UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DIVISION DE CIENCIAS JURIDICAS ECONOMICAS Y SOCIALES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

Y SU APLICACION A LOS SEGUROS COLECTIVOS

Tesis Doctoral presentada por:
Mª Angeles Pons Cardell
Director:
Dr. D. Antonio Alegre Escolano
Catedrático de Universidad.

Barcelona, Noviembre 1991.

CAPITULO VI

UNA APLICACION DE LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

INDICE DEL CAPITULO

INTRODUCCION 383

6.1.- EXPOSICION DEL PROBLEMA Y PLANTEAMIENTO TEORICO DE LA SOLUCION DEL MISMO SEGUN LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD 385

6.2.- APLICACION A UN COLECTIVO CONCRETO 388

6.2.1.- Definición del colectivo y de sus características 388

6.2.2.- Aplicación de los diversos modelos de la Teoría de la Credibilidad al colectivo anterior 390

6.2.2.1.- Aplicación del Modelo de BÜHLMANN 392

6.2.2.2.- Aplicación del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB 396

6.2.2.3.- Aplicación del Modelo Semilineal de De VYLDER 400

6.2.2.4.- Aplicación del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER 417

6.2.2.5.- Comparación de los resultados obtenidos 427

6.2.2.6.- Aplicación de los Modelos Jerárquicos 432

6.2.2.6.1.- Aplicación del Modelo Jerárquico de JEWELL 433

6.2.2.6.2.- Aplicación del Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT 444

6.3.- COMPARACION GLOBAL DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS 486

El objetivo de este capítulo es la aplicación práctica a un caso concreto de los distintos modelos de credibilidad que hemos analizado, para pasar posteriormente a comparar los resultados obtenidos y elegir aquel modelo que mejor se adapte al caso estudiado.

En concreto hemos aplicado el Modelo de BÜHLMANN, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, el Modelo Semilineal de De VYLDER, el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, el Modelo Jerárquico de JEWELL y el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, pues son los modelos que en principio nos han parecido más adecuados, y a la vez hemos podido aplicar, ya que disponemos de los datos necesarios para ello.

La aplicación práctica de los mismos la hemos hecho siguiendo un cierto orden: En primer lugar, hemos aplicado los cuatro primeros modelos que hemos citado, los cuales consideran que cada póliza está caracterizada por un único parámetro de riesgo, y en segundo lugar, los dos últimos, en los cuales cada póliza está caracterizada por dos parámetros de riesgo, uno para cada nivel considerado dentro de la cartera. Al aplicar estos modelos no nos hemos limitado a obtener los estimadores de credibilidad, sino que también hemos comentado las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos, sus diferencias y las hipótesis asumidas en cada caso, para facilitar de este modo la elección del modelo más adecuado.

Para obtener los estimadores de credibilidad a través de los cuatro primeros modelos que hemos citado, hemos contado con la ayuda de cuatro funciones elaboradas en el lenguaje de programación APL por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987), denominadas respectivamente BUHLMANN, BUHLMANNSTRA, SEMILINEAR y HACHEMEISTER, que pueden hallarse en el apéndice del presente trabajo, junto con las funciones JEWELL y SUNDT que nosotros hemos diseñado, también en APL, para obtener los estimadores de credibilidad a través del Modelo Jerárquico de JEWELL y del Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

6.1. Exposición del problema y planteamiento teórico de la solución del mismo según la Teoría de la Credibilidad.

Vamos a analizar el caso una entidad bancaria, que dispone de k sucursales, y que ofrece desde hace t años a los clientes que poseen un saldo medio, en el conjunto de sus cuentas, superior a C millones de pesetas, un seguro a cobrar en caso de muerte, totalmente gratuito, con el fin, entre otros, de proporcionar una ayuda a los herederos a la hora de satisfacer el Impuesto sobre Sucesiones y Donaciones.

El seguro se paga en el momento de la muerte, y su cuantía depende del saldo medio conjunto de las cuentas en los años anteriores a la muerte, y va a consistir en un determimado porcentaje, x, sobre dicho saldo.

Como es lo habitual, consideramos que la entidad bancaria contrató el seguro colectivo de muerte con una entidad aseguradora tratándose, por lo tanto, de una prestación totalmente asegurada.

La entidad aseguradora disponde de información respecto al montante global de las indemnizaciones que se han ido pagando en cada uno de estos t años, y puede acceder a la misma desglosada por sucursales y años de ocurrencia.

