0.51229
50	0.45889	0.24313	0.14642	0.03560	0.49449
75	0.45889	0.24313	0.14460	0.03516	0.49404
100	0.45889	0.24313	0.13640	0.03316	0.49205
150	0.45889	0.24313	0.13187	0.03206	0.49095
200	0.45889	0.24313	0.12978	0.03155	0.49044
300	0.45889	0.24313	0.12935	0.03145	0.49034



- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente

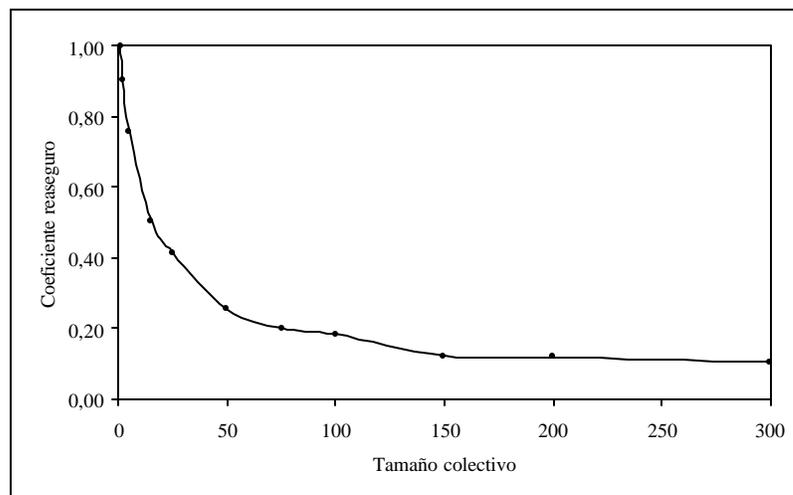
Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.07978	0.07448	1.00000	0.07448	0.15426
2	0.07978	0.07448	0.90403	0.06733	0.14712
5	0.07978	0.07448	0.75481	0.05622	0.13600
15	0.07978	0.07448	0.50558	0.03766	0.11744
25	0.07978	0.07448	0.41059	0.03058	0.11037
50	0.07978	0.07448	0.25324	0.01886	0.09865
75	0.07978	0.07448	0.20120	0.01499	0.09477
100	0.07978	0.07448	0.18250	0.01359	0.09338
150	0.07978	0.07448	0.12228	0.00911	0.08889
200	0.07978	0.07448	0.11868	0.00884	0.08862
300	0.07978	0.07448	0.10405	0.00775	0.08753



- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente.

Edad de los asegurados: 30 años.

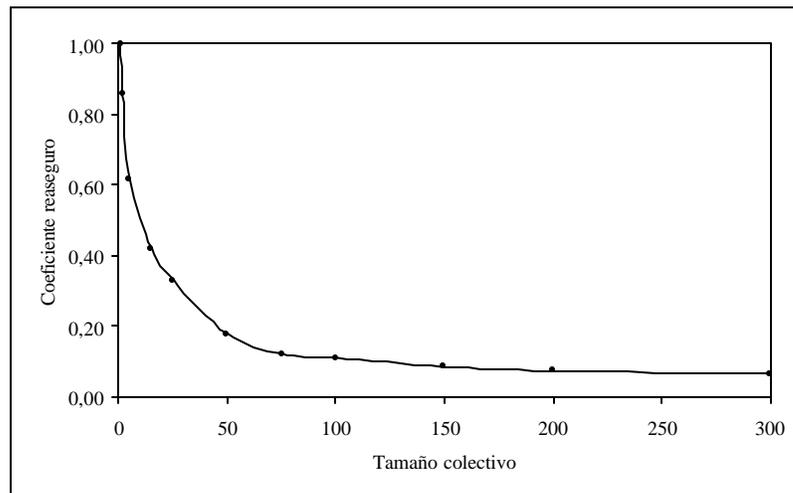
Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Cuantía del seguro de fallecimiento: 10 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.39962	0.09778	1.00000	0.09778	0.49740
2	0.39962	0.09778	0.85771	0.08387	0.48348
5	0.39962	0.09778	0.61338	0.05998	0.45959
15	0.39962	0.09778	0.41919	0.04099	0.44060
25	0.39962	0.09778	0.32952	0.03222	0.43184
50	0.39962	0.09778	0.17646	0.01725	0.41687
75	0.39962	0.09778	0.12173	0.01190	0.41152
100	0.39962	0.09778	0.10893	0.01065	0.41027
150	0.39962	0.09778	0.08473	0.00828	0.40790
200	0.39962	0.09778	0.07334	0.00717	0.40679
300	0.39962	0.09778	0.06484	0.00634	0.40596



- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente.

Edad de los asegurados: 30 años.

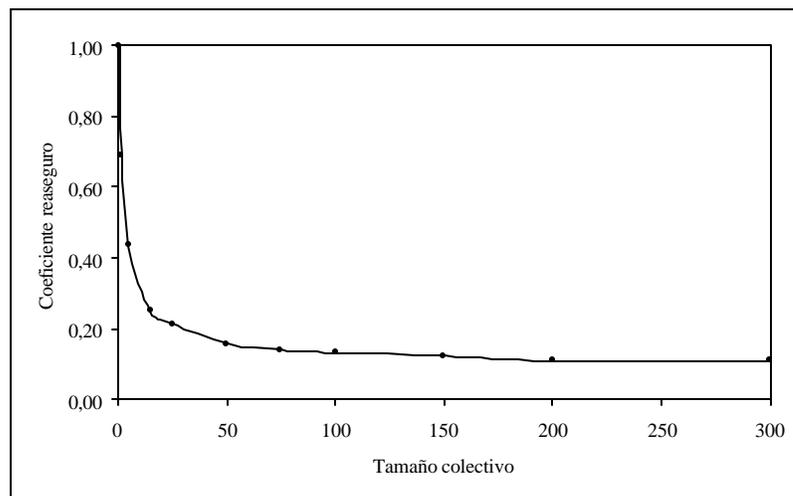
Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Término de la renta de jubilación: 1 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

Tamaño colectivo	Prima operación aseguradora	Prima de reaseguro básica	Coficiente Reaseguro	Prima reaseguro	Prima total
1	0.50062	0.25403	1.00000	0.25403	0.75465
2	0.50062	0.25403	0.69089	0.17551	0.67612
5	0.50062	0.25403	0.43531	0.11058	0.61120
15	0.50062	0.25403	0.24935	0.06334	0.56396
25	0.50062	0.25403	0.21277	0.05405	0.55467
50	0.50062	0.25403	0.15654	0.03977	0.54038
75	0.50062	0.25403	0.14092	0.03580	0.53641
100	0.50062	0.25403	0.13159	0.03343	0.53404
150	0.50062	0.25403	0.12351	0.03138	0.53199
200	0.50062	0.25403	0.11025	0.02801	0.52862
300	0.50062	0.25403	0.10904	0.02770	0.52832



Influencia del tipo de operación sobre la prima de reaseguro

Con el objeto de analizar la influencia del tipo de operación sobre el peso específico de la prima de reaseguro sobre la total, partimos de un colectivo homogéneo de 300 personas con edad inicial de 30 años y edad de jubilación 65 años. Con un colectivo de tales características, calcularemos para cada una de las 9 operaciones definidas con anterioridad, la proporción de la prima total que representa la prima de reaseguro de diferencia de siniestralidad. A continuación, sintetizamos los resultados conseguidos.

Operación	Prima operación		Prima total	(Prima op.
	aseguradora	Prima reaseguro		Reaseguro / prima total)
I	0,04161	0,00526	0,04687	11,22 %
II	0,03817	0,00293	0,0411	7,13 %
III	0,36145	0,00446	0,36591	1,22 %
IV	0,46245	0,03087	0,49332	6,26 %
V	0,35789	0,0034	0,36129	0,94 %
VI	0,45889	0,03145	0,49034	6,41 %
VII	0,07978	0,00775	0,08753	8,85 %
VIII	0,39962	0,00634	0,40596	1,56 %
IX	0,50062	0,0277	0,52832	5,24

Conclusiones

De los datos recogidos en las anteriores tablas extraemos las siguientes conclusiones:

- El factor de reaseguro disminuye conforme aumenta el tamaño del colectivo. Este comportamiento queda plasmado en todas gráficas anteriores. Obviamente, esta evolución decreciente del factor de reaseguro respecto al tamaño del colectivo, se mantiene en las primas de reaseguro y en las primas totales que paga cada asegurado del colectivo.

Igualmente, podemos observar que cuanto mayor es el tamaño del colectivo menor es el decremento del factor de reaseguro.

- La evolución del factor de reaseguro se ve afectada por las características de la operación aseguradora de invalidez asumidas.

En las operaciones que contienen seguros de fallecimiento, el decrecimiento en términos porcentuales del factor de reaseguro, y por tanto también de la prima de reaseguro, respecto al tamaño es mucho más intenso. Esta circunstancia queda bien reflejada en los cuadros de datos y gráficas correspondientes a operaciones que contienen capitales de fallecimientos. De este modo, en la operación III el coeficiente de reaseguro disminuye hasta 0,05636, en la operación V hasta 0,06574 y en la VIII hasta 0,06448.

En las operaciones restantes el factor de reaseguro decrece hasta valores comprendidos entre 0.09 y 0.125.

Las operaciones aseguradoras que contemplan prestaciones de rentas de jubilación se caracterizan porque el coeficiente de reaseguro y consiguientemente las primas de reaseguro, disminuyen fuertemente con los primeros aumentos de tamaño del colectivo. Este hecho queda fielmente reflejado en las operaciones IV, VI y IX en las cuales el factor de reaseguro asociado a un colectivo de 2 personas vale 0.65238, 0.69745 y 0.69089 respectivamente.

- En operaciones aseguradoras que contemplan exclusivamente prestaciones de invalidez (operaciones I, II y VII), la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad resulta especialmente significativa porque la prima de reaseguro representa respectivamente un 11,22%, 7,13% y 8,85% de la prima total.

Las anteriores tasas son elevadas si las comparamos con otras clases de operaciones como, por ejemplo, un seguro de fallecimiento vitalicio³ en el que la relación prima de reaseguro/prima total ni tan siquiera alcanza el 0,5%, tal como anotamos a continuación:

Prima de la operación aseguradora: 0,32124

Prima de reaseguro: 0,0011

Prima total: 0,32025

Prima de reaseguro/prima total: 0,34 %

Los elevados valores que toma el ratio prima de reaseguro/prima total en las operaciones I, II y VII es indicador de que la presencia de diferencias de siniestralidad es importante en las operaciones de invalidez puras. Ello puede deberse a diferentes circunstancias: mayor fluctuación de siniestralidad, bajo coste de las primas de la operación aseguradora, en el caso de las rentas de invalidez temporal podíamos añadir la alta variabilidad de su duración, etc.

A la vista del anterior cuadro, parece que las diferencias de siniestralidad que se pueden producir en un seguro de invalidación permanente son comparativamente mayores que las registradas en una renta de invalidez temporal dado que el peso de la prima de reaseguro sobre el total es significativamente más elevado en el primer caso: un 11,22 % frente a un 7,13%,

- Si añadimos a las anteriores prestaciones, coberturas de vida bien rentas de jubilación o seguros de fallecimiento, el porcentaje prima de reaseguro/prima total disminuye. Este hecho resulta especialmente palpable en las operaciones mixtas con seguros por fallecimiento (operaciones III, V y VIII,) en las que la prima de reaseguro de diferencia de siniestralidad no llega alcanzar el 2% de la prima total.

Este curioso comportamiento explica que las diferencias de siniestralidad en dichas operaciones sean comparativamente menores a las registradas en operaciones de invalidez puras (operaciones I,II y VII).

³ Para el cálculo de sus primas, hemos mantenido las mismas hipótesis y bases técnicas utilizadas con anterioridad, ya citadas al principio del anexo.

ANEXO 11-2

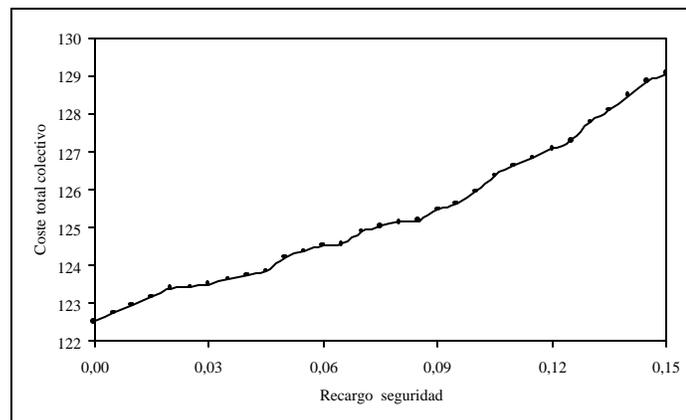
Estrategia recargo-reaseguro óptima

En este apartado vamos a centrarnos en la determinación de la estrategia óptima para cada una de las 9 operaciones que hemos considerado anteriormente. En cada caso supondremos un colectivo homogéneo de 300 personas con edad inicial de 30 años y edad de jubilación 65 años. Asumiremos las mismas hipótesis que las utilizadas en el anexo precedente.

Para comprobar la estrategia recargo-reaseguro óptima, establecemos una banda de fluctuación del recargo de seguridad entre el 0% y el 15% con una variación de 0.5%. Para cada valor calcularemos la prima de reaseguro y la prima total. Conocidas éstas, determinaremos el coste total de la cobertura desglosado en sus dos componentes: coste interno y coste externo.

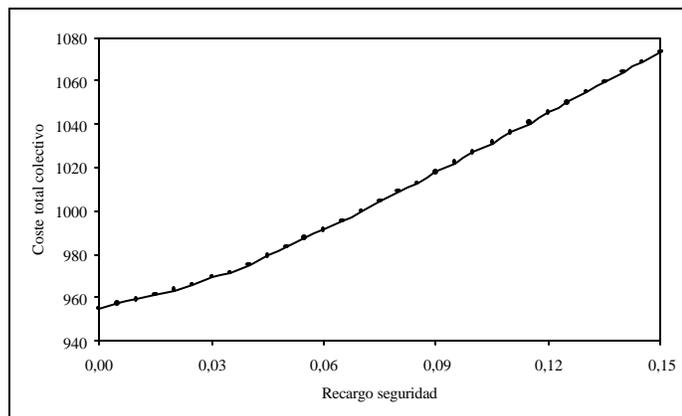
- Operación I: Seguro por invalidación permanente.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	reaseguro		interno	externo	
0.000	0.04079	0.00575	0.04654	107.39679	15.13929	122.53608
0.005	0.04099	0.00563	0.04662	107.93377	14.82334	122.75711
0.010	0.04120	0.00550	0.04670	108.47076	14.48106	122.95182
0.015	0.04140	0.00538	0.04678	109.00774	14.16511	123.17285
0.020	0.04161	0.00526	0.04687	109.54473	13.84916	123.39388
0.025	0.04181	0.00507	0.04688	110.08171	13.34890	123.43061
0.030	0.04201	0.00490	0.04691	110.61869	12.90131	123.52000
0.035	0.04222	0.00475	0.04697	111.15568	12.50637	123.66205
0.040	0.04242	0.00458	0.04700	111.69266	12.05877	123.75143
0.045	0.04263	0.00442	0.04705	112.22965	11.63750	123.86715
0.050	0.04283	0.00435	0.04718	112.76663	11.45320	124.21983
0.055	0.04303	0.00421	0.04724	113.30361	11.08459	124.38820
0.060	0.04324	0.00407	0.04731	113.84060	10.71598	124.55658
0.065	0.04344	0.00387	0.04731	114.37758	10.18940	124.56698
0.070	0.04365	0.00379	0.04744	114.91456	9.97877	124.89333
0.075	0.04385	0.00364	0.04749	115.45155	9.58383	125.03538
0.080	0.04405	0.00348	0.04753	115.98853	9.16256	125.15109
0.085	0.04426	0.00329	0.04755	116.52552	8.66231	125.18782
0.090	0.04446	0.00319	0.04765	117.06250	8.39901	125.46151
0.095	0.04467	0.00305	0.04772	117.59948	8.03040	125.62989
0.100	0.04487	0.00297	0.04784	118.13647	7.81977	125.95624
0.105	0.04507	0.00293	0.04800	118.67345	7.71445	126.38791
0.110	0.04528	0.00282	0.04810	119.21044	7.42483	126.63527
0.115	0.04548	0.00270	0.04818	119.74742	7.10888	126.85630
0.120	0.04568	0.00258	0.04826	120.28440	6.79293	127.07734
0.125	0.04589	0.00246	0.04835	120.82139	6.47698	127.29837
0.130	0.04609	0.00244	0.04853	121.35837	6.42432	127.78270
0.135	0.04630	0.00235	0.04865	121.89536	6.18736	128.08272
0.140	0.04650	0.00230	0.04880	122.43234	6.05572	128.48806
0.145	0.04670	0.00223	0.04893	122.96932	5.87141	128.84073
0.150	0.04691	0.00211	0.04902	123.50631	5.55546	129.06177



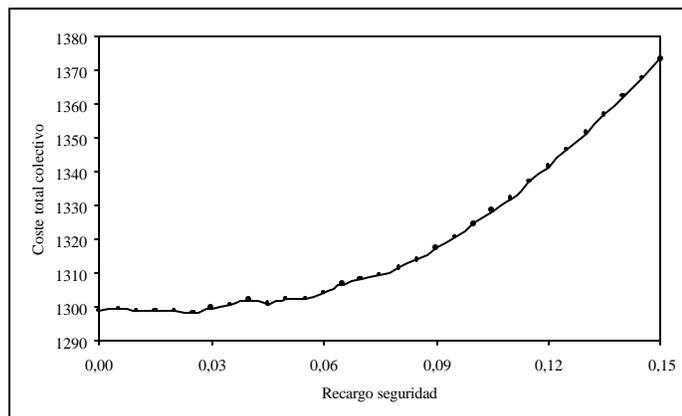
- Operación II: Renta de invalidez temporal.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	Prima reaseguro		Coste interno	Coste externo	
0.000	0.03742	0.00340	0.04082	98.52385	8.95193	107.47578
0.005	0.03761	0.00327	0.04088	99.01647	8.60965	107.62612
0.010	0.03779	0.00317	0.04096	99.50909	8.34636	107.85544
0.015	0.03798	0.00305	0.04103	100.00171	8.03040	108.03211
0.020	0.03817	0.00293	0.04110	100.49433	7.71445	108.20878
0.025	0.03836	0.00282	0.04118	100.98695	7.42483	108.41178
0.030	0.03854	0.00270	0.04124	101.47957	7.10888	108.58845
0.035	0.03873	0.00252	0.04125	101.97219	6.63496	108.60714
0.040	0.03892	0.00235	0.04127	102.46480	6.18736	108.65217
0.045	0.03910	0.00223	0.04133	102.95742	5.87141	108.82883
0.050	0.03929	0.00218	0.04147	103.45004	5.73976	109.18981
0.055	0.03948	0.00211	0.04159	103.94266	5.55546	109.49812
0.060	0.03967	0.00198	0.04165	104.43528	5.21318	109.64846
0.065	0.03985	0.00188	0.04173	104.92790	4.94989	109.87779
0.070	0.04004	0.00181	0.04185	105.42052	4.76558	110.18610
0.075	0.04023	0.00176	0.04199	105.91314	4.63394	110.54708
0.080	0.04041	0.00164	0.04205	106.40576	4.31799	110.72375
0.085	0.04060	0.00153	0.04213	106.89838	4.02837	110.92674
0.090	0.04079	0.00141	0.04220	107.39100	3.71242	111.10341
0.095	0.04097	0.00129	0.04226	107.88362	3.39647	111.28008
0.100	0.04116	0.00120	0.04236	108.37624	3.15950	111.53574
0.105	0.04135	0.00117	0.04252	108.86886	3.08052	111.94937
0.110	0.04154	0.00113	0.04267	109.36147	2.97520	112.33667
0.115	0.04172	0.00106	0.04278	109.85409	2.79089	112.64499
0.120	0.04191	0.00100	0.04291	110.34671	2.63292	112.97963
0.125	0.04210	0.00094	0.04304	110.83933	2.47494	113.31428
0.130	0.04228	0.00087	0.04315	111.33195	2.29064	113.62259
0.135	0.04247	0.00082	0.04329	111.82457	2.15899	113.98356
0.140	0.04266	0.00078	0.04344	112.31719	2.05368	114.37087
0.145	0.04285	0.00074	0.04359	112.80981	1.94836	114.75817
0.150	0.04303	0.00070	0.04373	113.30243	1.84304	115.14547



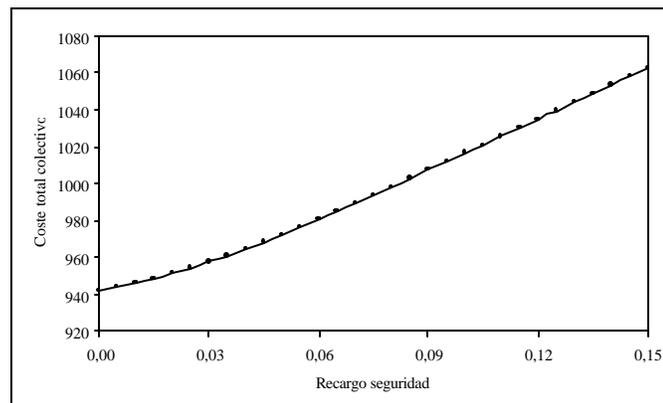
- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	Prima reaseguro		interno	externo	
0.000	0.45338	0.04002	0.49340	1193.71308	105.36944	1299.08252
0.005	0.45565	0.03791	0.49356	1199.68164	99.81398	1299.49563
0.010	0.45791	0.03533	0.49324	1205.65021	93.02105	1298.67126
0.015	0.46018	0.03321	0.49339	1211.61878	87.43926	1299.05803
0.020	0.46245	0.03087	0.49332	1217.58734	81.27823	1298.86557
0.025	0.46471	0.02840	0.49311	1223.55591	74.77492	1298.33082
0.030	0.46698	0.02664	0.49362	1229.52447	70.14098	1299.66545
0.035	0.46925	0.02476	0.49401	1235.49304	65.19109	1300.68413
0.040	0.47152	0.02300	0.49452	1241.46160	60.55715	1302.01875
0.045	0.47378	0.02030	0.49408	1247.43017	53.44827	1300.87844
0.050	0.47605	0.01854	0.49459	1253.39873	48.81433	1302.21306
0.055	0.47832	0.01643	0.49475	1259.36730	43.25887	1302.62617
0.060	0.48058	0.01479	0.49537	1265.33586	38.94088	1304.27674
0.065	0.48285	0.01350	0.49635	1271.30443	35.54441	1306.84884
0.070	0.48512	0.01174	0.49686	1277.27299	30.91048	1308.18347
0.075	0.48738	0.00998	0.49736	1283.24156	26.27654	1309.51810
0.080	0.48965	0.00845	0.49810	1289.21013	22.24817	1311.45830
0.085	0.49192	0.00716	0.49908	1295.17869	18.85170	1314.03040
0.090	0.49418	0.00622	0.50040	1301.14726	16.37676	1317.52402
0.095	0.49645	0.00516	0.50161	1307.11582	13.58587	1320.70169
0.100	0.49872	0.00434	0.50306	1313.08439	11.42687	1324.51126
0.105	0.50098	0.00364	0.50462	1319.05295	9.58383	1328.63678
0.110	0.50325	0.00270	0.50595	1325.02152	7.10888	1332.13040
0.115	0.50552	0.00235	0.50787	1330.99008	6.18736	1337.17744
0.120	0.50779	0.00176	0.50955	1336.95865	4.63394	1341.59259
0.125	0.51005	0.00141	0.51146	1342.92721	3.71242	1346.63963
0.13000	0.51232	0.00106	0.51338	1348.89578	2.79089	1351.68667
0.13500	0.51459	0.00082	0.51541	1354.86434	2.15899	1357.02334
0.14000	0.51685	0.00059	0.51744	1360.83291	1.55342	1362.38633
0.14500	0.51912	0.00047	0.51959	1366.80148	1.23747	1368.03895
0.15000	0.52139	0.00035	0.52174	1372.77004	0.92152	1373.69156



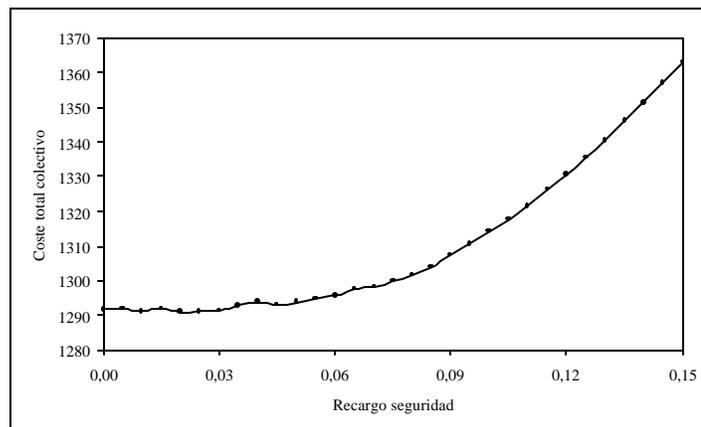
- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	Prima reaseguro		interno	externo	
0.000	0.35087	0.00692	0.35779	923.81249	18.21980	942.03230
0.005	0.35262	0.00599	0.35861	928.43156	15.77119	944.20274
0.010	0.35438	0.00505	0.35943	933.05062	13.29624	946.34686
0.015	0.35613	0.00411	0.36024	937.66968	10.82130	948.49098
0.020	0.35789	0.00340	0.36129	942.28874	8.95193	951.24067
0.025	0.35964	0.00270	0.36234	946.90781	7.10888	954.01669
0.030	0.36140	0.00235	0.36375	951.52687	6.18736	957.71423
0.035	0.36315	0.00164	0.36479	956.14593	4.31799	960.46392
0.040	0.36490	0.00129	0.36619	960.76499	3.39647	964.16146
0.045	0.36666	0.00106	0.36772	965.38406	2.79089	968.17495
0.050	0.36841	0.00082	0.36923	970.00312	2.15899	972.16211
0.055	0.37017	0.00070	0.37087	974.62218	1.84304	976.46522
0.060	0.37192	0.00047	0.37239	979.24124	1.23747	980.47871
0.065	0.37368	0.00040	0.37408	983.86031	1.05317	984.91347
0.070	0.37543	0.00035	0.37578	988.47937	0.92152	989.40089
0.075	0.37719	0.00023	0.37742	993.09843	0.60557	993.70400
0.080	0.37894	0.00020	0.37914	997.71749	0.52658	998.24408
0.085	0.38069	0.00018	0.38087	1002.33655	0.47393	1002.81048
0.090	0.38245	0.00015	0.38260	1006.95562	0.39494	1007.35056
0.095	0.38420	0.00014	0.38434	1011.57468	0.36861	1011.94329
0.100	0.38596	0.00012	0.38608	1016.19374	0.31595	1016.50969
0.105	0.38771	0.00011	0.38782	1020.81280	0.28962	1021.10243
0.110	0.38947	0.00011	0.38958	1025.43187	0.28962	1025.72149
0.115	0.39122	0.00010	0.39132	1030.05093	0.26329	1030.31422
0.120	0.39297	0.00010	0.39307	1034.66999	0.26329	1034.93328
0.125	0.39473	0.00010	0.39483	1039.28905	0.26329	1039.55235
0.130	0.39648	0.00009	0.39657	1043.90812	0.23696	1044.14508
0.135	0.39824	0.00008	0.39832	1048.52718	0.21063	1048.73781
0.140	0.39999	0.00008	0.40007	1053.14624	0.21063	1053.35688
0.145	0.40175	0.00008	0.40183	1057.76530	0.21063	1057.97594
0.150	0.40350	0.00007	0.40357	1062.38437	0.18430	1062.56867



