Análisis de soluciones para Juegos Cooperativos de valores medios crecientes respecto a un vector: Juegos Financieros

Josep Maria Izquierdo Aznar

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.
Universitat de Barcelona

Programa de doctorado-Bienio 1989-1991: Métodos Matemáticos en el Análisis Económico-Financiero

Tesis para optar al Título de Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales.

Director-Tutor: Dr. Carles Rafels i Pallarola

Barcelona, 17 Abril 1996

Segunda parte

Soluciones clásicas

Introducción

En este parte trataremos de analizar diferentes tipos de soluciones que son aplicables para cualquier juego cooperativo y, en concreto, para los juegos financieros. Dado que se trata de soluciones generales y que tienen gran tradición en la literatura de Juegos, las denominaremos **soluciones clásicas**.

Partiendo del supuesto de que los jugadores se han puesto de acuerdo para cooperar obteniendo conjuntamente un beneficio igual a $v(N)$, el problema que surge de manera natural es la distribución de ese beneficio. Entendemos por solución de un juego cooperativo de n jugadores (N, v) a aquel vector o conjunto de vectores $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ cuya componente i-ésima representa la asignación al jugador i-ésimo y en donde la suma de las asignaciones es igual al valor total a repartir $(v(N))$. Más formalmente, denominaremos conjunto de vectores eficientes[22] $(I^*(v))$ a aquellos vectores tales que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, i.e.

$$I^*(v) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \ \text{ tal que } \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

Una solución asociará a cada juego un subconjunto de vectores eficientes.

En principio, suponer que los jugadores siempre se coaligarán para repartirse el beneficio total no supone una especial restricción ya que como hemos visto en el capítulo precedente los juegos financieros son superaditivos: cualquier subdivisión de la coalición total (por ejemplo, S versus $N \setminus S$) sería ineficiente en el sentido de que su unión siempre provocaría un beneficio adicional.

$$v(S) + v(N \setminus S) \leq v(N).$$

En lo sucesivo analizaremos dos grandes bloques de soluciones: aquellas que nos conducen a un conjunto de asignaciones o vectores, y aquellas que proponen una única distribución eficiente. Entre las primeras estudiaremos el **Núcleo**, el **conjunto de negociación** y los **conjuntos estables**; entre las segundas, el **Valor de Shapley**, el **nucleolus** y el **valor de** τ.

[22]En adelante denominaremos a estos vectores distribuciones, pagos o asignaciones.

Capítulo 2

El Núcleo

2.1 Definición

El Núcleo[1] fue introducido por primera vez por Gillies [19]. Como concepto de solución, el Núcleo selecciona aquellos vectores eficientes que asignan a cada coalición un pago conjunto superior al que se podrían garantizar sin la colaboración de los jugadores no presentes en la coalición. De alguna manera, el Núcleo nos pone de manifiesto aquellas distribuciones que no rompen la cooperación entre los jugadores pues todas las coaliciones alcanzan el mínimo pago exigido. Más formalmente, recordamos la definición de Núcleo de un juego.

Definición 2.1 *Para todo juego* $(N, v) \in G^n$ *definimos el Núcleo* $C(v)$ *como*

$$C(v) = \{x \in I^*(v) \text{ y } x(S) \geq v(S) \ \forall S \subset N\}$$

Como es bien conocido, no todo juego cooperativo tiene el Núcleo no vacío, ni aún siendo superaditivo. Que el Núcleo sea no vacío es una buena cualidad para un problema de reparto de beneficios dado que la cooperación conjunta no será puesta en duda ya que siempre podremos encontrar una distribución que respete las demandas mínimas de cada coalición. Por suerte, los juegos financieros presentan la cualidad de tener siempre distribuciones que pertenecen al Núcleo. La demostración se puede realizar desde dos puntos de vista: dando la expresión de una distribución que siempre esté en el Núcleo del Juego financiero (proposición **2.2**); o utilizando la noción de conjuntos equilibrados (proposición **2.6**)

Proposición 2.2 *La distribución proporcional de la ganancia total respecto a los recursos iniciales* C_i *es una preimputación que siempre pertenece al Núcleo.*

[1]Traducción de la palabra inglesa "Core"

DEM.

Sea (N, v) un juego financiero respecto al vector $(C_1, \ldots, C_n)$ y

$$p(v;\ \vec{C}) = \left(C_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}\right)_{i=1,\ldots,n}$$

la distribución proporcional respecto a $\vec{C}$. Obsérvese que $p_i(v;\ \vec{C}) \geq 0$ sólo será igual a cero si $v(N) = 0$.

Verificamos que se trata de una preimputación:

$$\sum_{i\in N} p_i(v;\ \vec{C}) = \sum_{i\in N}\left(C_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}\right) = \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} \cdot \sum_{i\in N} C_i = v(N);$$

y que pertenece al Núcleo del juego:

$$\sum_{i\in S} p_i(v;\ \vec{C}) = \sum_{i\in S}\left(C_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}\right) = \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} \cdot \sum_{i\in S} C_i \geq \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \cdot \sum_{i\in S} C_i = v(S).$$

□

Antes de enunciar la proposición **2.6** definiremos lo que se entiende por conjunto equilibrado y por juego equilibrado, conceptos introducidos por Shapley [50].

Definición 2.3 *Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Una colección $S_1, S_2, \ldots, S_m$ de subconjuntos no vacíos de la coalición S, se dice que está equilibrada en S si existen números positivos $\mu_1, \ldots, \mu_m$ t.q. $\forall\, i \in S$*

$$\sum_{j;i\in S_j} \mu_j = 1.$$

Definición 2.4 *Un juego $(N, v) \in G^n$ se dice que está equilibrado si, para cada colección equilibrada $S_1, S_2, \ldots, S_m$ en N con pesos $\mu_1, \ldots, \mu_m$, se cumple que:*

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot v(S_j) \leq v(N).$$

Teorema 2.5 *(Shapley [50]) Un juego $(N, v) \in G^n$ está equilibrado si y sólo si $C(v) \neq \emptyset$.*

Utilizando este último resultado demostraremos que el Núcleo del juego financiero es no vacío.

Proposición 2.6 *Todo Juego financiero es equilibrado.*

DEM.

Para toda colección equilibrada $S_1, \ldots, S_m$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot v(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left[\frac{v(S_j)}{\sum_{i \in S_j} C_i} \cdot \sum_{i \in S_j} C_i \right] = \sum_{i \in N} C_i \left[\sum_{j;i \in S_j} \frac{v(S_j)}{\sum_{k \in S_j} C_k} \cdot \mu_j \right] \leq$$

$$\text{(por 1.1)} \qquad \leq \sum_{i \in N} C_i \left[\sum_{j;i \in S_j} \frac{v(N)}{\sum_{k \in N} C_k} \cdot \mu_j \right] = \sum_{i \in N} C_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i} \left[\sum_{j;i \in S_j}^{m} \mu_j \right] =$$

$$= \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i} \sum_{i \in N} C_i \cdot \left[\sum_{j;i \in S_j} \mu_j \right] = \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i} \cdot \sum_{i \in N} C_i = v(N).$$

□

Por tanto el juego es **equilibrado** y tiene el Núcleo no vacío. Dado que todo subjuego (aquel que se forma considerando un subgrupo de jugadores) es también financiero se cumplirá que el Núcleo del subjuego es también no vacío; a este tipo de juegos se les denomina **totalmente equilibrados**.

2.2 Juegos de Mercado y Flow games

Los juegos totalmente equilibrados han sido estudiados y caracterizados desde dos puntos de vista diferentes: los Juegos de Mercado y los "Flow games" . En esta sección conectaremos ambos estudios centrándonos en los juegos financieros.

Los "Flow games" fueron estudiados por Kalai & Zemel [26],[25] basándose en el problema de hacer circular el máximo flujo posible desde un punto (origen) hasta otro (final) a través de una red formada por arcos y nudos (cada arco parte de un nudo y llega a otro nudo). Por cada arco es posible pasar una cantidad de flujo y cada jugador es poseedor de una serie de arcos. La función característica del *Flow Game* se construye para cada coalición calculando la cantidad máxima de flujo que puede llegar desde el origen hasta el final utilizando los arcos propiedad de algún jugador de la coalición. El principal resultado que Kalai & Zemel ofrecen en su trabajo es la posibilidad de reescribir un juego totalmente equilibrado como un flow game. Comoquiera que los juegos financieros son totalmente equilibrados será posible construir una red a través de la cual el máximo flujo que se pueda pasar para cada coalición coincidirá con el valor del juego financiero para dicha coalición.

Para ilustrar esta idea, construiremos el *flow game* asociado al juego financiero del ejemplo **1.55**. La red resultante es la siguiente

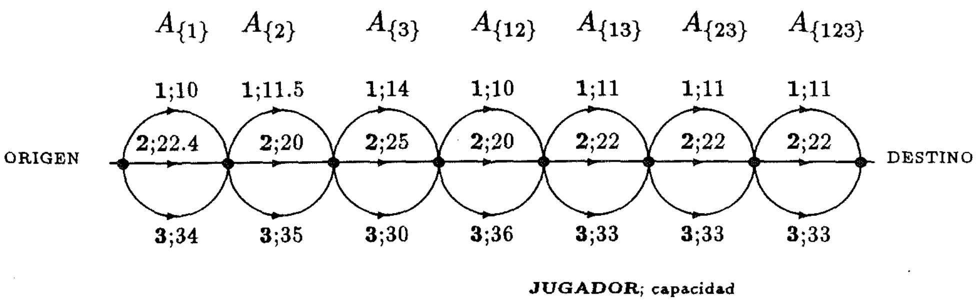

Figura **2.1**

Nótese que este grafo está compuesto por la concatenación de siete grafos,

$$(A_{\{1\}}, A_{\{2\}}, \ldots, A_{\{123\}}),$$

uno para cada coalición. Si examinamos uno de estos grafos, por ejemplo el asociado a la coalición $\{12\}$,

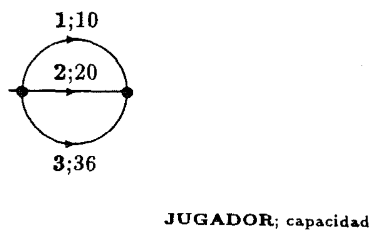

Figura **2.2**

obervaremos que está formado por tres arcos donde cada jugador domina uno de ellos y donde cada arco tiene asignada una capacidad (más tarde describiremos como calcularla). El juego generado a partir del grafo será un juego aditivo $v_{A_{\{12\}}}$. En efecto,

$$v_{A_{\{12\}}}(S) = \sum_{i \in S} a_i^{\{12\}} \quad S \subseteq \{123\}; \; v(\emptyset) = 0$$

donde $a_i^{\{12\}}$ es la capacidad del arco perteneciente al jugador i en el grafo asociado a la coalición $\{12\}$.

Se puede verificar que concatenar grafos de este tipo representa generar un nuevo "*Flow Game*" (v) que resulta ser el mínimo de los juegos aditivos generados por cada grafo, i.e.

$$v(S) = \min_{\emptyset \neq Q \subseteq N} \{v_{A_Q}(S)\} \; \forall \, S \subseteq N \quad S \neq \emptyset.$$

Kalai & Zemel aportan como resultado importante el de que un juego es totalmente equilibrado si y sólo si se puede expresar como el mínimo de una colección finita de juegos aditivos. De otra manera, todo juego totalmente equilibrado tiene asociado un grafo con la estructura anterior (concatenación de grafos) que genera el juego.

En particular, dado que el juego financiero es totalmente equilibrado, se podrá construir un grafo que lo generará y que estará formado por la concatenación de $2^n - 1$ grafos, uno para cada coalición. Cada uno de estos grafos, que notaremos por (N, A_Q) $Q \subseteq N$, estará formado por n arcos, uno por cada jugador, siendo la capacidad del arco (a_i^Q) la siguiente:

$$a_i^Q = \begin{cases} C_i \cdot \mathbf{f}_Q & i \in Q \\ C_i \cdot \overline{\mathbf{f}}_Q^i & i \notin Q \end{cases}$$

donde C_i son los recursos iniciales asociados al jugador i en el juego financiero, $\mathbf{f}_Q = \frac{v(Q)}{\sum_{i \in Q} C_i}$, y $\overline{\mathbf{f}}_Q^i = \max_{T \supseteq Q \cup i} \frac{v(T) - v(Q)}{\sum_{k \in T \setminus Q} C_k}$.

De esta manera, los jugadores que intervienen en la coalición Q reciben, por cada unidad de recurso aportada, el pago proporcional dentro de la coalición Q ($\mathbf{f}_Q$). Para el resto de jugadores tambíen se calculará un pago unitario $\overline{\mathbf{f}}_Q^i$; éste resulta de considerar el máximo valor medio de las contribuciones marginales respecto a la coalición Q de las coaliciones que contienen al jugador i y a la coalición Q. El jugador i es retribuido, por cada unidad de recurso aportada, según dicho máximo pago unitario.

Más formalmente el pago que recibe una coalición $S \subset N$ dado el grafo (N, A_Q) $Q \subseteq N$ es:

$$v_{A_Q}(S) = \sum_{i \in Q \cap S} \mathbf{f}_Q C_i + \sum_{i \in (N \setminus Q) \cap S} \overline{\mathbf{f}}_Q^i C_i. \tag{2.1}$$

El conjunto de pagos recibidos por todas la coaliciones se puede interpretar entonces como un juego aditivo (N, v_{A_Q}) donde la función característica viene dada por la expresión (2.1).

Establecida la manera de generar juegos aditivos a partir de un juego financiero y una coalición Q, sólo nos queda por demostrar que el juego generado por la concatenación de grafos definidos de la anterior forma (o equivalentemente, el mínimo de los juegos v_{A_Q}) coincide con el juego financiero.

Teorema 2.7 *Sea (N,v) un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$, y $\left\{(N,A_Q),\ v_{A_Q}\right\}_{Q\subseteq N}$ el conjunto de grafos y flow games asociados definidos por (2.1). Entonces,*

$$v(S) \;=\; \min_{\emptyset\neq Q\subseteq N}\{v_{A_Q}(S)\} \;\; \forall S\subseteq N; S\neq\emptyset.$$

DEM.

En primer lugar obsérvese que $v_{A_S}(S) \;=\; S$. Efectivamente, por definición

$$v_{A_S}(S) \;=\; \sum_{i\in S} a_i^S \;=\; \sum_{i\in S} C_i\cdot \mathbf{f}_S \;=\; v(S).$$

En cambio, para todo juego v_{A_Q} donde $Q\neq S$, tenemos que

$$\begin{aligned}
v_{A_Q}(S) \;&=\; \sum_{i\in S} a_i^Q \;=\; \sum_{i\in S\cap Q} a_i^Q + \sum_{i\in S\setminus Q} a_i^Q \;=\; \sum_{i\in S\cap Q} \mathbf{f}_Q\cdot C_i + \sum_{i\in S\setminus Q} \overline{\mathbf{f}}_Q^i\cdot C_i \geq \\
&\text{(por definición de } \overline{\mathbf{f}}_Q^i)\\
&\geq \sum_{i\in S\cap Q} \mathbf{f}_Q\cdot C_i + \sum_{i\in S\setminus Q} \frac{v(S\cup Q)-v(Q)}{\sum_{k\in S\setminus Q} C_k}\cdot C_i \;=\\
&= \textstyle\sum_{i\in S\cap Q} \mathbf{f}_Q\cdot C_i + v(S\cup Q)-v(Q) \;=\\
&= \sum_{i\in S\cap Q} \mathbf{f}_Q\cdot C_i + v(S\cup Q) - \mathbf{f}_Q\cdot\sum_{i\in S\cap Q} C_i - \mathbf{f}_Q\cdot\sum_{i\in Q\setminus S} C_i \;=\\
&= v(S\cup Q) - \mathbf{f}_Q\cdot\sum_{i\in Q\setminus S} C_i \;=\; \mathbf{f}_{S\cup Q}\cdot\sum_{i\in S} C_i + \mathbf{f}_{S\cup Q}\cdot\sum_{i\in Q\setminus S} C_i - \mathbf{f}_Q\cdot\sum_{i\in Q\setminus S} C_i \;=\\
&= \mathbf{f}_{S\cup Q}\cdot\sum_{i\in S} C_i + (\mathbf{f}_{S\cup Q}-\mathbf{f}_Q)\cdot\sum_{i\in Q\setminus S} C_i \geq \mathbf{f}_{S\cup Q}\cdot\sum_{i\in S} C_i \geq \mathbf{f}_S\cdot\sum_{i\in S} C_i \;=\; v(S).
\end{aligned}$$

De aquí concluimos que

$$v(S) \;=\; \min_{\emptyset\neq Q\subseteq N}\{v_{A_Q}(S)\} \;\; \forall S\subseteq N; S\neq\emptyset.$$

□

Otro enfoque de los juegos totalmente equilibrados fue realizado por Shapley & Shubik [52] a través del estudio de los denominados juegos de mercado ("Market Games"). En ellos se plantea una situación de un mercado de intercambio de m

diferentes productos. Cada jugador i tiene una asignación inicial de productos representada por el vector $w^i \in \mathbf{R}_+^m$ con la que inicia los intercambios con el resto de jugadores. Cada jugador tiene una función de utilidad continua y cóncava $u_i : \mathbf{R}_+^m \longrightarrow \mathbf{R}$ que mide la utilidad que le reporta la posesión de un cierto vector de productos. Si una coalición S de jugadores se forma, entonces el total de productos sujetos a intercambio será $\sum_{i \in S} w^i$. Suponiendo que la utilidad es transferible entre los jugadores, el objetivo de la coalición es redistribuir entre sus miembros el total de productos obteniendo una asignación final para cada jugador de la coalición $a^i \in \mathbf{R}_+^m$ (donde $\sum_{i \in S} w^i = \sum_{i \in S} a^i$) de manera que la suma de utilidades obtenidas por cada jugador sea máxima, i.e.

$$\max_{\sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} w^i} \sum_{i \in S} u^i(x^i) = \sum_{i \in S} u^i(a^i).$$

A partir de este mercado se genera el denominado juego de mercado donde el valor de la función característica para cada coalición S es precisamente el valor máximo de la suma de utilidades individuales de sus miembros que se puede alcanzar luego de la redistribución o intercambio de los productos. Dicho juego de mercado siempre es totalmente equilibrado.

Asimismo, Shapley & Shubik demuestran que es posible asociar a cada juego totalmente equilibrado un mercado, es decir, un conjunto de jugadores, unos productos y unas funciones de utilidad para cada jugador de manera que el juego de mercado generado coincide con el juego inicial: la prueba se realiza mediante la construcción de un mercado particular, denominado mercado directo, a partir de los valores de la función característica del juego; dicho mercado se denomina directo dado que la mercancia sujeto de comercio es la "participación" de los jugadores en las diversas coaliciones.

Los juegos financieros, al ser totalmente equilibrados, se enmarcan como un caso particular de los juegos de mercado. Sin embargo, no todo juego de mercado es un juego financiero dado que, por ejemplo, los juegos convexos son siempre totalmente equilibrados pero no siempre son financieros como se vió en el capítulo anterior.

Aparte del mercado directo que siempre lo podemos construir, resulta interesante observar que es posible construir otro mercado más natural a partir de los recursos en poder de los jugadores, punto básico de partida en el modelo analizado en esta Tesis.

En efecto, sea (N, v) un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$; consideremos ahora un mercado donde existen n agentes (tantos como jugadores) y n productos . Cada agente i dispone de una cantidad de recursos iniciales $C^i \in \mathbf{R}^n_+$ donde $C^i_j = C_j$ si $i = j$ y cero en otro caso. A cada agente se le asigna la siguiente función de utilidad (idéntica para cada uno de ellos) que depende de la cantidad de productos en poder del jugador $[(x_1, \ldots, x_n)]$:

$$u^i(x_1, \ldots, x_n) = u(x^i_1, \ldots, x^i_n) = \min_{Q \subseteq N}\{\mathcal{L}^Q(\vec{x})\}$$

donde $\mathcal{L}^Q(\vec{x}) = \sum_{i\in Q} \mathbf{f}_Q x_i + \sum_{i\in N\setminus Q} \vec{\mathbf{f}}^i_Q x_i$ y $\vec{\mathbf{f}}^i_Q = \max_{T\supseteq Q\cup i} \frac{v(T)-v(Q)}{\sum_{i\in T\setminus Q} C_i}$, es decir tal y como la definíamos para los "flow games".

Obsérvese que dicha función es mínimo de funciones lineales , y por tanto cóncava, continua y homogénea de grado 1. A partir de aquí generamos un juego de mercado donde la función característica es la siguiente:

$$v(S) = \max_{\sum_{i\in S} x^i = \sum_{i\in S} C^i} \sum_{i\in S} u(x^i) \ \forall S \subseteq N.$$

Dado que las funciones u^i son todas iguales, concavas y homogéneas de grado 1, el anterior máximo tomará la siguiente expresión:

$$v(T) = u(\vec{C}^T)$$

donde $\vec{C}^T_i = C_i$ si $i \in T$, y cero en otro caso. Esto quiere decir que el máximo de utilidad que una coalición puede obtener se obtiene cuando se concentran todos los recursos de los jugadores de la coalición en manos de uno sólo de ellos y éste los invierte.

Este juego coincide exactamente con el juego financiero inicial. Efectivamente, u es el mínimo de una serie de funciones lineales , una para cada coalición $Q \subseteq N$; si evaluamos una de estas funciones para el vector $\vec{C}^S$ obtendremos

$$\mathcal{L}^Q(\vec{C}^S) = \sum_{i\in Q\cap S} \mathbf{f}_Q C_i + \sum_{i\in(N\setminus Q)\cap S} \vec{\mathbf{f}}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{Q}} C_i;$$

este valor es el que obteníamos (2.1) como pago a la coalición S en el grafo asociado a la coalición Q cuando analizabamos los "Flow games". De aquí se deduce que el mínimo de las funciones lineales equivale al mínimo de los juegos aditivos que nos referíamos en los "Flow games"; si aquellos generaban el juego financiero, la función de utilidad definida también lo hará para el mercado que hemos definido.

Ejemplo 2.8 *Siguiendo con el ejemplo* **1.55** *la función de utilidad generada es:*

$$u(x_1^i, x_2^i, x_3^i) = \min\{1x_1^i+1.12x_2^i+1.133x_3;\ 1.15x_1^i+1x_2^i+1.166x_3;\ 1.4x_1^i+1.25x_2^i+1x_3$$

$$1x_1^i+1x_2^i+1.2x_3;\ 1.1x_1^i+1.1x_2^i+1.1x_3;\ 1.1x_1^i+1.1x_2^i+1.1x_3;\ 1.1x_1^i+1.1x_2^i+1.1x_3\}.$$

Considerando al juego financiero como un juego de mercado, el máximo de utilidad para una coalición se consigue cuando los recursos se concentran en manos de un sólo jugador. Ello sucederá también para la coalición total N. Sea el jugador 1, aquel que aglutina los recursos del resto de jugadores (jugadores del 2 al n). Entonces toda distribución del beneficio total $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ se puede interpretar como:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= u(N) - \textstyle\sum_{i=2}^n p_i \cdot C_i, & \\ \gamma_i &= p_i \cdot C_i & i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Es decir, el jugador 1 obtienen el beneficio a partir de los recursos de todos los jugadores pero a cambio debe pagar a éstos una compensación por dicha cesión; $p_2, \ldots, p_n$ representan el pago por unidad cedida a los jugadores $2, \ldots, n$ respectivamente.

2.3 Algunos casos particulares

En la mayoría de los casos, el Núcleo sólo restringe las posibles soluciones al problema del reparto del beneficio conjunto, pero no selecciona una única distribución. En esta sección y en la siguiente nos centraremos en analizar cuán "grande" o cuán "pequeño" puede resultar el núcleo de un juego financiero. Desde este punto de vista, es interesante analizar cuándo el Núcleo del juego selecciona una única distribución (sección **2.3.1**); cuándo el Núcleo de un juego financiero adquiere una expresión sencilla (sección **2.3.2**); y cuál es el pago máximo que un jugador puede recibir manteniéndose dentro del Núcleo del juego (sección **2.3.3**).

2.3.1 Juegos Financieros con un único punto en el Núcleo

En todo juego cooperativo lo que marca la distribución final a realizar es el peso relativo de las diferentes coaliciones dentro del juego. En un juego financiero dicho peso relativo viene determinado por los recursos en poder de cada coalición y de cada jugador C_i. Puede ser una situación muy frecuente que ninguno de los jugadores tenga un peso relativo excesivo con respecto a los otros. Es "probable" entonces que el Núcleo se reduzca a un sólo punto y la distribución final que se realice sea la proporcional a los recursos aportados por cada jugador. Vamos a ver cuándo se da esta situación en un juego financiero.

Teorema 2.9 *Sea $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ respecto al vector $\vec{C}$,*

$$|C(v)| = 1 \Leftrightarrow \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i} = \frac{v(N \setminus j)}{\sum_{i \in N \setminus j} C_i} \ \forall j \in N.$$

El único elemento del Núcleo coincidirá además con la distribución proporcional y el vector de contribuciones marginales $(b_1^v, \ldots, b_n^v)$ donde $b_i^v = v(N) - v(N \setminus i)$.

DEM.

$\Leftarrow$) Demostremos en primer lugar que el vector $(b_1^v, \ldots, b_n^v)$ pertenece al Núcleo. En efecto,

$$\begin{aligned} b_j^v &= v(N) - v(N \setminus j) = [\textstyle\sum_{i \in N} C_i] \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i} - \left[\textstyle\sum_{i \in N \setminus j} C_i\right] \frac{v(N \setminus j)}{\sum_{i \in N \setminus j} C_i} = \\ & \text{(dado que } \tfrac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i} = \tfrac{v(N \setminus j)}{\sum_{i \in N \setminus j} C_i} \ \forall j \in N) \\ &= \left[\textstyle\sum_{i \in N} C_i - \sum_{i \in N \setminus j} C_i\right] \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i} = C_j \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i \in N} C_i}. \end{aligned}$$

Por tanto, el vector $(b_1^v, \ldots b_n^v)$ pertenece al Núcleo y coincide con la distribución proporcional dado que esta imputación siempre pertenece al Núcleo.

Por otra parte, si $\vec{x} \in C(v)$ tenemos que

$$x_i = v(N) - \sum_{k \in N \setminus i} x_k \leq v(N) - v(N \setminus i) = b_i^v \quad \forall i \in N. \tag{2.2}$$

Supongamos ahora que $\vec{x} \in C(v)$ y que $x_j < b_j^v$ para algún $j \in N$, entonces

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i \in N} x_i &= \textstyle\sum_{i \in N \setminus j} x_i + x_j < \text{(por (2.2) y la hipótesis } x_j < b_j^v) \\ &< \textstyle\sum_{i \in N \setminus j} b_i^v + b_j^v = \sum_{i \in N} b_i^v = v(N). \end{aligned}$$

lo que es una contradicción con la hipótesis de que $\vec{x} \in C(v)$. Por tanto, el único punto del Núcleo es aquel en que $x_i = b_i^v \ \forall i \in N$ que coincide además con la distribución proporcional.

$\Rightarrow$)

Supongamos que $\frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} > \frac{v(N\backslash j)}{\sum_{i\in N\backslash j} C_i}$ para algún $j \in N$. Entonces podemos construir la siguiente imputación $\vec{x}$ donde:

$$\begin{aligned} x_i &= C_i \cdot \frac{v(N\backslash j)}{\sum_{i\in N\backslash j} C_i} \qquad \forall\, i \in N \setminus j, \\ x_j &= C_j \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} + \sum_{i\in N\backslash j} C_i \cdot \left[\frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} - \frac{v(N\backslash j)}{\sum_{i\in N\backslash j} C_i}\right]. \end{aligned}$$

Obsérvese que dicha distribución no coincide con la distribución proporcional pero pertenece al Núcleo del juego. Efectivamente, tomando una coalición cualquiera S pueden suceder dos cosas:

a.) $j \notin S \Rightarrow$

$$\sum_{i\in S} x_i = \sum_{i\in S} C_i \cdot \frac{v(N \setminus j)}{\sum_{i\in N\backslash j} C_i} \geq [\text{ dado que } S \subseteq N\backslash j] \geq \sum_{i\in S} C_i \cdot \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} = v(S).$$

b.) $j \in S \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{i\in S} x_i &= \sum_{i\in S\backslash j} x_i + x_j = \sum_{i\in S\backslash j} C_i \cdot \frac{v(N\backslash j)}{\sum_{i\in N\backslash j} C_i} + C_j \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} + \\ &+ \sum_{i\in N\backslash j} C_i \cdot \left[\frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} - \frac{v(N\backslash j)}{\sum_{i\in N\backslash j} C_i}\right] \geq \sum_{i\in S\backslash j} C_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} + \\ &+ C_j \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} \geq \sum_{i\in S} C_i \cdot \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} = v(S). \end{aligned}$$

y por tanto $\vec{x}$ pertenece al Núcleo, lo que supone una contradicción dado que suponíamos que sólo existía una distribución perteneciente al Núcleo. □

La anterior condición tiene una interpretación intuitiva si pensamos en el juego financiero como un conjunto de jugadores que invierten dinero obteniendo un cierto tipo de interés. El Teorema expresaría entonces que si el capital de ningún jugador es indispensable para obtener el mayor tipo de interés, parece lógico que ningún jugador pueda recibir un pago medio superior a este tipo de interés.

Observación 2.10 *Obsérvese que en el capítulo* **1** *establecíamos una condición suficiente para que un juego financiero fuera 1-convexo (Lema* **1.65***). Dicha condición coincide con la condición dada anteriormente para que el Núcleo de un juego financiero se reduzca a un punto (Teorema* **2.9***).*

2.3.2 El Núcleo de una subclase de juegos financieros

En esta sección estudiaremos una clase restringida de juegos financieros imponiendo una condición adicional[2] . Dicha condición nos permitirá expresar de una manera sencilla cuáles son las distribuciones que verifican las restricciones del Núcleo. La condición es la siguiente :

$$v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v \tag{2.3}$$

para toda $S \subset N$ con $v(S) > 0$, $1 \leq |S| \leq n-2$ y donde $b_i^v = v(N) - v(N \setminus i)$.

Entre los juegos financieros que quedan englobados bajo esta nueva condición podemos mencionar los siguientes:

- Si $v(S) > 0 \quad \forall S \subseteq N$, la anterior condición se refiere a los juegos financieros 1-convexos . (ver Driessen [13] p. 73)

- Juegos de Bancarrota $(N, v_{\mathbf{E};d})$. En efecto, si $v_{\mathbf{E};d}(S) > 0$ entonces,

$$v_{\mathbf{E};d}(N) - v_{\mathbf{E};d}(S) = E - [E - d(N \setminus S)] = d(N \setminus S) = \sum_{i \in N \setminus S} [E-(E-d_i)] =^3$$

$$= \sum_{i \in N \setminus S} [E - v_{\mathbf{E};d}(N \setminus i)] = \sum_{i \in N \setminus S} [v_{\mathbf{E};d}(N) - v_{\mathbf{E};d}(N \setminus i)] = \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v.$$

- Además, existen otros juegos que no son ni 1-convexos ni juegos de bancarrota. Considérese la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -30 + x & 0 \leq x \leq 40 \\ \frac{1}{2} x & 40 < x \end{cases}$$

  y el siguiente vector $(C_1, C_2, C_3) = (10, 20, 30)$. El juego financiero generado a partir de estos datos es:

$$v(i) = 0; \ v(12) = 0; v(13) = 10; \ v(23) = 25; \ v(123) = 30$$

  que no es 1-convexo, ni de Bancarrota pero si que verifica la condición (2.3).

[2]El estudio de esta subclase de juegos financieros ha sido sugerida por el Prof. Theo Driessen. Alguno de los resultados presentados en este apartado han contado con su colaboración

[3]Dado que los juegos financieros son monótonos y positivos $v_{\mathbf{E};d}(N \setminus i) \geq 0 \, \forall i \in N \setminus S$.

- Finalmente también pertenecen a esta subclase, los juegos de mínimo nivel generadores de los juegos financieros. Se puede verificar este punto fácilmente si tenemos en cuenta que, si $v(S) > 0$, $b_i^v = C_i$ para todo $i \in N \setminus S$.

Esta subclase se centra en aquellos juegos financieros donde la contribución marginal de una coalición $N \setminus S$ a la coalición total $(v(N) - v(S))$ es superior a la suma de contribuciones marginales a la coalición total de los jugadores que pertenecen a $N \setminus S$. En otras palabras estamos analizando situaciones en donde las economias de escala características de un juego financiero se producen de manera más acusada en los primeros tramos de la función generadora del juego que en los últimos tramos (aquellos donde se evaluan las contribuciones marginales de los jugadores).

Esta subclase de juegos ya fue considerada por Curiel, Maschler y Tijs [10] al estudiar los juegos de Bancarrota y la aplicación del valor de τ a este tipo de juegos. En el artículo se define lo que se entiende por la cobertura del Núcleo ("Core Cover"):

$$CC(v) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ m^v \leq \vec{x} \leq b^v\}$$

donde b^v es el vector de contribuciones marginales y m^v es el vector de mínimos derechos, i.e., $m_i^v = \max_{\emptyset \subseteq S \subseteq N \setminus i}\{v(S \cup \{i\}) - \sum_{i \in S} b_i^v\}$; el significado y cálculo de este último vector se discutirá más en profundidad en el capítulo cuarto. En general, se cumple que $C(v) \subseteq CC(v)$ (Tijs and Lipperts [59]). Curiel, Maschler y Tijs demuestran que, para un caso particular de juegos, el Núcleo y su cobertura coinciden; en este sentido enuncian el siguiente Teorema:

Teorema 2.11 *Sea $v_{\mathbf{E};d}$ un juego de Bancarrota y v un juego tal que $0 \leq v \leq v_{\mathbf{E};d}$ y $v(S) = v_{\mathbf{E};d}(S)$ si $|S| \in \{0, n-1, n\}$. Entonces $C(v) = CC(v)$.*

Este Teorema es aplicable a juegos que tienen "por encima" un juego de Bancarrota, y en donde los valores de la función característica coinciden para la coalición total y las coaliciones de $n-1$ jugadores con los del juego de Bancarrota. Los propios juegos de Bancarrota constituyen un ejemplo de juegos que quedan englobados en el Teorema **2.11**; dado que los juegos de Bancarrota son juegos convexos se cumple que $m_i^v = v(i)$, y por tanto, por aplicación del Teorema tenemos que

$$C(v_{\mathbf{E};d}) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ v(i) \leq \vec{x} \leq b_i^v\ \forall i \in N\}.$$

Vamos a analizar seguidamente la relación entre los juegos recogidos en el Teorema **2.11** y los juegos financieros restringidos por la condición (2.3). Sea v un juego que verifica la condición (2.3); entonces podemos construir el siguiente juego de Bancarrota donde $\mathbf{E} = v(N)$ y $d = b^v$:

$$v_{\mathbf{v(N)};b^v} = \max\{0,\ v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\}.$$

Este juego verifica que $v_{\mathbf{v(N)};b^v}(\emptyset) = v(\emptyset)$, $v_{\mathbf{v(N)};b^v}(N) = v(N)$ y $v_{\mathbf{v(N)};b^v}(N \setminus i) = \max\{0, v(N) - b_i^v\} =^{4} v(N \setminus i)$. Además, por la condición (2.3) se cumple que

$$v_{\mathbf{v(N)};b^v}(S) = \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\} \geq v(S).$$

Por tanto, todo juego financiero que verifique la condición (2.3) quedará recogido en los juegos del Teorema **2.11.** En nuestro estudio extenderemos los resultados obtenidos para los juegos de Bancarrota y caracterizaremos la subclase de juegos financieros en términos del juego $v_{\mathbf{v(N)};b^v}$.