Cada sucursal tiene su propia experiencia de reclamaciones que vamos a utilizar para estimar su prima de riesgo individual para el año t+1. Una vez estimadas las primas de riesgo individuales para cada una de las k sucursales, calcularemos la prima de riesgo total estimada para la entidad bancaria, como suma de las k primas individuales.

Para estimar dichas primas disponemos en principio, desde el punto de vista de la Teoría de la Credibilidad, de dos grandes alternativas:

a) Considerar que cada sucursal está caracterizada por un único parámetro de riesgo, que es el caso que nosotros hemos descrito hasta ahora.

b) Considerar que cada sucursal está caracterizada por r parámetros de riesgo, uno para cada nivel en que se haya estructurado la cartera. Este sería el caso, por ejemplo, en que hubiésemos considerado que la entidad bancaria tiene divididas sus k sucursales en p zonas, constando cada una de ellas de k_p sucursales, siendo $p = 1,2,\ldots,P$. Cada una de estas zonas estaría caracterizada por un parámetro de riesgo que describiría las diferencias existentes entre ellas. Pero a su vez, como cada sucursal tendrá unas características específicas que la diferencian de las demás sucursales de su zona, estará caracterizada otro parámetro de riesgo.

En el primer caso, los modelos de credibilidad que se pueden aplicar son los dos modelos que hemos denominado clásicos, los dos modelos de regresión y los dos modelos semilineales, y en el segundo caso, si consideramos el caso particular de nuestro ejemplo, el Modelo Jerárquico de JEWELL y el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Para aplicar correctamente estos modelos es necesario que redefinamos el significado de algunos de los elementos que aparecen en los mismos:

•) La cartera está formada no por pólizas sino por sucursales, que a su vez pueden estar agrupadas en p subcarteras.

•) La variable aleatoria observable, experiencia de reclamaciones, X_{js}, expresa el montante global de las indemnizaciones pagadas en la sucursal j-ésima en el año s-ésimo, con $j = 1,2,\ldots,k$ y $s = 1,2,\ldots,t_j$, y en el caso de considerar la cartera dividida en p subcarteras constará de tres subíndices, siendo X_{pjs} el montante global de las indemnizaciones pagadas en la sucursal j-ésima perteneciente a la subcartera p-ésima, en el año s-ésimo, siendo $p = 1,2,\ldots,P$; $j = 1,2,\ldots,k_p$ y $s = 1,2,\ldots,t_{pj}$.

•) Y por último, las poderaciones o pesos naturales que son necesarios para aplicar algunos de los modelos credibilísticos adoptan, según nuestro criterio, el significado del importe del capital total que está en riesgo en cada sucursal.

A su vez, vamos a asumir la existencia de independencia entre las p subcarteras y entre las sucursales, y también dentro una misma subcartera en el tiempo, así como que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos.

6.2.- Aplicación a un colectivo concreto.

6.2.1.- Definición del colectivo y de sus características.

Vamos a considerar que la entidad bancaria consta de veinticinco sucursales $(k = 25)$, y que el seguro en caso de muerte lleva ya cuatro años en vigencia $(t_j = t = 4)$, de manera que la entidad aseguradora dispone de la información concerniente al importe global de las indemnizaciones pagadas, en cada uno de estos cuatro años, en cada una de las veinticinco sucursales, y de los capitales en riesgo que estaban en juego en cada una de ellas. Esto es, dispondrá de información respecto a X_{js} y w_{js} con $j = 1,2,\ldots,25$ y $s = 1,2,3,4$.

Con el fin de poder estimar el importe de la prima de riesgo a pagar por cada sucursal el próximo año, y de este modo conocer el importe total de la prima de riesgo que deberá abonar la entidad bancaria, vamos a considerar que los datos disponibles respecto al importe global de las indemnizaciones pagadas por cada sucursal, en cada uno de los cuatro años de vigencia del seguro, son los dados en el siguiente cuadro, donde las cantidades están expresadas en millones de pesetas:

j	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4
1	61	77	115	142
2	65	90	106	150
3	71	97	120	151
4	74	100	125	154
5	78	108	130	158
6	60	76	110	140
7	82	111	137	164
8	83	115	141	170
9	85	120	148	176
10	89	129	153	179
11	82	111	140	169
12	99	136	161	187
13	44	68	95	121
14	62	87	120	149
15	71	95	125	150
16	94	124	152	181
17	105	130	161	194
18	70	100	132	151
19	90	118	147	176
20	99	130	161	186
21	7	10	14	17
22	10	16	22	29
23	9	12	17	23
24	8	11	16	22
25	11	17	25	30