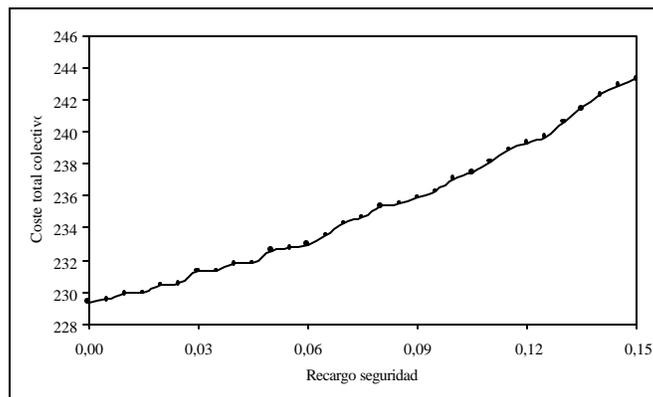
- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	Prima reaseguro		interno	externo	
0.000	0.44989	0.04072	0.49061	1184.52419	107.21249	1291.73668
0.005	0.45214	0.03849	0.49063	1190.44681	101.34107	1291.78789
0.010	0.45439	0.03603	0.49042	1196.36943	94.86409	1291.23352
0.015	0.45664	0.03403	0.49067	1202.29205	89.59825	1291.89031
0.020	0.45889	0.03145	0.49034	1208.21467	82.80532	1291.01999
0.025	0.46114	0.02922	0.49036	1214.13729	76.93391	1291.07120
0.030	0.46339	0.02711	0.49050	1220.05992	71.37845	1291.43837
0.035	0.46564	0.02535	0.49099	1225.98254	66.74451	1292.72705
0.040	0.46789	0.02347	0.49136	1231.90516	61.79462	1293.69978
0.045	0.47014	0.02101	0.49115	1237.82778	55.31764	1293.14542
0.050	0.47238	0.01901	0.49139	1243.75040	50.05180	1293.80220
0.055	0.47463	0.01713	0.49176	1249.67302	45.10191	1294.77493
0.060	0.47688	0.01526	0.49214	1255.59564	40.17835	1295.77399
0.065	0.47913	0.01373	0.49286	1261.51826	36.14999	1297.66825
0.070	0.48138	0.01174	0.49312	1267.44088	30.91048	1298.35136
0.075	0.48363	0.01009	0.49372	1273.36350	26.56616	1299.92966
0.080	0.48588	0.00845	0.49433	1279.28613	22.24817	1301.53430
0.085	0.48813	0.00716	0.49529	1285.20875	18.85170	1304.06045
0.090	0.49038	0.00622	0.49660	1291.13137	16.37676	1307.50813
0.095	0.49263	0.00516	0.49779	1297.05399	13.58587	1310.63985
0.100	0.49488	0.00422	0.49910	1302.97661	11.11092	1314.08753
0.105	0.49713	0.00340	0.50053	1308.89923	8.95193	1317.85116
0.110	0.49938	0.00258	0.50196	1314.82185	6.79293	1321.61478
0.115	0.50163	0.00211	0.50374	1320.74447	5.55546	1326.29993
0.120	0.50388	0.00153	0.50541	1326.66709	4.02837	1330.69546
0.125	0.50613	0.00117	0.50730	1332.58971	3.08052	1335.67023
0.130	0.50838	0.00082	0.50920	1338.51233	2.15899	1340.67133
0.135	0.51063	0.00070	0.51133	1344.43496	1.84304	1346.27800
0.140	0.51287	0.00047	0.51334	1350.35758	1.23747	1351.59505
0.14500	0.51512	0.00035	0.51547	1356.28020	0.92152	1357.20172
0.15000	0.51737	0.00035	0.51772	1362.20282	0.92152	1363.12434



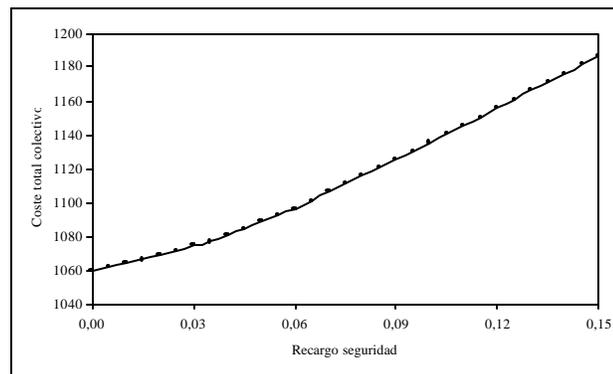
- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	Prima reaseguro		interno	externo	
0.000	0.07822	0.00892	0.08714	205.94697	23.48564	229.43261
0.005	0.07861	0.00857	0.08718	206.97670	22.56412	229.54083
0.010	0.07900	0.00833	0.08733	208.00644	21.93222	229.93866
0.015	0.07939	0.00798	0.08737	209.03617	21.01070	230.04687
0.020	0.07978	0.00775	0.08753	210.06591	20.40513	230.47104
0.025	0.08018	0.00739	0.08757	211.09564	19.45728	230.55292
0.030	0.08057	0.00728	0.08785	212.12538	19.16765	231.29303
0.035	0.08096	0.00691	0.08787	213.15511	18.19347	231.34859
0.040	0.08135	0.00669	0.08804	214.18485	17.61423	231.79908
0.045	0.08174	0.00632	0.08806	215.21458	16.64005	231.85463
0.050	0.08213	0.00622	0.08835	216.24432	16.37676	232.62108
0.055	0.08252	0.00589	0.08841	217.27405	15.50790	232.78195
0.060	0.08291	0.00559	0.08850	218.30379	14.71802	233.02181
0.065	0.08330	0.00540	0.08870	219.33352	14.21777	233.55129
0.070	0.08370	0.00532	0.08902	220.36326	14.00713	234.37039
0.075	0.08409	0.00505	0.08914	221.39299	13.29624	234.68924
0.080	0.08448	0.00493	0.08941	222.42273	12.98029	235.40302
0.085	0.08487	0.00458	0.08945	223.45246	12.05877	235.51123
0.090	0.08526	0.00434	0.08960	224.48220	11.42687	235.90907
0.095	0.08565	0.00411	0.08976	225.51193	10.82130	236.33323
0.100	0.08604	0.00400	0.09004	226.54167	10.53168	237.07334
0.105	0.08643	0.00376	0.09019	227.57140	9.89978	237.47118
0.110	0.08682	0.00364	0.09046	228.60114	9.58383	238.18496
0.115	0.08722	0.00352	0.09074	229.63087	9.26788	238.89875
0.120	0.08761	0.00329	0.09090	230.66061	8.66231	239.32291
0.125	0.08800	0.00305	0.09105	231.69034	8.03040	239.72075
0.130	0.08839	0.00300	0.09139	232.72008	7.89876	240.61883
0.135	0.08878	0.00293	0.09171	233.74981	7.71445	241.46426
0.140	0.08917	0.00285	0.09202	234.77955	7.50382	242.28337
0.145	0.08956	0.00270	0.09226	235.80928	7.10888	242.91816
0.150	0.08995	0.00246	0.09241	236.83901	6.47698	243.31600



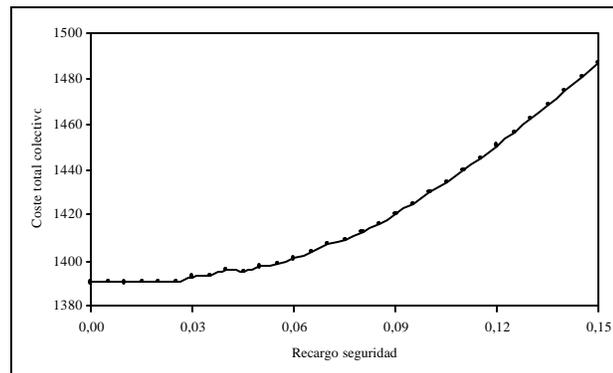
- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	Prima reaseguro		interno	externo	
0.000	0.39178	0.01068	0.40246	1031.52523	28.11958	1059.64481
0.005	0.39374	0.00962	0.40336	1036.68286	25.32869	1062.01155
0.010	0.39570	0.00845	0.40415	1041.84049	22.24817	1064.08866
0.015	0.39766	0.00728	0.40494	1046.99811	19.16765	1066.16577
0.020	0.39962	0.00634	0.40596	1052.15574	16.69271	1068.84845
0.025	0.40157	0.00528	0.40685	1057.31336	13.90182	1071.21518
0.030	0.40353	0.00458	0.40811	1062.47099	12.05877	1074.52976
0.035	0.40549	0.00340	0.40889	1067.62862	8.95193	1076.58054
0.040	0.40745	0.00305	0.41050	1072.78624	8.03040	1080.81665
0.045	0.40941	0.00246	0.41187	1077.94387	6.47698	1084.42085
0.050	0.41137	0.00211	0.41348	1083.10149	5.55546	1088.65696
0.055	0.41333	0.00176	0.41509	1088.25912	4.63394	1092.89306
0.060	0.41529	0.00117	0.41646	1093.41675	3.08052	1096.49726
0.065	0.41725	0.00106	0.41831	1098.57437	2.79089	1101.36527
0.070	0.41920	0.00094	0.42014	1103.73200	2.47494	1106.20694
0.075	0.42116	0.00082	0.42198	1108.88963	2.15899	1111.04862
0.080	0.42312	0.00070	0.42382	1114.04725	1.84304	1115.89030
0.085	0.42508	0.00060	0.42568	1119.20488	1.57975	1120.78463
0.090	0.42704	0.00047	0.42751	1124.36250	1.23747	1125.59998
0.095	0.42900	0.00035	0.42935	1129.52013	0.92152	1130.44165
0.100	0.43096	0.00027	0.43123	1134.67776	0.71089	1135.38864
0.105	0.43292	0.00023	0.43315	1139.83538	0.60557	1140.44095
0.110	0.43488	0.00020	0.43508	1144.99301	0.52658	1145.51959
0.115	0.43683	0.00019	0.43702	1150.15063	0.50025	1150.65089
0.120	0.43879	0.00019	0.43898	1155.30826	0.50025	1155.80852
0.125	0.44075	0.00017	0.44092	1160.46589	0.44760	1160.91348
0.130	0.44271	0.00015	0.44286	1165.62351	0.39494	1166.01845
0.135	0.44467	0.00013	0.44480	1170.78114	0.34228	1171.12342
0.140	0.44663	0.00011	0.44674	1175.93877	0.28962	1176.22839
0.145	0.44859	0.00010	0.44869	1181.09639	0.26329	1181.35968
0.150	0.45055	0.00008	0.45063	1186.25402	0.21063	1186.46465



- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente.

Recargo seguridad	Prima		Prima total	Coste		Coste total
	operación aseguradora	Prima reaseguro		interno	externo	
0.000	0.49080	0.03732	0.52812	1292.23693	98.26056	1390.49749
0.005	0.49325	0.03509	0.52834	1298.69811	92.38915	1391.08726
0.010	0.49571	0.03239	0.52810	1305.15930	85.28027	1390.43956
0.015	0.49816	0.03016	0.52832	1311.62048	79.40885	1391.02934
0.020	0.50062	0.02770	0.52832	1318.08167	72.93187	1391.01354
0.025	0.50307	0.02512	0.52819	1324.54285	66.13894	1390.68179
0.030	0.50552	0.02347	0.52899	1331.00404	61.79462	1392.79866
0.035	0.50798	0.02136	0.52934	1337.46522	56.23916	1393.70438
0.040	0.51043	0.01972	0.53015	1343.92641	51.92117	1395.84758
0.045	0.51289	0.01713	0.53002	1350.38759	45.10191	1395.48950
0.050	0.51534	0.01537	0.53071	1356.84878	40.46797	1397.31675
0.055	0.51779	0.01338	0.53117	1363.30996	35.22846	1398.53842
0.060	0.52025	0.01185	0.53210	1369.77115	31.20010	1400.97124
0.065	0.52270	0.01056	0.53326	1376.23233	27.80363	1404.03596
0.070	0.52516	0.00927	0.53443	1382.69351	24.40716	1407.10068
0.075	0.52761	0.00763	0.53524	1389.15470	20.08918	1409.24388
0.080	0.53006	0.00645	0.53651	1395.61588	16.98233	1412.59822
0.085	0.53252	0.00528	0.53780	1402.07707	13.90182	1415.97888
0.090	0.53497	0.00458	0.53955	1408.53825	12.05877	1420.59703
0.095	0.53743	0.00376	0.54119	1414.99944	9.89978	1424.89922
0.100	0.53988	0.00317	0.54305	1421.46062	8.34636	1429.80698
0.105	0.54233	0.00258	0.54491	1427.92181	6.79293	1434.71474
0.110	0.54479	0.00188	0.54667	1434.38299	4.94989	1439.33288
0.115	0.54724	0.00153	0.54877	1440.84418	4.02837	1444.87254
0.120	0.54970	0.00117	0.55087	1447.30536	3.08052	1450.38588
0.125	0.55215	0.00094	0.55309	1453.76655	2.47494	1456.24149
0.130	0.55460	0.00082	0.55542	1460.22773	2.15899	1462.38672
0.135	0.55706	0.00059	0.55765	1466.68892	1.55342	1468.24234
0.140	0.55951	0.00047	0.55998	1473.15010	1.23747	1474.38757
0.145	0.56197	0.00035	0.56232	1479.61128	0.92152	1480.53281
0.150	0.56442	0.00023	0.56465	1486.07247	0.60557	1486.67804



Conclusiones

Transcribimos las observaciones o conclusiones que creemos son más importantes:

- El coste total normalmente es una función creciente. El tipo de crecimiento se asemeja considerablemente al de una función lineal. Únicamente en las operaciones que contienen prestaciones de jubilación (operaciones IV, VI y IX) se altera esta pauta de comportamiento.

En efecto, en las operaciones IV, VI y IX, en el intervalo comprendido entre el 0% y 5% de recargo de seguridad, el coste total presenta una ligera tendencia decreciente. Posteriormente, desde el 5% hasta el 15%, el coste total vuelve a mostrar una evolución creciente.

- Por la misma naturaleza de la definición de los costes interno, externo y total del colectivo, su comportamiento es análogo al seguido por la prima de la operación aseguradora, prima de reaseguro y prima total respectivamente.
- El coste interno de la operación es creciente respecto al recargo de seguridad. A mayor recargo de seguridad de las primas de la operación aseguradora, las diferencias de siniestralidad son menores y por tanto el coste externo también disminuye.
- En la mayoría de operaciones el coste total se minimiza no recargando la prima pura de la operación aseguradora. Únicamente, aquellas operaciones en las que el tramo inicial de la función de costes es ligeramente decreciente se diferencia de la anterior tendencia general. Consecuentemente, los recargos óptimos correspondientes a las operaciones IV, VI y IX son del 2.5%, 1% y 2% respectivamente.

ANEXO 11-3

Estudio de sensibilidad

La estrategia recargo-reaseguro óptima no únicamente depende de las características de la operación sino que está sujeta a otras variables que intervienen en la valoración actuarial de la prima de reaseguro. En este apartado, vamos a analizar la sensibilidad del reaseguro de diferencia de siniestralidad respecto a cada una de dichas variables. A lo largo del anexo mantendremos las hipótesis asumidas anteriormente.

Para realizar tal estudio de sensibilidad, tomaremos la operación VI y mantendremos todas las características e hipótesis actuariales anteriores, a excepción de una variable cuyos valores alteraremos, al objeto de comprobar el efecto que produce tal variación sobre el coste de la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad y la estrategia recargo-reaseguro óptima.

A continuación, vamos a recoger los resultados que se desprenden del análisis de sensibilidad de cada una de las variables actuarialmente más significativas:

Interés técnico de la operación aseguradora

Interés técnico	Recargo seguridad		Coste		Coste total
	óptimo	interno	externo		
0.010	0.000	225.600	23.634	249.234	
0.020	0.000	214.800	25.092	239.892	
0.030	0.000	205.947	23.486	229.433	
0.040	0.000	198.900	23.712	222.612	
0.050	0.000	190.200	23.625	213.825	
0.060	0.000	183.900	23.532	207.432	
0.070	0.005	177.282	24.075	201.357	
0.080	0.010	173.316	23.328	196.644	
0.090	0.015	166.562	23.152	189.714	
0.100	0.025	166.665	19.800	186.465	
0.110	0.045	167.409	16.650	184.059	

Tipo de interés técnico reasegurador

Interés técnico reasegurador	Recargo seguridad óptimo	Coste interno	Coste externo	Coste total
0.000	0.025	211.096	30.900	241.996
0.010	0.020	210.066	29.176	239.242
0.020	0.005	206.977	28.152	235.129
0.030	0.000	205.947	23.486	229.433
0.040	0.000	205.947	20.904	226.851
0.050	0.000	205.947	18.585	224.532
0.060	0.000	205.947	17.172	223.119

Margen de solvencia

Margen de solvencia	Recargo seguridad óptimo	Coste interno	Coste externo	Coste total
0.000	0.000	205.947	19.800	225.747
0.050	0.000	205.947	26.775	232.722
0.100	0.000	205.947	35.310	241.257
0.150	0.005	206.977	44.160	251.137
0.200	0.005	206.977	55.800	262.777
0.250	0.005	206.977	68.250	275.227
0.300	0.020	210.066	78.000	288.066
0.350	0.025	211.096	91.125	302.221
0.400	0.035	213.155	97.860	311.015
0.450	0.040	214.185	117.885	332.070
0.500	0.045	215.215	134.100	349.315

Rentabilidad financiera del fondo del colectivo

Rentabilidad del fondo	Recargo seguridad óptimo	Coste interno	Coste externo	Coste total
0.000	0.000	205.947	131.400	337.347
0.010	0.000	205.947	88.476	294.423
0.020	0.000	205.947	48.960	254.907
0.030	0.000	205.947	23.486	229.433
0.040	0.000	205.947	8.424	214.371
0.050	0.000	205.947	4.095	210.042
0.060	0.000	205.947	3.180	209.127
0.070	0.000	205.947	2.568	208.515
0.080	0.000	205.947	1.944	207.891
0.090	0.000	205.947	1.635	207.582
0.100	0.000	205.947	1.320	207.267

Variación recargo de seguridad del reaseguro

Interés técnico	Recargo seguridad óptimo	Coste interno	Coste externo	Coste total
0.000	0.000	205.947	23.486	229.433
0.050	0.000	205.947	26.775	232.722
0.100	0.000	205.947	29.040	234.987
0.150	0.005	206.977	30.360	237.337
0.200	0.005	206.977	33.120	240.097
0.250	0.010	208.006	35.625	243.631
0.300	0.020	210.066	39.780	249.846
0.350	0.055	217.274	36.110	253.384
0.400	0.065	219.334	35.428	254.762

Conclusiones

He aquí las conclusiones alcanzadas a nuestro entender más significativas:

- Un incremento del tipo de interés técnico de la operación aseguradora produce un abaratamiento de las primas puras que repercute en una mayor eficiencia de la cobertura aseguradora. Esto se traduce en que, a partir de ciertos valores del tipo de interés técnico (7%), la estrategia óptima se ve modificada al incrementarse el recargo de seguridad óptimo aplicable. El coste total disminuye de forma igualmente apreciable respecto al tipo de interés técnico.
- Un incremento del tipo de interés técnico del reasegurador produce un abaratamiento del reaseguro lo que favorece una disminución del recargo de seguridad correspondiente a la estrategia recargo-reaseguro óptima. El coste total de la operación se ve igualmente favorecido por un incremento del tipo de interés técnico del reasegurador.

El coste interno y externo de la operación siguen una tendencia igualmente decreciente respecto al interés técnico del reasegurador. El primer decrecimiento viene explicado por la disminución del recargo óptimo aplicable. Por otra parte, el decrecimiento del coste externo viene producido por el incremento del tipo de interés aplicado por el reasegurador.

- Un incremento del margen de seguridad repercute directamente en un incremento muy sustancial del coste total de la operación dado que el nivel de solvencia exigido también es mayor. Este incremento del coste se mantiene tanto en el coste interno como en el externo. El coste interno aumenta porque el recargo óptimo también lo hace. En relación al coste externo, su incremento viene justificado por el incremento de diferencias de siniestralidad que origina el aumento del margen de solvencia.

- Una variación de la rentabilidad del fondo que gestiona el colectivo disminuye las diferencias de siniestralidad del colectivo con lo que el coste del reaseguro también resultará menor. La estrategia recargo-reaseguro óptima se caracteriza porque el recargo de seguridad no se altera, sigue siendo 0% con lo que el coste interno de la operación se mantendrá constante. La disminución de coste que conlleva un incremento de la rentabilidad del fondo se explica a través del decremento que experimenta el coste externo derivado del reaseguro, ya anteriormente justificado.
- Un incremento del recargo de seguridad del reaseguro encarece el reaseguro con lo que su eficiencia disminuye. En contrapartida, la cobertura aseguradora resultará más competitiva con lo que el recargo de seguridad óptimo también será mayor. El coste total de la operación se verá aumentado, tanto por el incremento del lado asegurador (coste interno) como reasegurador (coste externo).

Capítulo 12

Reaseguro de Diferencia de Siniestralidad aplicado en colectivos abiertos con múltiples estados

En este capítulo vamos a desarrollar la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un colectivo abierto. Para ello, analizaremos los efectos de las entradas al colectivo de nuevos asegurados.

Estas entradas inciden en la estructura del colectivo abierto, afectando a los riesgos asegurados, a las primas de reaseguro cobradas y a las diferencias de siniestralidad. Nuestro objetivo será imputar los efectos generados por las entradas de nuevos asegurados a las primas de reaseguro o, alternativamente, a las prestaciones de los asegurados.

Este nuevo contexto exige que modifiquemos el planteamiento original del reaseguro de diferencia de siniestralidad y que introduzcamos nuevas hipótesis que adecuen su aplicación a un colectivo abierto.

1 Hipótesis del modelo

Partimos de una operación con múltiples estados con las mismas características que la operación definida en el capítulo anterior. Dada la complejidad que supone el tratamiento del colectivo abierto, introduciremos una serie de hipótesis adicionales:

- El colectivo se constituye a partir de un colectivo inicial al cual se van incorporando al final de cada año nuevos asegurados. Los asegurados que ingresan en el colectivo a final de un mismo año los trataremos en un mismo colectivo que denominamos colectivo entrante de dicho año. En el momento de ingreso, todos los asegurados se encuentran en un mismo estado inicial, E_1 .
- Al final de cada año, coincidiendo con el ingreso al colectivo de los nuevos asegurados, analizaremos y valoraremos los efectos derivados de tales entradas. Como efectuamos la valoración del colectivo de forma anual, teniendo en cuenta las entradas reales de asegurados que se producen, no resultará necesario introducir hipótesis demográficas sobre las incorporaciones de asegurados al colectivo.
- Definimos como origen de tiempo, el momento en el que se constituye el colectivo inicial. Como además definimos períodos anuales, cuando nos refiramos a u , estamos aludiendo a u años después de la constitución del colectivo.

2 Planteamiento

La aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en el contexto de un colectivo abierto ofrece dos singularidades que merecen destacarse:

- Las diferencias de siniestralidad causadas por una evolución real del colectivo no prevista de acuerdo a sus probabilidades, no deben imputarse a los asegurados, ya que su aseguramiento es responsabilidad del reasegurador. Esta circunstancia hace que en el momento de valorar la entrada de los nuevos asegurados, tengamos en

cuenta la composición teórica del colectivo que éste debería mantener, de acuerdo a sus probabilidades, no la que realmente posee.

- Imputamos los efectos sobre las diferencias de siniestralidad debidas a la incorporación de nuevos asegurados a las primas de reaseguro o alternativamente a las prestaciones del colectivo.

Esta afectación de las prestaciones o primas debe producirse sin que los intereses de los asegurados del colectivo se vean perjudicados por las nuevas entradas, bien porque aumentasen las primas de reaseguro, o bien porque vieses disminuir sus prestaciones.

Imputar los efectos de las entradas de los nuevos asegurados a las prestaciones de la operación o a las primas de reaseguro, requiere que introduzcamos la siguiente nomenclatura:

- $\mathbf{p}_{[u]+t,i}^{tot}(r)$: Prima total prepagable del año r -ésimo de un asegurado “ i ”, calculada t años después de su ingreso que se produjo en u . Esta prima incorpora los efectos generados por los asegurados que ingresan en $u+t$. La prima total se obtiene como suma de la prima de la operación aseguradora y de la prima de reaseguro correspondientes.

$$\mathbf{p}_{[u]+t,i}^{tot}(r) = \mathbf{p}_{[u]+t,i}^{aseg.rec}(r) + \mathbf{p}_{[u]+t,i}^{rea.rec}(r) \quad (1)$$

Para $t = 0, \dots, m_{[u]}$, $r = u + t + 1, \dots, u + \mathbf{h}_{[u]}^i$, donde $\mathbf{h}_{[u]}^i$ representa la temporalidad de primas del asegurado i y $m_{[u]}$ el número de años hasta la extinción del colectivo entrante $D_{[u]}$.

Ambas primas se obtendrán, previa aplicación de un recargo de seguridad sobre la prima pura correspondiente:

$$P_{[u]_{+t},i}^{aseg,rec}(r) = P_{[u]_{+t},i}^{aseg}(r) \cdot (1 + I^{aseg})$$

$$P_{[u]_{+t},i}^{rea,rec}(r) = P_{[u]_{+t},i}^{rea}(r) \cdot (1 + I^{rea})$$

Donde $P_{[u]_{+t},i}^{aseg}(r)$ y $P_{[u]_{+t},i}^{rea}(r)$ simbolizan las primas puras de la operación aseguradora y de reaseguro, respectivamente. Los valores de I^{aseg} y I^{rea} representan los recargos de seguridad de las operaciones aseguradora y reaseguradora.

- $b_{[u]_{+t},i}^j(r)$: Término de la renta vencida en el estado E_j del año r -ésimo de un asegurado “ v ”, corregida t años después de su ingreso que se produjo en u , para así incorporar los efectos generados por los asegurados que ingresan en $u+t$. Se cumple que $t = 0, \dots, m_{[u]}$, $r = u + t + 1, \dots, u + m_{[u]}$.

Consecuentemente, $b_{[u]_{+t},i}^j(r)$ siendo $r = u + 1, \dots, u + m_{[u]}$, representa los términos de la renta pactada inicialmente por el asegurado “ v ”, en el momento de entrada al colectivo abierto.

- $c_{[u]_{+t},i}^{jk}(r)$: Cuantía del seguro asociado a la transición $E_j \rightarrow E_k$ del año r -ésimo a pagar al final del mismo, corregida t años después de su ingreso que tuvo lugar en u , al objeto de incorporar los efectos generados por los asegurados que ingresan en $u+t$. Se verifica que $t = 0, \dots, m_{[u]}$, $r = u + t + 1, \dots, u + m_{[u]}$ y $E_j, E_k \in E$.

Por tanto, $c_{[u]_{+t},i}^{jk}(r)$ siendo $r = u + 1, \dots, u + m_{[u]}$, representa las cuantías del seguro derivado de la transición $E_j \rightarrow E_k$ pactadas inicialmente por el asegurado “ v ”.

¹ Siendo u y t números naturales.

3 Evolución real del Colectivo abierto

Para recoger la evolución real del colectivo abierto, a medida que van incorporándose nuevos asegurados, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

- N_u : Colectivo en u , teniendo en cuenta todas las entradas de asegurados registradas hasta entonces.
- N_u^- : Colectivo en u , sin incluir las entradas los asegurados que ingresan en el colectivo en u .

Los nuevos asegurados que ingresan en el colectivo al final de un mismo año se recogen en el colectivo entrante de dicho año como sigue:

- $D_{[u]}$: Colectivo entrante en u , formado por $n_{[u]}$ asegurados cuya extinción se produce tras $m_{[u]}$ años. Los colectivos entrantes se pueden tratar como colectivos cerrados. El colectivo entrante inicial, $D_{[0]}$ representa el colectivo inicial: $D_{[0]} = N_0$.
- $D_{[u]+t}$: Colectivo $D_{[u]}$, una vez transcurridos t años de su ingreso en el colectivo abierto, siendo $t = 1, \dots, m_{[u]}$.

Los colectivos N_u y N_u^- se pueden expresar a partir de los colectivos entrantes que los integran del siguiente modo:

$$N_u = D_{[0]+u} \cup \dots \cup D_{[s]+u-s} \cup \dots \cup D_{[u]} = \bigcup_{t=0}^u D_{[t]+u-t}$$

$$N_u^- = D_{[0]+u} \cup \dots \cup D_{[s]+u-s} \cup \dots \cup D_{[u-1]+1} = \bigcup_{t=0}^{u-1} D_{[t]+u-t}$$

4 Evolución teórica del colectivo

Para evitar imputar a los asegurados los efectos de la evolución real del colectivo, debemos considerar la composición teórica del colectivo, es decir, aquella que debía derivarse de la evolución del colectivo de acuerdo a sus probabilidades. Con tal fin introduciremos y definiremos el concepto de colectivo teórico de la siguiente forma:

- \tilde{N}_u : Colectivo teórico en u , según las probabilidades de transición de sus componentes.
- \tilde{N}_u^- : Colectivo teórico en u , sin incluir los asegurados que ingresan en tal instante, recogidos en $D_{[u]}$.

De la misma forma podemos definir la evolución teórica de los colectivos entrantes:

- $\tilde{D}_{[u]+t}$: Colectivo entrante teórico t años después de su ingreso que se produjo en u , siendo $t = 1, \dots, m_{[u]}$. Se obtiene a partir de las probabilidades de transición de los integrantes de $D_{[u]}$.

Los colectivos \tilde{N}_u y \tilde{N}_u^- se pueden obtener a partir de los correspondientes colectivos integrantes que los componen.

$$\tilde{N}_u = \tilde{D}_{[0]+u} \cup \dots \cup \tilde{D}_{[u-1]+1} \cup D_{[u]} = \bigcup_{t=0}^{u-1} \tilde{D}_{[t]+u-t} \cup D_{[u]}$$

$$\tilde{N}_u^- = \tilde{D}_{[0]+u} \cup \dots \cup \tilde{D}_{[u-1]+1} = \bigcup_{t=0}^{u-1} \tilde{D}_{[t]+u-t}$$

Consecuentemente,

$$\tilde{N}_u = \tilde{N}_u^- \cup D_{[u]}$$

Hemos propuesto dos metodologías alternativas de obtención de \tilde{N}_u y \tilde{N}_u^- :

- Método de simulación de Montecarlo.
- Método de Markov. Generamos el colectivo teórico en términos esperados, proyectando al año u los diferentes subcolectivos de asegurados que ingresan en el colectivo en un mismo año con las mismas prestaciones, primas y edades, a partir de sus probabilidades de transición respectivas.