El Núcleo

Una distribución $\vec{x}$ que pertenece al Núcleo verifica para todo jugador $i \in N$ las siguientes condiciones:

(i) $x_i \geq v(i) = \max\{0,\ f(C_i)\}$,

(ii) $x_i = v(N) - x(N \setminus i) \leq v(N) - v(N \setminus i) = b_i^v$ donde b_i^v es la contribución marginal del jugador i respecto a la coalición total.

Por otra parte, para un juego de tres jugadores es trivial afirmar que

$$\vec{x} \in C(v) \Leftrightarrow \vec{x} \in I^*(v) \text{ y } v(i) \leq x_i \leq b_i^v \quad \forall i = 1,\ 2,\ 3.$$

Asumiendo la condición (2.3), podemos extender esta expresión para el caso de n jugadores.

Teorema 2.12 *Sea $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ tal que se verifica la condición (2.3), entonces*

$$\vec{x} \in C(v) \Leftrightarrow \vec{x} \in I^*(v) \text{ y } v(i) \leq x_i \leq b_i^v \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

[4] Si $v(N \setminus i) > 0$, entonces por (2.3), $v(N) - b_i^v \geq v(N \setminus i) > 0$, y por tanto, $\max\{0, v(N) - b_i^v\} = v(N) - b_i^v = v(N \setminus i)$. Si $v(N \setminus i) = 0$, entonces $\max\{0, v(N) - b_i^v\} = \max\{0, v(N) - v(N)\} = 0 = v(N \setminus i)$.

DEM.

$\Rightarrow$) Es trivial, por definición de Núcleo.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\vec{x} \in I^*(v)$ y que para todo jugador $k \in N$ se verifica que:

- $x_k \geq v(k) \geq 0$.
- $x_k \leq b_k^v = v(N) - v(N \setminus k)$. Dada la eficiencia de $\vec{x}$, esto equivale a $x(N \setminus k) \geq v(N \setminus k)$.

Por tanto para demostrar la pertenencia de $\vec{x}$ al Núcleo, sólo nos queda por comprobar que $x(S) \geq v(S)$ para toda S tal que $2 \leq |S| \leq n-2$.
Dado que $x_k \geq 0$, tenemos $x(S) \geq v(S)$ siempre y cuando $v(S) = 0$. Consideremos ahora el caso en que $v(S) > 0$. Entonces, teniendo en cuenta la eficiencia y la condición (2.3) se cumplirá que

$$x(S) = v(N) - x(N \setminus S) \geq v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v \geq v(S)$$

□

El estudio del núcleo nos permitirá caracterizar esta subclase de juegos financieros.

Proposición 2.13 *Un juego financiero verifica la condición (2.3) si y sólo si*

$$C(v) = C(\overline{v})$$

donde $(N, \overline{v})$ *es un juego tal que* $\overline{v}(S) = \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\}$.

DEM.

$\Rightarrow$)

(i) $C(v) \subseteq C(\overline{v})$. Supongamos que $\vec{x} \in C(v)$ pero $\vec{x} \notin C(\overline{v})$; entonces tenemos que $\overline{v}(S) > \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ para algún $S \subset N$. $\overline{v}(S)$ no puede ser igual a 0 dado que entonces tendríamos que $0 > v(S)$ lo que es una contradicción con la definición de juego financiero. Si $\overline{v}(S)$ fuera igual a $v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v$ entonces tendríamos que $v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v > \sum_{i \in S} x_i$; por eficiencia del vector $\vec{x}$ llegaríamos a que $\sum_{i \in N \setminus S} x_i > \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v$ lo cual es imposible dado que $\vec{x} \in C(v)$. Por tanto, $C(v) \subseteq C(\overline{v})$.

(ii) $C(v) \supseteq C(\overline{v})$. Supongamos que $\vec{x} \in C(\overline{v})$ pero que $\vec{x} \notin C(v)$; entonces tendríamos que, para algún $S \subset N$, $v(S) > \sum_{i \in S} x_i \geq \overline{v}(S)$ y por tanto, $v(S) >$

$\max\{0, v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} b_i^v\}$ o lo que es lo mismo $v(S) > v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} b_i^v$; contradicción con la condición (2.3). Por tanto, $C(v) \supseteq C(\overline{v})$.

De **(i)** e **(ii)** se concluye que $C(v) = C(\overline{v})$.

$\Leftarrow)$

Supongamos que existe una coalición S para la cual $v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} b_i^v < v(S)$ siendo $v(S) > 0$; entonces

$$\overline{v}(S) = \max\{0, v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} b_i^v\} < v(S). \tag{2.4}$$

Obsérvese que $\overline{v}$ puede ser interpretado como un juego de Bancarrota donde $\mathbf{E} = v(N)$ y $d_i = b_i^v$; por tanto $\overline{v}$ será también un juego convexo. Dado que los juegos convexos son juegos exactos[5] [47], existirá una distribución $\vec{x}$ perteneciente al Núcleo de $\overline{v}$ tal que $\sum_{i\in S} x_i = \overline{v}(S)$; sin embargo, por (2.4), $\vec{x}$ no pertenecerá al Núcleo de v. Esto supone una contradicción dado que partíamos de la hipótesis de que los núcleos de ambos juegos eran idénticos.

□

El siguiente cuadro compara los resultados obtenidos en los juegos contemplados por el Teorema de Curiel, Maschler y Tijs(al conjunto de estos juegos lo denominaremos G_1^n) y los juegos financieros que verifican la condición (2.3) (al conjunto de estos juegos lo denominaremos $\mathcal{FG}_*^n$). Es decir,

$$\mathrm{G_1^n} = \{\mathrm{v} \in \mathrm{G^n} \mid \exists\, \mathrm{v}_{\mathbf{E};\mathrm{d}} \text{ tal que } \mathrm{v}_{\mathbf{E};\mathrm{d}}(\mathrm{S}) \geq \mathrm{v(S)}\ \mathrm{S} \subseteq \mathrm{N} \text{ y } \mathrm{v}_{\mathbf{E};\mathrm{d}}(\mathrm{S}) = \mathrm{v(S)}\quad |\mathrm{S}| \in \{\mathrm{n}, \mathrm{n}-1, 0\}\}.$$

$$\mathcal{FG}_*^{\mathrm{n}} = \{\mathrm{v} \in \mathcal{FG}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{v(N)} - \mathrm{v(S)} \geq \mathrm{b^v(N \setminus S)}\ \forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N},\ \mathrm{v(S)} > 0\}.$$

[5]Juegos exactos son aquellos tales que, para toda coalición $S \subset N$, existe una distribución en el Núcleo tal que $\sum_{i\in S} x_i = v(S)$.

1.- Sea $v \in G_1^n$, entonces $$C(v) = CC(v)$$	**1bis.-** Sea $v \in \mathcal{FG}_*^n$, entonces $$C(v) = CC(v)$$ dado que $\mathcal{FG}_*^n \subset G_1^n$.
2.- Un juego de Bancarrota $v_{\mathbf{E};d}$ siempre pertenece a G_1^n y por tanto $$C(v_{\mathbf{E};d}) = \left\{ \vec{x} \in I^*(v_{\mathbf{E};d}) \mid \begin{array}{l} v_{\mathbf{E};d}(i) \leq x_i \leq b_i^{v_{\mathbf{E};d}} \\ \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$$	**2bis.-** Un juego v pertenece a $\mathcal{FG}_*^n \Leftrightarrow$ $$C(v) = \left\{ \vec{x} \in I^*(v) \mid \begin{array}{l} v(i) \leq x_i \leq b_i^v \\ \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$$

Es decir, la condición **1bis.-** que nosotros hemos enunciado para los juegos $\mathcal{FG}_*^n$ es un caso particular del resultado formulado por Maschler, Curiel & Tijs para los juegos G_1^n. En cambio, en nuestro estudio hemos generalizado (**2bis.-**) la condición **2.-** enunciada por Maschler, Curiel & Tijs exclusivamente para los juegos de Bancarrota.

En la anterior demostración, hemos visto que los núcleos de los juegos v y $\overline{v}$ coinciden, siendo este último un juego convexo. Ello implica que siempre es posible encontrar una distribución en el Núcleo de $\overline{v}$ (y por tanto en el Núcleo de v) tal que asigne a un jugador su contribución marginal. Dado que las contribuciones marginales de ambos juegos son idénticas, se concluye que para un juego financiero que verifique la condición (2.3) siempre podemos encontrar una distribución en el Núcleo que asigne a un jugador su contribución marginal[6]. En la siguiente sección analizaremos si podemos extender esta conclusión a todo tipo de juegos financieros.

2.3.3 Juegos reducidos y contribuciones marginales

Si nosotros asignamos como pago a un jugador j, la cantidad x_j tal que $x_j \leq b_j^v$ estamos determinando automáticamente cuáles pueden ser los pagos a los restantes jugadores $[(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)]$ para que la distribución final pertenezca al Núcleo. En efecto, por un lado se habrá de verificar que, para toda $T \subset N \setminus j$,

[6]Recuérdese que para un juego convexo todos los vectores de contribuciones marginales x^θ pertenecen al Núcleo.

$\sum_{i \in T} x_i \geq v(T)$, y por otro que $\sum_{i \in T} x_i + x_j \geq v(T \cup j)$. Esto se puede expresar de manera más compacta de la siguiente manera:

$$\sum_{i \in T} x_i \geq \max\{v(T),\, v(T \cup j) - x_j\}.$$

Por tanto, si originalmente $v(T)$ constituía el límite inferior para el pago a toda coalición $T \subseteq N \setminus j$, ahora dicho límite se ve ligeramente modificado. A partir de esta observación construimos el denominado juego reducido :

Definición 2.14 *Sea $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, el juego reducido a la coalición $N \setminus j$ para $\vec{x}$ se define como*

$$\begin{aligned} &v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(\emptyset) = 0, \\ &v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T) = \max\{v(T); v(T \cup j) - x_j\} \quad T \subseteq N \setminus j. \end{aligned}$$

Este juego reducido es idéntico al definido por Peleg [44] excepto en un detalle: para la coalición total $N \setminus j$, hemos sustituido $\sum_{i \in N \setminus j} x_i$ por $\max\{v(N \setminus j);\, v(N) - x_j\}$. Dicha diferencia se anula si asignamos un pago x_j al jugador j de manera que se cumpla que $x_j \leq b_j^v$, que es por otra parte una condición necesaria para que una distribución pertenezca al Núcleo de un juego. Obsérvese además que para hacer la reducción no necesitamos conocer todo el vector $\vec{x}$ sino simplemente su componente j-ésima. De lo expuesto anteriormente se deduce de manera inmediata el siguiente Teorema:

Teorema 2.15 *Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores; sea $\vec{x}$ un vector de $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ tal que $v(j) \leq x_j \leq b_j^v$, $j \in N$. Entonces*

$$\vec{x} \in C(v) \Leftrightarrow \vec{x}^{N\setminus j} \in C(v_{\vec{x}}^{N\setminus j})$$

donde $\vec{x}^{N\setminus j} = (x_i)_{i \in N\setminus j} \in \mathbf{R}^{n-1}$.

DEM.

$\Rightarrow$) Si $\vec{x} \in C(v)$, entonces para todo $T \subset N \setminus j$ se cumple que

$$\sum_{i \in T} x_i \geq v(T) \;\text{ y }\; \sum_{i \in T \cup j} x_i \geq v(T \cup j) \;\; (\text{i.e. } \sum_{i \in T} x_i \geq v(T \cup j) - x_j).$$

Por tanto, $\sum_{i \in T} x_i \geq \max\{v(T); v(T \cup j) - x_j\} = v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T)$ $\forall T \subset N \setminus j$. Además, dado que $x_j \leq b_j^v$, se cumple que $\sum_{i \in N\setminus j} x_i = v(N) - x_j = v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(N \setminus j)$ lo que implica que el vector $\vec{x}^{N\setminus j}$ es eficiente en el juego reducido y pertenece a su Núcleo.

Observación: esta implicación es consecuencia directa de la "Reduced Game Property" que caracteriza al Núcleo de los juegos equilibrados (ver Peleg [43]; ello es así dado que la definición de juego reducido de Davis & Maschler y la que nosotros utilizamos coincide para el caso que nos ocupa $(v(j) \leq x_j \leq b_j^v)$.

$\Leftarrow$)

$$\vec{x}^{N\setminus j} \in C(v_{\vec{x}}^{N\setminus j}) \Rightarrow \quad \textstyle\sum_{i\in T} x_i \geq v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T) \;\; \forall T \subset N \setminus j \tag{2.5}$$

$$\textstyle\sum_{i\in N\setminus j} x_i = v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(N \setminus j) \tag{2.6}$$

De (2.6), y teniendo en cuenta que $x_j \leq b_j^v$, deducimos que $v(N) - x_j \geq v(N \setminus j)$ y por tanto,

$$\sum_{i\in N\setminus j} x_i = v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(N \setminus j) = v(N) - x_j,$$

o lo que es lo mismo, $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$; ello implica que el vector $\vec{x}$ es eficiente en el juego v.

Por otra parte, por (2.5), deducimos que

$$\sum_{i\in T} x_i \geq v(T) \text{ y } \sum_{i\in T} x_i \geq v(T \cup j) - x_j \quad \forall T \subset N \setminus j; T \neq \emptyset.$$

De aquí y teniendo en cuenta que $x_j \geq v(j)$ se concluye que

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \;\; \forall S \subset N.$$

En consecuencia, $\vec{x} \in C(v)$. □

Terminábamos la sección anterior, formulándonos una pregunta respecto a si siempre era posible obtener una distribución que asignara a un jugador j su contribución marginal; a la vista de la anterior proposición, esta pregunta la podemos reformular ahora en los siguientes términos: siempre que $x_j = b_j^v$, ¿El Núcleo del juego reducido $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}$ es no vacío ? Dicha pregunta la podemos responder dando la expresión de una distribución que pertenece al núcleo del juego reducido.

Lema 2.16 *Sea $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ respecto a $\vec{C}$ y $\vec{x} \in I^*(v)$ de manera que:*

- $x_j = b_j^v = v(N) - v(N \setminus j)$ *y*
- $x_i = C_i \cdot \frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i} \;\; \forall i \in N \setminus j.$

Entonces,

$$\vec{x}^{N\setminus j} \in C(v_{\vec{x}}^{N\setminus j}).$$

DEM.

En primer lugar, $\sum_{i\in N\setminus j} x_i = v(N\setminus j) = v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(N\setminus j)$ y por tanto, $\vec{x}^{N\setminus j}$ es eficiente en el juego reducido.

En segundo lugar, para toda coalición $T \subset N\setminus j$, $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T)$ puede tomar dos valores:

a.) $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T) = v(T)$.

Dado que un subjuego[7] de un juego financiero [y en particular $(N\setminus j, v_{|N\setminus j})$] es también financiero respecto a los mismos recursos, tenemos que $\sum_{i\in T} x_i = \sum_{i\in T} C_i \frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i} \geq \sum_{i\in T} C_i \frac{v(T)}{\sum_{i\in T} C_i} \geq v(T)$.

b.) $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T) = v(T\cup j) - b_j^v \geq v(T)$.

$$v(T\cup j) - b_j^v = v(T\cup j) - v(N) + v(N\setminus j) =$$

[7]El subjuego es aquel que resulta de considerar los valores de la función característica para un subgrupo de jugadores. El subjuego para los jugadores de una coalición T lo notaremos como $(T, v_{|T})$ siendo $v_{|T}(S) = v(S)\ \forall S \subseteq T$.

$$= \sum_{i\in T\cup j} C_i \cdot \frac{v(T\cup j)}{\sum_{i\in T\cup j} C_i} - \sum_{i\in N} C_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} + \sum_{i\in N\setminus j} C_i \cdot \frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i} =$$

$$= \sum_{i\in T\cup j} C_i \cdot \frac{v(T\cup j)}{\sum_{i\in T\cup j} C_i} - \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}\left[\sum_{i\in N\setminus(T\cup j)} C_i + \sum_{T\cup j} C_i\right] +$$

$$+\frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i}\left[\sum_{i\in N\setminus(T\cup j)} C_i + \sum_{i\in T} C_i\right] =$$

$$= \sum_{i\in T} C_i \frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i} + \sum_{i\in N\setminus(T\cup j)} C_i \left[\frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i} - \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}\right] +$$

$$+ \sum_{i\in T\cup j} C_i \left[\frac{v(T\cup j)}{\sum_{i\in T\cup j} C_i} - \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}\right] \leq$$

[8] $$\leq \frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i} \cdot \sum_{i\in T} C_i = \sum_{i\in T} x_i$$

Por tanto concluimos que el Núcleo del juego reducido es no vacío. □

Dado que para la distribución $\vec{x}$ que antes hemos propuesto $\vec{x}^{N\setminus j}$ está en el Núcleo del juego reducido $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}$ y $x_j = b_j^v$, se deduce que $\vec{x}$ pertenece al Núcleo del juego sin reducir (Teorema **2.15**).

Hemos demostrado que siempre existe en el Núcleo del juego financiero una distribución que asigna a un jugador j su contribución marginal respecto a la coalición total (b_j^v). Esta misma característica la encontramos en los juegos convexos donde, por ejemplo, siempre es posible encontrar una distribución que asigne a un jugador j su contribución marginal respecto a cualquier coalición $v(S\cup j)-v(S)$ y en particular también respecto a N.

En los juegos convexos se cumple que la reducción del juego a la coalición $N\setminus j$ para una distribución $\vec{x}$ donde al jugador j-ésimo se le asigna su contribución marginal

[8]Dado que para un juego financiero $\frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} \geq \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i}$ $\forall S \subseteq N$, tendremos que $[\frac{v(T\cup j)}{\sum_{i\in T\cup j} C_i} - \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}] \leq 0$ y $[\frac{v(N\setminus j)}{\sum_{i\in N\setminus j} C_i} - \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}] \leq 0$.

respecto a la coalición total, da lugar al subjuego que también es convexo; en concreto obtenemos que el juego reducido coincide con el subjuego.

En los juegos financieros no tenemos esta última propiedad tan fuerte aunque sí que podemos establecer que si un juego es financiero respecto a un vector $\vec{C}$, **el juego reducido a $N \setminus j$ también es financiero** respecto al vector $\vec{C}^{N \setminus j}$ siempre y cuando en la reducción asignemos al jugador j una pago mayor que el que le correspondería según la distribución proporcional, i.e. $x_j \geq C_j \cdot \mathbf{f}_N$. En particular, dado que se verifica que $b_j^v \geq C_j \cdot \mathbf{f}_N$, la reducción con la contribución marginal también preservará el caracter financiero del juego reducido.

Esta propiedad no es sólo cierta para los juegos financieros sino para todo juego de valores medios crecientes respecto a un vector. Esta clase de juegos engloba a los juegos financieros y únicamente se diferencia de éstos en que no exigimos la positividad en los valores de la función característica. La necesidad de estudiar esta clase más amplia se justificará en el capítulo tercero cuando estudiemos los diferentes conjuntos de negociación.

Vamos pues a definir estos juegos y a demostrar la citada propiedad.

Definición 2.17 *Sea (N, v) un juego cooperativo de utilidad transferible y $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++}$ un vector. Diremos que el juego (N, v) es de valores medios crecientes respecto a $\vec{C}$ si*

$$\sum_{i \in S} C_i \leq \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \mathbf{f}_S \leq \mathbf{f}_T \ \forall S, T \subseteq N; \ S, T \neq \emptyset$$

donde $\mathbf{f}_S = \frac{v(S)}{\sum_{i \in S} C_i} \ \forall S \subseteq N.$

Al conjunto de juegos de este tipo lo simbolizaremos como $\mathbf{VMC}^N$. Los juegos financieros son, como ya hemos dicho, un caso particular. ($\mathcal{FG}^n \subset \mathbf{VMC}^N$).

Respecto a los juegos de valores medios crecientes se preservan dos importantes propiedades de los juegos financieros:

Propiedad 2.18 *Sean $v_1, \ldots, v_t$ $t-$ juegos de valores medios crecientes definidos sobre el mismo conjunto de jugadores N y respecto al mismo vector de recursos $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathbf{R}^n_{++}$, i.e. $v_k(S) = (\sum_{i \in S} C_i) \cdot \mathbf{f}_S^k$, entonces*

$$(N, v^{\max}) \in \mathbf{VMC}^N \ \text{donde} \ v^{\max}(S) = \max\{v_1(S), \ldots, v_k(S), \ldots, v_t(S)\}.$$

DEM. Por la definición **2.17** $v^{\max}(S) = \max\{\mathbf{f}_S^1, \ldots, \mathbf{f}_S^k, \ldots, \mathbf{f}_S^t\} \cdot \sum_{i\in S} C_i$. Entonces, si $\sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \mathbf{f}_S^k \leq \mathbf{f}_T^k \;\; k = 1, \ldots, t \Rightarrow$

$$\max\{\mathbf{f}_S^1, \ldots, \mathbf{f}_S^k, \ldots, \mathbf{f}_S^t\} \leq \max\{\mathbf{f}_T^1, \ldots, \mathbf{f}_T^k, \ldots, \mathbf{f}_T^n\} \quad \forall\, S, T \subseteq N.$$

□

Propiedad 2.19 *Sea $(N, v) \in \mathbf{VMC}^N$ respecto al vector $\vec{C}$, la distribución proporcional de la ganancia total respectos a los recursos iniciales C_i es una preimputación que siempre pertenece al Núcleo.*

La demostración es análoga a la del caso del juego financiero.

A continuación demostraremos un lema de gran importancia, no sólo en este apartado sino cuando tratemos el estudio de los conjuntos de negociación (Capítulo **3**).

Lema 2.20 *Sea $(N, v) \in \mathbf{VMC}^N$ y N^* un subconjunto de N. Sea P un subconjunto de N disjunto con N^* ($P \cap N^* = \emptyset$); T, $R \subseteq N^*$; y T, $R \neq \emptyset$. Entonces,*

$$si \;\; \sum_{i\in T} C_i \leq \sum_{i\in R} C_i \;\; \Rightarrow \;\; \frac{v(T \cup P) - x(P)}{\sum_{i\in T} C_i} \leq \frac{v(R \cup P) - x(P)}{\sum_{i\in R} C_i}$$

donde $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ es tal que $x(P) = \sum_{i\in P} x_i \geq \sum_{i\in P} C_i \cdot \frac{v(P\cup N^*)}{\sum_{i\in P\cup N^*} C_i}$.

DEM. Por la definición **2.17** sabemos que $\frac{v(T)}{\sum_{i\in T} C_i} \leq \frac{v(R)}{\sum_{i\in R} C_i}$.

Sea $x(P) = \alpha \cdot \sum_{i\in P} C_i$ donde $\alpha \geq \frac{v(P\cup N^*)}{\sum_{i\in P\cup N^*} C_i} = \mathbf{f}_{P\cup N^*}$ entonces,

$$\frac{v(T\cup P)-x(P)}{\sum_{i\in T}C_i}=\frac{\frac{v(T\cup P)}{\sum_{i\in T\cup P}C_i}\sum_{i\in T\cup P}C_i-\alpha\cdot\sum_{i\in P}C_i}{\sum_{i\in T}C_i}=$$

$$=\frac{\frac{v(T\cup P)}{\sum_{i\in T\cup P}C_i}\left[\sum_{i\in T}C_i+\sum_{i\in P}C_i\right]-\alpha\cdot\sum_{i\in P}C_i}{\sum_{i\in T}C_i}=$$

$$=\frac{v(T\cup P)}{\sum_{i\in T\cup P}C_i}+\sum_{i\in P}C_i\cdot\frac{\left(\frac{v(T\cup P)}{\sum_{i\in T\cup P}C_i}-\alpha\right)}{\sum_{i\in T}C_i}\leq^{9}$$

$$\leq\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}+\sum_{i\in P}C_i\cdot\frac{\left(\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}-\alpha\right)}{\sum_{i\in T}C_i}\leq^{10}$$

$$\leq\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}+\sum_{i\in P}C_i\cdot\frac{\left(\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}-\alpha\right)}{\sum_{i\in R}C_i}=$$

$$=\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}\cdot\frac{\sum_{i\in R}C_i}{\sum_{i\in R}C_i}+\sum_{i\in P}C_i\frac{\left(\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}-\alpha\right)}{\sum_{i\in R}C_i}=$$

$$=\frac{\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}\left[\sum_{i\in R}C_i+\sum_{i\in P}C_i\right]-\sum_{i\in P}C_i\cdot\alpha}{\sum_{i\in R}C_i}=$$

$$=\frac{v(R\cup P)-x(P)}{\sum_{i\in R}C_i}.$$

□

Utilizando el anterior Lema, probaremos el Teorema principal de este apartado que establece que la reducción de un juego de valores medios crecientes da como resultado un nuevo juego de valores medios crecientes.

Teorema 2.21 *Si* $(N,v)\in\mathbf{VMC}^N$ *respecto al vector* $\vec{C}\Rightarrow(N\setminus j,v_{\vec{x}}^{N\setminus j})\in\mathbf{VMC}^{N\setminus j}$ *respecto al vector* $\vec{C}^{N\setminus j}$ *donde* $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ *es tal que* $x_j\geq C_j\cdot\frac{v(N)}{\sum_{i\in N}C_i}$.

---

[9]Nótese que

$\sum_{i\in T}C_i\leq\sum_{i\in R}C_i\Rightarrow\sum_{i\in T\cup P}C_i\leq\sum_{i\in R\cup P}C_i\Rightarrow\frac{v(T\cup P)}{\sum_{i\in T\cup P}C_i}\leq\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}$

por tanto, podemos cambiar $\frac{v(T\cup P)}{\sum_{i\in T\cup P}C_i}$ por $\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}$ y incrementar la expresión.

[10]Nótese que dado que $R\subseteq N^*$ tenemos que $\sum_{i\in R}C_i\leq\sum_{i\in N^*}C_i$ y por tanto $\sum_{i\in R\cup P}C_i\leq\sum_{i\in N^*\cup P}C_i$. Entonces por la definición **2.17**, $\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}\leq\frac{v(N^*\cup P)}{\sum_{i\in N^*\cup P}C_i}\leq\alpha$ lo cual implica que $\frac{v(R\cup P)}{\sum_{i\in R\cup P}C_i}-\alpha\leq 0$. Por tanto podemos cambiar $\sum_{i\in T}C_i$ por un número mayor $\sum_{i\in R}C_i$ y de esta manera incrementar la expresión.

DEM.

Dada la definición **2.17**, es suficiente probar que

$$\text{Si } \sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \frac{v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T)}{\sum_{i\in T} C_i} \quad \forall\, S,\, T \in N\setminus j;\ S, T \neq \emptyset$$

Consideremos dos casos:

1. Supongamos que $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(S) = v(S)$; entonces

$$\frac{v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(S)}{\sum_{i\in S} C_i} = \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq^{11} \frac{v(T)}{\sum_{i\in T} C_i} \leq^{12} \frac{v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T)}{\sum_{i\in T} C_i}.$$

2. Supongamos que $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(S) = v(S\cup j) - x_j$; entonces, utilizando el Lema **2.20** para $P = \{j\}$ y $N^* = N\setminus j$, tenemos la siguiente implicación:

$$\sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \frac{v(S\cup j) - x_j}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{v(T\cup j) - x_j}{\sum_{i\in T} C_i};$$

y de aquí se deduce que
$\frac{v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(S)}{\sum_{i\in S} C_i} = \frac{v(S\cup j) - x_j}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{v(T\cup j) - x_j}{\sum_{i\in T} C_i} \leq^{13} \frac{v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T)}{\sum_{i\in T} C_i}$.

□

Para el caso financiero obtenemos el siguiente corolario

Corolario 2.22 *Sea (N, v) un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$ y $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ una imputación tal que $x_j = b_j^v$, entonces el juego $(N\setminus j, v_{\vec{x}}^{N\setminus j})$ es un juego financiero respecto al vector $\vec{C}^{N\setminus j}$.*

Esto es inmediato, si aplicamos el anterior Teorema y verificamos que $b_j^v \geq C_j \cdot \mathbf{f}_N$. Otra consecuencia del Teorema es la siguiente:

Corolario 2.23 *Bajo las hipótesis del corolario anterior, el juego reducido $(N\setminus j, v_{\vec{x}}^{N\setminus j})$ tiene el Núcleo no vacío dado que es un juego financiero.*

[11]Por la hipótesis de que $\sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i$ y la definición **2.17**.
[12]Por la definición de juego reducido.
[13]Por la definición de juego reducido.

Observación 2.24 *Por el Teorema* **2.15**, *y los corolarios* **2.22** *y* **2.23**, *se deduce una nueva demostración para la existencia de una distribución en el Núcleo del juego que asigne a un jugador cualquiera su contribución marginal. Efectivamente, esta distribución puede ser construida de la siguiente forma: asignamos al jugador j su contribución marginal $x_j = b_j^v$ y reducimos el juego. El juego reducido es financiero (Corolario* **2.22**) *y por tanto, con Núcleo no vacío (corolario* **2.23**)*; sea $\vec{x}^{N\setminus j}$ un vector del Núcleo del juego reducido. Por el Teorema* **2.15** *si completamos el vector $\vec{x}^{N\setminus j}$ con la componente $x_j = b_j^v$ obtendremos un vector del Núcleo del juego original.*

Como es bien sabido, el vector formado por las contribuciones marginales $\vec{b}^v$ constituye el límite superior para cualquier distribución que pertenezca al Núcleo y por tanto cualquier distribución que tenga contribuciones marginales entre sus componentes se situará en la frontera del Núcleo. A partir de aquí surge una nueva cuestión: **¿Los vértices del Núcleo contienen siempre en alguna de sus componentes contribuciones marginales?**. Para el caso de tres jugadores la solución es sencilla: Nuñez & Rafels [39] demuestran que para todo juego de tres jugadores con Núcleo no vacío, la superaditividad es una condición necesaria y suficiente para que todo vértice contenga al menos una contribución marginal. Para el caso de más jugadores considérese el siguiente ejemplo: sea un juego financiero de cuatro jugadores respecto al vector $\vec{C} = (10, 18, 26, 34)$

$$\begin{array}{lll}
v(1) = 10 \; v(2) = 18 & v(3) = 26 \; v(4) = 34 & v(12) = 28 \; v(13) = 36 \\
v(14) = 55 \; v(23) = 55 & v(24) = 66 \; v(34) = 77 & v(123) = 69.3 \; v(124) = 80.6 \\
v(134) = 91 \; v(234) = 101.4 & v(1234) = 130 &
\end{array}$$

Es bien conocido que si una preimputación $\vec{x}$ pertenece al Núcleo de un juego cooperativo de n jugadores, satura n restricciones del Núcleo y el sistema de ecuaciones es linealmente independiente, entonces dicha preimputación es un vértice del Núcleo.

Para el ejemplo anterior, las contribuciones marginales para cada jugador serían (28.6, 39, 49.4, 60.7). Si cogemos la preimputación $\vec{x}$ = (21, 32, 43, 34) podemos verificar que pertenece al Núcleo y que satura las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{ccccl}
x_1+ & & & x_4 & = v(14) \\
 & x_2+ & & x_4 & = v(24) \\
 & & x_3+ & x_4 & = v(34) \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = v(1234)
\end{array}$$

Estas ecuaciones son linealmente independientes y por tanto la distribución es un vértice del Núcleo. Sin embargo, se puede observar que dicho vértice no contiene ninguna contribución marginal en sus componentes.

2.4 Condición necesaria y suficiente para que un juego sea financiero

Un juego financiero se caracteriza por la existencia de un vector constituido por las aportaciones de los jugadores. Sin embargo, en el modelo no se necesita explícitamente la existencia de una función que transforme el vector de inputs en beneficios o ganancias. En este apartado descubriremos cuáles son las características de la función que implícitamente subyace al modelo. Para ello nos inspiraremos en un problema que tiene ciertas conexiones con el que nos ocupa.

Sharkey & Telser [55] analizan el problema de cuáles deben ser las condiciones que debe cumplir la función de costes asociada (la teconología asociada) a un monopolio natural para que sea factible su mantenimiento, es decir, para que impida la entrada de otros competidores. La condición que establecen es lo que denominan "*supportability*". Una función de costes es "*supportable*" si para cada nivel de producción es posible establecer unos precios para los outputs de manera que no sea posible por otra empresa ofrecer una fracción de la producción total a precios más bajos. Moulin [36]- pág 100 describe una condición equivalente en términos del Núcleo de cualquier juego de costes generado a partir de la función asociada a la empresa monopolística y las demandas de los clientes de la empresa. En concreto establece que, sean cuales sean las demandas, siempre existirá una manera de imputar los costes entre los demandantes de manera que ninguno saldrá perjudicado (ninguno pagará más de lo que cuesta producir lo que ha demandado); técnicamente diremos que el Núcleo del juego será no vacío.

Para nuestro caso demostraremos que un juego es financiero si y sólo si existe una función que genera el juego a partir de las aportaciones de los jugadores y que siempre genera juegos con Núcleo no vacío para otros vectores de aportaciones.