CUADRO 1

siendo sus respectivos pesos o ponderaciones naturales, w_{js}, dados en miles de millones de pesetas, los siguientes:

j	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4
1	55	75	96	118
2	60	81	104	129
3	65	87	109	134
4	67	90	112	137
5	70	94	116	142
6	54	74	95	117
7	75	98	120	145
8	80	105	128	154
9	82	109	131	156
10	85	115	137	160
11	75	98	122	149
12	90	120	142	165
13	22	33	45	58
14	30	42	56	70
15	35	48	60	73
16	45	59	72	85
17	50	61	75	89
18	34	47	59	70
19	43	56	69	82
20	49	60	73	87
21	14	19	25	32
22	20	29	38	45
23	17	24	31	39
24	15	21	28	37
25	21	31	43	50

CUADRO 2

6.2.2.- Aplicación de los diversos modelos de la Teoría de la Credibilidad al colectivo anterior.

El objetivo de esta aplicación práctica consiste en estimar la prima de riesgo que deberá pagar la entidad bancaria el próximo año, utilizando para el cálculo de las k primas de riesgo individuales uno de los modelos propuestos por la Teoría de la Credibilidad, el que consideremos más adecuado desde el punto de vista de la entidad aseguradora, pero que a su vez se adapte a los datos disponibles.

En primer lugar, vamos a considerar que cada una de las veinticinco sucursales tiene asociada un **único parámetro de riesgo**, que describe como cada sucursal difiere de las demás sucursales que integran la cartera, y también vamos a asumir la existencia de independencia entre las sucursales y, dentro de una misma sucursal en el tiempo, así como que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos. Para poder estimar la prima de riesgo a pagar por cada sucursal el próximo año, es necesario que además introduzcamos una hipótesis adicional que explique el comportamiento de los valores esperados, así como la estructura de la matriz de covarianzas, y según la hipótesis que asumamos a este respecto, deberemos aplicar un modelo credibilístico u otro. En concreto aplicaremos cuatro modelos: el Modelo de BÜHLMANN, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, el Modelo Semilineal de De VYLDER y el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

Para la aplicación numérica de estos cuatro modelos, hemos contado con la ayuda de las funciones BUHLMANN, BUHLMANNSTRA, SEMILINEAR y HACHEMEISTER elaboradas en el lenguaje de programción APL, por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987), que se hallan en el workspace CREDI, en las cuales ha sido preciso introducir algunas modificaciones[34].

Una vez calculadas las distintas primas de riesgo individuales en cada uno de estos modelos, compararemos los resultados obtenidos e indicaremos las ventajas e inconvenientes de los mismos, para pasar posteriormente a calcular la prima global estimada para el próximo año a satisfacer por la entidad bancaria, y de este modo elegir el modelo de

---

34 El listado de estas cuatro funciones se halla en el apéndice del presente trabajo.

credibilidad que creamos más conveniente desde el punto de vista de la entidad aseguradora.

La otra posibilidad que hemos indicado, para estimar las primas de riesgo individuales, es considerar que la entidad bancaria tiene sus veinticinco sucursales divididas en p subcarteras, atendiendo, por ejemplo, al volumen de pasivo captado. En este caso, cada sucursal va a tener asociados dos parámetros de riesgo, uno en el nivel de las subcarteras y el otro en el nivel de las sucursales. Al haber introducido una jerarquización dentro de la cartera, ya no podemos utilizar ninguno de los cuatro modelos antes citados, sino que nos vemos obligados a aplicar bien sea el Modelo Jerárquico de JEWELL o bien el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, según la hipótesis que consideremos en cuanto a las observaciones esperadas. La aplicación práctica de estos dos últimos modelos presenta grandes dificultades debido, sobre todo, a la complejidad de los estimadores de los parámetros estructurales. Para obtener los resultados numéricos en ambos modelos hemos elaborado, en este caso, nuestras propias funciones[35] en APL denominadas JEWELL y SUNDT, que hemos incluido en el workspace JERARQUICO, puesto que no tenemos conocimiento de ningún programa infórmatico a tal efecto.