4.1 Método de simulación de Montecarlo

Simulamos \tilde{N}_u o \tilde{N}_u^- mediante la técnica de Montecarlo. Para ello, se simulan² un mismo número de veces todos los colectivos entrantes que lo forman, desde su ingreso hasta u . Este método presenta la gran ventaja que puede aplicarse a cualquier tipo de colectivo, independientemente de su estructura.

4.2 Método de Markov

En este subepígrafe vamos a explicar cómo obtener \tilde{N}_u o \tilde{N}_u^- . En primer lugar, dividimos todos los colectivos entrantes a considerar en grupos homogéneos en edad, prestaciones y primas.

$$D_{[s]} = (G_{[s]}^1 \cup \dots \cup G_{[s]}^{z_s}) = \bigcup_{k=1}^{z_s} G_{[s]}^k \quad s = 0, \dots, u-1$$

Donde z_s representa el número de subcolectivos homogéneos de $D_{[s]}$. Por su parte, $G_{[s]}^k$ simboliza un subcolectivo de $D_{[s]}$ homogéneo en prestaciones, primas y misma edad $x_{[s]}^k$, formado por $n_{[s]}^k$ asegurados, para $s = 0, \dots, u-1$ y $k = 1, \dots, z_s$.

² Dada la naturaleza cerrada de los colectivos entrantes, podremos utilizar para cada uno de ellos, la misma metodología de simulación que la sugerida en el capítulo anterior.

Definimos la evolución estocástica de cada subcolectivo homogéneo anterior $G_{[s]}^k$, siendo $s = 0, \dots, u-1$ y $k = 1, \dots, z_s$ mediante un proceso estocástico de Markov en el que su vector de estado $\tilde{l}_{[s]+u-s}^k$ representa la composición esperada de $G_{[s]}^k$ en u , que simbolizamos como $\tilde{G}_{[s]+u-s}^k$.

$$\tilde{l}_{[s]+u-s}^k = (\tilde{l}_{[s]+u-s}^{k,1}, \dots, \tilde{l}_{[s]+u-s}^{k,h}, \dots, \tilde{l}_{[s]+u-s}^{k,n})$$

Siendo $\tilde{l}_{[s]+u-s}^{k,h}$ el número entero esperado de asegurados de $G_{[s]}^k$ que ocupan el estado E_h en u , tras $u-s$ años de su ingreso. El vector $\tilde{l}_{[s]+u-s}^k$ se obtiene como sigue:

$$\tilde{l}_{[s]+u-s}^k = l_{[s]}^k \cdot P_{x_{[s]}^k}(u-s)$$

Donde

$l_{[s]}^k = (n_{[s]}^k, 0, \dots, 0)$ representa el vector de estado inicial.

$P_{x_{[s]}^k}(u-s)$ la matriz de transición entre las edades $x_{[s]}^k$ y $x_{[s]}^k + (u-s)$.

Hallados los vectores $\tilde{l}_{[s]+u-s}^k$ podremos determinar los subcolectivos teóricos correspondientes, $\tilde{G}_{[s]+u-s}^k$. Una vez conocidos éstos, obtendremos los colectivos entrantes teóricos proyectados a u .

$$\tilde{D}_{[s]+u-s} = (\tilde{G}_{[s]+u-s}^1 \cup \dots \cup \tilde{G}_{[s]+u-s}^{z_s}) = \bigcup_{k=1}^{z_s} \tilde{G}_{[s]+u-s}^k \quad s = 0, \dots, u-1$$

A partir de los valores anteriores obtendremos \tilde{N}_u o \tilde{N}_u^- . Este método presenta el inconveniente que no podemos aplicarlo a cualquier colectivo, ya que necesita dividirse el colectivo en subcolectivos homogéneos en edades, prestaciones, primas de un cierto tamaño.

En cambio, presenta la ventaja con respecto al método de simulación por Montecarlo que su tiempo de computación es menor.

5 Modelo estocástico

En este epígrafe vamos a desarrollar un modelo estocástico cuya finalidad es valorar los efectos de las entradas de los nuevos asegurados registradas en u , teniendo en cuenta \tilde{N}_u y \tilde{N}_u^- .

Con tal fin, definiremos las variables aleatorias “Valor financiero de la pérdida teórica del reasegurador en u antes de la incorporación del colectivo entrante” y “Valor financiero de la pérdida teórica del reasegurador en u después de la incorporación del colectivo entrante”.

Nótese, que hablamos de pérdida teórica porque tomamos la evolución teórica, no la real, por los motivos ya anteriormente explicados.

5.1 Variable aleatoria “Valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador antes de la incorporación del colectivo entrante”

Designamos por $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ la variable aleatoria que representa el valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador antes de incluir la entrada de $D_{[u]}$. Para su estudio y análisis, definiremos otras dos variables aleatorias:

- $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{Pr}$: Valor financiero en u de las prestaciones del reasegurador asociadas a \tilde{N}_u^- .
- $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^P$: Valor financiero en u de las primas de reaseguro asociadas a la cobertura de \tilde{N}_u^- .

El estudio de las anteriores variables aleatorias depende de la metodología empleada en la obtención del colectivo teórico:

- Si utilizamos el método de Markov, para estudiar $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr}$ y $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^p$ a partir de \tilde{N}_u^- emplearemos la misma metodología que la utilizada en el capítulo anterior con las variables aleatorias \mathbf{x}_c^{pr} y \mathbf{x}_c^p .
- Si utilizamos el enfoque de simulación por Montecarlo, repetiremos el anterior proceso para cada una de las realizaciones de \tilde{N}_u^- generadas. Finalmente, ponderaremos los resultados alcanzados, teniendo en cuenta que todas las realizaciones son equiprobables.

Por diferencia de las variables aleatorias anteriores, obtendremos la variable aleatoria “Valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador, antes de la incorporación del colectivo entrante”:

$$\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L = \mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr} - \mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^p \quad (2)$$

Consecuentemente, se cumplirá:

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr}) - E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^p)$$

5.2 Variable aleatoria “Valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador tras la incorporación del colectivo entrante”

Designaremos por $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ la variable aleatoria que representa el valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador, después de incorporar $D_{[u]}$. Apoyaremos su análisis en otras dos variables aleatorias:

- $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr}$: Valor financiero en u de las prestaciones del reasegurador asociadas a \tilde{N}_u^- .

- $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^P$: Valor financiero en u de las primas de reaseguro asociadas a la cobertura de \tilde{N}_u .

Las variables aleatorias $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr}$ y $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^P$ se obtienen de igual forma que $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr}$ y $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^P$. Por diferencia de las mismas tendremos $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$.

$$\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L = \mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr} - \mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^P \quad (3)$$

Por tanto

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^{pr}) - E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^P)$$

5.3 Análisis del efecto de la entrada de nuevos asegurados

Los efectos de la entrada de nuevos asegurados en u , los imputaremos a las prestaciones o bien a las primas de reaseguro del colectivo, de forma que, el valor financiero en u de la pérdida teórica del reasegurador esperada, no se vea afectada por la entrada de $D_{[u]}$. Para ello, igualaremos las esperanzas matemáticas de $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ y $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$.

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) \quad (4)$$

Donde $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ incluye la corrección de las prestaciones o de las primas de reaseguro, debida a la imputación de los efectos generados por la entrada de $D_{[u]}$ a los asegurados. La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ contempla las prestaciones y primas de reaseguro anteriores a la corrección.

Nótese, que si se cumpliera $E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) < E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L)$, las entradas de los nuevos asegurados beneficiarían al reasegurador ya que el valor actual esperado de su pérdida habría disminuido. Contrariamente, si $E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) > E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L)$ la entrada de nuevos asegurados perjudica al reasegurador porque el valor esperado de las pérdidas teóricas es mayor.

Dependiendo cómo imputemos los efectos derivados de las entradas de los nuevos asegurados, propondremos las dos siguientes variantes del reaseguro de diferencia de siniestralidad:

- Reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas: Los efectos de las entradas de los nuevos asegurados se trasladan a las primas de reaseguro.
- Reaseguro de diferencia de siniestralidad con contraprestaciones definidas: Las prestaciones del colectivo van variando en el tiempo con el objeto de absorber los efectos de las entradas de los nuevos asegurados. Las primas de reaseguro, una vez calculada, permanecen invariables.

6 Reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas

Los efectos sobre las diferencias de siniestralidad del colectivo debidos a la entrada de nuevos asegurados son imputados a las primas de reaseguro, manteniéndose constantes las prestaciones pactadas inicialmente. Su aplicación exige resolver anualmente la ecuación (4) y volver a calcular las primas de reaseguro en base a su resolución.

6.1 Cálculo de la prima de reaseguro

Imputaremos los efectos generados por la entrada de un colectivo entrante cualquiera $D_{[u]}$, al coeficiente de reaseguro. Para su obtención, necesitamos considerar las siguientes primas y prestaciones futuras:

$$P_{[s],i}^{aseg}(r) \quad r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} \quad s = 0, \dots, u$$

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{p}_{[s]+u-s, i}^{rea}(r) & r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} & s = 0, \dots, u \\
 \mathbf{p}_{[s], i}^{red^k}(r) & r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} & s = 0, \dots, u \\
 \\
 b_{[s], i}^j(r) & r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} & s = 0, \dots, u \\
 \\
 c_{[s], i}^{jk}(r) & r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} & s = 0, \dots, u
 \end{array}$$

Nótese que, dadas las hipótesis asumidas, las prestaciones y primas de la operación aseguradora coinciden con las inicialmente pactadas. No así las primas de reaseguro que se calculan cuando valoramos las nuevas entradas. Para calcular la imputación de los efectos de la entrada de $D_{[u]}$ al coeficiente de reaseguro, propondremos diferentes criterios que a continuación desarrollaremos.

6.2 Métodos de cálculo del coeficiente de reaseguro

Vamos a proponer dos criterios alternativos de cómo imputar los efectos de las entradas al coeficiente de reaseguro, que a continuación procedemos a explicar:

- Criterio I:

Este criterio se caracteriza por calcular anualmente, coincidiendo con el ingreso al colectivo de nuevos asegurados, un coeficiente de reaseguro de común aplicación a todos los asegurados del colectivo, tanto antiguos como nuevos. En un año cualquiera u , denominaremos tal coeficiente de reaseguro como \mathbf{d}_u . Su valor lo obtendremos, resolviendo la siguiente ecuación:

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, \mathbf{d}_u}^L) \quad (5)$$

Donde $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ incluye las primas de reaseguro anteriores. La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, \mathbf{d}_u}^L$

incluye en sus realizaciones la incógnita \mathbf{d}_u , a determinar. Una vez resuelta la ecuación (5) y conocido el valor de \mathbf{d}_u , hallaremos las nuevas primas de reaseguro para un asegurado i -ésimo cualquiera, siendo $i = 1, \dots, n_{[u]}$:

$$\mathbf{p}_{[s]+u-s,i}^{rea}(r) = \mathbf{p}_{[s],i}^{rea^*}(r) \cdot \mathbf{d}_u \quad r = u+1 \dots, s + m_{[s]} \quad s = 0, \dots, u$$

Si $\mathbf{d}_u \leq \mathbf{d}_{u-1}$, las nuevas primas de reaseguro disminuyen de valor, con lo que los antiguos asegurados resultan beneficiados por la entrada de los nuevos asegurados. En el caso poco probable de que $\mathbf{d}_u > \mathbf{d}_{u-1}$, la entrada de los nuevos asegurados perjudica a los antiguos. Para evitar este efecto negativo, dispondremos de varias actuaciones posibles:

- No dejar entrar al colectivo $D_{[u]}$.
- Dejar entrar a $D_{[u]}$ sin perjudicar a los asegurados antiguos. Para ello, mantendremos las primas de reaseguro de éstos y aumentaremos el coeficiente de reaseguro de los asegurados nuevos, y con ello sus primas de reaseguro. Este nuevo coeficiente de reaseguro que designamos por \mathbf{d}'_u lo obtenemos resolviendo la siguiente ecuación:

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, \mathbf{d}'_u}^L) \quad (6)$$

Donde la variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, \mathbf{d}'_u}^L$ considera el factor de reaseguro anterior, \mathbf{d}_{u-1} , para los antiguos asegurados y un coeficiente de reaseguro mayor \mathbf{d}'_u para los nuevos. La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ se calcula como en la ecuación (5).

La sucesión de valores no creciente $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_u$ refleja la evolución del riesgo asumido por el colectivo, conforme se registran las nuevas incorporaciones al

mismo. La principal ventaja de este criterio viene dada por la sencillez de su aplicación.

- Criterio II

Coincidiendo con el ingreso de $D_{[u]}$, el coeficiente de reaseguro aplicado en u disminuye para los antiguos asegurados en una proporción k_u . De la misma forma, el coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados se obtiene como resultado de disminuir el coeficiente que se obtiene de igualar la esperanza matemática de la pérdida reaseguradora de $D_{[u]}$ a 0, en la misma proporción k_u .

Consecuentemente, en u tendremos $(u+1)$ coeficiente de reaseguro distintos, uno por cada colectivo entrante componente de N_u . Obtendremos el valor de k_u resolviendo la siguiente ecuación:

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, k_u}^L) \quad (7)$$

Donde $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ incluye las primas de reaseguro anteriores. La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, k_u}^L$ incorpora las nuevas primas de reaseguro que contempla una disminución del coeficiente de reaseguro en una proporción k_u , de acuerdo a lo explicado anteriormente.

Si $k_u \geq 0$, las nuevas primas de reaseguro disminuyen de valor, con lo que los antiguos asegurados resultan beneficiados por la entrada de los nuevos asegurados. En el caso poco probable de que $k_u < 0$, optaríamos, a igual que en el criterio anterior, o bien a no dejarles entrar, o bien a mantener el coeficiente de reaseguro de los antiguos asegurados, imputando enteramente el efecto negativo de la entrada a los antiguos asegurados, incrementando su coeficiente de reaseguro.

La sucesión de valores no creciente k_0, \dots, k_u refleja la evolución del riesgo derivado de las entradas sucesivas de los nuevos colectivos entrantes. La ventaja de este método es que al proponer una misma variación del coeficiente de reaseguro, todos asegurados del colectivo se benefician en la misma proporción de los efectos derivados de la entrada de los nuevos asegurados.

7 Reaseguro de diferencia de siniestralidad con contraprestaciones definidas

Los efectos provocados por la entrada de nuevos asegurados se imputan a las prestaciones de los antiguos asegurados del colectivo. Las primas de reaseguro, una vez calculadas, permanecen invariables en el tiempo. La aplicación de esta modalidad obliga a replantear anualmente las prestaciones del colectivo, a partir de la ecuación (4) y a determinar las primas de reaseguro de los nuevos asegurados.

7.1 Problemática del cálculo de las nuevas prestaciones

Dada una determinada entrada de asegurados $D_{[u]}$, para imputar los efectos generados por la entrada de dicho colectivo entrante cualquiera $D_{[u]}$, asumiremos las siguientes hipótesis:

- En u , calcularemos de nuevo las prestaciones de los antiguos asegurados, como resultado de aplicar una determinada tasa de variación g_u a las inicialmente pactadas.

$$b_{[s]+u-s,i}^j(r) = b_{[s],i}^j \cdot (1 + g_u)$$

$$c_{[s]+u-s,i}^{jk}(r) = c_{[s],i}^{jk}(r) \cdot (1 + g_u)$$

Siendo $s = 0, \dots, u$, $r = u + 1, \dots, m_{[s]}$, y $i = 1, \dots, n_{[s]}$.

- Las primas de reaseguro de los nuevos asegurados se obtienen por aplicación a las primas de reaseguro básicas, de un coeficiente de reaseguro, $d_{[u]}$, que determinaremos en u .

Esta aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad presenta el inconveniente de que disponemos de una sola ecuación cuya resolución es inicialmente indeterminada porque cuenta con dos incógnitas: g_u y $d_{[u]}$.

$$E\left(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L\right) = E\left(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, g_u, d_{[u]}}^L\right) \quad (8)$$

La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, I_u, d_{[u]}}^L$ debe contemplar la cobertura reaseguradora del posible desequilibrio generado en el año u por el aumento de la provisión matemáticas del colectivo, causado por las nuevas prestaciones. La valoración de $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ se realiza según las prestaciones y primas de reaseguro anteriores. La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, I_u, d_{[u]}}^L$ necesita considerar las siguientes prestaciones y primas:

$$\mathbf{p}_{[s],i}^{aseg}(r) \quad r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} \quad s = 0, \dots, u$$

$$\mathbf{p}_{[s],i}^{rea^*}(r) \quad r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} \quad s = 0, \dots, u$$

$$\mathbf{p}_{[s],i}^{rea}(r) = \mathbf{p}_{[s],i}^{rea^*}(r) \cdot \mathbf{d}_{[s]} \quad r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} \quad s = 0, \dots, u$$

$$b_{[s]+u-s,i}^j(r) = b_{[s],i}^j \cdot (1 + g_u) \quad r = u + 1 \dots, s + m_{[s]} \quad s = 0, \dots, u$$

$$c_{[s]+u-s, i}^{jk}(r) = c_{[s], i}^{jk}(r) \cdot (1 + \mathbf{g}_u) \quad r = u + 1 \dots, u + m_{[s]} \quad s = 0, \dots, u$$

Nótese que las primas de reaseguro consideradas se calculan en el año de ingreso del colectivo entrante al que pertenece cada asegurado. Las prestaciones se calculan anualmente coincidiendo con la valoración de la entrada de $D_{[u]}$.

Resolveremos la indeterminación de la ecuación (8), introduciendo algún tipo de restricción que responda a algún criterio actuarial. En el siguiente subepígrafe analizaremos el problema.

7.2 Métodos de cálculo de nuevas prestaciones

En este epígrafe desarrollaremos varios criterios que permitan obtener conjuntamente los valores de I_u y $d_{[u]}$ a partir de la ecuación (8).

- Criterio I:

El coeficiente de reaseguro aplicado a todos los colectivos entrantes es el mismo e igual a un valor \bar{d} .

$$d_{[s]} = \bar{d} \quad s = 0, \dots, u$$

Una vez determinado \bar{d} y sustituido su valor en la ecuación (8), ésta únicamente tendrá una sola incógnita, \mathbf{g}_u cuyo valor podremos deducir. Como hipótesis adicional, podríamos asumir que el valor de \bar{d} viene dado por el coeficiente de reaseguro, que resulta de la siguiente ecuación.

$$E(\mathbf{x}_{D_{[0], \bar{d}}}^L) = 0 \quad (9)$$

Esta última hipótesis resulta técnicamente aceptable cuando el colectivo inicial $D_{[0]}$ tiene un peso muy considerable sobre el colectivo N_u . Por ello su utilización suele resultar más acertada a corto plazo. Las primas de reaseguro obtenidas por aplicación de este criterio únicamente tienen en cuenta la estructura del colectivo inicial.

- Criterio II

El coeficiente de reaseguro tiene en cuenta exclusivamente la estructura y tamaño del colectivo entrante, al determinarse su valor solucionando la ecuación que resulta de igualar la esperanza matemática de la pérdida reaseguradora asociada al colectivo entrante a 0.

$$E\left(\mathbf{x}_{D_{[0]}, a_{[s]}}^L\right) = 0 \quad s = 0, \dots, u \quad (10)$$

Por tanto, tendremos tantos coeficientes de reaseguro distintos como entradas haya registrado el colectivo: $\mathbf{d}_{[0]}, \dots, \mathbf{d}_{[u]}$. Su conocimiento y sustitución en (8) nos permitirá hallar \mathbf{g}_u .

Este criterio resulta técnicamente aceptable cuando el tamaño de la entrada de asegurados es importante con relación al tamaño del colectivo abierto. Cuando no se dé esta circunstancia, su aplicación resulta más discutible porque en tal caso las primas de reaseguro no se benefician del tamaño del colectivo en su conjunto. Esto deriva en un encarecimiento de las primas de reaseguro de los nuevos asegurados

Las primas de reaseguro obtenidas a través de este método solamente tienen en cuenta la estructura del colectivo entrante.

- Criterio III

En este criterio aplicaremos a las primas de los nuevos asegurados el mismo coeficiente de reaseguro $d_{[u]}$ que el obtenido para el caso de las prestaciones definidas según el criterio I. A los antiguos asegurados les imputaremos el mismo excedente actuarial generado en tal caso, corrigiendo sus prestaciones originales por el coeficiente g_u .

El coeficiente de reaseguro $d_{[u]}$ lo obtenemos de la ecuación (5) y g_u lo deducimos de la resolución de la ecuación (8), previa sustitución en la misma de $d_{[u]}$. Las primas de reaseguro de los asegurados así obtenidas se benefician tanto por el mayor tamaño del colectivo entrante como por la estructura del colectivo abierto en el momento de registrarse su ingreso.

- Criterio IV

En este criterio aplicaremos a las primas de los nuevos asegurados el mismo coeficiente de reaseguro $d_{[u]}$ que el obtenido para el caso de las prestaciones definidas según el criterio II. A los antiguos asegurados les imputaremos el mismo excedente actuarial generado en tal caso, corrigiendo sus prestaciones originales por el coeficiente g_u .

El coeficiente de reaseguro $d_{[u]}$ lo obtenemos de la ecuación (7) y g_u lo resolvemos de la ecuación (8), previa sustitución en la misma de $d_{[u]}$. Este método se basa en el criterio II del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas. Por ello, su aplicación, no únicamente tiene presente la estructura del colectivo abierto, sino que además beneficia de la misma forma a todos los asegurados, unos en forma de incremento de sus prestaciones (asegurados antiguos), otros a través de la aplicación del coeficiente de reaseguro $d_{[u]}$ (asegurados nuevos).

Suponiendo conocidos los valores de $\mathbf{d}_{[u]}$ y \mathbf{g}_u por algunos de los anteriores criterios, procedemos a analizar sus repercusiones sobre el colectivo.

- Si $\mathbf{g}_u \geq \mathbf{g}_{u-1}$ y $\mathbf{d}_{[u]} \leq \mathbf{d}_{[u-1]}$ para los criterios III y IV, la incorporación del colectivo entrante $D_{[u]}$ produce un efecto beneficioso o neutral sobre el colectivo abierto en general.
- En caso contrario, los nuevos asegurados perjudican en su conjunto al colectivo. En tal caso podemos no dejar entrar al colectivo entrante o bien dejarlo entrar sin perjudicar los antiguos asegurados, calculando un coeficiente de reaseguro, $\mathbf{d}'_{[u]}$, más alto para los nuevos asegurados y manteniendo las prestaciones y primas de reaseguro de los antiguos asegurados.

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u, \mathbf{d}'_{[u]}}^L) \quad (11)$$

En este caso se verificará que $\mathbf{g}_u = \mathbf{g}_{u-1}$ y $\mathbf{d}_{[u]} = \mathbf{d}'_{[u]}$.

En los criterios I y II, obtendremos una sucesión de valores $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_u$, estrictamente no decreciente, que reflejará la evolución del riesgo del colectivo abierto a lo largo del tiempo, paralelamente a las incorporaciones de nuevos asegurados que se producen. En los criterios III y IV podremos efectuar ese mismo seguimiento con la evolución de $\mathbf{d}_{[0]}, \dots, \mathbf{d}_{[u]}$.

ANEXO 12-1

Aplicación numérica del Reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas

En el presente anexo vamos a plantear la aplicación práctica del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas, para cada uno de los dos criterios enunciados y desarrollados con anterioridad. Para ello, trataremos las operaciones de vida estudiadas en el anexo del capítulo 14 con las mismas características e hipótesis actuariales.

En cada una de las aplicaciones numéricas que desarrollemos, analizaremos el efecto sobre un colectivo inicial de 100 asegurados producido por las entradas de nuevos asegurados al año de su constitución. Supondremos que el colectivo entrante es homogéneo y responde a las mismas características, en cuanto a edad y prestaciones, que el colectivo inicial, variando su tamaño entre 20 y 200 asegurados. Dada la naturaleza homogénea de los colectivos, utilizaremos la técnica teórica de Markov.

De acuerdo al Reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas, estudiaremos la variación de las primas de reaseguro a través del seguimiento de la evolución del coeficiente de reaseguro, para cada operación y para cada tamaño del colectivo entrante sometido a estudio.

La nomenclatura que vamos a emplear en el desarrollo del anexo es la siguiente:

$n_{[1]}$: Tamaño del colectivo entrante en 1.

\ddot{a}_o : Coeficiente de reaseguro aplicado en el inicio.

\ddot{a}_1^I : Coeficiente de reaseguro calculado en 1 según el criterio I, para todos los asegurados del colectivo abierto.

$\ddot{a}_1^{II,0}$: Coeficiente de reaseguro calculado en 1 según el criterio II para los asegurados que entraron en el colectivo en el inicio.

$\ddot{a}_1^{II,2}$: Coeficiente de reasegurado calculado en 1 según el criterio II para los asegurados que entran en el colectivo en 1.

k_1 : Tasa de variación del coeficiente de reaseguro en 1 aplicable a todo el colectivo, según el criterio II.

Aplicación del Criterio I

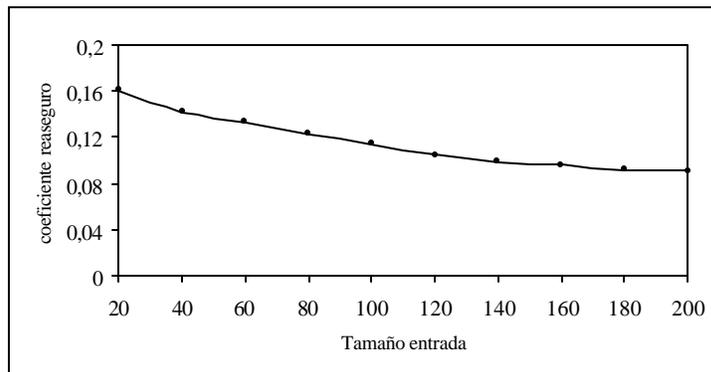
- Operación I: Seguro por invalidación permanente.

Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_1'
20	0.17127	0.16039
40	0.17127	0.14199
60	0.17127	0.13297
80	0.17127	0.12263
100	0.17127	0.11374
120	0.17127	0.10494
140	0.17127	0.09889
160	0.17127	0.09573
180	0.17127	0.09147
200	0.17127	0.09058



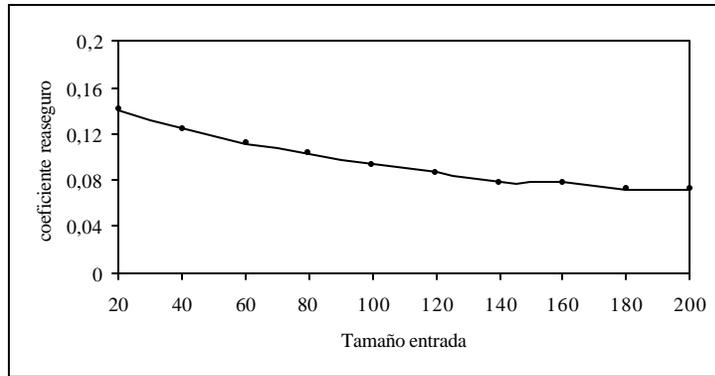
- Operación II: Renta de invalidez temporal.

Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_1^I
20	0.15475	0.14062
40	0.15475	0.12477
60	0.15475	0.11229
80	0.15475	0.10316
100	0.15475	0.09406
120	0.15475	0.08690
140	0.15475	0.07898
160	0.15475	0.07826
180	0.15475	0.07272
200	0.15475	0.07259



- Operación III: Seguro mixto de invalidación permanente y fallecimiento.

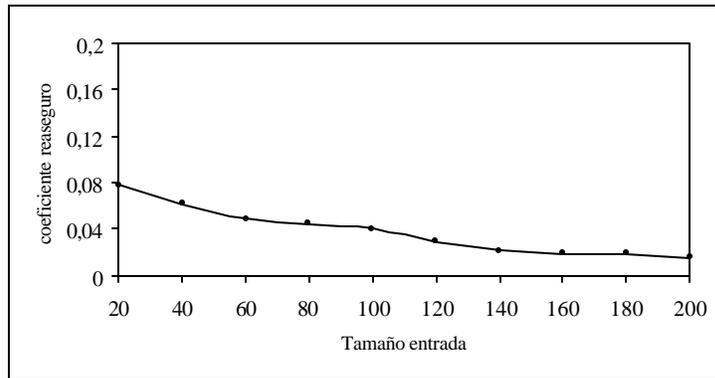
Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Cuantía del seguro de fallecimiento: 10 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_1^I
20	0.09716	0.07798
40	0.09716	0.06129
60	0.09716	0.04839
80	0.09716	0.04460
100	0.09716	0.04016
120	0.09716	0.02896
140	0.09716	0.02153
160	0.09716	0.01870
180	0.09716	0.01852
200	0.09716	0.01502



- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente.