Teorema 2.25 *Dado un juego cooperativo* $(N, v) \in G^n$. *Entonces,*

(N, v) *es un juego financiero respecto al vector* $(C_1, \dots C_n)$ *si y sólo si existe una función continua* $\hat{f} : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ $\hat{f}(0) = 0$ *tal que se verifica que*

- $v(S) = \hat{f}(\sum_{i \in S} C_i)$ $\forall S \subseteq N$;
- *para todo vector* $(\beta_1, \dots, \beta_t) \in \mathbf{R}^t_{++}$, *el juego* $(N_t, \overline{v})$ *tiene el núcleo no vacío donde* $N_t = \{1, \dots, t\}$ *y* $\overline{v}(S) = \hat{f}(\sum_{i \in S} \beta_i)$ $\forall S \subseteq N_t$.

DEM.

$\Rightarrow$)

Dado un juego financiero v respecto al vector $(C_1, \ldots, C_n)$, ordenamos las coaliciones en orden creciente de la suma de los recursos en poder de sus componentes[14], i.e.

$$\sum_{i \in S_{k-1}} C_i < \sum_{i \in S_k} C_i \quad k = 1, \ldots, r; \; r \leq 2^n - 1; \; S_0 = \emptyset$$

.

Entonces construímos la siguiente función: $\hat{f} : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$

- $\hat{f}(0) = 0$;
- $\hat{f}(x) = v(S_{k-1}) + \frac{v(S_k) - v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_k} C_i - \sum_{i \in S_{k-1}} C_i} \cdot (x - \sum_{i \in S_{k-1}} C_i)$

$$\text{para todo } x \text{ t.q. } \sum_{i \in S_{k-1}} C_i < x \leq \sum_{i \in S_k} C_i, .$$

- $\hat{f}(x) = v(S_{r-1}) + \frac{v(S_r) - v(S_{r-1})}{\sum_{i \in S_r} C_i - \sum_{i \in S_{r-1}} C_i} \cdot (x - \sum_{i \in S_{r-1}} C_i)$

$$\text{para todo } x \text{ t.q. } \sum_{i \in S_r} C_i < x.$$

Esta es una función lineal a tramos; los extremos del dominio para cada función lineal coinciden con los recursos en poder de cada coalición y tienen como imágenes los valores del juego, i.e. $\hat{f}(\sum_{i \in S_k} C_i) = v(S_k)$. Debido al caracter financiero del juego se cumple que

$$\frac{\hat{f}(\sum_{i \in S_{k-1}} C_i)}{\sum_{i \in S_{k-1}} C_i} \leq \frac{\hat{f}(\sum_{i \in S_k} C_i)}{\sum_{i \in S_k} C_i}.$$

Dado que la función es el resultado de unir linealmente puntos del tipo

$$(\sum_{i \in S_k} C_i, \hat{f}(\sum_{i \in S_k} C_i),$$

los valores medios serán crecientes a lo largo de todo el dominio i.e.

$$\frac{\hat{f}(x)}{x} \leq \frac{\hat{f}(y)}{y} \quad \forall \, 0 < x \leq y. \tag{2.7}$$

Una vez tenemos definida la función, tomamos cualquier vector de recursos $(\beta_1, \ldots, \beta_t)$ y definimos el siguiente juego:

$$\overline{v}(S) = \hat{f}(\sum_{i \in S} \beta_i) \quad \text{para toda } S \subseteq N_t = \{1, \ldots, t\}.$$

[14]Si $\sum_{i \in S} C_i = \sum_{i \in T} C_i$ para alguna S y T, escogemos una de ellas descartando la otra

Lo único que nos queda por demostrar es que dicho juego tiene el Núcleo no vacío. La demostración es idéntica a la utilizada en la proposición **2.6** teniendo en cuenta que se cumple (2.7). Alternativamente, es fácil demostrar que la distribución proporcional respecto a los recursos pertenece al Núcleo.

En consecuencia, el juego es equilibrado y tiene el Núcleo no vacío.

$\Leftarrow$)

Sea $v(S) = \hat{f}(\sum_{i\in S} C_i)$ donde $\hat{f}$ es una función continua que verifica las condiciones enunciadas en el Teorema y $(C_1,\ldots,C_n)$ un vector de $\mathbf{R}^n_{++}$. Supongamos que el juego v no fuera financiero respecto al mencionado vector; ello implicaría que para algún par de coaliciones $S,T \subset N$ con $\sum_{i\in S} C_i < \sum_{i\in T} C_i$ se cumpliría que

$$\frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} > \frac{v(T)}{\sum_{i\in T} C_i}$$

o, (debido a que el juego está generado por la funcion $\hat{f}$)

$$\frac{\hat{f}(\sum_{i\in S} C_i)}{\sum_{i\in S} C_i} > \frac{\hat{f}(\sum_{i\in T} C_i)}{\sum_{i\in T} C_i}.$$

Si $\hat{f}$ es continua, entonces $\frac{\hat{f}(x)}{x}$ será también continua para todo $x > 0$. Debido a la continuidad de la función de valores medios y la existencia de dos valores $\sum_{i\in S} C_i$ y $\sum_{i\in T} C_i$ de manera que

$$\sum_{i\in S} C_i < \sum_{i\in T} C_i \text{ , con } \frac{\hat{f}(\sum_{i\in S} C_i)}{\sum_{i\in S} C_i} > \frac{\hat{f}(\sum_{i\in T} C_i)}{\sum_{i\in T} C_i},$$

existirá un valor [15] β perteneciente al intervalo $[\sum_{i\in S} C_i, \sum_{i\in T} C_i]$, $\beta > \sum_{i\in S} C_i$, para el cual se cumplirá que

$$\frac{\hat{f}(y)}{y} > \frac{\hat{f}(\beta)}{\beta} \quad \forall y \in [\beta - \epsilon, \beta) \quad \text{para algún } \epsilon > 0. \tag{2.8}$$

En lo sucesivo probaremos que podemos construir un juego $(N, \overline{v})$ a partir de la función $\hat{f}$ y de un cierto vector pero que tendrá un Núcleo vacío; ello supondrá una

[15] Si $g(x)$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$ donde $g(a) > g(b)$, por el Teorema de Weiertrass, la función g tiene al menos un mínimo global; sea m el conjunto de mínimos globales y ζ el valor que toma la función en el mínimo. Al ser m un subconjunto cerrado del conjunto $[a,b]$ existirá su ínfimo que denotaremos por c y que pertenecerá a m; además dado que $g(a) > g(b)$ deduciremos que $c \neq a$.

En nuestro caso estamos en la misma situación pero $g(x) = \frac{\hat{f}(x)}{x}$, $a = \sum_{i\in S} C_i$, $b = \sum_{i\in T} C_i$ y $c = \beta$.

contradicción con las hipótesis iniciales dado que suponíamos que todos los juegos generados a partir de la función tenían el Núcleo no vacío. De esta manera concluiremos que (N, v) es un juego financiero respecto al vector $(C_1, \ldots, C_n)$.

En efecto, sea $\beta_i = \frac{\beta}{m}$, siendo m un número natural tan grande como sea necesario de manera que $\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \in [\beta - \epsilon, \beta)$. El juego $(N_m, \overline{v})$, con $N_m = \{1, \ldots, m\}$ y $\overline{v}(S) = \hat{f}(\sum_{i \in S} \beta_i)$ $S \subseteq N_m$, estará caracterizado por:

- $\sum_{i \in N_m} \beta_i = \beta$,
- $\overline{v}(N_m \setminus i) = \overline{v}(N_m \setminus j) \quad \forall i, j \in N_m$, y
- por (2.8),

$$\frac{\overline{v}(N_m \setminus i)}{\sum_{i \in N_m \setminus i} \beta_i} = \frac{\overline{v}(N_m \setminus j)}{\sum_{i \in N_m \setminus j} \beta_i} > \frac{\overline{v}(N_m)}{\sum_{i \in N_m} \beta_i} \quad \forall i, j \in N_m. \tag{2.9}$$

Si $(N_m, \overline{v})$ tuviera un Núcleo no vacío se cumpliría que:

$$\sum_{i \in N_m} \overline{v}(N_m \setminus i) \leq (m-1) \cdot \overline{v}(N_m)$$

pero

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N_m} \overline{v}(N_m \setminus i) &= \sum_{i \in N_m} \left[\frac{\overline{v}(N_m \setminus i)}{\sum_{i \in N_m \setminus i} \beta_i} \cdot \sum_{i \in N_m \setminus i} \beta_i \right] > [\text{por } (2.9)] > \\
&> \sum_{i \in N_m} \left[\frac{\overline{v}(N_m)}{\sum_{i \in N_m} \beta_i} \sum_{i \in N_m \setminus i} \beta_i \right] = \frac{\overline{v}(N_m)}{\sum_{i \in N_m} \beta_i} \cdot \sum_{i \in N_m} \sum_{i \in N_m \setminus i} \beta_i = \\
&= \frac{\overline{v}(N_m)}{\sum_{i \in N_m} \beta_i} \cdot (m-1) \cdot \sum_{i \in N_m} \beta_i = (m-1)\overline{v}(N_m);
\end{aligned}$$

y por tanto, el Núcleo de este juego es vacío, lo cual es una contradicción dado que suponíamos que todos los juegos generados por la función $\hat{f}$ tenían el Núcleo no vacío. Por tanto se debe cumplir que

$$\sum_{i \in S} C_i < \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \frac{\hat{f}(\sum_{i \in S} C_i)}{\sum_{i \in S} C_i} \leq \frac{\hat{f}(\sum_{i \in T} C_i)}{\sum_{i \in T} C_i}.$$

Dado que el juego esta generado por la función $\hat{f}$, para las coaliciones S y T con los mismos recursos se cumple que

$$\sum_{i \in S} C_i = \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \frac{\hat{f}(\sum_{i \in S} C_i)}{\sum_{i \in S} C_i} = \frac{\hat{f}(\sum_{i \in T} C_i)}{\sum_{i \in T} C_i}.$$

Las dos anteriores relaciones se puede resumir en una sola:

$$\sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \frac{\hat{f}(\sum_{i\in S} C_i)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{\hat{f}(\sum_{i\in T} C_i)}{\sum_{i\in T} C_i},$$

y por tanto, el juego v es financiero respecto al vector $(C_1, \ldots, C_n)$. □

2.5 Los conjuntos estables y el Núcleo

El Núcleo de un juego es un concepto de solución bastante atractivo dado que satisface las reivindicaciones mínimas de todas las subcoaliciones que se pueden formar en el proceso de negociación. Sin embargo, existen situaciones en que el Núcleo puede no resultar una solución satisfactoria para todos los jugadores. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.26 *Sea (N, v) un juego cooperativo de tres jugadores cuya función característica es:*

$$v(1) = 10;\; v(2) = 20;\; v(3) = 33;\; v(12) = 33; v(13) = 44;\; v(23) = 55;\; v(123) = 66$$

siendo los recursos asociados a cada jugador $C_1 = 10$; $C_2 = 20$; $C_3 = 30$.

Este juego se puede comprobar que tiene como única preimputación perteneciente al Núcleo la proporcional a los recursos de los jugadores. **¿Podemos afirmar que dado que el Núcleo contiene una única distribución, el problema del juego financiero está solucionado?** Una respuesta sin demasiada reflexión contestaría afirmativamente. Supongamos que cada jugador recibiera un pago de acuerdo con la solución que propone el Núcleo i.e. $\vec{x} = (11, 22, 33)$. En este caso el jugador **3** tan sólo recibiría lo que él podría conseguir por si mismo por lo que es de suponer que, o bien cooperaría sin ningún ánimo de lucro, o bien no aceptaría esta distribución. Sin embargo, si el jugador **3** exigiera un mayor pago, los jugadores **1** y **2** recibirían una asignación inferior a la que ellos mismos podrían conseguir $(x_1 + x_2 < v(12))$ por lo que no estarían de acuerdo en ceder parte de sus beneficios.

La solución a este conflicto depende de la hipótesis que se realice respecto al comportamiento de los jugadores; en realidad cada caso se habría de contemplar por separado pero no sería muy aventurado definir al jugador racional como **aquel que intenta maximizar su ganancia**. Esta hipótesis abre de nuevo las posibilidades del juego: a pesar de que el jugador **3** no puede forzar al jugador **1** y al jugador

2 a cederle parte de sus beneficios si que puede esperar que, o bien el jugador **1**, o bien el jugador **2**, le ofrezcan un pacto para negociar conjuntamente el reparto contra el jugador que queda fuera de esta coalición. Si el jugador **1** pacta con el **3** y conjuntamente negocian el reparto con el jugador **2**, éste se verá en una posición débil dado que si no acepta rebajar sus pretensiones de conseguir la parte proporcional a los recursos invertidos, los jugadores **1** y **3** pueden boicotearle y hacer que gane menos teniendo ellos garantizado el pago proporcional. Fijémonos que el único jugador que es inmune a este tipo de amenazas es el jugador **3**: los jugadores **1** y **2** no pueden presionarle ya que por sí mismo conseguiría el pago proporcional.

En esta situación, es posible que se den una serie de pactos. Supongamos que estas negociaciones se concretan de la siguiente manera:

Si el jugador **1** le ofrece un pacto al **3** y éste acepta, negociarán conjuntamente contra el jugador **2**; en realidad lo que negociarán será cuál es el pago del jugador **2**. Este pago estará entre el valor mínimo aceptable por el jugador **2** [$v(2)$] y el valor máximo [pago proporcional]. Si el pago final acordado está entre los dos valores (es lo más probable), el jugador **2** recibirá una asignación inferior a la proporcional, o lo que es lo mismo, se producirá un reparto fuera del Núcleo.

Supongamos que el jugador **1** y el **3** acuerdan que se repartiran de manera igual el pago adicional que puedan sacar de su negociación contra el jugador **2**. Entonces los pagos posibles que se pueden dar son:

$$(11 + \frac{1}{2}a, 22 - a, 33 + \frac{1}{2}a) \quad 0 \leq a \leq 2.$$

De la misma manera, si es el jugador **2** el que se coaliga con el **3** contra el jugador **1** los posibles pagos serán:

$$(11 - b, 22 + \frac{1}{2}b, 33 + \frac{1}{2}b) \quad 0 \leq b \leq 1$$

El conjunto de todas éstas distribuciones recogen las posibles situaciones de pactos que bajo las anteriores hipótesis se podrían dar. Obsérvese que si a o b son cero recuperaremos la distribución proporcional, la única que hallábamos en el Núcleo. Este conjunto conforma lo que se conoce como un conjunto estable[16] .

Los conjuntos estables fueron definidos por Von Neumann & Morgenstern en su libro "Game Theory and Economic Behavior" [61]. Este concepto de solución se basa

[16]Ver el estudio realizado por Lucas (*Handbook of Game Theory vol I* cáp para los conjuntos estables de juegos de tres jugadores.

en la dominación entre las imputaciones.

Definición 2.27 *Sea (N, v) un juego cooperativo, y $\vec{x}$, $\vec{y}$ dos imputaciones. Diremos que $\vec{x}$ domina a $\vec{y}$ vía la coalición S ($\vec{x}\, dom_S\, \vec{y}$) si y sólo si*

(i) $x_i > y_i \quad \forall\, i \in S$,

(ii) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

La dominación expresa la idea de que una distribución $\vec{x}$ será preferida a una distribución $\vec{y}$ por una coalición S si cada miembro de la coalición percibe un pago mayor en $\vec{x}$ que en $\vec{y}$ [condición (i)] y además puede asegurarse dicho pago [condición (ii)].

A partir de aquí se define un conjunto estable como:

Definición 2.28 $\mathbf{V} \subseteq I(v)$ *es un conjunto estable si y sólo si*

(a) $\forall \vec{y} \in I(v) - \mathbf{V}$, *existe una imputación* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *tal que* $\vec{x}$ *domina a* $\vec{y}$ *vía alguna coalición* $S \subset N$,

(b) Ningún elemento de $\mathbf{V}$ *es dominado por otro de* $\mathbf{V}$.

La estabilidad implica que si seleccionamos una imputación perteneciente al conjunto $\mathbf{V}$, quizás sea dominada por alguna imputación fuera del conjunto, pero entonces dada la condición (a) siempre existirá otra imputación de $\mathbf{V}$ que la dominará de manera que volveremos a seleccionar una distribución del conjunto; es lo que se denomina la estabilidad externa. De alguna manera, el conjunto ejerce una atracción para que se seleccione una de sus imputaciones.

En cambio, imputaciones del mismo conjunto no se dominan entre ellas: condición (b) o estabilidad interna.

En el ejemplo anterior, el conjunto estable definido es el siguiente:

$$\mathbf{V} = \{(11+\frac{1}{2}a, 22-a, 33+\frac{1}{2}a) \;\; 0 \leq a \leq 2\} \cup \{(11-b,\, 22+\frac{1}{2}b,\, 33+\frac{1}{2}b) \;\; 0 \leq b \leq 1\}$$

que gráficamente es el indicado en trazo grueso.

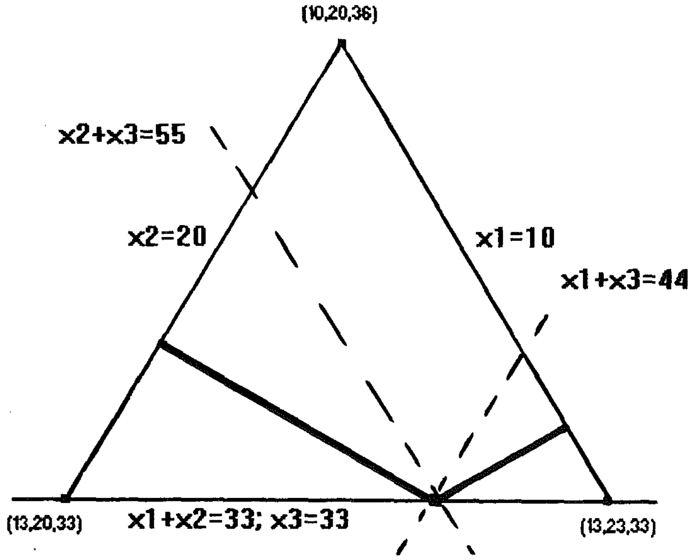

Figura **2.3**

La existencia de conjuntos estables para los juegos cooperativos en general era un problema abierto que se saldó negativamente después de un trabajo de Lucas([29]) en el que facilitó un juego sin conjuntos estables. Nuestra impresión es que la clase de los juegos financieros tienen conjuntos estables pero por ahora esta cuestión sigue siendo un problema sin resolver. No obstante hemos comprobado que el famoso juego de Lucas al que aludíamos antes no es un juego financiero (pág 121). No pudiendo dar una solución a esta pregunta genérica , hemos intentado probar que una cierta clase de juegos financieros, la ya estudiada que posee la propiedad (2.3), tiene como propiedad característica la de que el Núcleo es un conjunto estable si y sólo si el juego es convexo (Teorema **2.29**). Así pues se nos abría la pregunta de si, en general, para la clase de los juegos financieros, la estabilidad del Núcleo era una caracterización de su convexidad. El ejemplo **2.30** (pág 116) nos muestra una respuesta negativa. Es importante remarcar que para este contraejemplo hemos tenido que ir a la clase de los juegos con al menos 4 jugadores y cabe destacar la metodología utilizada para demostrar que el Núcleo es un conjunto estable, ya que hemos utilizado la reducción del juego, lo que abre una nueva vía de estudio para los conjuntos estables.

Pasemos a estudiar pues en primer lugar la establidad del Núcleo en la subclase de juegos financieros que mencionabamos antes.

Teorema 2.29 *Sea (N, v) un juego financiero respecto al vector $(C_1, \dots, C_n)$ donde se verifica que*

$$v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v. \tag{2.10}$$

Para toda $S \subset N$ tal que $v(S) > 0$; $1 \leq |S| \leq n-1$ Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *v es convexo.*
2. *v es exacto.*
3. *$v(S) = \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\}$.*
4. *v es un juego de Bancarrota.*
5. *$C(v)$ es un conjunto estable (y por tanto el único).*

DEM.

1 $\rightarrow$ **2** Es inmediato por propiedades del juego convexo.

2 $\rightarrow$ **3** Por definición de juego financiero y (2.10) tenemos que

$$v(S) \leq \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\}.$$

Supongamos que para alguna coalición $T \subset N$ $T \neq N$ se cumpliera que $v(T) < \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus T} b_i^v\}$; dado que $v(T) \geq 0$ esto equivale a afirmar que

$$v(T) < v(N) - \sum_{i \in N \setminus T} b_i^v. \tag{2.11}$$

Si suponemos que el juego es exacto, existirá una imputación $\vec{x}$ perteneciente al núcleo del juego donde $v(T) = \sum_{i \in T} x_i$. Por eficiencia de la distribución se cumplirá que $v(N) - v(T) = \sum_{i \in N \setminus T} x_i$. Considerando (2.11), la última igualdad equivale a

$$\sum_{i \in N \setminus T} x_i > \sum_{i \in N \setminus T} b_i^v.$$

Pero ello implica que $x_i > b_i^v$ para algún $i \in N \setminus T$ lo que es imposible dado que $\vec{x} \in C(v)$. Por tanto concluimos que

$$v(T) = \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus T} b_i^v\}.$$

3 $\rightarrow$ **4** Los juegos que tienen la forma expresada en **2** se pueden asimilar a juegos de bancarrota donde $\mathbf{E} = v(N)$ y donde $(d_1, \ldots, d_n) = (b_1^v, \ldots, b_n^v)$. Nótese que al ser el juego inicial financiero $\sum_{i \in N} b_i^v \geq v(N)$.

4 $\rightarrow$ **5** Dado que los juegos de Bancarrota son juegos convexos, el Núcleo de este tipo de juegos es estable.

5 $\rightarrow$ **1** Supongamos que el Núcleo es estable pero que el juego no es convexo; ello implica que existe un jugador $\hat{i} \in N$ y dos coaliciones S_0 y T, $S_0 \subset T \subseteq N \setminus \hat{i}$ tales que se verifica que

$$v(S_0 \cup \hat{i}) - v(S_0) > v(T \cup \hat{i}) - v(T) \tag{2.12}$$

Supongamos que $v(S_0 \cup \hat{i}) = 0$, entonces $v(S_0) = 0$. Sustituyendo en (2.12) obtenemos que $0 > v(T \cup \hat{i}) - v(T)$ lo cual es imposible dado que los juegos financieros son monótonos.Por otra parte si $v(T) = 0$, por monotonía se cumplirá que $v(S_0) = 0$; sustituyendo nuevamente en (2.12) obtendremos que $v(S_0 \cup \hat{i}) > v(T \cup \hat{i})$ lo cual es imposible por monotonía de los juegos financieros. De aquí concluimos que

$$v(S_0 \cup \hat{i}) > 0; \; v(T \cup \hat{i}) > 0; \; v(T) > 0$$

y por condición (2.10) que

$$v(N) - v(S_0 \cup \hat{i}) \geq \sum_{i \in N \setminus S_0 \cup \hat{i}} b_i^v \tag{2.13}$$

$$v(N) - v(T \cup \hat{i}) \geq \sum_{i \in N \setminus T \cup \hat{i}} b_i^v \tag{2.14}$$

$$v(N) - v(T) \geq \sum_{i \in N \setminus T} b_i^v \tag{2.15}$$

Partiendo de la ecuación (2.12), consideraremos dos casos

(a) $b_{\hat{i}}^v \geq v(S_0 \cup \hat{i}) - v(S_0) > v(T \cup \hat{i}) - v(T)$.

Nótese que en este caso $T \neq N \setminus \hat{i}$ dado que si no tendríamos que $b_{\hat{i}}^v > b_{\hat{i}}^v$, contradicción.

Entonces, a partir de (2.14) podemos construir la siguiente imputación $\vec{y} \in I(v)$.

$$y_i := \begin{cases} b_i^v + \epsilon & \forall i \in N \setminus (T \cup \hat{i}) \\ C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup \hat{i}} & \forall i \in T \cup \hat{i} \end{cases}$$

donde $v(N) - v(T \cup \hat{\imath}) - \sum_{i \in N \backslash T \cup \hat{\imath}} b_i^v = |N \backslash T \cup \hat{\imath}| \cdot \epsilon > 0$; la positividad de ϵ se deduce directamente de (2.14). Obsérvese que dado que $T \neq N \setminus \hat{\imath}$, $N \setminus (T \cup \hat{\imath}) \neq \emptyset$.

El vector $\vec{y}$ es eficiente,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i \in N} y_i &= \textstyle\sum_{i \in T \cup \hat{\imath}} y_i + \sum_{i \in N \backslash T \cup \hat{\imath}} y_i = \sum_{i \in T \cup \hat{\imath}} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup \hat{\imath}} + \sum_{i \in N \backslash T \cup \hat{\imath}} b_i^v + \\ &\quad + |N \backslash T \cup \hat{\imath}| \cdot \epsilon = \\ &= v(T \cup \hat{\imath}) + \textstyle\sum_{i \in N \backslash T \cup \hat{\imath}} b_i^v + |N \backslash T \cup \hat{\imath}| \cdot \epsilon = v(N) \end{aligned}$$

y además cumple racionalidad individual dado que $b_i^v \geq v(i) \quad \forall i \in N$ y $C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup \hat{\imath}} \geq C_i \cdot \mathbf{f}_i = v(i) \quad \forall i \in T \cup \{\hat{\imath}\}$. Sin embargo, no pertenece al Núcleo del juego dado que $y_i > b_i^v \, \forall i \in N \setminus T \cup \hat{\imath}$. Si el Núcleo fuera estable tendría que existir una imputación $\vec{x}$ que perteneciera al Núcleo y que dominara a $\vec{y}$ vía una coalición $S \subset N$, i.e. $v(S) \geq x(S)$ donde $x_i > y_i \, \forall i \in S$. Vamos a demostrar que ello es imposible:

i) Si $S \cap N \backslash (\mathrm{T} \cup \hat{\imath}) \neq \emptyset$ es imposible que $\vec{x}$ sea del núcleo dado que existirá un jugador $k \in S \cap N \backslash (\mathrm{T} \cup \hat{\imath})$ tal que $x_k > y_k > b_k^v$ o lo que es equivalente que $x(N \setminus k) < v(N \setminus k)$.

ii) Si $S \cap N \backslash (\mathrm{T} \cup \hat{\imath}) = \emptyset \Rightarrow S \subseteq T \cup \hat{\imath}$, entonces

$$v(S) \geq x(S) > y(S) = \sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup \hat{\imath}} \geq \sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{f}_S = v(S),$$

contradicción $[v(S) > v(S)\,]$.

(b) Supongamos que $b_{\hat{\imath}}^v < v(S_0 \cup \hat{\imath}) - v(S_0)$[17]; sumando esta inecuación y la 2.13 obtenemos que

$$v(N) - v(S_0) > \sum_{i \in N \backslash S_0} b_i^v. \tag{2.16}$$

Igual que en el caso anterior podemos construir la siguiente imputación que no pertenece al Núcleo del juego.

$$y_i := \begin{cases} b_i^v + \epsilon & \forall i \in N \setminus S_0 \\ C_i \cdot \mathbf{f}_{S_0} & \forall i \in S_0 \end{cases}$$

donde $v(N) - v(S_0) - \sum_{i \in N \backslash S_0} b_i^v = |N - S_0| \cdot \epsilon > 0$; la positividad de ϵ se deduce de 2.16. El razonamiento posterior es idéntico al anterior sustituyendo $T \cup \hat{\imath}$ por S_0.

[17] Nótese que $S_0 \neq \emptyset$ dado que si no tendríamos que $b_{\hat{\imath}}^v < v(\hat{\imath})$ lo cual es imposible para un juego financiero.

Por tanto, si el juego no es convexo, el Núcleo no podrá ser estable dado que siempre podremos construir distribuciones no pertenecientes a él, pero que no podrán ser dominadas por ningún elemento del Núcleo, incumpliéndose la estabilidad externa requerida para todo conjunto estable. Dado que partíamos de la hipótesis de que el Núcleo era estable, concluimos que el juego es convexo □

De lo visto anteriormente, sería interesante averiguar si la estabilidad del Núcleo esta relacionada unívocamente con la convexidad del juego. El siguiente ejemplo nos clarifica la respuesta.

Ejemplo 2.30 *Sea el siguiente juego financiero de cuatro jugadores respecto al vector* $(10, 20, 30, 50)$ *donde su función característica es:*

$$\begin{array}{ll} v(1) = 10 & v(24) = 77 \\ v(2) = 20 & v(34) = 88 \\ v(3) = 30 & v(123) = 66 \\ v(4) = 55 & v(124) = 88 \\ v(12) = 30 & v(134) = 99 \\ v(13) = 44 & v(234) = 110 \\ v(14) = 66 & v(1234) = 132 \\ v(23) = 55 & \end{array}$$

Este juego no es convexo dado que el subjuego $v_{|\{123\}}$ no lo es; sin embargo, demostraremos que su Núcleo es estable. Para ello, en primer lugar enunciaremos una proposición referente a la estabilidad de los juegos convexos de tres jugadores. Esta proposición establecerá que si el juego es convexo, una preimputación que no pertenezca al Núcleo siempre podrá ser "dominada" por una del Núcleo. La utilización de la "dominación" entre preimputaciones, que ya fue definida en 1953 por Gillies [19], es consecuencia de una necesidad técnica para una posterior demostración sin que ello implique un cambio en el concepto de estabilidad.

Proposición 2.31 *Sea* (N, v) *un juego* **convexo** *de tres jugadores y* $\vec{z}$ *una preimputación no perteneciente al Núcleo, entonces*

(i) si $z_i < v(i)$ $i \in N$ *existirá una imputación* $\vec{y} \in C(v)$ *tal que* $v(i) = y_i > z_i$*;*

(ii) si $\vec{z} \in I(v)$ *y* $z(S) < v(S)$ $S \subset N$ $|S| = 2$*, existirá una imputación* $\vec{y} \in C(v)$ *tal que* $v(S) \geq y(S)$ *y* $y_i > z_i$ $\forall i \in S$*.*

DEM.

(i) En esta caso, simplemente bastará seleccionar un vector de valores marginales[18] $\vec{y}^{\theta}$ donde $y_i^{\theta} = v(i)$. Este vector pertenecerá al Núcleo ya que para un juego convexo todos los vectores de contribuciones marginales pertenecen al Núcleo.

(ii) Supongamos que $S = \{ij\}$, i.e. $v(ij) > z(ij)$.

Definimos entonces la distribución $\vec{y}$ como

$$\begin{aligned} y_i &= z_i + \tfrac{1}{2}[v(ij) - z_i - z_j)] \\ y_j &= z_j + \tfrac{1}{2}[v(ij) - z_i - z_j)] \\ y_k &= v(N) - v(ij) \end{aligned}$$

donde $N = \{ijk\}$.Esta distribución es una imputación dado que $y_i > z_i \geq v(i)$, $y_j > z_j \geq v(j)$ y, como los juegos convexos son superaditivos, $y_k = v(N) - v(ij) \geq v(k)$. Además $\vec{y}$ pertenece al Núcleo dado que se puede expresar como combinación convexa[19] de las imputaciones $\vec{y}^{\theta_1} = (v(i), v(ij) - v(i), v(N) - v(ij))$ y $\vec{y}^{\theta_2} = (v(ij) - v(j), v(j), v(N) - v(ij))$; estas dos distribuciones corresponden a dos vectores de valores marginales

y es bien conocido que, para los juegos convexos, dichos vectores pertenecen al núcleo. Finalmente obsérvese que $y_i + y_j = v(ij)$, que $y_i > z_i$ y que $y_j > z_j$. □

Establecida esta propiedad para los juegos convexos, pasaremos a demostrar la estabilidad del Core del juego propuesto.

Toda imputación de este juego verifica que $55 \leq x_4 \leq 72$; para cada valor de x_4 podemos generar un juego reducido en el sentido de Davis y Maschler, $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$ donde

$$\begin{aligned} &v_{\vec{x}}^{\{123\}}(\emptyset) = 0 \\ &v_{\vec{x}}^{\{123\}}(S) = \max\{v(S), v(S \cup 4) - x_4\} \ \forall S \subset \{123\} \\ &v_{\vec{x}}^{\{123\}}(123) = x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

El siguiente cuadro recoge los valores de la función característica del juego reducido que están expresados en función de x_4:

[18] Para una definición precisa ver la página 63.

[19] $\alpha \cdot \vec{y}^{\theta_1} + (1 - \alpha) \cdot \vec{y}^{\theta_2}$ donde $\alpha = \frac{z_j + 1/2[v(ij) - z_i - z_j] - v(j)}{v(ij) - v(i) - v(j)}$.

S \ x_4	$55 \leq x_4 < 56$	$56 \leq x_4 < 57$	$57 \leq x_4 < 58$	$58 \leq x_4 < 66$	$66 \leq x_4 < 72$
$\{1\}$	66-x_4	10	10	10	10
$\{2\}$	77-x_4	77-x_4	20	20	20
$\{3\}$	88-x_4	88-x_4	88-x_4	30	30
$\{12\}$	88-x_4	88-x_4	88-x_4	30	30
$\{13\}$	44	44	44	44	44
$\{23\}$	55	55	55	55	55
$\{123\}$	132-x_4	132-x_4	132-x_4	132-x_4	66

A partir del cuadro se puede deducir que

(i) para $58 \leq x_4 \leq 72$ se cumple que

$$v(S) \geq v(S \cup \{4\}) - x_4 \quad \forall\, S \subset \{123\};\ S \neq \{123\}, \tag{2.17}$$

(ii) para $55 \leq x_4 \leq 63$,

$$\text{todos los juegos reducidos } v_{\vec{x}}^{\{123\}} \text{ son convexos.} \tag{2.18}$$

La característica principal de este juego es que todos los juegos reducidos o bien son convexos, con lo cual sabemos que su Núcleo es estable, o coinciden con el subjuego. En este último caso, a pesar de no tener en general su Núcleo estable, el hecho de que coincida con el subjuego facilita que las imputaciones que no pertenezcan al Núcleo puedan ser dominadas por el Núcleo de algún juego reducido que a la vez sea convexo y a la vez coincida con el subjuego. Este proceso lo veremos posteriormente cuando utilizemos el juego reducido $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$ para $x_4 = 63$; nótese que este valor se halla a la vez en los casos (i) e (ii) analizados anteriormente.

