DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

HACIA UNA TEORIA DE CARTERAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA REVISION

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR:

Mª Teresa Preixens Benedicto

DIRECTOR:

Dr.D. Máximo Borrell Vidal

CATEDRATICO DE UNIVERSIDAD

BARCELONA, FEBRERO DE 1992

INDICE

INDICE

CONCLUSIONES

ABREVIATURAS DE LOS NOMBRES DE LAS REVISTAS CONSULTADAS

Actualidad Financiera .... A.F.
Alta Dirección .... A.D.
American Economic Review .... A.E.R.
Applied Economics .... A.E.
Econometrica .... Ec.
Economic Journal .... E.J.
Economica .... Eco.
Journal of Business .... J.B.
Journal of Economic Theory .... J.E.T.
Journal of Finance .... J.F.
Journal of Financial Economics .... J.F.E.
Journal of Financial and Quantitative Analysis ...... J.F.Q.A.
Journal of Political Economy .... J.P.E.
Management Science .... M.S.
Operations Research .... O.R.
Review of Economic and Statistics .... R.E.A.S.
Review of Economic Studies .... R.E.S.
Trusts and Estates .... T.E.

PLANTEAMIENTO, OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL

1. INTRODUCCION

La inversión, que en sentido amplio y siguiendo a **Sharpe**[1] puede definirse como

> el sacrificio de un valor presente a cambio de un valor futuro (posiblemente incierto)[2]

ha dado origen a numerosos estudios en las facetas más variadas, lo cual pone de manifiesto el interés que despierta el tema, que puede incluirse dentro de un marco más general constituido por la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre.

Dentro de este contexto, uno de los problemas que más atención ha recibido hace referencia al modo cómo debe repartirse una determinada cantidad de dinero entre una serie de activos y que constituyen lo que se denomina, comúnmente, cartera. El presente trabajo va dirigido también a aportar alguna luz a este problema, pero antes parece oportuno exponer, exactamente, qué entendemos por cartera y qué tipo de cartera constituye el objeto de nuestro estudio (epígrafe 2.).

---

[1] **W.SHARPE**, Investments (Prentice-Hall Internacional, New Jersey, 1985), p.2.

[2] Coincidiendo con esta definición de inversión, **Massé** la define como el "cambio de una satisfacción inmediata y cierta a la que se renuncia contra una esperanza que se adquiere y de la cual el bien invertido es el soporte"; **P.MASSE**, La elección de las inversiones (Sagitario, Barcelona, 1963), p.1.

De las múltiples facetas que pueden distinguirse en el ámbito de estudio de la cartera, prestaremos especial atención a la "revisión de cartera" (apartado 3.) aportando versiones de diferentes autores acerca de lo que debe constituir dicha revisión. En el siguiente apartado clasificaremos los modelos que pueden aplicarse para la revisión de cartera con el fin de tener una visión general de los mismos. Una vez centrado el tema, expondremos (apartados 5. y 6.), cuáles son los objetivos concretos de esta Tesis así como la estructura de la misma.

2. CONCEPTOS DE CARTERA DE VALORES, GESTION DE CARTERA Y TEORIA DE LA CARTERA

2.1. Cartera de valores

Desde la aparición del artículo seminal de **Markowitz**[3] en 1952 y su posterior libro[4] en 1959 son muchos los autores que han tratado el tema de la cartera de valores[5]. A pesar de ello, pocos han sido los que se han preocupado por dar una definición rigurosa y completa de cartera.

---

[3]**H.MARKOWITZ**, "Portfolio Selection", J.F., 1952, pp.77-91.

[4]**H.MARKOWITZ**, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment (John Wiley & Sons, New York, 1959).

[5]Con anterioridad a **Markowitz**, considerado como el padre de la moderna teoría de la cartera, otros autores habían manifestado ya su preocupación por este tema:
J.R.HICKS, "A Suggestion for Simplifying the Theory of Money", Eco., 1935, pp.1-19.
D.H.LEAVEN, "Diversification of Planning", T.E., 1945, pp.469-473.

Digamos ante todo que utilizamos el término "cartera" como versión castellana de la palabra inglesa "portfolio" dejando de lado otra traducción frecuente, la de "portafolio"[6]. Hecha esta aclaración, rastrearemos el significado que distintos autores han dado al término.

1) Para **Rosenberg**[7] "cartera" supone

> la tenencia de cualquier tipo de documento que demuestre la posesión de un activo físico o financiero por parte de un individuo o institución. Una cartera puede estar formada por obligaciones, acciones privilegiadas y acciones ordinarias de empresas de distintos tipos.

En esta definición pueden distinguirse dos niveles:

a) Según el primero, se incluyen dentro del concepto de cartera todos aquellos bienes, físicos o no, poseídos por un individuo o institución; en este sentido, formarían parte de una cartera tanto activos físicos como financieros.

b) *El segundo nivel, de ámbito más restringido, hace referencia a* carteras constituidas únicamente por determinados activos financieros: obligaciones y acciones (ya sean privilegiadas u ordinarias). Obsérvese que **Rosenberg** deliberadamente deja fuera de este nivel conceptual carteras formadas por otros activos financieros tales como, por ejemplo, **commercial paper**.

Observamos asimismo que **Rosenberg** habla de carteras de acciones y obligaciones, sin precisar el carácter bursátil de las mismas pero que debemos suponer deja elíptico este calificativo de modo consciente.

---

[6] Véase por ejemplo, **J.R.PARADA DAZA**, "Medición de la eficiencia de una cartera de valores mobiliarios", A.T., 1984, pp.35-40.

[7] **J.M.ROSENBERG**, Dictionary of Business and Management (John Wiley & Sons, New York, 1978), p.338.

Así, pues, escuchando a este autor y de acuerdo con el campo de trabajo de la presente Tesis Doctoral, admitiremos que una **cartera constará de valores bursátiles de renta fija y/o variable.**

2) Para **Perry**[8] una cartera es

> el conjunto de inversiones, en términos generales, mantenidas por, o a nombre de, un inversor// la lista de tales inversiones.

Esta definición coincide aparentemente con el concepto general expresado por **Rosenberg**, añadiéndole un matiz: una cartera es aquel conjunto de bienes o activos que posee **un inversor**. Por tanto, no cualquier colección de dichos bienes o activos constituye una cartera sino sólo aquellas colecciones cuyos propietarios sean inversores y no meros coleccionistas.

Es decir, de acuerdo con esta matización de **Perry**, consideraremos carteras en las que **el objetivo de su poseedor es la inversión.**

3) El concepto de cartera en **Ryan**[9] no se aparta del de **Rosenberg** pero, ya en la línea de **Perry**, considera indispensable atender a la función a la que el inversor la destina. En este sentido distingue entre:

a) **carteras de consumo**: los activos que la forman están destinados a ser consumidos en el futuro; y

---

[8] **F.E.PERRY**, A Dictionary of Banking (Macdonald and Evans, London, 1979), p.183.

[9] **T.M.RYAN**, Theory of Portfolio Selection (The Macmillan Press, London, 1978), p.1.

b) **carteras de inversión:** los activos que la constituyen tienen por objeto la inversión y su fin es obtener de ellos una rentabilidad futura.

4) Finalmente, **Sharpe**[10] define la cartera como

> la **totalidad de las decisiones** que determinan las perspectivas futuras de un individuo

en cuanto que llevan consigo unos ingresos, los cuales no pueden predecirse con certeza absoluta.

A pesar de esta amplia definición, **Sharpe** matiza que de todas las decisiones que pueden representar un ingreso en el futuro (elección de un trabajo, contratación de un seguro de vida, etc.), sólo se consideran aquellas decisiones cuyo fin es el de **seleccionar** adecuadamente un conjunto de inversiones, entendiendo por tales, el objeto en que se invierte y no el acto de invertir.

El concepto de **Sharpe** difiere del de los anteriores autores al poner más énfasis en el proceso de formación de la cartera que en su composición y por ello destaca que las **decisiones** que se materializan en unas determinadas inversiones son las que constituyen la cartera.

Es importante destacar, por otra parte, que de todas las decisiones que toma el inversor, forman la cartera, según **Sharpe**, aquéllas cuyo fin es de seleccionar adecuadamente las inversiones. Para la mayoría de los autores, tal como se verá más adelante, la selección de inversiones no constituye por sí misma la cartera sino que es una fase anterior a su constitución.

---

[10] **W.SHARPE,** Teoría de la Cartera y del Mercado de Capitales (Ediciones Deusto, Bilbao, 1974), p.37.

A pesar de esta primera aproximación al concepto de cartera, **Sharpe** se acaba acercando a la linea de los tres autores anteriores al matizar que

> De este modo, se dice que una cartera se compone de títulos mercantiles. En general, un título mercantil es una decisión que afecta al futuro.

En el presente trabajo, se utilizará el término de cartera para hacer referencia al **conjunto de activos financieros bursátiles de renta fija y/o variable que se ha constituido con fines de inversión**, es decir, con el propósito de obtener una rentabilidad futura. Se considerará, asimismo, que el conjunto de decisiones encaminadas a la selección de los activos que deben formar parte de la cartera del inversor constituye un paso previo a la formación de la cartera.

Una vez expuesto el concepto de "cartera" tal como lo consideramos en el presente trabajo, es necesario explicar qué cosa es la **Teoría de la Cartera** así como indicar su objeto, delimitar su ámbito y averiguar de que métodos se vale para lograr sus fines. Ello requiere analizar al mismo tiempo otro concepto muy utilizado en la literatura, el de "Portfolio Management", que traduciremos por **"Gestión de Cartera"**[11].

---

[11]El término **management** se puede traducir también por dirección o administración.

2.2. Gestión de Cartera

Acudamos a distintas fuentes para precisar qué entendemos por **Gestión de Cartera.**

1) **Dickinson**[12], sin definir qué es la Gestión de Cartera la divide en tres fases:

   a) **Análisis de valores:** en esta fase se recogen e interpretan los datos (numéricos y no numéricos) referentes a todos los posibles valores. Usando estos datos, el analista de valores puede hacer predicciones y determinar la distribución de probabilidad de la rentabilidad que admite para cada título.

   b) **Análisis de cartera:** en esta fase se construye un modelo en el que se incorpora la información procedente de la fase anterior y se describe el comportamiento futuro de todas las posibles carteras que se puedan construir con los valores analizados.

   c) **Selección de cartera:** en esta fase se escoge la cartera que maximiza la utilidad del inversor (objetivo señalado por el autor).

Hay que poner de relieve que en ningún caso se establece cómo se realiza la selección de los valores que se analizarán en la primera fase.

---

[12] **J.P.DICKINSON,** "Portfolio Theory: an Overview" incluido en **J.P.DICKINSON,** Portfolio Analysis: a Book of Readings (Saxon House/Lexington Books, Lexington, 1974), p.6.

2) **Francis y Archer**[13] coinciden completamente con **Dickinson** en las fases que comprende la gestión de una cartera de valores, aunque sobre la selección de cartera no define cuál es el fin perseguido por el propietario de la misma admitiendo, tal vez, objetivos diferentes al definido por **Dickinson**.

3) Mayor detalle hallamos en **Ryan**[14], quien divide la Gestión de Cartera en las siguientes fases:

a) Definición del **objetivo de la cartera** y de las restricciones bajo las que debe conseguirse.

b) Elección del **conjunto de oportunidad** de títulos del que se nutrirá la cartera de valores.

c) Formulación de los **criterios** que se seguirán para constituir la cartera.

d) Estimación de las **características relevantes de los valores** que constituyen el conjunto de oportunidad y, en función de tales características, su inclusión u omisión en la cartera.

e) Definición de los criterios que deberán seguirse para **adaptar la cartera en el tiempo**, cambiando su composición cuando se considere necesario.

Si bien las cuatro primeras fases que señala **Ryan** podrían refundirse en las señaladas por los dos anteriores autores, hay que

---

[13] **J.C.FRANCIS-S.H.ARCHER**, Análisis y Gestión de Carteras de Valores (Ediciones ICE, Madrid, 1977), p.8.

[14] **T.M.RYAN**, op. cit., 1978, p.2.

destacar la introducción de una nueva fase que no es tenida en cuenta por ellos y que hace referencia a la revisión de la cartera de valores (fase e)), aspecto fundamental en la gestión de dicha cartera, que trataremos en el siguiente epígrafe.

4) **Smith**[15], delimitando su trabajo al estudio de carteras de inversión y, en concreto, al de carteras formadas por activos financieros bursátiles de renta fija y/o variable (aunque no matice tanto su concepto de cartera), define la Gestión de Cartera como aquel proceso de toma de decisiones relacionada con la elección y manipulación, de entre una amplia gama de inversiones posibles, de aquélla que mejor satisface ciertas restricciones y cumple los objetivos especificados por el inversor. **Smith** destaca, especialmente, la fase de revisión de carteras ya existentes:

> ...el problema más importante del gestor de cartera - como **revisar o alterar una cartera de inversión** para un número finito de periodos.

En un trabajo posterior, el mismo autor distingue[16], dentro de la Gestión de Cartera, la fase de selección, definiéndola como el proceso de toma de decisiones que tiene por objetivo la compra de una cantidad especificada de determinados títulos que, considerados globalmente, satisfacen mejor los objetivos del inversor. Es decir, como precisó **Smith** en un tercer trabajo[17], la Gestión de Cartera consiste en

---

[15] **K.V.SMITH**, "A Transition Model for Portfolio Revision", J.F., 1967, p.425.

[16] **K.V.SMITH**, "Alternative procedures for revising investment portfolios", J.F.Q.A., 1968, p.371.

[17] **K.V.SMITH**, "Stock Prices and Economic Indexes for Generating Efficient Portfolios", J.B., 1969, p.326.

determinar el nivel apropiado de inversión de cada título dentro de la cartera. Por tanto, se trata de seleccionar, de entre las carteras factibles, aquélla que resulta óptima para el inversor (análisis y selección de carteras).

Observemos que el proceso de toma de decisiones para seleccionar una cartera constituye, para **Smith**, una de las tareas que comprende la Gestión de Cartera mientras que para **Sharpe** este proceso constituía, precisamente, el concepto de cartera.

En este trabajo, entenderemos por Gestión de Cartera el **conjunto de todas las tareas que comporta la formación, mantenimiento y liquidación de una cartera.** Estas tareas pueden dividirse en las siguientes fases:

a) **Análisis de valores**

En esta primera fase y después de una primera selección, el inversor interpreta todos los datos disponibles acerca de los valores y determina la distribución de probabilidad de la rentabilidad futura de los mismos.

b) **Selección de valores**

El inversor, antes de constituir su cartera, selecciona entre todos los títulos posibles aquellos entre los que finalmente recaerá la elección. Es decir, determina el conjunto de oportunidad del que surgirá su cartera.

El criterio de decisión según el cual un título puede estar o no en el conjunto de oportunidad es particular para cada inversor. Así, puede decidir escoger un único título representativo de un sector industrial ó considerar únicamente los títulos cuya rentabilidad es superior a un determinado nivel, etc.

c) **Análisis de cartera**

Se forman todas las posibles carteras que resultan de la combinación de los títulos que constituyen el conjunto de oportunidad. Para cada una de estas carteras se obtiene, a partir de los datos procedentes de la primera fase, la distribución de probabilidad de la rentabilidad de dichas carteras. Además, pueden obtenerse otros datos representativos de dicha distribución (esperanza, varianza, etc.) si es que son necesarios para la siguiente fase.

d) **Selección de cartera**

De entre todas las carteras analizadas en la fase anterior se escoge la que mejor se ajusta a los objetivos del inversor. Para la selección de la cartera óptima el inversor dispone de diferentes criterios que serán expuestos en los siguientes capítulos.

e) **Revisión de cartera**

Una vez ha seleccionado su cartera óptima, el inversor debe realizar su seguimiento, para adaptarla a las nuevas características del mercado, es decir, proceder a su revisión. Dicho seguimiento implica, por una parte, el análisis a posteriori de la eficiencia de la cartera seleccionada para medir el grado de cumplimiento de las previsiones (performance) y, por otra parte, el análisis del entorno. Esto último supone, en primer lugar, estudiar como han afectado a la distribución de probabilidad de la rentabilidad de los títulos, los cambios que han tenido lugar. Es decir, hay que volver a la fase a). En segundo lugar, deberá comprobarse si el conjunto de oportunidad es el mismo o ha de ser modificado (fase b)). En tercer lugar, han de analizarse de nuevo todas las carteras derivadas del nuevo conjunto de oportunidad (fase c)). Y por último, se debe determinar la nueva cartera óptima (fase d)).

Como puede apreciarse, la fase de revisión incluye en sí misma las cuatro restantes fases de la Gestión de Cartera. De hecho, ésta constituye un circuito cerrado que sólo se interrumpe con la liquidación definitiva de la cartera.

El concepto de revisión de cartera será analizado con mayor profundidad en los apartados 3. y 4. y, en concreto, en este último, se pondrá de manifiesto la posibilidad de abordar la revisión de cartera desde dos perspectivas diferenciadas.

2.3. Teoría de Cartera

Existe confusión en la literatura en lo que respecta a los conceptos de Gestión y de Teoría de la Cartera y en concreto con la fase de la Gestión que nosostros hemos definido cono "Análisis de cartera". Así, por ejemplo, **Dickinson**[18] al tratar de los orígenes de la Teoría de la Cartera acaba por identificarla con el análisis de cartera.

---

[18] **J.P.DICKINSON**, op. cit., 1974, pp.6-7.

También **Weston** y **Brigham**[19], que definen la cartera como una combinación de activos, añaden que

> la Teoría de las Carteras de Inversión trata sobre la **selección de carteras óptimas**; es decir, las carteras que proporcionan el más alto rendimiento posible en base a un grado específico de riesgo, o el más bajo riesgo posible en base a una tasa de rendimiento específica.

De esta definición cabe destacar los siguientes aspectos:

1) Si bien en principio definen la cartera como cualquier colección de activos, reducen el ámbito de aplicación de la Teoría de la Cartera a aquéllas **cuyo fin es la inversión**, lo cual coincide con la línea adoptada en esta Tesis[20].

   Los autores añaden, además, que restringen su estudio a los activos financieros aunque admiten la posibilidad de que puedan ser también de carácter físico.

2) En la definición se considera que son carteras óptimas aquéllas que proporcionan la rentabilidad más alta para un nivel determinado de riesgo, o las que proporcionan el riesgo más bajo para un nivel dado de rentabilidad. Esta es la definición de cartera eficiente de **Markowitz**[21] quien reserva el término de cartera óptima para la que finalmente escoge el inversor para conseguir su objetivo. Los autores se están limitando, implícitamente, a un **modelo determinado de selección de carteras** (modelo Esperanza-Varianza).

---

[19] **J.F.WESTON-E.F.BRIGHAM**, Finanzas en Administración (Nueva Editorial Interamericana, México, D.F., 1984) p.501.

[20] Véase p.8 de la presente Tesis.

[21] **H.MARKOWITZ**, op.cit., 1952, p.82.

3) La Teoría de la Cartera de **Weston** y **Brigham**, en función de lo expuesto en el apartado anterior, se reduce a lo que en esta Tesis entendemos como la fase de **Análisis de Cartera** dentro de la Gestión de Cartera.

Desde un punto de vista mucho más amplio, **Sharpe**[22] considera que

> la Teoría de la Cartera se relaciona con decisiones que implican ingresos que no se pueden predecir con certeza absoluta.

y más concretamente incluye en ella todo lo relacionado con la cartera y los títulos que la constituyen[23], desde el análisis de valores hasta la selección de la cartera óptima pasando por la fase intermedia de análisis de carteras en la que se determina el conjunto de carteras eficientes.

Ahora bien, **Sharpe**, afirma que[24]

> la Teoría de la Cartera se relaciona principalmente con las tareas del análisis de carteras.

aunque **sin llegar a identificar la Teoría con una fase de la Gestión.**

Para nosotros, la Teoría de la Cartera es el **conjunto de modelos y métodos cuyo fin es el de permitir a un inversor constituir una cartera óptima y revisarla con el paso del tiempo.**

---

[22]**W.SHARPE**, op.cit., 1974, p.17.

[23]Ibidem, 1974, p.20.

[24]Ibidem, 1974, p.52.

Los modelos de selección y revisión de cartera, en función del objetivo fijado, de las restricciones sobre las que debe conseguirse y otras hipótesis sobre el comportamiento del inversor y de los títulos, intentan determinar, para cada momento, la composición óptima de la cartera. Para ello precisan de los métodos de optimización estáticos (Lagrange, Kunh-Tucker, etc.) y dinámicos (control óptimo, programación dinámica, etc.); estos últimos están especialmente indicados en el caso de revisión de cartera.

Teniendo en cuenta la definición de Teoría de la Cartera y de Gestión de Cartera, podemos decir que esta última es la concreción de la Teoría por parte del inversor que asume un modelo determinado, con las hipótesis que éste comporta y el método correspondiente. La Teoría de la Cartera está formada por un abanico de modelos y métodos que intenta plasmar de un modo simplificado la realidad del inversor.

3. CONCEPTO DE REVISION DE CARTERA

La Teoría de la Cartera de valores y especialmente la Gestión de Cartera han tenido un amplio desarrollo en su vertiente estática. Así, desde **Markowitz**[25], **Sharpe**[26] y **Tobin**[27] otros muchos autores han diseñado modelos cuyo fin es seleccionar la cartera óptima en función de los

---

[25] **H.MARKOWITZ**, op. cit., 1952, pp.77-91.

[26] **W.SHARPE**, op. cit., 1974.

[27] **J.TOBIN**, "Teoría de la Selección de Cartera" incluido en **F.H.HAHN - F.P.R.BRECHLING**, Teoría de los Tipos de Interés (Labor, Barcelona, 1974), pp.19-70.

objetivos del inversor suponiendo que éste va a **liquidar dicha cartera al finalizar el periodo considerado** para dedicar la riqueza obtenida al consumo.

Así, **Mossin**[28], describe estos modelos que define con el nombre de "Single-Period Models" del siguiente modo:

> El inversor toma su decisión al principio de un periodo y se espera hasta que finalice, momento en el que se materializa la rentabilidad de la cartera. Durante el transcurso del periodo no puede realizar cambios en la composición de la cartera. El inversor toma su decisión con el objetivo de maximizar la utilidad esperada de su riqueza al final del periodo (riqueza final).

Mossin, en esta definición establece cuál es el objetivo que el inversor persigue, y pone de manifiesto el carácter estático del modelo. Se podría añadir que la decisión tomada al principio del periodo consiste en **distribuir la riqueza disponible en ese momento entre un conjunto de títulos.**

El supuesto de liquidación de la cartera al final del periodo considerado es bastante restrictivo puesto que, normalmente, un inversor constituye una cartera de valores con el fin de mantenerla durante más de un periodo. En este caso, tal como afirma **Mossin**[29], el inversor determina un momento en el futuro (momento cierto[30]) en el que planea consumir la riqueza disponible en ese momento. Al constituir la primera cartera, el

---

[28]**J.MOSSIN,** "Optimal Multiperiod Portfolio Policies", <u>J.B.</u>,1968, p.216.

[29]**J.MOSSIN,** op. cit., 1968, p.220.

[30]Considerar que el momento en que el inversor liquida definitivamente su cartera es cierto constituye una restricción que puede eliminarse aceptando que si bien el inversor determina con certeza el periodo de referencia no hace lo mismo con el momento de liquidación (momento incierto). Incluso podría considerarse el caso en que tanto el periodo como el momento final fueran inciertos.

inversor tomará decisiones respecto a sus inversiones con el fin de maximizar la utilidad esperada de la riqueza disponible en el momento de proceder a liquidar su cartera (objetivo marcado por **Mossin**). El tiempo transcurrido desde el momento de la constitución de la cartera hasta el de su liquidación se divide en T periodos (que en principio no tienen por qué ser todos de igual duración). Al final de cada uno de estos periodos, se materializa la rentabilidad proporcionada por la cartera y se toma la decisión sobre la composición de la cartera que se poseerá en el siguiente periodo.

La posibilidad de que la cartera de valores tenga un **carácter multiperiódico** hace necesario un tratamiento de la cartera que tenga en cuenta dicha carácter. Además, tal como apunta **Mossin**, al final de cada periodo considerado se procede a definir la composición de la cartera correspondiente al nuevo periodo, lo cual puede llevar consigo cambios respecto a la antigua para poder continuar satisfaciendo los objetivos del inversor, que a su vez pueden haberse modificado.

La naturaleza **multiperiódica de la cartera de valores está, pues, indisolublemente unida a la revisión de la cartera**, que supone la adaptación de una cartera antigua a otra nueva.

Smith[31] señala que la revisión de las carteras constituye una de las tareas fundamentales de la gestión de cartera y, por tanto, añadimos nosotros, de las preocupaciones esenciales de la Teoría de la Cartera. Este mismo autor[32] define la revisión de la cartera como

---

[31] **K.V.SMITH**, op., cit. 1967, p.425.

[32] **K.V.SMITH**, op. cit., 1968, p.371.

> un proceso continuado[33] de evaluación y cambio de los títulos constituyentes de una cartera con el fin de seguir satisfaciendo los objetivos del inversor.

Según **Smith**, aunque los objetivos del inversor no cambiaran, debería procederse a la revisión de la cartera debido al cambio que se produce en sus expectativas.

También **Tobin**[34] hace referencia a la naturaleza multiperiodo de la cartera de valores indicando que, bajo este supuesto, el inversor no escoge una determinada cartera sino una **secuencia de carteras**[35] ya que planea realizar cambios en función de la modificación en las expectativas sobre la rentabilidad de los títulos que forman parte de su actual cartera y de los que no formando parte de ella pudieran constituir la nueva.

De nuevo, aflora la revisión de la cartera de valores como necesidad ante unos cambios que se han producido en las expectativas. Hasta tal punto esto es esencial que **Chen, Jen y Zionts**[36] identifican la

---

[33] El inversor que pretende mantener la cartera durante más de un periodo desea que su composición sea siempre la óptima en función del objetivo que se haya marcado. Para conseguir en cada periodo la cartera óptima deberá realizar cambios en su composición y este proceso lo deberá repetir durante el tiempo en que desee mantener la cartera. El carácter discreto de la revisión permite definir el proceso como **continuado** y no como continuo, ya que este vocablo podría dar a entender que la cartera está en permanente revisión.

[34] **J.TOBIN**, op.cit., 1974, p.56.

[35] Con la expresión "secuencia de carteras", **J.Tobin** hace referencia a que el inversor decide, en el momento 0, la composición de la cartera en cada uno de los T periodos en que divide el horizonte temporal de posesión de su cartera; o de otro modo, decide cuales son los cambios que ha de ir realizando en la composición de su cartera. La secuencia de carteras, al estar asociada a la revisión, se define como una secuencia discreta y no continua.

gestión de la cartera con el proceso de revisión de la misma, mediante el cual el inversor modifica su cartera periódicamente[37] para **adaptarla a las condiciones cambiantes, ya sean endógenas y/o exógenas a la cartera.**

Francis y **Archer**[38] consideran que la revisión de la cartera es necesaria **aun cuando las expectativas sobre la rentabilidad futura de los títulos no cambiaran** puesto que el cobro de dividendos y la variación en el precio de los títulos en el mercado de valores puede determinar que la cartera no sea la óptima en función de los objetivos del inversor, haciendo necesario, por tanto, proceder a la revisión de la composición de la cartera para conseguir una nueva cartera óptima.

Es decir, se produce una revisión de la cartera de valores cada vez que se **remodela la composición de la cartera del periodo anterior** ya sea motivada ésta por un cambio sensible en las expectativas, ya por la reinversión de los dividendos, ya por la variación del precio de mercado de los títulos.

A nuestro entender, **la revisión de la cartera debería contemplar:**

a) **Revisión de la política** de la cartera con una modificación en los objetivos del inversor a medida que transcurre el tiempo;

b) Revisión en la cartera por **cambios no asociados a la política del inversor** (cambio en las expectativas, posibilidad de reinvertir los dividendos, variación en el precio de mercado de los títulos, etc.).

A.H.Y.CHEN-F.C.JEN-S.ZIONTS, "The Optimal Portfolio Revision Policy", J.B., 1971, p.51.

[37] Es decir, discretamente.

[38] **J.C. FRANCIS-S.H. ARCHER**, op.cit., 1977, p.163.

Un problema, que hemos atisbado más arriba, que se plantea al hablar de revisión, es la frecuencia con la que debe llevarse a cabo la misma. Así, **Smith**, en su definición de revisión de carteras, ya mencionadas, afirma que debe ser un proceso continuo. Es decir, idealmente, la revisión de la cartera debería llevarse a cabo cada vez que se produjera un cambio en las condiciones existentes o cada vez que se dispone de nueva información.

Si el acceso a la información fuera gratuito y además el cambio de unos títulos por otros no conllevara tampoco coste alguno (derechos del "broker", etc.), la revisión se haría sin mayor dificultad cada vez que fuera necesario, es decir, cada vez que la cartera dejara de ser óptima para el modelo desarrollado; sin embargo, en realidad, la información no está disponible libremente ni son nulos los costes de la revisión.

Por todas estas dificultades, junto con otras razones de carácter legal e institucional (cobro de dividendos, pago de impuestos, etc.), además de las de complejidad analítica, parece lógico que se acuerde que la revisión de la cartera se haga al final de cada uno de los periodos que constituyen el horizonte de planeamiento de la inversión, con lo que los problemas que quedan por resolver son el de determinar si la duración de los periodos ha de ser igual y cuánto ha de valer esta duración admitiendo que el último momento sea conocido con certeza. En definitiva, como ya se adelantó en la p.20 de esta Tesis, la revisión constituye un proceso de carácter continuado.

Aunque **Mossin**[39] establece que los periodos en los que se divide el horizonte temporal no tienen por qué ser de igual duración, lo habitual

[39]**J.MOSSIN**, op. cit., 1968, p.220.

es considerar que sí lo son[40], como hacen, por ejemplo, **Chen, Jen** y **Zionts**[41].

La revisión de carteras considerada en el presente trabajo se realiza también a través de modelos de **revisión equiperiódica con último momento cierto.**

Si se supone que la revisión se efectúa de forma equiperiódica, un inversor que desee mantener su cartera durante T periodos (naturaleza multiperiódica) deberá tomar decisiones respecto a la composición de la misma en cada momento t (t=0,1,2,...,T) donde

•) t=0 representa el momento en que se constituye la cartera;
•) t=1,2,...,T-1 es el momento en que se modifica su anterior composición (revisión propiamente dicha); y
•) t=T es el momento en que se procede a liquidarla.

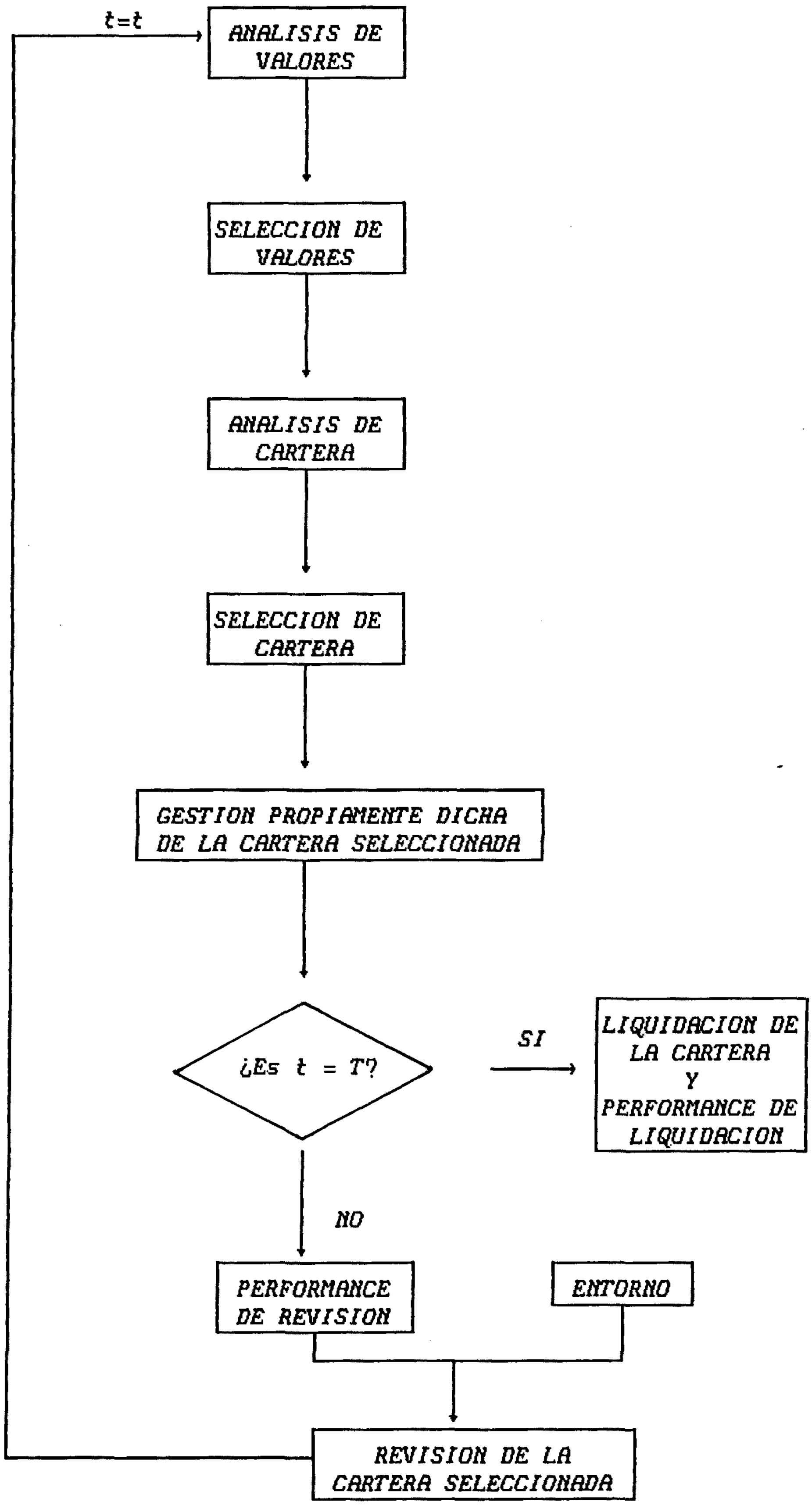
En la página siguiente representamos un diagrama de bloques que, a nuestro modo de ver, refleja el proceso de Gestión de Cartera (apartado **2.2.**). En este diagrama, el bucle que empieza en el punto decisorio t (t=0,1,2,...,T) representa lo que hemos denominado revisión[42].