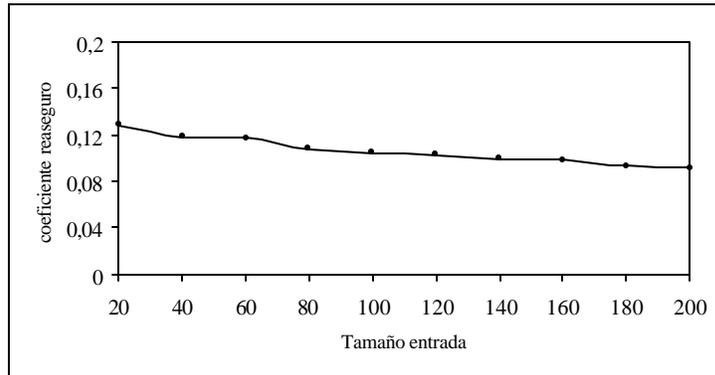
Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de jubilación: 1 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_1^I
20	0.13699	0.12797
40	0.13699	0.11798
60	0.13699	0.11686
80	0.13699	0.10768
100	0.13699	0.10415
120	0.13699	0.10241
140	0.13699	0.09891
160	0.13699	0.09827
180	0.13699	0.09306
200	0.13699	0.09132



- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento.

Edad de los asegurados: 30 años.

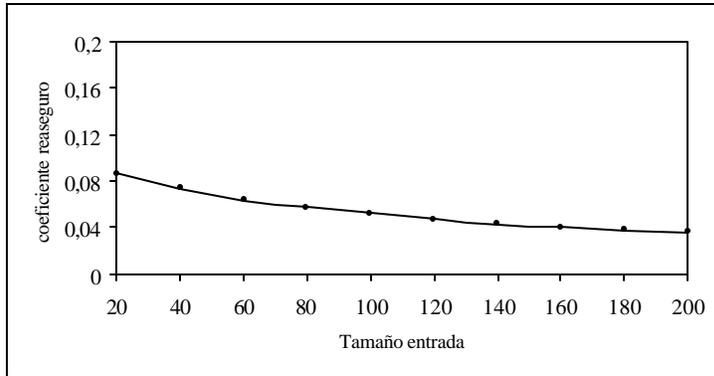
Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Cuantía del seguro de fallecimiento: 10 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_t^I
20	0.09451	0.08655
40	0.09451	0.07340
60	0.09451	0.06362
80	0.09451	0.05732
100	0.09451	0.05227
120	0.09451	0.04703
140	0.09451	0.04300
160	0.09451	0.04006
180	0.09451	0.03790

200 0.09451 0.03565



- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación.

Edad de los asegurados: 30 años.

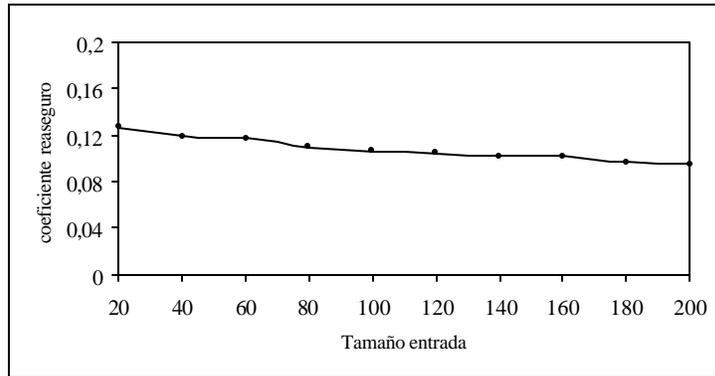
Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Término de la renta de jubilación: 1 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_t^I
20	0.13641	0.12623
40	0.13641	0.11890
60	0.13641	0.11750
80	0.13641	0.10933
100	0.13641	0.10638
120	0.13641	0.10451
140	0.13641	0.10156
160	0.13641	0.10008

180	0.13641	0.09697
200	0.13641	0.09522



- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente

Edad de los asegurados: 30 años.

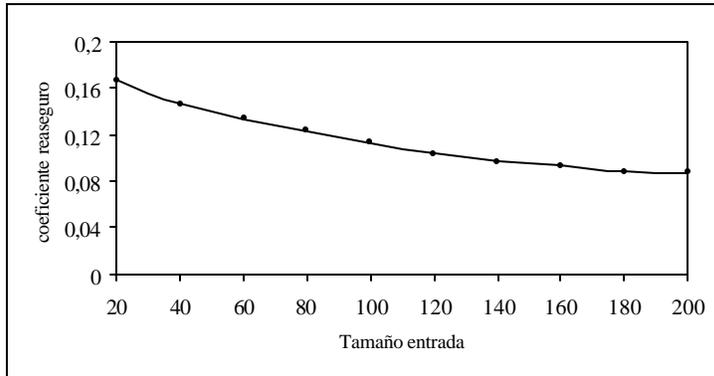
Edad de jubilación: 65 años.

Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_t^I
20	0.18252	0.16637
40	0.18252	0.14626
60	0.18252	0.13368
80	0.18252	0.12297
100	0.18252	0.11279
120	0.18252	0.10327

140	0.18252	0.09644
160	0.18252	0.09349
180	0.18252	0.08838
200	0.18252	0.08749



- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente

Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

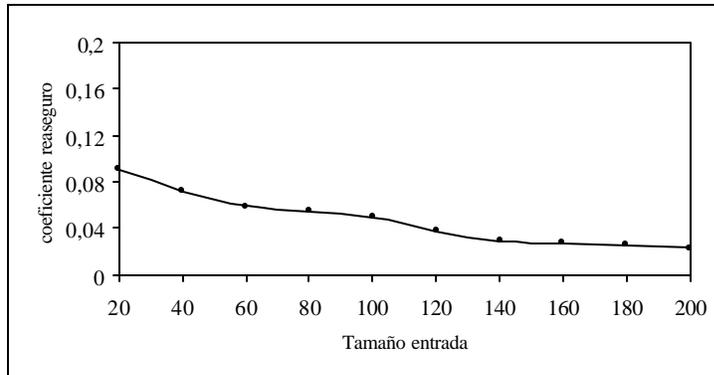
Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Cuantía del seguro de fallecimiento: 10 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

$n_{[1]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_1^I
20	0.10983	0.09020
40	0.10983	0.07191
60	0.10983	0.05904
80	0.10983	0.05463
100	0.10983	0.04919

120	0.10983	0.03739
140	0.10983	0.02948
160	0.10983	0.02707
180	0.10983	0.02571
200	0.10983	0.02299



- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente

Edad de los asegurados: 30 años.

Edad de jubilación: 65 años.

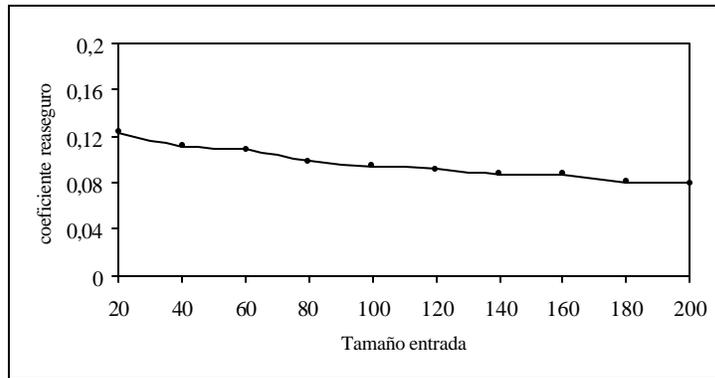
Término de la renta de invalidez temporal: 1 u.m.

Término de la renta de jubilación: 1 u.m.

Cuantía del seguro de invalidación permanente: 10 u.m.

$n_{[t]}$	\ddot{a}_0	\ddot{a}_1^I
20	0.13159	0.12270
40	0.13159	0.11100
60	0.13159	0.10843
80	0.13159	0.09804
100	0.13159	0.09427

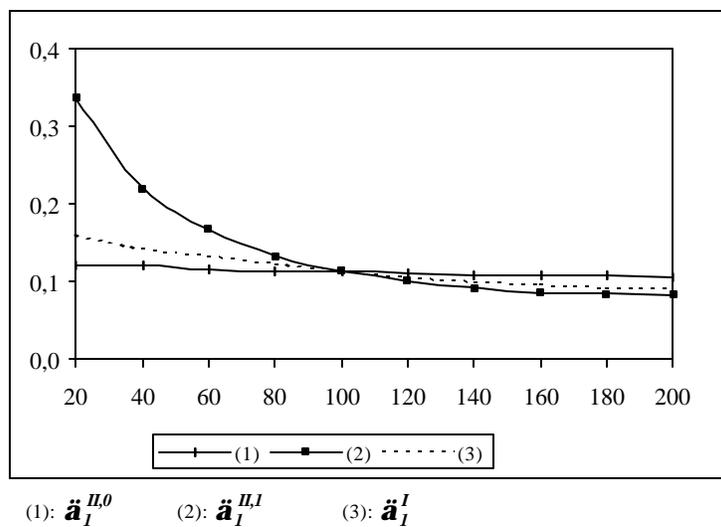
120	0.13159	0.09117
140	0.13159	0.08687
160	0.13159	0.08680
180	0.13159	0.08047
200	0.13159	0.07908



Aplicación del criterio II

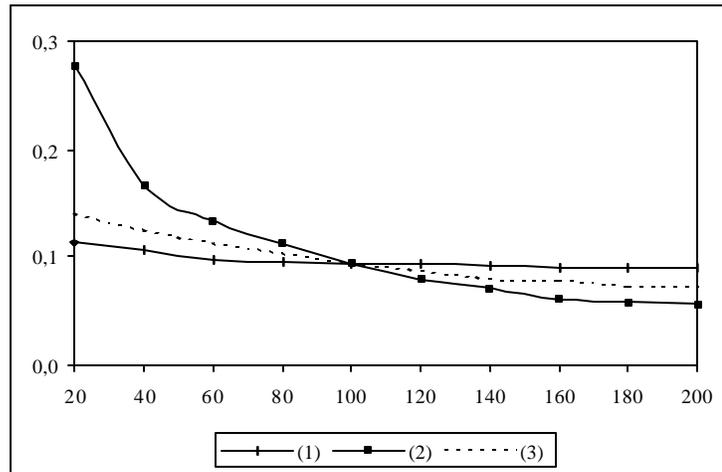
- Operación I: Seguro por invalidación permanente

$n_{[1]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,1}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,12131	0,33652	0,16039	0,29172
40	0,12076	0,22033	0,14199	0,29489
60	0,11436	0,16775	0,13297	0,33229
80	0,11363	0,13269	0,12263	0,33657
100	0,11374	0,11374	0,11374	0,33690
120	0,11125	0,10019	0,10494	0,35042
140	0,10890	0,09235	0,09889	0,36414
160	0,10723	0,08540	0,09573	0,37393
180	0,10637	0,08385	0,09147	0,37892
200	0,10580	0,08298	0,09058	0,38224



- Operación II: Renta de invalidez temporal

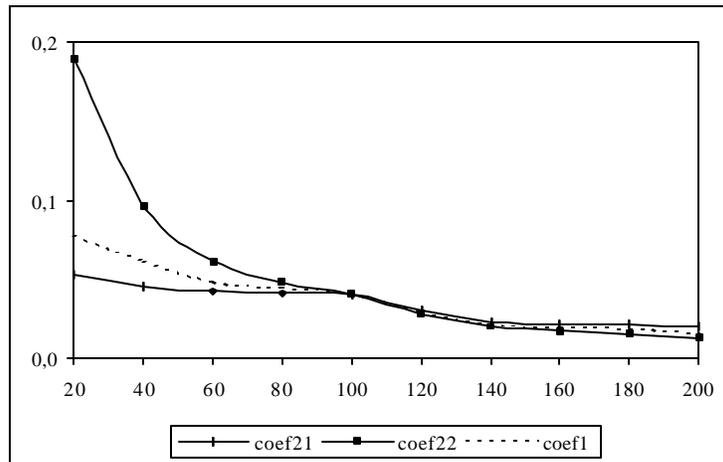
$n_{[I]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,I}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,11333	0,27835	0,14062	0,26765
40	0,10608	0,16692	0,12477	0,31451
60	0,09735	0,13474	0,11229	0,37095
80	0,09476	0,11262	0,10316	0,38764
100	0,09406	0,09406	0,09406	0,39218
120	0,09366	0,07944	0,08690	0,39474
140	0,09206	0,07055	0,07898	0,40512
160	0,09064	0,06040	0,07826	0,41430
180	0,09014	0,05767	0,07272	0,41751
200	0,08999	0,05610	0,07259	0,41848



(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,I}$ (3): \ddot{a}_I^I

- Operación III: Seguro mixto de invalidación permanente y fallecimiento.

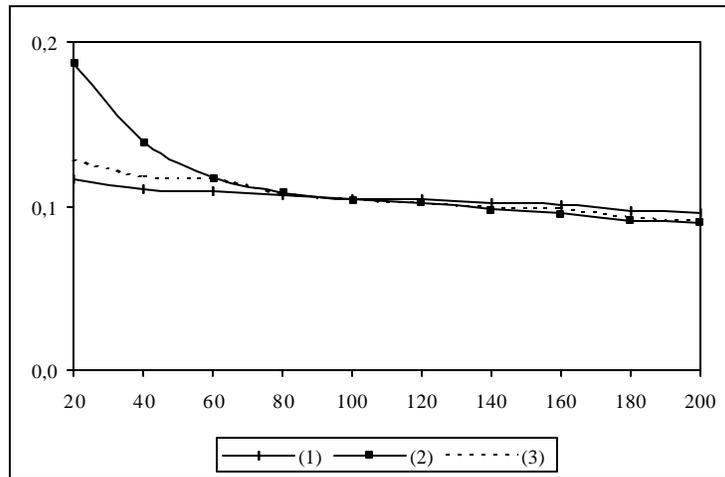
$n_{[t]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,I}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,05333	0,18971	0,07798	0,45111
40	0,04587	0,09608	0,06129	0,52790
60	0,04190	0,06092	0,04839	0,56873
80	0,04104	0,04862	0,04460	0,57761
100	0,04016	0,04016	0,04016	0,58666
120	0,02977	0,02835	0,02896	0,69364
140	0,02329	0,02040	0,02153	0,76033
160	0,02168	0,01702	0,01870	0,77688
180	0,02143	0,01555	0,01852	0,77943
200	0,02024	0,01267	0,01502	0,79168



(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,1}$ (3): \ddot{a}_I^I

- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente.

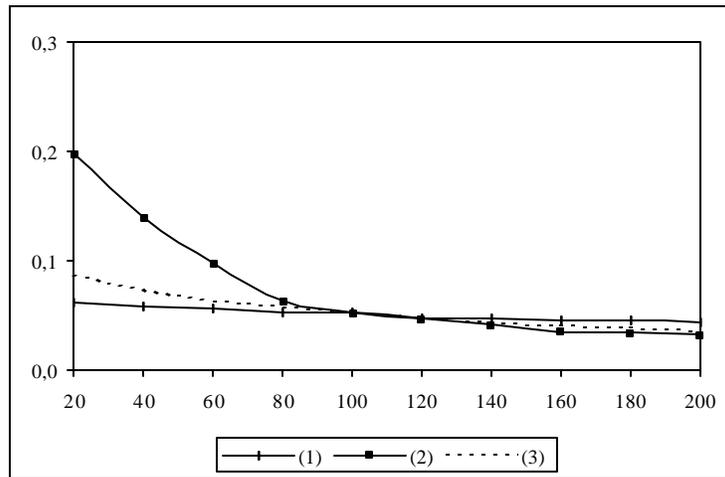
$n_{[I]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,1}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,11615	0,18736	0,12797	0,16150
40	0,10974	0,13930	0,11798	0,20774
60	0,10911	0,11745	0,11686	0,21230
80	0,10669	0,10791	0,10768	0,22979
100	0,10415	0,10415	0,10415	0,24416
120	0,10373	0,10228	0,10241	0,25115
140	0,10146	0,09798	0,09891	0,26751
160	0,10091	0,09536	0,09827	0,27152
180	0,09746	0,09140	0,09306	0,29645
200	0,09592	0,08972	0,09132	0,30752



(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,I}$ (3): \ddot{a}_I^I

- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento.

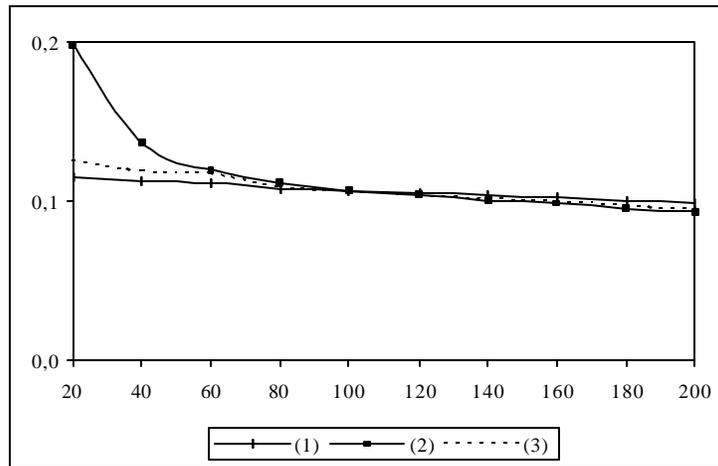
$n_{[I]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,I}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,06203	0,19771	0,08655	0,34371
40	0,05850	0,13917	0,07340	0,38104
60	0,05547	0,09734	0,06321	0,41311
80	0,05308	0,06320	0,05730	0,43840
100	0,05227	0,05227	0,05227	0,44694
120	0,04772	0,04651	0,04703	0,49510
140	0,04614	0,04097	0,04300	0,51175
160	0,04586	0,03422	0,04000	0,51477
180	0,04550	0,03365	0,03790	0,51862
200	0,04412	0,03183	0,03565	0,53312



(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,I}$ (3): \ddot{a}_I^I

- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación.

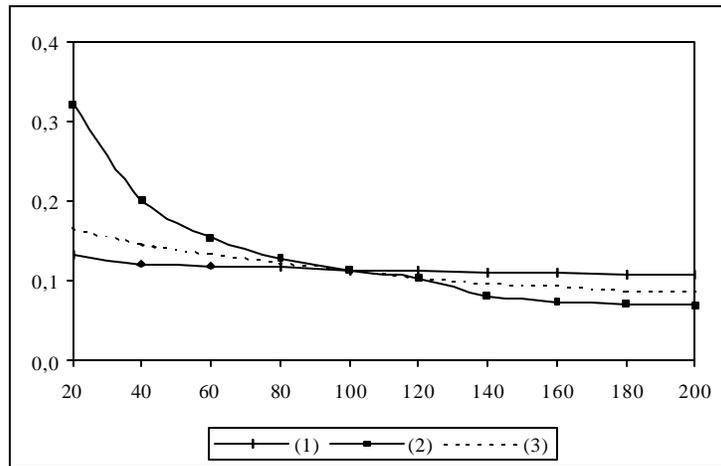
$n_{[t]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,I}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,11515	0,19801	0,12623	0,15585
40	0,11216	0,13637	0,11890	0,17775
60	0,11173	0,11959	0,11750	0,18095
80	0,10764	0,11125	0,10933	0,21094
100	0,10638	0,10638	0,10638	0,22009
120	0,10521	0,10399	0,10451	0,22873
140	0,10339	0,10039	0,10156	0,24209
160	0,10271	0,09860	0,10008	0,24704
180	0,10010	0,09541	0,09697	0,26617
200	0,09875	0,09363	0,09522	0,27611



(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,I}$ (3): \ddot{a}_I^I

- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente

$n_{[I]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,I}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,13202	0,32208	0,16637	0,27663
40	0,12190	0,20122	0,14626	0,33206
60	0,11970	0,15469	0,13368	0,34413
80	0,11766	0,12896	0,12297	0,35531
100	0,11279	0,11279	0,11279	0,38197
120	0,11181	0,10316	0,10327	0,38733
140	0,11095	0,08219	0,09644	0,39205
160	0,11010	0,07361	0,09349	0,39671
180	0,10803	0,07107	0,08838	0,40806
200	0,10730	0,06978	0,08749	0,41206

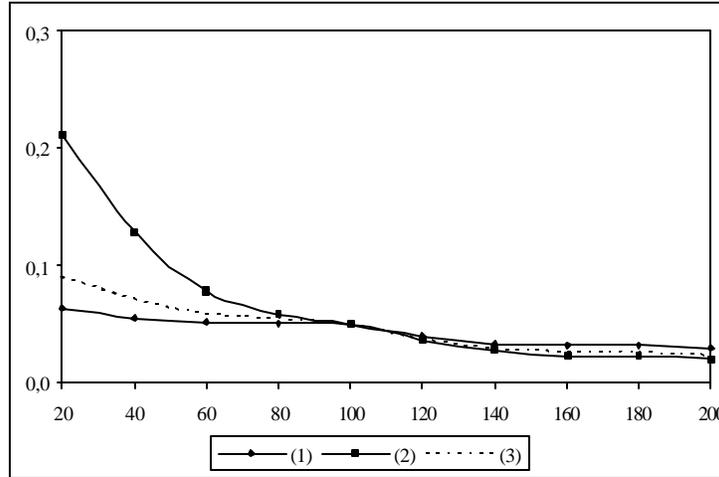


(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,I}$ (3): \ddot{a}_I^I

- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente

$n_{[1]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,I}$	\ddot{a}_I^I	k_1
20	0,06333	0,21197	0,09020	0,41859
40	0,05473	0,12793	0,07191	0,49755
60	0,05141	0,07828	0,05904	0,52802
80	0,05069	0,05826	0,05463	0,53467
100	0,04919	0,04919	0,04919	0,54843
120	0,03915	0,03607	0,03739	0,64064
140	0,03272	0,02739	0,02948	0,69964
160	0,03248	0,02246	0,02707	0,70186
180	0,03193	0,02292	0,02571	0,70688

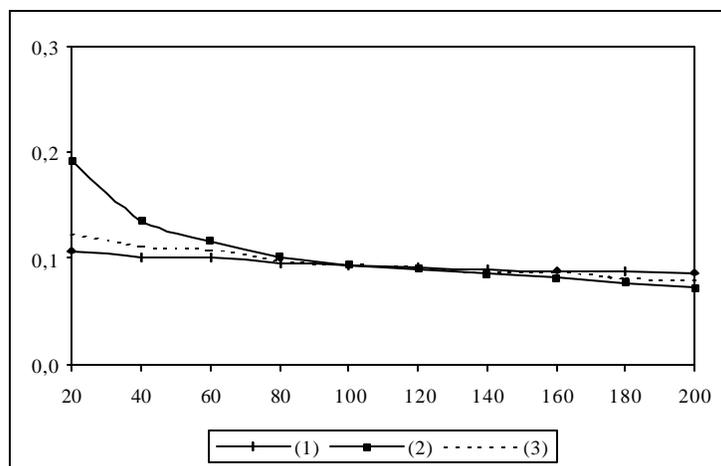
200 0,02967 0,01998 0,02299 0,72759



(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,I}$ (3): \ddot{a}_I^I

- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente

$n_{[I]}$	$\ddot{a}_I^{II,0}$	$\ddot{a}_I^{II,I}$	\ddot{a}_I^I	k_I
20	0,10749	0,19162	0,12270	0,18312
40	0,10121	0,13522	0,11100	0,23089
60	0,10009	0,11600	0,10843	0,23942
80	0,09545	0,10097	0,09804	0,27467
100	0,09427	0,09427	0,09427	0,28361
120	0,09187	0,09065	0,09117	0,30187
140	0,08931	0,08529	0,08687	0,32129
160	0,08826	0,08129	0,08680	0,32931
180	0,08750	0,07695	0,08047	0,33507
200	0,08680	0,07273	0,07908	0,34035



(1): $\ddot{a}_I^{II,0}$ (2): $\ddot{a}_I^{II,I}$ (3): \ddot{a}_I^I

Conclusiones

Los principales resultados a que llegamos con este estudio son los siguientes:

- Las primas totales que pagan los asegurados son fácilmente calculables a partir del coeficiente de reaseguro correspondiente, recogido en las anteriores tablas. Al respecto, recogemos un sencillo ejemplo extraído de la aplicación del criterio I en la operación I, que detalla el cálculo de la prima total.

$n_{[I]}$	prima reaseguro		prima	prima	prima
	básica en 1	\ddot{a}_I^I	reaseguro en 1	aseguradora en 1	total en 1
20	0.04514	0.16039	0.00724	0.04161	0.04885

40	0.04514	0.14199	0.00641	0.04161	0.04802	
60	0.04514	0.13297	0.00600	0.04161	0.04761	
80	0.04514	0.12263	0.00554	0.04161	0.04715	
100	0.04514	0.11374	0.00513	0.04161	0.04674	
120	0.04514	0.10494	0.00474	0.04161	0.04635	140
0.04514	0.09889	0.00446	0.04161	0.04607		
160	0.04514	0.09573	0.00432	0.04161	0.04593	
180	0.04514	0.09147	0.00419	0.04161	0.04580	
200	0.04514	0.09058	0.00409	0.04161	0.04570	

- Como las características iniciales de los asegurados que componen $D_{[0]}$ coinciden con las de los integrantes de $D_{[1]}$, las primas de la operación aseguradora y las primas de reaseguro básicas son iguales para todos los asegurados.

Además, como el criterio I aplica un único coeficiente de reaseguro para todos los asegurados, todas las primas de reaseguro resultantes son iguales, de igual modo que lo son, las primas totales. Esto no sucede en el criterio II.

- Los coeficientes de reaseguro calculados por ambos criterios se benefician del tamaño del colectivo entrante. En efecto, en el criterio I, observamos claramente que d_1^I sigue una evolución decreciente en relación al tamaño del colectivo entrante. Por su parte, observamos que la tasa de reducción del coeficiente de reaseguro, k_1 , calculada por el criterio II, decrece igualmente con el tamaño del colectivo entrante. Las primas totales que pagan los asegurados se verán afectadas de la misma forma.
- En la aplicación del criterio I, vemos que se cumple que $d_1^I < d_0$, lo que confirma que la incorporación del colectivo entrante $D_{[1]}$ es positiva para el colectivo abierto. En el criterio II, la positividad de k_1 corrobora el efecto beneficioso de la entrada

de $D_{[1]}$.

- En el criterio I, la evolución del coeficiente de reaseguro tras la entrada de nuevos asegurados se asemeja considerablemente a su variación en un colectivo cerrado. Gráficamente, la forma de las funciones es muy similar.
- Con el criterio I, imputamos todo el efecto positivo generado por la entrada de $D_{[1]}$ a las primas de reaseguro a través del coeficiente de reaseguro, d_1^I , de común aplicación a todos los asegurados. El criterio II tiene en cuenta su coeficiente de reaseguro anterior, disminuyendo éste en una misma proporción. Con el criterio I, a diferencia del II, los asegurados inicialmente con mayor coeficiente de reaseguro se igualan con el resto porque se les aplica el mismo coeficiente de reaseguro.

Por ello, el criterio I, comparativamente con el II, resulta más beneficioso para los asegurados con un mayor coeficiente de reaseguro anterior (los nuevos asegurados). Consecuentemente, se verifican las siguientes relaciones:

$$Si n_{[1]} < 100 \Rightarrow \begin{cases} d_1^{II,0} < d_1^I \\ d_1^{II,1} > d_1^I \end{cases} \Rightarrow d_1^{II,0} < d_1^I < d_1^{II,1}$$

$$Si n_{[1]} = 100 \Rightarrow d_1^{II,0} = d_1^{II,1} = d_1^I$$

$$Si n_{[1]} > 100 \Rightarrow \begin{cases} d_1^{II,0} > d_1^I \\ d_1^{II,1} < d_1^I \end{cases} \Rightarrow d_1^{II,1} < d_1^I < d_1^{II,0}$$

ANEXO 12-2

Aplicación numérica del Reaseguro de diferencia de siniestralidad con contraprestaciones definidas

En este anexo, repetiremos el anterior análisis pero repercutiendo los efectos de las entradas sobre las prestaciones de los antiguos asegurados en lugar de sobre las primas de reaseguro, de acuerdo a cada uno de los 4 criterios propuestos. La nomenclatura que vamos a seguir en el desarrollo del anexo es la siguiente:

$n_{[1]}$: Tamaño del colectivo entrante en 1.

$\ddot{a}_{[\theta]}$: Coeficiente de reaseguro calculado en 0 y aplicado desde entonces a los asegurados que entran en el colectivo abierto en 0.

$\ddot{a}_{[1]}^I$: Coeficiente de reaseguro calculado en 1, con el criterio I, igual a $\ddot{a}_{[\theta]}$.

$\ddot{a}_{[1]}^{II}$: Coeficiente de reaseguro calculado en 1, según el criterio II y aplicado desde entonces a los asegurados que entran en el colectivo abierto en 1.

$\ddot{a}_{[1]}^{III}$: Coeficiente de reaseguro calculado en 1, según el criterio III y aplicado desde entonces a los asegurados que entran en el colectivo abierto en 1.

$\ddot{a}_{[1]}^{IV}$: Coeficiente de reaseguro calculado en 1, según el criterio IV y aplicado desde entonces a los asegurados que entran en el colectivo abierto en 1.

$\tilde{\mathbf{a}}_I^I$: Tasa de variación de las prestaciones de los asegurados antiguos en 1, según el criterio I.

$\tilde{\mathbf{a}}_I^{II}$: Tasa de variación de las prestaciones de los asegurados antiguos en 1, según el criterio II.