En lo sucesivo demostraremos que toda imputación que no pertenece al Núcleo es dominada por una del Núcleo. Sea $\vec{z} \in I(v) - C(v)$; en este caso podemos considerar tres situaciones:

(a) $v(T) > z(T)$ donde $T \subset \{123\};\ T \neq \{123\}$.

En este apartado utilizaremos como instrumento el juego reducido para $x_4 = 63$. Como ya hemos comentado, el juego reducido $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$ para $x_4 = 63$ es un juego convexo; además por (2.17) se cumplirá que $v(S) \geq v(S \cup \{4\}) - x_4 \quad \forall\, S \subset \{123\} \;\; S \neq \{123\}$.

Es evidente que $\vec{z}$ no pertenecerá en general al conjunto de imputaciones de este juego reducido dado que, aunque es individualmente racional, no será eficiente. Sin embargo, sí que podemos construir una imputación γ en el juego reducido donde $\gamma_i = z_i \; \forall i \in T$; La idea es que si conseguimos dominar a γ vía T automáticamente estaremos dominando a $\vec{z}$ también vía T.

Por construcción del vector γ y las características del juego reducido se verificará que $\gamma \notin C(v_{\vec{x}}^{\{123\}})$. Dado que el juego reducido es convexo, existirá una imputación $\vec{y}$ en su núcleo que dominará a γ vía T (consecuencia directa de la proposición **2.31** (ii)). Por el Teorema **2.15** y teniendo en cuenta que $v(4) < x_4 = 63 < b_4^v$, el vector $(\vec{y}; x_4)$ pertenecerá al Núcleo del juego original y seguirá dominando a $\vec{z}$ vía T dado que $z_i = \gamma_i < y_i \; \forall i \in T$ y a que $\sum_{i \in T} y_i = v_{\vec{x}}^{\{123\}}(T) = v(T)$.

(b) $v(S) \leq z(S) \; \forall S \subset \{123\}$, $S \neq \{123\}$ y $v(123) > z(123)$. De estas desigualdades se derivan las siguientes conclusiones:

- $66 < z_4$;
- por (2.17), $v(S) \geq v(S \cup \{4\}) - z_4 \quad \forall\, S \subset \{123\} \;\; S \neq \{123\}$.

Dadas estas condiciones, construimos la siguiente imputación $(\vec{x})$ del juego v :

$$\begin{array}{l} x_i = z_i + \frac{1}{3} \cdot [v(123) - z(123)] \quad \forall\, i \in \{123\} \\ x_4 = v(N) - v(123) = 66 \end{array}$$

Obsérvese que esta imputación domina a $\vec{z}$ vía la coalición $\{123\}$. Por (2.17), $v(S) \geq v(S \cup \{4\}) - x_4 \quad \forall\, S \subset \{123\} \;\; S \neq \{123\}$ y por tanto

$$\sum_{i \in S} x_i > v(S) \geq v(S \cup \{4\}) - x_4$$

con lo que la imputación $\vec{x}$ pertenece al Núcleo de v.

(c) $v(S) \leq z(S) \; \forall S \subset \{123\}$, $v(123) \leq z(123)$ y $v(T \cup \{4\}) > z(T \cup \{4\})$ donde $T \subset \{123\} \;\; T \neq \{123\}$; dado que en este caso T puede contener uno o dos jugadores, seleccionaremos aquella coalición T que sea minimal en talla.

Esta situación sólo se puede dar cuando $55 \leq z_4 < 58$. Efectivamente, dado que $v(S) \leq z(S)\ \forall S \subset \{123\}$, si z_4 fuera mayor o igual a 58 se cumpliría por (2.17) que $v(S \cup \{4\}) - z_4 \leq z(S)\quad \forall S \subset \{123\}\quad S \neq \{123\}$ lo cual imposibilitaría que $v(T \cup \{4\}) > z(T \cup \{4\})$.

Por otra parte y por (2.18), si $55 \leq z_4 < 58$ el juego reducido $v_{\vec{z}}^{\{123\}}$ será convexo; además se verificará que $v(T) \leq z(T) < v(T \cup \{4\}) - z_4$. Es decir que el juego reducido $v_{\vec{z}}^{\{123\}}$, a pesar de ser convexo no coincide con el subjuego. Ello impide que apliquemos la misma técnica que en **(a)**. Lo que haremos es trabajar con un juego reducido ($v_{\vec{x}}^{\{123\}}$) que esté en un hiperplano de eficiencia superior al de z_4 (i.e.$x_4 > z_4$) pero que mantenga las características del juego reducido $v_{\vec{z}}^{\{123\}}$, es decir que sea convexo y que $v(T) \leq z(T) < v(T \cup \{4\}) - x_4$.

Seleccionemos entonces una imputación $\vec{x}$ del juego v de manera que su cuarta componente x_4 verifique que $z_4 < x_4 < 58$ y que $v(T) \leq z(T) < v(T \cup \{4\}) - x_4$. Obsérvese que el juego $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$, es decir el juego reducido obtenido a partir de la componente x_4, también será convexo por (2.18). En este nuevo juego reducido, la distribución $\vec{z}$ no es eficiente ni tan siquiera tenemos asegurada la racionalidad individual ($1 \leq |T| \leq 2$). De esta manera, igual que en el caso **(a)**, construiremos una preimputación γ del juego reducido $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$ donde $\gamma_i = z_i\ \forall i \in T$. Distinguiremos entonces dos casos:

1.- si $|T| = 1$ (supongamos $T = \{i\}$), aplicando la proposición **2.31** (i), existirá una imputación $\vec{y}$ en el Núcleo del juego reducido $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$ de manera que $v_{\vec{x}}^{\{123\}}(i) = y_i > \gamma_i = z_i$. Por definición del juego reducido y dado que $x_4 > z_4$, ello equivale a

$$v(\{i\} \cup \{4\}) = y_i + x_4 > \gamma_i + x_4 = z_i + x_4 > z_i + z_4. \tag{2.19}$$

Finalmente, por el Teorema **2.15**, el vector $(\vec{y}, x_4)$ pertenecerá al Núcleo del juego v y, por (2.19), dominará a $\vec{z}$ vía la coalición $\{i\} \cup \{4\}$.

2.- si $|T| = 2$ (supongamos $T = \{ij\}$) entonces γ será una imputación dado que $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$ es un juego convexo; aplicando entonces la proposición **2.31** (ii), existirá una imputación $\vec{y}$ en el Núcleo del juego reducido $v_{\vec{x}}^{\{123\}}$ de manera que $v_{\vec{x}}^{\{123\}}(ij) = y_i + y_j$ con $y_i > \gamma_i = z_i$ y $y_j > \gamma_j = z_j$. Por definición del juego reducido y dado que $x_4 > z_4$, ello equivale a

$$v(\{ij\} \cup \{4\}) = y_i + y_j + x_4 > \gamma_i + \gamma_j + x_4 = z_i + z_j + x_4 > z_i + z_j + z_4. \tag{2.20}$$

Finalmente, por el Teorema **2.15**, el vector $(\vec{y}, x_4)$ pertenecerá al Núcleo del juego v y, por (2.20), dominará a $\vec{z}$ vía la coalición $\{ij\} \cup \{4\}$.

Por tanto toda distribución no perteneciente al Núcleo será dominada por una del Núcleo y, por tanto, éste será estable.

En general, la existencia de conjuntos estables en la clase de juegos financieros es un problema no resuelto. En la literatura, se han dado condiciones suficientes para la existencia de conjuntos estables: una de ellas es que el juego tenga "Large Core" ([53]); para esta clase de juegos el Núcleo es el único conjunto estable. Los juegos financieros no pertenecen a la clase de juegos financieros con "Large Core" dado que, por ejemplo, los juegos financieros de tres jugadores no son convexos y la convexidad equivale a tener "Large Core" en el caso de tres jugadores.

Si es difícil encontrar una respuesta afirmativa al problema de los conjuntos estables también es difícil encontrar una respuesta negativa. En este sentido y como ya hemos comentado, una de las pocas referencias de juegos con Núcleo no vacío sin conjuntos estables es la dada por Lucas [29] (ver también Owen [41]). El juego que plantea es el siguiente:

$$\begin{array}{l}
v(N) = 5,\ v(\{1,3,5,7,9\}) = 4, \\
v(\{1,2\}) = v(\{3,4\}) = v(\{5,6\}) = v(\{7,8\}) = v(\{9,10\}) = 1, \\
v(\{3,5,7,9\}) = v(\{1,5,7,9\}) = v(\{1,3,7,9\}) = 3, \\
v(\{3,5,7\}) = v(\{1,5,7\}) = v(\{1,3,7\}) = 2, \\
v(\{3,5,9\}) = v(\{1,5,9\}) = v(\{1,3,9\}) = 2, \\
v(\{1,4,7,9\}) = v(\{3,6,7,9\}) = v(\{5,2,7,9\}) = 2, \\
v(S) = 0\ \forall S \subset N
\end{array}$$

Inmediatamente uno podría pensar que este juego no es financiero dado que obvíamente no es superaditivo. Sin embargo, también nos podíamos preguntar si la cobertura superaditiva del juego[20] $\overline{v}$ es un juego financiero. Esto es importante porque la cobertura tiene las mismas relaciones de dominación que el juego original siempre y cuando $\overline{v}(N) = v(N)$. Para ello nótese que en este caso, $\overline{v}(S) = v(S)\ \forall S$ tal que $v(S) > 0$. De aquí, dado que $\overline{v}(157) = \overline{v}(137)$ y aplicando la propiedad **1.16**, deducimos que si existe un vector $\vec{C}$ respecto al cual el juego es financiero éste deberá satisfacer que $C_1+C_5+C_7 = C_1+C_3+C_7$

[20]Sea $\mathcal{P}(S)$ la clase de todas las particiones $\{S_j\}_{j=1\ldots r}$ del conjunto S, $\forall S \subseteq N$. La cobertura superaditiva de un juego v se define como $\overline{v}(S) = \max_{\{S_j\}_{j=1,\ldots,r} \in \mathcal{P}(S)} \sum_{j=1}^{r} v(S_j)$.

y por tanto que $C_3 = C_5$. Por otro lado, por la definición de cobertura tenemos que $\overline{v}(345) = \overline{v}(34)$; aplicando el mismo razonamiento que antes llegaremos a que $C_5 = 0$, y por tanto a que $C_3 = 0$. Esto ya supone una contradicción pues el vector $\vec{C}$ debe ser estrictamente positivo. Por otra parte, si $C_3 = 0$ entonces $C_3 + C_4 = C_3$ lo que por la propiedad **1.7** nos lleva a que $\overline{v}(34) = \overline{v}(4)$ lo cual es nuevamente una contradicción dado que $\overline{v}(34) = 2$ y $\overline{v}(4) = 0$.

Capítulo 3

El Conjunto de Negociación

3.1 Introducción

Hasta ahora hemos visto que el Núcleo de un juego financiero es siempre un conjunto no vacío y que, por tanto, siempre existe alguna distribución del beneficio total que satisface las demandas mínimas de cada coalición expresadas por los valores de la función característica en el juego considerado. En principio, el Núcleo parece una solución satisfactoria ya que excluye aquellas situaciones en que alguna coalición podría exigir un pago superior tomando como referencia lo que la coalición podría ganar por ella misma sin la colaboración del resto de jugadores.

Sin embargo podríamos decir que el Núcleo es una solución "estática" dado que no analiza la interacción de los jugadores, la discusión entre ellos para llegar a un acuerdo, sólo toma como referencia unos valores que si bien pueden indicar un punto de partida, no está tan claro que reflejen cuál será el de llegada.

A este respecto cabe destacar el artículo de Michael Maschler "*An Advantage of the Bargaining Set over the Core*" [30] en el que analiza un juego de mercado entre cinco jugadores, dos de ellos son poseedores de una máquina cada uno, y los tres restantes son trabajadores especializados que están capacitados para trabajar con dichas máquinas; las máquinas pueden estar trabajando 16 horas diarias y cada trabajador está dispuesto a trabajar 8 horas diarias. Por cada ocho horas trabajadas se consigue un beneficio, antes de pagar los salarios, de 500\$. Existe pues una disponibilidad total de horas máquina de 32 horas y una disponibilidad total de horas de mano de obra de 24 horas; el beneficio total que se puede conseguir es 1500\$. El problema se centra en distribuir dicho beneficio.

Si $P = \{1, 2\}$ son los propietarios de las máquinas, $Q = \{3, 4, 5\}$ son los trabajadores y $N = P \cup Q$, el mercado se representa como un juego cooperativo (N, v) de utilidad transferible donde la función característica es (expresando su valor en miles de dólares):

$$v(S) = \min_{S \subseteq N}[|S \cap P|, \frac{1}{2}|S \cap Q|]$$

donde $|T|$ denota el número de jugadores de T.

Analizando este juego Maschler señala que el Núcleo de este juego está formado por una única imputación $C(v) = \{(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Sin embargo, dicha distribución no parece en principio del todo satisfactoria dado que no otorga ningún reparto del beneficio a los propietarios de las máquinas cuando son parte muy importante en la consecución de las ganancias y podrían reclamar (objeción) y exigir de los trabajadores una parte del beneficio total sin que los trabajadores puedan defender (contraobjeción) la distribución inicial. De este ejemplo, el autor concluye que el marco de análisis de este juego no se centra en el Núcleo sino en el denominado Conjunto de negociación ("Bargaining Set"); no obstante, su cálculo no es en general un problema sencillo (ver [31])

El Conjunto de negociación, que definiremos más adelante en sus diferentes acepciones, tiene en cuenta las objeciones y contraobjeciones que los jugadores o coaliciones pueden realizar a un determinado reparto; en el ejemplo propuesto y según la definición de Maschler, consistiría en el siguiente conjunto de imputaciones:

$$\{(\alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta) : 0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}, 2\alpha + 3\beta = 1\frac{1}{2}\}$$

Como se puede observar, el Conjunto de negociación asigna la misma cantidad entre propietarios(α) y la misma cantidad entre trabajadores (β), y todos los repartos se hayan entre dos casos extremos: **a**) cuando los trabajadores se reparten todo el beneficio ($\alpha = 0$, coincide con el Núcleo) y **b**) cuando se lo reparten los propietarios ($\alpha = \frac{3}{4}$).

El anterior ejemplo nos plantea la siguiente cuestión: ¿Es el Núcleo el marco en el que se debe analizar un juego financiero, o debemos ampliar nuestro análisis a otro tipo de soluciones? En este capítulo daremos respuesta a dicha cuestión comparando el Núcleo con tres de los diferentes conjuntos de negociación que existen en la literatura[1]. En concreto analizaremos las definiciones dadas por Aumann-Maschler, por Mas-Colell y por Zhou. Las diferencias entre éstas estriban en los conceptos de objeción y contraobjeción que se utilizan. En el presente capítulo demostraremos la

[1]Ver el Capítulo 18 del "Handbook of Game Theory" [3].

coincidencia entre el Núcleo y los dos primeros conjuntos de negociación mencionados anteriormente; respecto al conjunto de Zhou veremos que en general no coincide con el Núcleo.

3.2 El Conjunto de Negociación de Aumann & Maschler

Al discutir sobre un juego cooperativo, en la que todo el mundo es muy libre de cooperar, no está en principio claro que la colaboración entre todos los jugadores se materialice. De hecho puede ser que a ciertos jugadores no les interese una coalición global sino sólo parcial; es entonces cuando surgen las denominadas estructuras de coalición que son las coaliciones que cristalizan fruto de los intereses de los jugadores. Formalmente, una estructura de coalición, que denominaremos $\mathcal{B}$ es una partición del conjunto N. Los pagos a los jugadores ($\vec{x}$) se entienden entonces dentro de las estructuras: los jugadores de una subcoalición $S_k \in \mathcal{B}$ recibirán aquello que la coalición pueda ofrecer (i.e., $x(S_k) \leq v(S_k)$).

De esta manera, y en el sentido de Aumann-Maschler, se pueden definir tantos conjuntos de negociación diferentes como estructuras de coalición se puedan formar; nosotros estudiaremos el conjunto de negociación cuando la coalición total efectivamente se forma; esto no es especialmente restrictivo si pensamos en las características del juego financiero, superaditivo y con núcleo no vacío[2]. Por tanto, dado que todos los jugadores se van a coaligar, la distribución final corresponderá a una preimputación; si a esto añadimos que se exige que los pagos sean individualmente racionales obtendremos que el conjunto de negociación es un subconjunto del conjunto de imputaciones.

Como ya hemos comentado en el ejemplo anterior, la base del conjunto de negociación se haya en las objeciones y contraobjeciones que los jugadores realizan en el proceso de negociación; por ello vamos a definir previamente estos conceptos.

Sea (N, v) un juego con un conjunto de imputaciones $I(v)$ no vacío . Para todo $i, j \in N$ definimos $\Gamma_{ij} = \{S \subset N \,|\, i \in S;\ j \notin S\}$.

Definición 3.1 *Si $\vec{x}$ es una imputación del juego v, entonces una objeción del jugador i contra el jugador j con respecto a la imputación $\vec{x}$ es un par $(T, \vec{y})$ con $S \in \Gamma_{ij}$ y $\vec{y} \in R^{|T|}$ de manera que:*

[2] para una discusión más exhaustiva sobre el tema ver el artículo de Aumann & Drèze [1]

(i) $y_k > x_k$ *para todo* $k \in T$,

(ii) $y(T) = v(T)$.

Definición 3.2 *Si tenemos una imputación* $\vec{x}$ *y una objeción* $(T, \vec{y})$ *de un jugador* i *contra un jugador* j, *entonces* $(M, \vec{z})$ *es una contraobjeción si* $M \in \Gamma_{ji}$ *y* $\vec{z} \in R^{|M|}$ *de manera que:*

(i) $z_k \geq y_k \ \forall k \in M \cap T; z_k \geq x_k \ \forall k \in M \setminus T$,

(ii) $z(M) = v(M)$.

A partir de los dos anteriores conceptos se define el conjunto de negociación:

Definición 3.3 *Aumann & Maschler [4]. Una imputación* $\vec{x} \in I(v)$ *es un elemento del conjunto de negociación* $\mathcal{M}_1^{(i)}(v)$ *si para cada objeción de un jugador* i *contra otro jugador* j *con respecto a* $\vec{x}$ *existe una contraobjeción de* j *contra* i.

Observación 3.4 *De la definición de objeción se desprende que una condición necesaria para realizar una objeción respecto a una distribución* $\vec{x}$ *es que exista una coalición* T *tal que* $v(T) > x(T)$, *o en otros términos que el exceso de la coalición* T *sea estrictamente positivo, i.e.* $e(T, \vec{x}) = v(T) - x(T) > 0$.

Es importante destacar que cualquier imputación perteneciente al Núcleo del juego no presenta ninguna objeción posible; no es posible ejercer ninguna objeción contra ningún elemento del Núcleo dado que los excesos para todas la coaliciones son no negativos (i.e., $v(S) - x(S) \geq 0$*). Por tanto,*

$$C(v) \subseteq \mathcal{M}_1^{(i)}(v) \quad \forall\, v \in G^n.$$

3.2.1 El caso de un juego equilibrado de tres jugadores

En esta sección analizaremos el caso de un juego de tres jugadores cuando el Núcleo es un conjunto no vacío, es decir cuando el juego pertenece a la clase de juegos equilibrados ($\mathcal{B}^3$). El resultado de este análisis será que el conjunto de negociación coincide con el Núcleo. Esta equivalencia ya es conocida pero introducimos su estudio dado que su sencillez facilitará la comprensión de los conceptos de objeción y contraobjeción.

Teorema 3.5 *Sea* $(N, v) \in \mathcal{B}^3$ *con* $N = \{ijk\}$, *entonces*

$$C(v) = \mathcal{M}_1^{(i)}(v).$$

DEM.

Por la observación **3.4**, es suficiente considerar una imputación que no pertenezca al Núcleo y demostrar que tampoco pertenece al conjunto de negociación.

Sea $\vec{x} \in I(v) - C(v)$. Dado que $\vec{x}$ no pertenece a $C(v)$, existe una coalición $\{i, j\}$ tal que $v(ij) > x(ij)$. Por ser un juego equilibrado se derivan entonces dos consecuencias:

- $x_k > v(k)$.
- Existe al menos una coalición S de dos jugadores diferente de $\{i, j\}$, tal que $v(S) < x(S)$. Esta última afirmación se desprende del hecho de que si no fuera cierto se verificaría que
$$\sum_{S \subset N; |S|=2} v(S) > 2 \cdot x(N) = 2 \cdot v(N)$$
siendo una contradicción con la hipótesis de que el juego era equilibrado.

Dependiendo de cuál sea la coalición S, será el jugador i o el jugador j quien presentará una objeción contra el jugador k vía la coalición $\{i, j\}$.

- Si $S = \{j, k\}$ entonces el jugador i presentará una objeción $\vec{y}$ vía $\{i, j\}$:
$$y_i = x_i + \frac{1}{2}[v(ij) - x_i - x_j],$$
$$y_j = x_j + \frac{1}{2}[v(ij) - x_i - x_j].$$
Dicha objeción no tiene contraobjeción ($\vec{z}$) por parte de k dado que se tendría que presentar a través de una coalición de $\Gamma_{ki} = \{k, jk\}$ pero entonces $z_k \geq x_k > v(k)$ o $z_j + z_k \geq y_j + x_k > x_j + x_k > v(jk)$ lo cual invalida cualquier contraobjeción.
- Si $S = \{i, k\}$ la objeción es idéntica a la anterior pero la realiza el jugador j contra el k.

En ambos casos se llega a la conclusión de que es posible presentar una objeción contra el jugador k sin que éste pueda presentar una contraobjeción y por tanto se concluye que dicha imputación no pertenece al conjunto de negociación. □

Corolario 3.6 *Si* $(\{i, j, k\}, v) \in \mathcal{FG}^3 \Rightarrow C(v) = \mathcal{M}_1^{(i)}(v)$.

Dicha conclusión es evidente dado que todo juego financiero es equilibrado.

3.2.2 El caso de un juego financiero de n jugadores

Al igual que en el caso de tres jugadores, es posible demostrar que para los juegos financieros de n jugadores, el conjunto de negociación y el Núcleo coinciden. Dado un **juego financiero** v **respecto al vector** $\vec{C}$, deberemos probar que, considerando una imputación $\vec{x}$ que no pertenezca al Núcleo, se puede formular una objeción contra esta distribución sin que se pueda realizar contraobjeción alguna. En primer lugar seleccionaremos una coalición a través de la cual realizar la objeción: esta coalición, que denominaremos T, debe satisfacer las dos condiciones siguientes:

(a)

$$v(T) - x(T) \geq v(S) - x(S) \;\; \forall\, S \subset N. \tag{3.1}$$

Nótese que si $\vec{x} \notin C(v)$ entonces $v(T) - x(T) > 0$.

(b)

$$\text{Si} \;\; v(T) - x(T) = v(S) - x(S) \;\; \text{entonces} \;\; |T| \geq |S|. \tag{3.2}$$

Por tanto, debemos seleccionar una coalición de máximo exceso[3] (3.1) y, de entre éstas, de máxima cardinalidad (3.2).

Una vez fijada la coalición, seleccionaremos el jugador $\hat{\imath}$ que realizará la objeción. Este jugador cumple los siguientes requisitos:

$$\hat{\imath} \in T \;\text{ y }\; \frac{x_{\hat{\imath}}}{C_{\hat{\imath}}} \leq \frac{x_j}{C_j} \;\; \forall\, j \in T; \tag{3.3}$$

por tanto, el jugador $\hat{\imath}$ es aquel perteneciente a T con el menor pago medio[4].

El jugador, que denominaremos $\hat{\jmath}$, al cual va dirigida la objeción será cualquiera que no pertenezca a T, i.e. $\hat{\jmath} \in N \setminus T$.

Esta particular elección de la coalición y los jugadores involucrados en la negociación propicia que se verifiquen dos propiedades que posteriormente nos serán de gran utilidad.

Propiedad 3.7 *Sea $M \in \Gamma_{\hat{\jmath}\hat{\imath}}$, entonces*

$$\sum_{i \in M \setminus T} C_i \cdot \mathbf{f}_M < \sum_{i \in M \setminus T} x_i$$

[3]El exceso de una coalición S respecto a una distribución se define como $v(S) - x(S)$.

[4]Obsérvese que el pago a un jugador en un juego financiero se puede interpretar en términos unitarios (pago medio) respecto a los recursos aportados por el jugador, i.e. $\frac{x_i}{C_i}$.

donde $\mathbf{f}_M = \frac{v(M)}{\sum_{i \in M} C_i}$.

DEM.

Supongamos que $\sum_{i \in M \setminus T} C_i \cdot \mathbf{f}_M \geq \sum_{i \in M \setminus T} x_i$; entonces

$$
\begin{aligned}
v(T) - x(T) &\leq [v(T) - x(T)] + [\textstyle\sum_{i \in M \setminus T} C_i \cdot \mathbf{f}_M - \sum_{i \in M \setminus T} x_i] \leq \\
&\leq [\textstyle\sum_{i \in T} C_i \cdot \mathbf{f}_{M \cup T} - \sum_{i \in T} x_i] + [\sum_{i \in M \setminus T} C_i \cdot \mathbf{f}_{M \cup T} - \sum_{i \in M \setminus T} x_i] = \\
&= v(M \cup T) - x(M \cup T).
\end{aligned}
$$

Dado que $M \in \Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$ se cumple que $M \setminus T \neq \emptyset$ y entonces $|T| < |T \cup M|$ lo cual supone una contradicción con (3.2). □

Propiedad 3.8 $v(T) - x(T) > v(M) - x(M) \quad \forall M \in \Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$.

DEM.

Teniendo en cuenta (3.1) sólo tenemos que demostrar que $\forall\, M \in \Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$, $v(T) - x(T) \neq v(M) - x(M)$. Supongamos que existiera una coalición $M \in \Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$ tal que $v(T) - x(T) = v(M) - x(M) >$ [5]0; entonces, existiría un jugador $k \in T \cap M$ tal que $\frac{x_k}{C_k} < \mathbf{f}_M$. En efecto, si $\forall i \in T \cap M$ se cumpliera que $x_i \geq C_i \cdot \mathbf{f}_M$, sumando las anteriores desigualdades para todos los jugadores de $T \cap M$ obtendríamos que $\sum_{i \in T \cap M} x_i \geq (\sum_{i \in T \cap M} C_i) \cdot \mathbf{f}_M$. De aquí, y dado que por la propiedad **3.7** $\sum_{i \in M \setminus T} x_i > \sum_{i \in M \setminus T} C_i \cdot \mathbf{f}_M$, se deduciría que $\sum_{i \in M} x_i > \sum_{i \in M} C_i \cdot \mathbf{f}_M = v(M)$. Ello implicaría que $v(M) - x(M) < 0$ lo cual es una contradicción con la hipótesis de partida.

Dado que existe pues un jugador $k \in T \cap M$ tal que $x_k < C_k \cdot \mathbf{f}_M$, por la elección particular del jugador $\hat{i}$ se cumplirá que $x_{\hat{i}} < C_{\hat{i}} \cdot \mathbf{f}_M$. De aquí se deduce que

$$
\begin{aligned}
v(T) - x(T) &< v(T) - x(T) + C_{\hat{i}} \cdot \mathbf{f}_M - x_{\hat{i}} = v(M) - x(M) + C_{\hat{i}} \cdot \mathbf{f}_M - x_{\hat{i}} \leq \\
&\leq v(M \cup \hat{i}) - x(M \cup \{\hat{i}\})
\end{aligned}
$$

lo que contradice que T sea la coalición de máximo exceso. □

Hasta ahora sólo conocemos qué jugadores ($\hat{i}$ contra $\hat{j}$) y qué coalición (T) se utilizarán en la objeción pero no conocemos cual es el pago que recibirán los jugadores. La idea principal de la demostración de la coincidencia entre el Núcleo y el conjunto

[5] Recuérdese que $v(T) - x(T) > 0$ al no ser $\vec{x}$ una distribución del Núcleo.

de negociación es que hemos de hacer una objeción de manera que se evite cualquier posible contraobjeción. Según la definición de contraobjeción ello sucederá cuando

$$\sum_{i\in M\cap T} y_i + \sum_{i\in M\setminus T} x_i > v(M) \quad \forall M \in \Gamma_{ji}$$

donde los valores y_i representan los pagos recibidos por los jugadores de T en la objeción. La anterior condición implica que los valores de y_i se han de fijar de manera que sea imposible contraobjetar a través de una coalición M donde estén presentes jugadores de T. Si en la coalición M no existe ningún jugador de T habremos de verificar que inicialmente el exceso de esta coalición era negativo ($v(S) - x(S) < 0$) y que por tanto era imposible utilizar dicha coalición para una contraobjeción.

Antes de demostrar el principal Teorema de este apartado enunciaremos una proposición que nos será de gran utilidad para nuestro propósito; dicha proposición nos indica la relación entre el juego reducido, tal y como lo definíamos en el capítulo anterior[6], y el juego original cuando tenemos un vector $\vec{s}$ que no es eficiente en el juego reducido pero que verifica todas las restricciones referentes a su Núcleo, i.e. $\sum_{i\in S} s_i \geq v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(S)\; \forall S \subseteq N\setminus j$.

Proposición 3.9 *Sea (N,v) un juego cooperativo, $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ con $x_j \geq v(j)$ y*

$$\vec{s} = (s_1 \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_n) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

entonces

$$si \sum_{i\in T} s_i \geq v_{\vec{x}}^{N-j}(T) \;\; \forall\, T \subseteq N\setminus j \;\; \Rightarrow \sum_{i\in S\setminus j} s_i + \sum_{i\in S\cap\{j\}} x_i \geq v(S) \;\; \forall\, S \subseteq N.$$

DEM.

i) Si $j \notin S$,

$$v(S) \leq v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(S) \leq \sum_{i\in S} s_i.$$

ii) Si $j \in S$, entonces $S = T \cup \{j\}$ para algún $T \subseteq N\setminus j$ y

$$\begin{aligned} v(S) &\leq \max\{v(T)+x_j, v(T\cup j)\} = \max\{v(T), v(T\cup j)-x_j\} + x_j = \\ &= v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T) + x_j \leq \textstyle\sum_{i\in T} s_i + x_j \end{aligned}$$

---

6 $v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(\emptyset) = 0$,
$v_{\vec{x}}^{N\setminus j}(T) = \max\{v(T); v(T\cup j) - x_j\} \quad T \subseteq N\setminus j$.

Nótese que en el apartado (ii) y para el caso $S = \{j\}$ tenemos que $T = \emptyset$; sin embargo, la deducción realizada sigue siendo correcta dado que suponíamos que $x_j \geq v(j)$. □

Esta proposición nos indica que, dado un vector $(\vec{s})$ que verifique las restricciones del Núcleo en el juego reducido, si completamos dicho vector con la componente x_j utilizada en la reducción, el nuevo vector verificará las restricciones del Núcleo en el juego original. Obsérvese que no exigimos ni que el vector $\vec{s}$ sea eficiente en el juego reducido ni que el vector completado lo sea en el juego original. La implicación planteada en la proposición supone deshacer el proceso realizado para el cálculo del juego reducido; por ello, cuando apliquemos esta proposición, nos referiremos a ella como el proceso de "desreducción". Finalmente demostraremos el Teorema principal de este apartado.

Teorema 3.10 *Sea (N, v) un juego financiero respecto a $\vec{C}$, entonces*

$$C(v) = \mathcal{M}_1^{(i)}(v).$$

DEM.

Sea $\vec{x} \in I(v) - C(v)$ y T una coalición que verifica las condiciones (3.1) y (3.2). Sean $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ los jugadores seleccionados tal y como hemos descrito anteriormente.

Si el jugador $\hat{\imath}$ realiza una objeción contra el jugador $\hat{\jmath}$ utilizando la coalición T, el jugador $\hat{\jmath}$ no podrá contraobjetar utilizando una coalición $M \in \Gamma_{\hat{\jmath}\hat{\imath}}$ tal que $M \cap T = \emptyset$ dado que por la propiedad **3.7** tendríamos que $\sum_{i \in M} C_i \cdot \mathbf{f}_M < \sum_{i \in M} x_i$ y por tanto $v(M) < \sum_{i \in M} x_i$ lo cual, por definición, imposibilitaría una contraobjeción.

Por tanto sólo nos habremos de preocupar sobre posibles contraobjeciones realizadas utilizando coaliciones $M \in \Gamma_{\hat{\jmath}\hat{\imath}}$ tales que $M \cap T \neq \emptyset$. Estas coaliciones tienen la siguiente estructura:

$$M = S \cup R \cup \{\hat{\jmath}\} \text{ donde } S \subseteq T \setminus \hat{\imath}; \;\; R \subseteq N \setminus (T \cup \{\hat{\jmath}\}),$$

es decir, la coalición M resulta de la unión de algunos jugadores que están en T (jugadores de S) con algunos jugadores que están fuera de T, incluyendo siempre al jugador $\{\hat{\jmath}\}$ $(R \cup \{\hat{\jmath}\})$. Vamos a estudiar la manera de realizar una correcta objeción para evitar contraobjeciones que provengan de estas coaliciones.

Sea R una coalición tal que $\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus (T \cup \{\hat{\jmath}\})$; entonces , podemos definir para cada R un nuevo juego $(T \setminus \{\hat{\imath}\}, w_R)$ donde

$$\begin{aligned} w_R(\emptyset) &= 0, \\ w_R(S) &= v(S \cup R \cup \{\hat{\jmath}\}) - \textstyle\sum_{i \in R \cup \{\hat{\jmath}\}} x_i \quad \forall S \subseteq T \setminus \{\hat{\imath}\}. \end{aligned}$$

Es importante remarcar que el juego w_R no es financiero dado que no podemos estar seguros de la positividad de los valores de la función característica. Sin embargo, si que podemos asegurar que pertenecen a la clase de juegos de valores medios crecientes[7] respecto al vector $\vec{C}$: esto se deduce de la aplicación del Lema **2.20** tomando $P = R \cup \{\hat{\jmath}\}$, $N^* = T \setminus \{\hat{\imath}\}$ y verificando que $\sum_{i \in R \cup \{\hat{\jmath}\}} C_i \cdot \frac{v((T\setminus\{\hat{\imath}\}) \cup R \cup \{\hat{\jmath}\})}{\sum_{i \in (T\setminus\{\hat{\imath}\}) \cup R \cup \{\hat{\jmath}\}} C_i} < \sum_{i \in R \cup \{\hat{\jmath}\}} x_i$; esta última desigualdad se deriva de la aplicación de la propiedad **3.7**[8].