---

[40]Como se ha dicho ya, ello viene influido por el hecho de que aspectos como el cobro de dividendos o el pago de impuestos, que determinan la revisión de la cartera, se producen de forma equiperiódica.

[41]**A.H.Y.CHEN-F.C.JEN-S.ZIONTS**, op.cit., 1971, p.51.

[42]Véanse las pp.13-14 de la presente Tesis.


t=t
ANALISIS DE VALORES
SELECCION DE VALORES
ANALISIS DE CARTERA
SELECCION DE CARTERA
GESTION PROPIAMENTE DICHA DE LA CARTERA SELECCIONADA
¿Es t = T?
SI
LIQUIDACION DE LA CARTERA Y PERFORMANCE DE LIQUIDACION
NO
PERFORMANCE DE REVISION
ENTORNO
REVISION DE LA CARTERA SELECCIONADA

4. CLASIFICACION GENERAL DE LOS MODELOS DE REVISION DE CARTERA

Los modelos de revisión de cartera no admiten una única clasificación sino que pueden agruparse de muy diversos modos, obedeciendo a criterios distintos.

En este apartado pretendemos clasificar de una forma general los modelos de revisión existentes y posteriormente, en los apartados correspondientes, se ahondará en esta clasificación para conseguir un mayor grado de detalle y especificación.

Una primera clasificación podría realizarse agrupando los modelos de revisión según el carácter de la revisión de cartera.

I) Criterio de clasificación: carácter de la revisión

Bajo el supuesto que el inversor divide el tiempo total de posesión de una cartera en T periodos, al final de cada uno de los cuales se plantea su revisión, podemos clasificar los modelos de revisión, atendiendo al carácter de la misma, en:

•) Modelos de revisión uniperiódicos

Los modelos de revisión uniperiódicos se caracterizan porque consideran cada uno de los T periodos del horizonte temporal de posesión de la cartera de forma independiente. Se aplican periodo a periodo y en cada uno de ellos se ignora por completo lo que ocurre en el resto.

•) **Modelos de revisión multiperiódicos**

Los modelos de revisión multiperiódicos consideran los T periodos como un conjunto y condicionan el comportamiento del inversor en cada uno de ellos al resto. Los T periodos no son compartimentos estancos sino que forman parte de un conjunto donde todos los elementos se hallan relacionados entre sí.

En segundo lugar, se podrían clasificar los modelos de revisión atendiendo al número de objetivos distintos que el inversor persigue al formar la cartera.

La clasificación anterior no debe confundirse con esta segunda puesto que aunque los modelos uniperiódicos plantean T objetivos (uno para cada uno de los periodos independientes en que se divide el tiempo de mantenimiento de la cartera), éste no es el nuevo criterio de clasificación utilizado ya que el número de objetivos distintos hace referencia a cada uno de los T periodos considerados (para cada periodo el objetivo puede ser único o múltiple). En el caso que el modelo sea multiperiódico, el número de objetivos distintos se refiere al conjunto de los T periodos (en concreto al final de todos ellos).

II) Criterio de clasificación: número de objetivos distintos considerados

En función del número de objetivos distintos considerados podemos distinguir los siguientes modelos:

•) **Modelos de revisión con un único objetivo**

El inversor pretende conseguir un objetivo determinado y para el caso que cada periodo se considere aisladamente supondremos que dicho objetivo se mantiene en el transcurso de los T periodos (no se determina un objetivo distinto en cada periodo).

Estos modelos, a su vez, pueden clasificarse en función del **objetivo perseguido.** Según el objetivo considerado pueden distinguirse, por ejemplo, los modelos que

•) maximizan la utilidad esperada de la rentabilidad o de la riqueza derivada de la cartera;

•) maximizan la media geométrica de la rentabilidad

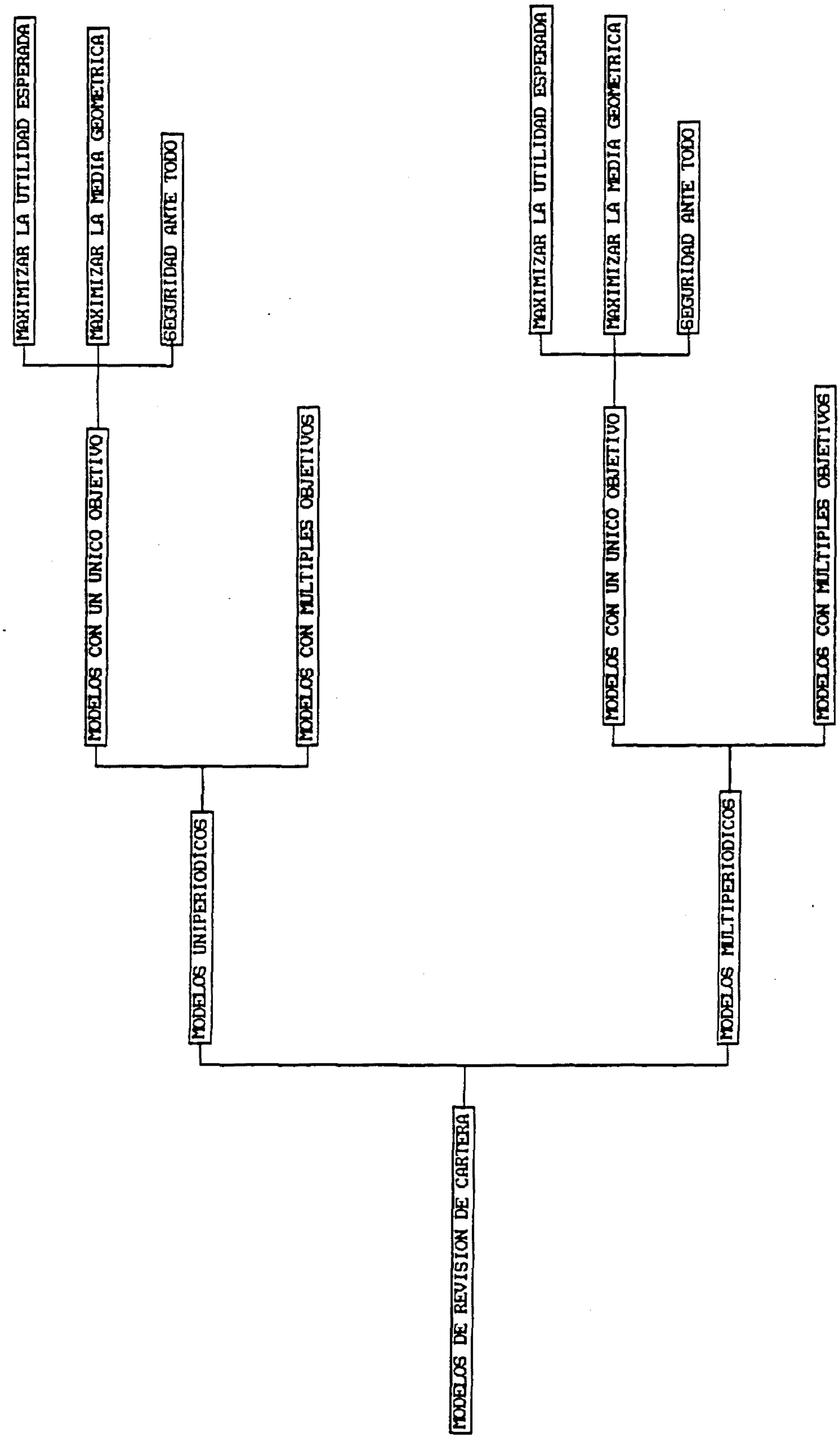
•) buscan, ante todo, la seguridad del inversor (Safety First)

•) **Modelos de revisión con múltiples objetivos**

En este caso, el inversor pretende conseguir, a la vez, más de un objetivo. Los diferentes objetivos considerados pueden ser totalmente compatibles o compatibles en un grado determinado y en este segundo caso deberá establecer un orden de consecución de dichos objetivos en función de la prioridad de cada uno de ellos.

Las dos clasificaciones dadas no son independientes la una de la otra sino que la segunda la podemos considerar una subclasificación de la primera. Así, de forma esquemática, la clasificación general[43] de los modelos de revisión es:

[43] Los modelos estudiados en el presente trabajo se basarán en esta clasificación. En los capítulos dedicados especialmente a los modelos de revisión uniperiódicos y multiperiódicos se profundizará en la clasificación correspondiente detallando cuáles son los modelos concretos existentes en cada caso.


MODELOS DE REVISION DE CARTERA
MODELOS UNIPERIODICOS
MODELOS MULTIPERIODICOS
MODELOS CON UN UNICO OBJETIVO
MODELOS CON MULTIPLES OBJETIVOS
MODELOS CON UN UNICO OBJETIVO
MODELOS CON MULTIPLES OBJETIVOS
MAXIMIZAR LA UTILIDAD ESPERADA
MAXIMIZAR LA MEDIA GEOMETRICA
SEGURIDAD ANTE TODO
MAXIMIZAR LA UTILIDAD ESPERADA
MAXIMIZAR LA MEDIA GEOMETRICA
SEGURIDAD ANTE TODO

5. PLANTEAMIENTO Y OBJETIVOS DE LA TESIS DOCTORAL

Un inversor que se enfrenta a la decisión de cómo colocar su riqueza puede decidirse por constituir una cartera entendiendo por tal un conjunto de activos financieros bursátiles de renta fija y/o variable y que tiene como fin la inversión, de acuerdo con la defininción realizada en el apartado 2.1. Una vez ha tomado esta decisión ha de suponerse que deseará mantener la cartera durante un cierto tiempo que podemos dividir en un número determinado de periodos[44].

A pesar del carácter multiperiódico de la cartera son pocos los trabajos que abordan el tema desde esta perspectiva. Así, la mayoría de modelos que hacen referencia a cartera de valores suponen que el inversor desea mantener la cartera durante un único periodo y que al finalizar éste proceden a su liquidación definitiva.

Aunque este supuesto constituye un punto de partida válido para poder abordar el problema de mayor envergadura que supone la consideración de más de un periodo, no puede constituir un punto final puesto que la generalización de un periodo a T periodos ($T \neq 1$) no es inmediata.

Por otra parte, que el inversor desee mantener la cartera durante más de un periodo no implica que la composición de la misma se mantenga inalterada hasta su liquidación sino que periodo a periodo su composición debe adaptarse a las nuevas condiciones del mercado y a las nuevas perspectivas que el inversor tiene gracias a la información a la que tiene acceso con el paso del tiempo. De hecho, utilizando los términos con mayor propiedad, deberíamos decir que el inversor no mantiene su

---

[44] Véase la p.19 de la presente Tesis donde se pone de manifiesto la naturaleza multiperiódica de la cartera poseída por un inversor.

cartera durante más de un periodo sino que mantiene una "secuencia de carteras" que es la expresión utilizada por **Tobin**[45] y que tiene en cuenta las modificaciones que se van sucediendo en la cartera inicial.

La decisión sobre cuáles han de ser los cambios que deben realizarse en una cartera se toma como consecuencia de la revisión efectuada sobre dicha cartera. Esta revisión tiene en cuenta, en primer lugar, cuál es la actual composición de la cartera y, en segundo lugar, cuál debería ser la composición óptima para poder alcanzar el objetivo fijado por el inversor. De la comparación entre la composición actual y la que debería tener después de la revisión, se derivan las modificaciones que el inversor debe llevar a cabo.

La constatación de la importancia de la revisión de cartera ha hecho que nos planteemos de qué maneras el inversor puede llevarla a cabo. El objetivo de esta Tesis se centra, por tanto, en la última de las fases en que hemos dividido la Gestión de Cartera (definida en el apartado **2.2.**) y aunque la fase de revisión comprende en sí misma el análisis y selección de valores y el análisis y selección de carteras, nosotros prestaremos especial atención a los diferentes criterios en que puede basarse el inversor para determinar periodo a periodo la composición óptima de la cartera.

El estudio de los diferentes modelos que pueden aplicarse al contexto de revisión de cartera nos ha permitido separarlos en dos grandes grupos, que al basarse en una concepción de la cartera multiperiodo distinta hacen necesaria la aplicación de un instrumento diferenciado. Estos dos grandes grupos hacen referencia a la primera clasificación realizada en el apartado **4.**:

[45] **J.TOBIN**, op. cit., 1974, p.56.

•) Modelos uniperiódicos de revisión de cartera

•) Modelos multiperiódicos de revisión de cartera

Los primeros, al considerar de forma independiente cada uno de los T periodos en los que el inversor mantiene la cartera se basan en métodos de optimización estática clásicos. Debe destacarse, además, otra característica común a todos los modelos que se engloban en este grupo y es que afrontan el problema tomando como punto de partida el momento en que se decide constituir la primera cartera y van avanzando hasta llegar el momento de la liquidación de la cartera.

Los segundos tratan los T periodos como una unidad y, a diferencia de los anteriores, se basan en métodos de optimización de carácter dinámico. En concreto, nosotros utilizaremos la Programación Dinámica, que se caracteriza por afrontar el problema partiendo del momento en que piensa liquidarse la cartera para ir retrocediendo hasta alcanzar el momento en que se constituye la primera cartera. Como puede verse, se trata de formas de abordar el problema opuestas, con lo que queda planteado el problema de si ambos enfoques conducen siempre al mismo resultado o no y por qué.

En cualquier caso y para todos los modelos de revisión que desarrollemos, el objetivo perseguido es llegar a determinar la composición de la cartera óptima de cada periodo, siendo los pasos seguidos para conseguir este fin:

•) Definición de las variables que intervienen en cada modelo y concreción de las relaciones que existan entre ellas;

•) Definición de las hipótesis y de los criterios propios de cada modelo y de las relaciones que se deriven de ellos;

•) Planteamiento formal del problema que cada modelo intenta resolver de acuerdo con la fase anterior y su correspondiente solución.

En el siguiente apartado se especifica cuál es la estructura de la presente Tesis teniendo en cuenta la metodología indicada.

6. ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL

La estructura de esta Tesis Doctoral se basa en la clasificación de los modelos de revisión realizada en el apartado **4**.

Las dos formas de abordar la revisión de cartera:

•) tratamiento independiente de cada uno de los T periodos en que dividimos el tiempo durante el que un inversor desea mantener la cartera;

•) tratamiento unificado de los T periodos,

permiten dividir este trabajo en dos partes donde se analizan por separado cada uno de los dos planteamientos posibles. De esta manera, distinguiremos:

***) PARTE I: Modelos uniperiódicos de revisión de cartera**

***) PARTE II: Modelos multiperiódicos de revisión de cartera**

Así, en la **primera parte** realizaremos un estudio pormenorizado de los diferentes modelos cuya característica común es el enfoque uniperiódico de la revisión. De hecho, si no se tienen en cuenta los costes que supone la revisión y bajo las hipótesis que se señalarán en los apartados correspondientes, se puede considerar que éstos modelos son los clásicos modelos de selección de cartera para un único periodo (modelo Esperanza-Varianza, modelo Esperanza-Semivarianza, etc.), que hemos adaptado para poder utilizarlos en el contexto de la revisión.

A pesar de que estos modelos han sido ampliamente tratados en numerosos trabajos, hemos creido necesario incluirlos en nuestra Tesis puesto que

1) se les sitúa dentro de una estructura más amplia que la habitual;

2) constituyen un paso importante hacia la verdadera revisión de cartera que constituye el tratamiento unificado de los T periodos; y

3) **pueden deducirse importantes relaciones entre ambos planteamientos.**

Por otra parte, hemos considerado interesante ofrecer una clasificación de los modelos existentes para mostrar cuál es la relación que los une y en qué se basan sus diferencias. De este modo podremos tener una visión general del tema.

El orden seguido para el estudio de los modelos de revisión que se engloban en esta primera parte de la Tesis se basa también en la clasificación general del apartado **4.** que hace referencia al número de objetivos que el inversor pretende alcanzar en el periodo considerado.

En primer lugar, estudiaremos los modelos que persiguen un único objetivo, aunque esta afirmación debe matizarse puesto que podríamos distinguir entre un único objetivo puro (cuando el objetivo es realmente único) y un único objetivo mixto (cuando detrás del "único" objetivo se esconde un "subobjetivo"). Esta matización se analizará en la clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera de las pp. 41-47.

En nuestro trabajo estudiaremos, en el orden que sigue, los modelos cuyo objetivo es:

•) maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad o de la riqueza del inversor (**Capítulos 1** y **2** y apartados **2.**, **3.**, **4.**, **5.** y **6.** del **Capítulo 3**)

•) maximizar la media geométrica de la rentabilidad de la cartera (apartado **3.7.**)

•) seguridad ante todo (Safety First; apartado **3.8.**)

Posteriormente centraremos nuestro estudio en aquellos modelos que admiten la combinación de más de un objetivo (apartado **3.9.**).

Además de los modelos tratados en esta primera parte existen otros que han recibido una menor atención y que serán comentados en la clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera.

La **segunda parte** de esta Tesis la dedicaremos al estudio de los modelos cuya característica común es el tratamiento multiperiódico de la revisión. Estos modelos, que cronológicamnte aparecieron más tarde que los primeros modelos uniperiódicos, están todavía poco desarrollados a pesar de que constituyen un acercamiento más realista al estudio de la cartera de valores.

Por ser el aspecto multiperiódico de la revisión el menos tratado, es el que tiene más vertientes abiertas y por explorar. Nuestros esfuerzos se han orientado hacia el desarrollo de dos modelos concretos que están intimamente ligados a los estudiados en la primera parte y que intentan fundir y desarrollar las ideas de algunos autores que han abierto el camino en este sentido (**Capítulos 4 y 5**).

Aunque también aquí clasificamos los modelos multiperiódicos de revisión de cartera en función del número de objetivos fijados por el inversor, no existe -que conozcamos- ningún trabajo que además del tratamiento multiperiodo considere la existencia de múltiples objetivos, por lo que esta línea continúa abierta. De este modo, centrándonos en modelos que consideran un único objetivo, el cual debe conseguirse al finalizar los T periodos, hemos desarrollado, en el orden que sigue, modelos cuyo objetivo es:

•) maximizar la utilidad esperada de la riqueza final del inversor (**Capítulos 4 y 5**)

•) maximizar la media geométrica de la rentabilidad de la cartera multiperiodo (apartado 5.7.).

También en este caso y respecto al primer objetivo distinguiremos entre objetivo único puro y objetivo único mixto.

PARTE I

MODELOS UNIPERIODICOS DE REVISION DE CARTERA

CARACTERISTICAS Y CLASIFICACION DE LOS MODELOS UNIPERIODICOS DE REVISION DE CARTERA

- *Características de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera*

En los capítulos 1, 2, y 3 de la presente Tesis Doctoral se estudiará el comportamiento de un inversor que **desea mantener una cartera durante T periodos pero que actúa en cada punto de decisión t (t=0,1,2,...,T-1) como si al final del mismo liquidara la cartera para destinarla a consumo.** El inversor se fija, pues, el mismo objetivo para cada uno de los periodos en que se divide el horizonte temporal de posesión de la cartera, decidiendo al final de dichos periodos cuáles han de ser los cambios adaptativos que ha de efectuar en la cartera a fin de conseguir el objetivo fijado para el siguiente periodo.

Mossin[46] define el comportamiento del inversor arriba descrito como **comportamiento "miope"**:

> Diremos que si la secuencia de decisiones de un inversor se obtiene como una serie de decisiones para un periodo (empezando con el primero), donde cada periodo se trata como si fuera el último, entonces el inversor se comporta de forma miope. Con miopía, el inversor basa la decisión de cada periodo únicamente en la riqueza al inicio de dicho periodo y en la distribución de

[46] **J.MOSSIN**, op. cit., 1968, p.223.

probabilidad de la rentabilidad con el objetivo de maximizar la utilidad esperada de la riqueza final del periodo descuidando completamente el futuro.

Es decir, según este modelo de comportamiento, el inversor selecciona en cada punto de decisión, la cartera óptima del siguiente periodo, revisando su anterior cartera. Una vez llegado al final de este nuevo periodo vuelve a plantearse el problema de la selección de la cartera óptima para el siguiente periodo; y así sucesivamente hasta que llega el último periodo antes de la liquidación de la cartera.

Tal planteamiento implica utilizar la metodología de la estática comparativa[47], pues se reduce el problema global a un conjunto de T problemas estáticos sucesivos o encadenados en los que se plantea la selección de la cartera óptima para un solo periodo con revisión de la cartera al final del mismo.

Para el desarrollo de esta metodología se supondrá en primer lugar que las modificaciones necesarias para conseguir la nueva cartera óptima no acarrean coste alguno. Dicho supuesto será eliminado posteriormente pues es evidente que la compra o venta de títulos lleva consigo una serie de costes que pueden influir en la determinación de la nueva cartera al disminuir la cantidad disponible para ser invertida. Además de los costes de transacción (asociados a la compra y venta de títulos), el poseedor de una cartera de valores debe hacer frente también a los costes de mantenimiento de la misma.

[47]Posteriormente se considerará la revisión de cartera mediante la aplicación de la metodología dinámica.

- Clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera

La clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera que se incluye en este apartado, desarrolla con un mayor grado de detalle la clasificación del apartado **4.** del capítulo anterior y tiene como objetivo ofrecer una visión general de los modelos aplicables al ámbito de la revisión cuando el inversor se comporta en cada periodo como si éste fuera el último en que va a poseer la cartera.

I) En primer lugar, clasificaremos los modelos uniperiódicos de revisión de cartera en función del **número de objetivos que el inversor pretende alcanzar en cada periodo.** Según este criterio podemos distinguir los siguientes modelos:

•) Modelos con **un objetivo único;**

•) Modelos con **múltiples objetivos**

Mientras que el primer grupo de modelos utiliza, para su aplicación, métodos de optimización clásicos, los segundos se basan en la Programación por Objetivos que no busca tanto la optimización como la consecución de unos niveles de satisfacción apropiados para los objetivos señalados.

En el caso de objetivos múltiples se supone que el inversor persigue simultáneamente varios objetivos que pueden ser compatibles o parcialmente contrapuestos (la consecución de uno de ellos impide la consecución completa de otros) y además pueden estar sujetos a unas prioridades. El modelo que tiene en cuenta múltiples objetivos es el **Modelo de Programación por Objetivos** y será estudiado en el apartado **3.9.**

II) Los modelos que consideran un único objetivo (igual para todo los periodos) se pueden clasificar en función de **la naturaleza de dicho objetivo** en:

- •) Modelos cuyo objetivo es la **maximización de la utilidad esperada** de la rentabilidad de la cartera;

- •) Modelos cuyo objetivo es la **maximización de la media geométrica** de la rentabilidad de la cartera;

- •) Modelos cuyo objetivo es **maximizar la seguridad** del inversor.

Estos tres grupos de modelos tienen en cuenta que el inversor debe tomar decisiones en ambiente de incertidumbre y cada uno de ellos representa una forma distinta de abordar este problema.

El primer grupo considera que la mejor forma de considerar la incertidumbre que envuelve a la selección y revisión de cartera es a través de una función de utilidad de la rentabilidad de la cartera que pone de manifiesto la preferencia del inversor por la rentabilidad y la aversión que siente por el riesgo inherente a la operación.

En el segundo grupo se incluye el modelo cuyo objetivo es la maximización de la media geométrica de los diferentes valores que puede tomar la rentabilidad de la cartera respecto a sus respectivas probabilidades (**Modelo Media Geométríca**). Aunque este modelo lo hemos separado de los que tienen como objetivo la maximización de la utilidad esperada veremos que, bajo determinadas hipótesis, éste es también su objetivo.

En el tercer grupo se incluyen los modelos que consideran que el inversor tiene como objetivo asegurarse un determinado nivel de rentabilidad de la cartera; es decir, buscan por encima de todo la seguridad. En general, al conjunto de modelos cuyo objetivo es la seguridad se les denomina **Modelos "Safety First"** (apartado **3.8.**) y pueden diferenciarse los siguientes:

•) **Modelo de Roy**

Su objetivo es minimizar la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea inferior a un determinado nivel (nivel de desastre o de subsistencia);

•) **Modelo de Kataoka**

Su objetivo es maximizar el nivel de subsistencia sujeto a que la probabilidad de que la rentabilidad real sea inferior a dicho nivel sea igual o menor que un valor determinado;

•) **Modelo de Telser**

Su objetivo es maximizar la rentabilidad esperada sujeto a la misma restricción que en el modelo de **Kataoka.**

III) Los modelos que consideran como único objetivo la maximización de la utilidad esperada de la rentabilidad pueden agruparse, también, en función de la **forma en que se obtiene dicho objetivo** y que permite calificarlo como objetivo mixto y objetivo puro:

•) La cartera que maximiza la utilidad esperada de la rentabilidad se escoge de entre el **conjunto de carteras eficientes** que son las que cumplen unas determinadas condiciones según el criterio utilizado y que se detallarán en los apartados correspondientes.

En este caso, para llegar a determinar la cartera óptima se deben seguir dos pasos:

1) determinación del conjunto de carteras eficientes;

2) elección de aquella cartera eficiente que maximiza la utilidad esperada.

Este doble paso es el que permite calificar al objetivo único de mixto puesto que la cartera óptima (la que maximiza la utilidad esperada) ha de ser, además, eficiente.

•) La determinación de la cartera óptima se hace de una sola vez **maximizando directamente la función de utilidad esperada.** En este caso, a la cartera óptima no se le exige que sea eficiente y por eso calificamos a este objetivo de puro.

La maximización de la función de utilidad esperada en el caso de modelos uniperiódicos no ha merecido mucha atención por las ventajas que presenta la maximización en dos fases a través de la determinación del conjunto eficiente. Sin embargo, estas ventajas desaparecen en los modelos multiperiódicos y es allí donde los modelos de maximización directa de la función de utilidad esperada adquieren toda su importancia, como se verá en el **Capítulo 5.**

IV) Tal como hemos apuntado en el comentario sobre los modelos que determinan previamente el conjunto de carteras eficientes, el **criterio para decidir cuando una cartera es eficiente** no es único y permite clasificar los modelos del siguiente modo:

•) Modelos de **dos momentos**

Los modelos que se incluyen en este grupo se caracterizan porque para determinar si una cartera es eficiente se basan en dos momentos de la distribución de probabilidad de la rentabilidad de dicha cartera. Estos modelos podrán clasificarse en función de los dos momentos utilizados.

•) Modelos de **tres momentos**

Dentro de este grupo se incluye el **Modelo Esperanza - Varianza - Tercer Momento** (**Modelo de Hanoch-Levy**) que basa sus decisiones sobre la eficiencia de una cartera en los tres primeros momentos de la distribución de probabilidad de la rentabilidad de la cartera.

•) Modelo de **Dominancia Estocástica**

Mientras que los dos anteriores grupos reducían la distribución de probabilidad de rentabilidad de la cartera a dos o tres momentos estadísticos, en este caso (**Modelo de Dominancia Estocástica**) la decisión sobre la eficiencia de una cartera se basa precisamente en dicha distribución sin efectuar reducción alguna.

V) A su vez, los modelos de dos momentos pueden clasificarse en función de cuales sean **los dos momentos utilizados**:

•) Modelos **Esperanza-Una medida del riesgo**

En estos modelos el primer momento es la Esperanza y se diferencian en el segundo momento que es el que mide el riesgo asociado a la rentabilidad esperada.

•) Modelo δ-γ **(Modelo de Fama)**

δ y γ son los parámetros que definen la posición de la distribución y su dispersión respectivamente en el caso que la rentabilidad siga una distribución de Pareto estable.

VI) A su vez, los modelos Esperanza-Una medida del riesgo pueden clasificarse según cual sea esta **medida del riesgo:**

•) **Modelos Esperanza-Varianza**

•) **Modelo Esperanza-Límite inferior de confianza (Modelo de Baumol)**

•) **Modelo Esperanza-Semivarianza**

•) **Modelo Esperanza-Entropía**

VII) Finalmente, los modelos Esperanza-Varianza (E-V) pueden clasificarse en función de las **hipótesis utilizadas** que se especificarán para cada caso concreto:

•) **Modelo E-V básico (Modelo de Markowitz)**

•) **Modelos de Indices**

•) **Modelo m-s (Modelo de Fama-Elton-Gruber)**

•) **Modelo E-V con límites superiores**

•) **Modelo de Tobin-Sharpe-Lintner**

•) **Modelo de Black**

•) **Modelo E-V con costes**

Los diferentes modelos considerados en esta clasificación constituyen modificaciones a las hipótesis de los modelos Esperanza-Varianza básico y de índices.

Los modelos de **Hanoch-Levy** y de **Fama** considerados en las clasificaciones IV) y V) respectivamente, surgen como modificaciones al modelo Esperanza-Varianza básico y por ello se estudiarán dentro del capítulo destinado a tales modificaciones.

La clasificación realizada[48] de los modelos uniperiódicos de revisión puede esquematizarse del siguiente modo:

---

[48] Aunque esta clasificación intenta recoger los modelos más utilizados no es exhaustiva. Se podría añadir, por ejemplo, el **Modelo Heurístico**, basado en la simulación, tal como lo presentan **G.P.CLARKSON-A.H.MELTZER**, "Portfolio Selection: A Heuristic Approach", J.F., 1960, pp.465-480.

- Modelos uniperiódicos de revisión de cartera
  - Modelos con un único objetivo
    - Maximización de la utilidad esperada
      - Determinación del conjunto eficiente
        - Modelos de dos momentos
          - Modelos Esperanza-Una medida del riesgo
            - Modelos E-V
              - Modelo E-V básico
              - Modelos de índices
              - Modelo de Fama-Elton-Gruber
              - Modelo E-V con límites superiores
              - Modelo de Tobin-Sharpe-Lintner
              - Modelo de Black
              - Modelo E-V con costes
            - Modelo Esperanza-Límite inferior de confinanza
            - Modelo Esperanza-Semivarianza
            - Modelo Esperanza-Entropía
          - Modelo de Fama
        - Modelos de tres momentos
        - Modelos de Dominancia Estocástica
      - Maximización directa de la función de utilidad esperada
    - Maximización de la Media Geométrica (Modelo Media Geométrica)
    - Seguridad ante todo (Modelos "Safety First")
      - Modelo de Roy
      - Modelo de Kataoka
      - Modelo de Telser
  - Modelos con múltiples objetivos (Modelo de Programación por Objetivos)

Para el estudio de los modelos indicados en esta clasificación hemos estructurado la Parte I en tres capítulos. En el primero de ellos (**Capitulo 1**) se estudiarán el modelo E-V básico y los modelos de índices. En el siguiente (**Capitulo 2**) se analizarán las modificaciones a las hipótesis del modelo E-V básico más discutidas y los modelos que surgen de dichas modificaciones. Por último, en el **Capítulo 3** se estudiarán el resto de los modelos que aunque algunos podrían ser considerados como modificaciones al modelo E-V básico, tienen personalidad propia y merecen un tratamiento individualizado.

