# LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

# Y SU APLICACION A LOS SEGUROS COLECTIVOS

Mª ANGELES PONS CARDELL

UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DIVISION DE CIENCIAS JURIDICAS ECONOMICAS Y SOCIALES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

# LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

# Y SU APLICACION A LOS SEGUROS COLECTIVOS

Tesis Doctoral presentada por:
Mª Angeles Pons Cardell
Director:
Dr. D. Antonio Alegre Escolano
Catedrático de Universidad.

Barcelona, Noviembre 1991.

Para la realización de esta Tesis Doctoral se ha podido disponer de la bibliografía adecuada gracias a las ayudas económicas concedidas en el Concurso de "Ajuts a Projectes de Recerca d'Investigadors Joves", en las convocatorias de 1988 y 1989, que convoca la Comissió Interdepartamental de Recerca Tecnològica, CIRIT, del Departament de la Presidència de la Generalitat de Catalunya, para adquirir material bibliográfico.

# AGRADECIMIENTOS

Aprovecho la ocasión que me brinda la presentación de este trabajo para expresar mi total agradecimiento al Dr. Antonio Alegre, ya que con su excelente dirección y apoyo ha hecho posible la realización de esta Tesis Doctoral.

Hago extensiva mi gratitud a los compañeros del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial, por su constante apoyo e interés, y en especial al Dr. Máximo Borrell, al Dr. José Mª Lecina y al Dr. Marcial Pérez, por los consejos y ayuda prestados a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

Mención especial merece mi esposo, Manel Enric, ya que sin su apoyo, estímulo y comprensión no me hubiese sido posible la realización de este trabajo.

También he de agradecer a mis padres, y al resto de mi familia y amigos, la paciencia y comprensión que han mostrado al soportar mis largas explicaciones sobre un tema una tanto árido para ellos.

# INDICE

## CAPITULO I

**INTRODUCCION**

# CAPITULO II

## MODELOS CLASICOS

CAPITULO III

**MODELOS DE REGRESION**

## CAPITULO IV

### MODELOS SEMILINEALES



## CAPITULO V

### MODELOS JERARQUICOS

## CAPITULO VI

## UNA APLICACION DE LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

CAPITULO VII

**CONCLUSIONES**

**APENDICE DE LAS FUNCIONES EN APL UTILIZADAS EN EL CAPITULO VI**

# CAPITULO I

# INTRODUCCION

## INDICE DEL CAPITULO

## I) PLANTEAMIENTOS Y OBJETIVOS

El objetivo de la presente Tesis Doctoral es dar una visión sistemática y completa, en la medida de lo posible, de los distintos modelos propuestos dentro de la Teoría de la Credibilidad para el cálculo de las primas de riesgo individuales, así como las relaciones existentes entre ellos, sus ventajas y sus inconvenientes.

El desarrollo de la Teoría de la Credibilidad se basa en agrupar las pólizas referentes a un mismo riesgo con una serie de características comunes en un colectivo, al cual le corresponde como a tal una determinada prima colectiva. Pero, a su vez, cada póliza tiene un conjunto de características específicas que la diferencian de las demás pólizas, características que en la mayoría de los casos son inobservables o de difícil cuantificación, pero que se deben tener en cuenta a la hora de calcular las primas de riesgo individuales.

La Teoría de la Credibilidad estima dichas primas basándose en la información pasada de la experiencia de reclamaciones, y las fórmulas de credibilidad obtenidas son una especie de medias ponderadas entre la prima pura colectiva del riesgo y la media empírica de las indemnizaciones pagadas. El factor de ponderación utilizado es conocido con el nombre de factor de credibilidad.

Para poder elaborar el presente trabajo un paso previo ha sido recopilar toda la información que sobre el tema se ha publicado hasta el momento según nuestro conocimiento, habiéndose utilizando la mayor parte de ella, sobre todo la que hace referencia a los orígenes de la Teoría de la Credibilidad, a los modelos credibilísticos y a la estimación de los parámetros estructurales.

El interés mostrado por el análisis de modelos, como los propuestos dentro de la Teoría de la Credibilidad, que permiten una discriminación entre los componentes de un colectivo para un mismo riesgo, es cada vez mayor.

Hasta hace poco, se intentaba determinar la prima media suficiente para el colectivo sin preocuparse excesivamente por la heterogeneidad existente, en cuanto al propio riesgo, entre los componentes del colectivo. La tendencia actual y futura parece que considera cada vez, con mayor amplitud, las características particulares de cada riesgo, por lo que resulta imprescindible desarrollar técnicas que permitan incorporar la experiencia de siniestralidad de los riesgos individuales, con objeto de adecuar las primas futuras a las características particulares de cada riesgo, que a priori no son conocidas, y que se intentan estimar mediante métodos bayesianos, incorporando la información resultante de la historia particular de cada riesgo.

La Teoría de la Credibilidad plantea una aproximación a la resolución de este problema, mediante el desarrollo de diversos modelos, los cuales han ido adecuando sus hipótesis a la realidad existente en cada momento en el proceso de riesgo incorporado al colectivo.

El presente trabajo empieza presentando una breve reseña histórica sobre los orígenes de la Teoría de la Credibilidad, los motivos que impulsaron su aparición y posterior desarrollo, así como, las distintas clasificaciones propuestas para ordenar las contribuciones hechas en dicha teoría, para pasar seguidamente al estudio de los modelos credibilísticos expuestos hasta hoy. A dichos modelos, los hemos dividido según nuestro punto de vista en cuatro grandes grupos, atendiendo a sus características básicas comunes, que son: Modelos Clásicos, Modelos de

Regresión, Modelos Semilineales y Modelos Jerárquicos, que se corresponden con los Capítulos II, III, IV y V respectivamente.

La clasificación que hemos propuesto no sigue estrictamente el orden cronológico de aparición de los modelos, ya que el objetivo de la misma es dar una visión de las distintas vertientes en que se ha desarrollado la Teoría de la Credibilidad, desde que BÜHLMANN, H. (1967) presentó su fórmula de credibilidad de distribución libre, basada en el criterio de los mínimos cuadrados.

En cuanto al análisis de los modelos credibilísticos nos hemos centrado principalmente en el estudio de las hipótesis asumidas en cada uno de ellos, así como en los problemas de estimación que se presentan tanto a la hora de obtener los estimadores ajustados de credibilidad como en la obtención de los estimadores de los parámetros estructurales. A su vez, hemos comparado los distintos modelos, y hemos indicado las relaciones y diferencias existentes entre ellos, en lo referente a las hipótesis asumidas y a las consecuencias que se desprenden de los mismos.

Una vez analizados los modelos de credibilidad, el siguiente paso ha sido aplicar algunos de los modelos expuestos, para prever la prima de riesgo que deberá pagar el próximo año una entidad bancaria, que consta de veinticinco sucursales y que ofrece a sus clientes, desde hace cuatro años, un seguro totalmente gratuito a cobrar en caso de muerte, que tiene contratado con una entidad aseguradora.

La entidad aseguradora dispone de información respecto al montante global de las indemnizaciones que se han ido pagando en cada uno de los cuatro años de vigencia del seguro, y puede acceder a la misma desglosada por sucursales y años de ocurrencia.

Al disponer cada sucursal de su propia experiencia de reclamaciones, la vamos a utilizar para estimar su prima de riesgo individual para el próximo año. Una vez estimadas las primas de riesgo individuales para cada una de las sucursales, la prima de riesgo total a pagar por parte de la entidad bancaria la obtendremos sumando las veinticinco primas de riesgo individuales.

A la entidad aseguradora le interesará aplicar aquel modelo de credibilidad que le proporcione la prima total a cobrar que mejor se adecue al caso estudiado, siendo éste el objetivo último de esta aplicación práctica.

Para prever las primas de riesgo individuales hemos aplicado el Modelo de BÜHLMANN, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, el Modelo Semilineal de De VYLDER, el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, el Modelo Jerárquico de JEWELL y el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Para obtener los resultados numéricos a través de los cuatro primeros modelos, hemos contado con la ayuda de las funciones elaboradas en el lenguaje de programción APL, por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987), denominadas BUHLMANN, BUHLMANNSTRA, SEMILINEAR y HACHEMEISTER respectivamente, mientras que para los dos últimos modelos hemos tenido que elaborar nuestras propias funciones, también en APL, que hemos denominado JEWELL y SUNDT, ya que no tenemos conocimiento de ningún programa informático a tal efecto.

No sólo nos hemos limitado a obtener los resultados numéricos, sino que en cada modelo hemos comentado sus ventajas e inconvenientes, así como las diferencias existentes entre ellos, y su adecuación o no al caso estudiado.

## II) INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

### 1.1.- Concepto y orígenes de la Teoría de la Credibilidad.

El término **Credibilidad** fue introducido en la ciencia actuarial como una medida de la creencia, de la importancia, que el actuario considera que debe ser dada a un cuerpo particular de experiencia con el objeto de elaborar una tarifa. Se considera que la experiencia de reclamaciones de una nueva clase de seguros es demasiado pequeña para ser totalmente creíble, y se piensa que la experiencia que se desarrollará en el futuro podría ser muy diferente a la que hasta ahora ha sido recogida. En estos casos, para el cálculo de la prima o tarifa, se tiene mayor confianza en los conocimientos adquiridos anteriormente, para tipos similares de seguros, que no en la propia experiencia.

En muchas ocasiones, disponemos de una experiencia de reclamaciones limitada e irregular para cada póliza, pero de una extensa experiencia para la cartera considerada ésta en su globalidad. La Teoría de la Credibilidad utiliza ambas clases de experiencias, la individual y la global, para ajustar la prima individual y prever su ocurrencia.

Definir qué es la Teoría de la Credibilidad resulta una tarea difícil, como se desprende del hecho de que los distintos tratadistas no hayan dado, propiamente, una definición de la misma. Así por ejemplo, HICKMAN, J. (1975), pp. 181, define la Teoría de la Credibilidad del siguiente modo:

> La Teoría de la Credibilidad es una colección de ideas concernientes al ajuste sistemático de las primas de seguros a medida que se obtiene la experiencia de reclamaciones.

NORBERG, R. (1979), pp. 181, considera que:

> La Teoría de la Credibilidad investiga ciertos principios y métodos para ajustar las primas a medida que la experiencia de las reclamaciones es obtenida.

Ambas definiciones son parecidas y permiten aproximarnos al concepto de Teoría de la Credibilidad, el cual se irá afianzando a medida que estudiemos la evolución que ha experimentado la misma desde su orígenes.

La Teoría de la Credibilidad surgió a principios del siglo XX y su formulación actual, en relación con los sistemas de ajustes de primas en el seguro de accidentes o seguro de compensación obrera, fue desarrollada en los años anteriores a la Primera Guerra Mundial[1].

Como herramienta práctica, la Credibilidad es en gran parte invención de los actuarios americanos, sin embargo, sus raíces provienen de la Teoría del Riesgo, y de la estimación estadística. La practicidad de la Teoría de la Credibilidad resulta evidente si se constata que los procedimientos credibilísticos empleados en las compañías aseguradoras precedieron a su justificación teórica, y que los recientes progresos en esta teoría han ampliado sus potenciales campos de aplicación.

---

1 Veánse más detalles en el apartado 1.2.1. del presente trabajo.

El motivo del desarrollo de la Teoría de la Credibilidad, en los años anteriores a la Primera Guerra Mundial, fue la presión que ejercieron algunas empresas, con un gran número de empleados y una baja siniestralidad, para que se les reconociera estos hechos en el importe de las primas a pagar.

WHITNEY, A. (1918) fue uno de los primeros autores que se ocupó del tema, y estableció que en los seguros de compensación obrera, en los seguros de grupo, en algunos seguros de responsabilidad, y posiblemente en otros pocos tipos de seguros, el riesgo asegurado proporciona una experiencia de sí mismo, esto es, las contingencias aseguradas ocurren con suficiente frecuencia como para proporcionar información útil.

Por ello, en los mencionados tipos de seguros, el problema de la tasación de la experiencia presenta la necesidad, desde el punto de vista de la equidad para el riesgo individual, de alcanzar un equilibrio entre la experiencia del grupo y la experiencia individual.

Para WHITNEY, A. (1918), el problema fundamental residía en la obtención de un criterio que permitiese dar, a cada uno de los dos tipos de experiencia, su peso adecuado en la determinación de la prima a pagar por cada individuo.

Dicho autor propuso estimar la prima pura verdadera, x, de un empleado a través de la siguiente combinación lineal convexa:

$$\hat{x} = p + Z \cdot (\hat{p} - p)$$

o lo que es lo mismo:

$$\hat{x} = Z \cdot \hat{p} + (1 - Z) \cdot p$$

donde:

$p$ : es el ratio de la prima calculada a escala industrial para una clase ocupacional particular.

$\hat{p}$ : es el ratio de la prima basado en la experiencia individual relativa a un empleado; en realidad ha de haber un ratio para cada empleado.

$Z$ : es el factor de ponderación, llamado posteriormente **factor de credibilidad** (credibility factor) o simplemente **credibilidad** (credibility), y mide la confianza o la importancia que se da a la experiencia individual en la determinación de la prima a pagar.

Dicha prima, $\hat{x}$, no es más que una media ponderada entre los valores extremos $p$ y $\hat{p}$. Las fórmulas del tipo indicado por WHITNEY se han denominado **fórmulas credibilísticas** (credibility formulas), y se han convertido en un elemento característico de la Teoría de la Credibilidad.

Los fundamentos teóricos de los procedimientos credibilísticos aparecieron tardíamente, tras largos años de empirismo. En efecto, LONGLEY-COOK, L. (1962) planteó la necesidad de un modelo matemático bien fundamentado para posibilitar el futuro y correcto desarrollo de la Teoría de la Credibilidad; y en 1965, en el coloquio de ASTIN, se expusieron sus verdaderos fundamentos teóricos, al presentar BÜLHMANN, H. su fórmula de credibilidad de **distribución libre**, basada en el criterio de los mínimos cuadrados.

El modelo de credibilidad presentado por BÜHLMANN, H. ha sido el punto de partida de la moderna Teoría de la Credibilidad, y a partir de él han aparecido una serie de modelos credibilísticos cada vez más desarrollados y perfeccionados.

## 1.2.- Clasificación de las contribuciones a la Teoría de la Credibilidad.

Cuando se intenta clasificar las contribuciones hechas a la Teoría de la Credibilidad empiezan las dificultades, debido a la existencia de ideas que utilizan el lenguaje de dicha teoría para el análisis de los datos de los seguros, pero no incluyen la distintiva **media ponderada** propia de los modelos credibilísticos. Ello ha sido motivado, en parte, al hecho de que el término "credibilidad" es un vocablo, en un primer momento, de carácter coloquial que admite matices diferentes (incluso en el ámbito asegurador) en su utilización.

Dado lo atractivo del nombre de credibilidad así como del concepto subyacente, no fue difícil que ya desde un comienzo quedara prendida la atención de los "prácticos de segundo nivel", dando lugar a un conjunto de fórmulas de carácter empírico que resolvían los problemas inmediatos. Pero toda ventaja lleva asociados sus inconvenientes, y en este caso éstos han sido un obstáculo en el intento de clasificar teóricamente las contribuciones hechas a la Teoría de la Credibilidad.

No existe una única clasificación dentro de la Teoría de la Credibilidad. Los autores que han tratado el tema han hecho distintas clasificaciones, partiendo de distintos puntos de vista. En la medida que alcanza nuestra información, existen las clasificaciones debidas a LONGLEY-COOK, L. (1962); TAYLOR, G. (1974); HICKMAN, J. (1975); JEWELL, W. (1976); De VYLDER, F. (1979) y NORBERG, R. (1979).

HICKMAN, J. (1975), pp. 184, clasifica las contribuciones hechas a la Teoría de la Credibilidad en base a la circunstancia de que el modelo de credibilidad propuesto considere los parámetros del proceso de reclamaciones como constantes o como variables aleatorias. Si los parámetros se contemplan como constantes que deben ser estimadas usando únicamente los datos relevantes de los seguros, el modelo es consistente con la visión de la **Teoría estadística tradicional**, es decir, con la inferencia tradicional. Por el contrario, si los parámetros que definen el proceso de reclamaciones son considerados como variables aleatorias generadas por un proceso estocástico que no puede ser completamente conocido, el modelo está acorde con la **aproximación bayesiana de los estadísticos.**

NORBERG, R. (1979), pp. 185-186, indica que la Teoría de la Credibilidad se bifurca en dos ramas, conocidas generalmente como: **Teoría de la Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas** y **Teoría de la Credibilidad de la Máxima Precisión.** Estas dos ramas tienen poco en común, ya que reflejan diferentes estadios en el desarrollo del pensamiento estadístico general. La más antigua de las dos es la primera, pero está más desarrollada la segunda, que puede considerarse como una rama de la Teoría de los Mínimos Cuadrados.