Obsérvese que todos los juegos $(T \setminus \{\hat{\imath}\}, w_R)$ están definidos sobre el mismo conjunto de jugadores $T \setminus \{\hat{\imath}\}$ que es siempre no vacío[9]; por tanto es posible definir el juego máximo $(T \setminus \{\hat{\imath}\}, u)$ donde su función característica es:

$$u(S) = \max_{\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus (T \cup \{\{\hat{\jmath}\}\})} w_R.$$

Este juego también es de valores medios crecientes respecto al mismo vector dado que es el máximo de una serie de juegos crecientes respecto a un mismo vector (Propiedad **2.18**). Tomando la notación $\mathbf{f^0}_S = \frac{u(S)}{\sum_{i \in S} C_i}$, tenemos que

$$u(S) = \sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{f^0}_S \;\; \forall S \subseteq T \setminus (\{\hat{\imath}\})$$

donde si $\sum_{i \in S_1} C_i \leq \sum_{i \in S_2} C_i \Rightarrow \mathbf{f^0}_{S_1} \leq \mathbf{f^0}_{S_2} \quad S_1, S_2 \subseteq T \setminus \{\hat{\imath}\}$.
En este instante nos podemos encontrar con tres situaciones diferentes:

(a) $|T \setminus \{\hat{\imath}\}| \geq 1$ pero $x_k < \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{\imath}\}} \cdot C_k \;\; \forall k \in T \setminus \{\hat{\imath}\}$.

(b) $|T \setminus \{\hat{\imath}\}| = 1$ pero $x_{k^*} \geq \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{\imath}\}} \cdot C_{k^*}$ donde $T \setminus \{\hat{\imath}\} = \{k^*\}$.

(c) $|T \setminus \{\hat{\imath}\}| > 1$ pero existe al menos un jugador $k_1 \in T \setminus \{\hat{\imath}\}$ tal que $x_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{\imath}\}} \cdot C_{k_1}$.

A continuación, para cada caso formularemos una objeción que no tendrá contraobjeción posible:

(a) $|T \setminus \{\hat{\imath}\}| \geq 1$ pero $x_k < \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{\imath}\}} \cdot C_k \;\; \forall k \in T \setminus \{\hat{\imath}\}$. A partir de aquí definimos el juego $\overline{u}$ como

$$\overline{u}(S) = u(S) - x(S) \quad \forall S \subseteq T \setminus \{\hat{\imath}\}.$$

[7]Ver la definición **2.17** , página 100.
[8]Tómese en la propiedad **3.7** $M = T \setminus \hat{\imath} \cup R \cup \hat{\jmath}$.
[9]Nótese que $|T| \geq 2$.

Dicho juego tiene el Núcleo no vacío: por ejemplo, la distribución $\vec{t}$ definida como

$$t_i = \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}} \cdot C_i - x_i \quad \forall i \in T \setminus \{\hat{i}\}$$

pertenece al Núcleo. En efecto,

(i) $\sum_{i\in T\setminus\{\hat{i}\}} t_i = \sum_{i\in T\setminus\{\hat{i}\}}(\mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}}\cdot C_i - x_i) = \sum_{i\in T\setminus\{\hat{i}\}} \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}}\cdot C_i - \sum_{i\in T\setminus\{\hat{i}\}} x_i = u(T \setminus \{\hat{i}\}) - x(T \setminus \{\hat{i}\})$;

(ii) $\sum_{i\in S} t_i = \sum_{i\in S}(\mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}} \cdot C_i - x_i) \geq^{10} \sum_{i\in S}(\mathbf{f^0}_S \cdot C_i - x_i) = u(S) - x(S)$ $\forall S \subset T \setminus \hat{i}$.

Obsérvese que, dado que $x_k < \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}} \cdot C_k \quad \forall k \in T \setminus \{\hat{i}\}$, se cumple que $t_i > 0\, \forall i \in T \setminus \{\hat{i}\}$. Por otro lado

$$\overline{u}(T\setminus\{\hat{i}\}) = u(T\setminus\{\hat{i}\})-x(T\setminus\{\hat{i}\}) = \max_{\emptyset\subseteq R\subseteq N\setminus(T\cup\{\hat{j}\})} w_R(T\setminus\{\hat{i}\}) - x(T\setminus\{\hat{i}\}) =$$

(suponiendo que dicho máximo se alcanza para una coalición $\overline{R}$)

$$= w_{\overline{R}}(T \setminus \{\hat{i}\}) - x(T \setminus \{\hat{i}\}) = v((T \setminus \{\hat{i}\}) \cup \overline{R} \cup \{\hat{j}\}) - x((T \setminus \{\hat{i}\}) \cup \overline{R} \cup \{\hat{j}\})$$

donde $(T \setminus \{\hat{i}\}) \cup \overline{R} \cup \{\hat{j}\} \in \Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$

Teniendo en cuenta esto, el jugador $\hat{i}$ podrá formular una objeción $(T, \vec{y})$ contra el jugador $\hat{j}$ donde

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + t_i + \tfrac{\alpha}{|T|} \quad i \in T \setminus \{\hat{i}\} \\ y_{\hat{i}} &= x_{\hat{i}} + \tfrac{\alpha}{|T|} \end{aligned}$$

siendo $\alpha = [v(T) - x(T)] - [v((T \setminus \{\hat{i}\}) \cup \overline{R} \cup \{\hat{j}\}) - x((T \setminus \{\hat{i}\}) \cup \overline{R} \cup \{\hat{j}\})]$; nótese que la propiedad **3.8** nos garantiza que $\alpha > 0$.

Esta objeción no tiene contraobjeción posible por parte de $\{\hat{j}\}$: supongamos que el jugador $\hat{j}$ formula una contraobjeción $(M, \vec{z})$ respecto a $(T, \vec{y})$; dado que la coalición M tiene la estructura

$$M = S \cup R \cup \{\hat{j}\} \text{ donde } \emptyset \neq S \subseteq T \setminus \{\hat{i}\};\ R \subseteq N \setminus (T \cup \{\hat{j}\})$$

se verifica que

[10] Dado que $\mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}} \geq \mathbf{f^0}_S \quad \forall S \subset T \setminus \hat{i}$.

$$\sum_{i\in M} z_i = \sum_{i\in S\cup R\cup\{\hat{j}\}} z_i \geq^{11} \sum_{i\in S} y_i + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i >^{12} \sum_{i\in S}(x_i+t_i) + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i =$$

$$= \sum_{i\in S}(x_i + \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}}\cdot C_i - x_i) + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i \geq \sum_{i\in S}(\mathbf{f^0}_S\cdot C_i) + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i =$$

$$= u(S) + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i = \max_{\emptyset\subseteq Q\subseteq N\setminus(T\cup\{\hat{j}\})} w_Q(S) + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i \geq$$

$$\geq \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i + v(S\cup R\cup\{\hat{j}\}) - \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i = v(S\cup R\cup\{\hat{j}\}) = v(M).$$

Esto supone una contradicción dado que una de las dos condiciones para que una contraobjeción sea válida es que $\sum_{i\in M} z_i = v(M)$. Por tanto, concluimos que en este caso no existe contraobjeción posible.

(b) $|T\setminus\{\hat{i}\}| = 1$ pero $x_{k^*} \geq \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}}\cdot C_{k^*} = u(k^*)$ donde $T\setminus\{\hat{i}\} = \{k^*\}$. Teniendo en cuenta la hipótesis de partida se cumple que

$$x_{k^*} \geq u(k^*) = \max_{\emptyset\subseteq Q\subseteq N\setminus(T\cup\{\hat{j}\})} w_Q(k^*) \geq v(\{k^*\}\cup R\cup\{\hat{j}\}) - x(R\cup\{\hat{j}\})$$

$\forall R; \emptyset \subseteq R \subseteq N\setminus(T\cup\{\hat{j}\})$. En otros términos esto equivale a

$$x(\{k^*\}\cup R\cup\{\hat{j}\}) \geq v(\{k^*\}\cup R\cup\{\hat{j}\}) \quad \forall R;\ \emptyset\subseteq R\subseteq N\setminus(T\cup\{\hat{j}\}) \tag{3.4}$$

Por (3.4), el jugador $\hat{i}$ podrá formular una objeción $(T,\vec{y})$ contra el jugador $\hat{j}$ donde

$$y_{k^*} = x_{k^*} + \tfrac{\alpha}{2},$$
$$y_{\hat{i}} = x_{\hat{i}} + \tfrac{\alpha}{2}$$

siendo $\alpha = v(T) - x(T) > 0$

Esta objeción no tendrá contraobjeción posible por parte de $\hat{j}$: supongamos que el jugador $\hat{j}$ formulase una contraobjeción $(M,\vec{z})$ respecto a $(T,\vec{y})$; dado que la coalición M tiene la estructura

$$M = S\cup R\cup\{\hat{j}\} \text{ donde } \emptyset \neq S\subseteq T\setminus\{\hat{i}\};\ \emptyset\subseteq R\subseteq N\setminus(T\cup\{\hat{j}\})$$

[11]Por definición de contraobjeción.

[12]Dado que $y_i = x_i + t_i + \frac{\alpha}{|T|}$ siendo $\alpha > 0$.

se cumpliría que

$$\sum_{i\in M} z_i = \sum_{i\in\{k^*\}\cup R\cup\{\hat{j}\}} z_i = z_{k^*} + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} z_i \geq y_{k^*} + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i >$$

$$> x_{k^*} + \sum_{i\in R\cup\{\hat{j}\}} x_i \geq^{13} v(S) \cup R \cup \{\hat{j}\}) = v(M).$$

Igual que en el caso anterior, esto supondría una contradicción con la exigencia de que $\sum_{i\in M} z_i = v(M)$. Por tanto, concluímos que en este caso tampoco existe contraobjeción posible.

(c) $|T \setminus \{\hat{i}\}| > 1$ pero existe al menos un jugador $k_1 \in T \setminus \{\hat{i}\}$ tal que $x_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}} \cdot C_{k_1}$.

Partiendo del vector $x^{T\setminus\{\hat{i}\}} \in \mathbf{R}^{|T\setminus\{\hat{i}\}|}$ con $x_i^{T\setminus\{\hat{i}\}} = x_i \; \forall i \in T\setminus\{\hat{i}\}$, y dado que existe un jugador $k_1 \in T\setminus\{\hat{i}\}$ tal que $x_{k_1} \geq C_{k_1} \cdot \mathbf{f^0}_{T\setminus\{\hat{i}\}}$ reducimos (aplicando la definición **2.14**) el juego eliminando este jugador y obteniendo un nuevo juego $u_{x^{T\setminus\{\hat{i}\}}}^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})}$ que también es de valores medios crecientes (Teorema **2.21**) donde

$$u_{x^{T\setminus\{\hat{i}\}}}^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})}(S) = \sum_{i\in S} C_i \cdot \mathbf{f^1}_S \;\; \forall S \subseteq T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})$$

Si en el juego reducido encontramos un jugador k_2 que verifica $x_{k_2} \geq C_{k_2} \cdot \mathbf{f^1}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})}$ podemos reducir el juego nuevamente obteniendo un nuevo juego[14] $u_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})}}^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1,k_2\})}$. De esta manera podríamos continuar hasta que obtuvieramos el juego reducido $u_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}$ siendo $P^m = \{k_1,\ldots,k_m\} \subset T\setminus\{\hat{i}\}$ el conjunto de jugadores eliminados del juego original en m pasos tal que, o bien $x_k < C_k \cdot \mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} \;\; \forall\, k \in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)$, o $T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)$ contiene un sólo elemento $\{k^*\}$ pero $x_{k^*} \geq C_{k^*} \cdot \mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}$.

Dependiendo de cuál haya sido el final de las anteriores iteraciones procederemos de una manera u de otra. Consideraremos los dos casos posibles:

[13] por (3.4).

[14] Este nuevo juego supone la reducción de un juego que ya era reducido. Para este juego la correcta notación sería $\left(u_{x^{T\setminus\{\hat{i}\}}}^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})}\right)_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})}}^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1,k_2\})}$. Nosotros utilizaremos una notación más sencilla, $u_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1\})}}^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup\{k_1,k_2\})}$.

(c1) $T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)$ contiene un sólo elemento ($\{k^*\}$) pero

$$x_{k^*} \geq \mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} \cdot C_{k^*} = u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}(k^*).$$

Nótese que las sucesivas reducciones realizadas partían en cada caso de la siguiente hipótesis:

$$x_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_{T\setminus\hat{i}} \cdot C_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_{k1} \cdot C_{k_1} = u(k_1)$$

para el primer jugador reducido k_1 y

$$x_{k_j} \geq \mathbf{f^{j-1}}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{j-1})} \cdot C_{k_j} \geq {}^{15}\mathbf{f^{j-1}}_{k_j} \cdot C_{k_j} = u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{j-1})}_{\vec{x}^{T\setminus\{\hat{i}\}(P^{j-2})}}(k_j)$$

$j = 2, \ldots, m \quad P^0 = \emptyset$ para los jugadores reducidos sucesivamente.

Estas mismas desigualdades nos permitirán aplicar reiteradamente el proceso de desreducción (proposición **3.9**) a los juegos

$$u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}},\ u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}}, \ldots, u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^1)}_{x^{T\setminus\{\hat{i}\}}}$$

partiendo de $\vec{s} = (x_{k^*}) \in \mathbf{R}$. De esta manera obtendremos que

$$u(S) \leq x^{T\setminus\{\hat{i}\}}(S) \quad \forall S \subseteq T \setminus \{\hat{i}\}$$

Entonces, dado que el juego u es el máximo de los juegos w_R, tendremos que para todo R; $\emptyset \subseteq R \subseteq N\setminus(T \cup \{\hat{j}\})$

$$w_R(S) \leq x^{T\setminus\{\hat{i}\}}(S) \quad \forall S \subseteq T \setminus \{\hat{i}\}$$

y por tanto,

$$v(S \cup R \cup \{\hat{j}\}) \leq x(S \cup R \cup \{\hat{j}\}) \tag{3.5}$$

$\forall S \subseteq T \setminus \{\hat{i}\}$ y $\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus (T \cup \{\hat{j}\})$.

Finalmente podremos formular la objeción $\vec{y} \in \mathbf{R}^{|T|}$ utilizando la coalición T:

$$y_i = x_i + \frac{\alpha}{|T|} \forall i \in T$$

[15]Cada juego reducido es un juego de valores medios crecientes y, por tanto, $\mathbf{f^{j-1}}_S \geq \mathbf{f^{j-1}}_i \, \forall i \in S$.

donde $\alpha = v(T) - x(T) > 0$.

Si el jugador $\hat{j}$ hiciera una contraobjeción $\vec{z}$, lo haría a través de una coalición $M = S \cup R \cup \{\hat{j}\}$ con $S \neq \emptyset$ (es decir, con intersección no vacia con T) perteneciente a $\Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$, pero ello es imposible dado que por (3.5)

$$\sum_{i \in M} z_i \geq \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in R \cup \{\hat{j}\}} z_i > \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in R \cup \{\hat{j}\}} x_i \geq v(S \cup R \cup \{\hat{j}\}) = v(M).$$

(c2) $T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)$ contiene al menos un elemento pero

$$x_k < \mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} \cdot C_k \ \ \forall\, k \in T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m). \tag{3.6}$$

Entonces, definimos el juego $(\overline{u}, T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m))$ como

$$\overline{u}(S) = \begin{cases} u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}(S) - x(S) & \text{si } u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}(S) - x(S) \geq 0 \\ 0 & \text{si } u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}(S) - x(S) < 0 \end{cases}$$

$S \subseteq T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)$.

Dado que $x_k < C_k \cdot \mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}$ $\forall k \in T \setminus \{\hat{i}\} \cup P^m$, sumando estas desigualdades se verifica que

$$\overline{u}(T \setminus \{\hat{i}\} \cup P^m) = u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)) - x(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m) > 0$$

Es fácil demostrar que para el juego $\overline{u}$ siempre existirá al menos una imputación $(t_i)_{i \in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}$ con todas sus componentes positivas y que pertenecerá al Núcleo del juego. Considérese el siguiente vector $\vec{t}$:

$$t_k = \mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} \cdot C_k - x_k \ \ \forall\, k \in T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m).$$

Por (3.6) se cumplirá que $t_k > 0$ $\forall k \in T\setminus(\{\hat{i}\} \cup P^m)$. Además podemos comprobar que pertenece al Núcleo. Sea $S \subset T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)$, entonces

$$\sum_{k \in S} t_k = \sum_{k \in S} \left(\mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} \cdot C_k - x_k\right) =^{16}$$

$$= \max\{0, \sum_{k \in S} \left(\mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} \cdot C_k - x_k\right) \geq^{17}$$

[16] Por (3.6).

[17] Dado que el juego $u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}$ es de valores medios crecientes se cumplirá que $\mathbf{f^m}_{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} \geq \mathbf{f^m}_S$ $\forall S \subset T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)$.

$$\geq \max\{0, \sum_{k \in S} (\mathbf{f^m}_S \cdot C_k - x_k)\} = \overline{u}(S)$$

Por tanto el juego es equilibrado y podemos afirmar que existe un vector $\vec{t} \in C(\overline{u})$ tal que $t_i \geq 0 \ \forall i \in T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)$. Además por la definición del juego $\overline{u}$ deducimos que, para toda coalición S perteneciente a $T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)$ tenemos que

$$u^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)}_{x^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{m-1})}}(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq \sum_{i \in S} t_i \Rightarrow$$

$$u^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)}_{x^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{m-1})}}(S) \leq \sum_{i \in S} (x_i + t_i) \quad \forall S \subseteq T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m) \tag{3.7}$$

Tomando $s_i = x_i + t_i$ y partiendo de la desigualdad (3.7), el proceso de desreducción [18] (proposición **3.9**) aplicado reiteradamente a los juegos

$$u^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{m-1})}_{x^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{m-2})}}, \ u^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{m-2})}_{x^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{m-3})}}, \ldots, u^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{1})}_{x^{T \backslash \{\hat{i}\}}}$$

nos conduce a que

$$u(S) \leq \sum_{i \in [T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cap S} (x_i + t_i) + \sum_{i \in P^m \cap S} x_i \quad \forall S \subseteq T \backslash \{\hat{i}\}$$

y por tanto, por la definición de u y w_R tenemos que

$$v(S \cup R \cup \{\hat{j}\}) \leq \sum_{i \in [T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cap S} (x_i + t_i) + \sum_{i \in (P^m \cap S) \cup (R \cup \{\hat{j}\})} x_i \tag{3.8}$$

$\forall R \subseteq N \setminus (T \cup \{\hat{j}\})$ y $\forall S \subseteq T \setminus \{\hat{i}\}$.

Podemos entonces formular de nuevo la objeción $\vec{y} \in \mathbf{R}^{|T|}$ utilizando la coalición T.

Antes de esto, obsérvese que $\sum_{i \in T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)} t_i = \overline{u}(T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m))$. En el apéndice de este capítulo (ver pág 166) se demuestra que

$$\overline{u}(T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)) = v(S^*) - x(S^*) \text{ para algún } S^* \in \Gamma_{\hat{j}\hat{i}}.$$

[18]Nótese que en cada paso de la desreducción el valor x_{k_j} cumple que

$$x_{k_j} \geq \mathbf{f^{j-1}}_{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{j-1})} \cdot C_{k_j} = \begin{cases} u(k_1) & j = 1 \\ u^{T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^{j-1})}_{\vec{x}^{T \backslash \{\hat{i}\} (P^{j-2})}}(k_j) & j = 2, \ldots, m \quad P^0 = \emptyset \end{cases}$$

ya que ha sido el criterio para reducir el juego.

Aplicando la propiedad **3.8** , $\alpha = [v(T) - x(T)] - [v(S^*) - x(S^*)] > 0$. Entonces, la objeción será la siguiente:

$$y_i := \begin{cases} x_i + \frac{\alpha}{|T|} & i \in \{\hat{i}\} \cup P^m, \\ x_i + \frac{\alpha}{|T|} + t_i & i \in T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m). \end{cases}$$

Obviamente $\sum_{i \in T} y_i = v(T)$. Si el jugador $\hat{j}$ hiciera una contraobjeción $\vec{z}$, la debería hacer vía una coalición $M = S \cup R \cup \{\hat{j}\}$ $(S \neq \emptyset)$ perteneciente a $\Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$, pero ello es imposible dado que

$$\sum_{i \in M} z_i \geq \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in R \cup \{\hat{j}\}} x_i \geq \sum_{i \in [T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cap S} y_i + \sum_{i \in (P^m \cap S)} y_i + \sum_{i \in R \cup \{\hat{j}\}} x_i.$$

Sustituyendo el valor de la objeción y aplicando (3.8) tenemos que

$$\sum_{i \in M} z_i > \sum_{i \in [T \backslash (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cap S} (x_i + t_i) + \sum_{i \in (P^m \cap S)} x_i + \sum_{i \in R \cup \{\hat{j}\}} x_i \geq v(S \cup R \cup \{\hat{j}\}).$$

lo que invalida la contraobjeción.

Dado que en todos los casos analizados es posible realizar una objeción válida (sin contraobjeciones posibles) concluiremos que el Núcleo equivale al conjunto de negociación. □

Para una mejor comprensión, aplicaremos el anterior Teorema a un ejemplo; el juego considerado tendrá seis jugadores. Ello obedece a un doble motivo: en primer lugar, a que no hemos encontrado un juego con menos jugadores donde la objeción no fuera trivial como la del caso **(c1)** de la demostración; en segundo lugar porque en un juego de bastantes jugadores se puede observar mejor el proceso de reducción utilizado en la demostración.

Ejemplo 3.11 *Supongamos un juego financiero de seis jugadores respecto al vector*

$$\vec{C} = (100,\ 200,\ 300,\ 400,\ 500,\ 600)$$

siendo $f(x) = x \cdot [1 + i(x)]$ *y*

$$i(x) = \begin{cases} 0.1 & 0 < x \leq 650 \\ 0.11 & 650 < x \leq 850 \\ 0.115 & 850 < x \leq 2050 \\ 0.12 & x < 2050 \end{cases}$$

Consideremos ahora la siguiente imputación

$$\vec{x} = (111,\ 223,\ 336,\ 444,\ 555,\ 683)$$

La siguiente tabla nos muestra los valores de la función característica y los excesos de cada coalición ($v(S) - x(S)$).

S	C(S)	v(S)	x(S)	e(S,$\vec{x}$)	S	C(S)	v(S)	x(S)	e(S,$\vec{x}$)
$\emptyset$	0	0	0	0	**34**	700	777	780	**-3**
1	100	110	111	-1	**35**	800	888	891	**-3**
2	200	220	223	-3	**36**	900	1003.5	1018	**-15.5**
3	300	330	336	**-6**	**45**	900	1003.5	999	4.5
4	400	440	444	-4	**46**	1000	1115	1127	-12
5	500	550	555	-5	**56**	1100	1226.5	1238	-11.5
6	600	660	683	-23	**123**	600	660	670	-10
12	300	330	334	-4	**124**	700	777	778	-1
13	400	440	447	-7	**125**	800	888	889	-1
14	500	550	555	-5	**126**	900	1003.5	1017	-13.5
15	600	660	666	-6	**134**	800	888	891	-3
16	700	777	794	-17	**135**	900	1003.5	1002	1.5
23	500	550	559	**-9**	**136**	1000	1115	1130	-15
24	600	660	667	-7	**145**	1000	1115	1110	$\boxed{\mathbf{5}}$
25	700	777	778	-1	**146**	1100	1226.5	1238	-11.5
26	800	888	906	-18	**156**	1200	1338	1349	-11

S	C(S)	v(S)	x(S)	e(S,$\vec{x}$)	S	C(S)	v(S)	x(S)	e(S,$\vec{x}$)
234	900	1003.5	1003	**0.5**	**1345**	1300	1449.5	1446	3.5
235	1000	1115	1114	**1**	**1346**	1400	1561	1574	-13
236	1100	1226.5	1242	**-15.5**	**1356**	1500	1672.5	1685	-12.5
245	1100	1226.5	1222	4.5	**1456**	1600	1784	1793	-9
246	1200	1338	1350	-12	**2345**	1400	1561	1558	**3**
256	1300	1449.5	1461	-11.5	**2346**	1500	1672.5	1686	**-13.5**
345	1200	1338	1335	**3**	**2356**	1600	1784	1797	**-13**
346	1300	1449.5	1463	**-13.5**	**2456**	1700	1895.5	1905	-9.5
356	1400	1561	1574	**-13**	**3456**	1800	2007	2018	**-11**
456	1500	1672.5	1682	-9.5	**12345**	1500	1672.5	1669	3.5
1234	1000	1115	1114	1	**12346**	1600	1784	1797	-13
1235	1100	1226.5	1225	1.5	**12356**	1700	1895.5	1908	-12.5
1236	1200	1338	1353	-15	**12456**	1800	2007	2016	-9
1245	1200	1338	1333	$\boxed{\mathbf{5}}$	**13456**	1900	2118.5	2129	-10.5
1246	1300	1449.5	1461	-11.5	**23456**	2000	2230	2241	**-11**
1256	1400	1561	1572	-11	**123456**	2100	2352	2352	0

Obsérvese que la imputación propuesta no pertenece al Núcleo dado que existen excesos positivos para algunas coaliciones. Vamos a formular pues una objeción que no tenga contraobjeción alguna.

Observando la Tabla, vemos que las coaliciones con máximo exceso son la $\{145\}$ y la $\{1245\}$; según el criterio que hemos dado, seleccionaremos la coalición $\{1245\}$ dado que es la que tiene mayor número de jugadores, y la identificaremos con la coalición T a través de la cual realizaremos la objeción. Se puede verificar que todas las coaliciones con intersección vacía con T tienen exceso estrictamente negativo y, por tanto, no pueden ser utilizadas para una contraobjeción.

Si calculamos el pago medio de los jugadores de $\{1245\}$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{x_1}{C_1} = \boxed{\mathbf{1.11}}\,;\ \frac{x_2}{C_2} = 1.115\,;\ \frac{x_4}{C_4} = \boxed{\mathbf{1.11}}\,;\ \frac{x_5}{C_5} = \boxed{\mathbf{1.11}}$$

donde el pago medio menor corresponde a los jugadores **1**, **4** y **5**; cualquiera de éstos podrá formular la objeción contra cualquier jugador fuera de la coalición, es decir, contra el jugador **3** o el **6**. Vamos a considerar dos situaciones:

(i) El jugador **1** realiza una objeción contra el **6**.

En esta situación, el jugador **6** podría contraobjetar utilizando coaliciones del tipo $M = S \cup R \cup \{6\}$ donde $S \subseteq \{245\}$ y $\emptyset \subseteq R \subseteq \{3\}$. De aquí construiremos los correspondientes juegos w_R

S	$w_{\{\emptyset\}}$(S)		S	$w_{\{3\}}$(S)
2	205		**2**	207.5
4	432		**4**	430.5
5	543.5		**5**	542
24	655		**24**	653.5
25	766.5		**25**	765
45	989.5		**45**	988
245	1212.5		**245**	1211

De estos dos juegos obtenemos el juego máximo u donde

$$u(S) = \max\{w_{\emptyset}(S);\ w_{\{3\}}(S)\}.$$

S	$u(S)$
2	207.5
4	432
5	543.5
24	655
25	766.5
45	989.5
245	1212.5

Dicho juego es de valores medios crecientes respecto al vector (200, 400, 500). El valor medio para la coalición total es $\frac{1212.5}{1100} = 1.1023$; dado que $x_2 = 223 \geq C_2 \cdot 1.1023$ podemos reducir el juego en este jugador obteniendo el juego reducido $u_{x\{245\}}^{\{45\}}$.

S	$u_{x\{245\}}^{\{45\}}(S)$
4	432
5	543.5
45	989.5

Dicho juego es de valores medios crecientes respecto al vector (400, 500). El valor medio para la coalición total es $\frac{989.5}{900} = 1.0994$; dado que $x_4 = 444 \geq$

$C_4 \cdot 1.0994$ podemos reducir el juego en este jugador obteniendo el juego reducido $u^{\{5\}}_{x\{45\}}$ donde

$$u^{\{5\}}_{x\{45\}}(5) = 545.5.$$

Este juego consta de un sólo jugador; el valor medio para la coalición total es $\frac{555}{500} = 1.091$ y se verifica que $x_5 = 555 \geq C_5 \cdot 1.091$. Podríamos reducir nuevamente el juego pero dado que sólo nos queda un jugador no lo haremos y detendremos el proceso iterativo de reducción. Nótese que nos hallamos en el caso **(c1)** analizado en la demostración. Partiendo de la desigualdad

$$x_5 \geq u^{\{5\}}_{x\{45\}}(5)$$

y aplicando la proposición **3.9** obtenemos que

$$\sum_{i \in S} x_i \geq u^{\{45\}}_{x\{245\}}(S) \quad S \subseteq \{45\}.$$

Aplicando nuevamente la misma proposición llegamos a la siguiente conclusión:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq u(S) \quad S \subseteq \{245\}.$$

Por la definición del juego u ello equivale a

$$\sum_{i \in S} x_i \geq w_R(S) \quad S \subseteq \{245\}$$

para todo $\emptyset \subseteq R \subseteq \{3\}$. Finalmente, por la definición de los juegos w_R tenemos que

$$\sum_{i \in S \cup R \cup \{6\}} x_i \geq v(S \cup R \cup \{6\}) \quad S \subseteq \{245\}, \emptyset \subseteq R \subseteq \{3\}.$$

La objeción que podemos formular es la siguiente:

$$y_i = x_i + \frac{5}{4} \quad \forall i \in \{1245\}$$

Se puede verificar que dicha objeción no tendrá contraobjeción posible.

(ii) El jugador **1** realiza una objeción contra el **3**

Al igual que en el caso anterior podemos construir los juegos w_R; en este caso $\emptyset \subseteq R \subseteq \{6\}$.

S	$w_{\{\emptyset\}}(\mathbf{S})$	**S**	$w_{\{6\}}(\mathbf{S})$
2	214	**2**	207.5
4	441	**4**	430.5
5	552	**5**	542
24	667.5	**24**	653.5
25	779	**25**	765
45	1002	**45**	988
245	1225	**245**	1211

El juego u, máximo de los dos anteriores, coincide con el juego $w_\emptyset$. En este caso sólo podemos aplicar el criterio de reducción del juego una sóla vez: en efecto, el valor medio para la coalición total es $\mathbf{f^0}_{\{245\}} = \frac{1225}{1100} = 1.1136$ verificándose que

$$223 = x_2 \geq C_2 \cdot \mathbf{f^0}_{\{245\}} = 200 \cdot 1.1136 = 222.7.$$

Por tanto podemos reducir el juego $(u, \{245\})$ eliminando el jugador 2 (jugador k_1) obtendiendo el juego reducido $u_{x\{245\}}^{\{1245\}\setminus(\{1\}\cup\{2\})}$ donde

$$\begin{aligned}
u_{x\{245\}}^{\{1245\}\setminus(\{1\}\cup\{2\})}(\mathbf{4}) &= \max\{u(4),\, u(24) - x_2\} &&= \max\{441,\, 667.5 - 223\} = 444.5,\\
u_{x\{245\}}^{\{1245\}\setminus(\{1\}\cup\{2\})}(\mathbf{5}) &= \max\{u(5),\, u(25) - x_2\} &&= \max\{552,\, 779 - 223\} = 554,\\
u_{x\{245\}}^{\{1245\}\setminus(\{1\}\cup\{2\})}(\mathbf{45}) &= \max\{u(45),\, u(245) - x_2\} &&= \max\{1002, 1225 - 223\} = 1002.
\end{aligned}$$

En el juego reducido el valor medio para la coalición total es

$$\frac{u_{x245}^{\{1245\}\setminus(\{1\}\cup\{2\})}(\mathbf{45})}{\sum_{i\in\{45\}} C_i} = \mathbf{f^1}_{\{45\}} = 1.1133.$$

Podríamos continuar reduciendo el juego si el pago medio para algún jugador que aún permanece en el juego fuera mayor que 1.1133; esto no se verifica ni para el jugador 4 ni para el jugador 5, y por tanto el proceso iterativo de reducción ha finalizado. Obsérvese que este caso corresponde al apartado **(c2)** analizado en la demostración. Para este caso construimos el juego $(\{45\}, \overline{u})$

$$\begin{aligned}
\overline{u}(\mathbf{4}) &= u_{x^{\{245\}}}^{\{1245\}/(\{1\}\cup\{2\})}(\mathbf{4}) - x_4 &&= 444.5 - 444 = 0.5,\\
\overline{u}(\mathbf{5}) & &&= 0,\\
\overline{u}(\mathbf{45}) &= u_{x^{\{245\}}}^{\{1245\}/(\{1\}\cup\{2\})}(\mathbf{45}) - x_4 - x_5 &&= 1002 - 999 = 3,
\end{aligned}$$

Nótese que $\overline{u}(\mathbf{45}) = v(345) - x(345) = 3 < v(T) - x(T) = v(1245) - x(1245) = 5$. Definimos entonces el valor α como $[v(1245)-x(1245)]-[v(345)-x(345)] = 5 - 3 = 2$. Tomando un punto del Núcleo del juego $\overline{u}$, por ejemplo

$$(t_4, t_5) = (1.5, 1.5),$$

construiremos la objeción $\vec{y}$ del jugador **1** contra el jugador **3** via la coalición $T = \{1245\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + \tfrac{\alpha}{|T|} &&= 111 + \tfrac{2}{4} = 111.5,\\
y_2 &= x_2 + \tfrac{\alpha}{|T|} &&= 223 + \tfrac{2}{4} = 223.5,\\
y_4 &= x_4 + \tfrac{\alpha}{|T|} + t_4 &&= 444 + \tfrac{2}{4} + 1.5 = 446,\\
y_5 &= x_5 + \tfrac{\alpha}{|T|} + t_5 &&= 555 + \tfrac{2}{4} + 1.5 = 557.
\end{aligned}$$

Se puede verificar que esta objeción no tiene posible contraobjeción.