CAPITULO 1

MODELOS FUNDAMENTALES

1.1. INTRODUCCION

En el presente capítulo estudiaremos dos modelos cuyo objetivo último es la maximización de la utilidad esperada del inversor pero que se basan en la Esperanza y en la Varianza para realizar una primera selección de carteras (carteras eficientes). Es decir, se trata de modelos con un único objetivo mixto de acuerdo con la clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera efectuada en esta **Parte I** de la Tesis; en efecto, la cartera óptima debe cumplir un prerrequisito, que es la pertenencia al conjunto de carteras eficientes. En concreto, se estudiará el que denominamos **modelo E-V básico** (modelo de Markowitz) y los **modelos de índices**, que añaden al anterior un nuevo supuesto respecto al comportamiento de la rentabilidad de los títulos considerados.

Estos dos modelos pueden considerarse la matriz de los restantes modelos que determinan previamente el conjunto eficiente ya que o bien intentan modificar alguna de las hipótesis incluidas en ellos (**Capítulo 2**) o bien se diferencian en la forma de considerar el riesgo asociado a la cartera (apartados **3.2.-3.6.** del **Capítulo 3**). Además, los modelos E-V básico y de índices permiten establecer comparaciones con otras formulaciones y soluciones. Estas características nos permiten calificar a los modelos E-V básico y de índices como **modelos fundamentales** y dicha expresión será la utilizada para referirnos a éllos.

1.2. MODELO ESPERANZA-VARIANZA BASICO

1.2.1. Introducción

Hasta la aparición del primer artículo de **Markowitz**[49], el criterio utilizado para la selección de carteras se basaba en la maximización de la rentabilidad esperada actualizada. Este criterio partía del análisis de inversiones en el campo de la certeza, en el que se suponen conocidas todas las rentabilidades futuras[50]. La selección de carteras, sin embargo, se enmarca en el campo de la incertidumbre y en concreto, tal como hoy se la entiende, se trata de una elección bajo riesgo[51].

Según **Markowitz**, el citado criterio adolecía de un grave defecto puesto que al basarse únicamente en la rentabilidad esperada para seleccionar la cartera óptima, prescindía del riesgo asociado a cada cartera factible. Para solventar este defecto, formuló un nuevo criterio

---

[49] **H.MARKOWITZ**, op. cit., 1952, pp.77-91.

[50] **J.B.WILLIAMS**, "The Theory of Investment Value", Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1938.

[51] **Knight** [**F.H.KNIGHT**, Riesgo, Uncertainty and Profit, (Kelley & Millman, New York, 1957), pp.19-20; trad. cast. por Aquilar] distingue dentro del campo de la incertidumre (en sentido amplio) dos vertientes, una que denomina riesgo y otra que denomina incertidumbre, en sentido estricto. El riesgo recoge todas aquellas situaciones en que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria es conocida objetivamente, mientras que la incertidumbre, en sentido estricto, engloba las restantes situaciones.

No todos los autores están de acuerdo con dicha distinción. Así, **Borch** afirma que distinguir entre riesgo e incertidumbre carece de utilidad, tanto práctica como teórica [**K.H.BORCH**, La Economía de la Incertidumbre (Tecnos, Madrid, 1977), p.80].

conocido como criterio **Esperanza-Varianza**[52] que no sólo tiene en cuenta la esperanza de una cartera (su rentabilidad esperada) sino también su varianza (varianza de la variable aleatoria rentabilidad), utilizada como medida del riesgo de la cartera. Este criterio se basa en el principio de que todo inversor racional considera la esperanza de la rentabilidad como algo positivo y la varianza asociada como algo negativo.

1.2.2. Variables que intervienen en el modelo

Las variables que intervienen en el modelo son las siguientes:

•) N: número de títulos entre los que se puede escoger para formar la cartera;

•) W_0: riqueza (cantidad dineraria) disponible para ser invertida;

•) Y_i: cantidad dineraria invertida en el título i; i=1,2,...,N;

•) X_i: proporción del presupuesto destinada al título i; i=1,2,...,N;

•) $\tilde{r}_i$: variable aleatoria "tasa de rentabilidad" del título i; i=1,2,...,N;

Dicha tasa de rentabilidad viene definida del siguiente modo:

$$\tilde{r}_i = \frac{\tilde{p}_{i1} - p_{io} + \tilde{d}_i}{p_{io}}$$

52 La expresión Esperanza-Varianza la simbolizaremos por E-V.

donde

p_{io}: precio del título i al inicio del periodo considerado;

$\tilde{p}_{i1}$: precio del título i al final del periodo considerado;

$\tilde{d}_i$: dividendo proporcionado por el título i y cobrado al final del periodo considerado;

•) $\tilde{R}_c$: variable aleatoria "tasa de rentabilidad" de la cartera

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \tilde{r}_i \qquad [1]$$

1.2.3. Hipótesis del modelo

Las hipótesis del modelo E-V básico son:

H.1. La rentabilidad de los títulos ($\tilde{r}_i$) es una variable aleatoria que se supone distribuida normalmente[53].

Si q_{ij} es la probabilidad asociada a cada resultado posible de la variable aleatoria $\tilde{r}_i (i=1,2,..,N;\ j=1,2,...,\upsilon_i)$, entonces, el **valor esperado de** $\tilde{r}_i$ es

---

[53] Si la función de distribución de la rentabilidad es normal y por tanto, simétrica, el tercer momento es nulo y ello permite describir tal distribución con los dos primeros momentos únicamente. No todos los autores aceptan dicha hipótesis por considerarla demasiado restrictiva. En el epígrafe **2.2.** se analiza el efecto de la modificación de esta hipótesis sobre el modelo analizado.

$$\mu_i = E(\tilde{r}_i) = \sum_{j=1}^{\nu_i} r_{ij} \cdot q_{ij} \qquad [2]$$

y la **varianza** asociada a $\tilde{r}_i$ es

$$\sigma_{ii} = V(\tilde{r}_i) = E(\tilde{r}_i - \mu_i)^2 \qquad [3]$$

Definida la varianza, la **desviación estándar** es

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{ii}} \qquad [4]$$

H.2. El inversor admite como conocida la distribución de probabilidad asociada a cada variable aleatoria $\tilde{r}_i$.

H.3. Todos los títulos considerados son arriesgados.

Si todos los títulos son arriesgados entonces

$$\sigma_{ii} \neq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N$$

H.4. En general, la rentabilidad del título i, $(\tilde{r}_i)$, no es independiente de la rentabilidad del título j, $(\tilde{r}_j)$. Ello significa que los resultados de las variables aleatorias están correlacionados, lo cual se traduce en una covarianza no nula.

La **covarianza** entre la rentabilidad del título i y la rentabilidad del título j, σ_{ij}, se define como

$$\sigma_{ij} = E(\tilde{r}_i \cdot \tilde{r}_j) - \mu_i \cdot \mu_j \qquad [5]$$

$$\sigma_{ij} \neq 0 \qquad i=1,2,\ldots,N; \quad j=1,2,\ldots,N; \quad j \neq i$$

$$\sigma_{ij} = V(\tilde{r}_i) \qquad j=i$$

En función de las hipótesis anteriores (**H.1, H.2, H.3** y **H.4**) la **rentabilidad esperada** de la cartera es

$$E(\tilde{R}_c) = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \tilde{r}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot E(\tilde{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \mu_i \qquad [6]$$

y la **varianza** asociada a la rentabilidad de la cartera es

$$V(\tilde{R}_c) = E[\tilde{R}_c - E(\tilde{R}_c)]^2 = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \mu_i\right]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (\tilde{r}_i - \mu_i)\right]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot (\tilde{r}_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i \cdot X_j \cdot (\tilde{r}_i - \mu_i) \cdot (\tilde{r}_j - \mu_j)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot E(\tilde{r}_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i \cdot X_j \cdot E(\tilde{r}_i - \mu_i) \cdot E(\tilde{r}_j - \mu_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i \cdot X_j \cdot \left[E(\tilde{r}_i \cdot \tilde{r}_j) - \mu_i \cdot \mu_j \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} \qquad [7]$$

H.5. Con respecto a X_i se deberá cumplir[54]:

a) $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$, es decir, $\sum_{i=1}^{N} Y_i = W_0$

b) $X_i \geq 0 \quad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N.$

La primera de estas hipótesis implica que no es posible el endeudamiento, mientras que la segunda supone que están prohibidas las ventas al descubierto[55].

---

[54] En el apartado **2.3.** se consideran las modificaciones que distintos autores han hecho a esta hipótesis.

[55] En una venta al descubierto ("short sale"), el inversor, al principio de un periodo, pide prestados unos títulos a cambio de restituirlos al final de dicho periodo junto con los dividiendos proporcionados por los mismos. Inmediatamente después de tener en su poder los títulos, los vende a un tercero que al final del periodo considerado cobrará los dividendos directamente de la entidad emisora de los títulos. En ese momento, el inversor vuelve a comprar los títulos en el mercado y los devuelve a su antiguo propietario, pagándole los dividendos que le hubieran correspondido en el caso de haberlos tenido bajo su control durante todo el periodo.

En el caso de estar permitidas las ventas al descubierto, el presupuesto dedicado a la compra de títulos se incrementa en la cuantía procedente de la venta de unas acciones que no son del inversor. El inversor que vende en el mercado unas acciones que no son suyas, se dice

H.6. El inversor siempre prefiere más a menos rentabilidad.

H.7. El inversor se comporta manifestando aversión por el riesgo (comportamiento o proximidad de un daño). El riesgo asociado a una determinada cartera se mide a través de la varianza de la rentabilidad de dicha cartera.

Las hipótesis **H.6.** y **H.7.** se pueden resumir en una única que considere al inversor como un individuo racional.

H.8. El criterio E-V determina que la cartera escogida sea la que proporcione la utilidad (de la rentabilidad de la cartera, $\tilde{R}_c$) esperada máxima.

H.9. La función de utilidad es una función cuadrática[56] de la rentabilidad:

---

que está en una posición negativa y en este caso $X_i<0$ puesto que no ha dedicado nada de su presupuesto a esos títulos; **E.F.FAMA**, Foundations of Finance; Portfolio Decision and Securities Prices (Basil Blackwell, Oxford, 1977), pp.224-225; **E.PEREZ GOROSTEGUI**, "La Selección de Carteras: Combinando Títulos con Riesgo", A.F., 1988, pp.2130-2132.

[56] La función de utilidad cuadrática es la única que permite basar las decisiones en función de la rentabilidad esperada de la cartera y de la varianza asociada a dicha rentabilidad. Pero, no todos los autores aceptan una función de este tipo por las restricciones que supone su utilización (véanse los apartados **2.4.** y **3.6.** de esta Tesis donde se consideran otras funciones de utilidad).

$$U(\tilde{R}_c) = a + b\cdot\tilde{R}_c + c\cdot\tilde{R}_c^2 \quad \text{siendo } c\neq 0 \qquad [8]$$

La hipótesis **H.6.** impone que la función de utilidad sea creciente. Se cumplirá, por tanto,

$$U'(\tilde{R}_c) \geq 0$$

De **H.7.** se desprende que la función de utilidad es cóncava y ello implica que

$$U''(\tilde{R}_c) \leq 0$$

La forma de la función de utilidad y las exigencias sobre el signo de su primera y segunda derivada, imponen restricciones al signo de los coeficientes de la función:

$$U''(\tilde{R}_c) = 2\cdot c \leq 0 \quad (c\neq 0) \longrightarrow c < 0$$

$$U'(\tilde{R}_c) = b + 2\cdot c\cdot\tilde{R}_c \geq 0 \longrightarrow b\geq -2\cdot c\cdot\tilde{R}_c \longrightarrow (c<0)\ b\geq 0$$

El coeficiente "a" puede tomar cualquier valor.

Por otra parte, al tratarse de una función cuadrática y exigirse que sea creciente, deberá limitarse el dominio de la función a aquellos valores de $\tilde{R}_c$ comprendidos en el intervalo $(0, \frac{-b}{2c})$.

La función que se trata de maximizar es la de la **utilidad esperada**, que tendrá la siguiente forma:

$$E[U(\tilde{R}_c)] = E(a + b\cdot\tilde{R}_c + c\cdot\tilde{R}_c^2) = a + b\cdot E(\tilde{R}_c) + c\cdot E(\tilde{R}_c^2) \qquad [9]$$

Si tenemos en cuenta que

$$V(\tilde{R}_c) = E[\tilde{R}_c - E(\tilde{R}_c)]^2 = E(\tilde{R}_c^2) - [E(\tilde{R}_c)]^2$$

entonces $E(\tilde{R}_c^2)$ se puede definir en función de $E(\tilde{R}_c)$ y $V(\tilde{R}_c)$:

$$E(\tilde{R}_c^2) = V(\tilde{R}_c) + [E(\tilde{R}_c)]^2 \qquad [10]$$

En función de [10] la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera [9] puede definirse del siguiente modo:

$$E[U(\tilde{R}_c)] = a + b\cdot E(\tilde{R}_c) + c\cdot V(\tilde{R}_c) + c\cdot[E(\tilde{R}_c)]^2 \qquad [11]$$

De esta expresión, se desprende que la utilidad esperada es una función de la rentabilidad esperada de la cartera y de su varianza, $E[U(\tilde{R}_c)] = f[E(\tilde{R}_c), V(\tilde{R}_c)]$. Esta propiedad permite al criterio definido basarse, únicamente, en los dos primeros momentos de la distribución de probabilidad.

H.10. El inversor, para un nivel determinado de riesgo, prefiere mas rentabilidad a menos. Ello implica que[57],

[57]Demostración:

$$\frac{\partial E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial E(\tilde{R}_c)} = b + 2\cdot c[E(\tilde{R}_c)] = E[U'(\tilde{R}_c)] \geq 0 \text{ puesto que } U'(\tilde{R}_c) \geq 0.$$

$$\frac{\partial E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial E(\tilde{R}_c)} \geq 0$$

De igual modo, fijado un nivel de rentabilidad esperada, el inversor prefiere menos riesgo a más riesgo, es decir[58],

$$\frac{\partial E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial V(\tilde{R}_c)} < 0$$

Esta hipótesis aparecía ya en nuestra introducción al comentar un principio intuitivo según el cual, todo inversor considera la rentabilidad esperada como algo positivo mientras que la varianza es considerado como algo negativo.

H.11. Se consideran nulos los costes de negociación y transacción relacionados con la formación de una cartera nueva o cambio de una ya existente[59].

---

[58] Demostración:

$$\frac{\partial E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial V(\tilde{R}_c)} = c < 0$$

[59] En el apartado **3.2.** se modifica esta hipótesis.

1.2.4. Selección de la cartera óptima.

En función de las hipótesis del epígrafe 1.2.3., la selección de la cartera óptima para el inversor se divide en dos fases:

1) Primera fase: Determinación de la frontera eficiente

En primer lugar se define el conjunto de todas las carteras que son factibles. Cada una de estas carteras puede describirse en función de su rentabilidad esperada y su riesgo (medido a través de la varianza). Una vez que todas las carteras están representadas por el par $(E(\tilde{R}_c),V(\tilde{R}_c))$, **el criterio E-V establece que una cartera A es preferida a otra cartera B si y sólo si:**

$$E_A \geq E_B \text{ y } V_A < V_B \quad \text{ó}$$

$$E_A > E_B \text{ y } V_A \leq V_B$$

Y una cartera es eficiente según el criterio E-V si:

i) para su rentabilidad esperada no existe otra cartera con menor riesgo ó

ii) para su nivel de riesgo no existe otra cartera con una rentabilidad esperada mayor.

El lugar geométrico de las carteras eficientes recibe el nombre de frontera eficiente.

La frontera eficiente puede encontrarse a través de los siguientes métodos[60]:

a) Análisis gráfico, siempre y cuando el número de títulos considerados sea igual o inferior a cuatro puesto que, como máximo es posible dibujar en $\mathbb{R}^3$ (en el espacio)[61].

b) Resolviendo uno de los siguientes problemas de optimización:

b.1)

$$
\left.
\begin{array}{ll}
 & \text{Max } E(\tilde{R}_c) \\
\text{sujeto a} & \\
 & V(\tilde{R}_c) = V^* \\
 & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\
 & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\dots,N
\end{array}
\right\}
$$

La presencia de restricciones no lineales $[V(\tilde{R}_c)=V^*]$ dificulta la resolución de este problema. Para evitar esta dificultad se resuelven los

---

[60] J.C.FRANCIS-S.H.ARCHER, op. cit., 1977, pp.69-107.

[61] El problema de determinación de la cartera eficiente cuando se consideran cuatro títulos, puede reducirse a un problema de tres variables teniendo en cuenta la restricción $\sum_{i=1}^{4} X_i = 1$.

problemas planteados en los apartados b.2) y b.3) que proporcionan iguales resultados debido a la propia definición de frontera eficiente.

b.2)

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } V(\tilde{R}_c) \\ \text{sujeto a} & \\ & E(\tilde{R}_c) = E^* \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

Este problema puede resolverse mediante la aplicación del método de optimización clásico de Lagrange. Así, dada la función lagrangiana

$$L(X_i,\lambda_1,\lambda_2) = V(\tilde{R}_c) + \lambda_1\cdot[E(\tilde{R}_c) - E^*] + \lambda_2\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} X_i - 1\right]$$

donde las expresiones de $V(\tilde{R}_c)$ y $E(\tilde{R}_c)$ deducidas en [7] y [6] son respectivamente

$$V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i\cdot X_j\cdot\sigma_{ij}$$

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N} X_i\cdot\mu_i$$

las condiciones de primer orden de mínimo son:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L}{\partial X_1} = 2\cdot X_1\cdot\sigma_{11}+2\cdot X_2\cdot\sigma_{12}+2\cdot X_3\cdot\sigma_{13}+..+2\cdot X_N\cdot\sigma_{1N}+\lambda_1\cdot\mu_1+\lambda_2 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial X_2} = 2\cdot X_1\cdot\sigma_{12}+2\cdot X_2\cdot\sigma_{22}+2\cdot X_3\cdot\sigma_{23}+..+2\cdot X_N\cdot\sigma_{2N}+\lambda_1\cdot\mu_2+\lambda_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial L}{\partial X_N} = 2\cdot X_1\cdot\sigma_{1N}+2\cdot X_2\cdot\sigma_{2N}+2\cdot X_3\cdot\sigma_{3N}+..+2\cdot X_N\cdot\sigma_{NN}+\lambda_1\cdot\mu_N+\lambda_2 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mu_1\cdot X_1+\mu_2\cdot X_2+\mu_3\cdot X_3+...+\mu_N\cdot X_N-E^* = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = X_1 + X_2 + X_3 +...+ X_N - 1 = 0
\end{array}\right\}$$

Se demuestra que la solución al anterior sistema de ecuaciones es[62]:

$$X_i^0 = a_i + b_i\cdot E^* \qquad i=1,2,...,N \qquad [12]$$

La aplicación de Lagrange no garantiza que $X_i \geq 0$. Para asegurar su positividad deberán limitarse los valores de E^* para cada caso concreto.

---

62 **H.MARKOWITZ**, Mean-Variance Analysis Portfolio Choice and Capital Markets (Basil Blackwell, Oxford, 1989), pp.127-131.
J.C.FRANCIS-S.H.ARCHER, op. cit., 1977, pp.89-96.

Así, para N=2, la solución al sistema es:

$$X_1^0 = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} - \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\cdot E^* = \frac{\mu_2 - E^*}{\mu_2 - \mu_1} \qquad [13]$$

donde a_1 y b_1 de [12] son

$$a_1 = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \qquad b_1 = -\frac{1}{\mu_2 - \mu_1}$$

$$X_2^0 = -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\cdot E^* = \frac{E^* - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \qquad [14]$$

donde a_2 y b_2 de [12] son

$$a_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \qquad b_2 = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}$$

En función de [13] y [14], la ecuación de la frontera eficiente es:

$$V(\tilde{R}_c) = (X_1^0)^2\cdot\sigma_{11} + (X_2^0)^2\cdot\sigma_{22} + 2\cdot(X_1^0)\cdot(X_2^0)\cdot\sigma_{12} =$$

$$= \frac{1}{(\mu_2-\mu_1)^2}\cdot\left\{(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\cdot\sigma_{12})\cdot(E^*)^2 - 2\cdot[\mu_1\cdot(\sigma_{22}-\sigma_{12})+\mu_2\cdot(\sigma_{11}-\sigma_{12})]\cdot E^* + \right.$$
$$\left. + (\mu_1)^2\cdot\sigma_{22} + (\mu_2)^2\cdot\sigma_{11} - 2\cdot\mu_1\cdot\mu_2\cdot\sigma_{12}\right\} \qquad [15]$$

Para garantizar la positividad[63] de X_i^0 $(i=1,2)$ debe acotarse el valor de E^*:

---

[63] **A.D.MARTIN** propone un algoritmo de cálculo para asegurar la positividad de X_i en "Mathematical Programming of Portfolio Selection", M.S., 1955, pp.152-166.

i) $\mu_2 > \mu_1$

En este caso deberá garantizarse que

$$\mu_2 - E^* \geq 0$$

$$E^* - \mu_1 \geq 0$$

y ello implica que $\mu_1 \leq E^* \leq \mu_2$ [16]

ii) $\mu_2 < \mu_1$

Ahora deberá garantizarse que

$$\mu_2 - E^* \leq 0$$

$$E^* - \mu_1 \leq 0$$

y ello implica que $\mu_2 \leq E^* \leq \mu_1$ [17]

Una forma alternativa de resolver este problema que permite la introducción de la restricción $X_i \geq 0$ consiste en la aplicación de la Programación Cuadrática tal como propone **Markowitz**[64].

---

[64]**H.MARKOWITZ**, op. cit., 1959, pp.321-322.
op. cit., 1989, pp.152-154.

b.3)

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } [\phi\cdot E(\tilde{R}_c) - V(\tilde{R}_c)] \\ \text{sujeto a} & \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

ϕ es un parámetro que representa la preferencia del inversor por la rentabilidad frente al riesgo que debe asumir para obtenerla[65].

Maximizar $[\phi\cdot E(\tilde{R}_c) - V(\tilde{R}_c)]$ equivale a minimizar $[V(\tilde{R}_c) - \phi\cdot E(\tilde{R}_c)]$ y la solución al problema definido mediante la aplicación de Lagrange supone minimizar la siguiente función:

$$L(X_i,\lambda) = V(\tilde{R}_c) - \phi\cdot[E(\tilde{R}_c)] + \lambda\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} X_i - 1\right]$$

Y las condiciones de primer orden de mínimo son:

[65] **J.C.FRANCIS-S.H.ARCHER**, op. cit., 1977, p.97.

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L}{\partial X_1} = 2\cdot X_1\cdot\sigma_{11}+2\cdot X_2\cdot\sigma_{12}+2\cdot X_3\cdot\sigma_{13}+\ldots+2\cdot X_N\cdot\sigma_{1N}-\phi\cdot\mu_1+\lambda = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial X_2} = 2\cdot X_1\cdot\sigma_{12}+2\cdot X_2\cdot\sigma_{22}+2\cdot X_3\cdot\sigma_{23}+\ldots+2\cdot X_N\cdot\sigma_{2N}-\phi\cdot\mu_2+\lambda = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial X_N} = 2\cdot X_1\cdot\sigma_{1N}+2\cdot X_2\cdot\sigma_{2N}+2\cdot X_3\cdot\sigma_{3N}+\ldots+2\cdot X_N\cdot\sigma_{NN}-\phi\cdot\mu_N+\lambda = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = X_1 + X_2 + X_3 +\ldots+ X_N - 1 = 0
\end{array}\right\}$$

La solución a este sistema de ecuaciones tiene la forma[66]:

$$X_i^1 = c_i + d_i\cdot\phi \qquad\qquad i=1,2,\ldots,N. \qquad [18]$$

En el caso que N=2, la naturaleza de la solución es la siguiente:

$$X_1^1 = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22}} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{2(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})}\cdot\phi =$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{22}) - (\mu_1 - \mu_2)\cdot\phi}{2\cdot(2\sigma_{12} - \sigma_{11} - \sigma_{22})} \qquad [19]$$

donde c_1 y d_1 de [18] son

$$c_1 = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22}} \qquad d_1 = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})}$$

---

66 **J.C.FRANCIS-S.H.ARCHER**, op. cit., 1977, p.96-104.

$$X_2^1 = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{11}}{2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22}} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})}\cdot\phi$$

$$= \frac{(\mu_1 - \mu_2)\cdot\phi + 2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{11})}{2\cdot(2\sigma_{12} - \sigma_{11} - \sigma_{22})} \qquad [20]$$

donde c_2 y d_2 de [18] son

$$c_2 = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{11}}{2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22}} \qquad d_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})}$$

Al igual que en el caso b.2) deben limitarse los valores que puede tomar ϕ para garantizar la positividad de X_1^1 y X_2^1.

Como el denominador de [19] y [20], $(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})$, toma siempre valores negativos[67] para que X_1^1 sea positivo o cero se necesita que

$$2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{22}) \leq (\mu_1 - \mu_2)\cdot\phi$$

Si $\mu_1 - \mu_2 > 0$, entonces $\phi \geq \dfrac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{22})}{\mu_1 - \mu_2}$

Si $\mu_1 - \mu_2 < 0$, entonces $\phi \leq \dfrac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{22})}{\mu_1 - \mu_2}$

Igualmente, para que X_2^1 sea positivo o cero se necesita que

$$(\mu_1 - \mu_2)\cdot\phi + 2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{11}) \leq 0$$

[67] Demostración:
$2\sigma_{12} - \sigma_{11} - \sigma_{22} = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\rho_{12})$ donde $-1\leq\rho_{12}\leq 1$. En el caso que $\rho_{12}=1$ se cumplirá que

$$-(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\rho_{12}) = -(\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

y ello garantiza que $2\sigma_{12} - \sigma_{11} - \sigma_{22}$ sea siempre negativo. Por tanto, si para $\rho_{12}=1$ se cumple que $\sigma_{11} + \sigma_{22} > 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$, esta desigualdad se cumplirá para cualquier otro valor de ρ_{12} inferior a uno $(-1\leq\rho_{12}\leq 1)$ y, en definitiva

$$-(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}) < 0 \qquad \forall\rho_{12};\ -1\leq\rho_{12}\leq 1.$$

Si $\mu_1 - \mu_2 > 0$, entonces $\phi \leq \dfrac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{11})}{\mu_1 - \mu_2}$

Si $\mu_1 - \mu_2 < 0$, entonces $\phi \leq \dfrac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{11})}{\mu_1 - \mu_2}$

En definitiva, los valores que puede tomar ϕ son:

$$\text{i)}\quad \frac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{22})}{\mu_1 - \mu_2} \leq \phi \leq \frac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{11})}{\mu_1 - \mu_2} \qquad \text{si } \mu_1 > \mu_2 \qquad [21]$$

$$\text{ii)}\quad \frac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{11})}{\mu_1 - \mu_2} \leq \phi \leq \frac{2\cdot(\sigma_{12} - \sigma_{22})}{\mu_1 - \mu_2} \qquad \text{si } \mu_2 > \mu_1 \qquad [22]$$

Después de resolver separadamente los problemas b.2) y b.3) podemos demostrar que ambos proporcionan iguales resultados. Para ello, bastará con relacionar E^* y ϕ que son las variables de las que dependen las soluciones de b.2) y b.3) respectivamente y, en concreto, determinar cuál es la rentabilidad esperada de la cartera para el problema b.3).

Así, la rentabilidad esperada de una cartera en que los pesos de los dos títulos son los obtenidos en [19] y [20] es:

$$E(\tilde{R}_c) = X_1^1\cdot\mu_1 + X_2^1\cdot\mu_2 =$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11})\cdot\mu_2 + 2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22})\cdot\mu_1 - (\mu_2-\mu_1)^2\cdot\phi}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} \qquad [23]$$

Para cada valor de ϕ existe un único valor de $E(\tilde{R}_c)=E^*$ y a la inversa. Si sustituimos la expresión de $E(\tilde{R}_c)$, [23], en X_1^0 [13] y X_2^0 [14] (solución al problema b.2.) podemos ver que coinciden con X_1^1 [19] y X_2^1 [20] respectivamente:

$$X_1^0 = \frac{\mu_2 - E^*}{\mu_2 - \mu_1} =$$

$$= \frac{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})\cdot\mu_2 - 2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11})\cdot\mu_2 - 2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22})\cdot\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)^2\cdot\phi}{2\cdot(\mu_2-\mu_1)\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} =$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22})\cdot\mu_2 - 2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22})\cdot\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)^2\cdot\phi}{2\cdot(\mu_2-\mu_1)\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} =$$

$$= \frac{2\cdot(\mu_2-\mu_1)\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22}) + (\mu_2-\mu_1)^2\cdot\phi}{2\cdot(\mu_2-\mu_1)\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} =$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22}) + (\mu_2-\mu_1)\cdot\phi}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} = \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22}) - (\mu_1-\mu_2)\cdot\phi}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} = X_1^1$$

$$X_2^0 = \frac{E^* - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} =$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11})\cdot\mu_2 + 2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{22})\cdot\mu_1 - (\mu_2-\mu_1)^2\cdot\phi - 2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})\cdot\mu_1}{2(\mu_2-\mu_1)\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} =$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11})\cdot\mu_2 - 2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11})\cdot\mu_1 - (\mu_2-\mu_1)^2\cdot\phi}{2\cdot(\mu_2-\mu_1)\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} =$$

$$= \frac{2\cdot(\mu_2-\mu_1)\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11}) - (\mu_2-\mu_1)^2\cdot\phi}{2\cdot(\mu_2-\mu_1)\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} =$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11}) - (\mu_2-\mu_1)\cdot\phi}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} = \frac{2\cdot(\sigma_{12}-\sigma_{11}) + (\mu_1-\mu_2)\cdot\phi}{2\cdot(2\sigma_{12}-\sigma_{11}-\sigma_{22})} = X_2^1$$

Para el caso general de una cartera con N títulos, la solución de los problemas b.2) y b.3) es, respectivamente:

$$X_i^0 = a_i + b_i\cdot E^*$$

$$X_i^1 = c_i + d_i\cdot\phi$$

Y la rentabilidad esperada de la cartera para b.3) es

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N} (c_i + d_i \cdot \phi) \cdot \mu_i = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \mu_i + \phi \cdot \sum_{i=1}^{N} d_i \cdot \mu_i$$

La relación existente entre $E(\tilde{R}_c)$ y ϕ garantiza la coincidencia de las dos soluciones.

2) Segunda fase: determinación de la cartera óptima para el inversor concreto

En función de las hipótesis utilizadas, la frontera eficiente será la misma para todos los inversores, pero de entre todas las carteras que constituyen dicha frontera cada inversor escogerá aquella que maximice su utilidad esperada; dado que la función de utilidad es distinta para cada inversor, la cartera óptima tambien lo será.

Es importante señalar que la frontera eficiente muestra todas las combinaciones eficientes de títulos y cada una de estas combinaciones (cartera de títulos) tiene asociada una rentabilidad esperada y una varianza; del mismo modo, en [11] se puso de manifiesto que la utilidad esperada dependía de estas dos variables:

$$E[U(\tilde{R}_c)] = a + b \cdot E(\tilde{R}_c) + c \cdot V(\tilde{R}_c) + c \cdot [E(\tilde{R}_c)]^2 \qquad [24]$$

Como la frontera eficiente proporciona cuál es la varianza asociada para cada nivel de rentabilidad esperada y muestra, por tanto, que $V(\tilde{R}_c)$ depende únicamente de $E(\tilde{R}_c)$, $E[U(\tilde{R}_c)]$ se convierte en una función de una única variable $[E(\tilde{R}_c)]$.

La solución a este problema consiste, pués, en la maximización de una función de una única variable. Será fácil, por tanto, deducir cuál es la cartera que proporciona la máxima utilidad esperada.