Aunque algunos autores la denominan, a la Teoría de la Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas, **Teoría de la Credibilidad Americana**, el nombre nos parece inadecuado porque la Teoría de la

Credibilidad de la Máxima Precisión también fue iniciada por los americanos. Los partidarios de tal denominación suelen llamar **Teoría de la Credibilidad Europea** a la Teoría de la Credibilidad de la Máxima Precisión, seguramente, como indica NORBERG, R. (1979), porque fue en gran medida clarificada y desarrollada por los actuarios suizos.

Haciendo referencia a su orden cronológico de aparición, ocasionalmente se las denomina también **Teoría clásica** y **Teoría moderna.** HICKMAN, J. (1975), por su parte, ha utilizado la voz **clásica** en oposición con **bayesiana** para distinguir las dos ramas de la Teoría de la Credibilidad.

La utilización de estos dos términos para clasificar las contribuciones hechas a la Teoría de la Credibilidad, no es aceptada por un gran número de autores, no sólo por su inadecuación sino también porque puede dar lugar a confusiones.

Hacia la mitad de este siglo, se produjo una separación entre los estadísticos bayesianos y los estadísticos clásicos (consideran que la probabilidad debe ser vista como una frecuencia relativa). La discusión mantenida entre los dos grupos de estadísticos, tuvo una repercusión clara en el ámbito actuarial, y en concreto en el campo de la Teoría de la Credibilidad, ya que sus raíces provienen de la estimación estadística.

A pesar de que hubo autores, como BAILEY, A. (1950), MAYERSON, A. (1964) y BÜHLMANN, H. (1975), que defendieron abiertamente la aproximación bayesiana, frente a otros autores como JOHNS, M. (1957) que se opusieron a la misma, no se puede decir que los actuarios se hayan dividido en dos congregaciones, una bayesiana y otra clásica. Se trata más bien de una separación aparente que es debida, en gran parte, a las distintas situaciones prácticas que tienen en mente, ya que según la situación en que se esté se adoptará una postura u otra.

Así, por ejemplo, si se considera el problema de la correcta tarificación de un riesgo individual, en un colectivo cuya estructura de riesgo viene determinada por una distribución estructural U, cualquier actuario aceptaría la interpretación de frecuencia de esta distribución. Nadie pensaría en sustituirla por otra distribución anterior, proveniente de su particular consideración. En otros casos, por el contrario, los juicios subjetivos no pueden evitarse; es más, debe confiarse en ellos para llevar a cabo la tarificación.

Este sería el caso en que el actuario no tiene a su disposición estadísticas colectivas, por ejemplo, cuando una compañía introduce una nueva clase de cobertura. En estos casos, deberá realizarse una valoración inicial del riesgo en base a las posibles fuentes de reclamaciones, y al conocimiento de datos de otros riesgos que sean parecidos al tratado. La prima que inicialmente resulta es una conjetura, dependiente del conocimiento del actuario y de su juicio, así como de su habilidad; más tarde, a medida que se disponga de experiencia, la prima se irá ajustando gradualmente.

El problema así descrito encaja perfectamente en el marco de trabajo de la estadística bayesiana, ya que para realizar un análisis bayesiano, el estadístico debe, como paso previo, plasmar su anterior visión y creencias personales en una distribución previa, y ningún actuario rechazaría este procedimiento de trabajo.

La Teoría de las Fluctuaciones Limitadas se suele presentar como una aproximación alternativa, basada en la línea de los estadísticos clásicos; sin embargo, los elementos subjetivos no desaparecen por escoger esta "filosofia", sino que siguen permaneciendo aunque disfrazados, enmascarados u ocultos; elementos tales como el nivel de confianza $\varepsilon$ y el parámetro k, que a continuación introduciremos[2].

Otro motivo por el cual la locución **Teoría Clásica de la Credibilidad** es inadecuada para hacer referencia a la Teoría de la Fluctuaciones Limitadas, es que la aproximación empírica de Bayes a la credibilidad, es también "clásica", en el sentido de que se basa inicialmente en la interpretación de la frecuencia de la probabilidad.

Nosotros vamos a seguir la clasificación propuesta por NORBERG, R. (1979), pues es la que consideramos más adecuada y coherente con el esquema de nuestro presente trabajo. Dentro de la línea de dicho autor, admitiremos que la Teoría de la Credibilidad se bifurca en dos ramas:

- Teoría de la Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas.
- Teoría de la Credibilidad de la Máxima Precisión:
    - •) Exacta.
    - •) Distribución libre.

### 1.2.1.- Teoría de la Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas.

La Teoría de la Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas fue sugerida en un artículo de MOWBRAY, A. (1914). Dicho autor, se planteó en el contexto de los seguros de compensación obrera, como también hizo WHITNEY, A. (1918), la cuestión de cuántos asegurados, n, cubiertos por el mismo contrato, son necesarios para tener una estimación completamente

[2] Veánse más detalles en el apartado 1.2.1. del presente trabajo.

creíble del ratio de la prima basada en la experiencia individual de un empleado, que pueda servir como prima para el próximo año.

Su respuesta al problema fue:

> Una prima pura segura es una para la cual, la probabilidad de que no difiera de la prima pura verdadera más que en un límite arbitrario, es alta.

Es decir, como indica NORBERG, R. (1979), pp. 186, para MOWBRAY, A. (1914), una prima pura es segura si no difiere de la verdadera más que en un límite arbitrariamente elegido, pero de acuerdo con las conveniencias del caso. Esto es, la prima pura observada, $\hat{p}$, es segura si:

$$P\left[\ |\hat{p} - p| \leq k \cdot p\ \right] \geq 1 - \varepsilon$$

o lo que es lo mismo:

$$P[-k \cdot p \leq \hat{p} - p \leq k \cdot p] \geq 1 - \varepsilon$$

siendo:

k: el límite arbitrario elegido

p: la prima pura verdadera, en este caso.

Dividiendo los miembros de la desigualdad que figuran en el interior del paréntesis por la desviación estándar de p, obtenemos:

$$P\left[\frac{-k\cdot p}{\sqrt{p\cdot(1-p)/n}} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p\cdot(1-p)/n}} \le \frac{k\cdot p}{\sqrt{p\cdot(1-p)/n}}\right] \ge 1-\varepsilon$$

Para un valor elevado de n, por ejemplo $n_\emptyset$, la variable:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p\cdot(1-p)/n_\emptyset}}$$

se distribuye aproximadamente como una normal tipificada, siendo:

$$C_{1-\varepsilon/2} = \frac{k\cdot p}{\sqrt{p\cdot(1-p)/n}}$$

de donde:

$$\boxed{n_\emptyset = \frac{C^2_{1-\varepsilon/2}}{k^2}\cdot\frac{1-p}{p}}$$

Puesto que, $n_\emptyset$ depende del valor desconocido, p, MOWBRAY, A. (1914), incluyó la estimación de p, $\hat{p}$, para hacer operativo el cálculo de $n_\emptyset$.

MOWBRAY, A. (1914) calculó, con un modelo matemático relativamente simple, el número de asegurados cubiertos por el mismo contrato requeridos para tener una estimación segura (creíble) de la prima pura verdadera.

La solución de MOWBRAY, A. fue interpretada como un estándar (una norma) para conseguir una **credibilidad completa o credibilidad total.** Si el número de asegurados n, verifica que $n \ge n_\emptyset$, entonces $\hat{p}$ puede ser usado como prima, y el valor del factor de credibilidad Z es igual a la unidad.

MOWBRAY, A. (1914) no fue el único actuario que se preocupó de hallar cuál era el tamaño necesario de una experiencia de seguros para poder alcanzar una credibilidad completa. En efecto, PERRYMAN, F. (1932) desarrolló también un criterio para alcanzar la credibilidad completa, basado en el número de reclamaciones esperadas.

PERRYMAN, F. (1932) consideró que el volumen de exposición requerido para alcanzar la credibilidad completa de la prima pura se obtenía multiplicando el número de reclamaciones requerido para la credibilidad de la frecuencia de accidentes por el factor

$$1 + \frac{S^2}{M^2}$$

siendo M y S la media y la desviación estándar, respectivamente, de la distribución del montante de reclamaciones.

Para llegar a esta conclusión asumió, siguiendo a otros autores, que al considerar un elevado número de reclamaciones:

a) La frecuencia de las reclamaciones se distribuía aproximadamente como una normal.

b) La distribución de frecuencia del coste medio de las reclamaciones era asimismo normal.

Años más tarde, MAYERSON, A.; JONES, D. y BOWERS, N. (1968) llegaron al mismo resultado que PERRYMAN, F. pero abandonaron la hipótesis de normalidad para la distribución del número de reclamaciones y del coste medio de las mismas, aunque admitieron: a) que la distribución del número de reclamaciones tenía media y varianza iguales, y b) que la prima pura se distribuía como una normal. Estos tres autores desarrollaron también un criterio para alcanzar la credibilidad completa, basado en los momentos de las distribuciones del número de reclamaciones y del coste de las mismas, pero sin necesidad de hipótesis alguna sobre la forma específica de las distribuciones.

Una vez que el problema de la credibilidad completa, propuesto por MOWBRAY, A. (1914), estuvo bien definido, se planteó otro: cómo actuar cuando el número de asegurados fuese demasiado pequeño, es decir, cuando $n \leq n_{\emptyset}$, siendo $n_{\emptyset}$ la norma para la credibilidad completa[3] (usando el lenguaje de MOWBRAY). A este problema se le conoce como el problema de la **credibilidad parcial**, ya que se trata de calcular el peso que se debe asignar a los nuevos datos frente a la experiencia de reclamaciones pasada, cuando tales datos no son lo suficientemente numerosos como para proporcionar una credibilidad completa.

Fueron los continuadores de MOWBRAY, A. y WHITNEY, A. quienes tuvieron la idea de atacar el problema de la determinación del factor de credibilidad Z de WHITNEY, A., siguiendo el espíritu de trabajo de MOWBRAY, A.; en efecto no compartieron la idea de WHITNEY, A. de considerar las características del riesgo para los distintos contratos como variables aleatorias, y por ello adoptaron la postura de MOWBRAY, A. de suponerlas como parámetros fijos. De tal manera esa idea se impuso, que considerar las características del riesgo de los distintos contratos englobados en una cartera de riesgos de la misma especie como parámetros fijos, se convirtió en un elemento típico de la Teoría de la Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas.

---

3 MOWBRAY, A. (1914) no pudo solucionar este problema ya que su artículo es anterior al de WHITNEY, A. (1918), en el cual se propuso la primera fórmula de credibilidad.

El problema de la credibilidad parcial dió lugar a múltiples discusiones entre los actuarios norteamericanos, publicadas en revistas especializadas, así como a un número elevado de fórmulas para la determinación del factor de credibilidad, algunas de ellas casi increíbles. Todas las fórmulas propuestas toman la credibilidad parcial como un valor comprendido entre 0 y 1.

WHITNEY, A. (1918), pp. 288, en el artículo que dio a conocer la fórmula típica de la Teoría de la Credibilidad, sugirió para el factor de credibilidad la expresión:

$$Z = \frac{n}{n + k}$$

donde n es una medida del volumen de los datos y, k es una constante a determinar en cada caso.

PERRYMAN, F. (1932) señala, que la mejor ponderación que se puede asignar a una observación es el recíproco de su desviación estándar.

Las fórmulas más difundidas que se propusieron para el factor de credibilidad, Z, son:

$$Z = \text{mínimo} \left\{ \left[ \frac{n}{n_0} \right]^{1/2}, 1 \right\}$$

$$Z = \text{mínimo} \left\{ \left[ \frac{n}{n_0} \right]^{2/3}, 1 \right\}$$

$$Z = \text{mínimo} \left\{ \frac{n}{n + x} \cdot \frac{n_0 + x}{n_0}, 1 \right\}$$

todas ellas de carácter puramente empírico.

La primera de estas tres fórmulas, por ejemplo, se puede justificar de la siguiente manera: El error que se comete al utilizar la fórmula de credibilidad propuesta por WHITNEY, A.:

$$\hat{x} = Z \cdot \hat{p} + (1 - Z) \cdot p$$

es $\hat{x} - x = Z \cdot (\hat{p} - x) + (1 - Z) \cdot (p - x)$

Este error se puede desglosar en dos términos, uno debido al error en la estimación basada en la experiencia individual, y el otro debido a la falta de especificación de la prima manual[4] (manual premium). Si se establece que el primero de estos dos términos esté limitado por $k \cdot x$, con un nivel de confianza $\varepsilon$ queda:

$$P[Z \cdot |\hat{p} - x| \leq k \cdot x] \geq 1 - \varepsilon$$

entonces la Z debe satisfacer que:

$$Z \leq \left[ \frac{n}{n_\emptyset} \right]^{1/2}$$

Al ser Z un valor comprendido entre $\emptyset$ y 1, se tiene que:

$$Z = \text{mínimo} \left\{ \left[ \frac{n}{n_\emptyset} \right]^{1/2}, 1 \right\}$$

[4] NORBERG, R. (1979), pp. 187, no especifica el significado de "manual premium". Nosotros entendemos, siguiendo a WHITNEY, A. (1918) quien propuso la fórmula de credibilidad anterior, que prima manual es la prima calculada a escala industrial o prima colectiva.

Como ya hemos dicho, aparecieron gran cantidad de fórmulas para la credibilidad parcial, y todas ellas tienen en común que recurren a consideraciones exógenas al modelo de trabajo.

La Teoría de la Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas pronto se vio superada ya que, desde sus inicios, se planteó la necesidad de formular un modelo matemático potente que permitiese desarrollar correctamente la Teoría de la Credibilidad, superando conceptualmente la fase de herramienta práctica.

### 1.2.2.- Teoría de la Credibilidad de la Máxima Precisión.

La Teoría de las Fluctuaciones Limitadas dio respuesta a muchos problemas planteados en aquellos momentos, aunque también dejó sin respuesta a otros. Esta teoría no fue diseñada para tarificar los riesgos individuales pertenecientes a un colectivo hetereogéneo, sino que se ocupó principalmente del problema de la tarificación de los riesgos englobados en un colectivo de riesgos homogéneos. Por otro lado, considera las características del riesgo para los distintos contratos como parámetros fijos, lo que da lugar a que las decisiones de tarificación sean consideradas como casos aislados, desconectadas unas de las otras. Ello plantea una evidente paradoja, los riesgos individuales son diferentes para llevar a cabo la tarificación, y a su vez son similares, ya que pertenecen a un colectivo de riesgos de la misma especie.

Esta paradoja fue eliminada gracias a la Teoría de la Credibilidad de la Máxima Precisión, al considerar las características de los riegos, $\theta_j$, como variables aleatorias.

Dentro de la Teoría de la Credibilidad de la Máxima Precisión nos encontramos con dos estadios de pensamiento diferentes que son:

•) La Teoría de la Credibilidad Exacta.

•) La Teoría de la Credibilidad de Distribución Libre.

### 1.2.2.1.- Credibilidad exacta.

Sea $X_{js}$ la cuantía que representa el total de reclamaciones en el período s para la póliza j-ésima. Si el parámetro de riesgo para la póliza j-ésima, $\theta_j$, fuese conocido, el problema de valorar la prima de riesgo individual, que simbolizaremos por $\mu(\theta_j)$, se solucionaría fácilmente, pues la prima pura verdadera, simbolizada por $m(\theta_j)$, sería el valor esperado de $\mu(\theta_j)$; esto es:

$$m(\theta_j) = E\left[\mu(\theta_j)/\theta_j\right].$$

Pero al ser $\theta_j$ desconocido, para el cálculo de la prima debe recurrise a otro procedimiento.

Cada riesgo individual, caracterizado por un valor de $\theta$, puede ser observado a través de un cierto número de variables aleatorias, $X_{js}$, siendo $s = 1,2,\ldots,t$ (que no son más que la experiencia de reclamaciones de los t años anteriores), un estimador que se propuso para la prima pura y que simbolizamos por $\hat{\hat{m}}_j$, fue:

$$\hat{\hat{m}}_j = E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}]$$

estimador que está basado en las observaciones de los t años anteriores.

La justificación de esta elección se encuentra en el hecho de que entre todas las funciones dependientes de las t observaciones anteriores es la que proporciona una menor desviación cuadrática esperada.

Resulta, por tanto, que:

$$\hat{\hat{m}}_j = E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}]$$

es la prima más precisa, la opción óptima para estimar la prima pura verdadera. Esta estimación óptima es conocida, por los actuarios, con el nombre de **estimador posterior de Bayes para $m(\theta_j)$**.

A pesar de ser la prima más precisa a nivel teórico, no tiene una fácil aplicación práctica, pues es necesario conocer la función de distribución condicionada del coste, $F(x/\theta)$ y la distribución a priori del parámetro de riesgo (función de la estructura de la cartera) $U(\theta)$, y aunque ambas sean conocidas, las matemáticas involucradas en su cálculo suelen ser bastante complicadas.

NORBERG, R. (1979), pp. 191-194, muestra tres ejemplos de la expresión que adopta la prima de máxima precisión, calculada según el método de la credibilidad exacta, según la distribución a priori del parámetro de riesgo que se considere.