3.3 El Conjunto de Negociación de Mas-Colell

En el conjunto de negociación, según Aumann & Maschler, las objeciones y contraobjeciones se realizaban de un jugador contra otro; la discusión se enmarcaba en un proceso de negociación bilateral. Mas-Colell [34] propuso una modificación del concepto de objeción y contraobjeción para enmarcarlo dentro de un proceso de negociación conjunta.

Definición 3.12 *Sea $\vec{x} \in I^*(v)$. Una objeción respecto a $\vec{x}$ es un par $(T, \vec{y})$, $T \subset N$, $\vec{y} \in \mathbf{R}^{|T|}$ tal que $y_i \geq x_i \ \ \forall i \in T$, siendo al menos una de las desigualdades estricta y $\sum_{i \in T} y_i \leq v(T)$.*

Definición 3.13 *Una contraobjeción respecto a* $(T, \vec{y})$ *es un par* $(M, \vec{z})$, $M \subset N$, $\vec{z} \in \mathbf{R}^{|M|}$ *tal que* $z_i \geq x_i \quad \forall i \in M \setminus T$ *y* $z_i \geq y_i \quad \forall i \in M \cap T$, *siendo al menos una de las desigualdades estricta y* $\sum_{i \in M} z_i \leq v(M)$.

En este caso la objeción respecto a $\vec{x}$ es formulada conjuntamente por una coalición T que propone un pago $\vec{y}$ para sus componentes donde nadie sale perjudicado y al menos alguien mejora. La contraobjeción la formula una coalición M que iguala o supera el pago propuesto en la objeción a los jugadores de M que se vieron beneficiados de ella y iguala o supera el pago inicial a aquellos jugadores de M no presentes en T; nuevamente algunos de estos jugadores deben salir estrictamente beneficiados. Una preimputación $\vec{x}$ pertenece al conjunto de negociación si para toda objeción existe una contraobjeción. Al conjunto de negociación de Mas-Colell[19] lo denotaremos por $\mathcal{B}(v)$.

Para el caso de los juegos financieros vamos a demostrar que este conjunto de negociación coincide nuevamente con el Núcleo.

Teorema 3.14 *Sea* (N, v) *un juego financiero respecto al vector* $\vec{C}$, *entonces*

$$C(v) = \mathcal{B}(v).$$

DEM.

Sea $\vec{x} \in I^*(v) - C(v)$ y T una coalición de máximo exceso respecto a dicha imputación, i.e. $v(T) - x(T) \geq v(S) - x(S) \; \forall S \subseteq N$. Dado que $\vec{x}$ no pertenece al Núcleo, se deduce que $v(T) - x(T) > 0$.

Además se verifica que para toda coalición M, tal que $M \cap T = \emptyset$, $v(M) - x(M) \leq 0$; ello es inmediato dado que si supusieramos lo contrario tendríamos que

$$v(T) - x(T) < [v(T) - x(T)] + [v(M) - x(M)] \leq v(T \cup M) - x(T \cup M)$$

lo cual supone una contradicción dado que T era una coalición de máximo exceso. Esto implica que si se realiza una objeción por parte de la coalición T, no nos hemos de preocupar por una posible contraobjeción de una coalición M cuya intersección con T sea vacia.

Sea ahora M tal que $M \cap T \neq \emptyset$; se verifica entonces que

$$\sum_{i \in R} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup R} \leq \sum_{i \in R} x_i \tag{3.9}$$

[19] Para su estudio ver también el artículo de Vohra [60].

donde $R = M \setminus T$. En efecto, si supusieramos lo contrario tendríamos que

$$v(T) - x(T) < [v(T) - x(T)] + [\sum_{i \in R} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup R} - \sum_{i \in R} x_i] \leq [\sum_{i \in T} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup R} - x(T)] +$$

$$+ [\sum_{i \in R} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup R} - \sum_{i \in R} x_i] = v(T \cup R) - x(T \cup R)$$

lo cual es una contradicción dado que T era una coalición de máximo exceso.

Obsérvese que toda coalición M con intersección no vacia con T se puede expresar como $M = S \cup R$ donde $S \subseteq T$ y $\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus T$. Entonces para cada R (nótese que R puede ser vacio) definimos el juego w_R sobre el conjunto de jugadores T donde

$$w_R(S) = v(S \cup R) - x(R) \qquad \forall S \subseteq T.$$

Dicho juego es de valores medios crecientes respecto al vector $\vec{C}^T$; esto se deduce por (3.9) y la aplicación del Lema **2.20** tomando $P = R$ y $N^* = T$.

Al igual que en la demostración del conjunto de negociación de Aumann & Maschler, definiremos el juego máximo de todos los posibles w_R:

$$u(S) = \max_{\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus T} \{w_R(S)\}.$$

Dicho juego es asimismo de valores medios crecientes respecto a $\vec{C}^T$ dado que es el máximo de una serie de juegos de valores medios crecientes. Obsérvese que $u(T) = w_\emptyset(T) = v(T)$ debido a que T es una coalición de máximo exceso[20]. Al igual que para el conjunto de negociación de Aumann & Maschler, el juego u se puede expresar de la siguiente manera:

$$u(S) = \left(\sum_{i \in S} C_i\right) \cdot \mathbf{f^0}_S \quad \forall S \subseteq T$$

donde $\mathbf{f^0}_S = \frac{u(S)}{\sum_{i \in S} C_i}$.

En este momento debemos considerar dos casos:

(a) $x_k < C_k \cdot \mathbf{f^0}_T \; \forall k \in T$.

(b) $\exists k_1 \in T$ tal que $x_{k_1} \geq C_{k_1} \cdot \mathbf{f}^0_T$.

[20]Efectivamente, imaginemos que $u(T) = v(T \cup R) - x(R) > v(T)$ donde $R \neq \emptyset$; restando $x(T)$ a ambos lados de la desigualdad obtendríamos que $v(T \cup R) - x(T \cup R) > v(T) - x(T)$ lo que supone una contradicción pues T era una coalición de máximo exceso.

Analizaremos los dos casos anteriores formulando en ambas situaciones objeciones que no tengan contraobjeción posible:

(a) En este caso se verifica que $x(T) < \sum_{k \in T} C_k \cdot \mathbf{f}^0_T$ lo que permite realizar la siguiente objeción $\vec{y}$ a través de la coalición T:

$$y_i = C_i \cdot \mathbf{f^0}_T \quad \forall i \in T.$$

Obsérvese que $\sum_{i \in T} y_i = u(T) = v(T)$ y que $y_i > x_i$. Esta objeción no tendrá contraobjeción posible dado que toda contraobjeción $(M, \vec{z})$ se debería realizar a través de una coalición $M = S \cup R$ donde $S \subseteq T$, $S \neq \emptyset$ y $\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus T$ pero

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i \in M} z_i &> \textstyle\sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in R} x_i = \sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{f^0}_T + \sum_{i \in R} x_i \geq \\ &\geq \textstyle\sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{f^0}_S + \sum_{i \in R} x_i = u(S) + \sum_{i \in R} x_i \geq \\ &\geq w_R(S) + \textstyle\sum_{i \in R} x_i = v(S \cup R) - \sum_{i \in R} x_i + \sum_{i \in R} x_i = \\ &= v(S \cup R) = v(M) \end{aligned}$$

lo cual invalidaría dicha contraobjeción.

(b) Si existe un jugador $k_1 \in T$ tal que $x_{k_1} \geq C_{k_1} \cdot \mathbf{f}^0_T$ podemos realizar un proceso de reducción idéntico al realizado para el caso del conjunto de negociación de Aumann & Maschler:

Juego	Jugador reducido	Condición reducción	Juego resultante
u	k_1	$x_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_T \cdot C_{k_1}$	$u^{T \setminus k_1}_{\vec{x}^T}$
$u^{T \setminus k_1}_{\vec{x}^T}$	k_2	$x_{k_2} \geq \mathbf{f^1}_{T \setminus k_1} \cdot C_{k_2}$	$u^{T \setminus k_2}_{\vec{x}^{T \setminus k_1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u^{T \setminus P^{m-1}}_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-2}}}$	k_m	$x_{k_m} \geq \mathbf{f^{m-1}}_{T \setminus P^{m-1}} \cdot C_{k_m}$	$u^{T \setminus P^m}_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-1}}}$
$u^{T \setminus P^m}_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-1}}}$	FIN	$x_k < \mathbf{f^m}_{T \setminus P^m} \cdot C_k \ \ \forall k \in T \setminus P_m$	

Respecto a este proceso de reducción hemos de remarcar dos cosas:

- $|T| \geq 2$. Si $|T|$ sólo contuviera un jugador que denominaremos k^*, tendríamos que $x(T) = x_{k^*} \geq C_{k^*} \cdot \mathbf{f}^0_{k^*} = u(T) = v(T)$ lo que supondría una contradicción dado que $v(T) - x(T) > 0$.

– Este proceso tiene la particularidad de que nunca nos conducirá al extremo de que nos quedemos con un juego reducido $u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}$ tal que el conjunto de jugadores $T \setminus P^m$ contenga un único elemento ($\{k^*\}$) donde se verifica que

$$x_{k^*} \geq \mathbf{f^m}_{T\setminus\cup P^m} \cdot C_{k^*} = u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(k^*).$$

Si ello ocurriera, el proceso de desreducción (proposición **3.9**) nos conduciría a que

$$v(S \cup R) \leq x(S \cup R) \quad \forall\, S \subseteq T \text{ y } R \subsetneq N \setminus T$$

En concreto para $S = T$ y $R = \emptyset$ tendríamos que $v(T) \leq x(T)$ lo cual es imposible dado que la coalición T tenía exceso estrictamente positivo.

Por otra parte, es fácil verificar que

$$u^{T\setminus P_m}_{\vec{x}^{T\setminus P_{m-1}}}(T \setminus P^m) = v(T) - x(P^m) > 0 \tag{3.10}$$

En efecto supongamos que $u^{T\setminus P^m}_{\vec{x}^{T\setminus P^{m-1}}}(T \setminus P^m) = v((T \setminus P^m) \cup Q \cup \overline{R}) - x(Q \cup \overline{R})$ donde $Q \subseteq P^m$, $\emptyset \subseteq \overline{R} \subseteq N \setminus T$ y $Q \cup \overline{R} \neq P^m$; entonces, $v((T \setminus P^m) \cup Q \cup \overline{R}) - x(Q \cup \overline{R}) > v(T) - x(P^m)$ lo que implica que $v((T \setminus P^m) \cup Q \cup \overline{R}) - x((T \setminus P^m) \cup Q \cup \overline{R}) > v(T) - x(T)$ lo que es imposible dado que T era la coalición con máximo exceso.

Por tanto, nos centraremos en el caso en que $x_k < \mathbf{f^m}_{T\setminus P_m} \cdot C_k \;\; \forall\, k \in T \setminus P_m$ donde $T \setminus P^m \neq \emptyset$. Al igual que en la anterior demostración generamos el juego $\overline{u}$ sobre el conjunto de jugadores $T \setminus P^m$:

$$\overline{u}(S) = \begin{cases} u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(S) - x(S) & \text{si } u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(S) - x(S) \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si } u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(S) - x(S) < 0 \end{cases}$$

Este juego tiene el Núcleo no vacio; para la demostración nos remitimos a la realizada para el caso del conjunto de negociación de Aumann & Maschler (ver página 137) dado que es idéntica. Sea $\vec{t}$ una distribución del Núcleo de $\overline{u}$; entonces, tenemos que

– Por (3.10), $\overline{u}(T \setminus P^m) = u^{T\setminus P^m}_{\vec{x}^{T\setminus P^{m-1}}}(T \setminus P^m) - x(T \setminus P^m) = v(T) - x(T)$.

$$\overline{u}(S) \leq \sum_{i\in S} t_i \text{ y, por tanto, } u^{T\setminus P^m}_{\vec{x}^{T\setminus P^{m-1}}}(S) \leq \sum_{i\in S}(t_i + x_i). \qquad (3.11)$$

$\forall S \subseteq T \setminus P^m$.

Partiendo de la desigualdad (3.11) y considerando $s_i = t_i + x_i$, el proceso de desreducción (proposición **3.9**) aplicado a los sucesivos juegos reducidos $u^{T\setminus P^j}_{\vec{x}^{T\setminus P^{j-1}}}$ $j = m, m-1, \ldots, 1$ nos conduce a

$$u(S) \leq \sum_{i\in(T\setminus P^m)\cap S}(x_i + t_i) + \sum_{i\in P^m\cap S} x_i \;\; \forall S \subseteq T.$$

Nótese que ha sido posible aplicar esta proposición a cada juego reducido dado que se verifica que

$$x_{k_j} \geq \mathbf{f^{j-1}}_{T\setminus P^{j-1}} \cdot C_{k_j} \geq^{21} \mathbf{f^{j-1}}_{k_j} \cdot C_{k_j} = u^{T\setminus P^{j-1}}_{\vec{x}^{T\setminus P^{j-2}}}(k_j) \;\; j = 2, \ldots, m, m-1$$

y

$$x_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_T \cdot C_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_{k1} \cdot C_{k_1} = u(k_1),$$

y por tanto, por definición del juego u y tomando $M = S \cup R$

$$v(M) = v(S \cup R) \leq \sum_{i\in(T\setminus P^m)\cap S}(x_i + t_i) + \sum_{i\in P^m\cap S} x_i + \sum_{i\in R} x_i \qquad (3.12)$$

$\forall S \subseteq T, \;\; \forall R \subseteq N \setminus T$.

Finalmente, podemos conocer cual es la objeción $\vec{y}$ a realizar por la coalición T;

$$\begin{array}{ll} y_i = x_i & \forall\, i \in P^m, \\ x_i + t_i & \forall\, i \in T \setminus P^m. \end{array}$$

Recuérdese que $\overline{u}(T \setminus P^m) = v(T) - x(T) > 0$ y que $\overline{u}(i) \geq 0$ lo que implica que algún t_i es estrictamente positivo.

Dicha objeción no tiene contraobjeción $(M, \vec{z})$ posible. En efecto, sea $M = S \cup R$, $S = M \cap T$; $S \neq \emptyset$ y $R = M \setminus T$; por (3.12), tenemos que

$$\sum_{i\in M} z_i > \sum_{i\in S} y_i + \sum_{i\in R} x_i \geq \sum_{i\in(T\setminus P^m)\cap S} y_i + \sum_{i\in(P^m)\cap S} y_i + \sum_{i\in R} x_i \geq v(M)$$

lo cual invalida la contraobjeción dado que se debería cumplir que $z(M) \leq v(M)$.

[21] Recuérdese que cada juego reducido es un juego de valores medios crecientes y, por tanto, $\mathbf{f^{j-1}}_S \geq \mathbf{f^{j-1}}_i \; \forall i \in S$.

□

Finalizaremos esta sección, aplicando la anterior demostración al ejemplo **3.11**. En el ejemplo discutíamos cuál debía ser la correcta objeción a la imputación

$$\vec{x} = (111, 223, 336, 444, 555, 683)$$

para que no existiera contraobjeción. Al igual que en aquel caso, la coalición T de máximo exceso coincide con la $\{1245\}$, aunque dado que no imponemos restricciones sobre el número de jugadores podría ser la $\{145\}$. A partir de aquí generamos los juegos w_R y el máximo de ellos, el juego u:

S	C(S)	$w_\emptyset$	$w_{\{3\}}$	$w_{\{6\}}$	$w_{\{36\}}$	u	$\mathbf{f^0}_S$
1	100	$\boxed{\mathbf{110}}$	104	94	97	110	1.1
2	200	$\boxed{\mathbf{220}}$	214	205	208.5	220	1.1
4	400	440	$\boxed{\mathbf{441}}$	432	431.5	441	1.1025
5	500	550	$\boxed{\mathbf{552}}$	543.5	543	552	1.1040
12	300	$\boxed{\mathbf{330}}$	324	320.5	320	330	1.1
14	500	550	$\boxed{\mathbf{552}}$	543.5	543	552	1.1040
15	600	660	$\boxed{\mathbf{667.5}}$	655	654.5	667.5	1.1125
24	600	660	$\boxed{\mathbf{667.5}}$	655	654.5	667.5	1.1125
25	700	777	$\boxed{\mathbf{779}}$	766.5	766	779	1.1129
45	900	$\boxed{\mathbf{1003.5}}$	1002	989.5	989	1003.5	1.115
124	700	777	$\boxed{\mathbf{779}}$	766.5	766	779	1.1129
125	800	888	$\boxed{\mathbf{890.5}}$	878	877.5	890.5	1.1131
145	900	$\boxed{\mathbf{1115}}$	1113.5	1101	1100.5	1115	1.115
245	1100	$\boxed{\mathbf{1226.5}}$	1225	1212.5	1212	1226.5	1.115
1245	1200	$\boxed{\mathbf{1338}}$	1336.5	1324	1334	1338	1.115

La última columna ($\mathbf{f^0}_S$) refleja el valor medio de cada coalición; se puede observar como el juego u es de valores medios crecientes respecto al vector $\vec{C}^{\{1245\}}$. Dado que el pago al jugador **2** es superior o igual al pago proporcional respecto a la coalición total, i.e.

$$223 = x_2 \geq \mathbf{f^0}_{\{1245\}} \cdot C_2 = 223,$$

podemos reducir el juego en este jugador; en la siguiente tabla se reflejan los valores del juego reducido $u^{\{145\}}_{\vec{x}\{1245\}}$:

S	$u^{\{145\}}_{\vec{x}\{1245\}}(\mathbf{S})$	$\mathbf{f^1}_S$	$u^{\{145\}}_{\vec{x}\{1245\}}(\mathbf{S}) - x(S)$	$\overline{u}$
1	110	1.1	-1	0
4	444.5	1.1113	0.5	0.5
5	556	1.112	1	1
14	556	1.112	1	1
15	667.5	1.1125	1.5	1.5
45	1003.5	1.115	4.5	4.5
145	1115	1.115	5	5

Dado que para ninguno de los jugadores que aún permanecen sin reducir, jugadores (**1**,**4** y **5**), se verifica la condición para una nueva reducción ($x_i \geq C_i \cdot \mathbf{f^1}_{\{145\}}$), el proceso de reducción finaliza. Construímos entonces el juego $\overline{u}(S)$ que figura en la última columna de la anterior tabla. De dicho juego seleccionamos una distribución en el Núcleo, por ejemplo, (0.5, 2, 2.5). Entonces, podemos confeccionar la objeción $\vec{y}$ a través de la coalición $\{1245\}$ otorgando un pago a los jugadores de $\vec{y} = (111 + 0.5,\ 223 + 0,\ 444 + 2,\ 555 + 2.5)$. Obsérvese que la objeción se ha formado asignando a los jugadores reducidos su pago original x_i y a los jugadores que permanecían en el juego su pago original más el pago correspondiente en el juego $\overline{u}$. Dicha objeción es imposible de contraobjetar dado que el pago mínimo que cada coalición debería recibir es superior al valor de la coalición. Este pago mínimo se calcula otorgando x_i a los jugadores que quedaron fuera de la objeción y y_i a los que estaban presentes en la objeción.

3.4 El conjunto de Negociación de Zhou

Las soluciones de Aumann & Maschler y de Mas-Colell constituyen las aportaciones más importantes dentro del área de los conjuntos de negociación. Otras definiciones de conjuntos de negociación han seguido los pasos de las dos primeras modificando en algunos aspectos los conceptos de objeción y contraobjeción; en este sentido cabe destacar el conjunto de negociación de Zhou. [63]

El conjunto de negociación de Zhou constituye una amalgama entre los conjuntos de Mas-Colell y de Aumann-Maschler: como en el primero, los actores de la objeción y contraobjeción no son jugadores sino coaliciones; del segundo recoge la manera de realizar el pago a los jugadores involucrados en las objeciones y contraobjeciones. Sin embargo, también introduce novedades: la primera es que el nuevo conjunto está definido de manera única para cualquier estructura de coalición; la segunda se refiere a las coaliciones que pueden efectuar una contraobjeción. Respecto a la primera se ha de remarcar que el conjunto de Aumann & Maschler se caracterizaba por tener asociado una estructura de coalición $\mathcal{B}$. Esta estructura representaba el conjunto de coaliciones que efectivamente se habían formado; el problema se centraba en repartir entonces el pago asociado a cada coalición de $\mathcal{B}$ entre sus miembros. Una distribución asociada a una estructura es un par $(\vec{x};\mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{S_1, \ldots, S_k \,|\, S_i \cap S_j = \emptyset, \forall S_i, S_j \in \mathcal{B}; \bigcup_{S_j \in \mathcal{B}} S_j = N\}$ y $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ tal que $x(S_j) \leq v(S_j)$ $j = 1, \ldots, k$. En cada juego se había de analizar o conocer previamente qué coaliciones de jugadores se han formado y luego proceder al reparto mediante la negociación. Para Zhou la formación de una estructura de coalición no es previa al juego sino es el resultado de la negociación entre los jugadores; por tanto, a priori, cualquier distribución asociada a cualquier estructura es susceptible de pertenecer al conjunto de negociación. A continuación definiremos los conceptos base de objeción y contrabojección:

Definición 3.15 *Sea $(\vec{x},\mathcal{B})$ una distribución asociada a la estructura $\mathcal{B}$. Una objeción de una coalición $T \subseteq N$ respecto a $(\vec{x},\mathcal{B})$ es un par $(T, \vec{y})$ donde se verifica que*

(a1) $\vec{y} \in \mathbf{R}^{|T|}$,

(a2) $y(T) \leq v(T)$ *y*

(a3) $y_i > x_i \;\forall i \in T$.

Definición 3.16 *Una contraobjeción de una coalición M respecto a una objeción $(T, \vec{y})$ es un par $(M, \vec{z})$ donde*

(a1) $\vec{z} \in \mathbf{R}^{|M|}$,

(a2) $z(M) \leq v(M)$,

(a3) $z_i \geq y_i \ \forall i \in M \cap T$ *y* $z_i \geq x_i \ \forall i \in M \setminus T$ *y*

(a4)

$$M \cap T \neq \emptyset; \ M \setminus T \neq \emptyset; \ y \ T \setminus M \neq \emptyset. \tag{3.13}$$

Una distribución $(\vec{x}, \mathcal{B})$ pertenecerá al conjunto de negociación [$\mathbf{RB}$(v)] si para cada objeción que se pueda realizar respecto a $\vec{x}$ existe una contraobjeción.

De las anteriores definiciones, Zhou remarca que si un juego es superaditivo respecto a la coalición total[22] las únicas distribuciones que se pueden encontrar en el conjunto de negociación son distribuciones colectivamente racionales para la coalición total (i.e., $x(N) \geq v(N)$); ello es inmediato dado que si una distribución no es colectivamente racional puede recibir una objeción de la coalición total que, por definición, no tiene contraobjeción. De hecho sólo se pueden considerar aquellas distribuciones que son preimputaciones: para todo pago $\vec{x}$ asociado a la estructura de coalición $\mathcal{B}$, y suponiendo la superaditividad del juego, se verifica que $v(N) \geq \sum_{S_j \in \mathcal{B}} v(S_j) \geq \sum_{S_j \in \mathcal{B}} x(S_j)$; conjuntamente con la racionalidad colectiva ello implica que si $\vec{x}$ pertenece al conjunto de negociación deberá ser una preimputación.

Por otra parte, también es fácil verificar que una distribución que no sea individualmente racional no puede pertenecer tampoco a $\mathbf{RB}(v)$ dado que una objeción por parte de un jugador individual no tiene, por definición, contraobjeción. Por tanto, y en particular, se deduce que para los juegos financieros el conjunto de negociación de Zhou es un subconjunto de imputaciones.

Es evidente también que las distribuciones del Núcleo están incluidas dentro del conjunto de negociación dado que no es posible formular una objeción contra ellas. En consecuencia, para un juego financiero de dos jugadores el conjunto de negociación equivale al conjunto de imputaciones que a su vez, es igual al Núcleo.

En adelante vamos a analizar si para un juego de tres o más jugadores, una imputación que no pertenezca al Núcleo puede pertenecer al conjunto de negociación;

[22]Un juego es superaditivo respecto a la coalición total si $\sum_{S_k \in \mathcal{B}} v(S_k) \leq v(N)$ para toda partición $\mathcal{B}$ de N; los juegos financieros son juegos superaditivos y por tanto superaditivos respecto a N.

para ellos subdividiremos las distribuciones $\vec{x} \in I(v) - C(v)$ en dos grupos tomando como referencia las coaliciones de máximo exceso y máxima cardinalidad. En efecto, sea $Mec(\vec{x})$ el conjunto de estas coaliciones, i.e.

$$Mec(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{lll} R \subseteq N & \text{tal que} & \mathbf{1)}\ e(R,\vec{x}) \geq e(T,\vec{x})\ \forall T \in 2^N \\ & & \mathbf{2)}\ \text{si}\ e(R,\vec{x}) = e(T,\vec{x}) \Rightarrow |R| \geq |T| \end{array} \right\}.$$

A partir de este conjunto definimos $\mathcal{O}$ y $\mathcal{P}$ como:

- $\mathcal{O} = \{\vec{x} \in I(v) - C(v)$ tal que $\forall T \in Mec(\vec{x})\ \exists\, M \subset N$; donde M y T verifican (3.13) y $v(M) - x(M) = v(T) - x(T)\}$.
- $\mathcal{P} = \{\vec{x} \in I(v) - C(v)$ tal que $\exists T \in Mec(\vec{x})$ donde $v(T) - x(T) > v(M) - x(M)$ para toda $M \subset N$ que verifica (3.13)$\}$

Obsérvese que $\mathcal{O} \cup \mathcal{P} = I(v) - C(v)$. El siguiente Lema analiza las distribuciones de $\mathcal{P}$.

Lema 3.17 *Sea $(N,v) \in \mathcal{FG}^n$ respecto al vector $\vec{C}$, $|N| \geq 3$ y $\vec{x} \in \mathcal{P}$. Entonces $\vec{x}$ no pertenece al conjunto de negociación de Zhou.*

DEM.

Sea T una coalición de máximo exceso y máxima cardinalidad ($T \in Mec(\vec{x})$) que verifica las condiciones exigidas en la definición del conjunto $\mathcal{P}$. La idea es realizar una objeción a través de esta coalición que no tenga contraobjeción.

Si esta objeción se realiza via la coalición T, las posibles contraobjeciones sólo podrán ser realizadas a través de coaliciones M que tengan la estructura

$$M = S \cup R \text{ donde } S \subset T;\ S \neq \emptyset, T;\ R \subseteq N \setminus T;\ R \neq \emptyset$$

Nótese que por (3.13) S no puede ser vacía pero tampoco igual a T; también por (3.13) R no puede ser vacía.

Al igual que para el conjunto de negociación de Mas-Colell se verifica que

$$\sum_{i \in R} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup R} \leq \sum_{i \in R} x_i \tag{3.14}$$

donde $R = M \setminus T$. Efectivamente, si supusieramos lo contrario tendríamos que

$$v(T) - x(T) < [v(T) - x(T)] + [\sum_{i \in R} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup R}] - \sum_{i \in R} x_i \leq [\sum_{i \in T} C_i \cdot \mathbf{f}_{T \cup R} - x(T)] +$$

$$+[\sum_{i\in R} C_i \cdot \mathbf{f}_{T\cup R} - \sum_{i\in R} x_i] = v(T\cup R) - x(T\cup R)$$

lo cual es una contradicción dado que T era una coalición de máximo exceso.

Entonces para cada R (diferente del vacío), definimos el juego w_R sobre el conjunto de jugadores T donde

$$\begin{aligned} w_R(\emptyset) &= 0, \\ w_R(S) &= v(S\cup R) - x(R) \qquad \forall S \subseteq T. \end{aligned}$$

Dicho juego es de valores medios crecientes respecto al vector $\vec{C}^T$; esto se deduce por (3.14) y la aplicación del Lema **2.20** tomando $P = R$ y $N^* = T$.

Al igual que en la demostración del conjunto de negociación de Aumann & Maschler, definimos el juego máximo de todos los posibles w_R:

$$u(S) = \max_{\emptyset\neq R\subseteq N\setminus T}\{w_R(S)\}.$$

Dicho juego es asimismo de valores medios crecientes respecto a $\vec{C}^T$ dado que es el máximo de una serie de juegos de valores medios crecientes.

Al igual que para el conjunto de negociación de Aumann & Maschler el juego u se puede expresar de la siguiente manera:

$$u(S) = \left(\sum_{i\in S} C_i\right)\cdot \mathbf{f^0}_S \quad \forall S \subseteq T$$

donde $\mathbf{f^0}_S = \frac{u(S)}{\sum_{i\in S} C_i}$.

En este momento debemos considerar dos casos:

(**a**) $x_k < C_k \cdot \mathbf{f^0}_T \ \forall k \in T$.

(**b**) $\exists\, k_1 \in T$ tal que $x_{k_1} \geq C_{k_1}\cdot \mathbf{f}^0_T$.

Analizaremos los dos casos anteriores formulando para ambas situaciones objeciones que no tienen contraobjeción posible:

(**a**) Obsérvese que $u(T) = w_{\overline{R}}(T) = v(T\cup\overline{R}) - x(\overline{R})$ donde $\emptyset \neq \overline{R} \subseteq N\setminus T$. Al comparar $u(T)$ con $v(T)$ resulta que $v(T) > u(T)$. En efecto, dado que $u(T) = v(T\cup\overline{R}) - x(\overline{R})$, si $u(T) \geq v(T)$ se verificaría que $v(T\cup\overline{R}) - x(T\cup\overline{R}) \geq v(T) - x(T)$ lo que supondría una contradicción dado que T era una coalición de máximo exceso y máxima cardinalidad. A partir de ahora notaremos como α la diferencia entre $v(T)$ y $u(T)$ $[\alpha = v(T) - u(T)]$.

En este caso la objeción $(T, \vec{y})$ que se debe realizar es la siguiente:

$$y_i = C_i \cdot \mathbf{f^0}_T + \frac{\alpha}{|T|} \quad \forall i \in T \tag{3.15}$$

que no tiene contraobjeción $(M, \vec{z})$ posible. En efecto, siendo $M = S \cup R$, $M \cap T = S$ y $M \setminus T = R$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in M} z_i &= \sum_{i \in S} z_i + \sum_{i \in R} z_i \geq \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in R} x_i > \\ &> \sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{f^0}_T + \sum_{i \in R} x_i \geq^{23} \sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{f^0}_S + \sum_{i \in R} x_i = u(S) + \sum_{i \in R} x_i \geq \\ &\geq w_R(S) + \sum_{i \in R} x_i = v(S \cup R) - \sum_{i \in R} x_i + \sum_{i \in R} x_i = v(S \cup R) = v(M) \end{aligned}$$

lo que invalida dicha contraobjeción.

(b) Si existe un jugador $k_1 \in T$ tal que $x_{k_1} \geq C_{k_1} \cdot \mathbf{f^0}_T$ también podemos realizar un proceso de reducción idéntico al realizado para el caso del conjunto de negociación de Aumann & Maschler. Es importante remarcar que T contiene al menos dos jugadores dado que $\vec{x}$ es una imputación. A continuación describiremos el esquema de reducción ya mostrado para el conjunto de negociación de Mas Colell:

Juego	Jug. reducido	Condición reducción	Juego result.
u	k_1	$x_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_T \cdot C_{k_1}$ y $\|T\| \geq 2$	$u_{\vec{x}^T}^{T \setminus k_1}$
$u_{\vec{x}^T}^{T \setminus k_1}$	k_2	$x_{k_2} \geq \mathbf{f^1}_{T \setminus k_1} \cdot C_{k_2}$ y $\|T \setminus \{k_1\}\| \geq 2$	$u_{\vec{x}^{T \setminus k_1}}^{T \setminus k_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-2}}}^{T \setminus P^{m-1}}$	k_m	$x_{k_m} \geq \mathbf{f^{m-1}}_{T \setminus P^{m-1}} \cdot C_{k_m}$ y $\|T \setminus P^{m-1}\| \geq 2$	$u_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-1}}}^{T \setminus P^m}$
$u_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-1}}}^{T \setminus P^m}$	FIN	$x_k < \mathbf{f^m}_{T \setminus P^m} \cdot C_k \ \forall k \in T \setminus P_m$ o $\|T \setminus P^m\| = 1$	

Al igual que en los anteriores conjuntos de negociación $P^1, \ldots, P^m$ representan los conjuntos de jugadores reducidos en cada paso, y

$$u_{\vec{x}^T}^{T \setminus k_1}, \ldots, u_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-2}}}^{T \setminus P^{m-1}}, u_{\vec{x}^{T \setminus P^{m-1}}}^{T \setminus P^m}$$

[23] Dado que $\mathbf{f^0}_T \geq \mathbf{f^0}_S \; S \subset T$.

los sucesivos juegos reducidos; dichos juegos son asimismo de valores medios crecientes. Obsérvese como, a diferencia del conjunto de negociación de Mas-Colell pero al igual que para el caso de Aumann & Maschler, el final del proceso de reducción finaliza cuando se verifica que :

(**b1**) $x_k < \mathbf{f^m}_{T\setminus P^m} \cdot C_k \ \ \forall k \in T \setminus P_m$,

(**b2**) o cuando no verificándose la anterior condición se verifica que $|T \setminus P^m| = 1$.

Para el caso (**b1**) generaremos el juego $\overline{u}$ donde, al igual que en los conjuntos de negociación anteriores, se define como

$$\overline{u}(S) = \begin{cases} u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(S) - x(S) & \text{si } u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(S) - x(S) \geq 0 \\ 0 & \text{si } u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(S) - x(S) < 0 \end{cases} \qquad S \subseteq T \setminus P^m.$$

Nótese que $\overline{u}(T \setminus P^m) = v(T \setminus P^m \cup Q \cup \overline{R}) - x(T \setminus P^m \cup Q \cup \overline{R})$ donde $Q \subseteq P^m$ y $\emptyset \neq \overline{R} \subseteq N \setminus T$.