Si para N=2, sustituimos la expresión de $V(\tilde{R}_c)$ obtenida en [15] en $E[U(\tilde{R}_c)]$ obtenemos

$$E[U(\tilde{R}_c)] =$$

$$= a + b\cdot E^* + \frac{c}{(\mu_2-\mu_1)^2}\cdot\Big\{(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\cdot\sigma_{12})\cdot(E^*)^2 - 2\cdot[\mu_1\cdot(\sigma_{22}-\sigma_{12}) +$$

$$+ \mu_2\cdot(\sigma_{11}-\sigma_{12})]\cdot E^* + (\mu_1)^2\cdot\sigma_{22} + (\mu_2)^2\cdot\sigma_{11} - 2\cdot\mu_1\cdot\mu_2\cdot\sigma_{12}\Big\} + c\cdot(E^*)^2 \quad [25]$$

Si igualamos a cero la derivada de $E[U(\tilde{R}_c)]$ en [25] respecto a E^* obtenemos el valor óptimo de esta variable:

$$E^*_{opt} = \frac{2\cdot c\cdot[\mu_1\cdot(\sigma_{22}-\sigma_{12})+\mu_2\cdot(\sigma_{11}-\sigma_{12})] - b\cdot(\mu_2-\mu_1)^2}{2\cdot c\cdot[(\sigma_{11}+\sigma_{22}-2\cdot\sigma_{12})+(\mu_2-\mu_1)^2]} \quad [26]$$

Sustituyendo [26] en [13] y [14] se obtienen las proporciones invertidas en cada título que proprcionan la cartera óptima.

Analíticamente, la cartera óptima es la que resulta de la tangencia entre la frontera eficiente y el mapa de curvas e isoutilidad. Cada una de estas curvas representa a todas las combinaciones de $E(\tilde{R}_c)$ y $V(\tilde{R}_c)$ que proporcionan la misma utilidad esperada[68].

[68]G.C.PHILIPPATOS, "Mean-Variance Portfolio Selection Strategies", incluido en J.L.BICKSLER, Handbook of Financial Economics (North Holland, Amsterdam, 1979), pp.311-312.

Kroll, Levy y Markowitz[69] estudian las diferencias que se producen entre la búsqueda de la cartera óptima en las dos fases citadas y directamente a través de la maximización de la función de utilidad esperada sin obtener antes el conjunto eficiente. Demuestran que en ambos casos se llega a resultados muy parecidos y que en el caso de maximización directa de la utilidad esperada, las carteras óptimas obtenidas están muy próximas al conjunto eficiente.

Los autores, destacan una ventaja del primer procedimiento al señalar que el conjunto eficiente es el mismo para todos los inversores y ello facilita el trabajo a un analista que tenga varios clientes, puesto que la cartera óptima se hallará entre un conjunto más reducido de carteras factibles que el que se presenta al maximizar directamente la función de utilidad.

En el caso de maximización directa de la función de utilidad, el problema puede representarse del siguiente modo[70]:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } E[U(\tilde{R}_c)] \\ \text{sujeto a} & \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

El modelo descrito permite al inversor seleccionar la cartera óptima para un periodo si su objetivo es maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera y bajo las hipótesis citadas.

---

[69] Y.KROLL-H.LEVY-H.MARKOWITZ, "Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization", J.F., 1984, pp.47-61.

[70] Y.KROLL-H.LEVY-H.MARKOWITZ, op. cit., 1984, p.49.

1.2.5. Generalización del modelo E-V básico

Una finalidad de nuestro trabajo es desarrollar un modelo de selección y revisión de carteras, es decir, un modelo que permita al inversor determinar, al final de cada periodo en los que ha dividido el horizonte temporal de posesión de la cartera, la nueva cartera óptima para el siguiente periodo y por tanto, las modificaciones que ha de llevar a cabo en su antigua cartera para adaptarla a la nueva, suponiendo que actúa en cada periodo como si éste fuera el último del horizonte temporal. Es decir, el **inversor aplica el modelo no sólo para seleccionar la primera cartera sino también al final de cada uno de los periodos de posesión de la misma. Ello requiere que efectuemos algunos cambios en el modelo** para permitir su aplicación periódicamente puesto que la función de utilidad en base a la rentabilidad de la cartera presenta dificultades al intentar utilizarla en periodos distintos.

Se supone que el inversor se comporta en cada periodo queriendo maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera. Pero, dicha función será distinta periodo a periodo ya que la utilidad de la rentabilidad de la cartera no es la misma para todos los niveles de riqueza y ésta sufre variaciones en cada periodo. Como al final de cada periodo, la riqueza del inversor es distinta a la del principio de dicho periodo, será necesario definir una nueva función de utilidad al principio de cada nuevo periodo. Para evitar esta dificultad, puede definirse una **función de utilidad basada en la riqueza del inversor** en lugar de la rentabilidad de la cartera[71].

---

[71]Suponemos que la función de utilidad mantiene su estructura y que lo único que se modifica, como consecuencia de la variación de la riqueza, son sus parámetros.

La función de utilidad basada en la riqueza, W, del inversor se define del siguiente modo:

$$U^{*}(W) = \alpha + \beta \cdot W + \gamma \cdot W^2 \qquad [27]$$

La función de utilidad de la riqueza tiene asociada una única función de utilidad de la rentabilidad de la cartera, por lo que no hay ninguna contradicción con el modelo descrito anteriormente. Este es un resultado que intuimos al estudiar la cuestión y que hemos confirmado vía demostración.

Sea:

•) t: momento en que el inversor se dispone a constituir o revisar su cartera $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$; $t=0$ representa el momento en que el inversor selecciona su primera cartera (que mantendrá sin cambio alguno durante el periodo[72] 1), y $t=T$ representa el momento en que el inversor liquida definitivamente su cartera;

•) W_t: riqueza del inversor en el momento t (inicio del periodo $t+1$); $t=0,1,2,\ldots,T-1$;

Como se trata de revisar una cartera ya existente, W_t está formada por dos elementos:

a) Valor de mercado en t de los títulos poseídos en ese periodo.

b) Dividendos cobrados en t por los títulos poseídos en ese periodo.

---

[72] En general, el periodo $t+1$ se inicia en el momento t y finaliza en el momento $t+1$.

Se supone que el inversor reinvierte la riqueza disponible en el momento t, W_t, en el siguiente periodo.

•) Y_{it}: cantidad total invertida en el título i $(i=1,2,\ldots,N)$ en el momento t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$ tras la revisión efectuada en dicho momento y que se mantendrá durante el periodo t+1;

•) X_{it}: proporción de W_t destinada al título i $(i=1,2,\ldots,N)$ en el momento t $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$:

$$X_{it} = \frac{Y_{it}}{W_t}$$

•) $\tilde{r}_{it+1}$: tasa de rentabilidad (aleatoria) del título i $(i=1,2,\ldots,N)$ en el momento t+1 $(t=0,1,\ldots,T-1)$:

$$\tilde{r}_{it+1} = \frac{\tilde{p}_{it+1} - p_{it} + \tilde{d}_{it+1}}{p_{it}}$$

donde

$\tilde{p}_{it+1}$: precio de mercado del título i en el momento t+1 (final del periodo t+1);

p_{it}: precio de mercado del título i en el momento t (al inicio del periodo t+1);

$\tilde{d}_{it+1}$: dividendos del título i pagados en el momento t+1 (final del periodo t+1);

•) $\tilde{R}_{ot+1}$: tasa de rentabilidad (aleatoria) de la cartera en el momento t+1 $(t=0,1,2,\ldots,T-1)$:

$$\tilde{R}_{ct+1} = \sum_{i=1}^{N} X_{it} \cdot \tilde{r}_{it+1}$$

En general, el objetivo en el momento t $(t=0,1,..,T-1)$ consiste en maximizar la utilidad esperada de la riqueza en t+1 (al final del periodo t+1). Debe definirse, por tanto, la función de utilidad de la riqueza del siguiente modo:

$$U^{*}(\tilde{W}_{t+1}) = \alpha + \beta \cdot \tilde{W}_{t+1} + \gamma \cdot (\tilde{W}_{t+1})^{2} \qquad [28]$$

donde

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t + \tilde{R}_{ct+1} \cdot W_t = W_t \cdot (1 + \tilde{R}_{ct+1}) \qquad [29]$$

Sustituyendo $\tilde{W}_{t+1}$ en la función de utilidad [28], se obtiene:

$$U^{*}(\tilde{W}_{t+1}) = \alpha + \beta \cdot W_t \cdot (1 + \tilde{R}_{ct+1}) + \gamma \cdot [W_t \cdot (1 + \tilde{R}_{ct+1})]^{2} =$$

$$= \alpha + \beta \cdot W_t + \beta \cdot W_t \cdot \tilde{R}_{ct+1} + \gamma \cdot W_t^2 + \gamma \cdot W_t^2 \cdot \tilde{R}_{ct+1}^2 + 2 \cdot \gamma \cdot W_t^2 \cdot \tilde{R}_{ct+1} =$$

$$= \alpha + \beta \cdot W_t + \gamma \cdot W_t^2 + (\beta \cdot W_t + 2 \cdot \gamma \cdot W_t^2) \cdot \tilde{R}_{ct+1} + \gamma \cdot W_t^2 \cdot \tilde{R}_{ct+1}^2 \qquad [30]$$

Haciendo[73],

$$a = \alpha + \beta \cdot W_t + \gamma \cdot W_t{}^{2}$$

$$b = \beta \cdot W_t + 2 \cdot \gamma \cdot W_t^2$$

$$c = \gamma \cdot W_t^2$$

[73] En t, la riqueza W_t es un dato.

la función de utilidad de la riqueza [30] puede definirse también así:

$$U^*(\tilde{W}_{t+1}) = a + b\cdot\tilde{R}_{ct+1} + c\cdot\tilde{R}^2_{ct+1} = U(\tilde{R}_{ct+1}) \qquad [31]$$

Se puede apreciar que **a, b y c son coeficientes que dependen W_t** y por tanto, para cada W_t será necesario determinar la nueva función de utilidad de la rentabilidad.

Hemos demostrado que cada función de utilidad de la riqueza tiene asociada una y sólo una función de utilidad de la rentabilidad de la cartera. Debido a esta propiedad y a la dificultad que plantea el hecho de ir modificando, periodo a periodo, la función de utilidad de la rentabilidad de la cartera, en el modelo de revisión se usará la función de utilidad de la riqueza al final de cada periodo.

Del mismo modo que la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera depende de la rentabilidad esperada y la varianza asociada a la misma, se puede demostrar que **la utilidad esperada de la riqueza en t+1 depende sólo de la riqueza esperada y su varianza asociada.**

Así, dada la función de utilidad [28]:

$$U^*(\tilde{W}_{t+1}) = \alpha + \beta\cdot\tilde{W}_{t+1} + \gamma\cdot(\tilde{W}_{t+1})^2$$

la **utilidad esperada de la riqueza** es:

$$E[U^*(\tilde{W}_{t+1})] = \alpha + \beta\cdot E(\tilde{W}_{t+1}) + \gamma E\cdot[(\tilde{W}_{t+1})^2] \qquad [32]$$

Teniendo en cuenta que

$$V(\tilde{W}_{t+1}) = E[\tilde{W}_{t+1} - E(\tilde{W}_{t+1})]^2 = E[(\tilde{W}_{t+1})^2] - [E(\tilde{W}_{t+1})]^2$$

podemos expresar $E[(\tilde{W}_{t+1})^2]$ en función de $E(\tilde{W}_{t+1})$ y $V(\tilde{W}_{t+1})$ del siguiente modo

$$E[(\tilde{W}_{t+1})^2] = V(\tilde{W}_{t+1}) + [E(\tilde{W}_{t+1})]^2 \tag{33}$$

Y, en función de [33] la utilidad esperada [32] es

$$E[U^*(\tilde{W}_{t+1})] = \alpha + \beta \cdot E(\tilde{W}_{t+1}) + \gamma \cdot V(\tilde{W}_{t+1}) + \gamma \cdot [E(\tilde{W}_{t+1})]^2 \tag{34}$$

En definitiva, la utilidad esperada de la riqueza al final del periodo **t+1** es una función del valor esperado de dicha riqueza y de la varianza asociada:

$$E[U^*(\tilde{W}_{t+1})] = f[E(\tilde{W}_{t+1}),\ V(\tilde{W}_{t+1})] \tag{35}$$

Pero, a su vez, $E(\tilde{W}_{t+1})$ y $V(\tilde{W}_{t+1})$ se pueden expresar en función de $E(\tilde{R}_{ct+1})$ y $V(\tilde{R}_{ct+1})$. Así,

$$E(\tilde{W}_{t+1}) = W_t + W_t \cdot E(\tilde{R}_{ct+1}) = W_t \cdot [1 + E(\tilde{R}_{ct+1})] \tag{36}$$

$$V(\tilde{W}_{t+1}) = E[\tilde{W}_{t+1} - E(\tilde{W}_{t+1})]^2 =$$

$$= E\{W_t \cdot [\tilde{R}_{ct+1} - E(\tilde{R}_{ct+1})]\}^2 = E\{W_t^2 \cdot [\tilde{R}_{ct+1} - E(\tilde{R}_{ct+1})]^2\} =$$

$$= W_t^2 \cdot E[\tilde{R}_{ct+1} - E(\tilde{R}_{ct+1})]^2 = W_t^2 \cdot V(\tilde{R}_{ct+1}) \tag{37}$$

Teniendo en cuenta [36] y [37] la utilidad esperada [34] puede expresarse también así,

$$E[U^*(\tilde{W}_{t+1})] = \alpha + \beta\cdot\{W_t\cdot[1 + E(\tilde{R}_{ct+1})]\} +$$

$$+ \gamma\cdot[W_t^2\cdot V(\tilde{R}_{ct+1})] + \gamma\cdot\{W_t\cdot[1 + E(\tilde{R}_{ct+1})]\}^2 = \alpha + \beta\cdot W_t + \gamma\cdot W_t^2 +$$

$$+ (\beta\cdot W_t + 2\cdot\gamma\cdot W_t^2)\cdot E(\tilde{R}_{ct+1}) + \gamma\cdot W_t^2\cdot V(\tilde{R}_{ct+1}) + \gamma\cdot W_t^2\cdot[E(\tilde{R}_{ct+1})]^2 \qquad [38]$$

Haciendo,

$$a = \alpha + \beta\cdot W_t + \gamma\cdot W_t^2$$

$$b = \beta\cdot W_t + 2\cdot\gamma\cdot W_t^2$$

$$c = \gamma\cdot W_t^2$$

la utilidad esperada [38] es

$$E[U^*(\tilde{W}_{t+1})] = a + b\cdot E(\tilde{R}_{ct+1}) + c\cdot V(\tilde{R}_{ct+1}) + c\cdot[E(\tilde{R}_{ct+1})]^2 \qquad [39]$$

Esta expresión la podíamos haber obtenido directamente a partir de la función [31]:

$$U^*(\tilde{W}_{t+1}) = a + b\cdot\tilde{R}_{ct+1} + c\cdot(\tilde{R}_{ct+1})^2$$

En este caso,

$$E[U^*(\tilde{W}_{t+1})] = a + b\cdot E(\tilde{R}_{ct+1}) + c\cdot E[(\tilde{R}_{ct+1})^2] \qquad [40]$$

Sabiendo que

$$V(\tilde{R}_{ct+1}) = E[(\tilde{R}_{ct+1})^2] - [E(\tilde{R}_{ct+1})]^2$$

la utilidad esperada [40] se convierte en

$$E[U^{*}(\tilde{W}_{t+1})] = a + b\cdot E(\tilde{R}_{ct+1}) + c\cdot V(\tilde{R}_{ct+1}) + c\cdot[E(\tilde{R}_{ct+1})]^{2} \qquad [41]$$

expresión que coincide con [39].

En resumen, si el horizonte temporal está constituido por T periodos y al final de cada uno de ellos, excepto el último, el inversor revisa la cartera con el objetivo de maximizar la utilidad esperada de la riqueza al final del siguiente periodo, la cartera óptima es la cartera eficiente que maximiza la utilidad esperada de la riqueza en t+1.

La frontera eficiente para el momento t ($t=0,1,..,T-1$) es la solución al problema[74]:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } V(\tilde{W}_{t+1}) \\ \text{sujeto a} & \\ & E(W_{t+1}) = E^{*} \\ & \sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \qquad t=0,1,\dots,T-1 \\ & X_{it} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,N;\ t=0,1,\dots,T-1 \end{array}\right\}$$

[74]Las restricciones tercera y cuarta equivalen respectivamente a

•) $\sum_{i=1}^{N} Y_{it} = W_t \qquad t=0,1,\dots,T-1$

•) $Y_{it} \geq 0 \qquad i=1,2,\dots,N;\ t=0,1,\dots,T-1.$

De [36] y [37] sabemos que

$$V(\tilde{W}_{t+1}) = W_t^2 \cdot V(\tilde{R}_{ct+1})$$

$$E(\tilde{W}_{t+1}) = W_t \cdot [1+E(\tilde{R}_{ct+1})]$$

y por tanto, minimizar $V(\tilde{W}_{t+1})$ sujeto a $E(\tilde{W}_{t+1}) = E^*$ equivale a minimizar $V(\tilde{R}_{ct+1})$ sujeto a $E(\tilde{R}_{ct+1}) = E^*$

La ventaja que presenta la primera forma es que al estar $U^*(\tilde{W}_{t+1})$ definida con todos sus parámetros desde el momento de constituir la primera cartera (α, β y γ se conocen en el momento 0) basta con conocer $E(\tilde{W}_{t+1})$ y $V(\tilde{W}_{t+1})$ para saber cuál es la cartera que maximiza $E[U^*(\tilde{W}_{t+1})]$. El proceso es más complicado si se utiliza $U(\tilde{R}_{ct+1})$ puesto que en cada periodo deben determinarse los parámetros (a,b y c) de esta función.

El inconveniente que presenta la utilización de $U(\tilde{R}_{ct+1})$ se mantiene en el caso de maximización directa de la función de utilidad esperada. Por dicho motivo, si el inversor escoge este camino para determinar la cartera que satisface el objetivo que se ha fijado para t+1, deberá resolver en el momento t (t=0,1,...,T-1) el problema siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max } E[U^*(\tilde{W}_{t+1})] \\ \text{sujeto a} & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \\ & X_{it} \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

En el **Capítulo 5** se deduce la cuantía óptima que debe invertirse en cada título si el inversor maximiza directamente la función de utilidad esperada de la riqueza disponible en el momento T. Como caso particular se deducirá también la solución al problema que aquí hemos planteado.

En general, **un inversor que se guíe por el modelo E-V básico, determinará en el instante t (inicio del periodo t+1), la cartera óptima para el periodo t+1** y, al no considerar la existencia de costes ni de impuestos, venderá y comprará los títulos que necesite para constituir la nueva cartera óptima.

En el caso particular de que t=0, el modelo también puede aplicarse y en este supuesto se produce la selección de la cartera de valores por primera vez. Para t=0, W_0 está compuesta únicamente por dinero líquido.

1.3. MODELOS DE INDICES

1.3.1. Introducción

El modelo E-V básico precisa, para su aplicación práctica, de un gran número de datos. Así, si se considera un conjunto de N títulos para seleccionar la cartera óptima, deberán calcularse N rentabilidades esperadas y $\frac{N^2 + N}{2}$ varianzas y covarianzas[75]. Se puede apreciar que

[75]Son las combinaciones de N títulos tomados de dos en dos.

si N es elevado, el número de datos precisos es tan alto que limita la aplicación del modelo.

Sharpe[76], con el objeto de crear un modelo simplificado de selección de carteras que precise un menor número de datos (**modelo diagonal o de Sharpe**), introduce en el modelo E-V un nuevo supuesto[77]:

> Las rentabilidades de varios títulos se hallan relacionadas únicamente a través de factores básicos fundamentales. La rentabilidad de un título se determina exclusivamente a partir de factores aleatorios y de un elemento externo único:
>
> $$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [42]$$

También puede expresarse[78] $\tilde{r}_i$ como la siguiente suma:

$$\tilde{r}_i = \tilde{d}_i + b_i \cdot \tilde{I} \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [43]$$

donde,

•) N: número de títulos considerados;

•) $\tilde{r}_i$: variable aleatoria "tasa de rentabilidad" del título i; $i=1,2,\ldots,N$;

•) $\tilde{d}_i$: componente de $\tilde{r}_i$ que se puede atribuir al comportamiento del título considerado y que, por tanto es independiente del índice; $i=1,2,\ldots,N$;

---

76 **W.SHARPE**, "A Simplified Model for Portfolio Analysis", <u>M.S.</u> 1963, pp.277-293.

77 **W.SHARPE**, op. cit., 1963, p.281.

78 En realidad debería especificarse $\tilde{r}_{it+1}$ $(t=0,1,\ldots,T-1)$ para considerar la rentabilidad en cualquier punto decisorio, pero omitiremos el subíndice t+1 para facilitar la notación.

Esta componente puede desdoblarse, asímismo, en

$$\tilde{d}_i = a_i + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [44]$$

donde,

•) a_i: representa el valor esperado de $\tilde{d}_i$; $i=1,2,\ldots,N$;

•) $\tilde{e}_i$: representa la parte aleatoria (error aleatorio) de $\tilde{d}_i$ y se construye de modo que $E(\tilde{e}_i)=0$; $i=1,2,..,N$;

•) $\tilde{I}$: variable aleatoria que representa la tasa de rentabilidad del índice al que se halla sujeto $\tilde{r}_i$;

A su vez, $\tilde{I}$ puede descomponerse en dos sumandos

$$\tilde{I} = a_{N+1} + \tilde{e}_{N+1} \qquad [45]$$

donde

•) a_{N+1} es el parámetro que representa el valor esperado del índice

•) $\tilde{e}_{N+1}$ es la parte aleatoria del índice que se construye de modo que $E(\tilde{e}_i)$ se anule.

•) b_i: medida de respuesta del título i a cambios en el índice; $i=1,2,\ldots,N$;

$\tilde{I}$ es el único elemento a través del cual se relacionan las rentabilidades de todos los títulos analizados y puede ser un índice del mercado de valores, PNB, un índice de precios ó cualquier otro factor que influya en la rentabilidad de los títulos.

El estudio de este modelo de índices se justifica no sólo por simplificar el modelo E-V básico, sino también porque constituye un punto de apoyo para otros modelos de selección de cartera como son, por ejemplo, el **modelo original de Fama** (apartado **2.2.1.**), **modelo Esperanza-Entropia** (apartado **3.5.**) y **modelo de Programación por Objetivos** (apartado **3.9.**).

Cohen y **Pogue**[79] consideran que el modelo de un solo índice no refleja con exactitud la realidad puesto que, según ellos, es difícil de justificar la relación de la rentabilidad de todos los títulos con un único índice. Según estos autores, deben utilizarse diversos índices sectoriales, de modo que cada título (en función del sector al que esté asociado) esté relacionado con el índice del sector al que se halla ligado.

Así, dado,

•) M: número de sectores industriales en los que se agrupan los N títulos, y,

•) N_k: número de títulos que pertenecen al sector "k"; k=1,2,...,M

si el conjunto de títulos considerado puede agruparse en M sectores y la rentabilidad de cada título está relacionada linealmente con el índice del sector al que pertenece, se obtiene la siguiente expresión para dicha rentabilidad:

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{I}_k + \tilde{e}_i \qquad [46]$$

tal que $\{i/i \in N_k\}$ y k=1,2,...,M.

[79] **K.J.COHEN-J.A.POGUE**, "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models", J.B. 1967, pp.166-193.

En este caso, $\tilde{I}_k$ es el índice del sector económico k. En función de la descripción del índice $\tilde{I}_k$, **Cohen** y **Pogue** distinguen dos modelos multi-índice:

***) Modelo multi-índice: forma covarianza**[80]

$$\tilde{I}_k = a_{N+k} + \tilde{e}_{N+k} \qquad k=1,2,\ldots,M \qquad [47]$$

donde a_{N+k} es el valor esperado de $\tilde{I}_k$ y $\tilde{e}_{N+k}$ la parte aleatoria del índice tal que $E(\tilde{e}_{N+k})=0$.

***) Modelo multi-índice: forma diagonal**[81]

$$\tilde{I}_k = a_{N+k} + b_{N+k}\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_{N+k} \qquad k=1,2,\ldots,M \qquad [48]$$

o bien

$$\tilde{I}_k = \tilde{d}_{N+k} + b_{N+k}\cdot\tilde{I} \qquad k=1,2,\ldots,M \qquad [49]$$

En este caso, la rentabilidad asociada al índice, $\tilde{I}_k$, se puede desdoblar en dos componentes:

•) $\tilde{d}_{N+k}$: recoge la parte de la rentabilidad debida al comportamiento del propio índice y, a su vez, puede descomponerse en

•) a_{N+k}: *valor esperado de* $\tilde{d}_{N+k}$

•) $\tilde{e}_{N+k}$: componente aleatoria de $\tilde{d}_{N+k}$ con $E(\tilde{e}_{N+k})=0$

---

[80] **K.J.COHEN-J.A.POGUE**, op. cit., 1967, p.170.

[81] **K.J.COHEN-J.A.POGUE**, op. cit., 1967, p.171.

•) $\tilde{I}$: índice de mercado a través del cual se relacionan entre sí los índices de los distintos sectores. La respuesta de cada índice sectorial al índice de mercado la determina el parámetro b_{N+k}.

A su vez, al igual que en el modelo de **Sharpe**, $\tilde{I}$ se describe del siguiente modo:

$$\tilde{I} = a_{N+M+1} + \tilde{e}_{N+M+1} \qquad [50]$$

siendo a_{N+M+1} el parámetro que representa el valor esperado de $\tilde{I}$ y $\tilde{e}_{N+M+1}$ la parte aleatoria de este índice que se construye de modo que $E(\tilde{e}_{N+M+1})=0$.

Se puede considerar que el modelo multi-índice en forma diagonal incluye como casos particulares el modelo multi-índice en forma covarianza y el modelo de **Sharpe**.

Ahora bien, en los tres modelos anteriores, incluso en el caso de los modelos multi-índice, se supone que la rentabilidad de cada título depende directamente de un único índice. Así, en el modelo de un único índice de **Sharpe** se relaciona, explícitamente, la rentabilidad de cada uno de los títulos considerados con un único índice de mercado. Y, en los modelos multi-índice, aunque se reconoce la existencia de M índices, cada uno de los cuales está asociado a uno de los M sectores económicos o industriales en los que se divide la economía de un país, la rentabilidad de un determinado título solo se halla relacionada con el índice del sector económico al que pertenece. Por tanto, solo es un índice el que determina la rentabilidad del título (además de las características del propio título).

Siguiendo una sugerencia del profesor **Borrell** admitiremos la posibilidad de que la rentabilidad de un título pueda depender de uno o más índices. Con ello pretendemos abarcar el mayor número de posibilidades y dar entrada a un mayor número de supuestos. Se trata, en realidad, de una **generalización del modelo multi-índice**.

De este modo, siguiendo también a **Durban**[82], si distinguimos L índices diferentes y hacemos depender la rentabilidad de un determinado título de dichos índices, la expresión de $\tilde{r}_i$ es

$$\tilde{r}_i = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot\tilde{I}_s + \tilde{e}_i = \tilde{d}_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot\tilde{I}_s \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [51]$$

donde,

•) $\tilde{d}_i = a_i + \tilde{e}_i$, tiene igual interpretación que en los modelos anteriores; $i=1,2,\ldots,N$;

•) $\tilde{I}_s$: variable aleatoria que representa la tasa de rentabilidad del índice al que se halla sujeto $\tilde{r}_i$; $s=1,2,\ldots,L$;

•) b_{is}: parámetro que recoge la respuesta del título i ante cambios en el índice $\tilde{I}_s$. Si b_{is} es 0, $\tilde{r}_i$ no depende del comportamiento del índice $\tilde{I}_s$. De este modo, se admite que un título pueda depender de uno o varios de los L índices considerados; $i=1,2,..,N$; $s=1,2,\ldots,L$;

[82] **S.DURBAN**, La Empresa ante el Riesgo, (Ibérico Europea de Ediciones, Madrid, 1983), pp.264-265.

En cuanto al índice $\tilde{I}_s$, se pueden distinguir, al igual que en el caso del modelo multi-índice, dos supuestos:

•) $\tilde{I}_s = a_{N+s} + \tilde{e}_{N+s}$ $\qquad s=1,2,\ldots,L$ [52]

donde a_{N+s} es el valor esperado de $\tilde{I}_s$ y $\tilde{e}_{N+s}$ la parte aleatoria de este índice con $E(\tilde{e}_{N+s})=0$.

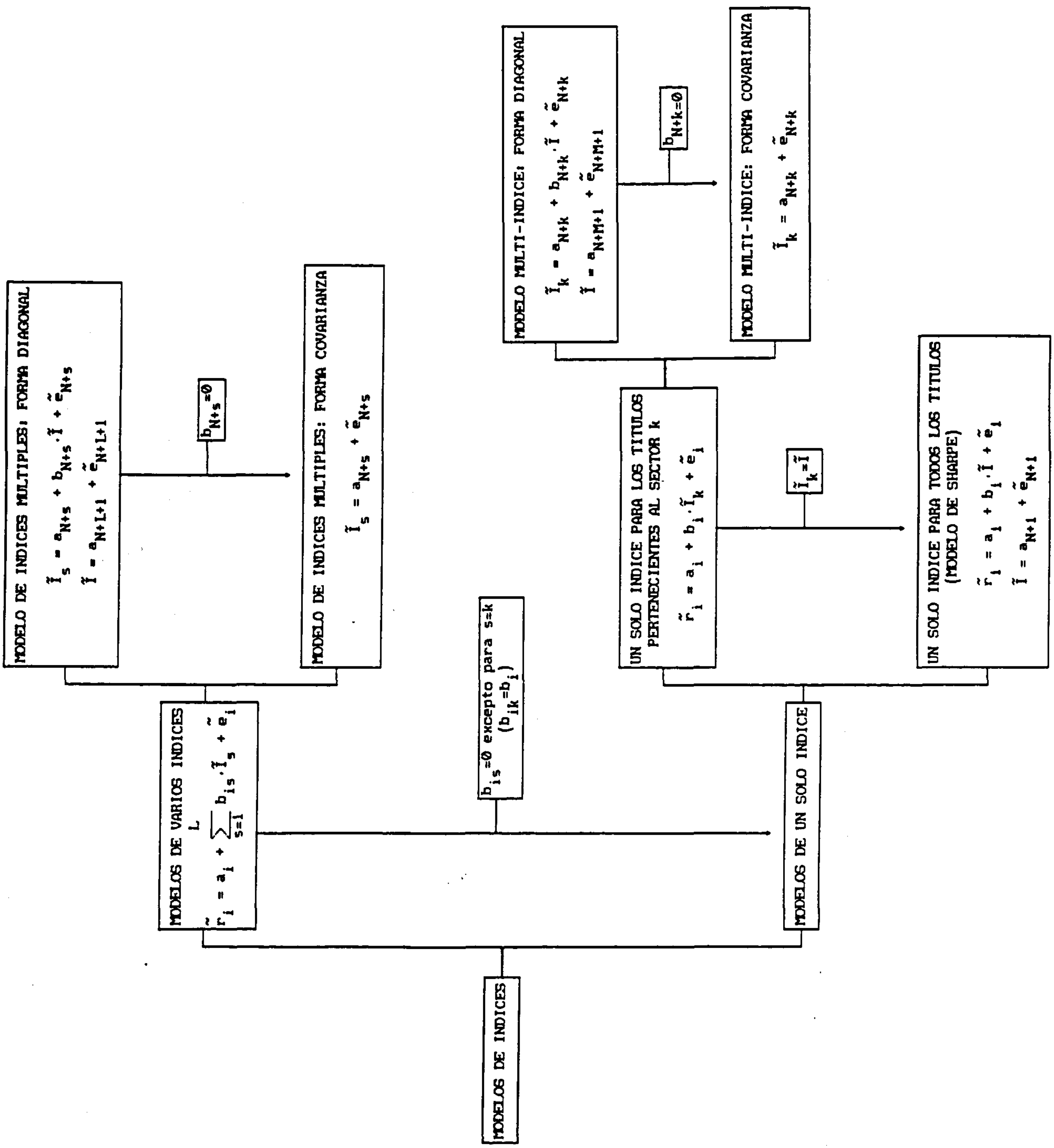
•) $\tilde{I}_s = a_{N+s} + b_{N+s}\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_{N+s}$ $\qquad s=1,2,\ldots,L$ [53]

donde $\tilde{I}$ es el índice general de mercado cuyo comportamiento viene descrito por la siguiente expresión

$$\tilde{I} = a_{N+L+1} + \tilde{e}_{N+L+1} \qquad [54]$$

y los parámetros a_{N+s} y a_{N+L+1} son los valores esperados de $\tilde{I}_s$ e $\tilde{I}$ respectivamente mientras que $\tilde{e}_{N+s}$ y $\tilde{e}_{N+L+1}$ representan la parte aleatoria de dichos índices. El parámentro b_{N+s} mide la respuesta de $\tilde{I}_s$ al índice general de mercado, $\tilde{I}$.