En los casos en que se utilicen, ya sea una estructura uniforme o dicotómica, las fórmulas que aparecen son extremadamente complicadas, y poco operativas. Pero si se utiliza una estructura binomial/beta, la fórmula obtenida para la prima presenta una gran semejanza con la típica de los modelos de credibilidad, como bien indicó BAILEY, A. (1950). La importancia del resultado propuesto por BAILEY, A. radica en que simplifica en gran medida los análisis, debido a que su fórmula presenta una gran simplicidad, y a que la familia de la distribución beta es bastante amplia.

De manera que según el par $(F(x/\theta)\ ,\ U(\theta))$ que se adopte la prima exacta es prácticamente igual a la prima lineal. Este fenómeno es conocido con el nombre de credibilidad exacta.

### 1.2.2.2.- Teoría de la Credibilidad de distribución libre.

BÜHLMANN, H. (1967) no era de la opinión de que proporcionar la menor desviación cuadrática esperada fuese suficiente justificación para elegir al llamado estimador posterior de Bayes como estimador de la función buscada.

En su artículo, publicado en el Astin Bulletin en 1967, BÜHLMANN, H., pp. 205-207, establece que lo que interesa es que las primas sean expresables mediante una expresión lineal, de manera que la mejor aproximación lineal para:

$$E[\mu(\theta_j)/X_{j1},\ X_{j2},\dots,\ X_{jt}]$$

se encuentra seleccionando la mejor prima dentro de la clase restringida de las primas lineales:

$$a + b\cdot\bar{X}$$

donde:

$$\bar{X} = \sum_{s=1}^{t} \frac{X_{js}}{t}$$

BÜHLMANN, H. (1967) se planteó el siguiente problema: Hallar los valores de a y b tales que minimicen:

$$E[E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\ldots, X_{jt}] - a - b\cdot\bar{X}]^2]$$

y llegó a la conclusión que la prima lineal de máxima precisión era:

$$\boxed{\hat{m}_j = (1 - b)\cdot m + b\cdot\bar{X}}$$

donde:

$$m = E[\mu(\theta_j)]$$

$b$ = es el factor de credibilidad, que es un número comprendido entre 0 y 1, y que simbolizaremos por Z.

A $\hat{m}_j$ se le suele llamar **estimador credibilístico de la prima pura verdadera**, **estimador ajustado de credibilidad** o simplemente **estimador de credibilidad**.

Este resultado representó una gran ayuda para los actuarios en la formulación de los problemas credibilísticos, y a su vez, significó también un importante paso hacia adelante, ya que BÜHLMANN, H. (1967) no hizo supuestos acerca del tipo de función de distribución que gobierna el riesgo individual, ni necesitó introducir como dato una distribución a priori de la función estructural.

La idea de ajustar una línea recta a la prima de máxima precisión no fue una idea originaria de BÜHLMANN, H. (1967), pues ya fue concebida por BAILEY, A. (1950), quien la aplicó en un contexto muy especial. Sin embargo, la importancia de esta idea no fue reconocida por sus contemporáneos, posiblemente porque su artículo carecía de la claridad del de BÜHLMANN, H. (1967), y también porque BAILEY, A. profesó abiertamente la teoría bayesiana, que en aquella época no gozaba de buena consideración entre la casi totalidad de los estadísticos americanos. MAYERSON, A. (1964a) también mencionó la idea de ajustar una línea recta, pero no llegó a elaborarla.

Para muchos autores los fundamentos teóricos de la Teoría de la Credibilidad no fueron establecidos hasta que BÜHLMANN, H. presentó su **fórmula de credibilidad de distribución libre**, basada en el criterio de los mínimos cuadrados. Pero aunque BÜHLMANN, H. (1967) elaboró el modelo y obtuvo la prima de credibilidad, no abordó el problema de la estimación de los parámatros b y m. Esto lo hicieron otros autores, entre ellos cabe destacar a NOBERG, R. (1979), quien elaboró un análisis detallado sobre el proceso de estimación de los parámetros estructurales que aparecen en el Modelo BÜHLMANN desde el punto de vista empírico de Bayes[5].

---

[5] ROBBINS, H. (1955 y 1964) también ha utilizado la aproximación empírica bayesiana para la estimación de los parámetros, y JOHNS, M. (1957), por ejemplo, elaboró estimadores empíricos bayesianos no paramétricos.

A los estimadores empíricos de Bayes se les han hecho muchas objeciones, entre las que cabe destacar la gran cantidad de tiempo que se precisa para su cálculo; sin embargo, en la aproximación credibilística los parámetros implicados sólo dependen de los momentos de primero y segundo orden, y son fácilmente estimados.

El Modelo de BÜHLMANN representó una importante contribución a la ciencia actuarial, y a partir de él se desarrollaron una serie de modelos, cada vez más perfeccionados, que más tarde estudiaremos en profundidad.

## 1.3.- Análisis de los modelos credibilísticos.

El objetivo de este apartado consiste en dar una visión general de los distintos modelos de credibilidad, propuestos a partir de que BÜHLMANN, H. (1967) expusiera su fórmula de credibilidad de distribución libre.

La importancia del **MODELO DE BÜHLMANN** radica en su idea de seleccionar la mejor prima lineal dentro de la clase restringida de las primas lineales para estimar las primas de riesgo individuales, utilizando para ello el procedimiento de los mínimos cuadrados, y también porque ya no es necesario hacer ninguna hipótesis ni sobre la función de distribución que gobierna los riesgos individuales, ni sobre la función de distribución estructural a priori de los parámetros de riesgo.

Como ya hemos dicho, el Modelo de BÜHLMANN fue el primero que apareció, y las hipótesis que asumió son bastantes rígidas, independencia entre las pólizas y dentro de cada póliza, y homogeneidad en el tiempo, hipótesis, esta última, que en la mayoría de los casos cabe considerar como un defecto. Un prerrequisito para poder aplicar este modelo es tener una cartera formada por pólizas que tengan aproximadamente igual importancia o impacto dentro de la misma, y solamente puede usarse en el caso de trabajar con cantidades de reclamaciones deflactadas o sin tendencia.

Para superar la limitación que representó el Modelo de BÜHLMANN al ignorar la información que supone para el asegurador el impacto que tiene una póliza debido a su volumen, apareció el **MODELO DE BÜHLMANN-STRAUB** en 1970. Se trata, así mismo, de un modelo de tiempo homogéneo, como el de BÜHLMANN, pero con observaciones ponderadas, y mantiene también la hipótesis de independencia dentro y entre las pólizas, pero en este caso sólo las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo.

El Modelo de BÜHLMANN y el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, los hemos englobado bajo la denominación común de **Modelos Clásicos**, ya que han sido los primeros modelos de credibilidad que han aparecido como tales, y han servido como punto de referencia para el surgimiento de los demás modelos credibilísticos, los cuales se pueden dividir, según nuestro punto de vista, en tres grandes vertientes que hemos denominado:

•) Modelos de Regresión

•) Modelos Semilineales

•) Modelos Jerárquicos

La línea de los **Modelos de Regresión** fue iniciada por HACHEMEISTER, C. (1975), con su modelo conocido con el nombre de **MODELO DE REGRESION DE HACHEMEISTER**, que es una generalización del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB. En él se abandona la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, y se asume otra de tipo polinómica para las observaciones esperadas, pudiéndose de este modo trazar tendencias y tener en cuenta los efectos de la inflación, e incorpora además la técnica de regresión para el cálculo de los estimadores de credibilidad, aunque sigue considerando estimadores de tipo lineal.

Siguiendo la línea iniciada por HACHEMEISTER, C., en 1985 apareció un nuevo modelo, el **MODELO DE REGRESION NO-LINEAL DE De VYLDER**, que es, a su vez, una generalización del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER. En este modelo, la hipótesis de homogeneidad en el tiempo es abandonada completamente, y es reemplazada por otra no necesariamente de tipo polinómica, siendo el Modelo de Regresión Exponencial uno de los más utilizados dentro de los modelos de regresión no-lineales, y se muestra como más adecuado cuando se trabaja con datos que incluyen los efectos de la inflación.

Otra vertiente es la de los **Modelos Semilineales**, que se hallan dentro de la línea de los Modelos Clásicos, en cuanto a la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, y está formada por los dos modelos semilineales de De VYLDER, F. (1976), conocidos con el nombre de **MODELO SEMILINEAL DE De VYLDER** y **MODELO SEMILINEAL OPTIMO DE De VYLDER**. En estos dos modelos, una característica fundamental es que ya no se trabaja directamente con los datos de la experiencia de reclamaciones, sino con dichos datos transformados a través de unas funciones. Las primas de credibilidad siguen siendo lineales, pero no necesariamente respecto a las variables observables, experiencia de reclamaciones, sino respecto a las funciones antes citadas.

El **MODELO SEMILINEAL DE De VYLDER** es una generalización del Modelo de BÜHLMANN, en el cual existen unas funciones dadas, que como ya hemos dicho no son mas que transformaciones de las variables observables. Este modelo tiene la ventaja de que eligiendo cuidadosamente estas funciones pueden servir para detectar observaciones no deseadas, por ejemplo, por tratarse de datos atípicos, y al mismo tiempo dotan de mayor flexibilidad al modelo. Sin embargo, es imposible incorporar distintas precisiones para las observaciones, y no es apto para descubrir tendencias.

El **MODELO SEMILINEAL OPTIMO DE De VYLDER**, por su lado, es también una generalización del Modelo de BÜHLMANN, pero en este caso se considera una única función que no es dada, sino que uno de los objetivos de este modelo es precisamente la búsqueda de la función óptima.

Paralelamente a la aparición del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, JEWELL, W. (1975e), expuso su modelo denominado **MODELO JERARQUICO DE JEWELL**, dando lugar a la aparición de la vertiente que hemos denominado línea de los **Modelos Jerárquicos**. El Modelo Jerárquico de JEWELL es una extensión del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB pero distinta a la de HACHEMEISTER. La principal novedad de este modelo es que considera la cartera dividida en un cierto número de subcarteras o sectores, caracterizada cada una de ellas por un parámetro de riesgo, que describe las diferencias existentes entre las distintas subcarteras. Se trata de un modelo en el cual cada póliza tiene asociados dos parámetros de riesgo, uno en el nivel de las pólizas y el otro en el nivel de las subcarteras, y es por este motivo que dicho modelo es también conocido con el nombre de Modelo Jerárquico con Dos Niveles.

La credibilidad jerárquica no se ha quedado limitada a dos niveles, ya que TAYLOR, G. (1979), BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987), y GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990) han extendido el Modelo Jerárquico de JEWELL para el caso de considerar más de dos niveles dentro de una cartera, dando lugar al **MODELO JERARQUICO CON MULTIPLES NIVELES.**

Por otro lado, SUNDT, B. (1978, 1979a y 1980) generalizó el Modelo Jerárquico de JEWELL en otra dirección, abandonando la hipótesis de homogeneidad en el tiempo y reemplazándola por otra de tipo polinómica para las observaciones esperadas. Su modelo, conocido con el nombre de **MODELO DE REGRESION JERARQUICO DE SUNDT,** sigue siendo un modelo con parámetros aleatorios a dos niveles, de manera que cada póliza tiene asociados dos parámetros de riesgo, pudiéndose considerar como una combinación en un solo modelo del Modelo de Regresión de HAHCHEMEISTER y del Modelo Jerárquico de JEWELL.

Este modelo también ha sido generalizado para el caso de r niveles, dando lugar al **MODELO DE REGRESION JERARQUICO CON MULTIPLES NIVELES.** Entre los autores que han tratado este tema están TAYLOR, G. (1979); SUNDT, B. (1980) y NORBERG, R. (1986).

Resumiendo, los modelos que vamos a analizar son los siguientes, englobables en la escuela de pensamiento bayesiano:

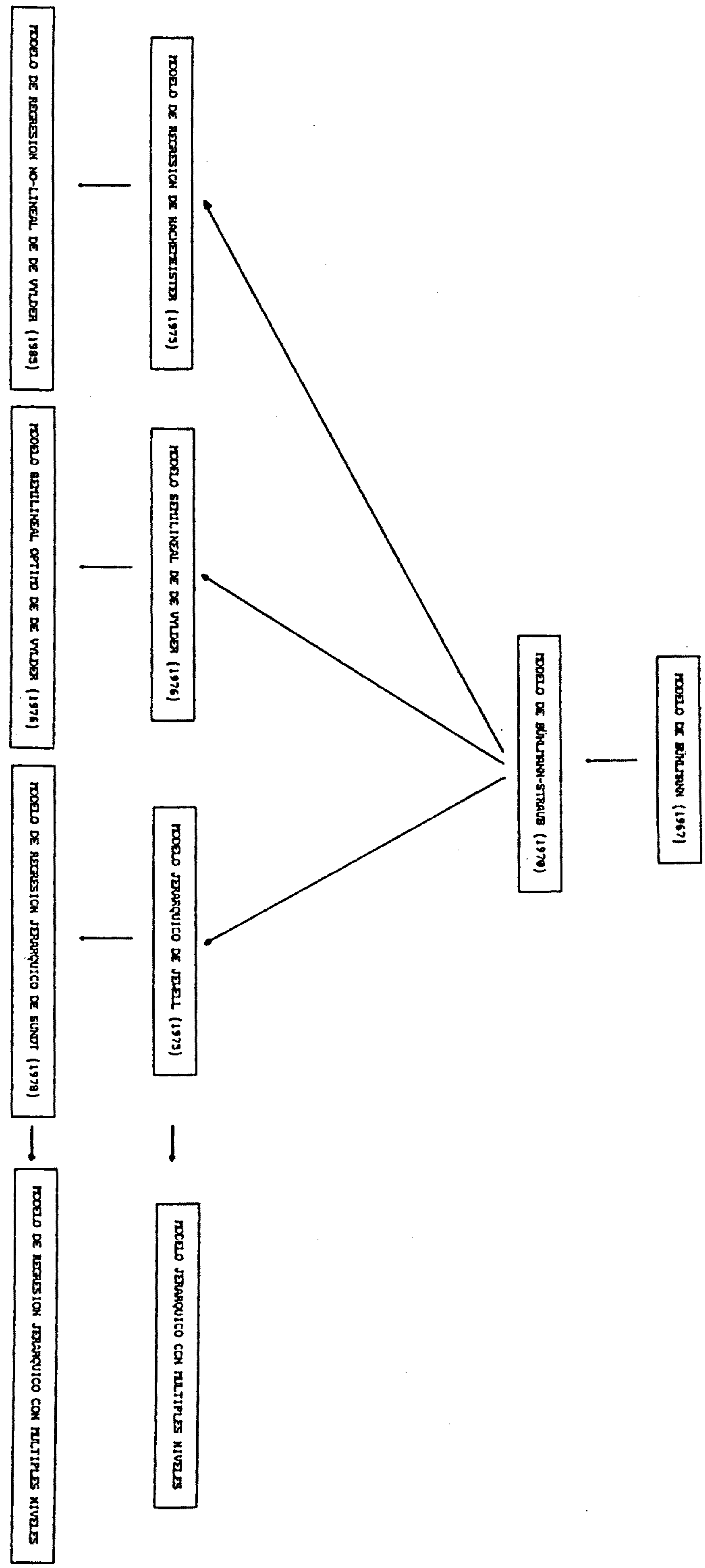
- Modelo de BÜHLMANN (1967).
- Modelo de BÜHLMANN-STRAUB (1970).
- Modelo de Regresión de HACHEMEISTER (1975).
- Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER (1985).
- Modelo Semilineal de De VYLDER (1976)

- Modelo Semilineal Optimo de De VYLDER (1976).
- Modelo Jerárquico de JEWELL (1975).
- Modelo Jerárquico a Múltiples Niveles (1979).
- Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT (1978).
- Modelo de Regresión Jerárquico a Múltiples Niveles (1979).

Estos diez modelos[6] son los que según alcanza nuestra información existen hasta el momento, siendo el Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER el último que se ha expuesto. Con posterioridad a esta fecha la bibliografía existente no es demasiado abundante, habiéndose dedicado los distintos autores a mejorar los modelos ya existentes, sobre todo los jerárquicos, al estudio y perfeccionamiento de los estimadores propuestos para los parámetros estructurales, así como a aplicar los modelos existentes a casos concretos, como al cálculo de las reservas IBNR o a los seguros de vida de grupos.

Un esquema clarificador de las relaciones existentes entre los distintos modelos puede ser el siguiente:

[6] Cabe señalar, que el año que aparece detrás de cada uno de los modelos es el primer año en que apareció dicho modelo.


MODELO DE BÜHLMANN (1967)
MODELO DE BÜHLMANN-STRAUB (1970)
MODELO DE REGRESION DE HACHEMEISTER (1975)
MODELO DE REGRESION NO-LINEAL DE DE VYLDER (1985)
MODELO SEMILINEAL DE DE VYLDER (1976)
MODELO SEMILINEAL OPTIMO DE DE VYLDER (1976)
MODELO JERARQUICO DE JEWELL (1975)
MODELO DE REGRESION JERARQUICO DE SUNDT (1979)
MODELO JERARQUICO CON MULTIPLES NIVELES
MODELO DE REGRESION JERARQUICO CON MULTIPLES NIVELES

En todos estos modelos cabe tener presente lo siguiente: Como sabemos, excepto en las situaciones en que la prima venga impuesta por la autoridad o venga reglamentada, la parte principal de la prima que se paga consiste en la prima de riesgo, y es por ello que en todos estos modelos sólo vamos a considerar dicha prima.