6.2.2.1.- Aplicación del Modelo de BÜHLMANN.

La primera hipótesis que vamos a considerar, para hallar los estimadores ajustados de credibilidad para las primas de riesgo

---

35 El listado de estas dos funciones se halla también en el apéndice del presente trabajo.

individuales de las veinticinco sucursales que integran nuestra cartera, es la de **homogeneidad en el tiempo.** Esta hipótesis, junto con la de existencia de independencia dentro y entre las sucursales, así como la de que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos, nos van a permitir calcular dichos estimadores a través del Modelo de BÜHLMANN, ya que las hipótesis que se asumen en dicho modelo son las mismas que nosotros estamos considerando:

B.1) Las pólizas son independientes y están idénticamente distribuidas.

B.2) a) $E[X_{js}/\theta_j] = \mu(\theta_j) \qquad \forall s$

b) $Cov[\vec{X}_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j)\cdot I \qquad \forall s$

donde I es la matriz identidad y $\sigma^2(\theta_j)$ es una función escalar desconocida.

En realidad, lo que a nosotros nos interesa es el importe estimado de la prima a pagar por cada sucursal el próximo año, el quinto, importes que vamos a obtener directamente aplicando el Modelo de BÜHLMANN, puesto que como ya dijimos en el apartado 2.1.5. del presente trabajo, en el caso de que mantengamos las hipótesis de este modelo para los próximos periodos, resulta que la mejor aproximación lineal para $E[X_{j,t+1}/X_{j1}, X_{j2},..., X_{jt}]$ coincide con la mejor aproximación lineal obtenida para la prima de riesgo individual, $E[\mu(\theta_j)/X_{j1}, X_{j2},..., X_{jt}]$.

Para calcular los estimadores ajustados de credibilidad hemos utilizado la función BUHLMANN elaborada en APL por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987), que se halla en el workspace CREDI. Para aplicarla lo único que se necesita son los datos de las pólizas, que en este caso son los datos de las indemnizaciones globales pagadas en cada uno de los cuatro años de vigencia del seguro por cada sucursal, y que en nuestro caso se hallan en el Cuadro 1 de apartado 6.2.1. del presente capítulo.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Sucursal	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
1	98,75	98,83281610
2	102,75	102,31521550
3	109,75	108,40941440
4	113,25	111,45651380
5	118,50	116,02716300
6	96,50	96,87396646
7	123,50	120,38016220
8	127,25	123,64491160
9	132,25	127,99791080
10	137,50	132,56855990
11	125,50	122,12136180
12	145,75	139,75100860
13	82,00	84,25026877
14	104,50	103,83876520
15	110,25	108,84471430
16	137,75	132,78620990
17	147,50	141,27455830
18	113,25	111,45651380
19	132,75	128,43321070
20	144,00	138,22745890
21	12,00	23,30827991
22	19,25	29,62012876
23	15,25	26,13772939
24	14,25	25,26712955
25	20,75	30,92602852

Factor de credibilidad: Z = 0,8705998408

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: $M_\emptyset$ = 99,39

Varianza esperada: $\hat{S}^2$ = 1067,656667

Varianza de la media: $\hat{a}$ = 1795,789375

En cuanto a los resultados obtenidos, lo primero que cabe destacar es el valor bastante elevado del factor de credibilidad, Z, que en este modelo es único para toda la cartera. Como ya hemos indicado, una de las propiedades que verifica el factor de credibilidad en el Modelo de BÜHLMANN (y también en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB) es que cuando el número de periodos observados es elevado ($t \longrightarrow \infty$), dicho factor tiende a uno ($Z \longrightarrow 1$). En este caso, es evidente que el elevado valor del factor de credibilidad no viene motivado por este hecho, ya que sólo disponemos de los datos de las indemnizaciones pagadas durante los cuatro años que lleva vigente el seguro. Sin embargo, como la dispersión existente entre las primas de riesgo individuales ($\hat{a}$) es superior a la existente entre los datos de las indemnizaciones en el tiempo para toda la cartera ($\hat{S}^2$), es lógico que se dé mayor importancia al estimador individual que no al colectivo, siendo el factor de credibilidad un número bastante elevado. Ello da lugar a que los estimadores ajustados de credibilidad tengan unos valores muy próximos a sus estimadores individuales, aunque son ligeramente inferiores para todas las sucursales, excepto para la primera y para las cinco últimas. En estas seis sucursales, el estimador colectivo es mayor que el individual ($M_\emptyset > M_j$), sobre todo en las cinco últimas, y aunque el valor del factor de credibilidad sea elevado tiene más peso el estimador colectivo a la hora de determinar el estimador ajustado de credibilidad.