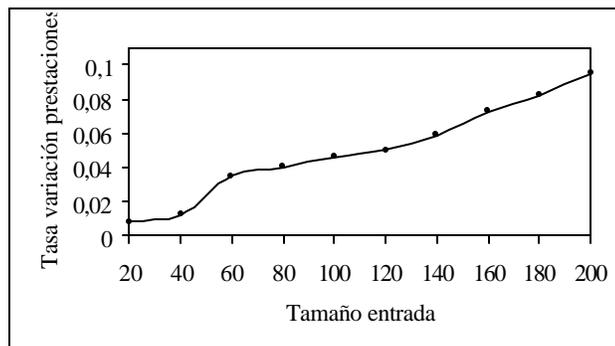
$\tilde{\mathbf{a}}_I^{III}$: Tasa de variación de las prestaciones de los asegurados antiguos en 1, según el criterio III.

$\tilde{\mathbf{a}}_I^{IV}$: Tasa de variación de las prestaciones de los asegurados antiguos en 1, según el criterio IV.

Aplicación del criterio I

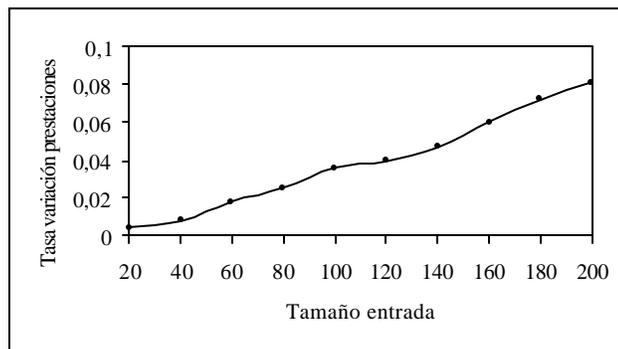
- Operación I: Seguro por invalidación permanente

$n_{[I]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[I]}^I$	\tilde{a}_I^I
20	0.17127	0.17127	0.008
40	0.17127	0.17127	0.012
60	0.17127	0.17127	0.035
80	0.17127	0.17127	0.042
100	0.17127	0.17127	0.046
120	0.17127	0.17127	0.054
140	0.17127	0.17127	0.059
160	0.17127	0.17127	0.073
180	0.17127	0.17127	0.082
200	0.17127	0.17127	0.095



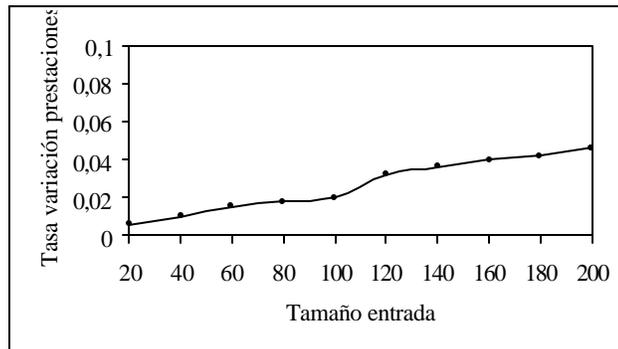
- Operación II: Renta de invalidez temporal

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\ddot{a}_I^I
20	0.15475	0.15475	0.004
40	0.15475	0.15475	0.008
60	0.15475	0.15475	0.018
80	0.15475	0.15475	0.025
100	0.15475	0.15475	0.036
120	0.15475	0.15475	0.044
140	0.15475	0.15475	0.047
160	0.15475	0.15475	0.061
180	0.15475	0.15475	0.072
200	0.15475	0.15475	0.081



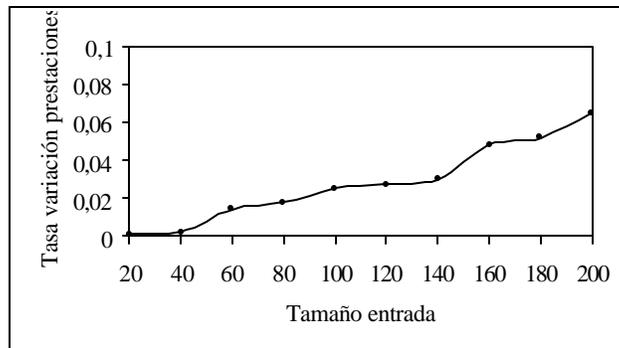
- Operación III: Seguro mixto de invalidación permanente y fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\ddot{a}_I^I
20	0.09716	0.09716	0.006
40	0.09716	0.09716	0.012
60	0.09716	0.09716	0.015
80	0.09716	0.09716	0.018
100	0.09716	0.09716	0.022
120	0.09716	0.09716	0.032
140	0.09716	0.09716	0.036
160	0.09716	0.09716	0.041
180	0.09716	0.09716	0.042
200	0.09716	0.09716	0.046



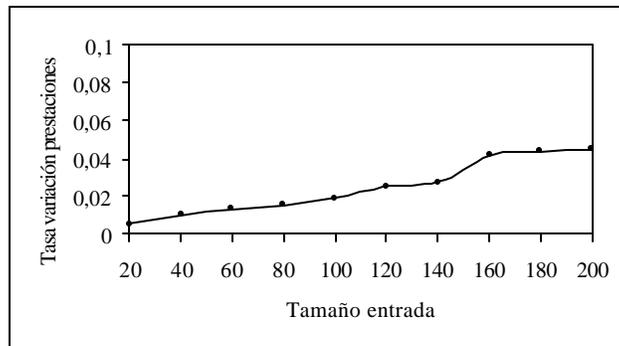
- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\ddot{a}_I^I
20	0.13699	0.13699	0.001
40	0.13699	0.13699	0.002
60	0.13699	0.13699	0.014
80	0.13699	0.13699	0.018
100	0.13699	0.13699	0.025
120	0.13699	0.13699	0.027
140	0.13699	0.13699	0.034
160	0.13699	0.13699	0.048
180	0.13699	0.13699	0.052
200	0.13699	0.13699	0.065



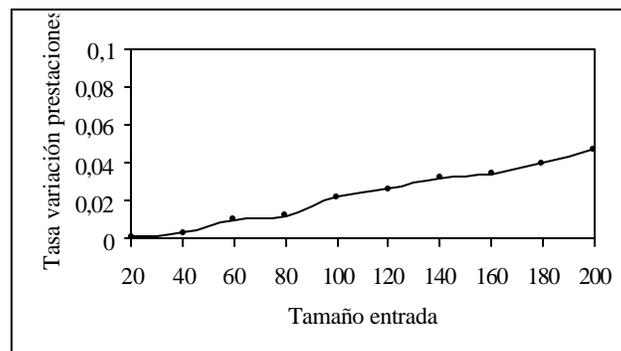
- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\tilde{a}_t^I
20	0.09451	0.09451	0.005
40	0.09451	0.09451	0.011
60	0.09451	0.09451	0.012
80	0.09451	0.09451	0.015
100	0.09451	0.09451	0.019
120	0.09451	0.09451	0.025
140	0.09451	0.09451	0.027
160	0.09451	0.09451	0.042
180	0.09451	0.09451	0.044
200	0.09451	0.09451	0.045



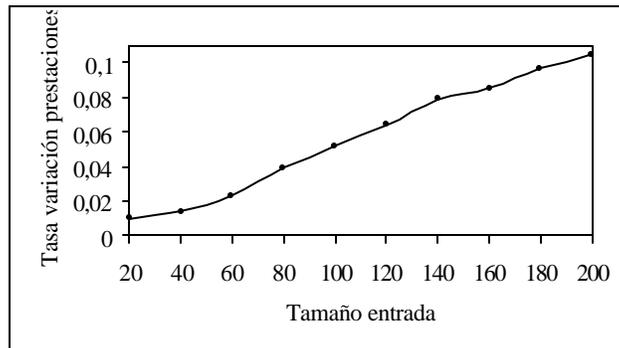
- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\ddot{a}_t^I
20	0.13641	0.13641	0.001
40	0.13641	0.13641	0.003
60	0.13641	0.13641	0.013
80	0.13641	0.13641	0.012
100	0.13641	0.13641	0.022
120	0.13641	0.13641	0.026
140	0.13641	0.13641	0.032
160	0.13641	0.13641	0.034
180	0.13641	0.13641	0.041
200	0.13641	0.13641	0.047



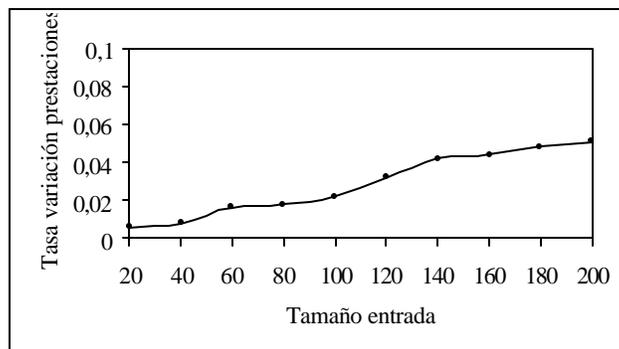
- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\ddot{a}_I^I
20	0.18252	0.18252	0.010
40	0.18252	0.18252	0.014
60	0.18252	0.18252	0.023
80	0.18252	0.18252	0.039
100	0.18252	0.18252	0.052
120	0.18252	0.18252	0.064
140	0.18252	0.18252	0.079
160	0.18252	0.18252	0.085
180	0.18252	0.18252	0.097
200	0.18252	0.18252	0.105



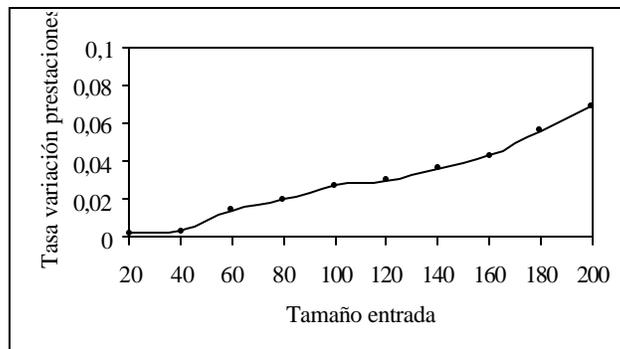
- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\tilde{a}_t^I
20	0.10983	0.10983	0.006
40	0.10983	0.10983	0.008
60	0.10983	0.10983	0.016
80	0.10983	0.10983	0.018
100	0.10983	0.10983	0.022
120	0.10983	0.10983	0.032
140	0.10983	0.10983	0.042
160	0.10983	0.10983	0.044
180	0.10983	0.10983	0.048
200	0.10983	0.10983	0.051



- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente

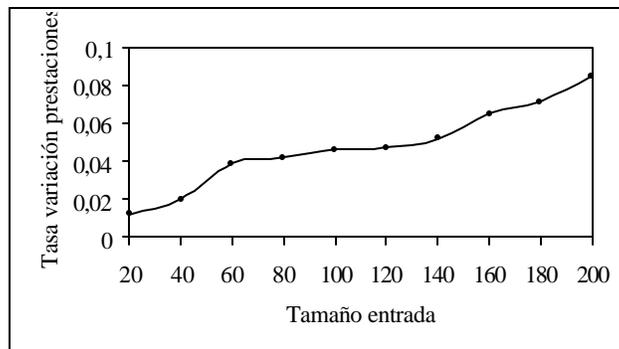
$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^I$	\ddot{a}_I^I
20	0.13159	0.13159	0.002
40	0.13159	0.13159	0.003
60	0.13159	0.13159	0.014
80	0.13159	0.13159	0.021
100	0.13159	0.13159	0.027
120	0.13159	0.13159	0.032
140	0.13159	0.13159	0.036
160	0.13159	0.13159	0.043
180	0.13159	0.13159	0.056
200	0.13159	0.13159	0.069



Aplicación del Criterio II

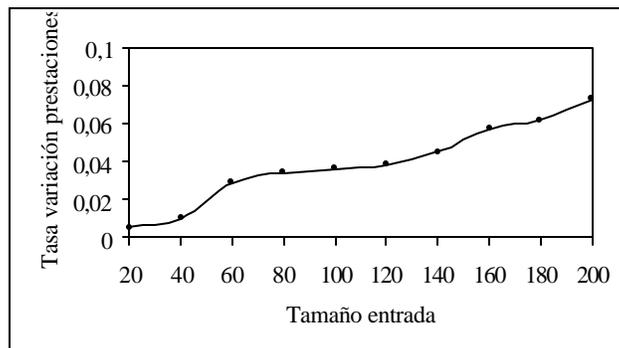
- Operación I: Seguro por invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{\parallel}$	\ddot{a}_I^{\parallel}
20	0.17127	0.47512	0.012
40	0.17127	0.31247	0.021
60	0.17127	0.25123	0.039
80	0.17127	0.20001	0.042
100	0.17127	0.17127	0.046
120	0.17127	0.15424	0.047
140	0.17127	0.14523	0.052
160	0.17127	0.13641	0.065
180	0.17127	0.13501	0.071
200	0.17127	0.13432	0.085



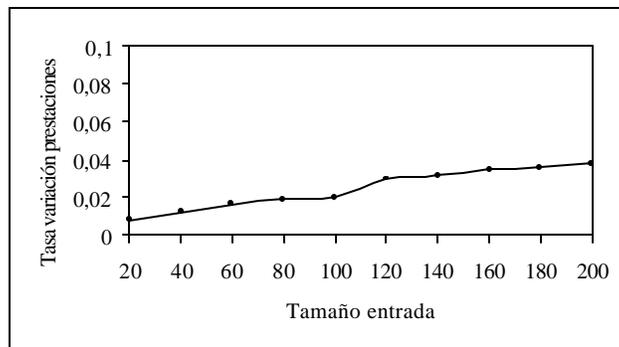
- Operación II: Renta de invalidez temporal.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[t]}$	$\ddot{a}_{[t]}''$	\ddot{a}_I''
20	0.15475	0.36008	0.005
40	0.15475	0.24351	0.012
60	0.15475	0.21419	0.029
80	0.15475	0.18391	0.034
100	0.15475	0.15475	0.036
120	0.15475	0.13125	0.038
140	0.15475	0.11859	0.045
160	0.15475	0.10312	0.057
180	0.15475	0.09900	0.062
200	0.15475	0.09648	0.073



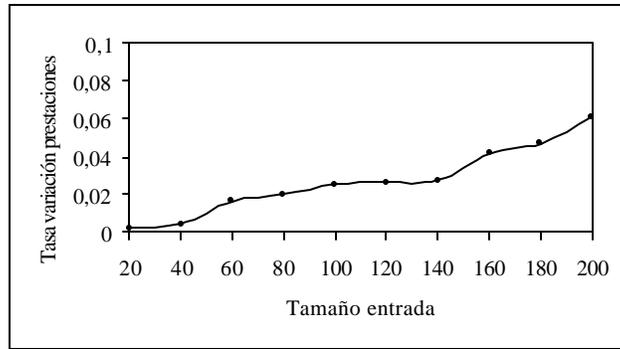
- Operación III: Seguro mixto de invalidación permanente y fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}''$	\ddot{a}_I''
20	0.09716	0.34562	0.008
40	0.09716	0.20352	0.012
60	0.09716	0.14125	0.016
80	0.09716	0.11510	0.019
100	0.09716	0.09716	0.021
120	0.09716	0.09255	0.030
140	0.09716	0.08510	0.032
160	0.09716	0.07628	0.035
180	0.09716	0.07049	0.036
200	0.09716	0.06081	0.038



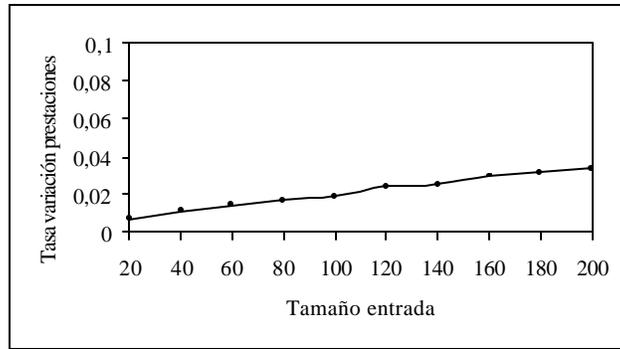
- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^H$	\tilde{a}_I^H
20	0.13699	0.22345	0.002
40	0.13699	0.17582	0.004
60	0.13699	0.14911	0.016
80	0.13699	0.14010	0.021
100	0.13699	0.13699	0.025
120	0.13699	0.13658	0.026
140	0.13699	0.13377	0.027
160	0.13699	0.13091	0.042
180	0.13699	0.12991	0.047
200	0.13699	0.12957	0.061



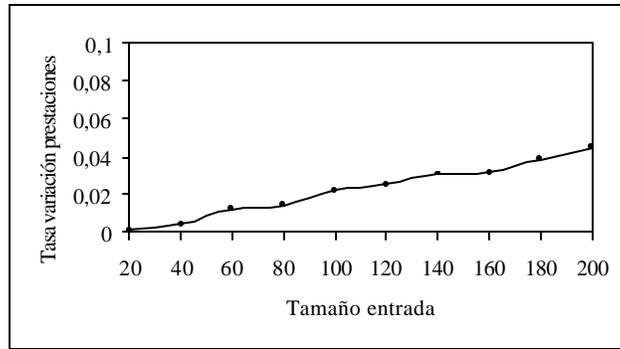
- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{\parallel}$	\ddot{a}_I^{\parallel}
20	0.09451	0.30125	0.007
40	0.09451	0.22485	0.011
60	0.09451	0.16586	0.014
80	0.09451	0.11254	0.017
100	0.09451	0.09451	0.019
120	0.09451	0.09212	0.024
140	0.09451	0.08391	0.025
160	0.09451	0.07052	0.030
180	0.09451	0.06991	0.032
200	0.09451	0.06818	0.034



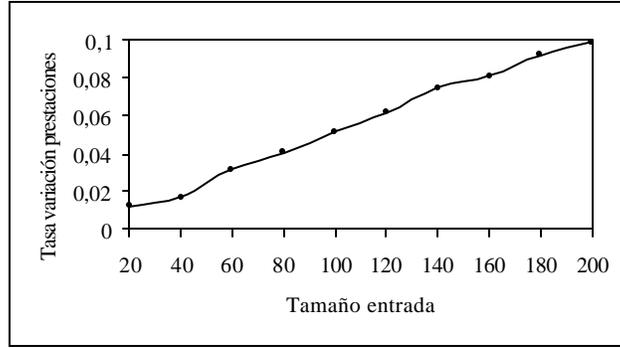
- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}''$	\ddot{a}_I''
20	0.13641	0.23457	0.001
40	0.13641	0.16585	0.004
60	0.13641	0.14601	0.012
80	0.13641	0.14099	0.014
100	0.13641	0.13641	0.022
120	0.13641	0.13483	0.025
140	0.13641	0.13245	0.031
160	0.13641	0.13095	0.032
180	0.13641	0.13001	0.039
200	0.13641	0.12935	0.045



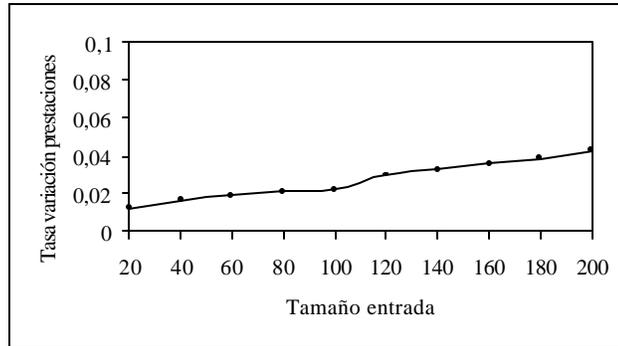
- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}''$	\ddot{a}_I''
20	0.18252	0.44525	0.012
40	0.18252	0.30125	0.017
60	0.18252	0.23585	0.032
80	0.18252	0.20004	0.041
100	0.18252	0.18252	0.052
120	0.18252	0.16837	0.062
140	0.18252	0.13519	0.075
160	0.18252	0.12201	0.081
180	0.18252	0.12006	0.092
200	0.18252	0.11868	0.099



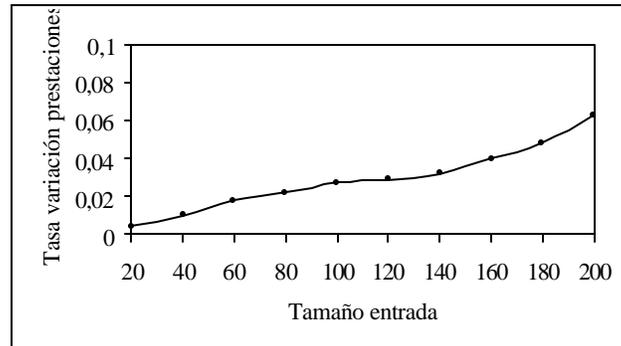
- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}''$	\ddot{a}_I''
20	0.10893	0.36458	0.012
40	0.10893	0.25462	0.016
60	0.10893	0.16585	0.019
80	0.10893	0.12521	0.021
100	0.10893	0.10893	0.022
120	0.10893	0.10037	0.031
140	0.10893	0.09119	0.033
160	0.10893	0.07532	0.036
180	0.10893	0.07482	0.039
200	0.10893	0.07334	0.043



- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente

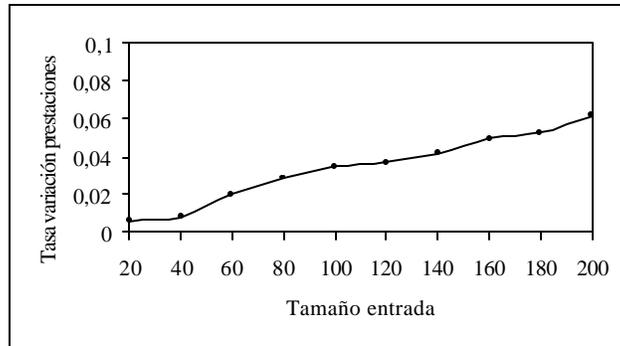
$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{\parallel}$	\ddot{a}_I^{\parallel}
20	0.13159	0.23458	0.004
40	0.13159	0.17582	0.012
60	0.13159	0.15252	0.018
80	0.13159	0.13920	0.022
100	0.13159	0.13159	0.027
120	0.13159	0.12984	0.029
140	0.13159	0.12567	0.032
160	0.13159	0.12121	0.041
180	0.13159	0.11573	0.048
200	0.13159	0.11025	0.063



Aplicación del criterio III

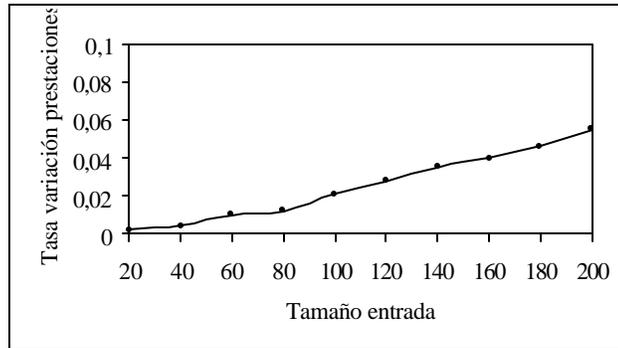
- Operación I: Seguro por invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{\text{III}}$	\ddot{a}_1^{III}
20	0.17127	0.16039	0.006
40	0.17127	0.14199	0.008
60	0.17127	0.13297	0.021
80	0.17127	0.12263	0.029
100	0.17127	0.11374	0.035
120	0.17127	0.10494	0.037
140	0.17127	0.09889	0.042
160	0.17127	0.09573	0.050
180	0.17127	0.09147	0.053
200	0.17127	0.09058	0.062



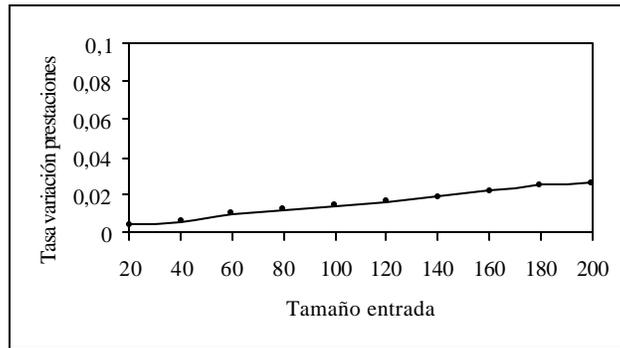
- Operación II: Renta de invalidez temporal.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{\text{III}}$	\ddot{a}_t^{III}
20	0.15475	0.14062	0.002
40	0.15475	0.12477	0.004
60	0.15475	0.11229	0.011
80	0.15475	0.10316	0.012
100	0.15475	0.09406	0.021
120	0.15475	0.0869	0.028
140	0.15475	0.07898	0.035
160	0.15475	0.07826	0.041
180	0.15475	0.07272	0.046
200	0.15475	0.07259	0.055



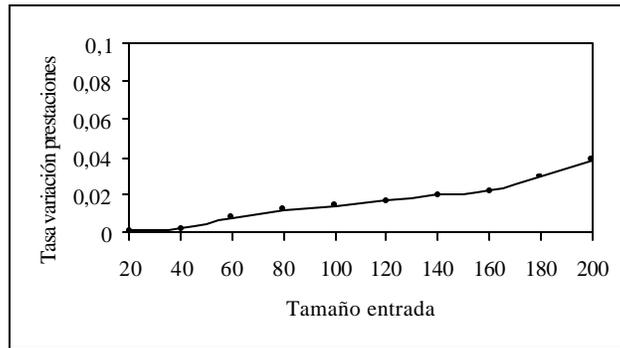
- Operación III: Seguro mixto de invalidación permanente y fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{\text{III}}$	\ddot{a}_t^{III}
20	0.09716	0.07798	0.004
40	0.09716	0.06129	0.006
60	0.09716	0.04839	0.011
80	0.09716	0.04460	0.012
100	0.09716	0.04016	0.014
120	0.09716	0.02896	0.016
140	0.09716	0.02153	0.019
160	0.09716	0.01870	0.022
180	0.09716	0.01852	0.025
200	0.09716	0.01502	0.026



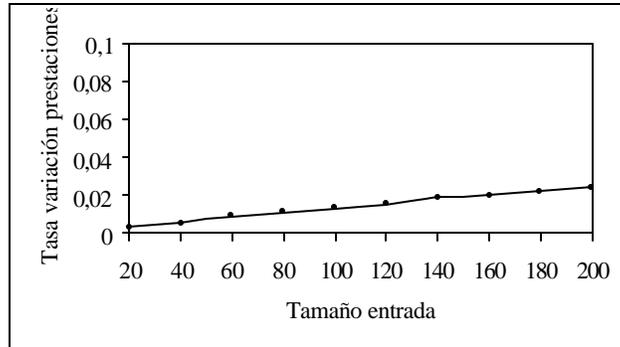
- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[I]}^{\text{III}}$	\tilde{a}_I^{III}
20	0.13699	0.12797	0.001
40	0.13699	0.11798	0.002
60	0.13699	0.11686	0.008
80	0.13699	0.10768	0.012
100	0.13699	0.10415	0.014
120	0.13699	0.10241	0.017
140	0.13699	0.09891	0.021
160	0.13699	0.09827	0.022
180	0.13699	0.09306	0.031
200	0.13699	0.09132	0.039



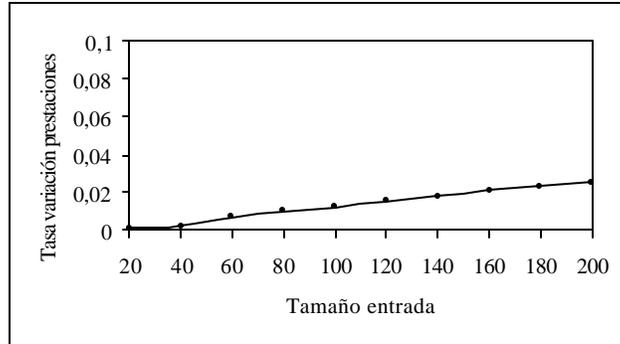
- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[t]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{\text{III}}$	\ddot{a}_1^{III}
20	0.09451	0.08655	0.003
40	0.09451	0.07340	0.005
60	0.09451	0.06362	0.009
80	0.09451	0.05732	0.011
100	0.09451	0.05227	0.013
120	0.09451	0.04703	0.015
140	0.09451	0.04300	0.019
160	0.09451	0.04006	0.021
180	0.09451	0.03790	0.022
200	0.09451	0.03565	0.024



- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[I]}^{\text{III}}$	\ddot{a}_I^{III}
20	0.13641	0.12623	0.001
40	0.13641	0.11890	0.002
60	0.13641	0.11750	0.007
80	0.13641	0.10933	0.011
100	0.13641	0.10638	0.012
120	0.13641	0.10451	0.015
140	0.13641	0.10156	0.018
160	0.13641	0.10168	0.021
180	0.13641	0.09697	0.023
200	0.13641	0.09522	0.025



- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente

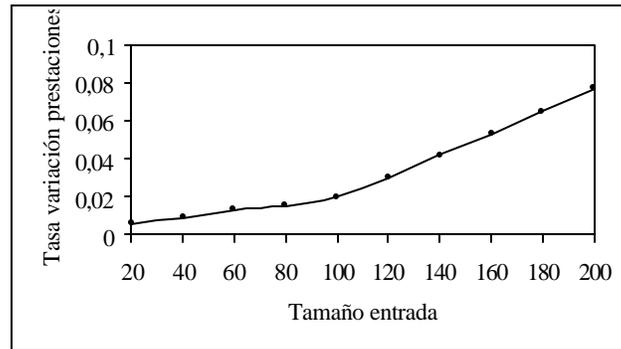
$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[I]}^{\text{III}}$	\ddot{a}_I^{III}
20	0.18252	0.16637	0.006
40	0.18252	0.14626	0.009
60	0.18252	0.13368	0.013
80	0.18252	0.12297	0.015
100	0.18252	0.11279	0.020
120	0.18252	0.10327	0.030
140	0.18252	0.09644	0.042
160	0.18252	0.09349	0.053
180	0.18252	0.08838	0.065

200

0.18252

0.08749

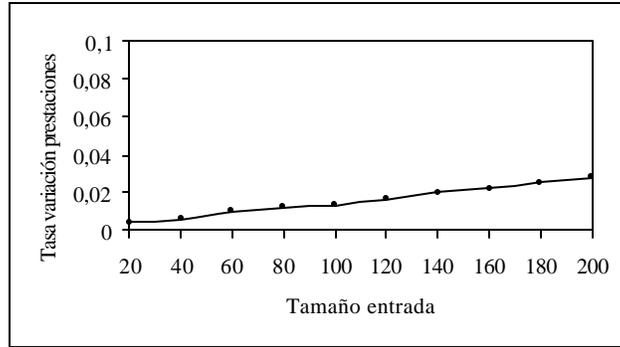
0.077



- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[t]}^m$	\tilde{a}_t^m
20	0.10893	0.09020	0.004
40	0.10893	0.07191	0.006
60	0.10893	0.05904	0.010
80	0.10893	0.05463	0.012
100	0.10893	0.04919	0.013
120	0.10893	0.03739	0.016
140	0.10893	0.02948	0.020
160	0.10893	0.02707	0.022

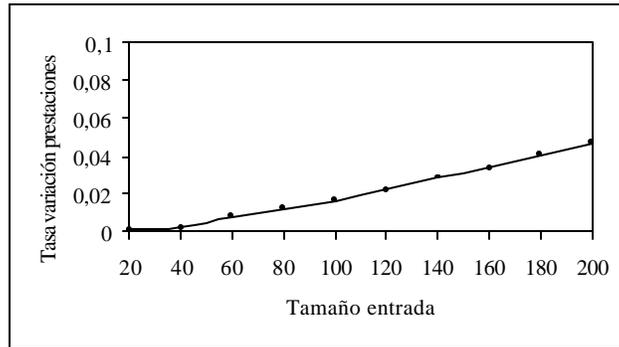
180	0.10893	0.02571	0.025
200	0.10893	0.02299	0.028



- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[\theta]}$	$\ddot{a}_{[I]}^{\text{III}}$	\ddot{a}_I^{III}
20	0.13159	0.12270	0.001
40	0.13159	0.11100	0.002
60	0.13159	0.10843	0.008
80	0.13159	0.09804	0.012
100	0.13159	0.09427	0.016
120	0.13159	0.09117	0.022
140	0.13159	0.08687	0.029
160	0.13159	0.08680	0.034

180	0.13159	0.08047	0.041
200	0.13159	0.07908	0.047



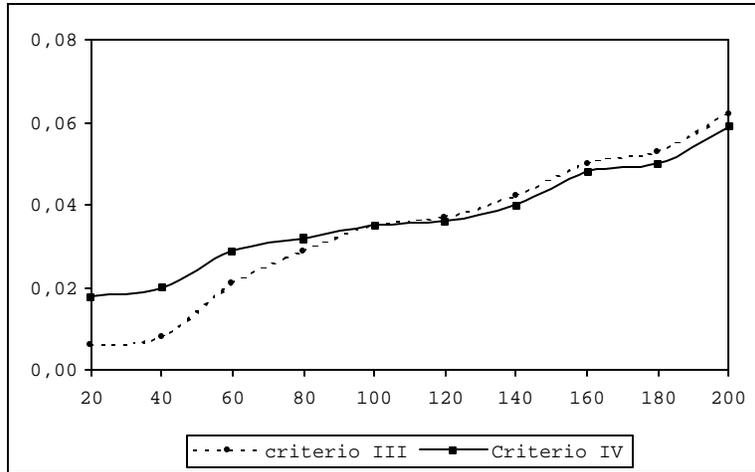
Aplicación del criterio IV

Dada la similitud de los criterios III y IV, describiremos gráficamente de forma conjunta, la evolución de las tasas de variación de las prestaciones correspondientes.

- Operación I: Seguro por invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{IV}$	\tilde{a}_I^{IV}
20	0,17127	0,33652	0,018
40	0,17127	0,22033	0,020
60	0,17127	0,16775	0,029

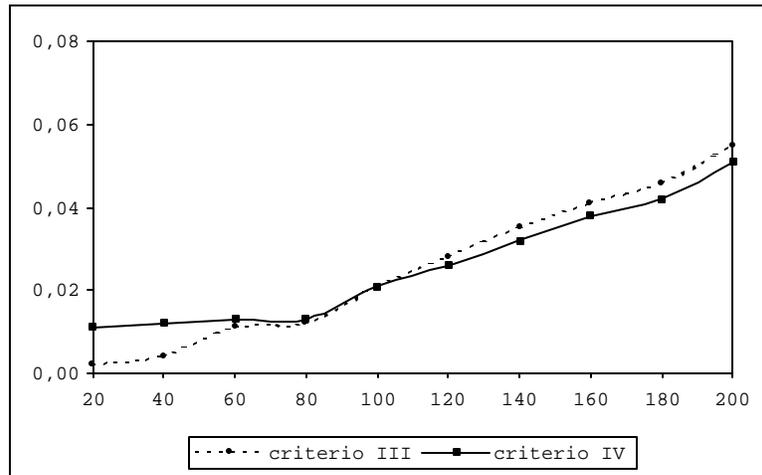
80	0,17127	0,13269	0,032
100	0,17127	0,11374	0,035
120	0,17127	0,10019	0,036
140	0,17127	0,09235	0,040
160	0,17127	0,08540	0,048
180	0,17127	0,08385	0,050
200	0,17127	0,08298	0,059



- Operación II: Renta de invalidez temporal.

$n_{[I]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[I]}^{IV}$	\tilde{a}_I^{IV}
20	0,15475	0,27835	0,011
40	0,15475	0,16692	0,012
60	0,15475	0,13474	0,013
80	0,15475	0,11262	0,013
100	0,15475	0,09406	0,021
120	0,15475	0,07944	0,026
140	0,15475	0,07055	0,032
160	0,15475	0,06040	0,038

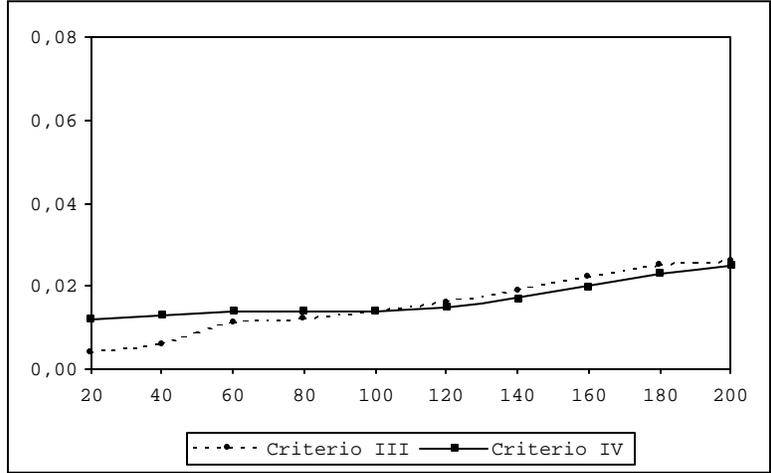
180	0,15475	0,05767	0,042
200	0,15475	0,05610	0,051



- Operación III: Seguro mixto de invalidación permanente y fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{IV}$	\tilde{a}_t^{IV}
20	0,09716	0,18971	0,012
40	0,09716	0,09608	0,013
60	0,09716	0,06092	0,014
80	0,09716	0,04862	0,014
100	0,09716	0,04016	0,014
120	0,09716	0,02835	0,015
140	0,09716	0,02040	0,017

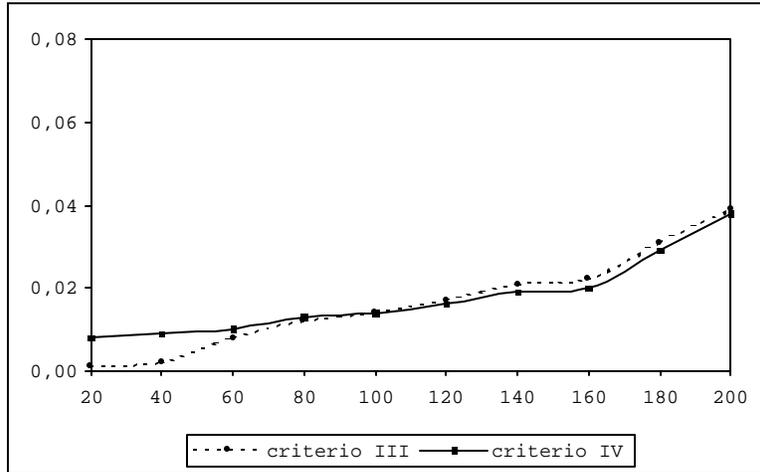
160	0,09716	0,01702	0,020
180	0,09716	0,01555	0,023
200	0,09716	0,01267	0,025



- Operación IV: Renta de jubilación junto seguro de invalidación permanente.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{IV}$	\tilde{a}_t^{IV}
20	0,13699	0,18736	0,008
40	0,13699	0,13930	0,009
60	0,13699	0,11745	0,010
80	0,13699	0,10791	0,013
100	0,13699	0,10415	0,014
120	0,13699	0,10228	0,016
140	0,13699	0,09798	0,019

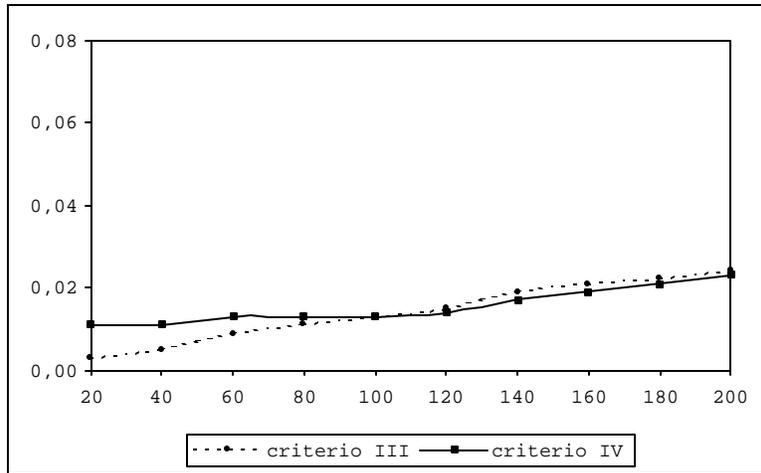
160	0,13699	0,09536	0,020
180	0,13699	0,09140	0,029
200	0,13699	0,08972	0,038



- Operación V: Renta de invalidez temporal junto con seguro de fallecimiento.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{IV}$	\ddot{a}_t^{IV}
20	0,09451	0,19771	0,011
40	0,09451	0,13917	0,011
60	0,09451	0,09734	0,013
80	0,09451	0,06320	0,013
100	0,09451	0,05227	0,013
120	0,09451	0,04651	0,014

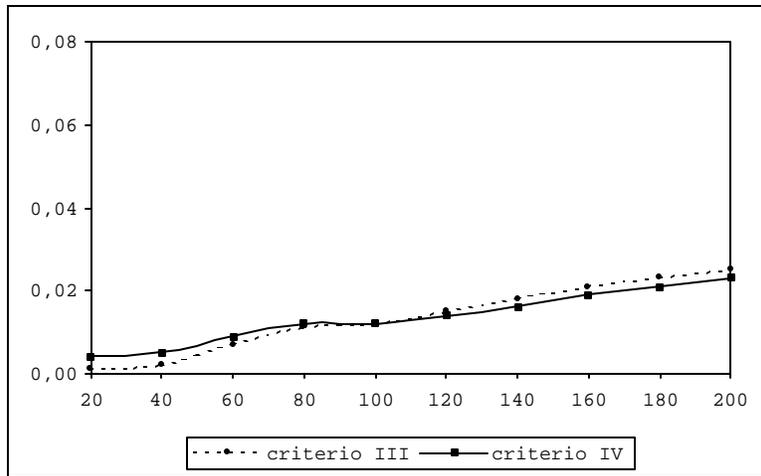
140	0,09451	0,04097	0,017
160	0,09451	0,03422	0,019
180	0,09451	0,03365	0,021
200	0,09451	0,03183	0,023



- Operación VI: Renta mixta de invalidez temporal y jubilación.

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{IV}$	\ddot{a}_t^{IV}
20	0,13641	0,19801	0,004
40	0,13641	0,13637	0,005
60	0,13641	0,11959	0,009
80	0,13641	0,11125	0,012
100	0,13641	0,10638	0,012
120	0,13641	0,10399	0,014

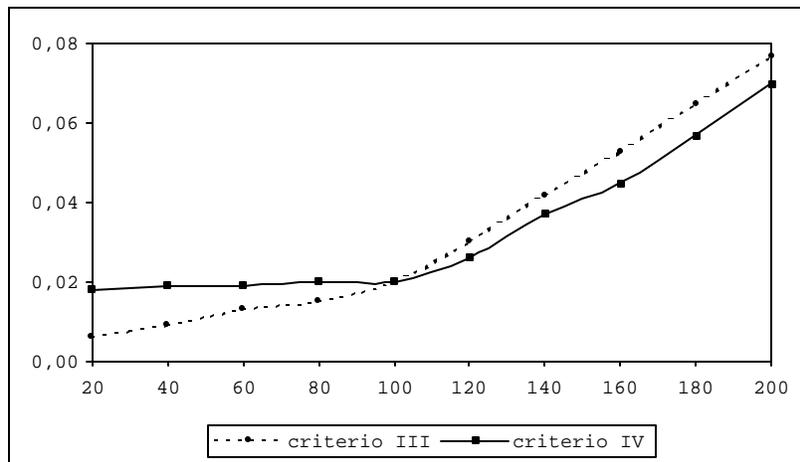
140	0,13641	0,10039	0,016
160	0,13641	0,09860	0,019
180	0,13641	0,09541	0,021
200	0,13641	0,09363	0,023



- Operación VII: Renta de invalidez temporal junto con seguro de invalidación permanente

$n_{[l]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[l]}^{IV}$	\tilde{a}_l^{IV}
20	0,18252	0,32208	0,018
40	0,18252	0,20122	0,019
60	0,18252	0,15469	0,019
80	0,18252	0,12896	0,020
100	0,18252	0,11279	0,020

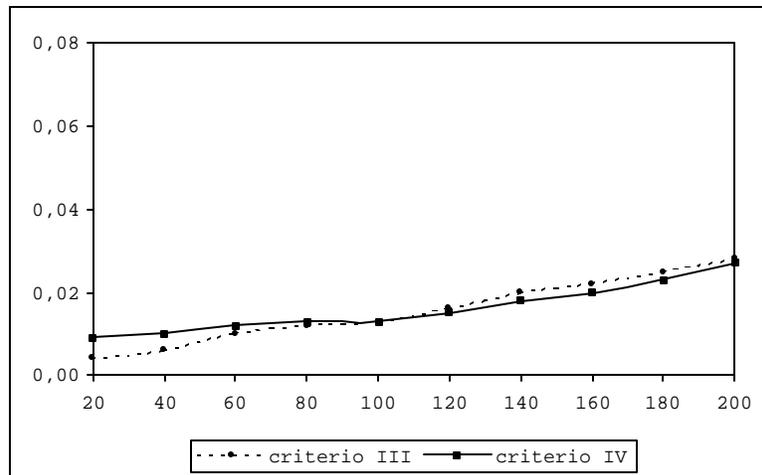
120	0,18252	0,10316	0,026
140	0,18252	0,08219	0,037
160	0,18252	0,07361	0,045
180	0,18252	0,07107	0,057
200	0,18252	0,06978	0,070



- Operación VIII: Renta de invalidez temporal junto con seguro mixto de fallecimiento e invalidación permanente

$n_{[l]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[l]}^{IV}$	\ddot{a}_l^{IV}
20	0,10893	0,21197	0,009
40	0,10893	0,12793	0,010

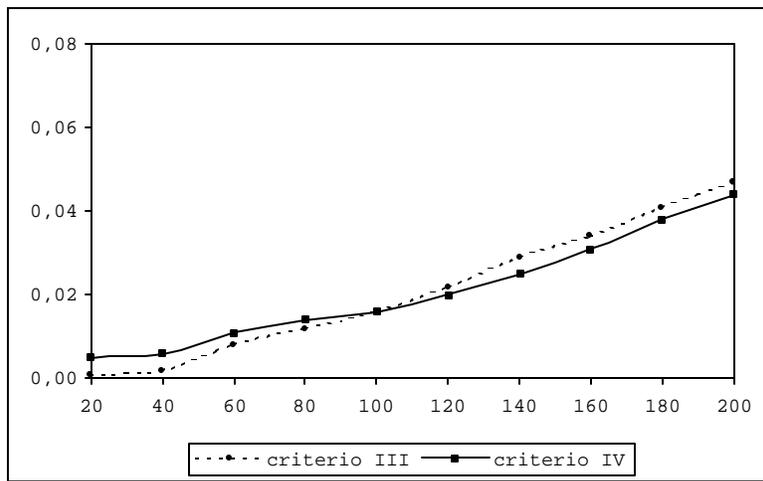
60	0,10893	0,07828	0,012
80	0,10893	0,05826	0,013
100	0,10893	0,04919	0,013
120	0,10893	0,03607	0,015
140	0,10893	0,02739	0,018
160	0,10893	0,02246	0,020
180	0,10893	0,02292	0,023
200	0,10893	0,01998	0,027



- Operación IX: Renta mixta de invalidez temporal y de jubilación junto con seguro de invalidación permanente

$n_{[t]}$	$\ddot{a}_{[0]}$	$\ddot{a}_{[t]}^{IV}$	\tilde{a}_t^{IV}
20	0,13159	0,19162	0,005
40	0,13159	0,13522	0,006

60	0,13159	0,11600	0,011
80	0,13159	0,10097	0,014
100	0,13159	0,09427	0,016
120	0,13159	0,09065	0,020
140	0,13159	0,08529	0,025
160	0,13159	0,08129	0,031
180	0,13159	0,07695	0,038
200	0,13159	0,07273	0,044



Conclusiones

A continuación, sintetizamos los principales conclusiones alcanzadas:

- Como las características iniciales de los asegurados que componen $D_{[0]}$ coinciden con las de los integrantes de $D_{[1]}$, las primas de la operación aseguradora y las primas básicas coinciden.

- El coeficiente de reaseguro aplicable a los nuevos asegurados depende del criterio que utilicemos:
 - En el criterio I, el coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados depende del colectivo inicial porque su valor se obtiene de la resolución de la ecuación que iguala la esperanza matemática de la pérdida reaseguradora de $D_{[0]}$ a 0.
 - En el criterio II, el coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados depende de la estructura y características del colectivo entrante. Por ello, a mayor tamaño de la entrada, más reducido será el coeficiente de reaseguro.
 - En los criterios III y IV, el coeficiente de reaseguro depende tanto de la estructura del colectivo entrante como de la propia estructura del colectivo abierto.

Las primas de reaseguro reflejarán las características de los coeficientes de reaseguro, de acuerdo a cada uno de los criterios aplicados.

- Conforme aumenta el tamaño del colectivo entrante, como resultado de la mayor compensación de riesgos que tiene lugar, la tasa de variación de las prestaciones que aplicamos también es mayor. El incremento de las prestaciones es más significativo en aquellas operaciones con seguros o rentas de invalidez, que, tal como vimos en los anexos del capítulo anterior, son las que más diferencias de siniestralidad importantes suelen registrar.
- Para colectivos entrantes inferiores a 100 asegurados, las tasas de variación de las prestaciones obtenidas por aplicación del criterio II son mayores que las generadas por el criterio I. En cambio, aquéllas son menores para los colectivos entrantes de tamaño superior a 100 asegurados.

- El coeficiente de reaseguro del criterio II, $\ddot{a}_{[t]}^{\text{II}}$, se determina solucionando la ecuación que resulta de igualar la esperanza matemática de la pérdida reaseguradora asociada al colectivo entrante $D_{[t]}$ a 0. Por su parte, $\ddot{a}_{[t]}^{\text{I}}$, se obtiene de igual forma para el colectivo inicial de 100 asegurados. Si $n_{[t]} < 100$, por el menor tamaño de éste, se cumple que $\ddot{a}_{[t]}^{\text{II}} > \ddot{a}_{[t]}^{\text{I}}$. Así, el excedente a imputar en las prestaciones de los antiguos asegurados, es mayor en el criterio II y también, por tanto, sus tasas de variación de prestaciones: $\tilde{a}_I^{\text{II}} > \tilde{a}_I^{\text{I}}$.
- Si $n_{[t]} > 100$, se invierte la situación ya que el tamaño del colectivo entrante es superior al inicial. En tal caso, se verificará que $\ddot{a}_{[t]}^{\text{II}} < \ddot{a}_{[t]}^{\text{I}}$ y que $\tilde{a}_I^{\text{II}} < \tilde{a}_I^{\text{I}}$.
- Si $n_{[t]} = 100$, el tamaño del colectivo entrante coincide con el inicial. Por se cumple que $\ddot{a}_{[t]}^{\text{II}} = \ddot{a}_{[t]}^{\text{I}}$ y que $\tilde{a}_I^{\text{II}} = \tilde{a}_I^{\text{I}}$.
- La aplicación de los criterios III y IV se caracteriza porque el coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados es significativamente inferior a los derivados de la aplicación de los dos criterios anteriores. Ello es debido a que en los criterios III y IV, hacemos al coeficiente de reaseguro partícipe del efecto beneficioso derivado de la estructura global del colectivo abierto.

Consecuentemente, en los criterios III y IV, el excedente actuarial restante a imputar en forma de incrementos de las prestaciones de los antiguos asegurados es menor, con lo que las tasas de variación de las prestaciones por los criterios III y IV son más bajas que las obtenidas por los otros dos criterios.

La aplicación de los criterios III y IV, en comparación con los dos anteriores, beneficia, por tanto, a los nuevos asegurados porque abarata considerablemente el precio de sus primas de reaseguro. En cambio, perjudica a los antiguos

aseguradores porque sus prestaciones aumentan en menor medida que en los criterios I y II.

- En el criterio II, las primas de reaseguro de los nuevos asegurados coinciden con las obtenidas por el criterio I del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas. Las primas de reaseguro calculadas del criterio IV, resultan de las obtenidas por el criterio II del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas.

Dadas las características de ambos criterios, anteriormente ya explicadas, la aplicación del criterio III, comparativamente con el IV, favorece a los asegurados inicialmente con mayor coeficiente de reaseguro, por su menor tamaño. Por ello, se verifican las siguientes relaciones:

$$Si n_{[1]} < 100 \Rightarrow g_i^{III} < g_i^{IV}$$

$$Si n_{[1]} = 100 \Rightarrow g_i^{III} = g_i^{IV}$$

$$Si n_{[1]} > 100 \Rightarrow g_i^{III} > g_i^{IV}$$

TEMA IV

CONCLUSIONES

Capítulo 13

Conclusiones

En este capítulo, el último de la Tesis, recogemos de forma sistemática las principales ideas que se han venido desarrollando a lo largo de la misma. Asimismo, contrastaremos el cumplimiento de los objetivos de la Tesis que se expusieron al principio.

Estudiaremos las conclusiones divididas en 3 epígrafes. Finalmente, expondremos las futuras líneas de investigación que se derivan del trabajo llevado a cabo.

1. Conclusiones relativas al tema I

En este epígrafe presentamos las conclusiones más relevantes a que hemos llegado con relación a la consecución del primer objetivo de la tesis: modelización de una operación con múltiples estados.

1. Versatilidad de la matemática de Markov como herramienta de modelización de operaciones con múltiples estados

En el trabajo desarrollado, hemos demostrado que la matemática basada en procesos y semiprocesos estocásticos de Markov aporta a la matemática actuarial una herramienta de modelización sumamente potente que permite plantear bajo un mismo enfoque, el estudio de cualquier operación con múltiples estados: operaciones de invalidez, “Critical Illness insurance”, “Long-term care insurance”, S.I.D.A, etc.

En las operaciones con múltiples estados, el seguimiento estocástico de cada asegurado resulta prácticamente irrealizable, si consideramos toda su historia anterior. La introducción de un proceso estocástico de Markov permite llevar a cabo este seguimiento a partir de la hipótesis fundamental de que el estado futuro del asegurado únicamente depende del estado y edad actuales. De esta forma, prescindimos del análisis de la historia anterior.

Si dicha hipótesis nos parece excesivamente simplista y poco realista, podemos incorporar al estudio del proceso estocástico, el seguimiento de otras variables. Como resultado, hemos obtenido un semiproceso estocástico de Markov cuyo tratamiento es más complejo que el del proceso estocástico de Markov original.

La utilización de los procesos estocásticos propios de la matemática de Markov ofrece claras ventajas sobre el modelo de múltiples decrementos: No necesita del cálculo teórico de las probabilidades independientes ya que las probabilidades de transición halladas por este método ya incorporan la dependencia; facilita la posibilidad de incluir en el estudio además de la edad, otras variables relevantes

como puede ser la permanencia en el estado actual; permite caracterizar las distintas probabilidades de transición y generar tablas de decrementos a través de sus valores; trata de forma uniforme cualquier operación con múltiples estados, etc.

En la Tesis hemos desarrollado la aplicación de tres procesos estocásticos: proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo y semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo.

2. Una operación de vida con múltiples estados modelizada mediante un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo, $\{S(x), x \in N\}$, siendo $S(x)$ el estado de un asegurado de edad x , efectúa un seguimiento de la evolución de estado de forma periódica en el tiempo (cada año, mes, etc.).

Este modelo estocástico resulta aplicable cuando, a partir de la experiencia disponible, conocemos el estado de los asegurados de forma periódica (cada año, mes, etc.). Como principal ventaja, destacamos su sencillez de aplicación.

3. La aplicación de un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, $\{S(x), x \in R\}$, donde $S(x)$ representa el estado de un asegurado de edad x , resulta más compleja que la de un proceso estocástico discreto puesto que amplía el análisis de la evolución del asegurado a intervalos de tiempo (durante todo el año, mes, etc.). Así lo ponen de manifiesto las correspondientes ecuaciones generales.

$$m_x^i(t+1) = m_x^i(t) \cdot P_{x+t} \quad (1)$$

$$\frac{d m_x^i(t)}{dt} = m_x^i(t) \cdot \dot{\dot{E}}_{x+t} \quad (2)$$

Donde $m_x^i(t)$ es el vector de estado en t de la cadena de Markov, P_x la matriz de transición y $\dot{\dot{E}}_{x+t}$ la matriz de intensidades de transición. La ecuación general de un proceso de Markov discreto, recogida en la expresión (1), responde a un sistema de

ecuaciones lineales mientras que la expresión (2), ecuación general de un proceso estocástico continuo, constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes variables.

La aplicación de un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo exige disponer información sobre la experiencia observada más detallada, que establezca por edades, el tiempo observado en que los asegurados permanecen en cada estado y el número de transiciones registradas.

Si el número de transiciones anuales por asegurado es elevado y queremos estudiar su frecuencia, resulta especialmente indicada la aplicación de un proceso continuo dado que un proceso discreto no deja constancia del número de transiciones registradas durante el periodo de observación fijado.

4. Podemos elaborar modelos más realistas que los anteriores, incorporando al estudio del proceso estocástico continuo, otros aspectos de interés como pueden ser los siguientes:

- Dependencia de algunas intensidades (probabilidades) de transición respecto la edad de suscripción de la póliza.
- Dependencia de algunas intensidades (probabilidades) de transición de la permanencia en el estado presente desde la última transición.
- Dependencia de algunas intensidades (probabilidades) de transición del tiempo total en el estado presente, desde la suscripción de la póliza.

El resultado de incluir alguna de las anteriores hipótesis es un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, $\{S(x), Z(x), x \in R\}$, donde $S(x)$ representa el estado de un asegurado de edad x y $Z(x)$ recoge para x el valor de la variable adicional a estudiar, z . En los supuestos anteriores, z representa

respectivamente, la edad de suscripción de la póliza, la permanencia en el mismo estado y la permanencia total en el estado actual.

La utilización de este tipo de proceso estocástico requiere que dispongamos de una experiencia estadística del colectivo observado muy detallada en la que podamos conocer la permanencia de los asegurados en cada uno de estados, atendiendo tanto a su edad como a los valores de z .

El ajuste realizado por un semiproceso estocástico de Markov es más potente que el de un proceso de Markov porque incluye más variables. No obstante, su tratamiento matemático es considerablemente más complejo que el de un proceso estocástico de Markov.