Por otro lado, cabe señalar que las estadísticas de reclamaciones suministran información respecto a la prima colectiva, pues dan las cantidades observadas como frecuencias medias acumuladas o datos similares para grupos de riesgo. Por lo tanto, la prima de riesgo no se puede obtener directamente de las tablas, pero juega un papel esencial ya que representa la prima teóricamente correcta para un riesgo individual. Esta prima, en muchos casos es desconocida excepto en dos casos:

- Si el colectivo estadístico es homogéneo.

- Si el riesgo puede ser observado durante un largo periodo de tiempo, siendo la experiencia de reclamaciones estacionaria.

Es necesario distinguir entre prima de riesgo y prima colectiva, y además tener en cuenta que la prima de riesgo individual sólo se puede determinar para un riesgo del cual se conoce la prima colectiva.

## 1.4.- La importancia de la Teoría de la Credibilidad.

Los actuarios tienen a su disposición una amplia gama de modelos credibilísticos, y debido también al crecimiento de la capacidad de cálculo, los problemas referentes a la fijación de primas, reservas y estrategias de dirección de riesgos están bajo un control mucho más estrecho que en un pasado reciente. Los problemas que subsisten están en el área del análisis y en el uso de los datos de los seguros para modificar sucesivamente las tarifas, como consecuencia del entorno dinámico.

La Teoría de la Credibilidad juega y jugará un papel fundamental en el análisis estadístico de los datos de las reclamaciones reales, para poder medir la validez de algunos de los modelos propuestos. Por otro lado, debe desarrollar sistemas estadísticos para facilitar el conocimiento del proceso de seguros y facilitar a su vez, el ajuste sistemático de las primas.

La aplicación de la Teoría de la Credibilidad en el ámbito actuarial ha experimentado una notable evolución a lo largo del tiempo. En primer lugar, se interesó por alcanzar la credibilidad total, para pasar a continuación, si así se puede decir, al problema de la credibilidad parcial. Ya desde los primeros momentos, se vio la necesidad de desarrollar un modelo matemático bien fundamentado para poder dotar a las herramientas credibilísticas, que hasta el momento habían sido eminentemente prácticas, de una consistencia teórica. En ello jugó un papel fundamental BÜHLMANN, H. (1967), al presentar su fórmula de credibilidad de distribución libre, basada en el criterio de los mínimos cuadrados. Ajustar una línea recta a la prima de máxima precisión no fue una idea originaria de BÜHLMANN, H., pero sí fue quien la dotó de consistencia teórica.

El Modelo de BÜHLMANN ha sido el punto de partida para el surgimiento de la mayor parte de los modelos credibilisticos aparecidos hasta el momento, y es por ello, que desde su aparición la bibliografía referente a este tema ha proliferado considerablemente, así como la dedicada a la estimación de los parámetros estructurales que aparecen en los distintos modelos, como puede apreciarse en la bibliografía que se encuentra al final del presente trabajo.

El primer autor español que se interesó por el tema de la Teoría de la Credibilidad es VEGAS PEREZ, A. (1968). Dicho autor, centró su atención en el tema **Fiabilidad-Credibilidad**, así como al modo de estimar la fiabilidad, y definió ambos conceptos del siguiente modo:

> **Fiabilidad** es la probabilidad de que un sistema funcione de forma correcta durante un cierto tiempo y en adecuadas condiciones de utilización, y **Credibilidad** es el nivel de información de la estadística de que se dispone para la obtención de la muestra, que es función creciente del tamaño muestral y asintóticamente igual a uno.

Como bien indica VEGAS MONTANER, A. (1981) en su tesis doctoral, si bien la credibilidad consiste en el grado de aceptabilidad de la nueva información, en términos de probabilidad, tenemos que la fiabilidad supone la probabilidad de que la estructura definida por la información anterior continue vigente. Como puede apreciarse, ambos conceptos en principio se contraponen, ya que el primero se refiere al valor de la nueva información, para modificar la situación anterior, y el segundo supone la negación de la nueva información. Pero por otro lado, se complementan, ya que no se puede hablar en términos absolutos, sino que se precisan situaciones intermedias, cuya ponderación depende de las probabilidades que midan los grados de credibilidad y fiabilidad.

A partir de los años setenta, los actuarios dedicados al tema credibilístico empezaron a mostrar cierto interés por la aplicación de los modelos aparecidos en el seno de la Teoría de la Credibilidad al campo de los seguros de vida de grupos. Ello representó un importante avance, desde nuestro punto de vista, ya que hasta aquellos momentos los modelos credibilísticos se habían aplicado, casi exclusivamente, en el campo de los seguros no-vida. Los autores que trataron dicho tema son: MARGOLIN, M. (1971); BOLNICK, H. (1974); FALK, W. Y BOLNICK, H. (1975); LETSCH, V. y ZOPPI, G. (1981); LOCKYER, J. (1983); GÜNTHER, D. (1984); NORBERG, R. (1987), aunque los verdaderos pioneros del tema fueron: WHITNEY, A. (1918); KEFFER, R. (1929); PERRYMAN, F. (1937); SMICK, J. (1939); JOHNSON, R. Jr (1941); BAILEY, A. (1945 y 1950).

La Teoría de la Credibilidad también ha sido aplicada dentro del ámbito actuarial en materias como:

- En los seguros privados de viajeros: BAILEY, A. y SIMON, LeR. (1959); SUNDT, B. (1986b y 1987b).

- En los seguros de hospitalización: KORMES, M. (1968).

- En el campo de las reservas IBNR: De VYLDER, F. (1978b y 1982); EEGEHEN, J. van (1981); HADIDI, N. (1985); ROBBIN, I. (1986); NORBERG, R. (1986); MACK, T. (1990); GOOVAERTS, M.; KASS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990), pp. 241-310.

- En el "large claim": DERRON, N. (1966); GISLER, A. (1980); BÜHLMANN, H., GISLER, A. y JEWELL, W. (1982); GOOVAERTS, M. y HOOGSTAD, W. (1987), pp. 99-104; HESSELAGER, O. y WITTING, T. (1988).

- En las primas según el método de ESSCHER: GERBER, H. (1980); GOOVAERTS, M. y HOOGSTAD, W. (1987), pp. 107-110; GOOVAERTS, M.; KASS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990), pp. 241-310.

- En el campo del cálculo de las provisiones: CABRAL, M. y GARCIA, J. (1974); PEREIRA, M. y ALFONSO, J. (1974a).

- En el campo del reaseguro: ROBERTSON, R. (1975).

lo que ha dado lugar a la aparición de ciertos modelos para el cálculo de las reservas IBNR y también para el cálculo de "large claims", que son aplicaciones concretas de los modelos de credibilidad que a continuación desarrollaremos.

Un hecho a tener en cuenta, es que la Teoría de la Credibilidad no sólo tiene aplicaciones en el ámbito actuarial[7], por ejemplo:

- JACKSON y HAMILTON (1968) trataron el tema de la valoración de los activos de los fondos de pensiones, y utilizaron unos métodos de valoración que combinan el coste inicial y el valor corriente del mercado.

- En el informe preliminar del mayo de 1974 del Comité de la Sociedad de Actuarios, se planteó el problema de la evaluación no garantizada de los cash-flows, como la política de dividendos con un índice de comparación de costes. Una de las propuestas presentadas fue la aplicación de un factor de credibilidad a los dividendos, antes de que el valor de cada dividendo se incluyera en el cálculo de un índice de comparación de costes.

- KIMELDORF y JONES (1967) desarrollaron un método de ajuste de la tabla de mortalidad, donde la media ponderada típica de la Teoría de la Credibilidad es usada explícitamente.

[7] Aún sin poder documentarlo nos consta que hay aplicaciones en la Teoría de las Decisiones Políticas.

# CAPITULO II

# MODELOS CLASICOS

## INDICE DEL CAPITULO

Dentro de los modelos de credibilidad clásicos hemos englobado al **MODELO DE BÜHLMANN** y al **MODELO DE BÜHLMANN-STRAUB**, ya que son los dos primeros modelos credibilísticos que aparecieron, el primero en 1967 y el segundo en 1970, y han sido el punto de partida de la moderna Teoría de la Credibilidad.

El objetivo de ambos modelos es estimar la prima de riesgo individual para una póliza concreta, seleccionando para ello la mejor prima dentro de la clase restringida de las primas lineales, y utilizando el procedimiento de los mínimos cuadrados.

Se trata de dos modelos de tiempo homogéneo pero el segundo con observaciones ponderadas, siendo este último elemento una de las novedades que introduce respecto al primero. En ambos modelos se asume la existencia de **independencia dentro y entre** las **pólizas**, y que las **observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo**. Sin embargo, en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB la varianza deja de ser constante y pasa a depender del periodo considerado vía los pesos o ponderaciones naturales introducidos.

En realidad, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB no es más que una sencilla extensión del Modelo de BÜHLMANN, que apareció para superar la limitación que suponía el Modelo de BÜHLMANN al ignorar la información que representa para el asegurador un contrato debido a su volumen.

Ambos modelos sólo son adecuados cuando se dispone de datos deflactados o sin tendencia, pero además para poder aplicar el Modelo de BÜHLMANN es necesario disponer de una cartera formada por pólizas que tengan más o menos igual importancia dentro de la misma.

## 2.1.- MODELO DE BÜHLMANN

Los fundamentos teóricos de la Teoría de la Credibilidad no fueron establecidos propiamente hasta el coloquio de Astin en 1965, donde BÜHLMANN, H. presentó su fórmula de credibilidad de distribución libre, que fue publicada en 1967, basada en el criterio de los mínimos cuadrados.

BÜHLMANN, H. (1967) replanteó el problema de la estimación de la prima de credibilidad del siguiente modo:

> **Deseamos que las primas sean lineales y propuso seleccionar la mejor prima dentro de la clase restringida de las primas lineales.** Para su obtención utilizó el procedimiento de los mínimos cuadrados, no siendo necesario hacer ninguna hipótesis ni sobre la función de distribución que gobierna los riesgos individuales ni sobre la función de distribución estructural a priori de los parámetros de riesgo.

Aunque las hipótesis que introdujo han sido objeto de crítica debido a su gran rigidez, **independencia dentro y entre las pólizas**, y **homogeneidad en el tiempo**, la formulación de su modelo fue un importante paso para el desarrollo de la Teoría de la Credibilidad, y ha dado lugar a la aparición de modelos cada vez más pefeccionados. Se trata de un modelo de **tiempo homogéneo con observaciones no ponderadas**, por lo que ignora la información que representa para el asegurador el impacto que tiene una póliza debido a su volumen, mostrándose apto cuando se trabaja con datos deflactados o sin tendencia.

### 2.1.1.- Variables relevantes.

El Modelo de BÜHLMANN puede ser descrito usando las siguientes variables:

- $\theta_j$ : Es el parámetro de riesgo para la póliza j-ésima. Es una variable estructural, que describe las características de riesgo del contrato j-ésimo, con $j = 1,2,\dots,k$, siendo k el número total de pólizas de la cartera. En la mayoría de los casos este parámetro es desconocido o inobservable, de ahí, que estos parámetros sean considerados como variables aleatorias desconocidas.

- $X_{js}$: Variable que indica la experiencia de reclamaciones para la póliza j-ésima en el periodo s-ésimo, donde $j = 1,2,\dots,k$ y $s = 1,2,\dots t$, siendo t el número de periodos observados para cada póliza. Es también una variable aleatoria, pero con realizaciones observables. En ocasiones se suele interpretar como el importe medio de las indemnizaciones por siniestro.

Un esquema clarificador puede ser el siguiente:

Póliza

| | | $j = 1$ | $j = 2$ | . . . | $j = k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variables de estructura | | $\theta_1$ | $\theta_2$ | . . . | $\theta_k$ |
| | 1 | $X_{11}$ | $X_{21}$ | . . . | $X_{k1}$ |
| | 2 | $X_{12}$ | $X_{22}$ | . . . | $X_{k2}$ |
| Variables observables | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . |
| Periodos | t | $X_{1t}$ | $X_{2t}$ | . . . | $X_{kt}$ |

donde la póliza j-ésima viene descrita por el siguiente vector:

$$(\theta_j, X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}) = (\theta_j, \vec{X}_j)$$

## 2.1.2.- Hipótesis del modelo.

Las hipótesis asumidas por BÜHLMANN, H. (1967) son dos:

B.1) Las pólizas $j = 1,2,\ldots,k$, es decir, los pares $(\theta_1, \vec{X}_1)$, $(\theta_2, \vec{X}_2), \ldots, (\theta_k, \vec{X}_k)$ son independientes y están idénticamente distribuidos.

B.2) Para cada contrato $j = 1,2,\dots,k$, y para un $\theta_j$ dado, las variables condicionadas: $X_{j1}/\theta_j$, $X_{j2}/\theta_j,\dots,$ $X_{jt}/\theta_j$ son independientes y están idénticamente distribuidas.

La primera hipótesis indica la existencia de **independencia entre los riesgos** (pólizas) y **equivalencia exterior** de los mismos o equidistribución de las variables de estructura, o dicho de otra manera, se está asumiendo que las pólizas son independientes entre sí, y a priori tanto da coger una póliza como otra.

La segunda hipótesis, por su parte, expresa la existencia de **independencia dentro de cada riesgo y homogeneidad en el tiempo.** Si hay homogeneidad en el tiempo, se está asumiendo implícitamente que no hay aprendizaje, que un individuo no mejora ni empeora a medida que va pasando el tiempo.

Así pues, una manera alternativa de expresar las hipótesis de este modelo es la siguiente:

B.1) Las pólizas $j = 1,2,\dots,k$, es decir, los pares $(\theta_1, \vec{X}_1)$, $(\theta_2, \vec{X}_2),\dots,$ $(\theta_k, \vec{X}_k)$ son independientes y están idénticamente distribuidos.

B.2) a) $E[X_{js}/\theta_j] = \mu(\theta_j) \qquad s \in \{1,2,\dots,t\}$

Las observaciones esperadas no depende del periodo en que estemos, debido a la existencia de homogeneidad en el tiempo.

b) $\mathrm{Cov}[\vec{X}_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j)\cdot I \qquad s \in \{1,2,\ldots,t\}$

donde I es la matriz identidad, de dimensión $(t,t)$, $\sigma^2(\theta_j) = \mathrm{Var}[X_j/\theta_j]$ y $\vec{X}_j$ es un vector de dimensión $(t,1)$, siendo $\vec{X}_j = (X_{j1}, X_{j2},\ldots, X_{jt})'$.

## 2.1.3.- Estimación de la prima de riesgo individual.

El objetivo de BÜHLMANN, H. (1967) fue estimar de la mejor manera posible la prima de riesgo individual $\mu(\theta_j)$. En un primer momento se intento estimar dicha prima aproximándola mediante una función:

$$g(X_{j1}, X_{j2},\ldots, X_{jt})$$

que sólo depende de la experiencia de reclamaciones, y se usó para medir la calidad del ajuste la desviación cuadrática esperada. De modo que se debía determinar g como el mínimo de la siguiente expresión:

$$l[g] = E_{\mathrm{Total}}\left[[\mu(\theta_j) - g(X_{j1}, X_{j2},\ldots, X_{jt})]^2\right]$$

y se llegó a la conclusión de que la función óptima g, usando el criterio de los mínimos cuadrados, era:

$$g(X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}) = E\left[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}\right]$$

Esta función **g** es conocida por los estadísticos como el **estimador posterior de Bayes para $\mu(\theta_j)$.**

Este resultado tiene escasa aplicación práctica, como ya hemos indicado anteriormente, puesto que para su cálculo es necesario conocer la función de distribución $F(x/\theta)$ y la función de estructura $U(\theta)$, y aún en el caso de que ambas sean conocidas, que no es lo usual, los desarrollos matemáticos involucrados en el cálculo suelen ser en general, como poco, demasiado complejos y de difícil solución analítica.

BÜHLMANN, H. (1967) solucionó en gran parte este problema, y propuso lo siguiente: Queremos que nuestras **primas sean lineales**, y propuso seleccionar la mejor prima dentro de la clase restringida de primas lineales de la forma:

$$c_{\emptyset} + \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js}$$

BÜHLMANN, H. (1967), pp. 206, estableció el siguiente LEMA:

Si dados $c_{j\emptyset}, c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{jt}$ tenemos que:

$$E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j\emptyset} - \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js}\right]^2\right] \leq E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c'_{j\emptyset} - \sum_{s=1}^{t} c'_{js} \cdot X_{js}\right]^2\right]$$

para $c'_{j\emptyset}, c'_{j1}, c'_{j2}, \ldots, c'_{jt}$ arbitrarios, entonces:

$$c_{\emptyset} + \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js}$$

es también la mejor aproximación lineal para $E\left[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}\right]$.