Resumiendo, los modelos de índices se pueden esquematizar del siguiente modo:


MODELOS DE INDICES
MODELOS DE VARIOS INDICES
$\tilde{r}_i = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot\tilde{I}_s + \tilde{e}_i$
MODELOS DE UN SOLO INDICE
$b_{is}=0$ excepto para s=k ($b_{ik}=b_i$)
MODELO DE INDICES MULTIPLES: FORMA DIAGONAL
$\tilde{I}_s = a_{N+s} + b_{N+s}\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_{N+s}$
$\tilde{I} = a_{N+L+1} + \tilde{e}_{N+L+1}$
$b_{N+s}=0$
MODELO DE INDICES MULTIPLES: FORMA COVARIANZA
$\tilde{I}_s = a_{N+s} + \tilde{e}_{N+s}$
UN SOLO INDICE PARA LOS TITULOS PERTENECIENTES AL SECTOR k
$\tilde{r}_i = a_i + b_i\cdot\tilde{I}_k + \tilde{e}_i$
$\tilde{I}_k=\tilde{I}$
UN SOLO INDICE PARA TODOS LOS TITULOS (MODELO DE SHARPE)
$\tilde{r}_i = a_i + b_i\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_i$
$\tilde{I} = a_{N+1} + \tilde{e}_{N+1}$
MODELO MULTI-INDICE: FORMA DIAGONAL
$\tilde{I}_k = a_{N+k} + b_{N+k}\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_{N+k}$
$\tilde{I} = a_{N+M+1} + \tilde{e}_{N+M+1}$
$b_{N+k}=0$
MODELO MULTI-INDICE: FORMA COVARIANZA
$\tilde{I}_k = a_{N+k} + \tilde{e}_{N+k}$

Dado que el modelo de índices múltiples en forma diagonal puede considerarse una generalización de los demás modelos de índices, lo desarrollaremos en primer lugar y a partir de las expresiones obtenidas, deduciremos las expresiones de los restantes modelos como casos particulares.

1.3.2. Modelo de índices múltiples: forma diagonal

En este modelo la relación entre la tasa de rentabilidad del título i y los índices considerados es la siguiente:

$$\tilde{r}_i = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is} \cdot \tilde{I}_s + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [55]$$

$$\tilde{I}_s = a_{N+s} + b_{N+s} \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_{N+s} \qquad s=1,2,\ldots,L \qquad [56]$$

$$\tilde{I} = a_{N+L+1} + \tilde{e}_{N+L+1} \qquad [57]$$

1.3.2.1. Hipótesis del modelo[83]

Las hipótesis relativas a las variables aleatorias que intervienen en el modelo de índices múltiples en forma diagonal son las siguientes:

[83] Adaptación de las hipótesis realizadas por **Cohen** y **Pogue**; **K.J.COHEN-J.A.POGUE**, op. cit., 1967, pp.170-172.

H.1. $E(\tilde{e}_i) = 0$ $\quad i=1,2,\ldots,N.$

H.2. $V(\tilde{e}_i) = Q_i$ $\quad i=1,2,\ldots,N.$

H.3. $Cov(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) = 0$ $\quad i=1,2,\ldots,N \quad j=1,2,\ldots,N \quad j\neq i.$

La única relación entre $\tilde{r}_i$ y $\tilde{r}_j$ se establece a través de los índices.

H.4. $E(\tilde{e}_{N+s}) = 0$ $\quad s=1,2,\ldots,L.$

H.5. $V(\tilde{e}_{N+s}) = Q_{N+s}$ $\quad s=1,2,\ldots,L.$

H.6. $Cov(\tilde{e}_{N+s},\tilde{e}_i) = 0$ $\quad s=1,2,\ldots,L \quad i=1,2,\ldots,N.$

$\tilde{e}_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$, es la parte aleatoria de la componente de la rentabilidad debida al propio título y es independiente de los índices considerados.

H.7. $Cov(\tilde{e}_{N+s},\tilde{e}_{N+t}) = 0$ $\quad s=1,2,\ldots,M \quad t=1,2,\ldots,M \quad t\neq s.$

Los índices considerados se relacionan, únicamente, a través de un índice común.

H.8. $E(\tilde{e}_{N+L+1}) = 0$

H.9. $V(\tilde{e}_{N+L+1}) = Q_{N+L+1}$

H.10. $Cov(\tilde{e}_{N+L+1}, \tilde{e}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+L$

La parte aleatoria que describe el comportamiento propio de cada título o índice es independiente del índice general considerado.

Las hipótesis **H.1.**, **H.4.** y **H.8.** se pueden resumir en

H.1'. $E(\tilde{e}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+L+1.$

Las hipótesis **H.2.**, **H.5.** y **H.9.** se pueden resumir en

H.2'. $V(\tilde{e}_i) = Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N+L+1.$

Finalmente, las hipótesis **H.3.**, **H.6.**, **H.7** y **H.10** se pueden resumir en

H.3'. $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+L+1 \quad j=1,2,\ldots,N+L+1 \quad j \neq i.$

1.3.2.2. Valor esperado y varianza de $\tilde{r}_i$

En virtud de las anteriores hipótesis se puede hallar la **rentabilidad esperada** del título i $(i=1,2,\ldots,N)$:

$$E(\tilde{r}_i) = a_i + \sum_{s=1}^{L} E(\tilde{I}_s) + E(\tilde{e}_i) = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is} \cdot E(\tilde{I}_s) =$$

$$= a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot[a_{N+s} + b_{N+s}\cdot E(\tilde{I})] = a_i + \sum_{s=1}^{T} b_{is}\cdot(a_{N+s} + b_{N+s}\cdot a_{N+L+1}) \quad [58]$$

$E(\tilde{r}_i)$ está formada por dos componentes:

a) a_i: aportación a $E(\tilde{r}_i)$ debida al comportamiento del título considerado.

b) $\sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot(a_{N+s} + b_{N+s}\cdot a_{N+L+1})$: aportación a $E(\tilde{r}_i)$ que se debe al comportamiento de los L índices que influyen en el título considerado.

También el **riesgo asociado al título i** y medido por su varianza $[V(\tilde{r}_i)]$ está formado por dos componentes que permiten distinguir entre riesgo sistemático y riesgo no sistemático:

$$V(\tilde{r}_i) = E[\tilde{r}_i - E(\tilde{r}_i)]^2 = E\left\{\sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot[\tilde{I}_s - E(\tilde{I}_s)] + \tilde{e}_i\right\}^2 =$$

$$= \sum_{s=1}^{L} b_{is}^2\cdot E[\tilde{I}_s - E(\tilde{I}_s)]^2 + \sum_{s=1}^{L}\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{L} b_{is}\cdot b_{it}\cdot E\left\{[\tilde{I}_s - E(\tilde{I}_s)]\cdot[\tilde{I}_t - E(\tilde{I}_t)]\right\} +$$

$$+ E(\tilde{e}_i^2) + 2\cdot E\left\{\tilde{e}_i\cdot\left[\sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot[\tilde{I}_s - E(\tilde{I}_s)]\right]\right\} =$$

$$= \sum_{s=1}^{L} b_{is}^2 \cdot \left\{ b_{N+s}^2 \cdot E(\tilde{e}_{N+L+1}^2) + E(\tilde{e}_{N+s}^2) + 2 \cdot b_{N+s} \cdot E(\tilde{e}_{N+L+1} \cdot \tilde{e}_{N+s}) \right\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{L} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{L} b_{is} \cdot b_{it} \left\{ b_{N+s} \cdot b_{N+t} \cdot E(\tilde{e}_{N+L+1}^2) + b_{N+t} \cdot E(\tilde{e}_{N+L+1} \cdot \tilde{e}_{N+s}) + \right.$$

$$\left. + b_{N+s} \cdot E(\tilde{e}_{N+L+1} \cdot \tilde{e}_{N+t}) + E(\tilde{e}_{N+s} \cdot \tilde{e}_{N+t}) \right\} + E(\tilde{e}_i^2) +$$

$$+ 2 \cdot \left[\sum_{s=1}^{L} b_{is} \cdot b_{N+s} \cdot E(\tilde{e}_{N+L+1} \cdot \tilde{e}_i) + \sum_{s=1}^{L} b_{is} \cdot E(\tilde{e}_{N+s} \cdot \tilde{e}_i) \right] = [84]$$

$$= \sum_{s=1}^{L} b_{is}^2 \cdot (b_{N+s}^2 \cdot Q_{N+L+1} + Q_{N+s}) + \sum_{s=1}^{L} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{L} b_{is} \cdot b_{it} \cdot (b_{N+s} \cdot b_{N+t} \cdot Q_{N+L+1}) + Q_i$$

[59]

---

[84] 1) Por definición, $Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = E(\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j) - E(\tilde{e}_i) \cdot E(\tilde{e}_j)$ y, por tanto,

$$E(\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j) = Cov(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) + E(\tilde{e}_i) \cdot E(\tilde{e}_j)$$

Por las hipótesis **H.1'.** y **H.3'.** se deduce que $E(\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j) = 0$; $i=1,2,\ldots,N+L+1$; $j= 1,2,\ldots,N+L+1$; $j \neq i$.

2) También por definición, $V(\tilde{e}_i) = E(\tilde{e}_i^2) - [E(\tilde{e}_i)]^2$ y, por tanto,

$$E(\tilde{e}_i^2) = V(\tilde{e}_i) + [E(\tilde{e}_i)]^2$$

Por las hipótesis **H.1'.** y **H.2'.** se deduce que $E(\tilde{e}_i^2)=Q_i$; $i=1,2,\ldots,N+L+1$.

Las dos componentes del riesgo son:

a) Riesgo sistemático:

$$\sum_{s=1}^{L} b_{is}^{2}\cdot(b_{N+s}^{2}\cdot Q_{N+L+1}+Q_{N+s}) + \sum_{s=1}^{L}\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{L} b_{is}\cdot b_{it}(b_{N+s}\cdot b_{N+t}\cdot Q_{N+L+1})$$

Es la parte del riesgo considerado sistemático[85] puesto que los índices de mercado afectan a todos los títulos del conjunto analizado con un mayor o menos grado dependiendo de b_{is}.

b) Riesgo no sistemático: Q_i

Se le considera no sistemático puesto que es específico para cada título i.

1.3.2.3. Rentabilidad de la cartera

La expresión de la **rentabilidad de la cartera** en el modelo considerado es:

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i\cdot\tilde{r}_i = \sum_{i=1}^{N} X_i\cdot\left[a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot\tilde{I}_s + \tilde{e}_i\right] =$$

[85] **Ryan** divide el riesgo asociado a un título para el modelo de un solo índice y en este trabajo lo hemos hecho extensivo al modelo de índices múltiples más general (**T.M.RYAN**, op. cit., 1978, pp.93-95).

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{L} X_i \cdot b_{is} \cdot \tilde{I}_s \qquad [60]$$

Si en [60] hacemos que

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_{is} = X_{N+s}$$

entonces $\tilde{R}_c$, en [60], es

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot \tilde{I}_s =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot (a_{N+s} + b_{N+s} \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_{N+s}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot (a_{N+s} + \tilde{e}_{N+s}) + \tilde{I} \cdot \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot b_{N+s} \qquad [61]$$

Si en [61] hacemos que

$$\sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot b_{N+s} = X_{N+L+1}$$

$\tilde{R}_c$ quedará

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot (a_{N+s} + \tilde{e}_{N+s}) +$$

$$+ X_{N+L+1}\cdot(a_{N+L+1} + \tilde{e}_{N+L+1}) = \sum_{i=1}^{N+L+1} X_i\cdot(a_i + \tilde{e}_i) \qquad [62]$$

1.3.2.4. Valor esperado y varianza de $\tilde{R}_c$

El **valor esperado** de la rentabilidad de la cartera dada la hipótesis **H.1'**. es:

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+L+1} X_i\cdot E(a_i + \tilde{e}_i) = \sum_{i=1}^{N+L+1} X_i\cdot a_i \qquad [63]$$

Y la **varianza** asociada a la rentabilidad de la cartera es:

$$V(\tilde{R}_c) = E[\tilde{R}_c - E(\tilde{R}_c)]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N+L+1} X_i\cdot(a_i + \tilde{e}_i) - \sum_{i=1}^{N+L+1} X_i\cdot a_i\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^{N+L+1} X_i\cdot\tilde{e}_i\right]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N+L+1} X_i^2\cdot\tilde{e}_i^2 + \sum_{i=1}^{N+L+1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N+L+1} X_i\cdot X_j\cdot\tilde{e}_i\cdot\tilde{e}_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+L+1} X_i^2 \cdot E(\tilde{e}_i^2) + \sum_{i=1}^{N+L+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N+L+1} X_i \cdot X_j \cdot E(\tilde{e}_i \tilde{e}_j) \overset{86}{=} \sum_{i=1}^{N+L+1} X_i^2 \cdot Q_i \qquad [64]$$

1.3.2.5. Frontera eficiente

Para hallar la frontera eficiente resolveremos el siguiente problema

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Min } [V(\tilde{R}_c) - \phi \cdot E(\tilde{R}_c)] \\
\text{sujeto a} \\
\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\
X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N. \\
\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_{is} = X_{N+s} \qquad s=1,2,\ldots,L \\
\sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot b_{N+s} = X_{N+L+1}
\end{array}\right\}$$

En el caso particular que N=2 y L=2 (dos títulos y dos índices) la rentabilidad de los títulos y de los índices se representa por:

---

[86] Se aplican las mismas hipótesis que las utilizadas para obtener $V(\tilde{r}_i)$, en el apartado **1.3.2.2.**

$$\tilde{r}_1 = a_1 + b_{11}\cdot\tilde{I}_1 + b_{12}\cdot\tilde{I}_2 + \tilde{e}_1$$

$$\tilde{r}_2 = a_2 + b_{21}\cdot\tilde{I}_1 + b_{22}\cdot\tilde{I}_2 + \tilde{e}_2$$

$$\tilde{I}_1 = a_3 + b_3\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_3$$

$$\tilde{I}_2 = a_4 + b_4\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_4$$

$$\tilde{I} = a_5 + \tilde{e}_5$$

Para hallar la frontera eficiente de este caso particular deberá resolverse el siguiente problema de optimización:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Min}\left[\sum_{i=1}^{5} X_i^2\cdot Q_i - \phi\cdot\sum_{i=1}^{5} X_i\cdot a_i\right] \\
\text{sujeto a} \\
X_1 + X_2 = 1 \\
X_i \geq 0 \qquad i=1,2. \\
X_3 = \sum_{i=1}^{2} X_i\cdot b_{i1} = X_1\cdot b_{11} + X_2\cdot b_{21} \\
X_4 = \sum_{i=1}^{2} X_i\cdot b_{i2} = X_1\cdot b_{12} + X_2\cdot b_{22} \\
X_5 = \sum_{s=1}^{2} X_{N+s}\cdot b_{N+s} = X_3\cdot b_3 + X_4\cdot b_4
\end{array}\right\}$$

Hallar el mínimo de este problema, aplicando Lagrange, equivale a hallar el mínimo de la siguiente función:

$$L(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} X_i^2\cdot Q_i - \phi\cdot\sum_{i=1}^{5} X_i\cdot a_i+\lambda_1\cdot(X_1+X_2-1)+\lambda_2\cdot(X_1\cdot b_{11}+X_2\cdot b_{21}-X_3)+$$

$$+ \lambda_3\cdot(X_1\cdot b_{12}+X_2\cdot b_{22}-X_4) + \lambda_4\cdot(X_3\cdot b_3+X_4\cdot b_4-X_5)$$

Las condiciones necesarias de mínimo para esta función son:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2\cdot X_1\cdot Q_1 - \phi\cdot a_1 + \lambda_1 + \lambda_2\cdot b_{11} + \lambda_3\cdot b_{12} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2\cdot X_2\cdot Q_2 - \phi\cdot a_2 + \lambda_1 + \lambda_2\cdot b_{21} + \lambda_3\cdot b_{22} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_3} = 2\cdot X_3\cdot Q_3 - \phi\cdot a_3 - \lambda_2 + \lambda_4\cdot b_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_4} = 2\cdot X_4\cdot Q_4 - \phi\cdot a_4 - \lambda_3 + \lambda_4\cdot b_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_5} = 2\cdot X_5\cdot Q_5 - \phi\cdot a_5 - \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = X_1 + X_2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = X_1\cdot b_{11} + X_2\cdot b_{21} - X_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = X_1\cdot b_{12} + X_2\cdot b_{22} - X_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = X_3\cdot b_3 + X_4\cdot b_4 - X_5 = 0$$

De la resolución a este sistema de ecuaciones se deduce que X_1 es:

$$X_1 = \Big[Q_2 - Q_3\cdot(b_{11} - b_{21}) - Q_4\cdot(b_{12} - b_{22}) -$$

$$- Q_5\cdot[b_3\cdot(b_{11} - b_{21}) + b_4\cdot(b_{12} - b_{22})]\cdot(b_3\cdot b_{21} + b_4\cdot b_{22}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\phi\cdot[a_1 - a_2 + a_3\cdot(b_{11} - b_{21}) + a_4\cdot(b_{12} - b_{22})] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\phi\cdot\{a_5\cdot[b_3\cdot(b_{11} - b_{21}) + b_4\cdot(b_{12} - b_{22})]\}\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[Q_1 + Q_2 + Q_3\cdot(b_{11} - b_{21})^2 + Q_4\cdot(b_{12} - b_{22})^2 +$$

$$+ Q_5\cdot[b_3\cdot(b_{11} - b_{21}) + b_4\cdot(b_{12} - b_{22})]^2\Big]^{-1} \qquad [65]$$

X_2 se obtiene a partir de la diferencia, $X_2 = 1 - X_1$.

1.3.3. Modelo de índices múltiples: forma covarianza

En este modelo se supone que,

$$\tilde{r}_i = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot\tilde{I}_s + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [66]$$

$$\tilde{I}_s = a_{N+s} + \tilde{e}_{N+s} \qquad s=1,2,\ldots,L \qquad [67]$$

El modelo de índices múltiples en forma covarianza se puede considerar un caso particular del modelo de índices múltiples en forma diagonal en que $b_{N+s}=0$. Ello permitirá deducir las expresiones del presente modelo a partir de las obtenidas para el modelo anterior.

Las **hipótesis aplicables a este modelo**, en función de las variables aleatorias definidas[87], son las siete primeras hipótesis del modelo de índices múltiples en forma diagonal y, en forma resumida son:

H.1'. $E(\tilde{e}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+L.$

H.2'. $V(\tilde{e}_i) = Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N+L.$

H.3'. $Cov(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+L$

$j=1,2,\ldots,N+L \qquad j\neq i.$

Haciendo $b_{N+s}=0$ en [58] y [59], se obtiene el **valor esperado y la varianza de $\tilde{r}_i$** que son, respectivamente:

$$E(\tilde{r}_i) = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is}\cdot a_{N+s} \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [68]$$

$$V(\tilde{r}_i) = \sum_{s=1}^{L} b_{is}^2\cdot Q_{N+s} + Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [69]$$

---

[87] La variable aleatoria e_{N+L+1} no interviene en el modelo y por ello pueden eliminarse las hipótesis que hacen referencia a la misma.

Las componentes del riesgo asociado a $\tilde{r}_i$ son, para este modelo:

a) Riesgo sistemático: $\sum_{s=1}^{L} b_{is}^2 \cdot Q_{N+s}$

b) Riesgo no sistemático: Q_i

Si en [61] se considera que $b_{N+s}=0$ se obtiene la siguiente expresión para la **rentabilidad de la cartera**, $\tilde{R}_c$:

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N+L} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) \qquad [70]$$

Y, el **valor esperado y la varianza de** $\tilde{R}_c$ son, respectivamente

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+L} X_i \cdot a_i \qquad [71]$$

$$V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+L} X_i^2 \cdot Q_i \qquad [72]$$

La **frontera eficiente** correspondiente al modelo de índices múltiples en forma covarianza se halla resolviendo el problema siguiente

$$\left.\begin{array}{l}\text{Min } [V(\tilde{R}_c) - \phi \cdot E(\tilde{R}_c)] \\ \text{sujeto a} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_{is} = X_{N+s} \qquad s=1,2,\ldots,L \end{array}\right\}$$

En el caso particular que N=2 y L=2 (dos títulos y dos índices) la rentabilidad de los títulos y de los índices se representa por:

$$\tilde{r}_1 = a_1 + b_{11} \cdot \tilde{I}_1 + b_{12} \cdot \tilde{I}_2 + \tilde{e}_1$$

$$\tilde{r}_2 = a_2 + b_{21} \cdot \tilde{I}_1 + b_{22} \cdot \tilde{I}_2 + \tilde{e}_2$$

$$\tilde{I}_1 = a_3 + \tilde{e}_3$$

$$\tilde{I}_2 = a_4 + \tilde{e}_4$$

Para hallar la frontera eficiente de este caso particular deberá resolverse el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^{4} X_i^2 \cdot Q_i - \phi \cdot \sum_{i=1}^{4} X_i \cdot \bar{a}_i \right]$$

sujeto a

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$X_i \geq 0 \qquad i=1,2$$

$$X_3 = \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot b_{i1} = X_1 \cdot b_{11} + X_2 \cdot b_{21}$$

$$X_4 = \sum_{i=1}^{2} X_i \cdot b_{i2} = X_1 \cdot b_{12} + X_2 \cdot b_{22}$$

Como el modelo de múltiples índices en forma covarianza es un caso particular del modelo de múltiples índices en forma diagonal en que $b_{N+s}=0$, para resolver este problema basta con sustituir en la solución obtenida en el epígrafe anterior b_3 y b_4 por 0

De esta manera X_1 es:

$$X_1 = \left[Q_2 - Q_3 \cdot (b_{11} - b_{21}) - Q_4 \cdot (b_{12} - b_{22}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot [a_1 - a_2 + a_3 \cdot (b_{11} - b_{21}) + a_4 \cdot (b_{12} - b_{22})] \right] \cdot$$

$$\cdot \left[Q_1 + Q_2 + Q_3 \cdot (b_{11} - b_{21})^2 + Q_4 \cdot (b_{12} - b_{22})^2 \right]^{-1}$$

X_2 se obtiene a partir de la diferencia, $X_2 = 1 - X_1$.

1.3.4. Modelo multi-índice: forma diagonal

En el modelo de índices múltiples en forma diagonal se consideró que

$$\tilde{r}_i = a_i + \sum_{s=1}^{L} b_{is} \cdot \tilde{I}_s + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N$$

$$\tilde{I}_s = a_{N+s} + b_{N+s} \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_{N+s} \qquad s=1,2,\ldots,L$$

$$\tilde{I}_s = a_{N+L+1} + \tilde{e}_{N+L+1}$$

Si suponemos que

a) $b_{is}=0 \quad \forall s;\ s=1,2,\ldots,L$ excepto para $s=k$

b) $k=1,2,\ldots,M \qquad M \leq L$[88]

c) $b_{ik}=b_i \qquad i \in N_k$

las expresiones anteriores se convierten en

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{I}_k + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N; \quad i \in N_k \qquad [74]$$

$$\tilde{I}_k = a_{N+k} + b_{N+k} \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_{N+k} \qquad k=1,2,\ldots,M \qquad [75]$$

$$\tilde{I} = a_{N+M+1} + \tilde{e}_{N+M+1} \qquad [76]$$

que corresponden al modelo multi-índice en forma diagonal de **Cohen-Pogue**.

---

[88] L índices = M índices sectoriales + (L-M) índices cualesquiera.

Las **hipótesis relativas a las variables aleatorias que intervienen en el modelo multi-índice en forma diagonal** son las mismas que las del modelo de índices múltiples en forma diagonal teniendo en cuenta que ahora se consideran M índices sectoriales más un índice de mercado.

De forma resumida, dichas hipótesis son:

H.1'. $E(\tilde{e}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+M+1$

H.2'. $V(\tilde{e}_i) = Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N+M+1$

H.3'. $Cov(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+M+1; \quad j=1,2,\ldots,N+M+1 \quad j\neq i$

Dada la estructura de la rentabilidad del título i $(\tilde{r}_i)$ y las hipótesis anteriores, su **rentabilidad esperada** no depende únicamente del comportamiento de dicho título sino también del comportamiento del índice al que está asociado. Así,

$$E(\tilde{r}_i) = a_i + b_i\cdot(a_{N+k} + b_{N+k}\cdot a_{N+M+1}) \qquad i=1,2,\ldots,N; \quad K=1,2,\ldots,M \qquad [77]$$

Las dos componentes de $E(\tilde{r}_i)$ son:

a) a_i: aportación debida al propio comportamiento del título considerado.

b) $b_i(a_{N+k} + b_{N+k}\cdot a_{N+M+1})$: aportación debida al comportamiento del índice k al que se halla asociado el título i y del índice de mercado con el que se relacionan los M índices de los diferentes grupos sectoriales.

En cuanto a la **varianza**, se obtendrá del siguiente modo:

$$V(\tilde{r}_i) = E[\tilde{r}_i - E(\tilde{r}_i)]^2 = E\{b_i\cdot[\tilde{I}_k - E(\tilde{I}_k)] + \tilde{e}_i\}^2 =$$

$$= b_i^2\cdot E[\tilde{I}_k - E(\tilde{I}_k)]^2 + E(\tilde{e}_i^2) + 2\cdot b_i\cdot E\{[\tilde{I}_k - E(\tilde{I}_k)]\cdot\tilde{e}_i\} =$$

$$= b_i^2\cdot[b_{N+k}^2\cdot E(\tilde{e}_{N+M+1}^2) + E(\tilde{e}_{N+k}^2) + 2\cdot b_{N+k}\cdot E(\tilde{e}_{N+M+1}\cdot\tilde{e}_{N+k})] +$$

$$+ E(\tilde{e}_i^2) + 2\cdot b_i\cdot[b_{N+k}\cdot a_{N+M+1}\cdot E(\tilde{e}_i) + E(\tilde{e}_{N+k}\cdot\tilde{e}_i)] = {}^{89}$$

$$= b_i^2\cdot(b_{N+k}^2\cdot Q_{N+M+1} + Q_{N+k}) + Q_i \qquad [78]$$

En [59] correspondiente al modelo de índices múltiples en forma diagonal, se obtuvo que

$$V(\tilde{r}_i) = \sum_{s=1}^{L} b_{is}^2\cdot(b_{N+s}^2\cdot Q_{N+L+1} + Q_{N+s}) +$$

---

[89] $E(\tilde{e}_i^2) = V(\tilde{e}_i) + [E(\tilde{e}_i)]^2 = Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N+M+1$
en función de la definición de la varianza y las hipótesis **H.1'.** y **H.2'.**

$E(\tilde{e}_i\cdot\tilde{e}_j) = Cov(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) + E(\tilde{e}_i)\cdot E(\tilde{e}_j) = 0 \qquad i=1,2,..,N+M+1;$
$j=1,2,..,N+M+1;\ j\neq i$
en función de la definición de la covarianza y las hipótesis **H.1'.** y **H.3'.**

$$+ \sum_{s=1}^{L} \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq s}}^{L} b_{is} \cdot b_{it} \cdot (b_{N+s} \cdot b_{N+t} \cdot Q_{N+L+1}) + Q_i$$

Si tenemos en cuenta que en el modelo que estamos desarrollando se cumple que $b_{is} = \emptyset \; \forall s, \; s=1,2,\ldots,L$ excepto para $s=k$ $(b_{ik}=b_i)$ y que el número de índices considerado es M, esta expresión se convierte en

$$V(\tilde{r}_i) = b_i^2 \cdot (b_{N+k}^2 \cdot Q_{N+M+1} + Q_{N+k}) + Q_i \qquad [79]$$

que coincide con la deducida para este modelo particular.

El riesgo asociado a $\tilde{r}_i$ se descompone en:

a) Riesgo sistemático: $b_i^2 \cdot (b_{N+k}^2 \cdot Q_{N+M+1} + Q_{N+k})$ donde $(b_{N+k}^2 \cdot Q_{N+M+1} + Q_{N+k})$ es $V(\tilde{I}_k)$.

b) Riesgo no sistemático: Q_i.

La expresión de la **rentabilidad de la cartera**, teniendo en cuenta la estructura de $\tilde{r}_i$ en el modelo considerado, es:

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \tilde{r}_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + b_i \cdot \tilde{I}_k + \tilde{e}_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \cdot \left[\sum_{\{i/i \in N_k\}} X_i \cdot (a_i + b_i \cdot \tilde{I}_k + \tilde{e}_i) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{\{i/i \in N_k\}}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{k=1}^{M} \cdot \left[\sum_{\{i/i \in N_k\}} X_i \cdot b_i \right] \cdot \tilde{I}_k \qquad [80]$$

Haciendo $\sum_{\{i/i \in N_k\}} X_i \cdot b_i = X_{N+k}$

y, teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{\{i/i \in N_k\}} = \sum_{i=1}^{N}$$

la rentabilidad de la cartera [80] puede expresarse del siguiente modo:

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot \tilde{I}_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot (a_{N+k} + b_{N+k} \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_{N+k}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot (a_{N+k} + \tilde{e}_{N+k}) + \tilde{I} \cdot \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot b_{N+k} \qquad [81]$$

Haciendo, $\sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot b_{N+k} = X_{N+M+1}$, [81] se convierte en:

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot (a_{N+k} + \tilde{e}_{N+k}) +$$

$$+ X_{N+M+1}\cdot(a_{N+M+1} + \tilde{e}_{N+M+1}) = \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i\cdot(a_i + \tilde{e}_i) \qquad [82]$$

Esta expresión se hubiera podido obtener directamente a partir de la expresión de [62] del modelo de índices múltiples en forma diagonal con sólo sustituir L por M en

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N+L+1} X_i\cdot(a_i + \tilde{e}_i)$$

El valor esperado de la rentabilidad de la cartera, dada la hipótesis **H.1'.**, es:

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i\cdot E(a_i + \tilde{e}_i) = \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i\cdot a_i \qquad [83]$$

Y la **varianza asociada a la rentabilidad de la cartera** es:

$$V(\tilde{R}_c) = E[\tilde{R}_c - E(\tilde{R}_c)]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N+M+1} X_i\cdot(a_i + \tilde{e}_i) - \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i\cdot a_i\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^{N+M+1} X_i\cdot\tilde{e}_i\right]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N+M+1} X_i^2\cdot\tilde{e}_i^2 + \sum_{i=1}^{N+M+1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N+M+1} X_i\cdot X_j\cdot\tilde{e}_i\cdot\tilde{e}_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i^2 \cdot E(\tilde{e}_i^2) + \sum_{i=1}^{N+M+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+M+1} X_i \cdot X_j \cdot E(\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j) \qquad [84]$$

Y, de acuerdo con las hipótesis **H.1'.**, **H.2'.** y **H.3'.**, la varianza de la cartera [84] es[90]:

$$V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+M+1} X_i^2 \cdot Q_i \qquad [85]$$

Una vez definido el valor esperado y la varianza de la rentabilidad de la cartera, se puede encontrar la **frontera eficiente** resolviendo el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } [V(\tilde{R}_c) - \phi \cdot E(\tilde{R}_c)] \\ \text{sujeto a} & \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \\ & \sum_{\{i/i \in N_k\}} X_i \cdot b_i = X_{N+k} \\ & \qquad\qquad i=1,2,\ldots,N \\ & \qquad\qquad k=1,2,\ldots,M \\ & \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot b_{N+k} = X_{N+M+1} \end{array}\right\}$$

[90]Véase el apartado **1.3.2.4** de esta Tesis.

A continuación resolveremos este problema suponiendo que N=2, M=2 y que

$$\tilde{r}_1 = a_1 + b_1 \cdot \tilde{I}_1 + \tilde{e}_1$$

$$\tilde{r}_2 = a_2 + b_2 \cdot \tilde{I}_2 + \tilde{e}_2$$

$$\tilde{I}_1 = a_3 + b_3 \cdot \tilde{I} + \tilde{e_3}$$

$$\tilde{I}_2 = a_4 + b_4 \cdot \tilde{I} + \tilde{e_4}$$

$$\tilde{I} = a_5 + \tilde{e_5}$$

Para este caso particular, el problema queda formalizado del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Min} \quad F = \left[\sum_{i=1}^{5} X_i^2 \cdot Q_i - \phi \cdot \sum_{i=1}^{5} X_i \cdot a_i\right] \\
\text{sujeto a} \\
X_1 + X_2 = 1 \\
X_i \geq 0 \qquad i=1,2. \\
X_3 = X_1 \cdot b_1 \\
X_4 = X_2 \cdot b_2 \\
X_5 = X_3 \cdot b_3 + X_4 \cdot b_4
\end{array}\right\}$$

Si se tiene en cuenta que

$X_3 = X_1 \cdot b_1$

$X_4 = X_2 \cdot b_2 = (1-X_1) \cdot b_2 = -X_1 \cdot b_2 + b_2$

$X_5 = X_3 \cdot b_3 + X_4 \cdot b_4 = (X_1 \cdot b_1) \cdot b_3 + (-X_1 \cdot b_2 + b_2) \cdot b_4 =$

$= (b_1 \cdot b_3 - b_2 \cdot b_4) \cdot X_1 + b_2 \cdot b_4$

y se sustituyen estas variables en la función objetivo, ésta se convertirá en una función de una única variable, X_1.