Por tal motivo, en muchos casos, es preferible recoger la influencia de la variable z a través de un proceso estocástico de Markov, recurriendo al ‘Splitting’ de los estados afectados por tal variable, descomponiendo dichos estados en otros distintos atendiendo a diferentes intervalos de z .

5. Para estimar tanto las intensidades de transición como las probabilidades de transición anuales, hemos fijado un período de observación de varios años y hemos asumido que cada asegurado representa una realización independiente del proceso estocástico definido.

Basamos la estimación de las intensidades de transición en la hipótesis teórica de que la intensidad de transición es constante en un intervalo de edades anual, $(x, x+1)$. Como resultado de asumir tal hipótesis, recogemos por intervalos de edades anuales, el número de transiciones registradas y la exposición central (tiempo de espera o permanencia).

De similar modo, en un proceso estocástico discreto clasificaremos la información observada en intervalos anuales, conteniendo cada uno de ellos la exposición inicial (número de observaciones) y las transiciones correspondientes.

Si la información recogida por un determinado intervalo no es suficientemente significativa porque contiene pocas transiciones, trasladamos su contenido al intervalo inmediatamente anterior, de forma que todos intervalos así obtenidos contengan un número de transiciones mínimo, estadísticamente significativo.

Posteriormente, calculamos para cada intervalo de edades resultante del anterior proceso de agregación, la probabilidad o intensidad de transición anual observada, según se corresponda de un proceso discreto o continuo.

La probabilidad de transición anual observada se obtiene por cociente del número de transiciones y la exposición inicial. Calculamos la intensidad de transición anual observada como cociente entre el número de transiciones y la exposición central. A partir de la inferencia estadística de los valores observados, estimamos las intensidades de transición y las probabilidades de transición anuales correspondientes.

Para un semiproceso estocástico de Markov, seguimos la misma metodología, con la única diferencia que clasificamos y tratamos la experiencia disponible, además de por edades, por intervalos de z .

6. Partiendo de los trabajos de **Sverdrup, E. (1965)** y **Forfair, D.O. et al. (1988)**, hemos asumido las siguientes distribuciones teóricas del número de transiciones entre dos estados cualquiera E_j y E_k .

$$N_x^{jk} \approx \text{Binomial}(R_x^j, p_x^{jk}(\mathbf{a})) \quad (3)$$

$$N_x^{jk} \approx \text{Poisson}(\bar{R}_x^j \cdot m_{x+\frac{1}{2}}^{jk}(\mathbf{a})) \quad (4)$$

$$N_{x,z}^{jk} \approx \text{Poisson}(\bar{R}_{x,z}^j \cdot m_{x+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}}^{jk}(\mathbf{a})) \quad (5)$$

Siendo R_x^j y \bar{R}_x^j las exposiciones iniciales y centrales en el estado E_j y edad x ; $\bar{R}_{x,z}^j$ representa la exposición central en el estado E_j , edad x y duración z . Utilizamos la distribución teórica (3) en la estimación de las probabilidades de

transición anuales, $p_x^{jk}(\mathbf{a})$, asociadas a un proceso estocástico discreto. Para estimar las intensidades de transición de un proceso de Markov continuo en el tiempo, $m_{x+\frac{1}{2}}^{jk}(\mathbf{a})$, seguimos la distribución teórica (4). Empleamos la distribución teórica (5) en la estimación de una intensidad de transición bivalente de un semiproceso estocástico continuo, $m_{x,z}^{jk}(\mathbf{a})$.

La aceptación de una distribución teórica resulta determinante para poder estimar las intensidades de transición y las probabilidades de transición anuales. Además, permite comprobar posteriormente la bondad de ajuste a través de los métodos clásicos de contrastación no paramétrica (test de los signos, test de Wald-Wolfowitz, test de correlación, test de X^2 y test de Kolmogorov-Smirnov).

Los métodos utilizados en la estimación de las tasas de intensidad o de probabilidad anual de transición, a partir de los correspondientes valores observados, pueden dividirse en dos grandes bloques: métodos paramétricos basados en el ajuste a una función matemática cuyos parámetros se obtienen a través de un proceso de optimización y métodos no paramétricos que se apoyan en el estudio local de la experiencia disponible.

En la Tesis doctoral hemos abordado el análisis de ambos métodos de estimación desde una óptica global, circunstancia que nos ha permitido comparar los resultados alcanzados:

- Las estimaciones paramétricas suelen ofrecer un mayor nivel de alisamiento que las no paramétricas. En contrapartida, las estimaciones no paramétricas suelen tener una bondad de ajuste superior.
- Los métodos de estimación no paramétrica son especialmente recomendables cuando la función matemática de ajuste no es conocida a priori o resulta extraordinariamente compleja. Para que los métodos paramétricos produzcan resultados consistentes, se requiere un volumen de información superior al requerido por un método no paramétrico.

7. La aplicación de un método de estimación paramétrica consta de dos etapas: elección de una función de ajuste y aplicación de un método de optimización que permita ajustar los parámetros de la función de ajuste a los valores observados. Como funciones de ajuste hemos creído conveniente destacar, por encima del resto, las siguientes:

$$\hat{\mathbf{m}}_x^{jk} = GM_x(r, s) = \sum_{i=0}^{r-1} \hat{\mathbf{a}}_i \cdot x^i + e^{\sum_{j=0}^{s-1} \hat{\mathbf{b}}_j \cdot x^j} \quad (6)$$

$$\hat{p}_x^{jk} = LGM_x(r, s) = \frac{GM_x(r, s)}{1 + GM_x(r, s)} \quad (7)$$

Sugerimos la utilización de la expresión (6), también denominada función de Gompertz-Makeham, en la estimación de las intensidades de transición univariantes, porque su recorrido, $(0, \infty)$, coincide con el de aquéllas.

En el caso de la estimación de las probabilidades de transición anuales, creemos que la expresión (7), conocida como función Logit, resulta más adecuada, dado que toma valores entre 0 y 1. La introducción de polinomios ortogonales (Chebycheff, Legendre) y la ponderación de las edades por su valor medio, pueden facilitar el ajuste de ambas funciones.

Respecto las funciones de ajuste bivalente, el abanico de posibilidades es muy amplio. Destacamos al respecto, la aplicación de funciones compuestas de polinomios fraccionados (combinación lineal de potencias con exponentes no enteros).

En la Tesis doctoral hemos utilizado los métodos de optimización clásicos: maximización de la verosimilitud y minimización de los errores cuadrados.

En principio, el método basado en la maximización de la verosimilitud goza de una serie de ventajas: los estimadores de máxima verosimilitud son consistentes y asintóticamente normales; su aplicación facilita la construcción de la matriz de varianzas y covarianzas que permite analizar la significación individual del ajuste.

8. Los resultados de la estimación paramétrica, no se ven alterados de forma significativa por el método de optimización utilizado; no así por la función de ajuste utilizada cuya forma y parámetros resultan determinantes.

En la estimación de la intensidad de fallecimiento, hemos probado la siguiente hipótesis teórica sobre la exposición central de cada edad. Los resultados son muy similares a los alcanzados por aplicación de la distribución teórica (4), inicialmente propuesta.

$$\bar{R}_x \approx \text{Gamma} \left(N_x, \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}} \right) \quad (8)$$

Si el número de transiciones observadas es elevado, la aplicación de la siguiente distribución teórica de la intensidad de transición produce los mismos resultados que la recogida por la expresión (4).

$$N_x^{jk} \approx \text{Normal} \left(\bar{R}_x^j \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{jk}(\hat{\mathbf{a}}), \bar{R}_x^j \cdot \mathbf{m}_{x+\frac{1}{2}}^{jk}(\hat{\mathbf{a}}) \right) \quad (9)$$

9. En el caso de una intensidad de transición bivalente asociada a un semiproceso de Markov continuo en el tiempo, es difícil precisar la forma de la función de ajuste. Por ello, puede recurrirse a la utilización de polinomios fraccionados.

Si bien los métodos de optimización empleados en un semiproceso de Markov son en esencia los mismos que en un proceso de Markov, su tiempo de computación es mayor, al precisar de una doble partición de la experiencia observada respecto x y z .

10. Los métodos de estimación no paramétrica se caracterizan por combinar el nivel de ajuste con la cantidad de alisamiento. En la tesis hemos descritos tanto los métodos más tradicionales como aquellos más sofisticados.

Entre los métodos más tradicionales destacamos el método de las medias móviles y el basado en núcleos. Su aplicación produce estimaciones puntuales por lo que su

utilización parece más indicada para ajustar probabilidades que intensidades de transición, donde es preferible estimar funciones continuas.

Por otro lado, hemos descrito métodos más sofisticados que combinan el análisis local de las observaciones con el ajuste a una función matemática: modelo de Whittaker, regresión dinámica y modelización local polinómica. Estos modelos ajustan la experiencia disponible a una función cuyos parámetros van variando con la edad del asegurado.

En el caso del ajuste de una intensidad de transición bivalente, dada la dificultad que entraña encontrar una función de ajuste adecuada, puede ser útil recurrir a la estimación no paramétrica. Al respecto, sugerimos una modelización local polinómica en que las observaciones estén localmente ponderadas por un núcleo bivalente como puede ser la función de densidad de una distribución normal bivalente.

11. Como método de estimación no paramétrica, hemos puesto en práctica la regresión dinámica, basada en la aplicación del filtro de Kalman. Para los ejemplos desarrollados, las estimaciones así obtenidas son satisfactorias tanto desde el punto de vista de la bondad de ajuste como del nivel de su alisamiento.

En algunos casos, la estimación así realizada incluso proporciona mejor bondad de ajuste que la correspondiente estimación paramétrica. Los métodos paramétricos pueden presentar desajustes importantes en las edades extremas, donde el número de transiciones observadas suele ser pequeño. La regresión dinámica puede suavizar estos desajustes.

12. En los modelos estocásticos continuos, la obtención de las intensidades de transición que intervienen en la operación con múltiples estados resulta determinante porque su conocimiento permite describir la evolución estocástica del asegurado en el tiempo. Por tal motivo, las intensidades de transición constituyen el objeto de estimación de un modelo continuo.

La obtención posterior de las probabilidades de transición es matemáticamente compleja puesto que la ecuación general del proceso estocástico responde a un sistema de ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (proceso de Markov) o a un sistema de ecuaciones integro-diferenciales (semiproceso de Markov). En algunos casos podemos obtener las probabilidades de transición de forma exacta pero normalmente debemos conformarnos con conocer valores aproximados de las mismas.

En un proceso estocástico de Markov discreto, si sustituimos reiteradamente las probabilidades de transición anuales estimadas en la ecuación general, generamos las probabilidades de transición de una temporalidad cualquiera.

13. La solución exacta de la ecuación general asociada a un proceso o semiproceso estocástico de Markov continuo, depende de la estructura de cada operación.

En el caso de la modelización mediante un proceso continuo de Markov, tenemos que solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov. Ello resulta posible en operaciones sencillas con pocos estados. En el resto de las operaciones debemos recurrir a introducir hipótesis adicionales como las siguientes: suponer la intensidad de transición constante durante toda la operación (actuariamente inconsistente), suponerla constante por tramos (más realista) o limitar el número máximo de transiciones por periodo.

Si se trata de un semiproceso estocástico de Markov, la solución del sistema de ecuaciones integro-diferenciales, es extraordinariamente compleja por lo que recomendamos su resolución por métodos de aproximación.

14. Alternativamente, disponemos de la posibilidad de utilizar métodos numéricos que permitan obtener soluciones aproximadas, actuariamente consistentes. Agrupamos estos métodos en dos categorías: algoritmos numéricos generalmente aceptados no específicos del ámbito actuarial y métodos numéricos pensados especialmente para una operación con múltiples estados. En la segunda categoría destacamos dos

métodos: uno basado en el teorema del valor medio y otro basado en la integración por producto.

Las probabilidades de transición de un semiproceso de Markov pueden obtenerse a partir de la aplicación de métodos numéricos basados en la derivación e integración numéricas. Alternativamente, el método basado en el Teorema del Valor Medio también resulta aplicable. En cualquier caso, la dificultad numérica de la obtención de estas probabilidades de transición es verdaderamente alta.

15. Hemos propuesto un modelo de valoración financiero-actuarial que admite notación matricial y vectorial. Esta circunstancia permite agilizar considerablemente los cálculos actuariales de las operaciones con múltiples estados.
16. Hemos estudiado la ecuación de Thiele y la construcción de las funciones agregada y anual de pérdidas. Su aplicación permite describir estocásticamente la evolución de la reserva matemática de una operación con múltiples estados.

2. Conclusiones relativas al Tema II.

En el tema II abordamos la aplicación de los modelos teóricos expuestos en el tema I, al objeto de modelizar un riesgo muy particular: La invalidez. Seguidamente expondremos las conclusiones y resultados fundamentales a los que hemos llegado.

17. El riesgo de invalidez es sumamente difícil de valorar porque en él intervienen infinidad de variables socioeconómicas (edad, sexo, coyuntura económica, legislación, estado civil, ocupación profesional, fiscalidad, etc.) cuya incidencia es muy difícil de determinar y cuantificar actuarialmente.

A esta complejidad que ofrece el tratamiento del riesgo de invalidez, conviene añadir problemas adicionales derivados de la singularidad de su aseguramiento: presencia de riesgo por azar moral, valoración subjetiva, complejidad matemática de los modelos actuariales, dificultad del tratamiento estadístico de la experiencia

disponible, establecimiento de carencias o periodos de espera, sobreaseguramiento, etc.

Todo lo anterior recomienda suma prudencia en la valoración y gestión del riesgo de invalidez, siendo conveniente utilizar tablas de probabilidad de invalidez ajustadas a las características del colectivo asegurado y recurrir al reaseguro como instrumento que garantice la solvencia.

18. Existen tres tratamientos del riesgo de invalidez: uno centrado en la probabilidad de invalidación (enfoque clásico), otro basado en la frecuencia de invalidación (enfoque Manchester-Unity) y otro inspirado en la probabilidad de invalidación y posterior persistencia de la misma (método de las tablas de persistencia).

A lo largo del tema hemos desarrollado estocásticamente el enfoque clásico, planteando diferentes modelos de invalidez, todos ellos inspirados en procesos estocásticos tratados en el tema I.

19. Para modelizar una operación de invalidez temporal hemos recurrido a un semiproceso estocástico de Markov continuo en el tiempo, $\{S(x), Z(x), x \geq 0\}$, donde $S(x)$ y $Z(x)$ expresan respectivamente el estado y la duración de la invalidez de un asegurado de edad x . Justificamos esta elección por las siguientes razones:

- La elevada frecuencia anual de la invalidación aconseja que optemos por un modelo estocástico continuo en el tiempo que permita tratar el número de invalidaciones anuales.
- Las probabilidades e intensidades de transición del estado de invalidez: reactivación y fallecimiento, dependen además de la edad, de la duración de la invalidez.

Hemos desarrollado la aplicación del semiproceso estocástico a partir de la obtención de su ecuación general. Para ello, previamente hemos necesitado deducir una serie de propiedades que verifican las probabilidades de transición, obtenidas de la división de su temporalidad en dos subperiodos.

La aplicación de estas propiedades ha permitido obtener por diferenciación el siguiente conjunto de ecuaciones integro-diferenciales que constituyen la ecuación general del proceso estocástico.

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{aa})}{dt} = -{}_{/t}P_x^{aa} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}) + \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ja} du \quad (10)$$

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{ai})}{dt} = {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t,u}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t,u}^{im}) du \quad (11)$$

$$\frac{d({}_{/t}P_x^{am})}{dt} = {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{ia})}{dt} &= -{}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ai} + \mathbf{m}_{x+t}^{am}) + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{ja} + \\ &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{ja} du \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{ii})}{dt} &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{ai} - {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t}^{im}) \\ &- \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mathbf{m}_{x+t}^{ja} + \mathbf{m}_{x+t}^{im}) du \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{im})}{dt} &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t}^{am} + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,z+t}^{im} + \\ &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mathbf{m}_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mathbf{m}_{x+t,u}^{im} du \end{aligned} \quad (15)$$

$${}_{/t}P_x^{\bar{aa}} = e^{-\int_0^t (m_{x+s}^{am} + m_{x+s}^{ai}) ds} \quad (16)$$

$${}_{/t}P_{x,x}^{\bar{ii}} = e^{-\int_0^t (m_{x+s, z+s}^{im} + m_{x+s, z+s}^{ia}) ds} \quad (17)$$

$${}_{/w,t}P_x^{ai} = \int_0^t {}_{/u}P_x^{aa} \cdot m_{x+u}^{ai} \cdot {}_{/t-u}P_{x+u,0}^{\bar{ii}} du \quad (18)$$

Su integración y derivación numérica han permitido calcular de forma aproximada las probabilidades de transición asociadas tanto a los estados actividad como de invalidez, a diferencia del método planteado en el **C.M.I.B. (1991)**, únicamente pensado para las transiciones del estado de actividad. Las probabilidades así obtenidas, verifican las siguiente propiedades: Crecimiento de la probabilidad de invalidación respecto la edad y decrecimiento de la probabilidad de reactivación respecto la edad y la duración de la invalidez.

20. Hemos modelizado una operación de invalidez permanente a través de un proceso de Markov continuo en el tiempo, $\{S(x), x \geq 0\}$. Destacamos de este modelo las siguientes virtudes:

- La frecuencia de ocurrencia de invalidación permanente es significativamente menor que la de invalidez temporal.
- La relativa sencillez formal de las ecuaciones diferenciales de Chapman-Kolmogorov que componen su ecuación general permite calcular de forma exacta las probabilidades de transición.
- La Generalidad de su planteamiento permite tratar cualquier tipo de invalidación permanente, tanto con periodo de espera (carencia) o sin él.

La aplicación práctica llevada a cabo pone de manifiesto la creciente probabilidad de invalidación con respecto la edad.

21. Dada la complejidad que representa una operación de invalidez mixta, que contemple simultáneamente la invalidación temporal y su reactivación con la invalidación permanente, hemos optado por una modelización a través de un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo.

Para recoger la influencia de la duración de la invalidez sobre las transiciones de reactivación y fallecimiento como inválido, hemos decidido realizar un 'split' del estado de invalidez. De esta forma, el estado original de invalidez se desdobra en tantos estados distintos como duraciones distintas de invalidez consideremos. Destacamos positivamente la sencillez del enfoque.

De la aplicación práctica desarrollada, deducimos las siguientes propiedades: Decrecimiento de la probabilidad de reactivación tanto respecto la edad como la duración de la invalidez, crecimiento de la probabilidad de invalidación, tanto temporal como de carácter permanente, con la edad.

3. Conclusiones relativas al tema III

En el tema III, partiendo de la hipótesis de que utilizamos unas tablas de probabilidad ajustadas a las características del colectivo, planteamos la cobertura del colectivo a través del reaseguro de diferencia de siniestralidad. Al respecto, recogemos las principales aportaciones realizadas:

22. El modelo de Reaseguro de diferencia de siniestralidad cuya aplicación desarrollamos en el marco general de una operación con múltiples estados es una modalidad que tiene como objeto cubrir las diferencias de siniestralidad que puedan originarse en el seno de un colectivo, a lo largo de toda su existencia.

Las diferencias de siniestralidad pueden originarse, bien por no poder atender al pago de las prestaciones aseguradas, devengadas en el año en curso, o bien por no cubrir a final del año la provisión matemática más los márgenes de solvencia establecidos.

El pago de la prima del reaseguro se plantea de forma conjunta al de la prima de la operación aseguradora. De esta forma la prima total que paga cada asegurado se descompone en 2 partes: prima de la operación aseguradora (resultante de equilibrar las prestaciones definidas) y prima de reaseguro.

$$p_i^{tot}(t) = p_i^{aseg.rec}(t) + p_i^{rea.rec}(t) \quad t = 1, \dots, h_i$$

Donde

$p_i^{tot}(t)$: prima total prepagable del año t-ésimo del asegurado “i”.

$p_i^{aseg.rec}(t)$: prima de la operación aseguradora del año t-ésimo y asegurado “i”.

$p_i^{rea.rec}(t)$: prima de reaseguro del año t-ésimo y asegurado “i”.

h_i : temporalidad de las primas del asegurado “i”

El planteamiento del reaseguro de diferencia de siniestralidad sigue la línea del reaseguro de riesgo de ruina propuesto por **Amsler, M.H.** (1991), pensada sobre todo para planes de pensiones, donde el riesgo de ruina es mayor si el número de partícipes que lo componen es pequeño.

23. El objetivo del reaseguro de diferencia de siniestralidad es garantizar la solvencia del colectivo para lo cual resulta primordial conocer la evolución estocástica del mismo. Su obtención por convolución es extraordinariamente compleja por lo que hemos recurrido a la simulación por el método de Montecarlo.

Dado el contexto de una operación con múltiples estados que estamos tratando, el método de simulación que hemos aplicado está basado en la simulación del estado del asegurado, de año en año, hasta su fallecimiento mediante su matriz de transición. Se trata de un método de simulación individual porque su aplicación se repite para cada uno de los asegurados que componen el colectivo.

A partir de la evolución estocástica del colectivo, definimos las variables aleatorias que representan respectivamente el valor actual de las prestaciones del reasegurador

y el valor actual de las primas de reaseguro. El cálculo de las primas de reaseguro se rige por el criterio basado en igualar las esperanzas matemáticas de las anteriores variables aleatorias. La ecuación resultante es inicialmente indeterminada porque contiene tantas incógnitas como primas de reaseguro se pacten.

$$E(\mathbf{x}_c^{pr}) = E(\mathbf{x}_c^p) \quad (19)$$

Siendo \mathbf{x}_c^{pr} el valor actual financiero de las prestaciones del reasegurador y \mathbf{x}_c^p el valor actual financiero de las primas de reaseguro. La obtención de las primas de reaseguro exige resolver la indeterminación de la ecuación (19). Para ello, hemos utilizado un criterio actuarial de reparto del coste total entre los asegurados basado en expresar la prima de reaseguro de cada asegurado proporcionalmente a su prima de reaseguro básica (prima de reaseguro de diferencia de siniestralidad suponiendo que el colectivo esté integrado por un solo asegurado).

$$\mathbf{p}_i^{rea}(r) = \mathbf{d}_c \cdot \mathbf{p}_i^{rea*}(r) \quad i = 1, \dots, n_c \quad r = 1, \dots, h_i \quad (20)$$

Donde $\mathbf{p}_i^{rea}(r)$ representa la prima de reaseguro del año r-ésimo y asegurado i . $\mathbf{p}_i^{rea*}(r)$ es la prima de reaseguro básica correspondiente. Su valor puede ser determinado a priori. \mathbf{d}_c es el factor de reaseguro que puede variar entre 0 y 1.

24. El coeficiente de reaseguro depende de la estructura del colectivo. A mayor tamaño del colectivo asegurado, más compensación de riesgos se produce entre sus componentes y, por tanto, las diferencias de siniestralidad imputadas individualmente son menores con lo que el colectivo en su conjunto resulta más solvente.

Como resultado de lo anterior, se producirá un abaratamiento del reaseguro, que en nuestro modelo propuesto, se manifiesta en una disminución del coeficiente de reaseguro.

En los ejemplos desarrollados en la Tesis, esta tendencia decreciente del coeficiente de reaseguro con respecto al tamaño del colectivo se pone especialmente de

manifiesto en las coberturas del fallecimiento. En las operaciones de invalidez consideradas, el coeficiente de reaseguro describe un decrecimiento mucho más atenuado lo que pone de manifiesto su mayor riesgo.

En las operaciones de invalidez desarrolladas, la prima de reaseguro representa una proporción de la prima total mayor que la del resto de las operaciones, lo que vuelve a poner de manifiesto el mayor riesgo de las mismas. Ello puede deberse a diferentes factores: mayor variabilidad de la siniestralidad, prima aseguradora excesivamente baja, menor duración de la operación, etc.

25. Hemos definido el coste total de la operación como la suma de los valores actuales actuariales de las primas totales que pagan los asegurados del colectivo. Atendiendo a la naturaleza de las componentes que integran la prima hemos distinguido entre el coste externo, que viene dado por las primas de reaseguro y el coste interno derivado de las primas de la operación aseguradora.

Sus valores dependen de varias variables: interés técnico, rentabilidad del fondo, interés técnico de reaseguro, recargo de seguridad de la operación aseguradora, recargo de seguridad del reaseguro, margen de solvencia, estructura de edades y de prestaciones.

Todas las variables anteriores, a excepción del recargo de seguridad de las primas de la operación aseguradora, son exógenas porque están fijadas por el ambiente financiero, la estructura y la composición del colectivo y, por tanto, son independientes de la gestión del colectivo. Únicamente, el recargo de seguridad de las primas de la operación aseguradora constituye una variable endógena cuyo valor puede ser determinado por el mismo colectivo.

A mayor recargo de seguridad, el coste interno de la operación crece y el coste externo disminuye (como las primas de la operación aseguradoras son mayores disminuyen las diferencias de siniestralidad y con ello las primas de reaseguro).

Planteamos una estrategia óptima basada en la obtención de un recargo de seguridad de las primas de la operación aseguradora óptimo, que en combinación con la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad, minimice el coste total.

La estrategia recargo-reaseguro óptima viene condicionada por la forma de la función de coste. Los ejemplos desarrollados en la tesis muestran que normalmente ésta es creciente respecto el recargo de seguridad de la operación aseguradora. Únicamente en algunos casos excepcionales (operaciones con rentas de jubilación) la función de coste presenta un tramo inicial, ligeramente decreciente. Consecuentemente, en las rentas de jubilación se recargará más que en el resto de las operaciones.

26. Apoyándonos en los resultados numéricos obtenidos, hemos realizado un estudio de sensibilidad de las principales variables exógenas del coste total. Las principales conclusiones a las que hemos llegado son las siguientes:

- Un incremento del tipo de interés técnico de la operación aseguradora produce un abaratamiento de las primas puras de la operación aseguradora respecto a las de reaseguro. Esto induce a recargar más con lo que el recargo de seguridad óptimo aumenta. Paralelamente, el coste total de la operación experimenta una disminución.
- Un aumento del tipo de interés técnico del reasegurador produce un abaratamiento de las primas de reaseguro en relación con las primas recargadas de la operación aseguradora. Ello motiva que cubramos más riesgo con el reaseguro y, en consecuencia, recarguemos menos, con lo que el recargo de seguridad ve disminuir su valor óptimo.

Paralelamente, el coste total de la operación así como sus dos componentes disminuyen: el coste interno, por la disminución del recargo óptimo y el externo derivado del incremento del interés técnico reasegurador.

- Un incremento del margen de solvencia repercute directamente en un incremento sustancial del coste total de la operación, dado que el nivel de cobertura exigido también es mayor.
- Una mayor rentabilidad financiera del fondo provoca un descenso de las diferencias de siniestralidad registradas por el colectivo, con lo que el coste del reaseguro disminuye de la misma forma que lo hace el coste total.
- Un incremento del recargo de seguridad del reaseguro encarece la cobertura del reaseguro con relación a la cobertura realizada con las primas de la operación aseguradora recargadas. Esta circunstancia induce a que recarguemos más con lo que el recargo óptimo también aumenta.

El coste total de la operación se incrementa, tanto por el lado asegurador al aplicar un recargo de seguridad a las primas de la operación mayor, como por el lado reasegurador, al aumentar el recargo de seguridad de sus primas.

27. Para analizar la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad en un colectivo abierto hemos supuesto que las entradas de los nuevos asegurados se produzcan al final de cada año. Con la aceptación de tal hipótesis, la aplicación del reaseguro de diferencia de siniestralidad ofrece dos singularidades fundamentales:

- Las diferencias de siniestralidad causadas por una evolución real del colectivo desfavorable, no prevista de acuerdo a sus probabilidades, no deben imputarse a los asegurados ya que su aseguramiento constituye responsabilidad del reasegurador. Esta circunstancia hace que en el momento de valorar la entrada de los nuevos asegurados, tengamos en cuenta la composición teórica del colectivo que éste debería presentar, de acuerdo a sus probabilidades, no la que realmente tiene.
- Los efectos positivos sobre las diferencias de siniestralidad provocados por la incorporación de nuevos asegurados, los imputamos o bien a las primas de

reaseguro o bien a las prestaciones del colectivo. Si no se producen efectos positivos, las primas y prestaciones de los antiguos asegurados no variarían. En tal caso, únicamente los nuevos asegurados, a su vez responsables de estos efectos negativos, saldrían perjudicados.

28. Para obtener la composición teórica del colectivo en cada momento en que se producen entradas de nuevos asegurados, hemos propuesto las dos siguientes metodologías:

- Simulación de Montecarlo.
- Método de Markov. Generamos la evolución del colectivo en términos esperados, proyectando los diferentes subcolectivos de asegurados que ingresan en el colectivo en un mismo año, homogéneos en prestaciones, primas y edades, a partir de sus probabilidades de transición respectivas.

El método basado en la simulación por Montecarlo presenta la ventaja de que puede aplicarse a cualquier tipo de colectivo, independientemente de su estructura. No así, el método de Markov en el que precisamos disponer de subcolectivos homogéneos en edades, prestaciones y primas con un cierto número de asegurados. En cambio, la implementación informática del método de simulación de Montecarlo resulta considerablemente más compleja que la del método de Markov.