<u>**DEMOSTRACION:**</u>

$$E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j\emptyset} - \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js}\right]^2\right] =$$

$$= E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}] +\right.\right.$$

$$\left.\left. + E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}] - (c_{j\emptyset} + \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js})\right]^2\right] =$$

$$= E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}]\right]^2\right] +$$

$$+ E_{Total}\left[\left[E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}] - (c_{j\emptyset} + \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js})\right]^2\right] -$$

$$- 2 \cdot E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}]\right] \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \left[E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}] - (c_{j\emptyset} + \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js})\right]\right]$$

Como:

$$E[\mu(\theta_j)] = E\left[E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]\right]$$

resulta que:

$$E\left[\mu(\theta_j) - E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]\right] = 0$$

siendo:

$$E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right] =$$

$$= E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]\right]^2\right] +$$

$$+ E_{Total}\left[\left[E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}] - (c_{j0} + \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js})\right]^2\right]$$

El primer sumando no depende de los coeficientes $c_{j1}$, $c_{j2},\dots,$ $c_{jt}$, de lo que se desprende que la parte izquierda y derecha de la igualdad están minimizadas por los mismos coeficientes $c_{j1}$, $c_{j2},\dots,$ $c_{jt}$, quedando demostrado que si:

$$c_{j0} + \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}$$

es la mejor aproximación lineal para $\mu(\theta_j)$, también lo será para $E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]$.

Así pues, la mejor aproximación lineal para $E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]$ se encuentra hallando los valores de los coeficientes $c_{j0}, c_{j1},\dots, c_{jt}$ tales que minimizan:

$$l[c_{j0}, c_{j1},\dots, c_{jt}] = E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right]$$

de acuerdo con el criterio de la máxima precisión mínimo-cuadrática.

El estimador así calculado se denomina **estimador de credibilidad para la prima pura verdadera** o simplemente **estimador de credibilidad**, y vamos a simbolizarlo por $\hat{\mu}(\theta_j)$.

### 2.1.3.1.- Notación previa.

Antes de hallar la solución al problema de minimización, introduciremos la siguiente notación previa:

•) $\mu(\theta_j) = E[X_{js}/\theta_j]$. Es la prima de riesgo individual para una póliza concreta, la j-ésima, es decir, es la cantidad esperada de reclamaciones individuales, que no es más que la esperanza condicionada a un parámetro de riesgo fijo.

•) $m = E_{Total}[X_{js}] = E[\mu(\theta_j)]$. Denota la cantidad media esperada de reclamaciones para el conjunto de la cartera. Es la prima de riesgo colectiva, que no es más que el valor esperado de todas las primas de riesgo individuales.

•) $a = Var[E[X_{js}/\theta_j]] = Var[\mu(\theta_j)]$. Mide la varianza o dispersión existente entre las primas de riesgo individuales. Es un indicador de la heterogeneidad de la cartera, medida a través de la cantidad de reclamaciones individuales esperadas.

•) $S^2 = E[Var[X_{js}/\theta_j]] = E[\sigma^2(\theta_j)]$. Es el valor esperado de la dispersión total de los datos de reclamaciones de nuestra cartera, ya que $Var[X_{js}/\theta_j]$ refleja la varianza de la variable experiencia de reclamaciones para una póliza concreta en el tiempo.

Por otro lado tenemos:

•) $Cov[X_{jr}, X_{js}] = a + \delta_{rs} \cdot S^2$

•) $Cov[\mu(\theta_j), X_{js}] = a$

donde $\delta_{rs}$ es el símbolo de Kronecker, siendo:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s \\ 1 & \text{si } r = s \end{cases}$$

Estas dos últimas igualdades son fáciles de demostrar.

En primer lugar, deseamos comprobar que:

$$Cov[X_{jr}, X_{js}] = a + \delta_{rs} \cdot S^2$$

Para ello partimos de la fórmula general de la covarianza para el caso de que $r \neq s$:

$$Cov[X_{jr}, X_{js}] = E[Cov[X_{jr}, X_{js}/\theta_j]] + Cov[\mu(\theta_j), \mu(\theta_j)]$$

Por la segunda hipótesis de este modelo, sabemos que $X_{jr}/\theta_j$ y $X_{js}/\theta_j$ son variables aleatorias independientes, por lo tanto, la covarianza:

$$Cov[X_{jr}, X_{js}/\theta_j] = 0$$

Sustituyendo, resulta que:

$$Cov[X_{jr}, X_{js}] = 0 + Var[\mu(\theta_j)] = a$$

En el caso de que $r = s$, tenemos:

$$Cov[X_{jr}, X_{js}] = Var[X_{js}]$$

y si aplicamos la definición de varianza:

$$Var[X_{js}] = E[Var[X_{js}/\theta_j]] + Var[E[X_{js}/\theta_j]] = S^2 + a$$

quedando, por lo tanto, demostrado que :

$$\boxed{Cov[X_{jr}, X_{js}] = a + \delta_{rs} \cdot S^2}$$

Para comprobar que:

$$Cov[\mu(\theta_j),\ X_{js}] = a$$

aplicamos de nuevo la fórmula general de la covarianza:

$$Cov[\mu(\theta_j),\ X_{js}] = E[Cov[\mu(\theta_j),\ X_{js}/\theta_j]] +$$

$$+ Cov[E[\mu(\theta_j)/\theta_j],\ E[X_{js}/\theta_j]]$$

Debido a la hipótesis de independencia asumida en el modelo y que $\mu(\theta_j)$ es una constante respecto a un $\theta_j$ dado, resulta que:

$$Cov[\mu(\theta_j),\ X_{js}/\theta_j] = 0 \qquad y \qquad E[\mu(\theta_j)/\theta_j] = \mu(\theta_j)$$

siendo:

$$Cov[\mu(\theta_j),\ X_{js}] = 0 + Cov[\mu(\theta_j),\ \mu(\theta_j)] = Var[\mu(\theta_j)] = a$$

### 2.1.3.2.- Cálculo de la mejor aproximación lineal para la prima de riesgo individual.

Una vez introducida la notación previa, pasemos a resolver la cuestión que nos ocupa. Recordemos que estamos interesados en hallar la mejor aproximación lineal para $E[\mu(\theta_j)/X_{j1},\ X_{j2},\ldots,\ X_{jt}]$, que como hemos visto, se encuentra hallando los valores de $c_{j0},\ c_{j1},\ldots,\ c_{jt}$ tales que minimizan:

$$l[c_{j0}, c_{j1}, \ldots, c_{jt}] = E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right]$$

Para ello, primero derivamos respecto a los t+1 coeficientes que tenemos e igualamos a cero:

$$\frac{dl}{dc_{j0}} = E_{Total}\left[2\cdot\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]\cdot(-1)\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dl}{dc_{jr}} = E_{Total}\left[2\cdot\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]\cdot(-X_{jr})\right] = 0 \qquad r = 1,2,\ldots,t \quad (2)$$

obteniendo un sistema de ecuaciones homogéneo de t+1 ecuaciones con t+1 incógnitas, que también se puede escribir:

$$E_{Total}\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right] = 0 \qquad (3)$$

$$E_{Total}\left[X_{jr}\cdot\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]\right] = 0 \qquad (4)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

Multiplicando la ecuación (3) por $E[X_{jr}]$, y restándosela a la ecuación (4) sucesivamente para $r = 1,2,\ldots,t$, nos queda:

$$E\left[X_{jr}\cdot\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]\right] -$$

$$- E[X_{jr}]\cdot E\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right] = 0 \qquad (5)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

Como la esperanza de una suma es la suma de esperanzas, operando resulta:

$$E\left[X_{jr}\cdot\mu(\theta_j) - X_{jr}\cdot c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\cdot X_{jr}\right] - E[X_{jr}]\cdot E[\mu(\theta_j)] +$$

$$+ c_{j0}\cdot E[X_{jr}] + E[X_{jr}]\cdot E\left[\sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right] =$$

$$= E[X_{jr}\cdot\mu(\theta_j)] - c_{j0}\cdot E[X_{jr}] - E\left[\sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\cdot X_{jr}\right] -$$

$$- E[X_{jr}]\cdot E[\mu(\theta_j)] + c_{j0}\cdot E[X_{jr}] + E[X_{jr}]\cdot E\left[\sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right] =$$

$$= E[X_{jr}\cdot\mu(\theta_j)] - E[X_{jr}]\cdot E[\mu(\theta_j)] - E\left[X_{jr}\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right] +$$

$$+ E[X_{jr}]\cdot E\left[\sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right] =$$

$$= \mathrm{Cov}[\mu(\theta_j),\ X_{jr}] - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot \mathrm{Cov}[X_{jr},\ X_{js}] = 0 \qquad (6)$$

Verificándose, por lo tanto, que:

$$\mathrm{Cov}[\mu(\theta_j),\ X_{jr}] = \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot \mathrm{Cov}[X_{jr},\ X_{js}] \qquad (7)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

Si volvemos al sistema de ecuaciones inicial, y hacemos algunos reajustes en la ecuación (3), al ser la esperanza de una suma, suma de esperanzas, nos queda:

$$E[\mu(\theta_j)] - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot E[X_{js}] = 0 \qquad (8)$$

pero a su vez, como $m = E[\mu(\theta_j)] = E[X_{js}]$:

$$m - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot m = 0$$

siendo:

$$\boxed{m = c_{j0} + m\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js}} \qquad (9)$$

Por otro lado, en (7) hemos obtenido que:

$$Cov[\mu(\theta_j),\ X_{jr}] = \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot Cov[X_{jr},\ X_{js}] \qquad (7)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

Si sustituimos ambas covarianzas por su valor:

$$Cov[\mu(\theta_j),\ X_{jr}] = a \quad \text{y} \quad Cov[X_{jr},\ X_{js}] = a + \delta_{rs}\cdot S^2$$

obtenemos:

$$a = \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot(a + \delta_{rs}\cdot S^2) \qquad (10)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

o lo que es lo mismo:

$$a = a\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js} + S^2\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot\delta_{rs} \qquad (11)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

Pero como $\delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s \\ 1 & \text{si } r = s \end{cases}$ resulta que:

$$\sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot\delta_{rs} = c_{jr}$$

siendo:

$$a = S^2\cdot c_{jr} + a\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js} \qquad (12)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

De manera que nuestro sistema de ecuaciones inicial de t+1 ecuaciones podemos escribirlo también del siguiente modo:

$$\begin{cases} c_{j0} + m \cdot \sum_{s=1}^{t} c_{js} = m & (9) \\ S^2 \cdot c_{jr} + a \cdot \sum_{s=1}^{t} c_{js} = a \,, \quad \text{para } r = 1,2,\ldots,t & (12) \end{cases}$$

Observemos que este sistema de ecuaciones es simétrico respecto a los coeficientes $c_{j1}$, $c_{j2}$,..., $c_{jt}$, lo que implica:

$$c_{j1} = c_{j2} = \ldots = c_{jt} = c$$

siendo:

$$\begin{cases} c_{j0} + m \cdot t \cdot c = m & (13) \\ S^2 \cdot c + a \cdot t \cdot c = a & (14) \end{cases}$$

De la ecuación (14) podemos despejar **c**:

$$c = \frac{a}{S^2 + a \cdot t} \tag{15}$$

y si definimos una nueva variable Z como:

$$\boxed{Z = \frac{a \cdot t}{S^2 + a \cdot t}} \tag{16}$$

podemos escribir la constante **c** del siguiente modo:

$$\boxed{c = \frac{a}{S^2 + a\cdot t} = \frac{Z}{t}} \tag{17}$$

Por otro lado, de la ecuación (13) resulta que:

$$c_{j\emptyset} = m\cdot(1 - t\cdot c) \tag{18}$$

pero como $c = \frac{Z}{t}$ , a su vez $c_{j\emptyset}$ se puede escribir como:

$$c_{j\emptyset} = m\cdot\left[1 - t\cdot\frac{Z}{t}\right]$$

o lo que es lo mismo:

$$\boxed{c_{j\emptyset} = m\cdot[1 - Z]} \tag{19}$$

De manera que los valores de los coeficientes $c_{j\emptyset}, c_{j1}, \ldots, c_{jt}$ que minimizan nuestra función $l(c_{j\emptyset}, c_{j1}, \ldots, c_{jt})$ son:

$$c_{j\emptyset} = [1 - Z]\cdot m$$

$$c_{j1} = c_{j2} = \ldots = c_{jt} = c = \frac{Z}{t}$$

y en consecuencia, la mejor aproximación lineal para:

$$E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}]$$

o lo que es lo mismo, el **estimador ajustado de credibilidad para $\mu(\theta_j)$** es:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = c_{j0} + \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js} = c_{j0} + c \cdot \sum_{s=1}^{t} X_{js}$$

Sustituyendo $c_{j0}$ y $c$ por sus respectivos valores, dados en (19) y (17), resulta que:

$$\boxed{\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z] \cdot m + Z \cdot \bar{X}} \qquad (20)$$

donde:

$$Z = \frac{a \cdot t}{S^2 + a \cdot t}$$

$$\bar{X} = \sum_{s=1}^{t} \frac{X_{js}}{t}$$

**2.1.3.3.- Propiedades del estimador ajustado de credibilidad.**

El estimador ajustado de credibilidad, $\hat{\mu}(\theta_j)$, llamado también estimador credibilistico de la prima pura verdadera, o simplemente prima de credibilidad, tiene tres importantes propiedades a mencionar:

- En primer lugar, asegura que los ingresos por primas y los pagos se equilibren conjuntamente por término medio.

$$E[\hat{\mu}(\theta_j)] = [1 - Z]\cdot E[m] + Z\cdot E[\bar{X}] =$$

$$= [1 - Z]\cdot m + Z\cdot\sum_{s=1}^{t} \frac{E[X_{js}]}{t} =$$

$$= [1 - Z]\cdot m + \frac{Z}{t}\cdot t\cdot m = [1 - Z]\cdot m + Z\cdot m = m$$

- En segundo lugar, $\hat{\mu}(\theta_j)$ se aproxima a la prima pura verdadera para cada riesgo, cuando t crece. Ello es debido a que para un parámetro de riesgo dado $\theta_j$, la media $\bar{X}$ se aproxima a m cuando t tiende a infinito, y Z se aproxima a la unidad.

- Y en tercer lugar, para la obtención de $\hat{\mu}(\theta_j)$ no se han hecho hipótesis sobre el tipo de función de distribución que gobierna el riesgo individual, o de la función de distribución estructural a priori de los parámetros de riesgo.

**2.1.3.4.- Propiedades del factor de credibilidad.**

En la fórmula de credibilidad aparece el parámetro Z, denominado **factor de credibilidad** o simplemente **credibilidad**, que es un número comprendido entre 0 y 1, ambos inclusives, y que resulta ser una síntesis de varios elementos.

Las propiedades que verifica dicho factor son las siguientes:

- Cuando t crece, es decir, cuando tiende a infinito, entonces Z tiende a la unidad. Ello significa que a medida que tenemos mayor información sobre el riesgo, mayor es la ponderación relativa dada a su experiencia individual. En el caso de poseer experiencia completa, es obvio, que tengamos una total confianza en la prima de riesgo individual.

- Cuando $a = Var[E[X_{js}/\theta_j]] = Var[\mu(\theta_j)] = 0$, entonces el factor de credibilidad es nulo.
  Ya dijimos que "a" es un indicador de la heterogeneidad existente dentro de la cartera, en este caso al ser nulo, no hay heterogeneidad y entonces m es el mejor estimador lineal para $\mu(\theta_j)$.

- Cuando "a" tiende a infinito, el factor de credibilidad tiende a la unidad, ya que nos está indicando que el colectivo es extremadamente heterogéneo, por lo que las diferencias observadas entre las reclamaciones registradas de un riesgo a otro son importantes. En este caso, $\bar{X}$ es el mejor estimador lineal para $\mu(\theta_j)$.

- Y por último, cuando $S^2 = E[\sigma^2(\theta_j)]$ tiende a infinito, el factor de credibilidad tiende a cero. Esto es, si existe mucha varianza en la siniestralidad individual el mejor estimador para la prima de riesgo individual es la colectiva.

### 2.1.4.- Estimación de los parámetros estructurales.

NORBERG, R. (1979), pp. 197, llama a **m, a,** y $S^2$ parámetros estructurales. Utiliza este término para indicar que, para objetos prácticos, estos parámetros deben ser estimados a partir de las observaciones , y poder así calcular Z y $\hat{\mu}(\theta_j)$.

BÜHLMANN, H. (1967) no abordó el problema de la estimación de los parámetros estructurales, sólo planteó el modelo y obtuvo el estimador ajustado de credibilidad, $\hat{\mu}(\theta_j)$, que es resultado del proceso de minimización, indicando que el problema de la estimación de los parámetros aún no habia sido abordado.