6.2.2.2.- Aplicación del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB.

Como ya sabemos, el Modelo de BÜHLMANN considera que todas las sucursales tienen igual importancia dentro de la cartera, aunque no sea así realmente. En nuestro caso, esta suposición es del todo incorrecta y para superarla vamos a introducir unos pesos o ponderaciones naturales, que según nuestro criterio van a indicar el capital total que está en riesgo en cada sucursal y en cada uno de los cuatro años que lleva vigente el seguro, ponderaciones que a su vez van a influir considerablemente en el cálculo de los estimadores ajustados de credibilidad.

Vamos a seguir asumiendo, como en el Modelo de BÜHLMANN, la existencia de independencia dentro y entre las sucursales, así como que **las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo**, pero vamos a introducir una novedad: **la varianza deja de ser constante para pasar a depender del periodo considerado a través de los pesos naturales introducidos.** En definitiva, vamos a asumir las mismas hipótesis que en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB:

BS.1) Las pólizas son independientes y los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos.

BS.2) a) $E[X_{js}/\theta_j] = \mu(\theta_j) \qquad \forall s$

b) $Cov[X_{jr}, X_{js}/\theta_j] = \delta_{rs} \cdot \frac{1}{w_{js}} \cdot \sigma^2(\theta_j)$

donde $\sigma^2(\theta_j)$ es una función desconocida y δ_{rs} es el símbolo de Kronecker.

Si seguimos manteniendo estas dos hipótesis para las observaciones futuras, resulta que los estimadores de credibilidad que se obtienen aplicando este modelo, coinciden con el importe estimado de la prima a pagar por cada sucursal el próximo año, debido a la hipótesis de homogeneidad en el tiempo asumida para las observaciones esperadas.

Para obtener los estimadores de credibilidad hemos utilizado la función BUHLMANNSTRA, elaborada en APL por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987), que se halla en el workspace CREDI. Para poderla ejecutar se necesitan no sólo los datos de las indemnizaciones globales pagadas por cada sucursal en el tiempo, sino también los datos de los pesos naturales considerados, que en nuestro caso son los dados en los Cuadros 1 y 2 del apartado 6.2.1. del presente capítulo.

Una diferencia a recordar con el Modelo de BÜHLMANN es que el factor de credibilidad deja de ser único para toda la cartera, obteniéndose uno para cada sucursal.

Una vez aplicada la función BUHLMANNSTRA los resultados que hemos obtenido son los siguientes:

Sucursal	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad	Factor de Credibilidad
1	107,34302330	108,40571850	0,7753905903
2	111,13368980	111,33158390	0,7896169592
3	117,38734180	116,31702780	0,7985486631
4	120,82758620	119,10259090	0,8029310940
5	125,89573460	123,25550850	0,8089756035
6	104,98235290	106,58976970	0,7733470489
7	130,70319630	127,25052820	0,8146603524
8	134,78158460	130,78841570	0,8241457044
9	139,94560670	135,13765630	0,8274944554
10	144,87122740	139,39374570	0,8329878263
11	133,53378380	129,60039120	0,8167058656
12	152,70212770	146,13686220	0,8384046068
13	91,80379747	99,64360185	0,6132412566
14	114,46464650	113,66440730	0,6652166847
15	118,03240740	116,15148850	0,6843079243
16	143,68525900	134,70202780	0,7158188479
17	154,62181820	143,30518790	0,7340235601
18	121,13333333	118,21806160	0,6781907969
19	140,21200000	132,19293420	0,7150060829
20	150,87732340	140,38866400	0,7296946031
21	13,13333333	65,12039754	0,4745649656
22	21,25000000	60,31975304	0,5698316245
23	16,80180180	61,87075653	0,5269469989
24	15,97029703	63,69837857	0,5033706521
25	22,98620690	59,27270813	0,5926897846

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: $M_0 = 112,1324762$

Varianza esperada: $\hat{S}^2 = 87360,65244$

Varianza de la media: $\hat{a} = 877,1636688$

Un elemento importante a destacar es que en este modelo los factores de credibilidad obtenidos no presentan el mismo comportamiento para toda la cartera:

•) Para las doce primeras sucursales son bastante elevados, sus valores están comprendidos entre 0,773 y 0,839 lo que indica que se está dando un gran peso a la experiencia individual frente a la colectiva. Como consecuencia de ello, los estimadores ajustados de credibilidad son muy próximos a los individuales, aunque son ligeramente inferiores, excepto para la primera y sexta sucursal.