De la condición necesaria de óptimo, $\frac{dF}{dX_1} = 0$, se desprende que X_1 es:

$$\frac{2 \cdot [Q_2 + b_2^2 \cdot Q_4 - b_2 \cdot b_4 \cdot (b_1 \cdot b_3 - b_2 \cdot b_4) \cdot Q_5] + \phi \cdot [a_1 - a_2 + b_1 \cdot a_3 - b_2 \cdot a_4 + (b_1 \cdot b_3 - b_2 \cdot b_4)]}{2 \cdot [Q_1 + Q_2 + b_1^2 \cdot Q_3 + b_2^2 \cdot Q_4 + (b_1 \cdot b_3 - b_2 \cdot b_4)^2 \cdot Q_5]}$$

Este mismo resultado, para N=2 y M=2 se puede encontrar a partir del modelo de múltiples índices en forma diagonal haciendo:

$b_{11} = b_1$ $\qquad$ $b_{12} = 0$

$b_{21} = 0$ $\qquad$ $b_{22} = b_2$

1.3.5. Modelo multi-índice: forma covarianza

En este modelo se supone que

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{I}_k + \tilde{e}_{N+k} \qquad i=1,2,\ldots,N;\ i \in N_k \qquad [86]$$

$$\tilde{I}_k = a_{N+k} + \tilde{e}_{N+k} \qquad k=1,2,\ldots,M \qquad [87]$$

Como ya hemos dicho anteriormente, este modelo puede considerarse como un caso particular del modelo multi-índice: forma diagonal en que $b_{N+k}=0$. Por ello, para obtener las expresiones correspondientes a este modelo será suficiente sustituir en las expresiones obtenidas en el modelo anterior, b_{N+k} por 0 y aplicar las hipótesis apropiadas.

En forma resumida, las hipótesis correspondientes a este modelo son[91]:

H.1'. $E(\tilde{e}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+M$

H.2'. $V(\tilde{e}_i) = Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N+M$

H.3'. $Cov(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+M;\ j=1,2,\ldots,N+M;\ j\neq i$

En función de las anteriores hipótesis y las expresiones [86] y [87] se obtiene que el **valor esperado de $\tilde{r}_i$** es

---

[91] En este modelo no aparece $\tilde{e}_{N+M+1}$ y, por tanto, pueden eliminarse las hipótesis que hacen referencia a esta variable aleatoria.

$$E(\tilde{r}_i) = a_i + b_i \cdot a_{N+k} \qquad i=1,2,\dots,N \qquad [88]$$

y, su **varianza**,

$$V(\tilde{r}_i) = b_i^2 \cdot Q_{N+k} + Q_i \qquad i=1,2,\dots,N \qquad [89]$$

Se puede observar que mientras el riesgo no sistemático tienen la misma expresión que en el modelo anterior, el riesgo sistemático es distinto debido, precisamente, a la diferente estructura del índice.

La **rentabilidad de la cartera** para el modelo multi-índice en forma covarianza se obtiene del siguiente modo:

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot \tilde{I}_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) + \sum_{k=1}^{M} X_{N+k} \cdot (a_{N+k} + \tilde{e}_{N+k}) = \sum_{i=1}^{N+M} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) \qquad [90]$$

y como consecuencia, el **valor esperado y la varianza de $\tilde{R}_c$** son, respectivamente

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+M} X_i \cdot a_i \qquad [91]$$

$$V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+M} X_i^2 \cdot Q_i \qquad [92]$$

En función de [91] y [92], el problema que debe resolverse para hallar la **frontera eficiente** bajo los supuestos de este modelo es:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } [V(\tilde{R}_c) - \phi \cdot E(\tilde{R}_c)] \\ \text{sujeto a} & \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \\ & \sum_{\{i/i \in N_k\}} X_i \cdot b_i = X_{N+k} \\ & \qquad\qquad i=1,2,\ldots,N \\ & \qquad\qquad k=1,2,\ldots,M \end{array}\right\}$$

Si consideramos que N=2 y M=2, la solución al problema es un caso particular de la obtenida para el problema resuelto en el epígrafe **1.3.4.** teniendo en cuenta que $b_3=b_4=0$. De este modo, la solución es:

$$X_1 = \frac{2 \cdot [Q_2+Q_4 \cdot b_2^2] + \phi \cdot [a_1-a_2+a_3 \cdot b_1-a_4 \cdot b_2]}{2 \cdot [Q_1+Q_2+Q_3 \cdot b_1^2+Q_4 \cdot b_2^2\ ]}$$

Cohen y Pogue desarrollan este modelo[92] suponiendo que

$$\mathrm{Cov}(\tilde{e}_{N+k},\ \tilde{e}_{N+l}) \neq 0 \qquad \begin{array}{l} k=1,2,\ldots,M \\ l=1,2,\ldots,M \quad l\neq k \end{array}$$

En este caso, las hipótesis aplicables son:

H.1'. $E(\tilde{e}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+M$

H.2'. $V(\tilde{e}_i) = Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N+M$

H.3'. $\mathrm{Cov}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2,\ldots,N;\ j\neq i$

H.4'. $\mathrm{Cov}(\tilde{e}_{N+k},\tilde{e}_i) = 0 \qquad k=1,2,\ldots,M;\ i=1,2,\ldots,N$

H.5'. $\mathrm{Cov}(\tilde{e}_{N+k},\tilde{e}_{N+l}) \neq 0 \qquad k=1,2,\ldots,M;\ l=1,2,\ldots,M;\ l\neq k$

Bajo estos supuestos, la **varianza de $\tilde{R}_c$** es la siguiente:

$$V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+M} X_i^2\cdot E(\tilde{e}_i^2) + \sum_{i=1}^{N+M}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N+M} X_i\cdot X_j\cdot E(\tilde{e}_i\cdot\tilde{e}_j) = {}^{93}$$

---

[92] **K.J.COHEN-J.A.POGUE**, op. cit., 1967, p.170.

[93] Descomponiendo el segundo sumatorio en la suma de otros tres.

$$= \sum_{i=1}^{N+M} X_i^2 \cdot E(\tilde{e}_i^2) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N+M} X_i \cdot X_j \cdot E(\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N+M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} X_i \cdot X_j \cdot E(\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j) + \sum_{k=1}^{M} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{M} X_{N+k} \cdot X_{N+l} \cdot E(\tilde{e}_{N+k} \cdot \tilde{e}_{N+l}) = \text{[94]}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+M} X_i^2 \cdot E(\tilde{e}_i^2) + \sum_{k=1}^{M} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{M} X_{N+k} \cdot X_{N+l} \cdot E(\tilde{e}_{N+k} \cdot \tilde{e}_{N+l}) = \text{[95]}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+M} X_i^2 \cdot Q_i + \sum_{k=1}^{M} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{M} X_{N+k} \cdot X_{N+l} \cdot Cov(\tilde{e}_{N+k}, \tilde{e}_{N+l}) \qquad [93]$$

1.3.6. Modelo diagonal (modelo de Sharpe)

Si en el modelo de índices múltiples en forma covarianza (apartado 1.3.3.) se supone que L=1 ($\tilde{I}_s = \tilde{I}$ y $b_{is} = b_i$) se obtiene:

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [94]$$

---

[94] Se aplican las hipótesis **H.2'.** y **H.4'.**

[95] 1) Se aplica la hipótesis **H.2'.**

2) $E(\tilde{e}_{N+k} \cdot \tilde{e}_{N+l}) = Cov(\tilde{e}_{N+k}, \tilde{e}_{N+l}) + E(\tilde{e}_{N+k}) \cdot E(\tilde{e}_{N+l}) =$

$= Cov(\tilde{e}_{N+k}, \tilde{e}_{N+l})$, en virtud de **H.1'.** y **H.5'.**

$$\tilde{I} = a_{N+1} + \tilde{e}_{N+1} \qquad [95]$$

que coincide con el modelo de un único índice de **Sharpe**.

Iguales expresiones se obtienen a partir del modelo multi-índice en forma covarianza de **Cohen-Pogue** haciendo M=1 ($\tilde{I}_k=\tilde{I}$).

Las hipótesis aplicables a este modelo son:

H.1'. $E(\tilde{e}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+1$

H.2'. $V(\tilde{e}_i) = Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N+1$

H.3'. $Cov(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N+1;\ j=1,2,\ldots,N+1;\ j\neq i$

A partir de los resultados obtenidos para el modelo expuesto en el apartado **1.3.5.** y teniendo en cuenta que M=1, la **rentabilidad esperada** del título i es

$$E(\tilde{r}_i) = a_i + b_i \cdot a_{N+1} \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [96]$$

y la **varianza**

$$V(\tilde{r}_i) = b_i^2 \cdot Q_{N+1} + Q_i \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad [97]$$

Sustituyendo en el modelo anterior, en [90], M por 1 se obtiene que la **rentabilidad de la cartera** es

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{N+1} X_i \cdot (a_i + \tilde{e}_i) \qquad [98]$$

de donde se deducen las siguientes expresiones para el **valor esperado y la varianza de $\tilde{R}_c$:**

$$E(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+1} X_i \cdot a_i \qquad [99]$$

$$V(\tilde{R}_c) = \sum_{i=1}^{N+1} X_i^2 \cdot Q_i \qquad [100]$$

La frontera eficiente, teniendo en cuenta [99] y [100], es la solución al siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } [V(\tilde{R}_c) - \phi \cdot E(\tilde{R}_c)] \\ \text{sujeto a} & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \\ & \displaystyle X_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_i \end{array}\right\}$$

En el caso que N=2, la estructura de $\tilde{r}_i$ es la siguiente:

$$\tilde{r}_1 = a_1 + b_1 \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_1$$

$$\tilde{r}_2 = a_2 + b_2 \cdot \tilde{I} + \tilde{e}_2$$

$$\tilde{I} = a_3 + \tilde{e}_3$$

y el problema que se trata de resolver puede formalizarse así:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } F = \left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot Q_i - \phi \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot a_i\right] \\ \text{sujeto a} \\ X_1 + X_2 = 1 \\ X_i \geq 0 \qquad i = 1,2. \\ X_3 = X_1 \cdot b_1 + X_2 \cdot b_2 \end{array}\right\}$$

Teniendo en cuenta que $X_2=1-X_1$ y que $X_3=(b_1-b_2)\cdot X_1+b_2$ la función objetivo se convierte en una función de una única variable. De la condición necesaria de óptimo, $\frac{dF}{dX_1} = 0$, se desprende que

$$X_1 = \frac{2 \cdot [Q_2-(b_1-b_2) \cdot b_2 \cdot Q_3]+\phi \cdot [a_1-a_2 \cdot (b_1-b_2) \cdot a_3]}{2 \cdot [Q_1+Q_2+(b_1-b_2)^2 \cdot Q_3]}$$

Idéntico resultado se podría haber obtenido a partir del modelo de múltiples índices en forma diagonal considerando que

$N=2$

$L=1$

$b_{11}=b_1 \qquad b_{12}=0$

$b_{21}=b_2 \qquad b_{22}=0$

$b_3=0$

$b_4=0.$

Los estudios realizados para determinar si es mejor el modelo de un solo índice o el modelo multi-índice no son concluyentes puesto que cada modelo es el mas indicado en determinadas circunstancias. Así, **Cohen** y **Pogue**[96] demuestran que el modelo de un solo índice proporciona carteras más eficientes que el de índices múltiples cuando la muestra es homogénea (muestra formada totalmente por acciones ordinarias). Para muestras más heterogéneas sugieren modelos de índices múltiples. **Wallingford**[97] demuestra, en cambio, que los modelos de dos índices generan carteras mas eficientes que los de un solo índice. Tales diferencias pueden deberse según **Francis** y **Archer**[98] al tamaño de la muestra escogida. Todos los autores citados estan de acuerdo, sin embargo, que el modelo E-V original es el que conduce a la frontera eficiente dominante.

Elton, **Gruber** y **Padberg** en diversos artículos[99] han incorporado

---

[96] **K.J.COHEN-J.A.POGUE**, op. cit., 1967, p.188.

[97] **B.A.WALLINGFORD**, "A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models", J.F.Q.A., 1967, p.103.

[98] **J.C.FRANCIS-S.H.ARCHER**, op. cit., 1977, p.121.

[99] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER-M.W.PADBERG**
-"Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection", J.F., 1976, pp.1341-57.
-"Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection: tracing out the Efficient Frontier", J.F., 1978, pp.296-302.
-"The Selection of Optimal Portfolios: some Simple Tecniques", incluido

al modelo de un solo índice la posibilidad de que se permitan las ventas al descubierto (X_i puede tomar valores negativos), comparando la cartera óptima resultante bajo este supuesto con la que se deriva de la imposibilidad de dichas ventas.

Dicho supuesto ha sido introducido también en un modelo de múltiples índices[100]. A su vez, han estudiado la cartera óptima utilizando el modelo de un solo índice en el caso que se impongan límites a las cantidades invertidas en cada título[101].

---

en **J.L.BICKSLER** (ed), Handbook of Financial Economics (North-Holland, Amsterdam, 1979 b), pp.339-364.

[100] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER-M.W.PADBERG**, "Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection: the Multi-Index case" incluido en **E.J.ELTON-M.J.GRUBER** (eds), Portfolio Theory, 25 years after (North-Holland, Amsterdam, 1979 a), pp.7-19.

[101] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER-M.W.PADBERG**, "Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection with Upper Bonds", O.R., 1977, pp.952-967.

CAPITULO 2

MODIFICACIONES A LOS MODELOS FUNDAMENTALES

2.1. INTRODUCCION

El modelo E-V básico y los modelos de índices se basan en el conjunto de hipótesis detalladas en el epígrafe **1.2.2.** Pero no todos los autores están de acuerdo con dichas hipótesis ya sea por considerar que no se ajustan a la realidad y/o porque implican supuestos muy restrictivos.

En este capítulo se mostrarán las modificaciones que se han hecho sobre las hipótesis del modelo E-V más discutidas. Estas modificaciones afectan, en concreto, al criterio utilizado para la determinación del conjunto eficiente. Por dicho motivo, en los apartados que siguen nos centraremos en la forma de determinar este conjunto en función del nuevo supuesto considerado. Una vez encontrada la frontera eficiente, la segunda fase para la determinación de la cartera óptima es común para todos los casos. Recordemos que en esta segunda fase se determina cuál de las carteras eficientes es la que maximiza la utilidad esperada de la rentabilidad o de la riqueza al final del periodo considerado. La función de utilidad esperada dependerá, en cada caso, de los momentos estadísticos en los que se basa la decisión sobre la eficiencia de una cartera.

2.2. MODIFICACIONES A LA HIPOTESIS H.1. DEL MODELO E-V RESPECTO A LA DISTRIBUCION DE LA RENTABILIDAD DE LOS TITULOS Y DE LA CARTERA

2.2.1. La rentabilidad de los títulos se distribuye según una Pareto estable (Modelo de Fama)

2.2.1.1. Introducción

En el modelo E-V, se supone que la rentabilidad asociada a cada título (y a la cartera) es una variable aleatoria distribuida normalmente. **Fama**[102] considera que existe suficiente evidencia empírica como para creer que dicha variable sigue una distribución estable de Pareto cuya principal característica es su varianza infinita. En este caso, la varianza no sirve para medir la dispersión de la distribución, lo cual obliga a sustituirla por otra medida y por tanto, a variar el criterio E-V.

La forma general del logaritmo neperiano de la función característica de la distribución estable de Pareto es:

$$\ln f(t) = i\cdot\delta\cdot t - \gamma\cdot|t|^{\alpha}\cdot[1+i\cdot\beta\cdot(t/|t|)\cdot w(t,\alpha)] \qquad [1]$$

donde,

•) t = número real

[102] **J.F.FAMA**, "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", M.S., 1965 a), pp. 404-405.

•) $i = \sqrt{-1}$

•) $w(t,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{\pi \cdot \alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi} \cdot \log|t| & \alpha = 1 \end{cases}$

•) α: exponente característico que determina la probabilidad total contenida en las colas de la distribución y que toma los valores $0 < \alpha \leq 2$.

•) β: parámetro que indica la desviación de la distribución hacia la derecha ($\beta > 0$) ó hacia la izquierda ($\beta < 0$).

Si $\beta = 0$, la distribución es simétrica y si además $\alpha = 2$, la distribución estable de Pareto se convierte en la distribución normal.

•) δ: parámetro que define la posición de la distribución.

Si $\alpha > 1$, δ es el valor esperado de la distribución; si $\alpha \leq 1$, la esperanza es infinita.

•) γ: parámetro que mide la dispersión de la distribución como alternativa a la varianza.

Si $\alpha = 2$ (distribución normal), $\gamma = \frac{1}{2} \cdot$varianza.

En primer lugar, analizaremos cómo afecta esta nueva hipótesis al modelo E-V básico y en segundo lugar introduciremos el nuevo supuesto en el modelo de índices múltiples en forma diagonal como generalización al modelo propuesto por **Fama** que se basa en el modelo de **Sharpe**.

2.2.1.2. Incorporación de la nueva hipótesis al modelo E-V básico

Si se supone que:

a) la variable aleatoria $\tilde{r}_j$ (tasa de rentabilidad del título j; j=1,2,...,N) sigue una distribución estable de Pareto simétrica ($\beta=0$)

b) α es la misma para cualquier j (j=1,2,...,N)

c) y además $1<\alpha<2$ (δ representa el valor esperado de la variable aleatoria)

la función característica de $\tilde{r}_j$ es

$$\ln f_{\tilde{r}_j}(t) = i \cdot \delta_j \cdot t - \gamma_j \cdot |t|^{\alpha} \qquad j=1,2,\ldots,N \qquad [2]$$

donde

•) δ_j es el valor esperado de $\tilde{r}_j$

•) γ_j es el parámetro que mide la dispersión de la variable aleatoria respecto a δ_j.

La rentabilidad de la cartera, $\tilde{R}_c = \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \tilde{r}_j$, al ser suma de variables aleatorias distribuidas según una Pareto estable con $\beta=0$ y con igual α, es también una variable aleatoria con iguales características[103] que $\tilde{r}_j$.

---

[103] E.F.FAMA, op. cit., 1965 a), p.407.

La función característica de $\tilde{R}_c$ es

$$\ln f_{\tilde{R}_c}(t) = \sum_{j=1}^{N} \ln f_{\tilde{r}_j}(X_j \cdot t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (i \cdot \delta_j \cdot X_j \cdot t - \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha} \cdot |t|^{\alpha}) = i \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \delta_j\right] \cdot t - \left[\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha}\right] \cdot |t|^{\alpha} \qquad [3]$$

De [3] se deduce que el **valor esperado de $\tilde{R}_c$** es

$$\delta_c = \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \delta_j \qquad [4]$$

y la **dispersión de $\tilde{R}_c$ respecto a δ_c** es

$$\gamma_c = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha} \qquad [5]$$

Si el inversor maximiza la utilidad esperada y $U' > 0$ y $U'' < 0$ (iguales hipótesis que en el modelo E-V básico), entonces preferirá un mayor δ_c y un menor γ_c, es decir,

$$\frac{\partial\, U(\delta, \gamma)}{\partial\, \delta} > 0 \qquad\qquad \frac{\partial\, U(\delta, \gamma)}{\partial\, \gamma} < 0$$

y bajo estas condiciones, la frontera eficiente es la solución al siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min} \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha} \\ \text{sujeto a} \\ \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \delta_j = \delta^* \\ \sum_{j=1}^{N} X_j = 1 \\ X_j \geq 0 \qquad j=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

La solución a este problema es[104]

$$X_j = \frac{\gamma_j^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\sum_{l=1}^{N} \left[\gamma_l^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]} \qquad j=1,2,\ldots,N \qquad [6]$$

Una vez analizado como afecta la nueva hipótesis sobre la distribución de probabilidad de la rentabilidad de los títulos en el modelo E-V básico, introduciremos esta modificación en el modelo de indices múltiples en forma diagonal que constituye una generalización a los modelos de índices.

---

[104] **P.A.SAMUELSON**, "Efficient Portfolio Selection for Pareto-Lévy Investments", J.F.Q.A., 1967, pp.111-114.

2.2.1.3. Incorporación de la nueva hipótesis al modelo de índices múltiples en forma diagonal

En este caso[105] la relación entre la tasa de rentabilidad de cada título ($\tilde{r}_j$; j=1,2,...,N) y los diferentes índices de mercado es

$$\tilde{r}_j = a_j + \sum_{s=1}^{L} b_{js}\cdot\tilde{I}_s + \tilde{e}_j = \tilde{d}_j + \sum_{s=1}^{L} b_{js}\cdot\tilde{I}_s \qquad [7]$$

$$\tilde{I}_s = a_{N+s} + b_{N+s}\cdot\tilde{I} + \tilde{e}_{N+s} = \tilde{d}_{N+s} + b_{N+s}\cdot\tilde{I} \qquad [8]$$

$$\tilde{I} = a_{N+T+1} + \tilde{e}_{N+T+1} \qquad [9]$$

y se supone además que $E(\tilde{e}_j) = 0 \quad \forall j,\ j=1,2,\ldots,N+L+1$.

Si suponemos que $\tilde{I}$, $\tilde{d}_j$ (j=1,2,...,N) y $\tilde{d}_{N+s}$ (s=1,2,...,L) son variables aleatorias que siguen una distribución estable de Pareto simétrica ($\beta=0$) y con igual α ($1<\alpha<2$), entonces $\tilde{I}_s$ y como consecuencia $\tilde{r}_j$ (j=1,2,...,N) se distribuirán también según una Pareto estable de iguales características que $\tilde{I}$, $\tilde{d}_j$ y $\tilde{d}_{N+s}$.

---

[105] Véase el epígrafe **1.3.2.** (Modelo de índices múltiples: forma diagonal), para interpretar $\tilde{r}_j$.

Dadas las funciones características de $\tilde{d}_{N+s}$ (s=1,2,...,L) y de $\tilde{I}$:

$$\ln f_{\tilde{d}_{N+s}}(t) = i \cdot a_{N+s} \cdot t - \gamma_{N+s} \cdot |t|^{\alpha} \qquad [10]$$

$$\ln f_{\tilde{I}}(t) = i \cdot a_{N+L+1} \cdot t - \gamma_{N+L+1} \cdot |t|^{\alpha} \qquad [11]$$

donde a_{N+s} y a_{N+L+1} representan el valor esperado de $\tilde{d}_{N+s}$ e $\tilde{I}$ respectivamente y γ_{N+s} y γ_{N+L+1}, los parámetros indicadores de la dispersión de las distribuciones de $\tilde{d}_{N+s}$ e $\tilde{I}$, la función característica de $\tilde{I}_s$ es

$$\ln f_{\tilde{I}_s}(t) = \ln f_{\tilde{d}_{N+s}}(t) + \ln f_{\tilde{I}}(b_{N+s} \cdot t) =$$

$$= \left[i \cdot a_{N+s} \cdot t - \gamma_{N+s} \cdot |t|^{\alpha}\right] + \left[i \cdot a_{N+L+1} \cdot b_{N+s} \cdot t - \gamma_{N+L+1} \cdot |b_{N+s}|^{\alpha} \cdot |t|^{\alpha}\right] =$$

$$= i \cdot \left[a_{N+s} + a_{N+L+1} \cdot b_{N+s}\right] \cdot t - \left[\gamma_{N+s} + \gamma_{N+L+1} \cdot |b_{N+s}|^{\alpha}\right] \cdot |t|^{\alpha}$$

$$= i \cdot u_s \cdot t - v_s \cdot |t|^{\alpha} \qquad [12]$$

u_s representa el valor esperado de $\tilde{I}_s$ y v_s el parámetro indicador de su dispersión:

$$u_s = a_{N+s} + a_{N+L+1} \cdot b_{N+s} \qquad [13]$$

$$v_s = \gamma_{N+s} + \gamma_{N+L+1} \cdot |b_{N+s}|^{\alpha} \qquad [14]$$

Para poder determinar la función característica de $\tilde{r}_j$, necesitamos definir también la función de $\tilde{d}_j$ (j=1,2,...,N):

$$\ln f_{\tilde{d}_j}(t) = i \cdot a_j \cdot t - \gamma_j \cdot |t|^{\alpha} \qquad [15]$$

donde a_j representa el valor esperado de $\tilde{d}_j$ y γ_j el parámetro indicador de su dispersión.

Si $\tilde{r}_j$ es, según [7],

$$\tilde{r}_j = \tilde{d}_j + \sum_{s=1}^{L} b_{js} \cdot \tilde{I}_s$$

su función característica es

$$\ln f_{\tilde{r}_j}(t) = \ln f_{\tilde{d}_j}(t) + \sum_{s=1}^{L} \ln f_{\tilde{I}_s}(b_{js} \cdot t) =$$

$$= \left[i \cdot a_j \cdot t - \gamma_j \cdot |t|^{\alpha}\right] + \sum_{s=1}^{L} \left[i \cdot u_s \cdot b_{js} \cdot t - v_s \cdot |b_{js}|^{\alpha} \cdot |t|^{\alpha}\right] =$$

$$= i \cdot \left[a_j + \sum_{s=1}^{L} u_s \cdot b_{js}\right] \cdot t - \left[\gamma_j + \sum_{s=1}^{L} v_s \cdot |b_{js}|^{\alpha}\right] \cdot |t|^{\alpha} =$$

$$= i \cdot \delta'_j \cdot t - \gamma'_j \cdot |t|^{\alpha} \qquad [16]$$

De esta última expresión se deduce que los parámetros representativos de $\tilde{r}_j$ son

$$\delta'_j = a_j + \sum_{s=1}^{L} u_s \cdot b_{js} \qquad [17]$$

$$y'_j = y_j + \sum_{s=1}^{L} v_s \cdot |b_{js}|^{\alpha} \qquad [18]$$

Sustituyendo en [17] u_s por su expresión [12] se obtiene que

$$\delta'_j = a_j + \sum_{s=1}^{L} a_{N+s} \cdot b_{js} + a_{N+L+1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} b_{N+s} \cdot b_{js}\right] \qquad [19]$$

Por último, para poder determinar el conjunto de carteras eficientes es necesario buscar el valor esperado y el parámetro indicador de la dispersión de la rentabilidad de la cartera, $\tilde{R}_c$. Para ello expresaremos esta variable aleatoria del siguiente modo[106]:

$$\tilde{R}_c = \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \tilde{r}_j = \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \left[a_j + \sum_{s=1}^{L} b_{js} \cdot \tilde{I}_s + \tilde{e}_j\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \tilde{d}_j + \sum_{s=1}^{L} \tilde{I}_s \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} X_j \cdot b_{js}\right] = \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \tilde{d}_j + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot \tilde{I}_s =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \tilde{d}_j + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot \left[\tilde{d}_{N+s} + b_{N+s} \cdot \tilde{I}\right] =$$

---

[106] Para obtener la expresión final tenemos en cuenta que

$$\sum_{j=1}^{N} X_j \cdot b_{js} = X_{N+s} \quad \text{y} \quad \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot b_{N+s} = X_{N+L+1}$$

tal como definimos en el epígrafe **1.3.2.3.**

$$= \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \tilde{d}_j + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot \tilde{d}_{N+s} + \tilde{I} \cdot \left[\sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot b_{N+s} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \tilde{d}_j + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot \tilde{d}_{N+s} + X_{N+L+1} \cdot \tilde{I} \qquad [20]$$

La función característica de $\tilde{R}_c$, teniendo en cuenta [20] y las funciones [10], [11] y [15], es

$$\ln f_{\tilde{R}_c}(t) = \sum_{j=1}^{N} \ln f_{\tilde{d}_j}(X_j \cdot t) + \sum_{s=1}^{L} \ln f_{\tilde{d}_{N+s}}(X_{N+s} \cdot t) +$$

$$+ \ln f_{\tilde{I}} (X_{N+L+1} \cdot t) = \sum_{j=1}^{N} \left[i \cdot (X_j \cdot a_j) \cdot t - \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha} \cdot |t|^{\alpha} \right] +$$

$$\sum_{s=1}^{L} \left[i \cdot (X_{N+s} \cdot a_{N+s}) \cdot t - \gamma_{N+s} \cdot |X_{N+s}|^{\alpha} \cdot |t|^{\alpha} \right] +$$

$$+ \left[i \cdot (X_{N+L+1} \cdot a_{N+L+1}) \cdot t - \gamma_{N+L+1} \cdot |X_{N+L+1}|^{\alpha} \cdot |t|^{\alpha} \right] =$$

$$= i \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} X_j \cdot a_j + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s} \cdot a_{N+s} + X_{N+L+1} \cdot a_{N+L+1} \right] \cdot t -$$

$$- \left[\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha} + \sum_{s=1}^{L} \gamma_{N+s} \cdot |X_{N+s}|^{\alpha} + \gamma_{N+L+1} \cdot |X_{N+L+1}|^{\alpha} \right] \cdot |t|^{\alpha} =$$

$$= i\cdot\left[\sum_{j=1}^{N+L+1} X_j\cdot a_j\right]\cdot t - \left[\sum_{j=1}^{N+L+1} \gamma_j\cdot|X_j|^{\alpha}\right]\cdot|t|^{\alpha} = i\cdot\delta_c\cdot t - \gamma_c\cdot|t|^{\alpha} \qquad [21]$$

De [21] se deduce que el **valor esperado de $\tilde{R}_c$, δ_c,** es

$$\delta_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} X_j\cdot a_j \qquad [22]$$

También se deduce que el **parámetro indicador de la dispersión** de la distribución de $\tilde{R}_c$ es:

$$\gamma_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} \gamma_j\cdot|X_j|^{\alpha} \qquad [23]$$

El valor esperado de $\tilde{R}_c$, [22], incorporando el resultado obtenido en [19] puede expresarse del siguiente modo:

$$\delta_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} X_j\cdot a_j = \sum_{j=1}^{N} X_j\cdot a_j + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s}\cdot a_{N+s} + X_{N+L+1}\cdot a_{N+L+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} X_j\cdot\left\{a_j + \sum_{s=1}^{L} a_{N+s}\cdot b_{js} + a_{N+L+1}\cdot\left[\sum_{s=1}^{L} b_{N+s}\cdot b_{js}\right]\right\} = \sum_{j=1}^{N} X_j\delta'_j \qquad [24]$$

donde δ'_j es el valor esperado de $\tilde{r}_j$.

Estos dos parámetros, δ_c y γ_c son los que caracterizan al modelo de selección de carteras eficentes en un mercado estable de Pareto.

Si se interpreta δ_c como el valor esperado de la rentabilidad de la cartera y γ_c como una medida de su dispersión, la frontera eficiente estará formada por todas aquellas carteras que sean solución del siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } \gamma_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha} \\ \text{sujeto a} \\ \sum_{j=1}^{N+L+1} X_j \cdot a_j = \delta^* \\ \sum_{j=1}^{N} X_j = 1 \\ X_j \geq 0 \qquad \forall j,\ j = 1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

Este problema puede resolverse mediante la aplicación de Lagrange teniendo en cuenta que $X_j \geq 0$ y, por tanto,

$$\gamma_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} \gamma_j \cdot X_j^{\alpha}$$

El modelo de Fama, que supone una distribución de Pareto estable, constituye, en las dos versiones que hemos desarrollado, una generalización al modelo E-V básico en el caso que se suponga independencia entre los títulos que formen la cartera y al modelo de índices múltiples en forma diagonal ya que ambos modelos suponen una distribución normal de la rentabilidad y ésta puede obtenerse como caso particular de la de Pareto estable.