Para la obtención de los estimadores de los parámetros estructurales vamos a seguir el artículo de NORBERG, R. (1979), pp. 197-198, siendo los parámetros estructurales que queremos estimar:

$$m = E[X_{js}] = E[\mu(\theta_j)]$$

$$a = Var[E[X_{js}/\theta_j]] = Var[\mu(\theta_j)]$$

$$S^2 = E[Var[X_{js}/\theta_j]] = E[\sigma^2(\theta_j)]$$

**2.1.4.1.- Estimación de la media poblacional.**

Un estimador obvio para la media poblacional **m** es el valor medio observado:

$$\boxed{M_{\emptyset} = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k} M_j = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{t} \frac{X_{js}}{t}} \tag{21}$$

Observemos que $M_{\emptyset}$ da la misma importancia a todas las medias individuales, esto es, presupone que se trata de un colectivo homogéneo, aunque no lo sea.

**2.1.4.2.- Estimación del parámetro $S^2 = E[\sigma^2(\theta_j)]$.**

El parámetro estructural $S^2$ indica el valor esperado de la dispersión total de los datos en el tiempo. Un estimador para $S^2$ es el valor medio de las k varianzas individuales empíricas, siendo su expresión:

$$\boxed{\hat{S}^2 = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t-1}\cdot\sum_{s=1}^{t} (X_{js} - M_j)^2} \tag{22}$$

donde:

$$S_j^2 = \frac{1}{t-1}\cdot\sum_{s=1}^{t} (X_{js} - M_j)^2 \tag{23}$$

que es la varianza individual empírica dentro del riesgo j-ésimo.

### 2.1.4.3.- Estimación del parámetro $a = Var[\mu(\theta_j)]$.

El parámetro a expresa la variación de la prima pura verdadera individual entre los riesgos en la población.

Un estimador para dicho parámetro podría ser la varianza empírica de la prima pura observada, $\hat{a}_b$, definida como sigue:

$$\hat{a}_b = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_\emptyset)^2 \tag{24}$$

Si $\mu(\theta_j)$ estuviese perfectamente estimado por $\hat{\mu}(\theta_j)$, entonces $\hat{a}_b$ sería un estimador insesgado de a. Sin embargo, $\hat{\mu}(\theta_j)$ fluctúa más ampliamente que $\mu(\theta_j)$, ya que está afectado por la variación accidental dentro del riesgo de un periodo a otro, siendo el estimador ajustado correctamente de a:

$$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_\emptyset)^2 - \frac{1}{t} \cdot \hat{S}^2} \tag{25}$$

Los tres estimadores que acabamos de ver son insesgados y consistentes, esto es:

- $E[M_\emptyset] = m$

- $E[\hat{S}^2] = E[\sigma^2(\theta_j)]$

- $E[\hat{a}] = Var[\mu(\theta_j)]$

$$(M_{\emptyset},\ \hat{S}^2,\ \hat{a}) \xrightarrow{\ \ P\ \ } (m,\ S^2,\ a) \quad \text{cuando} \quad t \longrightarrow \infty$$

### 2.1.5.- Cálculo del valor esperado para el periodo "t+1".

Nuestro objetivo hasta ahora ha sido hallar la mejor aproximación lineal para la prima de riesgo individual:

$$E[\mu(\theta_j)/X_{j1},\ X_{j2}, \ldots,\ X_{jt}]$$

y la hemos obtenido hallando los valores para $c_{j\emptyset}, c_{j1}, \ldots, c_{jt}$, tales que minimizan la esperanza total:

$$E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j\emptyset} - \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js}\right]^2\right]$$

de acuerdo con los criterios de máxima precisión.

Este problema se puede plantear desde otro punto de vista. Podríamos no estar interesados en $\mu(\theta_j)$, pero sí en estimar la experiencia de reclamaciones para el periodo t+1, esto es, $X_{j,t+1}$.

La solución de este problema es fácil, si mantenemos las mismas hipótesis consideradas en el modelo para las nuevas variables aleatorias.

En este caso:

$$E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}] = E[X_{j,t+1}/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]$$

ya que:

$$\mu(\theta_j) = E[X_{j,t+1}/\theta_j] = E[X_{j,t+1}/\theta_j, X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]$$

de ahí que:

$$E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}] =$$

$$= E[E(X_{j,t+1}/\theta_j, X_{j1},\dots, X_{jt})/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}] =$$

$$= E[X_{j,t+1}/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]$$

Por lo tanto, para hallar $X_{j,t+1}$ vamos a seguir el mismo procedimiento que antes: Queremos hallar los valores de $c_{j\emptyset}, c_{j1},\dots, c_{jt}$ tales que minimicen:

$$l(c_{j\emptyset}, c_{j1},\dots, c_{jt}) = E_{Total}\left[\left[X_{j,t+1} - c_{jo} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right]$$

de acuerdo con el criterio de máxima precisión mínimo-cuadrática.

La solución de este problema de minimización nos lleva a los mismos resultados que habíamos obtenido en el apartado 2.1.3.2., para el cálculo del mejor estimador lineal de la prima de riesgo individual, ya que:

$$Cov[X_{j,t+1}, X_{js}] = Cov[\mu(\theta_j), X_{js}] = a \quad \text{con } s = 1,2,\dots,t$$

De manera que la mejor aproximación lineal para $E[X_{j,t+1}/X_{j1}, X_{j2},\dots, X_{jt}]$ coincide con la mejor aproximación lineal para $E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},\ldots, X_{jt}]$, siendo su estimador ajustado de credibilidad, $\hat{\mu}(\theta_j)$, el mismo que habíamos obtenido anteriormente:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z]\cdot m + Z\cdot\bar{X}$$

con:

$$\bar{X} = \sum_{s=1}^{t} \frac{X_{js}}{t}$$

$$Z = \frac{a\cdot t}{S^2 + a\cdot t}$$

### 2.1.6.- Comentarios al modelo.

Hemos visto que la solución del Modelo de BÜHLMANN con los valores reales (no estimados) de $S^2$ y a equivalía a minimizar para todos los posibles valores de $c_{j0}, c_{j1}, \ldots, c_{jt}$:

$$E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right]$$

Como consecuencia de la aparición de la constante de minimización $c_{j0}$, muchos autores denominan a la solución de esta forma cuadrática **Fórmula de credibilidad no homogénea**. Por el contrario, si consideramos el problema homogéneo:

$$E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right]$$

sin la constante $c_{j\emptyset}$, pero con la siguiente restricción :

$$E[\mu(\theta_j)] = \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot E[X_{js}]$$

llegamos a la llamada **Fórmula de credibilidad homogénea**, que es la siguiente:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = (1 - Z)\cdot M_\emptyset + Z\cdot M_j$$

donde:

$$M_\emptyset = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k} M_j = \frac{1}{k\cdot t}\cdot\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{t} X_{js}$$

fórmula que coincide con la no-homogénea en el caso que m sea estimado por el estimador insesgado $M_\emptyset$.

Por último, vamos a apuntar algunos de los inconvenientes que presenta el Modelo de BÜHLMANN:

- En primer lugar, cabe destacar que las dos hipótesis de este modelo son bastantes rígidas. La homogeneidad en el tiempo es considerada como un defecto en la mayoría de los casos. Así, por ejemplo, si $X_{js}$ representa la cantidad reclamada, las realizaciones de esta variable aleatoria observable están afectadas por la inflación, elemento perturbador que cambia la distribución en el tiempo para un mismo elemento, debiendo ser eliminada. Sin embargo, la inflación no es a veces el único factor relevante, y los datos pueden sufrir una tendencia. En estos casos, el Modelo de BÜHLMANN no es apto para ser aplicado.

- Por otro lado, como ya sabemos, la varianza es en general una medida de la precisión de los resultados. En este modelo es un prerrequisito tener pólizas que sean más o menos de igual importancia, ya que tener pólizas con una alta y baja exposión al riesgo distorsiona el resultado. En el Modelo de BÜHLMANN se supone que todas las pólizas tienen el mismo impacto en el negocio, aunque no sea así.

- Y en último lugar, otro elemento a tener en cuenta es que $m = E[M_\emptyset]$ independientemente del valor de Z, siempre y cuando conozcamos los verdaderos valores de a y $S^2$. Ello nos indica que una estimación errónea de Z no queda reflejada en los ingresos totales por primas, pero las primas de riesgo individuales se alejan de las que corresponderían según sus características. De ahí la importancia de estimar adecuadamente el valor de Z.

Para concluir diremos que el Modelo de BÜHLMANN sólo es adecuado en el caso de utilizar cantidades de reclamaciones deflactadas o sin tendencia, y además considera implícitamente que las pólizas tienen el mismo impacto en el negocio.

## 2.2.- MODELO DE BÜHLMANN-STRAUB

El Modelo de BÜHLMANN-STRAUB (1970), no es más que una sencilla ampliación del Modelo de BÜHLMANN. Se trata de un modelo de **tiempo homogéneo, pero con observaciones ponderadas**, y es probablemente el modelo más utilizado en la práctica.

Como ya hemos dicho, apareció para superar la limitación que suponía el Modelo de BÜHLMANN al considerar que todas las pólizas tienen igual importancia dentro de la cartera, independientemente de su volumen, limitación que en este modelo deja de serlo al introducir una ponderación o peso natural para cada póliza, ampliando de este modo su campo de aplicación.

Las observaciones esperadas siguen siendo homogéneas en el tiempo, pero la varianza deja de serlo, pasando a depender del periodo considerado vía los pesos o ponderaciones naturales.

Otro elemento importante a tener en cuenta, es que el factor de credibilidad ya no es constante para toda la cartera, como lo era en el modelo anterior, sino que cada póliza tiene ahora su propio factor de credibilidad.

A pesar de todo ello, este modelo, como el de BÜHLMANN, sólo es apto en el caso de trabajar con datos deflactados o sin tendencia.

## 2.2.1.- Variables relevantes.

El Modelo de BÜHLMANN-STRAUB puede ser descrito utilizando las siguientes variables:

- $\theta_j$ : Es el parámetro de riesgo. Es una variable aleatoria desconocida, que describe las características de riesgo del contrato j-ésimo, con $j = 1,2,\ldots,k$, siendo k el número total de pólizas.

- $X_{js}$: Es una variable aleatoria observable que nos indica la experiencia de reclamaciones, con $j = 1,2,\ldots,k$ y $s = 1,2,\ldots,t$, siendo t el número de periodos observados para cada póliza.

Ambas variables ya aparecían en el Modelo de BÜHLMANN, y además incorpora:

- $w_{js}$: Pesos o ponderaciones naturales, que son números positivos conocidos, con $j = 1,2,\ldots,k$ y $s = 1,2,\ldots,t$.

Normalmente, $X_{js}$ representa la cuantía media de reclamaciones y $w_{js}$ suele representar el número de reclamaciones. Si $X_{js}$ representa el ratio de pérdidas, los pesos naturales $w_{js}$, serían los correspondientes volúmenes de primas.

La incorporación de estas ponderaciones o pesos naturales amplía considerablemente el campo de aplicación del modelo.

Un esquema clarificador de este modelo podría ser el siguiente:

| | Póliza | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $j = 1$ | $j = 2$ | . . . | $j = k$ |
| Variables de estructura | $\theta_1$ | $\theta_2$ | . . . | $\theta_k$ |
| 1 | $X_{11}(w_{11})$ | $X_{21}(w_{21})$ | . . . | $X_{k1}(w_{k1})$ |
| 2 | $X_{12}(w_{12})$ | $X_{22}(w_{22})$ | . . . | $X_{k2}(w_{k2})$ |
| Variables observables . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| Periodos t | $X_{1t}(w_{1t})$ | $X_{2t}(w_{2t})$ | . . . | $X_{kt}(w_{kt})$ |

donde $X_{js}$ sería el coste medio por siniestro y $w_{js}$ el número de pólizas que han tenido siniestro. En este caso podemos escribir:

$$X_{js} = \frac{\sum_{k=1}^{w_{js}} x_{jk}}{w_{js}}$$

### 2.2.2.- Hipótesis del modelo.

Las hipótesis de este modelo son:

BS.1) Las pólizas $j = 1,2,\ldots,k$ , es decir, los pares $(\theta_1, \vec{X}_1)$,

$(\theta_2, \vec{X}_2), \ldots, (\theta_k, \vec{X}_k)$ son independientes, y las variables aleatorias $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ están idénticamente distribuidas.

BS.2) Para todo $j = 1,2,\ldots,k$ y $s = 1,2,\ldots,t$, tenemos:

a) $E[X_{js}/\theta_j] = \mu(\theta_j) \qquad s \in \{1,2,\ldots,t\}$

b) $Cov[X_{jr}, X_{js}/\theta_j] = \delta_{rs} \cdot \frac{1}{w_{js}} \cdot \sigma^2(\theta_j)$

donde $w_{js}$ son números positivos dados, $\mu(\theta_j)$ y $\sigma^2(\theta_j)$ son funciones desconocidas, y $\delta_{rs}$ es el símbolo de Kronecker, como en el Modelo de BÜHLMANN.

Esta segunda hipótesis indica que para cada $j = 1,2,\ldots,k$ y para un $\theta_j$ dado, las variables $x_{j1}/\theta_j, x_{j2}/\theta_j, \ldots, x_{jk}/\theta_j$ son independientes y están idénticamente distribuidas.

Este modelo aún mantiene la **independencia dentro y entre las pólizas**, como el Modelo de BÜHLMANN. Sin embargo, aunque las observaciones esperadas siguen siendo homogéneas en el tiempo ya que:

$$E[X_{js}/\theta_j] = \mu(\theta_j) \qquad s \in \{1,2,\ldots,t\}$$

la varianza sí que depende del periodo en que estemos, a través de los pesos o ponderaciones naturales, puesto que:

$$Var[X_{js}/\theta_j] = \frac{1}{w_{js}} \cdot \sigma^2(\theta_j)$$

El Modelo de BÜHLMANN-STRAUB es una extensión del Modelo de BÜHLMANN, para ello basta ver como se pueden reescribir las hipótesis originales de dicho modelo:

B.1') Los contratos $j = 1,2,\ldots,k$ son independientes. Las variables $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ están idénticamente distribuidas.

B.2') Para todo $j = 1,2,\ldots,k$ y $s = 1,2,\ldots,t$, tenemos:

a) $E[X_{js}/\theta_j] = \mu(\theta_j) \qquad s \in \{1,2,\ldots,t\}$

b) $Cov[X_{jr}, X_{js}/\theta_j] = \delta_{rs}\cdot\sigma^2(\theta_j)$

donde $\mu(\theta_j)$ y $\sigma^2(\theta_j)$ no dependen de s, y $\delta_{rs}$ es el símbolo de Kronecker, antes definido.

### 2.2.3.- Estimación de la prima de riesgo individual.

El objetivo de este modelo es hallar un estimador para la prima de riesgo individual $\mu(\theta_j)$. Para ello, vamos a seguir el mismo procedimiento que en el Modelo de BÜHLMANN: Seleccionar la mejor prima dentro de la clase restringida de las primas lineales, utilizando para ello el procedimiento de los mínimos cuadrados. No sólo vamos a utilizar el mismo procedimiento, sino también la misma notación, introducida en el apartado 2.1.3.1.

Nuestro objetivo es hallar los coeficientes $c_{j0}$, $c_{j1}, \ldots, c_{jt}$ tales que minimicen:

$$l[c_{j0}, c_{j1}, \ldots, c_{jt}] = E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right]$$

En primer lugar, derivamos parcialmente respecto a cada uno de los coeficientes e igualamos a cero, obteniendo:

$$\frac{dl}{dc_{j0}} = E_{Total}\left[(-2)\cdot\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]\right] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dl}{dc_{jr}} = E_{Total}\left[2\cdot\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]\cdot(X_{jr})\right] = 0$$

$$r = 1,2,\ldots,t \quad (2)$$

o lo que es lo mismo:

$$E_{Total}\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right] = 0 \quad (3)$$

$$E_{Total}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j0} - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]\cdot X_{jr}\right] = 0 \quad (4)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

tratándose de un sistema de ecuaciones homogéneo con t+1 ecuaciones y t+1 incógnitas.