29. Con la finalidad de valorar los efectos de las entradas de los nuevos asegurados que ingresan en u , es decir, u años después de la constitución del colectivo, definimos las variables aleatorias $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ y $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ que representan respectivamente el valor actual de la pérdida del reasegurador en u , antes y después de incluir la entrada del colectivo $D_{[u]}$.

Imputamos los efectos de la entrada de $D_{[u]}$ totalmente sobre las primas de reaseguro o prestaciones del colectivo, de forma que el valor financiero de la pérdida teórica del reasegurador en u , no se vea alterado por la entrada de $D_{[u]}$. Consecuentemente, se cumple:

$$E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) = E(\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L) \quad (21)$$

La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ contempla las prestaciones y primas de reaseguro anteriores a la entrada de $D_{[u]}$. La variable aleatoria $\mathbf{x}_{\tilde{N}_u}^L$ incluye las prestaciones o alternativamente las primas de reaseguro corregidas con la entrada de $D_{[u]}$.

30. Dependiendo de cómo imputemos los efectos derivados de las entradas de los nuevos asegurados, propondremos las dos siguientes variantes del reaseguro de diferencia de siniestralidad:

- Reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas: Los efectos de las entradas de los nuevos asegurados se trasladan a las primas de reaseguro.
- Reaseguro de diferencia de siniestralidad con contraprestaciones definidas: Las prestaciones del colectivo van variando en el tiempo con el objeto de absorber los efectos de las entradas de los nuevos asegurados. Las primas de reaseguro, una vez calculada, permanecen invariables.

31. En el reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas, los efectos sobre las diferencias de siniestralidad del colectivo debidos a la entrada en u de los nuevos asegurados, $D_{[u]}$, son imputados a las primas de reaseguro a través del coeficiente de reaseguro, manteniéndose constantes las prestaciones pactadas

inicialmente. Su aplicación exige resolver anualmente la ecuación (21) en base a alguno de los siguientes criterios:

- Criterio I: El nuevo coeficiente de reaseguro aplicado a todos los asegurados es el mismo.
- Criterio II: En u , el coeficiente de reaseguro de los antiguos asegurados disminuye en una proporción k_u igual a la disminución que experimenta el teórico coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados, $D_{[u]}$, resultante de igualar a 0 la esperanza matemática de la pérdida reaseguradora de $D_{[u]}$.

La ventaja del criterio II es que al proponer una misma variación del coeficiente de reaseguro, todos asegurados del colectivo se benefician en la misma proporción de los efectos positivos de las entradas de los nuevos asegurados.

Los ejemplos prácticos desarrollados constatan los siguientes resultados:

- Para ambos criterios, se cumple que a mayor tamaño del colectivo entrante, menor es el coeficiente de reaseguro tanto de los nuevos como de los antiguos asegurados.
- El criterio I beneficia a los nuevos asegurados que forman $D_{[u]}$ cuando su tamaño en relación a N_u^- es reducido ya que, a diferencia del criterio II, el coeficiente de reaseguro aplicable a todos asegurados es el mismo, sin tener en cuenta la estructura del colectivo entrante del cual proceden.
- En cambio, el criterio II como tiene en cuenta la estructura del colectivo de entrada del que procede el asegurado beneficiará a aquellos asegurados que provienen de colectivos entrantes grandes.

32. El reaseguro de diferencia de siniestralidad con contraprestaciones definidas se caracteriza porque los efectos provocados por la entrada de nuevos asegurados se trasladan a las prestaciones de los antiguos asegurados del colectivo. Las primas de reaseguro, una vez calculadas, permanecen invariables en el tiempo. La aplicación de esta modalidad obliga a replantear anualmente las prestaciones del colectivo y a determinar las primas de reaseguro de los nuevos asegurados a partir de la ecuación (21).

Esta variante del reaseguro de diferencia de siniestralidad presenta el inconveniente de que la ecuación (21) es inicialmente indeterminada puesto que tiene dos incógnitas: la tasa de variación de las prestaciones g_u y el coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados $d_{[u]}$. Para resolver esta indeterminación acudiremos a alguno de los siguientes criterios :

- Criterio I: El coeficiente de reaseguro aplicado a todos los asegurados es el mismo e igual a un valor \bar{d} que podría coincidir con el coeficiente de reaseguro del colectivo inicial $D_{[0]}$.

El criterio I resulta técnicamente más aceptable cuando el peso del colectivo inicial $D_{[0]}$ tiene un peso considerable sobre N_u porque la estructura de ambos colectivos se asemejan razonablemente. Las primas de reaseguro así obtenidas únicamente tienen en cuenta la estructura del colectivo inicial.

- Criterio II: El coeficiente de reaseguro $d_{[u]}$ se obtiene resolviendo la ecuación que resulta de igualar a 0 la esperanza matemática de la pérdida reaseguradora asociada al colectivo entrante, $D_{[u]}$.

El criterio II es recomendable cuando el tamaño de $D_{[u]}$ es importante con relación a N_u . Cuando no se produzca esta circunstancia, su aplicación es más

discutible porque el coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados no se beneficia suficientemente de la estructura del colectivo abierto. Las primas de reaseguro así calculadas solamente tienen en cuenta la estructura del colectivo entrante. Consecuentemente, a mayor tamaño de la entrada de nuevos asegurados, menor será el coeficiente de reaseguro.

- Criterio III: Tomamos como valor de $d_{[u]}$, el coeficiente de reaseguro obtenido de la aplicación del criterio I del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas.

Las primas de reaseguro calculadas en base al criterio III tienen en cuenta tanto la estructura del colectivo abierto como la del colectivo entrante ya que en el cálculo de $d_{[u]}$ se tiene en cuenta todo el colectivo. El incremento de las prestaciones de los antiguos asegurados resulta actuarialmente equivalente al descenso que experimentarían sus primas de reaseguro en la aplicación del criterio I del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas.

- Criterio IV: Tomamos como valor de $d_{[u]}$, el coeficiente de reaseguro para los nuevos asegurados, obtenido de la aplicación del criterio II del reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas.

El criterio IV se caracteriza porque su aplicación no únicamente tiene presente la estructura del colectivo abierto, sino que busca beneficiar de la misma forma a todos los asegurados: unos en forma de incremento de sus prestaciones (antiguos asegurados), otros en unas primas de reaseguro más ajustadas (nuevos asegurados).

Hallamos g_u solucionando la ecuación (21), previa sustitución en la misma del valor de $d_{[u]}$, calculado de acuerdo a alguno de los criterios anteriores. La aplicación de los anteriores criterios está sujeta a las siguientes apreciaciones:

33. La puesta en práctica del reaseguro de diferencia de siniestralidad con contraprestaciones definidas en un colectivo abierto nos ha permitido llegar a las siguientes conclusiones fundamentales:

- Conforme aumenta el tamaño del colectivo entrante, como resultado de la mayor compensación de riesgos que tiene lugar, la tasa de variación de las prestaciones g_u también es mayor. El incremento de las prestaciones es más significativo en aquellas operaciones con seguros o rentas de invalidez, que, tal como vimos en los anexos del capítulo anterior, son las que más diferencias de siniestralidad importantes suelen registrar.
- Para colectivos entrantes pequeños, las tasas de variación de las prestaciones obtenidas por aplicación del criterio II son mayores que las generadas por el criterio I.
- La aplicación de los criterios III y IV se caracteriza porque $d_{[u]}$ es menor que en los dos criterios anteriores. Ello es debido a que los criterios III y IV, incorporan al coeficiente de reaseguro de los nuevos asegurados, el beneficio global derivado de la estructura del colectivo abierto.

Consecuentemente, en los criterios III y IV, el excedente actuarial restante a imputar en forma de incrementos de las prestaciones de los antiguos asegurados es menor, con lo que las tasas de variación de las prestaciones por los criterios III y IV son más bajas que las obtenidas por los otros dos criterios.

La aplicación de los criterios III y IV, en comparación con los dos anteriores, beneficia, por tanto, a los nuevos asegurados porque abarata

considerablemente el precio de sus primas de reaseguro. En cambio, perjudica a los antiguos aseguradores porque sus prestaciones aumentan en menor medida que en los criterios I y II.

- A igual que sucedía con los criterios I y II de las prestaciones definidas, la aplicación del criterio III con contraprestaciones definidas, comparativamente con el IV, favorece a los asegurados pertenecientes a colectivos entrantes más pequeños.

4. Líneas de investigación abiertas

Entre las muchas vías de análisis y ampliaciones que suscita la Tesis doctoral, consideramos fundamentales las siguientes:

- Aplicación de los modelos Markovianos en la tabulación de probabilidades asociadas a rentas de supervivencia, seguros de fallecimiento y otras operaciones complementarias (invalidez permanente, invalidez temporal, riesgo de dependencia, cobertura de enfermedades graves, S.I.D.A, etc.).
- Utilización de nuevas herramientas de modelización que facilite la tabulación de las probabilidades de transición: ‘Splitting’ de estados cuyas probabilidades no dependan únicamente de la edad, utilización de métodos de estimación no paramétricos (regresión dinámica, modelización local polinómica), desarrollo de tests que permitan evaluar la cantidad de alisamiento.
- Aplicación de la ecuación diferencial de Thiele en el seguimiento estocástico de la reserva matemática y en el análisis de su variación ante modificaciones de las bases técnicas. En una línea de investigación muy próxima a la anterior, proponemos el desarrollo de modelos de valoración financiero-actuariales Markovianos, inspirados en el estudio de la función de pérdida y de la aplicación del teorema de Hattendorff.

- La estructura estocástica de una operación con múltiples estados puede tener en cuenta además de la aleatoriedad de los riesgos asegurados, la financiera. Por ello, creemos interesante ampliar el reaseguro de diferencia de siniestralidad en la utilización de tipo de interés estocástico que recoja perturbaciones aleatorias del tipo de interés en el plazo de la operación haciendo depender la prima de reaseguro de la volatilidad del tipo de interés y aversión al riesgo del reasegurador.
- En relación con su aplicación en los colectivos abiertos, proponemos varias ampliaciones futuras del modelo presentado: entradas de asegurados continuas en el tiempo, nuevas propuestas de cómo repercutir los efectos de las entradas de nuevos asegurados tanto en el reaseguro de diferencia de siniestralidad con prestaciones definidas como con contraprestaciones definidas.

BIBLIOGRAFÍA

Alegre, A. (1990), Valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez. Publicacions Universidad de Barcelona. Barcelona

Ammeter, H. (1955), The calculation of premiums rates for excess of loss and stop loss reinsurance treaties in non proportional reinsurance. Arithbel.

Amsler M.H. (1968), Les chaînes de Markov des assurances vie, invalidité et maladie. Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, Mónaco, vol 5, pp 731-746.

Amsler M.H. (1988), Sur la modélisation des risques vie par les chaînes de Markov. Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, vol 3, pp 1-17.

Amsler, M.H. (1991), Réassurance du risque de ruine. Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker Heft 1, 1991, pp 109-121.

Amtmann, H. (1907), Zur Mathematik der Pensionsversicherung. Jena: Fischer.

ASTIN Nederland (1990), Het KAZO-Tarief 1990, AOV-Individueel. ASTIN Nederland.

Aubanell, A., Benseny, A. y Delshams, A. (1991), Eines bàsiques de càlcul numèric. UAB. Barcelona

Barnett, H.A.R. (1985), Criteria of smoothness. Journal of the Institute of Actuaries, 112, pp 331-367.

Benjamin, B. y Pollard, J.H. (1980), The analysis of mortality and other actuarial statistics. Heinemann. Londres.

Berger, A. (1925), Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik. Zweiter Teil. Springer. Berlín.

Bernoulli, D. (1766), Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. Hist. Acad. Roy. Sci., année MDCCLX, mémoires, pp 1-45.

Blaschke, E. (1906), Vorlesungen über Mathematischen Statistik. Leipzig. Teubner.

Bloomfield, O.S.F. y Haberman, S. (1987), Graduation: some experiments with kernel methods. Journal of the Institute of Actuaries n. 110, pp 339-369.

Böhm, F. (1953), Versicherungsmathematik, Berlín. De Gruyter.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones D.A. y Nesbitt, C.J. (1986), Actuarial Mathematics. The Society of Actuaries, Itasca, IL.

Bull, O. (1980), Premium calculations for two disability lump sum contracts. Transaction of the 21st. International congress of actuaries, Zurich-Lausana, vol 3, pp 45-51.

Carter, R.L. (1979), El reaseguro. Mapfre.

C.M.I.B. (1991), C.M.I.R. 12, The analysis of permanent health insurance data. Continuous Mortality Investigation Bureau, The institute of actuaries y The faculty of actuaries.

C.M.I.B. (1996), C.M.I.R. 15, Sickness experience 1979-82 and 1983-1986 for group PHI policies. Continuous Mortality Investigation Bureau, The institute of actuaries y The faculty of actuaries.

Claramunt, M.M. (1992), Control dinámico estocástico de solvencia de los planes de pensiones, tesis doctoral. Universidad de Barcelona. Barcelona.

Cleveland, W.S. (1979), Robust locally weighted regression models. Journal of the American statistical association, vol 74, pp 829-836.

Copas, B. y Haberman, S. (1983), Non-parametric graduation using kernel methods. Journal of the Institute of actuaries 110, pp 135-156.

Coppini, M.A. (1968), Lezioni di tecnica delle assicurazioni sociali. Rome. Veschi.

Courant, S.T. (1984), Design of disability benefits. Transactions of the 22nd International Congress of Actuaries, Sidney, vol 2, pp 391-400.

Cournot, A. (1843), Exposition de la théorie des Chances et des Probabilités. Paris: Hachette.

Cox, D.R. y Miller, H.D. (1965), The theory of stochastic processes. Chapman and Hall. Londres.

Daboni, L. (1964), Modelli di rendite aleatorie. Giornale dell'Istituto Italiano degli attuari 27, pp 273-296.

D'Alembert (1761), Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. Opuscles mathématiques 2, pp 26-95. Paris.

Dillner, C.G. (1969), New bases for non-cancellable sickness insurance in Sweden. Scandinavian Actuarial Journal LII, pp 113-124.

Dinsdale, W.A. (1963), Specimen Insurance forms and glossaries. Stone and Cox.

Fan J. y Gijbels, I. (1996), Local polynomial modelling and its applications. University of North Carolina. Chapman Hall.

Finlaison, J. (1829), Life annuities. Report of John Finlaison, Actuary of the National Debt on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities were founded. House of commons. Londres.

Forfar, D.O., McCutcheon, M.A. y Wilkie, A.D. (1988), On graduation by mathematical formula. Journal of the institute of actuaries, vol 115, pp 1-149.

Franckx, E. (1963), Essai d'une théorie opérationnelle des risques markoviens. Quaderni dell'Istituto di Matematica finanziaria dell'Università di Trieste, 11. Trieste.

Francis, B., Green, M. y Payne, C. (1993), The GLIM system. Release 4 manual. Oxford: Clarendon Press.

Galbrun, H. (1933), Théorie Mathématique de l'assurance Invalidité et de l'assurance nuptialité. Paris:Gauthier-Villars. Ed. E. Borel.

Gavin J., Haberman, S. y Verral, R. (1993), Moving weighted average graduation using kernel estimation. Insurance: Mathematics and Economics 12, pp 113-126.

Gavin J., Haberman, S. y Verral, R. (1994), On the choice of bandwidth for kernel graduation. Journal of the Institute of Actuaries 121, pp 119-134.

Gerathewohl, K. (1993), Reaseguro, Teoría y Práctica. Reaseguros Gil y Carbajal. Madrid.

Gerber, H.U. (1990), Life insurance Mathematics. Swiss Association of Acturaries Zürich. Springer-Verlag.

Golding, C.E. (1965), The law and practice of reinsurance. Stone and Cox.

Gompertz, B. (1825), On the Nature of the fuction expressive of the law of human mortality, and on a New Mode if determining the value of life contingencies. Philosophical Transactions of Royal society, vol 115, pp. 513-583.

Gregorius, F.K. (1993), Disability insurance in The Netherlands. Insurance: mathematics and economics 13, no 2, pp 101-116.

Haberman, S. (1983), Decrement tables and the measurement of morbidity:I. Journal of the Institute of Actuaries, vol 110, pp 361-381.

Haberman, S. (1984), Decrement tables and the measurement of morbidity:II. Journal of the Institute of Actuaries, vol 111, pp 73-86.

Haberman, S (1988), The central sickness rate: A mathematical investigation. Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, vol 3, pp 83-99.

Haberman, S. y Renshaw, A.E. (1996), Generalized linear models and actuarial science. The statistician, vol 45, pp 407-436.

Haberman, S. (1996), Landmarks in the history of actuarial science. Actuarial research paper n. 84. Department of Actuarial Science and Statistics. City University. London.

Haberman, S. y Pitacco, E. (1999), Actuarial models for disability insurance. Chapman and Hall. Londres.

Halley, E (1693), An estimate of the degrees of the mortality of Mankind, drawn from curious tables of the births and funerals of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of Annuities upon lives. Philosophical Transactions of Royal Society, vol 17, pp 596-610.

Hamilton, J. (1972), Actuarial aspects of long-term sickness insurance. Journal of the Institute of Actuaries, vol 98, pp 17-67.

Hamza, E. (1900), Note sur la théorie mathématique de l'assurance contre le risque d'invalidité d'origine morbide, sénible ou accidentelle. Transactions of the 3rd International Congress of Actuaries, París, pp 154-203.

Hattendorf, K. (1868), Das Risiko bei der Lebensversicherung. Masius Rundschau der Versicherungen 18, pp 169-183.

Hertzman, E. (1993), Summary of talk on 'Work of the CMI PHI Sub-Committee'. Insurance: Mathematics and Economics, n. 13, pp 117-122.

Hesselager, O. y Norberg, R. (1996), On probability distributions of present values in life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, n. 18, pp 35-42.

Hoem, J.M. (1969), Markov chain models in life insurance. *Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematiker IX*, no 2, pp 91-107.

Hoem, J.M. (1984), A flaw in actuarial exposed-to-risk theory. *Scandinavian Actuarial Journal* 1984, pp 187-194.

Hoem, J.M. (1988), New Avenues in modelling life insurance and other insurance of persons. *Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, Vol R*, pp 171-202.

Hooker, P.F. y Longley-Cook, L.H. (1957), *Life and other contingencies*, vol 2 . Cambridge University press.

Hunter, A. y Philips, J.T. (1932), *Disability benefits in life insurance policies*. New York: Actuarial Society.

Iosifescu, I. Tautu, P. (1973), *Stochastic processes and applications in biology and medicine*, pp 215-233, New York. Springer.

Jackson P.H. (1980), Statistical bases for disability retirement costs in the United States of America. *Transactions of the 21st International congress of actuaries, Zurich-Lausana*, vol 3, pp 99-110.

Jones, B.L. (1993), Modelling multi-state processes using a Markov assumption. *Proceedings of the 27th annual research conference*, Iowa City, pp 239-248.

Jordan, C.W. (1967), *Life contingencies*. The Society of Actuaries, Chicago.

Del Hoyo, J y García, A. (1988). *Análisis y Predicción de la población Española (1910-2000)*. Fundación de Estudios de Economía Aplicada. Madrid.

Kahane, Y. (1980), The israeli experience with workmen's compensation coverage for the self-employed. Transactions of the 21st International congress of actuaries, Zurich-Lausana, vol 3, pp 121-127.

Karup, J. (1893), Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät am 31 Dezember 1890. Heinrich Morchel, Dresden.

Kojima, K. (1988), Application of the Markov model to life insurance products. Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, vol 3, pp 141-158.

Laplace, P.S. de (1812), Théorie Analytique des Probabilités. Paris: Courcier.

Lecina, J.M. (1990), Los planes de previsión. Un tratamiento actuarial. Caja de Cataluña. Barcelona.

Levi, E. (1973), Curso de matemática financiera y actuarial. Barcelona. Bosch.

Lewin (1872), Ueber die Versicherung von Invaliden-Pensionen und Heiratsaussittattungen. Pesth.

Linnemann, P. (1993), On the application of Thiele's differential equation in life insurance. Insurance: Mathematics and Economics n. 13, pp 63-74.

Loewy, A. (1924), Versicherungsmatematik. Berlin. Springer

Makeham, W. M. (1867), On the law of mortality. Journal of the Institute of Actuaries n. 13, pp 325-358.

Makeham, W.M. (1875), On an application of the theory of the composition of decremental forces. Journal of the Institute of the Actuaries 18, pp 317-322.

Mattsson, P. (1930), Technical methods of insurance against sickness disability. Transactions of the 9th International Congress of Actuaries, Estocolmo, vol 3, pp 167-197.

Mattsson, P. (1977), Some reflections of different disability models. Scandinavian Actuarial Journal 1977, pp 110-118.

Mc Cullagh, P. y Nelder, J.R. (1989), Generalized linear models. London. Chapman and Hall.

Mc Cutcheon, J.J. (1984), Spline graduation with variable knots, proceedings 22nd International Congress of Actuaries, Sidnei, n. 4, pp 47-67.

Mc Leod, H.D. (1990), The developement of a market yield-curve. The South African solution. 1st AFIR international colloquium, vol 2, pp 195-212.

Milbrodt, H. (1997), Markov models and Thiele's integral equations for the prospective reserve. Insurance: Mathematics and Economics, n. 19, pp 187-235.

Moivre de, A. (1725), Annuities on lives or the valuation of annuities upon any number of lives as also of reversions. London. William Pearson.

Möller, C.M. (1992), Numerical evaluation of markov transition probabilities based on the discretized product integral. Scandinavian Actuarial Journal 1992, pp 76-87.

Möller, C.M. (1993), A stochastic version of Thiele's differential equation. Scandinavian Actuarial Journal 1993, pp 1-16.

Navarro, E. (1991), Tablas de mortalidad de la población 1982. Metodología y fuentes. Editorial Mapfre. Madrid

Navarro, E., Ferrer, R. y Nave, J.M. (1995), La volatilidad de las variaciones de los tipos de interés en la estimación de su estructura temporal. Cuaderns de Treball. Universidad de Valencia.

Nieto de Alba, U. y Vegas Asensio, J. (1993), Matemática Actuarial. Editorial Mapfre. Madrid.

Norberg, R. (1992), Hattendorff's theorem and Thiele's differential equation generalized. Scandinavian Actuarial Journal, part 1, 1992, pp 2-14.

Ore, T.K., Sand, R. y Trier, G. (1964), New technical bases for life and pension insurance in Norway. Scandinavian Actuarial Journal XLVII, pp 164-216,

Pitacco, E. (1986), Simulation in insurance. Insurance and risk theory. Reidel Publishing Company, pp 37-77.

Pitacco, E. (1995), Actuarial models for pricing disability benefits: Towards a unifying approach. Insurance: Mathematics and Economics 16, pp 39-62.

Pitacco, E., Olivieri, A. (1997), Introduzione alla teoria attuariale delle assicurazioni di persone. Pitagora editrice. Bologna.

Pociello, E. y Sarrasí F.J. (1997), Cobertura del riesgo de invalidez permanente. Matemática de las operaciones financieras '97. Universitat de Barcelona, pp 929-944, Barcelona.

Pociello, E. (1998), Modelización estocástica del riesgo de invalidez temporal. XXIV Congreso Nacional de estadística e investigación operativa, pp 609-611, Almería.

Pollard, J.H. (1971), The application of the Chi-Square test of goodness-of-fit to mortality data graduated by summation formulae. Journal of the Institute of Actuaries, n. 97, pp 325-330.

Price, R. (1783), Observations on reversionary payments; on schemes for providing annuities for widows and for persons in old age; on the method of calculating the values of assurances on lives. London. T.Cadell.

Price, R. (1792), Observations on reversionary payments on schemes for providing annuities for widows and for persons in old age; and on the method of calculating the values of assurances on lives. London. T.Cadell.

Prime, C.M. (1980), A practical method for studying disability prevalence from limited data. Transactions of the 21st International Congress of Actuaries, Zurich-Lausana. vol 3, pp 237-247.

Ramlau-Hansen, H. (1988), Hattendorff's theorem: A markov chain and counting process approach. Scandinavian Actuarial Journal 1988, pp 143-156.

Reinsch, C. (1967), Smoothing by Spline functions. Numerical mathematics, n. 10, pp 177-183.

Renshaw, A.E. (1991), Actuarial graduation practice and generalised linear and non-linear models. Journal of the Institute of Actuaries, n. 118, parte II, pp. 295-312.

Renshaw, A.E. y Haberman, S. (1995), On the graduation associated with a multiple state model for permanent health insurance. Insurance: mathematics and economics 17, pp 1-17.

Renshaw, A.E. y Haberman, S. (1996), Dual modelling and select mortality. Insurance:Mathematics and Economics 18, pp 105-126.

Rhodes, E.E. (1932), Is disability insurance practicable?. Journal of the Institute of Actuaries, n. 63, pp 115-127.

Richard, P.J. (1946), Théorie et pratique des opérations d'assurance. París:Doin.

Risser, R. (1965), Applications de la statistique à la démographie et a la biologie, tome 3, fasc. III of traité du calcul des probabilités et de ses applications, ed E. Rorel. París: Gauthier-Villars.

Royston, P. y Altman, D.G. (1994), Regression using Fractional Polynomials of continuous covariates: parsimonious parametric modelling. *Applied Statistics* 43, pp 429-467.

Sanson, R.J. y Waters, H.R. (1988), Permanent health insurance in the UK: The mathematical model and the Statistical Analysis of the data. *Transaction of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, vol 3*, pp 323-339.

Sarrasí F.J. (1993), Reaseguro y planes de pensiones. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona. Barcelona.

Sarrasí, F.J. (1995), Cobertura de márgenes de solvencia en seguros colectivos. *Cuadernos Actuariales*, n. 7, pp 119-157

Scott, W.F. (1995), Advanced life contingencies. Department of Actuarial Mathematics and Statistics Heriot-Watt University. Edinburgh.

Scott, W.F. (1996), Life contingencies. Department of Actuarial Mathematics and Statistics Heriot-Watt University. Edinburgh.

Seal, H. (1977) Studies in the History of probability and Statistics XXXV. Multiple decrements or competing risks. *Biometrika*, vol 64, n. 3, pp 429-439.

Segerer, G. (1993), The actuarial treatment of the disability risk in Germany, Austria and Switzerland. *Insurance: Mathematics and Economics* 13 n. 2 pp 131-140.

Silverman, B.W. (1986), Density estimation for statistics and data analysis. Chapman and Hall. London.

Sprague, T.B. (1879), On the construction of a combined marriage and mortality table from observations made as to the rates of marriage and mortality among any body of men. *Journal of the Institute of Actuaries* 31, pp 406-452.

Spurgeon, E.F. (1932), Life contingencies. Cambridge University Press.

Starke, G.K. (1980), The duration of sickness. Journal of the Institute of Actuaries, vol 107, pp 365-372.

Struyck, N. (1740), Appendix to introduction to General Geography together with Astronomy and Other matters. Amsterdam.

Sverdrup, E. (1965), Estimates and Test Procedures in connection with Stochastic Models for Deaths, Recoveries and Transfers between different States of Health. Scandinavian Actuarial Journal XLVIII, pp 184-211.

Tomassetti, A. (1986), Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali. Università degli Studi di Roma "La Sapienza". Roma

Tomassetti, A. (1987), Esercizi e complementi di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali. Università degli Studi di Roma "La Sapienza". Roma

Urciuoli, V. (1975), Istituzioni di Matematica attuariale. CEDAM. Padova.

Verral R.J. (1993), Graduation by dynamic regression methods. Journal of the Institute of Actuaries, n. 120, pp 153-170.

Verrall, R. J. (1996), A unified framework for graduation. Actuarial research paper n. 85. Department of Actuarial Science and Statistics. City University. London.

Wargentín, P. (1766), Mortality in Sweden. Stockholm. General Register Office.

Waters, H.R. (1984), An approach to the study of multiple state models. Journal of the Institute of Actuaries, n. 111, pp 363-375.

Waters, H.R. (1990), The recursive calculation of the moments of the profit on a sickness insurance policy. Insurance: Mathematics and Economics, n. 9, pp 101,113.

Watson A.W. (1903), Sickness and mortality experience of the independent order of oddfellows Manchester unity Friendly society during the Five years 1893-1897. I.O.O.F.M.U. Manchester.

Whittaker, E.T. (1923), On a new method of graduation. Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, vol 41, pp 63-75.

Wigglesworth, E. (1793), A table showing the duration, the decrement and the expectation of life in the States of Massachusetts and New Hampshire, Formed from 62 bills of mortality on the files of the american academy of arts and sciences in the year 1789. Memories of American Academy of arts and sciences, vol II, pp 131-135.

Wilkie, A.D. (1988), Markov models for combined marriage and mortality tables. Transactions of the 23st International Congress of Actuaries, Helsinki, vol 3, pp 473-486.

Wittstein, T. (1862), Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden mitgliedern. Arch. Math. Phys. 39, pag 67-92.

Wolthuis, H. y Van Hoek, I. (1986), Stochastic models for life contingencies. Insurance: Mathematics and Economics, n. 5, pp 217-254.

Wolthuis, H (1994), Life insurance Mathematics (The Markovian model). CAIRE Education series n. 2. University of Amsterdam. Bruselas.

Woolhouse, W.S.B. (1867), On the construction of tables of mortality. Journal of Institute of Actuaries, vol 13, pp 75-102.

Zwingsgi, E. (1958), Versicherungsmathematik. Basel: Birkhauser.