•) Para las ocho siguientes sucursales, los factores de credibilidad son inferiores al de las doce primeras, y tienen sus valores comprendidos entre 0,61 y 0,735. En estas sucursales se da mayor importancia a la experiencia individual que no a la colectiva, pero ya no de forma tan agudizada. Los estimadores ajustados de credibilidad siguen siendo muy próximos a los individuales, pero no tanto como antes, aunque también son ligeramente inferiores excepto para la sucursal décimotercera.

•) Y por último, para las cinco últimas sucursales, los factores de credibilidad están comprendidos entre 0,47 y 0,60. Como puede apreciarse, sus valores son bastante pequeños, incluso para la sucursal vigésimoprimera es inferior a 0,50. En estas sucursales, se está dando aproximadamente el mismo peso a la experiencia propia que a la colectiva a la hora de determinar los estimadores ajustados de credibilidad, los cuales son muy superiores a los individuales, debido también al hecho que el estimador colectivo, $M_{\emptyset}$, es al menos cuatro veces superior al valor de los estimadores individuales de estas cinco sucursales.

La existencia de estos tres grupos de sucursales, con un comportamiento similar dentro de cada uno de ellos, nos está poniendo de manifiesto que la hipótesis que hemos asumido respecto a que cada sucursal viene caracterizada por un solo parámetro de riesgo no refleja del todo la situación real existente, de manera que la aplicación de este modelo, para calcular las primas de riesgo individuales previstas para las distintas sucursales para el próximo año, no es la más adecuada aunque los estimadores de credibilidad obtenidos sean superiores a los del Modelo de BÜHLMANN, sobre todo para las cinco últimas sucursales.

6.2.2.3.- Aplicación del Modelo Semilineal de De VYLDER.

Dentro de la misma línea del Modelo de BÜHLMANN, en cuanto a lo que se refiere a la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, se halla el Modelo Semilineal de De VYLDER. La diferencia fundamental es que en este modelo ya no se utilizan directamente los datos obtenidos de la experiencia de reclamaciones, sino que se trabaja con ellos transformándolos previamente a través de p funciones dadas, $f_p(X_s)$, con $p = 1,2,\dots,P$.

En este apartado vamos a obtener los estimadores ajustados de credibilidad para las veinticinco sucursales que integran nuestra cartera en el caso de considerar **una única función dada $f(X_s)$**, que suele ser lo más habitual y práctico. Las hipótesis que asumimos son las del Modelo Semilineal pero adaptadas a nuestro caso particular, y son las siguientes:

D.1) Para un parámetro de riesgo fijo las variables condicionadas: X_1/θ, $X_2/\theta, \ldots,$ X_t/θ son independientes y están idénticamente distribuidas.

D.2) Hay una función dada $f(X_s)$, con $s = 1,2,\ldots,t$, que es cuadrado-integrable, tal que:

$$E[f(X_s)] = \mu_f(\theta)$$

donde $\mu_f(\theta)$ es un vector de dimensión $(k,1)$, siendo su elemento j-ésimo:

$$\mu_f(\theta_j) = E[f(X_{js})/\theta_j]$$

Del mismo modo que en el Modelo de BÜHLMANN, si seguimos manteniendo estas dos hipótesis para las indemnizaciones a pagar en el periodo siguiente, es decir, para X_{t+1}, se verifica:

$$E_{Total}[\mu_\emptyset(\theta)/f(X_1),\ f(X_2),\ldots,\ f(X_t)] =$$

$$= E_{Total}[f_\emptyset(X_{t+1})/f(X_1),\ f(X_2),\ldots,\ f(X_t)]$$

Naturalmente somos libres de elegir la función $f_{\emptyset}(X_{t+1})$ que mejor se adapte a cada situación, sin embargo, nosotros vamos a considerar que es la función identidad $(f_{\emptyset}(X_{t+1}) = X_{t+1})$, ya que lo que nos interesa es estimar el importe de la prima a pagar por cada sucursal el próximo año.