Multiplicando la ecuación (3) por $E[X_{jr}]$, y restándosela a la ecuación (4) sucesivamente para $r = 1,2,\dots,t$, llegamos a la siguiente expresión:

$$\mathrm{Cov}[\mu(\theta_j),\ X_{jr}] = \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot \mathrm{Cov}[X_{jr},\ X_{js}] \qquad r = 1,2,\dots,t \tag{5}$$

expresión ya obtenida en el modelo de BÜHLMANN, siendo:

$$\mathrm{Cov}[\mu(\theta_j),\ X_{jr}] = E[\mathrm{Cov}[\mu(\theta_j),\ X_{jr}/\theta_j]] +$$

$$+ \mathrm{Cov}[E[\mu(\theta_j)/\theta_j],\ E[X_{jr}/\theta_j]] = 0 + \mathrm{Cov}[\mu(\theta_j),\ \mu(\theta_j)] =$$

$$= \mathrm{Var}[\mu(\theta_j)] = a \tag{6}$$

ya que al ser $\mu(\theta_j)$ constante respecto a $\theta_j$:

$$\mathrm{Cov}[\mu(\theta_j),\ X_{jr}/\theta_j] = 0 \quad \text{y} \quad E[\mu(\theta_j)/\theta_j] = \mu(\theta_j)$$

Por otro lado, cuando $r \neq s$:

$$\mathrm{Cov}[X_{jr},\ X_{js}] = E[\mathrm{Cov}[X_{jr},\ X_{js}/\theta_j]] +$$

$$+ \mathrm{Cov}[E[X_{jr}/\theta_j],\ E[X_{js}/\theta_j]] = 0 + \mathrm{Var}[\mu(\theta_j)] = a$$

y cuando $r = s$:

$$\mathrm{Cov}[X_{js},\ X_{js}] = \mathrm{Var}[X_{js}]$$

Aplicando la definición de varianza resulta que:

$$\mathrm{Var}[X_{js}] = E[\mathrm{Var}[X_{js}/\theta_j]] + \mathrm{Var}[E[X_{js}/\theta_j]] =$$

$$= E[\frac{1}{w_{js}}\cdot\sigma^2(\theta_j)] + \mathrm{Var}[\mu(\theta_j)] =$$

$$= \frac{1}{w_{js}}\cdot E[\sigma^2(\theta_j)] + a = \frac{1}{w_{js}}\cdot S^2 + a$$

De modo que:

$$\boxed{\mathrm{Cov}[X_{jr}, X_{js}] = a + \delta_{rs}\cdot\frac{1}{w_{js}}\cdot S^2} \qquad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en la ecuación (5) obtenemos:

$$a = \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot[\ a + \delta_{rs}\cdot\frac{1}{w_{js}}\cdot S^2]$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

o lo que es lo mismo:

$$a = a\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js} + S^2\cdot\sum_{s=1}^{t} \frac{c_{js}}{w_{js}}\cdot\delta_{rs} \qquad (8)$$

$$r = 1,2,\ldots,t$$

expresión que a su vez se reduce:

$$a = a\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js} + S^2\cdot\frac{c_{js}}{w_{js}} \qquad (9)$$

$$s = 1,2,\ldots,t$$

Por otro lado, si en la ecuación (3) calculamos la esperanza y sustituimos cada expresión por su valor, nos queda:

$$m = c_{j0} + m\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js} \tag{10}$$

de manera qu el sistema de ecuaciones inicial se puede también escribir del siguiente modo:

$$\begin{cases} m = c_{j0} + m\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js} & (10) \\ a = a\cdot\sum_{s=1}^{t} c_{js} + S^2\cdot\sum_{s=1}^{t} \frac{c_{js}}{w_{js}}\cdot\delta_{rs} \qquad s = 1,2,\ldots,t & (9) \end{cases}$$

resultando ser la ecuación (9) un sistema de t ecuaciones con t incógnitas, que a su vez es simétrico respecto a $\frac{c_{js}}{w_{js}}$. Esto es:

$$\frac{c_{j1}}{w_{j1}} = \frac{c_{j2}}{w_{j2}} = \ldots = \frac{c_{jt}}{w_{jt}} = c_j = \text{CONSTANTE} \tag{11}$$

siendo:

$$\boxed{c_{js} = c_j\cdot w_{js}} \tag{12}$$

Sustituyendo en la ecuación (9) $c_{js}$ por su valor nos queda:

$$a = a\cdot\sum_{s=1}^{t} c_j\cdot w_{js} + S^2\cdot c_j$$

de donde:

$$\boxed{c_j = \frac{a}{a\cdot\sum_{s=1}^{t} w_{js} + S^2}} \tag{13}$$

Por otro lado, si definimos una nueva variable, $Z_j$, como:

$$Z_j = \frac{a\cdot\sum_{s=1}^{t} w_{js}}{a\cdot\sum_{s=1}^{t} w_{js} + S^2} = \frac{a\cdot w_{j\cdot}}{S^2 + a\cdot w_{j\cdot}} \tag{14}$$

$c_j$ se puede escribir como sigue:

$$\boxed{c_j = \frac{Z_j}{w_{j\cdot}}} \tag{15}$$

siendo:

$$\boxed{c_{js} = \frac{Z_j}{w_{j\cdot}}\cdot w_{js}} \tag{16}$$

Y por último, si en la ecuación (10) sustituimos $c_{js}$ por (12) y operamos resulta:

$$c_{j0} = m\cdot\left[1 - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\right] = m\cdot\left[1 - \sum_{s=1}^{t} c_j\cdot w_{js}\right] =$$

$$= m\cdot\left[1 - c_j\cdot w_{j\cdot}\right] = m\cdot\left[1 - \frac{Z_j}{w_{j\cdot}}\cdot w_{j\cdot}\right] = m\cdot[1 - Z_j]$$

$$\boxed{c_{j0} = m\cdot[1 - Z_j]} \qquad (17)$$

Una vez obtenidos los valores para $c_{j0}$ y $c_{js}$, podemos obtener la mejor aproximación lineal para $\mu(\theta_j)$, o lo que es lo mismo, el estimador ajustado de credibilidad lineal para $\mu(\theta_j)$ que vamos a simbolizar por $\hat{\mu}(\theta_j)$, siendo:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = c_{j0} + \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}.$$

Sustituyendo $c_{j0}$ y $c_{js}$ por (16) y (17) obtenemos:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z_j]\cdot m + \sum_{s=1}^{t} \frac{Z_j}{w_{j\cdot}}\cdot w_{js}\cdot X_{js} =$$

$$= [1 - Z_j]\cdot m + Z_j\cdot\sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}\cdot X_{js}}{w_{j\cdot}}$$

donde:

$$Z_j = \frac{a\cdot w_{j\cdot}}{S^2 + a\cdot w_{j\cdot}}$$

$$w_{j\cdot} = \sum_{s=1}^{t} w_{js}$$

A su vez, si simbolizamos por:

$$X_{jw} = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js} \cdot X_{js}}{w_{j\cdot}} \tag{18}$$

el estimador ajustado de credibilidad lineal para la prima de riesgo individual resulta ser:

$$\boxed{\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot X_{jw}} \tag{19}$$

**2.2.3.1.- Propiedades del estimador ajustado de credibilidad lineal.**

Veamos algunas de las propiedades que verifica $\hat{\mu}(\theta_j)$:

- En primer lugar, los ingresos por primas y los pagos se equilibran inmediatamente por término medio, ya que:

$$E[\hat{\mu}(\theta_j)] = [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot E[X_{jw}] =$$

$$= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js} \cdot E[X_{js}]}{w_{j\cdot}} =$$

$$= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js} \cdot m}{w_{j\cdot}} =$$

$$= [1 - Z_j]\cdot m + Z_j\cdot m\cdot\sum_{s=1}^{t}\frac{w_{js}}{w_{j\cdot}} =$$

$$= [1 - Z_j]\cdot m + Z_j\cdot m = m$$

Esta propiedad también se verifica en el Modelo de BÜHLMANN como ya hemos visto.

- En segundo lugar, lo mismo que en modelo anterior, no se ha hecho ninguna hipótesis sobre el tipo de función de distribución que gobierna el riesgo individual o sobre la función de distribución a priori de los parámetros estructurales.

- Y en tercer lugar, $\hat{\mu}(\theta_j)$ se aproxima a la prima pura verdadera para cada riesgo cuando t crece, esto es cuando tiende a infinito.

Como se desprende, la prima de credibilidad verifica exactamente las mismas propiedades que la del Modelo de BÜHLMANN.

**2.2.3.2.- Propiedades del factor de credibilidad.**

En este caso, el llamado factor de credibilidad, $Z_j$, ya no es una constante (en el Modelo de BÜHLMANN lo era), sino que depende de j, a través de $w_{j\cdot}$, con $j = 1,2,\ldots,k,$. Un elemento importante a tener en cuenta es que el factor de credibilidad ya no es único para toda la cartera, como lo era en el Modelo de BÜHLMANN, sino que en este caso cada póliza tiene su propio factor de credibilidad, que viene definido del siguiente modo:

$$Z_j = \frac{a \cdot w_{j\bullet}}{S^2 + a \cdot w_{j\bullet}}$$

De la expresión de $Z_j$ se desprende que cuando el valor de $w_{j\bullet}$ es elevado, $Z_j$ está próximo a 1, puesto que cuando t crece $(t \longrightarrow \infty)$, disponemos de mayor información sobre el riesgo, y mayor será la ponderación relativa dada la experiencia individual, como ya vimos que ocurría el Modelo de BÜHLMANN. Sin embargo, cabe señalar que el elevado valor de $w_{j\bullet}$ también puede ser debido a que los pesos credibilísticos $w_{js}$ sean elevados durante los t periodos observados sin necesidad de alargar el periodo de observación.

El factor de credibilidad, $Z_j$, sigue verificando el resto de las propiedades que verificaba el factor de credibilidad Z del Modelo de BÜHLMANN, a saber:

- Si $a = Var[\mu(\theta_j)] = 0$, entonces $Z_j = 0$.

- Si $a \longrightarrow \infty$, entonces $Z_j \longrightarrow 1$.

- Y por último, si $S^2 \longrightarrow \infty$ entonces $Z_j \longrightarrow 0$.

### 2.2.4.- Estimación de los parámetros estructurales.

La fórmula de credibilidad lineal que hemos obtenido para estimar la prima de riesgo individual es:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z_j]\cdot m + Z_j\cdot X_{jw}$$

donde:

$$m = E[\mu(\theta_j)]$$

$$Z_j = \frac{a\cdot w_{j\cdot}}{S^2 + a\cdot w_{j\cdot}}$$

$$X_{jw} = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}\cdot X_{js}}{w_{j\cdot}}$$

En ella aparecen, siguiendo la nomenclatura de NORBERG, R. (1979), los parámetros estructurales **m, a, y** $S^2$, parámetros que deberán ser estimados para poder aplicar dicha fórmula.

El estimador individual para $\mu(\theta_j)$, $X_{jw}$, lo hemos obtenido en el propio proceso de minimización, y no es más que la media aritmética ponderada de las observaciones. Observemos que:

$$E[X_{jw}/\theta_j] = E\left[\sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}}{w_{j\cdot}}\cdot X_{js}/\theta_j\right] = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}}{w_{j\cdot}}\cdot E[X_{js}/\theta_j] =$$

$$= \frac{1}{w_{j\cdot}}\cdot\sum_{s=1}^{t} w_{js}\cdot\mu(\theta_j) = \frac{\mu(\theta_j)}{w_{j\cdot}}\sum_{s=1}^{t} w_{js} = \mu(\theta_j) \qquad (20)$$

y que:

$$Var[X_{jw}/\theta_j] = Var\left[\sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}}{w_{j\cdot}} \cdot X_{js}/\theta_j\right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{t} \left[\frac{w_{js}}{w_{j\cdot}}\right]^2 \cdot Var[X_{js}/\theta_j] = \frac{1}{w_{j\cdot}^2} \sum_{s=1}^{t} w_{js}^2 \cdot \frac{\sigma^2(\theta_j)}{w_{js}} =$$

$$= \frac{\sigma^2(\theta_j)}{w_{j\cdot}^2} \sum_{s=1}^{t} w_{js} = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{w_{j\cdot}} \tag{21}$$

ya que las variables $X_{js}/\theta_j$, con $j = 1,2,\ldots,k$, son variables aleatorias independientes siendo, por lo tanto:

$$Var[X_{jw}] = E[Var[X_{jw}/\theta_j]] + Var[E[X_{jw}/\theta_j]] =$$

$$= E\left[\frac{\sigma^2(\theta_j)}{w_{j\cdot}}\right] + Var[\mu(\theta_j)] = \frac{1}{w_{j\cdot}} \cdot E[\sigma^2(\theta_j)] + a =$$

$$= \frac{S^2}{w_{j\cdot}} + a = \frac{S^2 + a \cdot w_{j\cdot}}{w_{j\cdot}} \tag{22}$$

A su vez de la ecuación (22) podemos obtener:

$$S^2 + a \cdot w_{j\cdot} = w_{j\cdot} \cdot Var[X_{jw}] \tag{23}$$

y si sustituimos la ecuación (23) en la expresión obtenida para $Z_j$, la (14), resulta:

$$Z_j = \frac{a \cdot w_{j\bullet}}{S^2 + a \cdot w_{j\bullet}} = \frac{a \cdot w_{j\bullet}}{w_{j\bullet} \cdot \mathrm{Var}[X_{jw}]} = \frac{a}{\mathrm{Var}[X_{jw}]} \tag{24}$$

o lo que es lo mismo:

$$\boxed{Z_j = \frac{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]}{\mathrm{Var}[X_{jw}]}} \tag{25}$$

En consecuencia, el factor de credibilidad $Z_j$ se puede obtener también como el cociente entre la varianza de la prima de riesgo individual, y la varianza de su estimador individual.

### 2.2.4.1.- Estimación de la media poblacional.

Hallar el estimador colectivo para $\mu(\theta_j)$, es decir, para la media poblacional, presenta alguna dificultad.

Parecería lógico a simple vista, tomar como estimador de m a $X_{ww}$, la media aritmética de las medias individuales, esto es:

$$X_{ww} = \sum_{j=1}^{k} \frac{X_{jw} \cdot w_{j\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \tag{26}$$

siendo:

$$w_{j\bullet} = \sum_{j=1}^{k} w_{js}$$

$$w_{\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{k} w_{j\bullet}$$

$X_{ww}$ es un estimador insesgado, sin embargo no tiene varianza mínima dentro del conjunto de estimadores insesgados.

DUBEY, A. y GISLER, A (1981), pp. 189, consideran que el mejor estimador lineal insesgado para m es:

$$\boxed{M_{\emptyset} = X_{zw} = \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{Z_{\bullet}} \cdot X_{jw}} \qquad (27)$$

que también puede escribirse del siguiente modo:

$$M_{\emptyset} = X_{zw} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{t} \frac{Z_j}{Z_{\bullet\bullet}} \cdot \frac{w_{js}}{w_{j\bullet}} \cdot X_{js}$$

donde:

$$Z_{\bullet} = \sum_{j=1}^{k} Z_j \qquad (28)$$

Su insesgadez tiene fácil comprobación:

$$E[M_{\emptyset}] = E[E[M_{\emptyset}/\theta_j]] = E\left[ E\left[ \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{Z_{\bullet}} \cdot X_{jw} / \theta_j \right] \right] =$$

$$= E\left[ \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{Z_{\bullet}} \cdot E[X_{jw}/\theta_j] \right] = E\left[ \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{Z_{\bullet}} \cdot \mu(\theta_j) \right] =$$

$$= \frac{1}{Z_{\cdot}} \cdot \sum_{j=1}^{k} Z_j \cdot E_{\theta}[\mu(\theta_j)] = \frac{m}{Z_{\cdot}} \cdot \sum_{j=1}^{k} Z_j = m$$

Pero este estimador no sólo es insesgado sino que también posee varianza mínima. Veámoslo:

Sea $\hat{\mu} = \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot X_{jw}$ con $\sum_{j=1}^{k} b_j = 1$

que verifica:

$$E[\hat{\mu}] = m$$

Como $X_{jw}$, con $j = 1,2,\ldots,k$, son variables aleatorias independientes:

$$Var[\hat{\mu}] = \sum_{j=1}^{k} b_j^2 \cdot Var[X_{jw}]$$

Pero, ¿cuándo $\hat{\mu}$ tendrá varianza mínima?. O dicho de otra manera, ¿qué valores deben tomar los coeficientes $b_j$, con $j = 1,2,\ldots,k$, para que $\hat{\mu}$ tenga varianza mínima?.

Queremos que:

$Var[\hat{\mu}] = \sum_{j=1}^{k} b_j^2 \cdot Var[X_{jw}]$ sea mínima, pero sujeta a la restricción:

$$\sum_{j=1}^{k} b_j = 1$$

Un camino para solucionar este problema es utilizar el método de Lagrange:

$$\phi = \sum_{j=1}^{k} b_j^2 \cdot \mathrm{Var}[X_{jw}] + \lambda \cdot \left[ \sum_{j=1}^{k} b_j - 1 \right]$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\delta\phi}{\delta b_j} = 2 \cdot b_j \cdot \mathrm{Var}[X_{jw}] + \lambda = 0 && [\mathrm{I}] \\ &\qquad\qquad j = 1,2,\ldots,k \\ &\frac{\delta\phi}{\delta\lambda} = \sum_{j=1}^{k} b_j - 1 = 0 && [\mathrm{II}] \end{aligned} \right\}$$

Si cogemos las k primeras ecuaciones resulta:

$$b_j \cdot \mathrm{Var}[X_{jw}] = -\frac{\lambda}{2} = \text{Constante} = K \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,k$$

siendo:

$$b_j = K \cdot \frac{1}{\mathrm{Var}[X_{jw}]}$$

Observemos que para que $\hat{\mu}$ sea un estimador de varianza mínima, los coeficientes $b_j$ deben ser inversamente proporcionales a $\mathrm{Var}[X_{jw}]$. Es decir, a mayor varianza individual, menor será la ponderación que le demos y a menor varianza, mayor ponderación.