Si en el modelo E-V básico se supone que la rentabilidad de la cartera se distribuye según una Pareto estable, el valor esperado de la misma es, según [4]

$$\delta_c = \sum_{j=1}^{N} X_j \cdot \delta_j$$

donde δ_j es el valor esperado de la rentabilidad del título j. En el caso que se suponga la distribución normal se cumplirá que $\delta_j=\mu_j$ y, por tanto, el valor esperado de la cartera coincidirá con el encontrado en el modelo E-V básico. En cuanto al parámetro que describe la dispersión de la variable aleatoria respecto al valor esperado, éste es, según [5],

$$\gamma_c = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha}$$

Si la distribución es normal, $\alpha=2$ y $\gamma=\frac{1}{2}\cdot\sigma_{jj}$ y en este caso se obtiene

$$\gamma_c = \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N} X_j^2\cdot\sigma_{jj}$$

Si se supone, en el modelo E-V básico, que $\sigma_{ij}=0$ entonces **el criterio δ-γ proporciona la misma frontera eficiente que el criterio E-V** puesto que minimizar γ_c sujeto a $\delta_c=\delta^*$ equivale a minimizar $V(\tilde{R}_c)$ sujeto a $E(\tilde{R}_c)=E^*$.

Si en el modelo de índices múltiples en forma diagonal consideramos que la rentabilidad de la cartera se distribuye según una Pareto estable, el valor esperado obtenido es, según [22],

$$\delta_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} X_j \cdot a_j$$

Si la distribución es normal, el valor esperado a_j coincidirá con el utilizado en el modelo original y, por tanto, $\delta_c = E(\tilde{R}_c)$ del epígrafe **1.3.2.**

El parámetro que mide la dispersión es, según [23],

$$\gamma_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} \gamma_j \cdot |X_j|^{\alpha}$$

Si la distribución es normal, entonces

$$\gamma_c = \sum_{j=1}^{N} X_j^2 \cdot \gamma_j + \sum_{s=1}^{L} X_{N+s}^2 \cdot \gamma_{N+s} + X_{N+L+1}^2 \cdot \gamma_{N+L+1}$$

donde

•) $\gamma_j = V(\tilde{d}_j) = V(a_j + \tilde{e}_j) = V(\tilde{e}_j) = Q_j \qquad j=1,2,\ldots,N$

•) $\gamma_{N+s} = V(\tilde{d}_{N+s}) = V(a_{N+s} + \tilde{e}_{N+s}) = V(\tilde{e}_{N+s}) = Q_{N+s} \quad s=1,2,\ldots,L$

•) $\gamma_{N+L+1} = V(\tilde{I}) = V(a_{N+L+1} + \tilde{e}_{N+L+1}) = V(\tilde{e}_{N+L+1}) = Q_{N+L+1}$

Se desprende, por tanto, que

$$\gamma_c = \sum_{j=1}^{N+L+1} X_j^2 \cdot Q_j$$

expresión que coincide con $V(\tilde{R}_c)$. Esta coincidencia se cumple sin tener que añadir ningún supuesto adicional y garantiza que la frontera eficiente encontrada por el modelo de múltiples índices o por el modelo δ-γ de Fama sea la misma. Para otos casos $\delta_c \neq E(\tilde{R}_c)$ y $\gamma_c \neq V(\tilde{R}_c)$ por lo que el conjunto eficiente ya no coincidirá.

2.2.2. La rentabilidad de los títulos se distribuye según una Lognormal (Modelo de Fama-Elton-Gruber)

2.2.2.1. Introducción

Elton y **Gruber**[107], a partir del estudio realizado por **Fama**[108] en el que se pone en evidencia que, en la realidad, la rentabilidad de los títulos y de la cartera no suele distribuirse normalmente, determinan el conjunto eficiente bajo el supuesto de que dicha rentabilidad se distribuya según una lognormal.

Dados:

•) W_t: riqueza disponible en el momento t (al inicio del periodo t+1);

•) $\tilde{W}_{t+1}$: riqueza disponible en el momento t+1(al final del periodo t+1);

---

[107] **E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, "Portfolio Theory when Investment Relatives are Lognormally Distributed", J.F., 1974 c), pp.1265-1273.

[108] **E.F.FAMA**, "The Behavior of Stock Prices", J.B., 1965 b), pp.34-105.

•) $\tilde{R}_{ct+1}$: tasa de rentabilidad aleatoria de la cartera en el momento t+1 (final del periodo t+1);

se cumple que

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot (1+\tilde{R}_{ct+1}) = W_t + W_t \cdot \tilde{R}_{ct+1} \qquad [25]$$

Haciendo $\tilde{R}'_{t+1} = 1 + \tilde{R}_{ct+1}$, la expresión anterior es:

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot \tilde{R}'_{t+1} \qquad [26]$$

A diferencia del modelo E-V básico, en este modelo se supone que

1) $\tilde{R}'_{t+1} = 1 + \tilde{R}_{ct+1}$ es una variable aleatoria distribuida según una lognormal;

2) Además, respecto a la función de utilidad sólo se pide que $U(\tilde{W}_{t+1})$ sea creciente[109] (el inversor racional prefiere más riqueza a menos). Por tanto, la utilidad marginal de la riqueza es positiva: $U'(\tilde{W}_{t+1})>0$.

2.2.2.2. Deducción del criterio de eficiencia

Recordemos que según el modelo E-V básico, una cartera es eficiente si para su nivel de rentabilidad esperada no existe otra

[109] La función de utilidad definida por **Elton** y **Gruber** (**E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, op. cit., 1974 c), p.1267), depende de la riqueza y no de la rentabilidad, aunque ya se hemos demostrado la relación existente entre ambas funciones (epígrafe **1.2.5.**).

cartera con menor riesgo o si para su nivel de riesgo no existe otra cartera con una rentabilidad esperada mayor.

A continuación estudiaremos como varía la anterior definición de cartera eficiente en el caso de que la variable aleatoria se distribuya según una lognormal.

Si m es la esperanza de $\ln \tilde{R}'_{t+1}$, y s la desviación estándar de $\ln \tilde{R}'_{t+1}$, entonces

$$\tilde{z} = \frac{\ln \tilde{R}'_{t+1} - m}{s} \qquad [27]$$

es una variable aleatoria distribuida normalmente con media nula y desviación estándar unitaria. Esta variable estandarizada tiene una función de distribución conocida que sólo depende del valor de dicha variable.

De [27] se desprende que

$$\ln \tilde{R}'_{t+1} = m + s \cdot \tilde{z} \qquad [28]$$

y por tanto,

$$\tilde{R}'_{t+1} = e^{m+s \cdot \tilde{z}} \qquad [29]$$

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t \cdot \tilde{R}'_{t+1} = W_t \cdot e^{m+s \cdot \tilde{z}} \qquad [30]$$

Para poder deducir el criterio de eficiencia debemos analizar como afecta una variación de m y de s a la utilidad esperada de la riqueza final, $E[U(\tilde{W}_{t+1})]$, que depende únicamente de estas dos variables:

$$E[U(\tilde{W}_{t+1})] = E\left[U\left[W_t \cdot e^{m+s\cdot\tilde{z}}\right]\right] \qquad [31]$$

Así, suponiendo que s se mantiene constante, el efecto de m sobre $E[U(\tilde{W}_{t+1})]$ se deduce del siguiente modo:

$$\frac{\partial\ E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\ m} = E\left[\frac{\partial\ U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\ \tilde{W}_{t+1}} \cdot \frac{\partial\ U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\ m}\right] =$$

$$= E\left[\frac{\partial\ U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\ \tilde{W}_{t+1}} \cdot W_t \cdot e^{m+s\cdot\tilde{z}}\right] = W_t \cdot E\left[\frac{\partial\ U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\ \tilde{W}_{t+1}} \cdot e^{m+s\cdot\tilde{z}}\right] \qquad [32]$$

Dado que

•) $W_t > 0$

•) $\dfrac{\partial\ U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\ \tilde{W}_{t+1}} > 0$

•) $e^{m+s\cdot\tilde{z}} > 0$

se desprende que $\dfrac{\partial\ E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\ m} > 0$

La conclusión que se deriva del resultado anterior es que la utilidad esperada se maximiza si m se maximiza; por tanto, **para cualquier nivel de desviación estándar de ln $\tilde{R}_{t+1}$ (s) se debe maximizar el valor esperado de ln $\tilde{R}'_{t+1}$ (m)**. Esta conclusión coincide con la segunda parte del teorema del conjunto eficiente del modelo E-V original según la cual entre dos carteras de igual desviación estándar se escogerá siempre aquélla que presente una rentabilidad esperada mayor.

La primera parte del teorema del conjunto eficiente del modelo E-V básico afirma que para cualquier nivel de rentabilidad esperada deberá minimizarse la desviación estándar. Se deberá probar si esto es cierto en el caso de que la rentabilidad se distribuya según una lognormal. Para ello será necesario analizar el efecto de una variación de la desviación estándar en la utilidad esperada de la riqueza final:

$$\frac{\partial\, E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\, s} = E\left[\frac{\partial\, U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\, \tilde{W}_{t+1}} \cdot \frac{\partial\, U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\, s}\right] =$$

$$= E\left[\frac{\partial\, U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\, \tilde{W}_{t+1}} \cdot W_t \cdot e^{m+s\cdot\tilde{z}} \cdot \tilde{z}\right] = W_t \cdot E\left[\frac{\partial\, U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\, \tilde{W}_{t+1}} \cdot e^{m+s\cdot\tilde{z}} \cdot \tilde{z}\right] \qquad [33]$$

El signo de $\frac{\partial\, E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\, s}$ no está determinado a diferencia de lo que ocurre con $\frac{\partial\, E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\, m}$ puesto que mientras W_t, $\frac{\partial\, U(\tilde{W}_{t+1})}{\partial\, \tilde{W}_{t+1}}$ y $e^{m+s\cdot\tilde{z}}$ son positivos, el signo de $\tilde{z}$ no está definido. Por tanto, el signo de $\frac{\partial\, E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\, s}$ dependerá[110] del signo de $\tilde{z}$.

---

[110] Si bien Elton y **Gruber** (**E.J.ELTON-M.J.GRUBER**, op. cit., 1974 c), p.1268) llegan a la conclusión de que el signo de $\frac{\partial\, E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\, s}$ no está definido, las razones que aducen son distintas a las nuestras lo cual afecta al resto de nuestro estudio.

Como $\tilde{z} = \dfrac{\ln \tilde{R}'_{t+1} - m}{s}$ y $s > 0$, el signo de $\tilde{z}$ dependerá del signo de la diferencia $\ln \tilde{R}'_{t+1} - m$:

a) Si $\ln \tilde{R}'_{t+1} > m$, entonces $\tilde{z} > 0$ y $\dfrac{\partial E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial s} > 0$

b) Si $\ln \tilde{R}'_{t+1} = m$, entonces $\tilde{z} = 0$ y $\dfrac{\partial E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial s} = 0$

c) Si $\ln \tilde{R}'_{t+1} < m$, entonces $\tilde{z} < 0$ y $\dfrac{\partial E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial s} < 0$

El efecto de la desviación estándar sobre la utilidad esperada de la riqueza final no está determinado de antemano sino que depende del comportamiento de $\tilde{z}$. Esta es una diferencia esencial respecto al modelo E-V básico en el que se supone la distribución normal de la rentabilidad. Ello implica diferencias respecto a la determinación del conjunto eficiente, debiéndose distinguir los tres siguientes casos derivados del signo de la diferencia $\ln \tilde{R}'_{t+1} - m$:

a) $\dfrac{\partial E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial s} > 0$ implica que cuanto mayor sea s mayor será $E[U(\tilde{W}_{t+1})]$ y que por tanto, a igualdad de rentabilidad esperada se escogerá aquella cartera con desviación estándar mayor.

Este caso se da cuando $\ln \tilde{R}'_{t+1} > m$, es decir, $\tilde{R}'_{t+1} > e^{m}$ y en definitiva, como $e^{m} > m$, la variación positiva de la utilidad esperada se produce cuando $\tilde{R}'_{t+1} > m$ $(\tilde{R}_{ct+1} > m-1)$. La conclusión que puede extraerse de este resultado es que cuando $\tilde{R}'_{t+1} > m$, el inversor se arriesga, muestra preferencia por el riesgo.

El conjunto eficiente en el momento t $(t=0,1,\dots,T-1)$ es la solución al problema

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max } s = \sqrt{V(\ln \tilde{R}'_{t+1})} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ &m = E(\ln \tilde{R}'_{t+1}) = m^{*} \\ &\sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \\ &X_{it} \geq 0 \qquad \forall i \quad i=1,2,\dots,N \end{aligned}\right\}$$

b) $\dfrac{\partial\, E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\, s} = 0$ implica que una variación en la desviación estándar no tienen ningún efecto sobre la utilidad esperada y por tanto, entre todas las carteras, se escogerá aquélla que presente la máxima rentabilidad esperada.

En este caso el conjunto eficiente está formado por una única cartera.

c) $\dfrac{\partial\, E[U(\tilde{W}_{t+1})]}{\partial\, s} < 0$ implica que una incremento en la desviación estándar tiene un efecto negativo sobre la utilidad esperada de la riqueza final y que por tanto, a igualdad de rentabilidad esperada se escogerá aquella cartera con desviación estándar menor.

Este caso se dará cuando $\ln \tilde{R}'_{t+1} < m$ y en general, ello se producirá cuando $\tilde{R}'_{t+1} < m$. Así, cuando $\tilde{R}'_{t+1}$ se halla por debajo de la rentabilidad esperada, el inversor no se arriesga y por, tanto, a igualdad de rentabilidad esperada escoge la menor desviación estándar.

Para encontrar el conjunto eficiente en el momento t ($t=0,1,\ldots,T-1$) deberá resolverse el siguiente problema:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
 & \text{Min } s = \sqrt{V(\ln \tilde{R}'_{t+1})} \\
\text{sujeto a} & \\
 & m = E(\ln \tilde{R}'_{t+1}) = m^* \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \\
 & X_{it} \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N
\end{array}
\right\}
$$

En definitiva, el conjunto eficiente en el caso de que la rentabilidad se distribuya según una lognormal no es siempre el mismo sino que depende del signo de $\tilde{z}$.

En los casos a) y c) el problema planteado puede resolverse teniendo en cuenta que:

$$
s = \left\{ \ln \left[\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \right] \right\}^{1/2}
$$

$$
m = \ln \mu - \frac{1}{2} \cdot s^2
$$

$$\sigma^2 = V(\tilde{R}'_{t+1})$$

$$\mu = E(\tilde{R}'_{t+1})$$

De este modo, se obtiene que maximizar (o minimizar) $s = \sqrt{V(\ln \tilde{R}'_{t+1})}$ sujeto a $m = E(\ln \tilde{R}'_{t+1})$ equivale a maximizar (o minimizar) $\mu = E(\tilde{R}'_{t+1})$. Por tanto, la frontera eficiente es la solución a

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Max (Min) } E(\tilde{R}'_{t+1}) \\ \text{sujeto a} & \\ & \sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \\ & X_{it} \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

2.3. MODIFICACIONES A LA HIPOTESIS H.5. DEL MODELO E-V BASICO RESPECTO A LA PARTICIPACION DE CADA TITULO EN LA CARTERA

Las hipótesis del modelo E-V básico respecto a la participación de cada título en la cartera son:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,..,N$$

Y las modificaciones que se han realizado pueden resumirse en las siguientes:

2.3.1. Modelo E-V con límites superiores[111]

Puede ocurrir que por restricciones legales o políticas, la participación de un título en la cartera no pueda superar un determinado límite. En este caso, debería añadirse a las dos hipótesis anteriores la siguiente:

$$X_i \leq U_i \qquad i=1,2,\ldots,N \tag{34}$$

La inclusión de esta nueva hipótesis reduce el conjunto de carteras factibles si $U_i<1 \quad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N$. En caso contrario ($U_i \geq 1$ $\forall i,\ i=1,2,\ldots,N$), el conjunto no se verá afectado y coincidirá con el del modelo E-V.

La frontera eficiente es el resultado de

$$\left.\begin{array}{lll} & \text{Min } V(\tilde{R}_c) & \\ \text{sujeto a} & & \\ & E(\tilde{R}_c) = E^* & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 & \\ & X_i \geq 0 & \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \\ & X_i \leq U_i & \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \end{array}\right\}$$

[111] H.MARKOWITZ, op. cit., 1989, pp.7-8.

2.3.2. Modelo de Tobin-Sharpe-Lintner[112]

En el modelo E-V básico se supone que todo el presupuesto disponible se invierte totalmente, repartiéndolo entre todos los títulos que constituyen la cartera. Ello implica que $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$. Sin embargo, se puede admitir la posibilidad de que el inversor no agote todo su presupuesto, prestando una parte del mismo ó que, al contrario, tome prestada una cierta cantidad de dinero, todo ello a una tasa de interés conocida y por tanto, libre de riesgo[113].

Bajo estos nuevos supuestos, las dos hipótesis originales del modelo E-V se convertiran en:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 + X_{N+1} \qquad [35]$$

$$X_i \geq 0 \qquad [36]$$

$$X_{N+1} \geq -1 \qquad [37]$$

donde X_{N+1} es la cantidad de dinero (en proporción respecto al presupuesto inicial) que se presta ($X_{N+1} < 0$) ó que procede de un préstamo que se le ha concedido al inversor ($X_{N+1} > 0$). Se exige que $X_{N+1} \geq -1$, es decir, que siendo negativa nunca sea inferior a -1 puesto que el inversor no puede prestar una cantidad superior a su presupuesto.

---

[112] **J.TOBIN**, "Liquidity Preference as Behaviour towards Risk", R.E.S., 1958, pp.65-86.
J.LINTNER, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", R.E.A.S., 1965, pp.13-37.
W.SHARPE, "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", J.F., 1964, pp.425-442.

[113] Esta hipótesis es muy restrictiva puesto que implica una misma tasa de interés para prestar dinero que para tomarlo prestado.

Si se supone que puede prestarse y tomar prestada cualquier cantidad de dinero a una tasa de interés r_0 libre de riesgo, se cumple que:

$$\sigma_{N+1\ N+1} = 0$$

$$\sigma_{N+1\ i} = 0 \quad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N$$

$$E[X_{N+1}] = \begin{cases} r_0 & X_{N+1} < 0 \\ -r_0 & X_{N+1} > 0 \end{cases}$$

De hecho, al permitir que se mantenga dinero líquido en la cartera, se está aceptando la existencia de títulos no arriesgados, lo cual transgrede la hipótesis **H.3.** del modelo E-V básico que considera que todos los títulos incluidos en la cartera son arriesgados.

La frontera eficiente asociada a las nuevas hipótesis es la solución del siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } V(\tilde{R}_c) \\ \text{sujeto a} & \\ & E(\tilde{R}_c) = E^* \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 + X_{N+1} \\ & X_i \geq 0 \qquad \forall i,\ i=1,2,\ldots,N \\ & X_{N+1} \geq -1 \end{array}\right\}$$

2.3.3. Modelo de Black[114]

En el modelo de **Black** se admiten las ventas al descubierto[115] y, por tanto, puede eliminarse la hipótesis $X_i \geq 0$. En este caso, la frontera eficiente es la solución a:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } V(\tilde{R}_c) \\ \text{sujeto a} & \\ & E(\tilde{R}_c) = E^* \\ & \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \end{array}\right\}$$

La solución a este problema coincide con la del modelo E-V básico sin necesidad de imponer restricciones a E^*. **Markowitz**[116] deduce la frontera eficiente para todos aquellos casos en los que, como en el modelo de **Black**, las restricciones son del tipo $A \cdot X = b$.

Estos tres modelos pueden considerarse **casos particulares del siguiente modelo general:**

---

[114] **F.BLACK**, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", J.B., 1972, pp.444-455.

[115] Véanse las pp.59-60 de la presente Tesis, donde se definen las ventas al descubierto.

[116] **H.MARKOWITZ**, op. cit., 1989, pp.125-143.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } V(\tilde{R}_c) \\ \text{sujeto a} \\ E(\tilde{R}_c) = E^* \\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 + X_{N+1} \\ V_i \leq X_i \leq U_i \\ X_{N+1} \geq -1 \end{array}\right\}$$

Si $X_{N+1}=0$ y $V_i=0$ $\forall i$, $i=1,2,\ldots,N$, obtenemos el **modelo E-V con límites superiores.**

Si $U_i>1$ y $V_i=0$ $\forall_i$, $i=1,2,\ldots,N$, obtenemos el **modelo de Tobin-Lintner-Sharpe** puesto que en este caso U_i se vuelve inoperante.

Si $U_i>1$, $V_i<-1$ $\forall i$, $i=1,2,\ldots,N$ y $X_{N+1} = 0$, obtenemos el **modelo de Black** ya que los límites se vuelven inoperantes y en este caso no hace falta X_{N+1} para que alguna de las variables tome valores negativos.

Markowitz[117] proporciona una solución de carácter general para resolver el problema de optimización planteado, basándose en la aplicación de las condiciones de **Kuhn-Tucker.**

[117] **H.MARKOWITZ**, op. cit., 1989, pp.151-239.

2.4. MODIFICACIONES A LA HIPOTESIS H.9. DEL MODELO E-V BASICO RESPECTO A LA FORMA DE LA FUNCION DE UTILIDAD (MODELO DE TRES MOMENTOS DE HANOCH-LEVY)

2.4.1. Introducción

La función de utilidad considerada en el modelo E-V es una función cuadrática $[U(\tilde{R}_c) = a + b\cdot\tilde{R}_c + c\cdot\tilde{R}_c^2]$. Pero dicha función presenta dos importantes restricciones para su aplicación en el contexto de la cartera de valores:

i) Es necesario delimitar el dominio de aplicación de la función para asegurar una utilidad marginal creciente respecto a la rentabilidad $(\tilde{R}_c \in (0, -b/2c))$.

ii) El grado de aversión al riesgo medido por $\dfrac{-U''(\tilde{R}_c)}{U'(\tilde{R}_c)}$ es creciente si se utiliza la función cuadrática, mientras que empiricamente se ha demostrado que es decreciente.

Debido a estas restricciones, **Hanoch** y **Levy**[118] introducen en el modelo de selección de carteras eficientes una función de utilidad cúbica, cuyos rasgos más característicos, que la hacen preferible a la cuadrática, son los siguientes:

1) Su forma se aproxima mejor a la función de utilidad real;

---

[118] **G.HANOCH-H.LEVY**, "Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility", <u>J.B.</u>, 1970, pp.181-189.

2) Es una función monótona creciente en todo su dominio si se imponen las restricciones apropiadas a los parámetros. El crecimiento de la función de utilidad se traduce en $U'(\tilde{R}_c)>0$;

3) Muestra aversión al riesgo para determinados niveles de rentabilidad y preferencia por el riesgo para altas rentabilidades. Ello significa que el signo de $U''(\tilde{R}_c)$ no está definido;

4) La utilidad esperada depende no sólo de la esperanza y de la varianza sino también del tercer momento, que informa de la desviación de la distribución hacia la derecha o hacia la izquierda respecto a la media.

La forma general de la función de utilidad cúbica es:

$$U(\tilde{R}_c) = \tilde{R}_c + b\cdot\tilde{R}_c^2 + d\cdot\tilde{R}_c^3 \qquad [38]$$

y como ha de ser monótona creciente, se deberá asegurar que $U'(\tilde{R}_c)>0$ y ello supone:

$$3\cdot d\cdot\tilde{R}_c^2 + 2\cdot b\cdot\tilde{R}_c + 1 > 0 \qquad [39]$$

La primera parte de [39] es el primer miembro de la ecuación de una parábola y para asegurar que sea siempre positiva para cualquier valor de $\tilde{R}_c$ se precisa que

$$4\cdot b^2 - 12\cdot d < 0 \implies b^2 < 3\cdot d \qquad [40]$$

debiéndose cuplir que $d>0$ puesto que $b^2>0$.

2.4.2. Deducción del criterio de eficiencia

Para deducir un criterio de eficiencia óptimo en el caso de funciones de utilidad cúbicas, es necesario estudiar en primer lugar, cuáles son las variables que influyen en la utilidad esperada y, a continuación, cuál es el efecto de un cambio en estas variables sobre dicha utilidad esperada.

La función de utilidad esperada puede expresarse del siguiente modo:

$$E[U(\tilde{R}_c)] = E(\tilde{R}_c + b\cdot\tilde{R}_c^2 + d\cdot\tilde{R}_c^3) = E(\tilde{R}_c) + b\cdot E(\tilde{R}_c^2) + d\cdot E(\tilde{R}_c^3) \quad [41]$$

$E(\tilde{R}_c^2)$ y $E(\tilde{R}_c^3)$ de [41] pueden expresarse como

•) $E(\tilde{R}_c^2) = V(\tilde{R}_c) + [E(\tilde{R}_c)]^2$ [42]

•) $E(\tilde{R}_c^3) = \mu_3 + [E(\tilde{R}_c)]^3 + 3\cdot V(\tilde{R}_c)\cdot E(\tilde{R}_c)$ [43]

relación que se deduce de la definición del tercer momento $\mu_3 = E[\tilde{R}_c - E(\tilde{R}_c)]^3$

La utilidad esperada [41] es, por tanto, una función de los tres momentos estadísticos:

$$E[U(\tilde{R}_c)] = E(\tilde{R}_c) + b\cdot\{V(\tilde{R}_c) + [E(\tilde{R}_c)]^2\} +$$

$$+ d\cdot\{\mu_3 + [E(\tilde{R}_c)]^3 + 3\cdot V(\tilde{R}_c)\cdot E(\tilde{R}_c)\} =$$

$$= E(\tilde{R}_c) + b\cdot[E(\tilde{R}_c)]^2 + d\cdot[E(\tilde{R}_c)]^3 + [b + 3\cdot d\cdot E(\tilde{R}_c)]\cdot V(\tilde{R}_c) + d\cdot\mu_3 \qquad [44]$$

Una vez conocida la dependencia de $E[U(\tilde{R}_c)]$ respecto a $E(\tilde{R}_c)$, $V(\tilde{R}_c)$ y μ_3, analizaremos el efecto de una variación en estas variables sobre la utilidad esperada. Para ello estudiaremos el signo de la derivada de $E[U(\tilde{R}_c)]$ respecto a cada una de las variables de las que depende:

a) $$\frac{\partial\, E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial\, E(\tilde{R}_c)} = 1 + 2\cdot b\cdot E(\tilde{R}_c) + 3\cdot d\cdot[E(\tilde{R}_c)]^2 + 3\cdot d\cdot V(\tilde{R}_c)$$

De [40] sabemos que $b^2 < 3\cdot d$ y, por tanto,

$$1 + 2\cdot b\cdot E(\tilde{R}_c) + 3\cdot d\cdot[E(\tilde{R}_c)]^2 > 0 \qquad [45]$$

Como además se cumple que $d>0$ y $V(\tilde{R}_c)>0$ se llega a la conclusión que

$$\frac{\partial\, E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial\, E(\tilde{R}_c)} > 0 \qquad [46]$$

Del signo de esta derivada se desprende que la utilidad esperada crece con $E(\tilde{R}_c)$. Esto significa que ante dos carteras con igual $V(\tilde{R}_c)$ e igual μ_3, se escogerá aquella cuya rentabilidad esperada sea mayor (igual que en el modelo E-V básico).

b) $$\frac{\partial\, E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial\, V(\tilde{R}_c)} = b + 3\cdot d\cdot E(\tilde{R}_c) \qquad [47]$$

En este caso no puede decirse cual es el efecto de $V(\tilde{R}_c)$ sobre $E[U(\tilde{R}_c)]$ puesto que depende del valor que tomen b y d.

Cuando la función de utilidad es cúbica, no puede concluirse (como hicimos en el modelo E-V básico) que ante dos carteras con igual rentabilidad esperada escogeremos la que presenta una varianza menor ya que un aumento de la misma puede provocar tanto un aumento como una disminución de la utilidad esperada.

c) $$\frac{\partial\, E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial\, \mu_3} = d \qquad [48]$$

Al ser d > 0, entonces $\frac{\partial\, E[U(\tilde{R}_c)]}{\partial\, \mu_3} > 0$. Y ello significa que la utilidad esperada crece con μ_3.

El efecto de μ_3 sobre $U(\tilde{R}_c)$ es positivo lo cual implica que ante dos carteras con igual rentabilidad esperada e igual varianza escogeremos aquella cuyo μ_3 sea mayor.

Del análisis anterior no puede deducirse directamente un criterio de eficiencia tal como puede hacerse cuando la función de utilidad es cuadrática puesto que no queda totalmente definido el efecto de $V(\tilde{R}_c)$ en $E[U(\tilde{R}_c)]$. Por dicho motivo, será necesario abordar el problema desde otro punto de vista que se basa en determinar directamente que condiciones han de cumplirse para que una cartera sea preferida a otra. Este nuevo planteamiento es el que se analiza a continuación.

En general, la cartera A es preferida a la cartera B si

$$\Delta E[U(\tilde{R}_c)] = E[U(\tilde{R}_{cA})] - E[U(\tilde{R}_{cB})] > 0 \qquad [49]$$

donde $\tilde{R}_{cA}$ y $\tilde{R}_{cB}$ representan la tasa de rentabilidad de las carteras A y B respectivamente.

En el caso de que la función de utilidad sea cúbica, la condición [49] se convierte en

$$\Delta E[U(\tilde{R}_c)] = E(\tilde{R}_{cA} + b\cdot\tilde{R}^2_{cA} + d\cdot\tilde{R}^3_{cA}) - E(\tilde{R}_{cB} + b\cdot\tilde{R}^2_{cB} + d\cdot\tilde{R}^3_{cB}) \qquad [50]$$

Si consideramos

•) $E(\tilde{R}_{cA}) - E(\tilde{R}_{cB}) = \Delta E(\tilde{R}_c)$

•) $E(\tilde{R}^2_{cA}) - E(\tilde{R}^2_{cB}) = \Delta E(\tilde{R}^2_c)$

•) $E(\tilde{R}^3_{cA}) - E(\tilde{R}^3_{cB}) = \Delta E(\tilde{R}^3_c)$

la expresión de $\Delta E[U(\tilde{R}_c)]$ en [50] es

$$\Delta E[U(\tilde{R}_c)] = \Delta E(\tilde{R}_c) + b\cdot\Delta E(\tilde{R}^2_c) + d\cdot\Delta E(\tilde{R}^3_c) \qquad [51]$$

La condición [40], $b^2 < 3d$, se puede expresar también como

$$-\sqrt{3d} < b < \sqrt{3d}$$

y ello nos permite afirmar que

$$\Delta E(\tilde{R}_c) + b\cdot\Delta E(\tilde{R}^2_c) + d\cdot\Delta E(\tilde{R}^3_c) > \Delta E(\tilde{R}_c) - \sqrt{3d}\cdot\Delta E(\tilde{R}^2_c) + d\cdot\Delta E(\tilde{R}^3_c) \qquad [52]$$

y en definitiva,

$$\Delta E[U(\tilde{R}_c)] > 0 \iff \Delta E(\tilde{R}_c) - \sqrt{3d}\cdot\Delta E(\tilde{R}^2_c) + d\cdot\Delta E(\tilde{R}^3_c) > 0 \qquad [53]$$

$\Delta E(\tilde{R}_c) - \sqrt{3d}\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^2) + d\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3)$ es una ecuación de segundo grado de $\sqrt{d}$ $(d > 0)$ que será siempre positiva si y sólo si

$$3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c^2)]^2 - 4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3) < 0 \qquad [54]$$

es decir,

$$3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c^2)]^2 < 4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3) \qquad [55]$$

De esta última expresión se desprende que la cartera A es preferida a la cartera B si y sólo si

$$3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c^2)]^2 < 4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3)$$

y esta relación constituye el criterio de eficiencia para la función de utilidad cúbica.