Este juego tiene el núcleo no vacío, nos remitimos para su prueba a la realizada para el conjunto de Aumann-Maschler (pág 137); sea $\vec{t} \in \mathbf{R}^{|T\setminus P^m|}$ un vector del Núcleo. Podemos formular entonces la siguiente objeción $\vec{y}$ a través de la coalición T:

$$\begin{array}{ll} y_i = x_i + \frac{\alpha}{|T|} & i \in P^m \\ y_i = x_i + t_i + \frac{\alpha}{|T|} & i \in T \setminus P^m \end{array}$$

donde $\alpha = [v(T) - x(T)] - [v((T \setminus P^m) \cup Q \cup \overline{R}) - x(T \setminus P^m \cup Q \cup \overline{R})]$. Obsérvese que α siempre será estrictamente positivo: si $Q = P^m$ entonces $((T \setminus P^m) \cup Q \cup \overline{R} = T \cup \overline{R}$ que es una coalición de mayor cardinalidad que T y por tanto, dada la particular selección de T, de menor exceso; si $Q \neq P^m$, entonces $T \cup Q \cup \overline{R}$ verifica la condición (3.13) y en consecuencia, dado que $\vec{x} \in \mathcal{P}$, tiene menor exceso.

Esta objeción no tiene contraobjeción $(M, \vec{z})$ posible. En efecto, consideraremos dos casos:

1.- $(M \cap T) \cap (T \setminus P^m) \neq \emptyset$

$$\sum_{i\in M} z_i = \sum_{i\in M\cap T} z_i + \sum_{i\in M\setminus T} z_i \geq \sum_{i\in M\cap T} y_i + \sum_{i\in M\setminus T} x_i >$$

$$> \sum_{i\in(T\setminus P^m)\cap M} (x_i+t_i) + \sum_{i\in P^m\cap M} x_i + \sum_{i\in M\setminus T} x_i = \sum_{i\in M} x_i + \sum_{i\in(T\setminus P^m)\cap M} t_i \geq^{24}$$

$$\geq \sum_{i\in M} x_i + \overline{u}((T\setminus P^m)\cap M) \geq^{25}$$

$$\geq \sum_{i\in M} x_i + u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}((T\setminus P^m)\cap M) - \sum_{i\in(T\setminus P^m)\cap M} x_i \geq^{26}$$

$$\geq \sum_{i\in M} x_i + \max_{Q\subseteq P^m}\{u(M\cap(T\setminus P^m)\cup Q) - \sum_{i\in Q} x_i\} - \sum_{i\in M\cap(T\setminus P^m)} x_i \geq^{27}$$

$$\geq \sum_{i\in M} x_i + u(M\cap T) - \sum_{i\in M\cap T} x_i =^{28} \sum_{i\in M} x_i + \max_{\emptyset\neq R\subseteq N\setminus T}\{w_R(M\cap T)\} -$$

$$- \sum_{i\in M\cap T} x_i \geq^{29} \sum_{i\in M} x_i + w_{M\setminus T}(M\cap T) - \sum_{i\in M\cap T} x_i =$$

$$= \sum_{i\in M} x_i + v((M\cap T)\cup(M\setminus T)) - \sum_{i\in(M\cap T)\cup(M\setminus T)} x_i = v(M).$$

2.- $(M\cap T)\cap(T\setminus P^m) = \emptyset$.

Este caso se produce cuando todos los jugadores de $M\cap T$ han sido reducidos en el proceso de reducción que nos conducía desde el juego u hasta el juego $u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}$; en otras palabras, tenemos que $M\cap T \subseteq P^m$. Recuérdese que

$$x_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_T \cdot C_{k_1} \geq \mathbf{f^0}_{k1} \cdot C_{k_1} = u(k_1)$$

$$x_{k_j} \geq \mathbf{f^{j-1}}_{T\setminus P^{j-1}} \cdot C_{k_j} \geq^{30} \mathbf{f^{j-1}}_{k_j} \cdot C_{k_j} = u^{T\setminus P^{j-1}}_{x^{T\setminus P^{j-2}}}(k_j) \quad j = 2,\ldots,m$$

es decir, que en cada paso de la reducción el pago al jugador que iba a ser reducido era superior al valor de la función característica para ese jugador.

[24]Dado que $\vec{t}$ pertenece al Núcleo de $\overline{u}$.

[25]Por definición del juego $\overline{u}$.

[26]Aplicando la definición del juego $u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}$ y para todo $Q\subseteq P^m$.

[27]Tomando $Q = M\cap P^m$.

[28]Por definición del juego u.

[29]En concreto y para $R = M\setminus T$.

[30]Nótese que cada juego reducido es un juego de valores medios crecientes y, por tanto, $\mathbf{f^{j-1}}_S \geq \mathbf{f^{j-1}}_i \; \forall i \in S$.

Aplicando la definición de juego reducido a cada una de las anteriores desigualdades tenemos que

$$\sum_{i\in\{k_j\}\cup Q} x_i \geq u(\{k_j\}\cup Q) \;\; j=1,\ldots,m; \;\; \forall\, Q\subseteq P^{j-1}.$$

De manera más compacta, esto equivale a

$$\sum_{i\in P} x_i \geq u(P) \quad \forall\, P\subseteq P^m$$

y por tanto, para el caso concreto en que $P=M\cap T$, tenemos que

$$\sum_{i\in M\cap T} x_i \geq u(M\cap T) \tag{3.16}$$

Esta desigualdad nos permite deducir que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in M} z_i &= \sum_{i\in M\cap T} z_i + \sum_{i\in M\setminus T} z_i \geq \sum_{i\in M\cap T} y_i + \sum_{i\in M\setminus T} x_i > \\
&> \sum_{i\in M\cap T} x_i + \sum_{i\in M\setminus T} x_i \geq^{31} u(M\cap T) + \sum_{i\in M\setminus T} x_i = \\
&= \max_{\emptyset\neq R\subseteq N\setminus T}\{w_R(M\cap T)\} + \sum_{i\in M\setminus T} x_i \geq (\text{para } R = M\setminus T) \\
&\geq w_{M\setminus T}(M\cap T) + \sum_{i\in M\setminus T} x_i = \\
&= v((M\cap T)\cup(M\setminus T)) - \sum_{i\in M\setminus T} x_i + \sum_{i\in M\setminus T} x_i = v(M).
\end{aligned}$$

En ambos casos se llega a la conclusión de que $\sum_{i\in M} z_i > v(M)$ lo que invalida la contraobjeción.

Finalmente, nos queda por analizar el último caso que hemos denominado anteriormente (**b2**) y que se caracterizaba por:

- $|T\setminus P^m| = 1$; supongamos que $T\setminus P^m = \{k^*\}$
-

$$x_{k^*} \geq \mathbf{f^m}_{T\setminus P^m}\cdot C_{k^*} = u^{T\setminus P^m}_{x^{T\setminus P^{m-1}}}(k^*) \tag{3.17}$$

[31] Por (3.16).

Aplicando el proceso de desreducción (proposición **3.9**) partiendo de la desigualdad (3.17) obtenemos que

$$\sum_{i \in S} x_i \geq u(S) \ \forall S \subseteq T. \tag{3.18}$$

Entonces la coalición T puede formular la siguiente objeción

$$y_i = x_i + \frac{v(T) - x(T)}{|T|} \quad \forall i \in T.$$

Esta objeción no tiene contraobjeción $(M, \vec{z})$ posible dado que

$$\sum_{i \in M} z_i \geq \sum_{i \in M \cap T} y_i + \sum_{i \in M \setminus T} x_i > \sum_{i \in M \cap T} x_i + \sum_{i \in M \setminus T} x_i \geq^{32}$$

$$\geq u(M \cap T) + \sum_{i \in M \setminus T} x_i \geq w_{M \setminus T}(M \cap T) + \sum_{i \in M \setminus T} x_i = v(M)$$

lo cual es una contradicción dado que la condición para realizar una objeción es que $v(M) \geq x(M)$.

En todos los casos analizados no existe contraobjeción posible con lo que la distribución $\vec{x}$ queda excluída del conjunto de negociación de Zhou. □

Una vez analizadas las imputaciones pertenecientes al conjunto $\mathcal{P}$ analizaremos las imputaciones pertenecientes al conjunto $\mathcal{O}$. Nótese que una consecuencia del anterior Lema es que las únicas imputaciones fuera del Núcleo que pueden pertenecer al conjunto de negociación son las pertenecientes al conjunto $\mathcal{O}$. Ello nos permite enunciar el siguiente corolario:

Corolario 3.18 *Sea* $v \in \mathcal{FG}^n$ *respecto al vector* $\vec{C}$*, entonces*

$$si\ v\ es\ convexo \Rightarrow \mathbf{RB}(v) = C(v).$$

DEM.

Partiendo de que $C(v) \subseteq \mathbf{RB}(v)$, lo único que debemos probar es que si $\vec{x} \in I(v) - C(v) \Rightarrow \vec{x} \notin \mathbf{RB}(v)$. Lo que en realidad probaremos es que si $\vec{x} \in I(v) - C(v) \Rightarrow \vec{x} \in \mathcal{P}$ con lo que teniendo en cuenta el Lema anterior quedará demostrado el Corolario.

[32] Por (3.17).

Supongamos entonces que $\vec{x} \notin \mathcal{P}$ y por tanto $\vec{x} \in \mathcal{O}$; entonces existirán dos coaliciones T y M que satisfacen (3.13) tales que $v(T) - x(T) = v(M) - x(M)$ siendo T es una coalición de exceso máximo y máxima cardinalidad.

Ahora bien, si v es convexo ello implica que el juego de excesos $w_{\vec{x}}(R) = e(\vec{x}, R) = v(R) - x(R)$ es también convexo. De aquí, y dado que M y T no son comparables y con intersección no vacía (condición (3.13)) tendremos que

$$e(T, \vec{x}) + e(M, \vec{x}) \leq e(M \cup T, \vec{x}) + e(M \cap T, \vec{x}).$$

En este momento se pueden dar dos casos:

- si $e(M \cup T, \vec{x}) \geq e(M \cap T, \vec{x}) \Rightarrow 2 \cdot e(T, \vec{x}) \leq 2 \cdot e(M \cup T, \vec{x})$ lo que comporta una contradicción ya que $M \cup T$ es de mayor cardinalidad que T.
- si $e(M \cup T, \vec{x}) < e(M \cap T, \vec{x}) \Rightarrow e(T, \vec{x}) < e(M \cap T, \vec{x})$ lo que comporta una contradicción con el hecho de que T sea una coalición de máximo exceso.

En ambos casos llegamos a una contradicción y por tanto $\vec{x} \in \mathcal{P}$. Como ya hemos dicho, por el Lema **3.17**, ello implica que $\vec{x} \notin \mathbf{RB}(v)$

□

El estudio general sobre si una imputación de $\mathcal{O}$ pertenece o no al conjunto de negociación de Zhou no es un problema resuelto. A lo anteriormente enunciado sobre los juegos convexos, añadiremos ahora un estudio de los juegos de tres jugadores.

3.4.1 El caso de tres jugadores.

Cuando estudiabamos el conjunto de negociación de Aumann-Maschler, analizamos el caso particular de los juegos de tres jugadores y llegabamos a la conclusión de que coincidía con el Núcleo para el caso de los juegos equilibrados. Ahora realizaremos el estudio del conjunto de negociación de Zhou para el caso de los juegos financieros de tres jugadores.

Teorema 3.19 *Sea (N, v) un juego financiero de tres jugadores,*

$$\mathbf{RB}(v) = \{\vec{x} \in I(v) \ \textit{tal que o bien,} \ \vec{x} \in C(v), \ \textit{o} \ \vec{x} \in \mathcal{O}\}.$$

DEM.

Sea $\vec{x} \in I(v)$; entonces nos podemos encontrar en tres situaciones diferentes

(a) $\vec{x} \in C(v)$;

(b) $\vec{x} \in \mathcal{P}$;

(c) $\vec{x} \in \mathcal{O}$.

Para el caso **(a)**, la imputación pertenece a $\mathbf{RB}(v)$; para el caso el caso **(b)** ya hemos demostrado en el lema **3.17** que $\vec{x} \notin \mathbf{RB}(v)$; sólo nos queda por demostrar que para el caso **(c)** $\vec{x} \in \mathbf{RB}(v)$.

Si $\vec{x} \notin C(v)$, al menos una coalición de dos jugadores tiene exceso estrictamente positivo; sea $\{i, j\}$ esta coalición .Sin embargo, dado que el juego es equilibrado se verifica que no todas las coaliciones de dos jugadores pueden tener exceso estrictamente positivo: en efecto, sea $N = \{i, j, k\}$ y supongamos que

$$\begin{aligned} v(ij) - x_i - x_j &> 0, \\ v(ik) - x_i - x_k &\geq 0, \\ v(jk) - x_j - x_k &\geq 0. \end{aligned}$$

Multiplicando las anteriores desigualdades por $\frac{1}{2}$ y sumándolas obtenemos que

$$\frac{1}{2} \cdot [v(ij) + v(ik) + v(jk)] > x(N) = v(N)$$

lo que contradice que el Núcleo sea no vacío[33].

Dado que $\vec{x} \in \mathcal{O}$, sean entonces $T = \{ij\}$ y $M = \{ik\}$ las dos coaliciones de máximo exceso (estrictamente positivo) que figuran en la definición del conjunto $\mathcal{O}$. Por la anterior discusión, se verificará que $v(jk) - x_j - x_k < 0$. De esta manera las únicas coaliciones que pueden realizar una objeción son T y M. Si T realiza una objeción, $(T, \vec{y})$, la coalición M siempre podrá formular la siguiente contraobjeción

$$\begin{aligned} z_i &= y_i, \\ z_k &= x_k + [v(ij) - y_i - x_j).] \end{aligned}$$

Obsérvese que $v(ij) - y_i - x_j > 0$; supongamos que $v(ij) - y_i - x_j \leq 0$, entonces dado que $y_i > x_i$ tendríamos que $v(ij) - x_i - x_j < 0$ lo cuál es imposible dado que $\{ij\}$ tenía exceso estrictamente positivo. Por tanto se deduce que $z_k > x_k$. Además se verifica que

$$z_i + z_k = y_i + x_k + [v(ij) - y_i - x_j] = y_i + x_k + [v(ij) - y_i - x_j - x_i + x_i] =$$

[33]Ver caracterización de los juegos con Núcleo no vacío via conjuntos equilibrados (Bondareva,1962).

$$= x_i + x_k + [v(ij) - x_i - x_j] =^{34} x_i + x_k + [v(ik) - x_i - x_k = v(ik);$$

por tanto $\vec{z}$ constituye una correcta contraobjeción.

En el caso que la coalición que realice la objeción sea la coalición $\{ik\}$, la coalición $\{ij\}$ podrá realizar una contraobjeción de manera idéntica a la anterioremente expuesta (para la demostración, basta permutar los índices j y k). □

Del anterior Teorema concluimos que el conjunto de Negociación de Zhou no siempre equivale al Núcleo del juego. En la siguiente gráfica, se presentan cuatro casos diferentes:

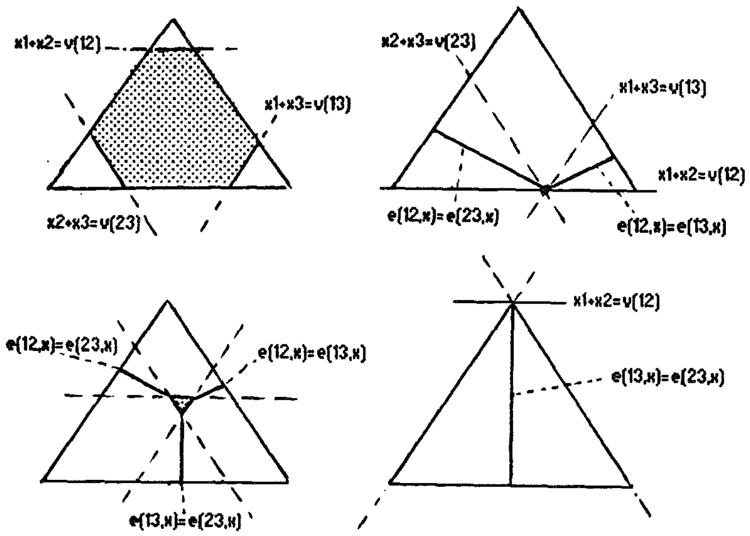

Figura **3.1**

Obsérvese como para el caso de tres jugadores el conjunto de negociación coincide con un conjunto estable: aquel que selecciona imputaciones del Núcleo y que además escoge, entre las imputaciones no dominadas por el Núcleo pero que no pertenecen a él, aquellas que otorgan el mismo exceso a las coaliciones que no verifican las condiciones del Núcleo.

Es interesante entonces investigar si siempre el conjunto de negociación de Zhou coincidirá con un conjunto estable. La respuesta la tenemos examinando el juego del ejemplo **2.30**. Para la imputación

$$\vec{x} = (12.5,\ 23.5,\ 30,\ 66)$$

las únicas coaliciones con exceso positivo, y que por tanto pueden formular objeciones, son la $\{1,3\}$ y la $\{2,3\}$; ambas tienen un exceso de 1.5 unidades. A pesar de ser

[34]Dado que $v(ij) - x_i - x_j = v(ik) - x_i - x_k$.

un juego de cuatro jugadores nos hallamos ante la misma situación analizada en el Teorema **3.19**: dos coaliciones de dos jugadores con exceso máximo no comparables y con intersección no vacía; por tanto, el juego de objeciones y contraobjeciones es el mismo que el expuesto anteriormente.

De aquí concluímos que la imputación $\vec{x}$ pertenece al conjunto de negociación de Zhou. Sin embargo, como ya vimos en el capítulo segundo cuando analizabamos este ejemplo, su Núcleo es estable lo que contradice la hipótesis de que el conjunto de Negociación de Zhou es siempre un conjunto estable.

3.5 Apéndice

Lema 3.20 *(utilizado en pág 138)*

$$\overline{u}(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)) = v(S^*) - x(S^*) \ \textit{para alguna} \ S^* \in \Gamma_{\hat{j}\hat{i}}.$$

DEM.

$$\overline{u}(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)) = u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}}(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)) - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i =$$

$$= \max\left\{u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}}(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)),\ u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}}([T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cup k_m) - \right.$$

$$\left. x_{k_m}\right\} - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i =$$

$$= \max\left\{ u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}}(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)) - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i; \right.$$

$$\left. u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-1})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}}([T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cup k_m) - x_{k_m} - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i \right\} =$$

$$= \max\left\{ \{u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-3})}}(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)) - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i\ ; \right.$$

$$u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-3})}}([T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cup k_{m-1}) - x_{k_{m-1}} - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i\ ;$$

$$u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-3})}}([T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^{m-1})] \cup k_m) - x_{k_m} - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i\ ;$$

$$\left. u^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-2})}_{x^{T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^{m-3})}}([T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^{m-1})] \cup k_m \cup k_{m-1}) - x_{k_m} - x_{k_{m-1}} - \sum_{i\in T\setminus(\{\hat{i}\}\cup P^m)} x_i \right\} =$$

.../...

$$= \max_{\emptyset\subseteq M\subseteq\{k_1,\ldots,k_m\}} \left\{u([T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m)] \cup M) - x(M) - x(T \setminus (\{\hat{i}\} \cup P^m))\right\} =$$

$$= u([T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m)] \cup M^*) - x([T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m)] \cup M^*) =$$

(donde $\emptyset \subseteq M^* \subseteq \{k_1, \ldots, k_m\}$)

$$= \max_{\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus (T \cup \{\hat{\jmath}\})} w_R((T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m) \cup M^*) - x(T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m) \cup M^*) =$$

(suponiendo que dicho máximo se da para la coalición $\overline{R}$)

$$= w_{\overline{R}}((T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m) \cup M^*) - x(T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m) \cup M^*) =$$

$$= v([T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m)] \cup M^* \cup (\overline{R} \cup \{\hat{\jmath}\})) - x([T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m)] \cup M^* \cup (\overline{R} \cup \{\hat{\jmath}\})).$$

Finalmente observaremos que $[T \setminus (\{\hat{\imath}\} \cup P^m)] \cup M^* \cup (\overline{R} \cup \{\hat{\jmath}\})$ pertenece a $\Gamma_{\hat{\jmath}\hat{\imath}}$.

□

Capítulo 4

Soluciones puntuales

En este capítulo estudiaremos diversas soluciones que recomiendan una única distribución como pago a los jugadores en el juego. Entre estas soluciones puntuales analizaremos el Valor de Shapley , el nucleolus y el valor de τ. Su análisis se hará desde un punto de vista crítico haciendo hincapié en las dificultades de su aplicación para el caso del juego financiero.

4.1 El valor de Shapley

Fue introducido por L.S. Shapley en 1953 ([51]). La fórmula usual para el valor de Shapley $\phi(v)$ es la siguiente:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma_n(S) \cdot [v(S \cup i) - v(S)] \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.1}$$

donde

$$\gamma_n(T) = \frac{|T|!(n - |T| - 1)!}{n!} \; \forall T \subseteq N, T \neq N. \tag{4.2}$$

Por tanto el valor de Shapley para un jugador i equivale a la suma ponderada de las contribuciones marginales del jugador a las diversas coaliciones que no lo contienen $[v(S \cup i) - v(S)]$. Si tenemos en cuenta que $\sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \gamma_n(S) = 1$ para todo $i \in N$, $\gamma_n(S)$ se interpreta como la probabilidad de que el jugador i se agregue a la coalición S cuando ésta ya se ha formado; por tanto, el valor de Shapley se interpreta como el valor esperado de la contribución marginal del jugador i en el juego v.

Como es sabido, Shapley caracterizó su valor por medio de cuatro axiomas:

- **Eficiencia** $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$.
- **Simetría** Para todo juego $(N, v) \in G^n$ y para toda permutación $\theta : N \to N$ con $(N, \theta v) \in G$ se cumple $\phi_{\theta(i)}(\theta v) = \phi_i(v) \ \forall i \in N$.
- **Aditividad** Para todo par de juegos (N, v) y (N, w) se cumple que $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$, donde (v+w)(S)=v(S)+w(S).
- **Propiedad del "Dummy"** Un jugador es "Dummy" (o inútil) si se verifica que
$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\}) \quad \forall S \subseteq N \setminus \{i\}$$
Si un jugador i es falso y si la solución tiene la propiedad del jugador falso, entonces
$$\phi_i(v) = v(\{i\}).$$

Aprovechando esta caracterización, se deduce una formulación alternativa del valor de Shapley:
$$\phi_i(v) = \sum_{T \ni i} \frac{\lambda_T}{|T|} \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.3}$$
donde λ_T son las coordenadas del juego (N, v) en la base de los juegos de unanimidad u_T[1].

4.1.1 El caso de tres jugadores

Basándonos en la formulación dada por la ecuación (4.3), estudiaremos el valor de Shapley para el caso de un juego financiero de tres jugadores. Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y C_1, C_2, C_3 los recursos asociados a los jugadores; entonces, por (4.3) tenemos que
$$\phi_1(v) = \lambda_{\{1\}} + \frac{\lambda_{\{12\}}}{2} + \frac{\lambda_{\{13\}}}{2} + \frac{\lambda_{\{123\}}}{3}.$$
Sustituyendo el valor de las coordenadas[2] y tomando la notación $v(S) = C(S) \cdot \frac{v(S)}{C(S)} = C(S) \cdot \mathbf{f}_S$ obtenemos
$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= v(1) + \tfrac{v(12)-v(1)-v(2)}{2} + \tfrac{v(13)-v(1)-v(3)}{2} + \\
&\quad + \tfrac{v(123)-v(12)-v(13)-v(23)+v(1)+v(2)+v(3)}{3} = \\
&= C_1 \cdot [\mathbf{f}_1 + \tfrac{\mathbf{f}_{12}-\mathbf{f}_1}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{13}-\mathbf{f}_1}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{123}-\mathbf{f}_{12}-\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_1}{3}] + \\
&\quad + C_2 \cdot [\tfrac{\mathbf{f}_{12}-\mathbf{f}_2}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{123}-\mathbf{f}_{12}-\mathbf{f}_{23}+\mathbf{f}_2}{3}] + \\
&\quad + C_3 \cdot [\tfrac{\mathbf{f}_{13}-\mathbf{f}_3}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{123}-\mathbf{f}_{13}-\mathbf{f}_{23}+\mathbf{f}_3}{3}].
\end{aligned}$$

---

[1] $u_T(S) := \begin{cases} 1 & \text{si } S \supset T, \\ 0 & \text{si } S \not\supset T. \end{cases}$

[2] $\lambda_T = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T|-|S|} v(S)$

Tomando $N = \{i, j, k\}$, podemos expresar el valor de Shapley para el jugador i como:

$$\begin{aligned}\phi_i(v) = \; & C_i \cdot [\mathbf{f}_i + \tfrac{\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_i}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{ik}-\mathbf{f}_i}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{ijk}-\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_{ik}+\mathbf{f}_i}{3}] + \\ & C_j \cdot [\tfrac{\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_j}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{ijk}-\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_{jk}+\mathbf{f}_j}{3}] + \\ & C_k \cdot [\tfrac{\mathbf{f}_{ik}-\mathbf{f}_k}{2} + \tfrac{\mathbf{f}_{ijk}-\mathbf{f}_{ik}-\mathbf{f}_{jk}+\mathbf{f}_k}{3}].\end{aligned} \tag{4.4}$$

Los factores del tipo $\frac{\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_i}{2}$ y sus simétricos siempre son positivos dado que $\mathbf{f}_i = \frac{v(i)}{C_i} \leq \frac{v(ij)}{C(ij)} = \mathbf{f}_{\{ij\}}$; los únicos que pueden ser negativos son los del tipo $\frac{\mathbf{f}_{ijk}-\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_{ik}+\mathbf{f}_i}{3}$ y sus simétricos. Estos son, por tanto, los factores que pueden hacer que la distribución propuesta por Shapley no pertenezca al Núcleo. Esta idea es la que formalizamos en la siguiente proposición:

Proposición 4.1 *Sea $(\{i, j, k\}, v)$ un juego financiero de tres jugadores,*

$$si \; \mathbf{f}_N + \mathbf{f}_i \geq \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ik} \; \forall j \neq k \in N \setminus i \; \forall i \in N \; \Rightarrow \; \phi(v) \in C(v) \tag{4.5}$$

DEM.

La eficiencia se deriva de la definición del valor de Shapley; la racionalidad individual se deriva de la superaditividad del juego financiero; sólo nos queda por demostrar la racionalidad coalicional.

Si se cumple la condición (4.5) todos los factores de la expresión (4.4) serán positivos. Por tanto,

$$\begin{aligned}\phi_i(v) + \phi_j(v) \; \geq \; & \left(C_i \cdot [\mathbf{f}_i + \tfrac{\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_i}{2}] + C_j \cdot [\tfrac{\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_j}{2}]\right) + \\ + & \left(C_j \cdot [\mathbf{f}_j + \tfrac{\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_j}{2}] + C_i \cdot [\tfrac{\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_i}{2}]\right) = v(\{ij\})\end{aligned}$$

□

Es fácil también suponer que, en muchos casos, el valor de Shapley será una distribución que no pertenecerá al Núcleo del juego.

Ejemplo 4.2 *Sea el siguiente juego $v(1) = 10$; $v(2) = 20$; $v(3) = 33$; $v(12) = 33$; $v(13) = 44$; $v(23) = 55$; $v(123) = 66$; donde $C_1 = 10$, $C_2 = 20$, $C_3 = 30$. El Núcleo se reduce a un único punto [$(11, 22, 33)$] y el valor de Shapley es $\phi(v) = (11, 21.5, 33.5)$.*

Este último ejemplo nos abre una serie de cuestiones sobre la validez del valor de Shapley en un juego financiero:

- El valor de Shapley no siempre pertenece al Núcleo del juego. Sin embargo, éste no es un inconveniente específico de los juegos financieros.

- Consideremos el beneficio neto para cada jugador según el valor de Shapley $[(1, 1.5, 0.5)]$; si lo expresamos en tanto por ciento respecto a los recursos invertidos, obtendremos los siguientes porcentajes (10%, 7.5%, 11.66%). Obsérvese que el jugador 2, cobra en términos medios una cantidad inferior. Está distribución seguramente no sería aceptada por el jugador 2. Diremos que la distribución no es creciente en valores medios.

Observación 4.3 *Si el valor de Shapley representa una distribución igualitaria del valor de las coordenadas (ver (4.3)) sin tener en cuenta el "esfuerzo" realizado por cada jugador en la consecución del beneficio común, la familia de valores de Shapley ponderados (Kalai & Samet [24], Hamlem, Hamlem & Tschirhart [22]) introduce un ponderación en la distribución del valor de las coordenadas. En este sentido, para el caso de juegos financieros parece adecuado utilizar como factor de ponderación los recursos de cada jugador. De esta manera definimos el valor de Shapley proporcional $\phi^p(v)$ como*

$$\phi_i^p(v) = \sum_{T \ni i} \left(\frac{C_i}{\sum_{j \in T} C_j} \cdot \lambda_T \right) \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.6}$$

donde λ_T son las coordenadas del juego v en la base de los juegos de unanimidad.

A pesar de tener en cuenta las diferentes aportaciones de los jugadores, el valor de Shapley proporcional no pertenece, en general, al Núcleo; siguiendo con el ejemplo **4.2**, *el valor de Shapley proporcional es*

$$\phi(v) = (10.75,\ 21.8,\ 33.45)$$

que no pertenece al Núcleo.

- El valor de Shapley nació con la idea de responder a los jugadores acerca de lo que podrían esperar del juego (valor esperado del juego). A la vista del punto anterior, no es muy probable que el valor de Shapley cumpla con esta exigencia. El problema se centra en que el valor de Shapley distribuye las ganancias en términos absolutos y no relativos.

- Dado que el modelo del juego financiero nace de observar una retribución media creciente según los recursos invertidos, es lógico que cada jugador espere una distribución del beneficio total creciente tambien en términos medios. Esta idea la recuperaremos en la cuarta parte de esta tésis, cuando tratemos de soluciones específicas para juegos financieros.

- Una solución para un juego financiero debe ser inmune a ciertas manipulaciones de los jugadores: si un jugador recibe un determinado pago según un concepto de solución este pago no debe poder incrementarse si el jugador se desdobla en el juego en dos jugadores diferentes dotando a cada uno de ellos con la mitad de los recursos aportados por el jugador. Esta condición es la misma que enuncia M.A. de Frutos ([18]) en un contexto de juegos de Bancarrota . En el capítulo **5** estudiaremos con más detalle esta propiedad. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Ejemplo 4.4 *Tomemos el siguiente juego financiero respecto al vector* $(10, 20, 30)$

$$v(1) = 10;\ v(2) = 20;\ v(3) = 30;\ v(12) = 30$$

$$v(13) = 44;\ v(23) = 55;\ v(123) = 72$$

donde el valor de Shapley es $\phi(v) = (13, 23.5, 35.5)$*. Obsérvese que el jugador* **2** *está peor pagado en términos medios que el jugador* **1***. Imaginemos que este jugador se desdobla en dos (*2^I *y* 2^{II} *siendo* $C_2^I = 10$ *y* $C_2^{II} = 10$*) generándose un nuevo juego financiero de cuatro jugadores* $(\overline{N}, \overline{v})$ *con* $\overline{N} = \{1, 2^I, 2^{II}, 3\}$*:*

$$\overline{v}(1) = \overline{v}(2) = \overline{v}(3) = 10;\ \overline{v}(4) = 30;\ \overline{v}(12) = \overline{v}(13) = \overline{v}(23) = 20;\ \overline{v}(123) = 30$$

$$\overline{v}(14) = \overline{v}(24) = \overline{v}(34) = 44;\ \overline{v}(124) = \overline{v}(134) = \overline{v}(234) = 55;\ \overline{v}(1234) = 72$$

El valor de Shapley para este nuevo juego es $\phi(\overline{v}) = (12 + \frac{1}{4}, 12 + \frac{1}{4}, 12 + \frac{1}{4}, 35 + \frac{1}{4})$*. Obsérvese que el pago total al jugador 2 se ha incrementado, tanto en términos absolutos como en términos medios* $\phi_2^I(\overline{v}) + \phi_2^{II}(\overline{v}) \geq \phi_2(v)$*. Por tanto, si el valor de Shapley es el criterio elegido para la distribución del beneficio, los jugadores deberán estudiar su estrategia óptima respecto a cómo presentarse frente al resto de jugadores con el objetivo de maximizar su ganancia.*

4.2 El nucleolus

Otro concepto de solución puntual importante dentro de la literatura de juegos es el nucleolus que fue introducido por Schmeidler [48].El nucleolus $\eta(v)$ se define en base a los denominados excesos de las coaliciones.

Definición 4.5 *Sea (N, v) un juego cooperativo y $\vec{x}$ una imputación. El exceso de la coalición $S \subseteq N$ respecto a $\vec{x}$, $e(S, \vec{x})$ se define como*

$$e(S, \vec{x}) = v(S) - x(S).$$

El exceso representa la "queja" de la coalición S dada la distribución $\vec{x}$: un exceso positivo (una queja positiva) representa que la coalición S no ha recibido como mínimo lo que ella se podía garantizar y por tanto la distribución estará fuera del Núcleo. Por tanto, cuanto más pequeño sea el exceso mejor (incluso negativo[3]). El nucleolus es aquella distribución $\eta(v)$ que minimiza las máximas quejas de las coaliciones. En efecto, sea $\Theta(\vec{x})$ el vector formado por los 2^n excesos respecto a la distribución $\vec{x}$, uno por cada coalición, escritos en forma decreciente; sea $\Theta(\vec{y})$, el vector de excesos para otra distribución cualquiera. Los vectores de excesos ordenan las quejas de las coaliciones, desde la mayor a la menor; si comparamos una a una las quejas siguiendo el orden decreciente establecido, resultará mejor aquella distribución que, en una de estas comparaciones, otorgue un menor exceso a alguna coalición. Más formalmente diremos que $\vec{x}$ será preferida a $\vec{y}$ si, siendo $\Theta(x) = (\Theta(\vec{x})_1, \Theta(\vec{x})_2, \ldots, \Theta(\vec{x})_{2^n})$, se cumple que

$$\Theta(\vec{x})_i < \Theta(\vec{y})_i \quad \text{para algún } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq 2^n$$

y

$$\Theta(\vec{x})_k = \Theta(\vec{y})_k \quad \text{para toda } k \text{ tal que } 1 \leq k \leq i-1.$$

Este proceso de comparación se denomina ordenación lexicográfica de los vectores de excesos. El nucleolus se define entonces como aquella imputación que es preferida, de acuerdo con el orden lexicográfico de los vectores de excesos, a cualquier otra imputación.

[3]A pesar de reflejar que la coalición ha recibido más de lo que podía garantizarse, un exceso negativo continúa expresando una queja dado que, comparado con el exceso de otra coalición, aún podría recibir un pago mayor.