Es obvio, que no podemos dar la misma importancia a todas las medias individuales, pues cada póliza tiene una varianza distinta. Si los datos están muy dispersos (varianza elevada), la media de los mismos es poco representativa, por lo que debemos darles poco peso dentro de la media colectiva.

Si volvemos al sistema de ecuaciones inicial, y retomamos la ecuación [II] y al mismo tiempo recordamos que:

$$\mathrm{Var}[X_{jw}] = \frac{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]}{Z_j}$$

obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{k} b_j = \sum_{j=1}^{k} K \cdot \frac{1}{\mathrm{Var}[X_{jw}]} = K \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\dfrac{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]}{Z_j}} =$$

$$= K \cdot \frac{1}{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]} \cdot \sum_{j=1}^{k} Z_j =$$

$$= K \cdot \frac{Z_\cdot}{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]} = 1 \Longrightarrow \boxed{K = \frac{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]}{Z_\cdot}}$$

Sustituyendo el valor de **k** en $b_j$, resulta que:

$$b_j = K \cdot \frac{1}{\mathrm{Var}[X_{jw}]} = \frac{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]}{\mathrm{Var}[X_{jw}]} \cdot \frac{1}{Z_\cdot} = \frac{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]}{\mathrm{Var}[\mu(\theta_j)]} \cdot \frac{1}{Z_\cdot}$$

siendo:

$$\boxed{b_j = \frac{Z_j}{Z_\cdot}}$$

Por lo tanto, decir que los coeficientes $b_j$ deben ser inversamente proporcionales a $Var[X_{jw}]$, es lo mismo que decir que sean proporcionales a $Z_j$.

Sustituyendo $b_j$ en $\hat{\mu}$ obtenemos:

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot X_{jw} = \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{Z_{\bullet}} \cdot X_{jw}$$

que es, dentro del conjunto de estimadores lineales insesgados, el de varianza mínima, y que habíamos simbolizado por $M_{\emptyset}$.

El estimador que utilizaremos será, por lo tanto:

$$\boxed{M_{\emptyset} = \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{Z_{\bullet}} \cdot M_j} \qquad (29)$$

donde:

$$Z_{\bullet} = \sum_{j=1}^{k} Z_j$$

Cabe destacar que $Z_j$ depende, a su vez, de los parámetros estructurales a y $S^2$. De manera que $M_{\emptyset}$ será el estimador de la media poblacional sólo en el caso que a y $S^2$ sean conocidos.

Las variables aleatorias que dependen de parámetros desconocidos se les llama **pseudo-estimadores**. En la práctica a y $S^2$ son reemplazados por sus correspondientes estimadores.

Para acabar con este estimador, fijémonos que si $Var[\mu(\theta_j)]$ es igual a cero, es decir, a = 0 ===> $Z_j = 0$. En este caso, según DUBEY, A. y GISLER, A. (1981), pp. 189, deberemos definir $\frac{Z_j}{Z_{\cdot}}$ como:

$$\lim_{a \to 0} \frac{Z_j}{Z_{\cdot}} = \frac{w_{j\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}$$

siendo $M_0$:

$$M_0 = \sum_{j=1}^{k} \frac{w_{j\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \cdot X_{jw} \tag{30}$$

**2.2.4.2.- Estimación del parámetro $S^2 = E[\sigma^2(\theta_j)]$.**

BÜHLMANN, H. y STRAUB, E. (1970) propusieron el siguiente estimador para $S^2 = E[\sigma^2(\theta_j)]$:

$$\boxed{\hat{S}^2 = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t-1} \cdot \sum_{s=1}^{t} w_{js} \cdot (X_{js} - X_{jw})^2} \tag{31}$$

que no es más que el valor medio de las k varianzas individuales empíricas, que podemos simbolizar por $S_j$, donde:

$$S_j = \frac{1}{t-1} \cdot \sum_{s=1}^{t} w_{js} \cdot (X_{js} - M_j)^2 \tag{32}$$

y

$$E[S_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j).$$

A su vez, $\hat{S}^2$ es un estimador insesgado[8], ya que verifica:

$$E[\hat{S}^2] = E[\sigma^2(\theta_j)]$$

Posteriormente fue propuesto otro estimador para $S^2$, que vamos a simbolizar por $S'^2$, siendo su expresión:

$$S'^2 = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\cdot\sum_{s=1}^{t}\frac{w_{js}}{Q_{js}}\cdot(X_{js} - X_{jw})^2 =$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}T_j = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t}\cdot\sum_{s=1}^{t}T_{js} \qquad (33)$$

donde:

$$Q_{js} = 1 - \frac{w_{js}}{w_{j\cdot}} \qquad y \qquad T_{js} = \frac{w_{js}}{Q_{js}}\cdot(X_{js} - X_{jw})^2 \qquad (34)$$

Dicho estimador también es insesgado, y verifica que:

$$E[T_{js}/\theta_j] = E[T_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j)$$

Como DUBEY, A. y GISLER, A. (1981) indican, la aparición de este estimador se debe a que al coger las variables aleatorias $X_{js}$ normalmente distribuidas:

$$Var[T_{js}/\theta_j] = 2\cdot\sigma^4(\theta_j)$$

[8] Su demostración se puede hallar en GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990), pp. 152.

y si $T_{j1}, T_{j2}, \ldots, T_{jt}$ son independientes para un $\theta_j$ dado, resulta que:

$$Var[T_j/\theta_j] \leq Var[S_j/\theta_j]$$

A menudo para un $\theta_j$ dado las variables aleatorias $T_{j1}, T_{j2}, \ldots, T_{jt}$ son dependientes, y en este caso:

$$Var[S_j/\theta_j] \leq Var[\hat{S}_j/\theta_j]$$

para todos los estimadores $\hat{S}_j$ con $E[\hat{S}_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j)$.

Siguiendo la opinión de DUBEY, A. y GISLER, A. (1981), pp. 190, así como la de De VYLDER, F. (1984), pp. 145, vamos a utilizar como estimador del parámetro estructural $S^2$ a $\hat{S}^2$, por considerar que es el más adecuado en la mayoría de los casos.

### 2.2.4.3.- Estimación del parámetro $a = Var[\mu(\theta_j)]$.

La estimación de este parámetro presenta grandes dificultades, y ha sido objeto de múltiples discusiones.

BÜHLMANN, H. y STRAUB, E. (1970) propusieron el siguiente estimador para el parámetro "a":

$$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{c} \cdot \left[ \sum_{j=1}^{k} \frac{w_{j\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot (X_{jw} - X_{ww})^2 - (k-1) \cdot \frac{\hat{S}^2}{w_{\bullet\bullet}} \right]} \qquad (35)$$

donde:

$$w_{j\cdot} = \sum_{j=1}^{k} w_{js} \qquad y \qquad w_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{k} w_{j\cdot}$$

$$X_{jw} = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}}{w_{j\cdot}} \cdot X_{js} \qquad y \qquad X_{ww} = \sum_{j=1}^{k} \frac{w_{j\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \cdot X_{jw}$$

$$c = \sum_{j=1}^{k} \frac{w_{j\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \cdot \left[ 1 - \frac{w_{j\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \right]$$

Pero como es posible que $\hat{a} < 0$, se usa como estimador el **máximo $(\hat{a}, 0)$.**

Este no es el único estimador para el parámetro a que ha sido propuesto, sin embargo, es el que nosotros utilizaremos para las posteriores aplicaciones prácticas.

### 2.2.4.4.- El problema de los pseudo-estimadores.

Recordemos que hemos dicho que el estimador para la prima de riesgo colectiva, $M_0$, es un estimador insesgado, sin embargo, esto deja de ser cierto al reemplazar a y $S^2$ por sus respectivos estimadores $\hat{a}$ y $\hat{S}^2$ en el cálculo de los factores de credibilidad $Z_j$, siendo ésta la única posibilidad en la práctica para el cálculo de $M_0$.

Un parámetro como $M_0$, que contiene vía $Z_j$ parámetros desconocidos es llamado **pseudo-estimador**, y son muy frecuentes en la Teoría de la Credibilidad. El problema radica en que una vez que insertamos las estimaciones en lugar de los verdaderos valores de los parámetros, sabemos muy poco sobre la conducta matemática de los pseudo-estimadores, pero en general suelen ser consistentes. A pesar de ello, en la práctica no tenemos otra alternativa que utilizarlos, y la práctica cotidiana muestra que tienen una buena aplicación, en general.

Hay que señalar que nuestro estimador $\hat{a}$ no es un pseudo-estimador ya que no depende de $S^2$ sino de $\hat{S}^2$ directamente.

De VYLDER, F. (1984) y DUBEY, A. y GISLER, A. (1981), han tratado el problema de los pseudo-estimadores, y han demostrado que éstos tienen buenas propiedades asintóticas.

Se pueden distinguir, por así decirlo, dos tipos de pseudo-estimadores: Por un lado están aquellos pseudo-estimadores, como es el caso de $M_{\emptyset}$, que son estimadores que a su vez contienen en su formulación parámetros desconocidos, los cuales deben ser estimados previamente. Y por otro lado están aquellos estimadores, que contienen el propio parámetro que es objeto de estimación, y que también se les denomina pseudo-estimadores, aunque son distintos a los primeros. Este sería el caso del estimador propuesto en primer lugar por BICHEL, F. y STRAUB, E. (1976), y posteriormente por De VYLDER, F. (1984), pp. 145, para el parámetro a, y que simbolizaremos por a', siendo igual:

$$a' = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} Z_j \cdot (M_j - M_{\emptyset})^2 \qquad (36)$$

Se trata de un estimador insesgado y la razón para considerar este estimador, según GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990), pp. 155-157, es que junto con $\hat{S}^2$ nos da una buena interpretación del grado de heterogeneidad existente, y a su vez nos permite hacernos una idea de la manera en que estos resultados podrían generalizarse.

$\hat{S}^2$ mide la heterogeneidad en el tiempo de los riesgos individuales, mientras que a' mide la heterogeneidad entre las pólizas. En este estimador, la diferencia al cuadrado entre el estimador individual para la prima de riesgo, $X_{jw}$, y el estimador colectivo, $M_{\emptyset}$, esto es, $(X_{jw} - M_{\emptyset})$, es la cantidad relevante para medir la heterogeneidad entre las pólizas, mientras que en $\hat{S}^2$ la fluctuación es medida por el cuadrado de las diferencias $(X_{js} - X_{jw})^2$ corregidas por sus pesos o ponderaciones naturales $w_{js}$.

El estimador a' es un pseudo-estimador, pero con la peculiaridad de que contiene, vía $Z_j$, el propio parámetro que deseamos estimar. Los estimadores de este tipo se resuelven, en la práctica, mediante un proceso iterativo. Primero se selecciona un valor inicial para a', por ejemplo, haciendo todas las ponderaciones credibilísticas iguales a la unidad, y con este valor inicial se calculan los nuevos valores para $Z_j$ y $M_{\emptyset}$. A su vez, con estos valores se obtiene un valor mejorado para a', volviéndose a iniciar el proceso, que se va repitiendo hasta que la secuencia converge.

Tanto el estimador de BÜHLMANN-STRAUB, como el de BICHSEL-STRAUB para el parámetro de riesgo a, han sido utilizados en aplicaciones prácticas, pero no se puede afirmar cual de los dos es mejor universalmente.

Ya hemos visto como se pueden calcular los estimadores para los tres parámetros estructurales que aparecen en este modelo. En primer lugar, deberemos estimar $S^2$ a través de $\hat{S}^2$, y este valor lo utilizaremos para estimar el parámetro a. A continuación, los dos estimadores $\hat{S}^2$ y $\hat{a}$ los utilizaremos para calcular los factores de credibilidad: $Z_1$, $Z_2, \ldots,$ $Z_k$. Con las poderaciones credibilísticas y los valores de $X_{js}$ calcularemos, finalmente, el estimador de la prima de riesgo colectiva, $M_\emptyset$. Una vez obtenidos todos estos elementos estaremos en condiciones de aplicar la fórmula de credibilidad que hemos obtenido:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z_j] \cdot M_\emptyset + Z_j \cdot X_{jw}$$

siendo:

$$X_{jw} = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}}{w_{j\cdot}} X_{js}$$

## 2.2.5.- Comentarios al modelo.

El estimador de credibilidad para la prima de riesgo individual que hemos hallado, lo hemos obtenido para el caso no-homogéneo:

$$\underset{c_{j\emptyset},\, c_{js}}{\text{Min}}\ E_{\text{Total}}\left[\left[\mu(\theta_j) - c_{j\emptyset} - \sum_{s=1}^{t} c_{js} \cdot X_{js}\right]^2\right]$$

En lugar de considerar el caso no-homogéneo, hubiésemos podido hallar la fórmula de credibilidad homogénea[9]. En este caso, el problema de minimización que hubiéramos planteado sería el siguiente:

$$\underset{c_{js}}{\text{Min}}\ E_{\text{Total}}\left[\left[\mu(\theta_j) - \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot X_{js}\right]^2\right]$$

sujeto a:

$$E[\mu(\theta_j)] = \sum_{s=1}^{t} c_{js}\cdot E[X_{js}]$$

siendo su solución:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z_j]\cdot M_{\emptyset} + Z_j\cdot X_{jw}$$

con:

$$Z_j = \frac{a\cdot w_{j\bullet}}{S^2 + a\cdot w_{j\bullet}}$$

El Modelo de BÜHLMANN-STRAUB es de gran utilidad cuando disponemos de obseraciones incompletas, por ejemplo, cuando algunas observaciones $X_{js}$ no existen , ya sea porque los datos estadísticos no están disponibles o porque una o más observaciones son tan excepcionales que deliberadamente no deseamos tenerlas en cuenta.

En este caso, para cada $j = 1,2,\ldots,k$, $T_j$ ($\neq \emptyset$) indicará el grupo de subíndices s para el que $X_{js}$ existe. De modo que, el conjunto de variables del cual dispondremos de información será:

---

[9] La obtención de la fórmula de credibilidad homogénea se puede hallar en GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990), pp. 153-155.

$$\{ X_{js} \;/\; j = 1,2,\ldots,k \;;\; s \in T_j \}$$

siendo:

$$w_{j\cdot} = \sum_{s \in T_j} w_{js}$$

$$X_{jw} = \sum_{s \in T_j} \frac{w_{js}}{w_{j\cdot}} \cdot X_{js}$$

El procedimiento a seguir para los cálculos es el mismo que antes, lo único que cambia es el estimador para $S^2$, que ahora viene definido del siguiente modo:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{s \in T_j} w_{js} \cdot (X_{js} - X_{jw})^2$$

donde:

$$\delta = \sum_{j=1}^{k} (t_j - 1) \qquad (t_j \geq 2)$$

Por otro lado, también es posible hacer una generalización del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB ajustando la esperanza condicionada:

$$E[X_{js}/\theta_j] = Y_{js} \cdot \beta(\theta_j) \qquad \begin{cases} j = 1,2,\ldots,k \\ s = 1,2,\ldots,t \end{cases}$$

donde $Y_{js}$ son constantes dadas, y $\beta(\theta_j)$ es una función desconocida, que no depende ni de j ni de s.

Este modelo es más general que el de BÜHLMANN-STRAUB, ya que reemplaza la hipótesis de homogeneidad en el tiempo para las observaciones esperadas por otra de tipo lineal, y puede ser a su vez fácilmente reducido al propio Modelo de BÜHLMANN-STRAUB a través de la sustitución:

$$X'_{js} = \frac{1}{Y_{js}} \cdot X_{js}$$

entonces:

$$E[X_{js}/\theta_j] = \beta(\theta_j)$$

$$Cov[X'_{jr} \ , \ X'_{js} \ /\theta_j] = \delta_{rs} \cdot \frac{1}{w'_{js}} \cdot \sigma^2(\theta_j)$$

donde $\delta_{rs}$ es el símbolo de Kronecker y $w'_{js} = w_{js} \cdot Y^2_{js}$

Ya por último, cabe destacar que si bien el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB sigue manteniendo la independencia dentro y entre las pólizas, como el Modelo de BÜHLMANN, la rígida asunción de la homogeneidad en el tiempo ya sólo se mantiene para las observaciones esperadas, pues:

$$E[X_{js}/\theta_j] = \mu(\theta_j) \qquad s \in \{1,2,\ldots,t\}$$

pero:

$$Var[X_{js}/\theta_j] = \frac{1}{w_{js}} \cdot \sigma^2(\theta_j)$$

A su vez, en el Modelo de BÜHLMANN sólo se utiliza la información concerniente a la cuantía media de las reclamaciones, $X_{js}$, y no se tiene en cuenta el correspondiente número de reclamaciones, mientras que en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB sí es posible aprovecharse de esta información, vía las ponderaciones naturales o pesos credibilísticos, y tener una medición propia de las observaciones.