Teniendo en cuenta [41] y [42] este criterio de eficiencia puede expresarse en función de los tres primeros momentos estadísticos, $E(\tilde{R}_c)$, $V(\tilde{R}_c)$ y μ_3 haciendo los siguientes cambios:

*) Expresión de $3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c^2)]^2$ en función de $E(\tilde{R}_c)$ y $V(\tilde{R}_c)$

•) $\Delta E(\tilde{R}_c^2) = \Delta\{V(\tilde{R}_c) + [E(\tilde{R}_c)]^2\} = \Delta V(\tilde{R}_c)+[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2+2\cdot E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)$

•) $3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c^2)]^2 = 3\cdot[\Delta V(\tilde{R}_c)]^2 + 6\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2\cdot\Delta V(\tilde{R}_c) +$

$$+ 12\cdot E(\tilde{R}_c)\cdot \Delta E(\tilde{R}_c)\cdot \Delta V(\tilde{R}_c) + 3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^4 + 12\cdot E(\tilde{R}_c)\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^3 +$$

$$+ 12\cdot[E(R_c)]^2\cdot[\Delta E(R_c)]^2 \qquad [56]$$

*) Expresión de $4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3)$ en función de $E(\tilde{R}_c)$, $V(\tilde{R}_c)$ y μ_3

•) $\Delta E(\tilde{R}_c^3) = \Delta\{\mu_3 + [E(\tilde{R}_c)]^3 + 3\cdot V(\tilde{R}_c)\cdot E(\tilde{R}_c)\} =$

$$= \Delta\mu_3 + 3\cdot E(\tilde{R}_c)\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2 + 3\cdot[E(\tilde{R}_c)]^2\cdot\Delta E(\tilde{R}_c) + [\Delta E(\tilde{R}_c)]^3 +$$

$$+ 3\cdot E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta V(\tilde{R}_c) + 3\cdot V(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)$$

•) $4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3) = 4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta\mu_3 + 12\cdot E(\tilde{R}_c)\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^3 +$

$$+ 12\cdot[E(\tilde{R}_c)]^2\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2 + 4\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^4 + 12\cdot E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta V(\tilde{R}_c) +$$

$$+ 12\cdot\Delta V(\tilde{R}_c)\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2 \qquad [57]$$

Así, la expresión [55]

$$3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c^2)]^2 < 4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3)$$

ó, de forma equivalente,

$$4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta E(\tilde{R}_c^3) - 3\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c^2)]^2 > 0 \qquad [58]$$

se convierte, teniendo en cuenta [56] y [57], en

$$4\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)\cdot\Delta\mu_3 + [\Delta E(\tilde{R}_c)]^4 + 12\cdot V(\tilde{R}_c)\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2 -$$

$$- 3\cdot[\Delta V(\tilde{R}_c)]^2 - 6\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2\cdot\Delta V(\tilde{R}_c) > 0 \qquad [59]$$

Dividiendo [59] por $12\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2$, se obtiene

$$\frac{\Delta\mu_3}{3\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)} + \frac{[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2}{12} + V(\tilde{R}_c) - \frac{[\Delta V(\tilde{R}_c)]^2}{4\cdot[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2} - \frac{\Delta V(\tilde{R}_c)}{2} > 0 \qquad [60]$$

ó bien,

$$\frac{\Delta\mu_3}{3\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)} + \frac{[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2}{12} - \left[\frac{\Delta V(\tilde{R}_c)}{2\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)}\right]^2 + \frac{2\cdot V(\tilde{R}_c) - \Delta V(\tilde{R}_c)}{2} > 0 \qquad [61]$$

En definitiva, el criterio de eficiencia puede expresarse también del siguiente modo:

La cartera A es preferida a la cartera B $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{\Delta\mu_3}{3\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)} + \frac{[\Delta E(\tilde{R}_c)]^2}{12} - \left[\frac{\Delta V(\tilde{R}_c)}{2\cdot\Delta E(\tilde{R}_c)}\right]^2 + \frac{2\cdot V(\tilde{R}_c) - \Delta V(\tilde{R}_c)}{2} > 0$$

En el caso de que $\Delta E(\tilde{R}_c) = E(\tilde{R}_{cA}) - E(\tilde{R}_{cB}) = 0$, la condición necesaria y suficiente para que la cartera A sea preferida a la cartera B es la siguiente:

$$- 3[\Delta V(\tilde{R}_c)]^2 > 0$$

Dicha condición nunca se cumplirá y ello determina que en este caso especial no exista ningún criterio de eficiencia aplicable para todos los inversores. Por lo tanto, la elección de la cartera se basará exclusivamente en las preferencias del inversor.

La última de las hipótesis del modelo E-V básico, citada en el apartado **1.2.3.**, hace referencia a la ausencia de costes de mantenimiento y revisión de cartera. La eliminación de dicho supuesto da lugar a un nuevo modelo (**Modelo E-V con incorporación de costes de mantenimiento y revisión de la cartera**), que podría incluirse en este Capítulo junto al resto de modificaciones que se han efectuado. Sin embargo, debido a la importancia que supone el tratamiento, de forma explícita, de la revisión de cartera, creemos que no debe ser considerado como una simple modificación al modelo E-V básico sino que como un verdadero modelo uniperiódico de revisión de cartera. Por esta razón creemos más conveniente incluir el modelo E-V con costes en el siguiente Capítulo junto a otros modelos aplicables a la revisión de la cartera de naturaleza uniperiódica.

CAPITULO 3

MODELOS UNIPERIODICOS DE REVISION DE CARTERA

3.1. INTRODUCCION

El modelo E-V básico y los modelos de índices incluidos en el **Capítulo 1** no son los únicos que pueden aplicarse en el contexto de la revisión de cartera[119] de carácter uniperiódico aunque sí sean los que más atención han recibido. En concreto, en el **Capítulo 2** se han mostrado otros modelos que son, en realidad, generalizaciones al modelo E-V básico y que aparecen con el propósito de modificar alguna de las hipótesis del mismo.

En el presente capítulo nuestro objetivo es el estudio de unos determinados modelos uniperiódicos de revisión de cartera que si bien modifican las hipótesis del modelo E-V básico nacen con una concepción distinta que les dota de personalidad propia y permite su análisis en un capítulo aparte.

En primer lugar, como ya se justificó en el Capítulo anterior, se estudiará el **modelo E-V con incorporación de costes de mantenimiento y revisión** de cartera. En los apartados **3.3.**, **3.4.** y **3.5.** se presentan, respectivamente, los **modelos de Baumol**, **Esperanza-Semivarianza** y **Esperanza-Entropía** cuya diferencia principal respecto al modelo E-V básico estriba en el tratamiento del riesgo asociado a la cartera. En el siguiente epígrafe (**3.6.**) se presenta el **modelo de Dominancia Estocástica**

[119] Véase la clasificación de los modelos uniperiódicos de revisión de cartera.

que se caracteriza por no reducir la distribución de probabilidad a dos o más momentos para determinar el conjunto eficiente. El modelo **Media Geométrica (3.7.)** se diferencia de los demás modelos en que no exige la eficiencia de la cartera óptima maximizando directamente la función de utilidad esperada. Pero, maximizar la utilidad esperada puede que no sea el objetivo perseguido por el inversor que puede buscar, ante todo, seguridad. Este objetivo es el considerado por los **modelos Safety First (3.8.)**. Finalmente, se estudiará la posibilidad de que el objetivo del inversor no sea único sino múltiple, supuesto que da lugar al **Modelo de Programación por Objetivos (3.9.)**.

3.2. MODELO ESPERANZA-VARIANZA CON INCORPORACION DE COSTES DE MANTENIMIENTO Y REVISION DE CARTERA

3.2.1. Introducción

En el modelo E-V básico se supuso que los costes asociados al mantenimiento y a la revisión de la cartera eran nulos. En realidad, pocos son los autores que tienen en cuenta dichos costes a pesar de que pueden repercutir negativamente sobre la rentabilidad obtenida por el inversor[120]. Por dicho motivo hemos creído conveniente tratar los costes de mantenimiento y de revisión como una nueva variable del modelo de revisión de cartera.

---

[120]Podría darse el caso que la rentabilidad extra obtenida al llevar a cabo la revisión no compensara el coste de llevar a cabo tal revisión.

Entenderemos por **costes de revisión** los asociados a la compra o venta de títulos en los que se incurre para realizar la transición desde una cartera que bajo las nuevas condiciones ya no es óptima hasta una nueva cartera que sí lo sea[121]. Además, consideraremos los costes en que incurre el inversor para mantener su cartera.

Supondremos que los pagos asociados al mantenimiento y revisión de la cartera se realizan siempre en el momento en que se produce la revisión. En concreto, en el momento t se pagan los gastos que conlleva la revisión efectuada en ese momento y los asociados al mantenimiento de la cartera durante el periodo que sigue.

La introducción de los costes de revisión en el modelo puede hacerse desde tres perspectivas distintas que son las que analizaremos a continuación.

3.2.2. Comparación entre los costes y el incremento esperado de la rentabilidad

Una forma de tener en cuenta los costes de revisión es la propuesta por **Smith**[122]:

> La rentabilidad esperada de una revisión es el incremento esperado de la rentabilidad de la cartera por

---

[121] Los costes asociados a la revisión de carteras pueden ser de los siguientes tipos:

- -costes derivados de la negociación por la compra y venta de los títulos (comisiones del broker)
- -impuestos sobre la ganancia extra de capital y
- -costes de análisis para la compra/venta de determinados títulos.

[122] **K.V. SMITH**, op. cit., 1967, pp.429-431.

el valor de la cartera en el momento de efectuar la revisión. El valor de la cartera es igual a la inversión original mas los dividendos acumulados y la apreciación de capital de los títulos que han formado la cartera.

Parece razonable afirmar que **la revisión deberá realizarse solo si la rentabilidad esperada de la revisión excede al coste de llevarla a cabo.**

Es decir, el inversor en el momento t-1 escogió una cartera *A* y la mantuvo durante un periodo y al final del mismo (en t) se plantea su revisión ante el cambio de expectativas sobre la rentabilidad de los títulos que ha tenido lugar. En función de estas nuevas expectativas, la *cartera óptima en t para el nuevo periodo es distinta a la mantenida* durante el periodo anterior (cartera B). El incremento esperado de la rentabilidad de la cartera como consecuencia de la revisión es la diferencia entre la rentabilidad esperada de la cartera B en el momento t+1 y la rentabilidad esperada de la antigua cartera A si se mantuviera sin revisar durante un nuevo periodo.

Por tanto, se revisará la cartera A, constituida en el momento t-1 y mantenida durante un periodo, siempre que

$$[E(\tilde{R}_{Bt+1}) - E(\tilde{R}_{At+1})]\cdot W_t >$$

$$> (\text{Costes derivados de la revisión})_t +$$

$$+ (\text{Costes derivados del mantenimiento})_t \qquad [1]$$

donde

•) $E(\tilde{R}_{Bt+1})$: rentabilidad esperada de la cartera B en el momento t+1 (al final del periodo durante el que se ha mantenido dicha cartera);

•) $E(\tilde{R}_{At+1})$: rentabilidad esperada de la cartera A en el punto decisorio t+1 suponiendo que dicha cartera, escogida en t-1 y mantenida hasta t, *se mantiene sin revisar durante un periodo más;*

•) W_t: valor de la cartera[123] (riqueza del inversor) al finalizar el periodo t (inicio del periodo t+1).

Smith llama a $[E(\tilde{R}_{Bt+1}) - E(\tilde{R}_{At+1})]\cdot W_t$ "rentabilidad esperada de la revisión".

Sea

•) c_{it}: número de títulos i comprados en el momento t

•) v_{it}: número de títulos i vendidos en el momento t

•) p_{it}: precio de mercado del título i en el momento t. Precio de compra ó de venta de un título i en el momento t.

si dividimos los costes de revisión en costes asociados a la compra y en asociados a la venta de títulos y los consideramos proporcionales al importe de dicha compra o venta podremos distinguir:

•) Costes asociados a la compra

$$S_{it} = k\cdot p_{it}\cdot c_{it} \qquad (0<K<1) \qquad [2]$$

•) Costes asociados a la venta

$$T_{it} = k'\cdot p_{it}\cdot v_{it} \qquad (0<K'<1) \qquad [3]$$

---

[123] Recordemos que $\tilde{W}_{t+1} = W_t\cdot(1 + \tilde{R}_{ct+1})$ y

$$\tilde{R}_{ct+1} = \sum_{i=1}^{N} X_{it}\cdot\tilde{r}_{it+1}$$

Por tanto, la cartera A será revisada y sustituida en el momento t por la cartera B siempre que

$$[E(\tilde{R}_{Bt+1}) - E(\tilde{R}_{At+1})]\cdot W_t > \sum_{i=1}^{N} (S_{it} + T_{it}) + G_t \qquad [4]$$

donde G_t son los gastos de mantenimiento pagados en el momento t (momento de la revisión).

Según esta propuesta, en el caso que la rentabilidad esperada de la revisión sea inferior al coste que supone la misma, dicha revisión no se llevará a cabo. Ello significa que el inversor está dispuesto a mantener una cartera ineficiente y abandonar el objetivo que se marcó en el momento de seleccionar la cartera óptima en el periodo t-1: escoger, de entre todas las carteras eficientes, aquélla que maximice la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera (ó utilidad esperada de su riqueza).

Esta objeción a la propuesta de **Smith** puede resolverse si los costes de la revisión se introducen en el modelo en el momento de seleccionar en t la nueva cartera óptima para el siguiente periodo. En esta línea se pueden incluir las dos popuestas siguientes.

3.2.3. Incorporación de los costes al presupuesto destinado a inversión

Una segunda propuesta para tener en consideración los costes que supone la revisión de la cartera es la realizada por **Chen, Jen** y **Zionts**[124] y por **Winkler** y **Barry**[125]. A diferencia de la propuesta

[124] **A.H.Y.CHEN-F.C.JEN-S.ZIONTS**, op. cit., 1971, pp.52-55.

[125] **R.L.WINKLER-C.B.BARRY**, "A Bayesian Model for Portfolio Selection and Revision", <u>J.F.</u>, 1971, pp.182-183.

anterior, los costes no se consideran después de haber seleccionado la nueva cartera óptima sino que se introducen en el modelo de revisión de carteras como **restricción presupuestaria**. Se considera que el importe destinado a pagar los costes de mantenimiento y revisión disminuye el presupuesto que puede destinarse para constituir una nueva cartera.

Para introducir los costes como restricción presupuestaria en el modelo de revisión de carteras necesitamos definir las siguientes variables:

•) N: *número de títulos entre los que puede escogerse para formar la cartera;*

•) T: número de periodos en los que se divide el horizonte temporal de posesión de una cartera. Al final de dicho horizonte, el inversor liquida su cartera;

•) t: punto decisorio en el que el inversor decide constituir por primera vez una cartera (t=0) ó revisar una cartera ya existente ($t \neq 0$); $t=0,1,\ldots,T-1$;

•) W_t: riqueza disponible para se invertida en t. Si $t = 0$, W_0 *representa dinero líquido;*

•) Y_{it}: cantidad invertida en el título i ($i=1,2,\ldots,N$) en el momento t. Si $t = 0$, Y_{i_0} es la cantidad invertida en cada título i en la primera cartera del inversor. Si $t \neq 0$, Y_{it} indica la cantidad invertida en cada título después de haber realizado la revisión correspondiente al momento t;

•) y_{it}: número de títulos i que forman parte de la cartera en el momento t después de haber realizado la revisión oportuna. Es decir, es el número de títulos i que se van a mantener en cartera durante el periodo t+1;

•) Y'_{it}: cantidad invertida en el título i en punto decisorio t antes de proceder a la revisión de la cartera[126];

•) d_{it}: dividendos percibidos en el momento t por un título i;

•) C_{it}: cantidad total destinada a la compra de títulos i en el momento t después de la revisión;

•) V_{it}: cantidad total obtenida por la venta de títulos i en el momento t después de la revisión; $V_{i_0} = 0$;

•) c_{it}: número de títulos i adquiridos en el momento t;

•) v_{it}: número de títulos i vendidos en el momento t, $(t \neq 0)$;

•) p_{it}: precio de mercado del título i en el momento t;

•) S_{it}: coste de la compra de títulos i en el momento t;

•) T_{it}: coste de la venta de títulos i en el momento t;

•) G_t: costes asociados al mantenimiento de la cartera durante el periodo t+1.

En función de las variables definidas se pueden deducir las siguientes relaciones:

[126] Si el precio del título i en el momento t (p_{it}) no coincide con el precio en el momento t-1, (p_{it-1}), la cantidad invertida en el título i en t, antes de la revisión, no coincidirá con la cantidad invertida en el momento t-1.

$$a)\ \tilde{W}_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{Y}'_{it+1} + \sum_{i=1}^{N} y_{it}\cdot\tilde{d}_{it+1} \qquad [5]$$

donde

$$\tilde{Y}'_{it+1} = y_{it}\cdot\tilde{p}_{it+1} \qquad [6]$$

De acuerdo con [6], $\tilde{W}_{t+1}$ en [5] es[127]

---

[127]Esta expresión es equivalente a $\tilde{W}_{t+1} = W_t\cdot(1 + \tilde{R}_{ct+1})$ que aparece en el apartado **1.2.5.** de esta Tesis.

Demostración:

$$\cdot)\ W_t = \sum_{i=1}^{N} Y_{it} = \sum_{i=1}^{N} y_{it}\cdot p_{it}$$

$$\cdot)\ \tilde{R}_{ct+1} = \sum_{i=1}^{N} X_{it}\cdot\tilde{r}_{it+1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_{it}}{W_t}\cdot\frac{\tilde{p}_{it+1} - p_{it} + \tilde{d}_{it+1}}{p_{it}} =$$

$$= \frac{1}{W_t}\cdot\sum_{i=1}^{N} y_{it}\cdot p_{it}\cdot\frac{\tilde{p}_{it+1} - p_{it} + \tilde{d}_{it+1}}{p_{it}} =$$

$$= \frac{1}{W_t}\cdot\sum_{i=1}^{N} y_{it}\cdot(\tilde{p}_{it+1} - p_{it} + \tilde{d}_{it+1})$$

Y, en definitiva,

$$\tilde{W}_{t+1} = W_t\cdot(1 + \tilde{R}_{ct+1}) = W_t + W_t\cdot\tilde{R}_{ct+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} y_{it}\cdot p_{it} + \sum_{i=1}^{N} y_{it}\cdot(\tilde{p}_{it+1} - p_{it} + \tilde{d}_{it+1}) =$$

$$\tilde{W}_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} y_{it} \cdot (\tilde{p}_{it+1} + \tilde{d}_{it+1}) \qquad [7]$$

b) $Y_{it} = Y'_{it-1} + C_{it} - V_{it}$ [8]

Si tenemos en cuenta que

$$Y_{it} = y_{it} \cdot p_{it} \qquad [9]$$

$$Y'_{it-1} = y_{it-1} \cdot p_{it} \qquad [10]$$

$$C_{it} = c_{it} \cdot p_{it} \qquad [11]$$

$$V_{it} = v_{it} \cdot p_{it} \qquad [12]$$

la expresión [8] equivale a

$$y_{it} = y_{it-1} + c_{it} - v_{it} \qquad [13]$$

También, sustituyendo [13] en [7] se obtiene la siguiente expresión de $\tilde{W}_{t+1}$

$$\tilde{W}_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} (y_{it-1} + c_{it} - v_{it}) \cdot (\tilde{p}_{it+1} + \tilde{d}_{it+1}) \qquad [14]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} y_{it} \cdot (\tilde{p}_{it+1} + \tilde{d}_{it+1})$$

c) Al igual que en la propuesta de **Smith**, los costes de revisión se consideran como la suma de los costes asociados a la compra de títulos y los asociados a la venta de títulos. Estos son proporcionales al importe destinado a la compra y a la cantidad obtenida por la venta, respectivamente:

$$S_{it} = k \cdot C_{it} = k \cdot c_{it} \cdot p_{it} \qquad (0<K<1) \qquad [15]$$

$$T_{it} = k' \cdot V_{it} = k' \cdot v_{it} \cdot p_{it} \qquad (0<K'<1) \qquad [16]$$

d) La ecuación presupuestaria que deberá cumplirse en t es[128]:

$$\sum_{i=1}^{N} (S_{it}+T_{it}+C_{it}) + G_t = \sum_{i=1}^{N} (V_{it}+y_{it-1} \cdot d_{it}) \qquad [17]$$

Y, teniendo en cuenta [15] y [16] la ecuación presupuestaria [17] se convierte en

$$\sum_{i=1}^{N} \left[(1-k) \cdot C_{it}-(1-k') \cdot V_{it}-y_{it-1} \cdot d_{it}\right] + G_t = 0 \qquad [18]$$

Dadas las anteriores relaciones, el modelo de revisión de carteras con incorporación de los costes de revisión y de mantenimiento que permite hallar la frontera eficiente en el momento t $(t=0,1,\ldots,T-1)$ es el siguiente:

---

[128] La hipótesis que se halla implícita en esta ecuación es la no existencia de endeudamiento; es decir, los fondos de que dispone el inversor proceden de los dividendos cobrados y de la venta de algunos títulos que constituyen su cartera. No se produce tampoco ninguna aportación extra de dinero a la cartera durante el tiempo que se mantiene en manos del inversor.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } V(\tilde{W}_{t+1}) \\ \text{sujeto a} \\ E(\tilde{W}_{t+1}) = E^* \\ \sum_{i=1}^{N} \left[(1-k)\cdot c_{it} - (1-k')\cdot v_{it} - y_{it-1}\cdot d_{it} \right] + G_t = 0 \\ y_{it} \geq 0 \\ c_{it},\ v_{it} \geq 0 \end{array}\right\}$$

donde $E(\tilde{W}_{t+1})$ y $V(\tilde{W}_{t+1})$ tienen igual significado que en el modelo E-V básico y la restricción $y_{it} \geq 0$ es equivalente a la de dicho modelo ($X_{it} \geq 0$).

Del conjunto de carteras eficientes resultante del sistema anterior, el inversor escoge aquélla que

$$\text{Max } E[U(\tilde{W}_{t+1})]$$

donde $\tilde{W}_{t+1}$ es, según [14],

$$\tilde{W}_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} (y_{it-1} + c_{it} - v_{it})\cdot(\tilde{p}_{it+1} + \tilde{d}_{it+1})$$

En el caso de ausencia de costes de revisión y de mantenimiento, este modelo coincide con el ya definido en el epígrafe **1.2.4.** de este trabajo.

Así, si los costes de revisión son nulos, la función objetivo no sufre ninguna modificación; por el contrario, la ecuación presupuestaria sí se ve afectada, resultando ser la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[c_{it} - v_{it} - y_{it-1} \cdot d_{it}\right] = 0 \qquad [19]$$

La igualdad [19] puede expresarse, teniendo en cuenta [11] y [12], del siguiente modo

$$\sum_{i=1}^{N} c_{it} \cdot p_{it} - \sum_{i=1}^{N} v_{it} \cdot p_{it} - \sum_{i=1}^{N} y_{it-1} \cdot d_{it} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_{it} \cdot p_{it} - \sum_{i=1}^{N} v_{it} \cdot p_{it} + \sum_{i=1}^{N} y_{it-1} \cdot p_{it} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} y_{it-1} \cdot p_{it} - \sum_{i=1}^{N} y_{it-1} \cdot d_{it} = 0 \qquad [20]$$

Agrupando términos en [20], se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} p_{it} \cdot (y_{it-1} + c_{it} - v_{it}) = \sum_{i=1}^{N} y_{it-1} \cdot (p_{it} + d_{it}) \qquad [21]$$

De [13] sabemos que $y_{it-1} + c_{it} - v_{it} = y_{it}$ y, por tanto, [21] es

$$\sum_{i=1}^{N} p_{it} \cdot y_{it} = \sum_{i=1}^{N} y_{it-1} \cdot (p_{it} + d_{it})$$

Finalmente, teniendo en cuenta [7] y [9]

$$\sum_{i=1}^{N} y_{it-1}\cdot(p_{it} + d_{it}) = W_t$$

$$p_{it}\cdot y_{it} = Y_{it}$$

se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} Y_{it} = W_t \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{i=1}^{N} X_{it} = 1 \qquad [23]$$

que es la restricción utilizada en el modelo E-V básico donde no se consdera ningún tipo de costes.

El modelo definido, aunque está planteado para resolver el problema de la revisión y los costes que ésta lleva consigo, puede también adaptarse para la selección de la cartera óptima en t=0 suponiendo que existen unos costes por la adquisición de los títulos que van a componer la cartera durante el primer periodo con el fin de maximizar la utilidad esperada de la riqueza al finalizar dicho periodo. En este caso, para t=0, se cumplen las siguientes relaciones:

a') En t=0 se cumple que $y_{i_0} = c_{i_0}$ $(v_{i_0} = 0)$ y ,por tanto,

$$W_1 = \sum_{i=1}^{N} c_{i_0}\cdot(p_{i_1} + d_{i_1}) \qquad [24]$$

b') Los costes de revisión de cartera, en t=0, solo estarán formados por los costes de adquisición de títulos, puesto que al no producirse venta de títulos los costes asociados a dicha venta son nulos:

$$S_{i_0} = K \cdot C_{i_0} = k \cdot c_{i_0} \cdot p_{i_0} \qquad [25]$$

$$T_{i_0} = 0$$

c') La ecuación presupuestaria es:

$$\sum_{i=1}^{N} (S_{i_0} + C_{i_0}) + G_0 = W_0$$

o, de forma equivalente,

$$(1 + k) \cdot \sum_{i=1}^{N} C_{i_0} + G_0 = W_0 \qquad [26]$$

Y en definitiva, el modelo de selección de las carteras eficientes con incorporación de los costes de adquisición de los títulos que constituirán la primera cartera es:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } V(\tilde{W}_1) \\ \text{sujeto a} & \\ & E(\tilde{W}_1) = E^* \\ & (1 + k) \cdot \sum_{i=1}^{N} C_{i_0} + G_0 = W_0 \\ & c_{i_0} \geq 0 \end{array}\right\}$$

Una vez obtenido el conjunto eficiente se trata de escoger la cartera óptima que maximiza $E[U(\tilde{W}_1)]$ donde,

$$\tilde{W}_1 = \sum_{i=1}^{N} c_{i_0} \cdot (p_{i_1} + d_{i_1})$$

Si además se considera que k=0 (ausencia de costes de adquisición) y $G_0=0$ se obtiene[129]:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Min } V(\tilde{W}_1) \\ \text{sujeto a} & \\ & E(\tilde{W}_1) = E^* \\ & \sum_{i=1}^{N} c_{i_0} = W_0 \\ & c_{i_0} \geq 0 \end{array}\right\}$$

Con respecto a la propuesta de **Smith** pueden destacarse la siguientes diferencias:

---

[129] La primera restricción del modelo equivale a $\sum_{i=1}^{N} Y_{i_0} = W_0$ que a su vez coincide con $\sum_{i=1}^{N} X_{i_0} = 1$.

La segunda restricción, $c_{i_0} \geq 0$, equivale a $Y_{i_0} \geq 0$ y, por tanto, a $X_{i_0} \geq 0$.

i) La revisión se realiza siempre puesto que los costes que supone se introducen como restricción presupuestaria y ello condiciona la nueva cartera óptima.

ii) El conjunto de carteras eficientes será diferente al hallado cuando los costes de la revisión no son tenidos en cuenta puesto que la cuantía destinada verdaderamente a inversión es menor en esta segunda propuesta.

3.2.4. Incorporación de los costes a la rentabilidad esperada de la cartera

Goldsmith[130], en el contexto del modelo E-V, tiene en cuenta los costes de la revisión para seleccionar la cartera óptima del nuevo periodo y lo hace disminuyendo la rentabilidad esperada de la cartera, a diferencia de la propuesta anterior en que se consideraban como una restricción presupuestaria.

Así, mientras en el modelo E-V básico, la rentabilidad esperada de la cartera en el momento t+1 era

$$E(\tilde{R}_{ct+1}) = \sum_{i=1}^{N} X_{it} \cdot E(\tilde{r}_{it+1})$$

[130]**D.GOLDSMITH**, "Transaction Costs and the Theory of Portfolio Selection", J.F., 1976, pp.1127-1139.

si se considera que los costes de la revisión provocan una disminución de la rentabilidad esperada, la nueva expresión es

$$E(\tilde{R}_{ct+1}) = \sum_{i=1}^{N} X_{it} \cdot E(\tilde{r}_{it+1}) - \frac{\sum_{i=1}^{N} (S_{it} + T_{it}) + G_t}{W_t}$$

donde S_{it}, T_{it} y G_t tienen el mismo significado que en las dos propuestas anteriores.

Una vez determinada la rentabilidad esperada, la búsqueda de la cartera óptima sigue los mismos pasos que en el modelo E-V básico: dada la rentabilidad esperada y la varianza asociada a cada cartera factible, se busca el conjunto de las carteras eficientes y a continuación, de todas ellas, se escoge la que maximiza la utilidad esperada del inversor.

Las diferencias entre esta propuesta y las dos anteriores son las siguientes:

i) El inversor, según esta tercera propuesta, mantiene siempre una cartera eficiente, circunstancia que no siempre tiene lugar en la primera propuesta al hacer depender la revisión de la comparación entre los costes derivados de la misma y la rentabilidad esperada extra obtendida de dicha revisión.

ii) La cartera escogida según esta tercera propuesta no coincidirá con el de las otras dos puesto que en cada caso los costes se consideran de forma distinta.

3.3. MODELO ESPERANZA-LIMITE INFERIOR DE CONFIANZA (MODELO DE BAUMOL)

Baumol[131] introduce en el modelo E-V básico, descrito en el apartado **1.2.**, una única diferencia que radica en el tratamiento del riesgo asociado a la cartera y que afecta a la determinación del conjunto (de la frontera) eficiente.

Recordemos que según el criterio E-V, la cartera A es preferida a la cartera B si sólo si:

a) $E(\tilde{R}_{cA}) \geq E(\tilde{R}_{cB})$

b) $V(\tilde{R}_{cA}) \leq V(\tilde{R}_{cB})$

exigiéndose una desigualdad estricta para, al menos, una de las desigualdades.

Según **Baumol** *la cartera A es preferida a la cartera B si y sólo si:*

a) $E(\tilde{R}_{cA}) \geq E(\tilde{R}_{cB})$

b) $L(\tilde{R}_{cA}) \geq L(\tilde{R}_{cB})$

exigiéndose una desigualdad estricta para, al menos, una de las desigualdades y siendo

$$L = E(\tilde{R}_c) - K \cdot \sqrt{V(\tilde{R}_c)}$$

[131]**W.J.BAUMOL**,"An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection", <u>M.S.</u>, 1963, pp.174-181.

"L" es el "límite inferior de confianza" y representa la mínima rentabilidad aceptada o la máxima pérdida aceptada. K (K>0) refleja la *actitud del inversor hacia el riesgo (coeficiente de aversión al riesgo)* y es el número máximo de desviaciones típicas por debajo de $E(\tilde{R}_c)$ que puede tolerar la cartera.

Baumol considera que al inversor le preocupa que la rentabilidad real no alcance la rentabilidad esperada y por ello propone como criterio de decisión $E(\tilde{R}_c) - K\sqrt{V(\tilde{R}_c)}$. No considera, por tanto, desviaciones positivas respecto a $E(\tilde{R}_c)$ puesto que éstas son siempre bien aceptadas por el inversor.

Este criterio permite establecer preferencias entre las carteras eficientes del modelo E-V básico sin conocer más detalles del inversor.

Según el criterio Esperanza-Límite inferior de confianza (E-L), una cartera es eficiente si:

i) No existe otra cartera con igual E y mayor L, ó
ii) No existe otra cartera con igual L y mayor E.

Baumol[132] demuestra que la frontera eficiente según el criterio E-L es un subconjunto de la frontera eficiente según el criterio E-V y a medida que $K \to \infty$, el primer conjunto se aproxima al segundo.

El autor del modelo propone que, para determinar la frontera eficiente según el criterio que él mismo define, se efectúen los dos pasos siguientes:

---

[132] **W.J.BAUMOL**, op. cit., 1963, p.178.

1) Determinar la frontera eficiente según el criterio E-V;
2) Eliminar del anterior conjunto aquellas carteras "dominadas".[133] según el criterio E-L.

El conjunto eficiente resultante de la aplicación de este criterio no es el mismo para todos los inversores puesto que la determinación de las carteras eficientes se basa en el límite inferior de confianza, K, que varía en función de cada inversor. Ello dificulta la determinación de la cartera óptima de un inversor particular ya que dicha cartera se encontrará en el conjunto eficiente de dicho inversor, distinto del de cualquier otro.

Además del problema de determinación del coeficiente de aversión al riesgo para cada inversor particular, se puede añadir otro, derivado de la aplicación del modelo al inicio de cada periodo en que se divide el horizonte temporal de posesión de la cartera por parte de un inversor determinado. En efecto, dentro del contexto de revisión de carteras tal como se entiende en la **Parte I** de esta Tesis , si el inversor se guía por el criterio E-L deberá determinar periodo a periodo el conjunto eficiente según el criterio E-V y eliminar del mismo las carteras dominadas según el criterio E-L. Ello dependerá de K, pero, además, K puede variar periodo a periodo puesto que al ser un coeficiente de aversión al riesgo y depender de la riqueza acumulada por el inversor, al modificarse esta riqueza, también se modificará. Ello incrementa los problemas de aplicación del modelo de **Baumol**.

[133] Una cartera es "dominada" según el criterio E-L si existe otra cartera con igual E y mayor L o con igual L y mayor E.