En general, no existe fórmula general para el cálculo del nucleolus; en este sentido cabe destacar el trabajo de S.Brune [8] que facilita un método para calcular el nucleolus de juegos con un número reducido de jugadores, y en concreto, para juegos de tres jugadores.

El Estudio del nucleolus se puede realizar alternativamente vía el denominado Kernel del juego (Davis & Maschler [11]). El Kernel es una solución que selecciona un subconjunto de imputaciones basándose en los excesos de las coaliciones. Para juegos con conjunto de imputaciones no vacío, su existencia se puede demostrar por el hecho de que el nucleolus siempre es una imputación del Kernel. Si relajamos la condición de racionalidad individual para las soluciones, y basándonos en los mismos conceptos de Kernel y nucleolus, obtendremos los denominados Prekernel (Maschler, Peleg y Shapley [33]) y prenucleolus ; igual que para el nucleolus y el Kernel, el prenucleolus siempre pertenece al Prekernel. Estos mismos autores [33] establecieron que Kernel y Prekernel coincidían para una gran cantidad de juegos entre los cuales se hallaban los juegos superaditivos. Por tanto, y dado que los juegos financieros verifican la superaditividad, para el estudio del nucleolus y del Kernel nos será suficiente centrarnos en el análisis del Prekernel y el Prenucleolus. En concreto, estudiaremos qué sucede en el caso de tres jugadores y analizaremos el caso de una subclase de juegos financieros definida en el capítulo tercero (sección **2.3.2**, pág 90), para la cual ya se realizó el estudio del núcleo.

Seguidamente, definiremos el Prekernel y empezaremos determinando lo que se entiende por máximo excedente :

Definición 4.6 *Sea $v \in G^n$ y $\vec{x} \in I^*(v)$, el máximo excedente del jugador i sobre otro jugador j respecto a la imputación $\vec{x}$ en el juego v se define como*

$$s_{ij}^v = \max\left(e^v(S,\vec{x}) | i \in S;\ j \notin S\right).$$

Con esta notación se define el Prekernel de un juego como

Definición 4.7 *El Prekernel ($\mathcal{K}^*(v)$) de un juego v es el conjunto de todas las preimputaciones $\vec{x} \in I^*(v)$ que satisfacen*

$$s_{ij}(\vec{x}) = s_{ji}(\vec{x}) \quad \forall\, i,j \in N,\ i \neq j$$

4.2.1 El caso de tres jugadores

En esta sección determinaremos las fórmulas que permitirán el cálculo del (pre)kernel para los juegos financieros de tres jugadores; dado que para este caso, es bien conocido que el (pre)Kernel sólo contiene un único elemento, estas mismas fórmulas nos servirán asimismo para el cálculo del (pre)Nucleolus.

Posteriormente aplicaremos estos resultados a un caso especial de juego financiero.

Dado un juego superaditivo de tres jugadores, consideremos cinco situaciones diferentes referentes a los valores de la función característica:

$$\text{(a)}\ \tfrac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3)-v(N)) \geq \max\left\{\begin{array}{c} \tfrac{1}{3}(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(1)+v(23)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(2)+v(13)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(3)+v(12)-v(N)) \end{array}\right\};$$

$$\text{(b)}\ \tfrac{1}{3}(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)) \geq \max\left\{\begin{array}{c} \tfrac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(1)+v(23)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(2)+v(13)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(3)+v(12)-v(N)) \end{array}\right\};$$

$$\text{(c)}\ \tfrac{1}{2}(v(1)+v(23)-v(N)) \geq \max\left\{\begin{array}{c} \tfrac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3)-v(N)) \\ \tfrac{1}{3}(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(2)+v(13)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(3)+v(12)-v(N)) \end{array}\right\};$$

$$\text{(d)}\ \tfrac{1}{2}(v(2)+v(13)-v(N)) \geq \max\left\{\begin{array}{c} \tfrac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(1)+v(23)-v(N)) \\ \tfrac{1}{3}(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(3)+v(12)-v(N))) \end{array}\right\};$$

$$\text{(e)}\ \tfrac{1}{2}(v(3)+v(12)-v(N)) \geq \max\left\{\begin{array}{c} \tfrac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(1)+v(23)-v(N)) \\ \tfrac{1}{2}(v(2)+v(13)-v(N)) \\ \tfrac{1}{3}(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)) \end{array}\right\}.$$

Seguidamente, analizaremos los casos (a), (b) y (c) siendo los caso (d) y (e) simétricos al (c).

(a) En esta situación la única preimputación $\vec{x}$ perteneciente al Prekernel resulta de igualar los excesos para las coaliciones individuales, i.e.

$$e(i,\vec{x}) = \frac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3)-v(N)) \quad \forall i \in N,$$

o lo que es lo mismo

$$x_i = v(i) - \frac{1}{3}(v(1)+v(2)+v(3)-v(N)) \quad \forall i \in N.$$

Efectivamente, esta distribución pertenece al Prekernel dado que

$$e(1,\vec{x}) = e(2,\vec{x}) = e(3,\vec{x}) \geq \max \left\{ \begin{array}{c} e(12,\vec{x}) \\ e(13,\vec{x}) \\ e(23,\vec{x}) \end{array} \right\}.$$

Para demostrar esta desigualdad supongamos que $e(\{i\},\vec{x}) < e(\{jk\},\vec{x})$ $i,j,k \in N$; entonces, dado que $e(\{i\},\vec{x}) + e(\{jk\},\vec{x}) = v(i) + v(jk) - v(N)$, tendremos que $2 \cdot e(\{i\},\vec{x}) < v(i) + v(jk) - v(N)$, y por tanto, $e(\{i\},\vec{x}) < \frac{1}{2}(v(i) + v(jk) - v(N))$. Dado que los excesos de las coaliciones individuales son iguales resultará que

$$e(\{i\},\vec{x}) = \frac{1}{3}(v(1) + v(2) + v(3) - v(N)) < \frac{1}{2}(v(i) + v(jk) - v(N)),$$

lo cual es una contradicción con la hipótesis de partida de este caso.

Vamos a verificar ahora que sólo existe una distribución en el Prekernel: supongamos que existiera otra preimputación $\vec{t}$ diferente de $\vec{x}$; entonces, por ejemplo y sin pérdida de generalidad, se debería cumplir que

$$e(1,\vec{t}) > e(2,\vec{t}) \text{ y } e(1,\vec{t}) \geq e(3,\vec{t}). \tag{4.7}$$

Por otra parte, por la hipótesis de este apartado tenemos que

$$\frac{1}{2}(v(1) + v(23) - v(N)) \leq \frac{1}{3}(v(1) + v(2) + v(3) - v(N))$$

que por eficiencia de la distribución equivale a

$$\frac{1}{2}\left(e(1,\vec{t}) + e(23,\vec{t})\right) \leq \frac{1}{3}\left(e(1,\vec{t}) + e(2,\vec{t}) + e(3,\vec{t})\right).$$

De esta desigualdad y por (4.7) obtenemos que

$$\frac{1}{2}\left(e(1,\vec{t}) + e(23,\vec{t})\right) < e(1,\vec{t})$$

y por tanto, $e(1,\vec{t}) > e(23,\vec{t})$; de esta inecuación y nuevamente por (4.7), concluimos que $s_{12}(\vec{t}) > s_{21}(\vec{t})$ lo que implica que la distribución $\vec{t}$ no puede pertenecer al Prekernel.

(b) En este caso, consideraremos la preimputación resultante de igualar los excesos para las coaliciones de dos jugadores. Los correspondientes excesos serán

$$e(ij,\vec{x}) = \frac{1}{3}\left(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)\right) \quad \forall i,j \in N$$

y la preimputación que obtendremos será:

$$x_1 = \frac{v(12)+v(13)-2v(23)+v(N)}{3};$$

$$x_2 = \frac{v(12)-2v(13)+v(23)+v(N)}{3};$$

$$x_3 = \frac{-2v(12)+v(13)+v(23)+v(N)}{3}.$$

Dicha preimputación pertenece al Prekernel dado que

$$e(12,\vec{x}) = e(13,\vec{x}) = e(23,\vec{x}) \geq \max\left\{\begin{array}{c} e(1,\vec{x}) \\ e(2,\vec{x}) \\ e(3,\vec{x}) \end{array}\right\}.$$

Al igual que en el caso anterior, esta última relación es sencilla de demostrar: supongamos que $e(ij,\vec{x}) < e(k,\vec{x})$ $i,j,k \in N$. Por eficiencia de $\vec{x}$ tenemos que $e(\{ij\},\vec{x}) + e(\{k\},\vec{x}) = v(ij) + v(k) - v(N)$, lo cual implica que

$$e(ij,\vec{x}) < \frac{1}{2}\left(v(ij)+v(k)-v(N)\right).$$

Dado que $e(ij,\vec{x}) = \frac{1}{3}\left(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)\right)$, obtenemos que

$$\frac{1}{3}\left(v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)\right) < \frac{1}{2}\left(v(ij)+v(k)-v(N)\right).$$

Por tanto, llegamos a una contradicción con la hipótesis de partida para este caso.

Además, la distribución analizada anteriormente es la única que encontramos en el Prekernel: supongamos que tuvieramos una imputación $\vec{t}$ para la cual existieran diferencias en los excesos de las coaliciones de dos jugadores; por ejemplo y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$e(12,\vec{t}) > e(13,\vec{t}) \text{ y } e(12,\vec{t}) \geq e(23,\vec{t}) \tag{4.8}$$

Por otro lado y por la hipótesis de partida de este caso tenemos que

$$\frac{1}{3}\cdot[v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)]\geq\frac{1}{2}\cdot[v(12)+v(3)-v(N)];$$

por eficiencia de la distribución $\vec{t}$ ello equivale a

$$\frac{1}{3}\cdot[e(12,\vec{t})+e(13,\vec{t})]+e(23,\vec{t})\geq\frac{1}{2}\cdot[e(12,\vec{t})+e(3,\vec{t})],$$

de donde, por (4.8) y sustituyendo el valor de $e(13,\vec{t})$ y $e(23,\vec{t})$ por el de $e(12,\vec{t})$ obtenemos que $e(12,\vec{t})>e(3,\vec{t})$ lo que implica que $s_{23}(\vec{t})>s_{32}(\vec{t})$; esta desigualdad imposibilita que esta distribución pertenezca al Prekernel.

(c) Para este caso, una condición necesaria para que una distribución $\vec{t}$ pertenezca al Prekernel es que los excesos de la coalición $\{1\}$ y la coalición $\{23\}$ se igualen.

Efectivamente, supongamos que

$$e(1,\vec{t})>e(23,\vec{t}). \tag{4.9}$$

Entonces, por la hipótesis de este caso se verificaría que, o bien $e(1,\vec{t})>e(2,\vec{t})$, o $e(1,\vec{t})>e(3,\vec{t})$ o ambas; si no se verificara ninguna de estas desigualdades tendríamos que

$$\frac{1}{2}\cdot[e(1,\vec{t})+e(23,\vec{t})]\geq\frac{1}{3}\cdot[e(1,\vec{t})+e(2,\vec{t})+e(3,\vec{t})]\geq$$
$$\geq\frac{1}{3}\cdot[e(1,\vec{t})+e(1,\vec{t})+e(1,\vec{t})=e(1,\vec{t})$$

lo que implicaría que $e(23,\vec{t})\geq e(1,\vec{t})$, contradicción con (4.9).

Por tanto, supongamos que, sin pérdida de generalidad, $e(1,\vec{t})>e(2,\vec{t})$; por (4.9) deduciremos que $s_{12}(\vec{t})>s_{21}(\vec{t})$ lo cual impide que dicha preimputación pueda pertenecer al Prekernel.

De la misma forma si

$$e(1,\vec{t})<e(23,\vec{t}) \tag{4.10}$$

tendríamos que, o bien $e(23,\vec{t})>e(13,\vec{t})$, o $e(23,\vec{t})>e(12,\vec{t})$ o ambas; si no se verificara ninguna de estas desigualdades tendríamos que

$$\frac{1}{2}\cdot[e(1,\vec{t})+e(23,\vec{t})]\geq\frac{1}{3}\cdot[e(12,\vec{t})+e(13,\vec{t})+e(23,\vec{t})]\geq$$
$$\geq\frac{1}{3}\cdot[e(23,\vec{t})+e(23,\vec{t})+e(23,\vec{t})]=e(23,\vec{t})$$

lo que implicaría que $e(1,\vec{t}) \geq e(23,\vec{t})$, contradicción con (4.10). De esta manera si suponemos que $e(23,\vec{t}) > e(13,\vec{t})$, por (4.10) deduciremos que $s_{21}(\vec{t}) > s_{12}(\vec{t})$ lo cual no es posible para un elemento del prekernel.

Sea entonces $\vec{x}$, una preimputación donde se han igualado los excesos de las coaliciones $\{1\}$ y $\{23\}$, i.e.

$$e(1,\vec{x}) = e(23,\vec{x}) = \frac{1}{2}\cdot[v(1)+v(23)-v(N)].$$

Dado que el exceso de la coalición $\{1\}$ está fijado, también estará fijado el valor de x_1:

$$x_1 = v(1) + \frac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(23)].$$

Fijado el valor de x_1, sólo nos quedará por fijar el de x_2 y el de x_3. Otra condición necesaria para que la distribución $\vec{x}$ pertenezca al Prekernel es que $s_{23}(\vec{x})$ sea igual a $s_{32}(\vec{x})$; ambas expresiones dependen, una vez fijado el valor de x_1, del pago que asignemos al jugador 2 en el caso de $s_{23}(\vec{x})$ y del valor que asignemos al jugador 3 en el caso de $s_{32}(\vec{x})$. En efecto,

$$s_{23}(\vec{x}) = \phi_{23}(x_2) = \max\{e(2,\vec{x}),e(12,\vec{x})\} = \max\{v(2),v(12)-x_1\} - x_2;$$

$$s_{32}(\vec{x}) = \phi_{32}(x_3) = \max\{e(3,\vec{x}),e(13,\vec{x})\} = \max\{v(3),v(13)-x_1\} - x_3;$$

Si igualamos $s_{23}(\vec{x}) = s_{32}(\vec{x})$, y teniendo en cuenta que por eficiencia de la distribución $x_2+x_3 = v(23)+\frac{1}{2}[v(N)-v(1)-v(23)]$, resulta que

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(2),v(12)-\big(v(1)+\tfrac{1}{2}[v(N)-v(1)-v(23)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(3),v(13)-\big(v(1)+\tfrac{1}{2}[v(N)-v(1)-v(23)]\big)\Big\} + \tfrac{1}{2}v(23)+\tfrac{1}{2}v(N)-\tfrac{1}{2}v(1)\Big]$$

$$x_3 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(3),v(13)-\big(v(1)+\tfrac{1}{2}[v(N)-v(1)-v(23)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(2),v(12)-\big(v(1)+\tfrac{1}{2}[v(N)-v(1)-v(23)]\big)\Big\} + \tfrac{1}{2}v(23)+\tfrac{1}{2}v(N)-\tfrac{1}{2}v(1)\Big]$$

Estos valores de x_2 y x_3 son los únicos que igualan $s_{32}(\vec{x})$ y $s_{23}(\vec{x})$. Resulta pues que el vector (x_1,x_2,x_3) así encontrado es el único elemento del Prekernel.

Los casos (d) y (e) son simétricos al anterior, y por tanto obviaremos su estudio.

Conocido cuál es el único elemento del Prekernel para los diversos casos, identificaremos este elemento con el único del Kernel (dado que el juego financiero es superaditivo) y por tanto, con el nucleolus. El siguiente cuadro nos resume las anteriores fórmulas:

El nucleolus de un juego financiero de tres jugadores

Caso (**a**).

$$\eta_1 = v(1) + \tfrac{1}{3}\left(v(N) - v(1) - v(2) - v(3)\right)$$

$$\eta_2 = v(2) + \tfrac{1}{3}\left(v(N) - v(1) - v(2) - v(3)\right)$$

$$\eta_3 = v(3) + \tfrac{1}{3}\left(v(N) - v(1) - v(2) - v(3)\right)$$

Caso (**b**).

$$\eta_1 = \frac{v(12) + v(13) - 2v(23) + v(N)}{3}$$

$$\eta_2 = \frac{v(12) - 2v(13) + v(23) + v(N)}{3}$$

$$\eta_3 = \frac{-2v(12) + v(13) + v(23) + v(N)}{3}$$

Caso (**c**).

$$\eta_1 = v(1) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(23)]$$

$$\eta_2 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(2), v(12) - \big(v(1) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(23)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(3), v(13) - \big(v(1) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(23)]\big)\Big\} + \\ + \tfrac{1}{2}v(23) + \tfrac{1}{2}v(N) - \tfrac{1}{2}v(1)\Big]$$

$$\eta_3 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(3), v(13) - \big(v(1) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(23)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(2), v(12) - \big(v(1) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(23)]\big)\Big\} + \\ + \tfrac{1}{2}v(23) + \tfrac{1}{2}v(N) - \tfrac{1}{2}v(1)\Big]$$

Caso (**d**).

$$\eta_1 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(1), v(12) - \big(v(2) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(2) - v(13)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(3), v(23) - \big(v(2) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(2) - v(13)]\big)\Big\} + \\ + \tfrac{1}{2}v(13) + \tfrac{1}{2}v(N) - \tfrac{1}{2}v(2)\Big]$$

$$\eta_2 = v(2) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(2) - v(13)]$$

$$\eta_3 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(3), v(23) - \big(v(2) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(2) - v(13)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(1), v(12) - \big(v(2) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(2) - v(13)]\big)\Big\} + \\ + \tfrac{1}{2}v(13) + \tfrac{1}{2}v(N) - \tfrac{1}{2}v(2)\Big]$$

Caso (**e**).

$$\eta_1 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(1), v(13) - \big(v(3) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(3) - v(12)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(2), v(23) - \big(v(3) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(3) - v(12)]\big)\Big\} + \\ + \tfrac{1}{2}v(12) + \tfrac{1}{2}v(N) - \tfrac{1}{2}v(3)\Big]$$

$$\eta_2 = \tfrac{1}{2}\Big[\max\Big\{v(2), v(23) - \big(v(3) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(3) - v(12)]\big)\Big\} - \max\Big\{v(1), v(13) - \big(v(3) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(3) - v(12)]\big)\Big\} + \\ + \tfrac{1}{2}v(12) + \tfrac{1}{2}v(N) - \tfrac{1}{2}v(3)\Big]$$

$$\eta_3 = v(3) + \tfrac{1}{2}[v(N) - v(3) - v(12)]$$

Seguidamente realizaremos una aplicación de las anteriores fórmulas a un ejemplo simplificado de juego financiero de tres jugadores: el objetivo es estudiar cuándo se aplica cada uno de los casos estudiados.

El ejemplo será el siguiente: sean tres jugadores $\{1,2,3\}$ donde cada uno de ellos dispone de una cantidad para invertir en un Banco (C_1, C_2, C_3); además, supondremos que $C_1 \leq C_2 \leq C_3$ y que $C_3 \leq C_1 + C_2$. Los tipos de interés que les ofrece el Banco dependen de la cantidad a invertir; supongamos, a efectos simplificadores, que el tipo es el mismo para las coaliciones de mismo número de jugadores: notaremos como $\mathbf{i}_{|1|}$, $\mathbf{i}_{|2|}$, $\mathbf{i}_{|3|}$ a los tipos de interés asociados a las coaliciones de uno, dos y tres jugadores respectivamente. Evidentemente se verificará que $\mathbf{i}_{|1|} \leq \mathbf{i}_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|3|}$. Tal y como comentábamos en el capítulo primero, el juego financiero asociado se construirá de la siguiente manera:

$$v(S) = \sum_{i \in S} C_i \cdot \mathbf{i}_{|s|} \quad \forall S \subseteq N.$$

donde s es el número de jugadores de la coalición S y $v(\emptyset) = 0$.

Dada esta situación, uno de los objetivos de este estudio será observar que la fórmula aplicada para el cálculo del nucleolus del juego dependerá del valor relativo $\mathbf{i}_{|2|}$ en relación a $\mathbf{i}_{|1|}$ e $\mathbf{i}_{|3|}$, es decir, de si $\mathbf{i}_{|2|}$ está mas cercano a $\mathbf{i}_{|1|}$ o a $\mathbf{i}_{|3|}$.

Supongamos que $\mathbf{i}_{|1|}$ e $\mathbf{i}_{|3|}$ están fijos, entonces lo único que sabemos es que $\mathbf{i}_{|2|}$ se sitúa entre estos dos valores. Nótese que para este caso concreto siempre se verificará que

$$\frac{1}{2} \cdot [v(1) + v(23) - v(N)] \geq \frac{1}{2} \cdot [v(2) + v(13) - v(N)],$$

y

$$\frac{1}{2} \cdot [v(1) + v(23) - v(N)] \geq \frac{1}{2} \cdot [v(3) + v(12) - v(N)].$$

Estas desigualdades se derivan directamente del hecho de que $C_1 \leq C_2 \leq C_3$ y de que los tipos de interés sólo dependen del número de jugadores de la coalición. Por tanto, de las cinco fórmulas que hemos facilitado sólo los casos (a), (b) y (c) serán considerados. Para saber en cuál de las tres situaciones nos encontramos, descompondremos el campo de variación de $\mathbf{i}_{|2|}$ en intervalos teniendo en cuenta los siguientes dos valores: el primero, $\mathbf{i}^1_{|2|}$, surgirá de igualar

$$\frac{1}{3} \cdot [v(1) + v(2) + v(3) - v(N)] = \frac{1}{2} \cdot [v(1) + v(23) - v(N)],$$

el segundo, $\mathbf{i}^2_{|2|}$, de igualar

$$\frac{1}{2} \cdot [v(1) + v(23) - v(N)] = \frac{1}{3} \cdot [v(12) + v(13) + v(23) - 2v(N)].$$

Resueltas las anteriores ecuaciones, los valores que encontramos son respectivamente:

$$\mathbf{i}^1_{|2|} = \frac{2 \cdot (C_2 + C_3) \cdot \mathbf{i}_{|1|} + (C_1 + C_2 + C_3) \cdot \mathbf{i}_{|3|} - C_1 \cdot \mathbf{i}_{|1|}}{3 \cdot (C_2 + C_3)} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{i}^2_{|2|} = \frac{3 \cdot C_1 \cdot \mathbf{i}_{|1|} + (C_1 + C_2 + C_3)\mathbf{i}_{|3|}}{4 \cdot C_1 + (C_2 + C_3)} \tag{4.12}$$

Ambos valores se hallan entre $i_{|1|}$ e $i_{|3|}$. Además, nótese que $\mathbf{i}^1_{|2|} \leq \mathbf{i}^2_{|2|}$; para ello obsérvese que las expresiones (4.11) y (4.12) dependen de $\mathbf{i}_{|1|}$ y de $\mathbf{i}_{|3|}$. Si fijamos $\mathbf{i}_{|1|}$, $\mathbf{i}^1_{|2|}$ e $\mathbf{i}^2_{|2|}$ dependerán linealmente de $\mathbf{i}_{|3|}$, i.e.

$$\mathbf{i}^1_{|2|} = h^1(\mathbf{i}_{|3|}) = a_1 \cdot \mathbf{i}_{|3|} + b_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{i}^2_{|2|} = h^2(\mathbf{i}_{|3|}) = a_2 \cdot \mathbf{i}_{|3|} + b_2$$

donde además $a_2 \geq a_1$.

Para $\mathbf{i}_{|3|} = \mathbf{i}_{|1|}$ se cumplirá que $\mathbf{i}^1_{|2|} = \mathbf{i}^2_{|2|}$; para $\mathbf{i}_{|3|} > \mathbf{i}_{|1|}$ se cumplirá que $\mathbf{i}^1_{|2|} < \mathbf{i}^2_{|2|}$.

Teniendo en cuenta los valores $\mathbf{i}^1_{|2|}$ y $\mathbf{i}^2_{|2|}$ podemos subdividir el campo de variación de $\mathbf{i}_{|2|}$ en tres tramos, y asociarle a cada tramo una de las fórmulas vistas para el nucleolus:

$$\mathbf{i}_{|1|} \leq \mathbf{i}_{|2|} < \mathbf{i}^1_{|2|} \quad \text{caso (a);}$$

$$\mathbf{i}^1_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|2|} < \mathbf{i}^2_{|2|} \quad \text{caso (c);}$$

$$\mathbf{i}^2_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|3|} \quad \text{caso (b);}$$

Así para el primer tramo, es decir cuando $\mathbf{i}_{|2|}$ se sitúa entre $\mathbf{i}_{|1|}$ y $\mathbf{i}^1_{|2|}$, la fórmula que deberemos aplicar será la vista para el caso (a) del estudio general realizado anteriormente. Efectivamente, si $\mathbf{i}_{|2|} < \mathbf{i}^1_{|2|}$, entonces

$$\mathbf{i}_{|2|} < \frac{2 \cdot (C_2 + C_3) \cdot \mathbf{i}_{|1|}) + (C_1 + C_2 + C_3) \cdot \mathbf{i}_{|3|} - C_1 \cdot \mathbf{i}_{|1|}}{3 \cdot (C_2 + C_3)}$$

y por tanto

$$3 \cdot (C_2 + C_3) \cdot \mathbf{i}_{|2|} < 2 \cdot (C_2 + C_3) \cdot \mathbf{i}_{|1|} + (C_1 + C_2 + C_3) \cdot \mathbf{i}_{|3|} - C_1 \cdot \mathbf{i}_{|1|},$$

o equivalentemente,

$$3\,v(23) < 2\,v(2) + 2\,v(3) + v(N) - v(1).$$

Reordenando la ecuación tenemos que

$$2\,v(2) + 2\,v(3) > v(1) + 3\,v(23) - v(N).$$

Sumando $2\,v(1)$ y restando $2\,v(N)$ a ambos lados de la inecuación obtenemos que

$$2\,v(1) + 2\,v(2) + 2\,v(3) - 2\,v(N) > 3\,v(1) + 3\,v(23) - 3\,v(N).$$

lo que implica que

$$\frac{1}{3}\cdot[v(1) + v(2) + v(3) - v(N)] < \frac{1}{2}\cdot[v(1) + v(23) - v(N)].$$

Además, se puede verificar que $\mathbf{i}^1_{|2|} < \frac{\mathbf{i}_{|1|}+\mathbf{i}_{|3|}}{2}$ y que por tanto $\mathbf{i}_{|2|} < \frac{\mathbf{i}_{|1|}+\mathbf{i}_{|3|}}{2}$. Finalmente, utilizando esta desigualdad se deduce que:

$$\frac{1}{3}\cdot[v(12) + v(13) + v(23) - 2v(N)] = \frac{1}{3}\cdot[2\mathbf{i}_{|2|}(C_1 + C_2 + C_3) - 2v(N)] <$$

$$< \frac{1}{3}\cdot[(\mathbf{i}_{|1|} + \mathbf{i}_{|3|})\cdot(C_1 + C_2 + C_3) - 2v(N)] = \frac{1}{3}\cdot[v(1) + v(2) + v(3) - v(N)]$$

con lo que las desigualdades obtenidas se corresponden con las del caso (a).

Para el segundo tramo de variación de $\mathbf{i}_{|2|}$ tenemos que

$$\mathbf{i}^1_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|2|} < \mathbf{i}^2_{|2|}.$$

Sustituyendo los valores de $\mathbf{i}^1_{|2|}$ y $\mathbf{i}^2_{|2|}$ obtenemos que

$$\frac{2\cdot(C_2 + C_3)\cdot\mathbf{i}_{|1|} + (C_1 + C_2 + C_3)\cdot\mathbf{i}_{|3|} - C_1\cdot\mathbf{i}_{|1|}}{3\cdot(C_2 + C_3)} \leq \mathbf{i}_{|2|} \tag{4.13}$$

y

$$\mathbf{i}_{|2|} < \frac{3\cdot C_1\cdot\mathbf{i}_{|1|} + (C_1 + C_2 + C_3)\mathbf{i}_{|3|}}{4\cdot C_1 + (C_2 + C_3)}. \tag{4.14}$$

Mediante operaciones similares a las realizadas para el caso anterior, de (4.13) deducimos que

$$\frac{1}{2}\cdot[v(1) + v(23) - v(N)] \geq \frac{1}{3}\cdot[v(1) + v(2) + v(3) - v(N)];$$

y a partir de (4.14) llegamos a

$$\frac{1}{2} \cdot [v(1) + v(23) - v(N)] \geq \frac{1}{3} \cdot [v(12) + v(13) + v(23) - 2v(N)],$$

lo que implica que estamos en el caso (c).

Para el último tramo lo importante es constatar que se cumple que $\frac{\mathbf{i}_{|1|}+\mathbf{i}_{|3|}}{2} \leq \mathbf{i}^2_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|2|}$. A partir de estas dos desigualdades se deriva que

$$\frac{1}{3}\cdot[v(12)+v(13)+v(23)-2v(N)] \geq \max\{\frac{1}{2}\cdot[v(1)+v(23)-v(N)], \frac{1}{3}\cdot[v(1)+v(2)+v(3)-v(N)]\}$$

y que por tanto estamos en el caso (b).

Teniendo en cuenta lo anterior el pago asignado al primer jugador será el siguiente:

$$\eta_1(v) := \begin{cases} \mathbf{i}_{|1|} \cdot [\frac{2}{3}C_1 - \frac{1}{3}(C_2 + C_3)] + \mathbf{i}_{|3|} \cdot [\frac{1}{3}(C_1 + C_2 + C_3)] & \mathbf{i}_{|1|} \leq \mathbf{i}_{|2|} < \mathbf{i}^1_{|2|} \\ \mathbf{i}_{|2|} \cdot [-\frac{1}{2}(C_2 + C_3)] + \mathbf{i}_{|3|} \cdot [\frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)] + \mathbf{i}_{|1|} \cdot (\frac{1}{2}C_1) & \mathbf{i}^1_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|2|} < \mathbf{i}^2_{|2|} \\ \mathbf{i}_{|2|} \cdot [\frac{1}{3}(2C_1 - C_2 - C_3)] + \mathbf{i}_{|3|} \cdot [\frac{1}{3}(C_1 + C_2 + C_3)] & \mathbf{i}^2_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|2|} \leq \mathbf{i}_{|3|} \end{cases}$$

De la misma manera, para el resto de jugadores se podría formular cuál es el pago asignado. Sin embargo, lo importante de este ejemplo es observar cómo se comporta el nucleolus del juego no en términos absolutos sino en términos de pagos medios. Para observar este punto recuérdese que el Núcleo de un juego financiero se reduce a un único punto cuando el valor medio de la coalición total es igual al valor medio de todas las coaliciones de n-1 jugadores (Teorema **2.9**). Este resultado aplicado a nuestro ejemplo indica que el Núcleo de este juego se reducirá a un solo elemento cuando $\mathbf{i}_{|2|} = \mathbf{i}_{|3|}$, es decir justo en el extremo derecho del campo de variación de $\mathbf{i}_{|2|}$. Cuando esto sucede la única distribución del Núcleo es la proporcional; ello tiene una implicación importante si observamos cuál es el pago para el jugador 1: nótese que dicho pago es decreciente respecto a los valores de $\mathbf{i}_{|2|}$. Entonces, si cuando $\mathbf{i}_{|2|} = \mathbf{i}_{|3|}$ el pago es la distribución proporcional, para valores de $\mathbf{i}_{|2|}$ inferiores a $\mathbf{i}_{|3|}$ el pago al jugador 1 será superior a la distribución proporcional; por eficiencia del nucleolus, alguno de los pagos a los jugadores 2 y 3 (o ambos) serán inferiores a la distribución proporcional.

La consecuencia inmediata de este razonamiento es que para juegos financieros de tres jugadores donde existe una simetría en los tipos de interés respecto al número de jugadores de las coaliciones, siempre el jugador con menos recursos estará cobrando más en términos medios que alguno de los otros dos jugadores (o que ambos). Esto nos indica una deficiencia del nucleolus respecto a su aplicación a los juegos financieros. Finalizaremos esta discusión comentando un ejemplo numérico.

Ejemplo 4.8 *Sean tres jugadores que están dispuestos a invertir un millón el primero, y dos millones cada uno, el segundo y el tercero. Los tipos de interés que pueden conseguir son los siguientes:*

Depósito	*Tipo de interés (efectivo anual)*
0-2,500,000	*10%*
2,500,000-4,500,000	$\mathbf{i}_{\|2\|}$
4,500,000-en adelante	*12.00 %*

donde $\mathbf{i}_{|2|}$ *es un valor entre el 10% y el 12%. El problema se centra en repartir los beneficios fruto de una inversión conjunta entre los tres jugadores.*

Para estos datos la función característica que se genera es la siguiente (en miles de pesetas):

$$v(1) = 100; v(2) = v(3) = 200;$$

$$v(12) = v(13) = 3000 \cdot \mathbf{i}_{|2|};\ v(23) = 4000 \cdot \mathbf{i}_{|2|};\ v(123) = 600$$

En este ejemplo $\mathbf{i}_{|1|} = 10\%$ y $\mathbf{i}_{|3|} = 12\%$. Para estos porcentajes calcularemos los valores críticos de $\mathbf{i}^1_{|2|}$ y $\mathbf{i}^2_{|2|}$ que nos indicarán la formula a aplicar para calcular el nucleolus.

$$\mathbf{i}^1_{|2|} = \frac{2 \cdot 4000 \cdot 0.1 + 5000 \cdot 0.12 - 1000 \cdot 0.1}{3 \cdot 4000} = 10.83\%$$

$$\text{y} \quad \mathbf{i}^2_{|2|} = \frac{3 \cdot 1000 \cdot 0.1 + 600}{4000 + 4000} = 11.25\%.$$

El siguiente esquema nos servirá de guía para utilizar las fórmulas de cálculo del nucleolus:

$\mathbf{i}_{|1|}$=10% 10.83% = $\mathbf{i}^1_{|2|}$ $\mathbf{i}^2_{|2|}$=11.25% $\mathbf{i}_{|1|}$=12%

$\mathbf{i}_{|2|}$ caso (a) ca.(c) caso (b)

Los siguientes gráficos muestran los diversos pagos en tanto por ciento a los jugadores según los valores de $\mathbf{i}_{|2|}$. El pago al jugador 1 desciende desde el 13.3% hasta