En este caso particular, el estimador ajustado de credibilidad para la sucursal j-ésima se obtiene sumando a la media colectiva de las observaciones de la cartera en su totalidad, el producto entre el factor de credibilidad y la diferencia entre la media individual y colectiva de las observaciones transformadas mediante la función dada $f(X_s)$, es decir:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = M_{\emptyset} + Z\cdot(M_{fj} - M_f)$$

donde:

$$M_{fj} = \frac{1}{t}\cdot\sum_{s=1}^{t} f(X_{js})$$

$$M_f = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k} M_{fj}$$

$$M_{\emptyset} = \frac{1}{k\cdot t}\cdot\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{t} X_{js}$$

$$Z = \frac{t\cdot b_{\emptyset f}}{a_{ff} + t\cdot b_{ff}}$$

siendo los estimadores de los parámetros estructurales los siguientes:

$$\hat{a}_{\emptyset f} = \frac{1}{k\cdot(t - 1)}\cdot\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{t} (f(X_{js}) - M_{fj})\cdot(X_{js} - M_{\emptyset j})$$

$$\hat{a}_{ff} = \frac{1}{k\cdot(t-1)}\cdot\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{t}\left(f(X_{js}) - M_{fj}\right)^2$$

$$\hat{b}_{\emptyset f} = \frac{1}{k-1}\cdot\sum_{j=1}^{k}(M_{fj} - M_f)\cdot(M_{\emptyset j} - M_{\emptyset}) - \frac{1}{t}\cdot\hat{a}_{\emptyset f}$$

$$\hat{b}_{\emptyset f} = \frac{1}{k-1}\cdot\sum_{j=1}^{k}(M_{fj} - M_f)^2 - \frac{1}{t}\cdot\hat{a}_{\emptyset f}$$

Para obtener los estimadores de credibilidad, hemos utilizado la función elaborada en APL por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987), titulada SEMILINEAR, que se halla en el workspace CREDI. Para poderla aplicar se necesitan los datos de la experiencia de reclamaciones, que en este caso son las indemnizaciones pagadas cada año por cada una de las sucursales, que se encuentran en el Cuadro 1 del apartado 6.2.1. del presente capítulo, y la definición en APL de las funciones F(X) y G(X). La función F(X) es la que nosotros hemos simbolizado por f(X), que como ya hemos indicado se considera una función dada, y la función G(X) es $f_{\emptyset}(X)$, que en nuestro caso es la función identidad.

Vamos a aplicar este modelo para cuatro posibles funciones dadas f(X):

1º) $f(X) = 1{,}05\cdot X$

2º) $f(X) = X$

3º) $f(X) = X^2$

4º) $f(X) = \ln X$

En el primer caso, con $f(X) = 1{,}05 \cdot X$ y $f_0(X) = X$ los resultados obtenidos son los siguientes:

Sucursal	Estimador de Credibilidad
1	98,83281610
2	102,31521550
3	108,40941440
4	111,45651380
5	116,02716300
6	96,87396640
7	120,38016220
8	123,64491160
9	127,99791080
10	132,56855990
11	122,12136180
12	139,75100860
13	84,25026877
14	103,83876520
15	108,84471430
16	132,78620990
17	141,27455830
18	111,45651380
19	128,43321070
20	138,22745890
21	23,30827991
22	29,62012876
23	26,13772939
24	25,26712955
25	30,92602852

Factor de credibilidad: $Z = 0{,}8291427055$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: $M_0 = 99{,}39$

Estimador colectivo para f: $M_f = 104{,}3595$

Esperanza de la varianza: $\hat{a}_{ff} = 1177{,}091475$

Esperanza de la covarianza: $\hat{a}_{0f}$ = 1121,0395

Varianza de la media: $\hat{b}_{ff}$ = 1979,857786

Covarianza de la media: $\hat{b}_{0f}$ = 1885,578844

En el segundo caso, con $f(X) = f_0(X) = X$:

Sucursal	Estimador de Credibilidad
1	98,83281610
2	102,31521550
3	108,40941440
4	111,45651380
5	116,02716300
6	96,87396640
7	120,38016220
8	123,64491160
9	127,99791080
10	132,56855990
11	122,12136180
12	139,75100860
13	84,25026877
14	103,83876520
15	108,84471430
16	132,78620990
17	141,27455830
18	111,45651380
19	128,43321070
20	138,22745890
21	23,30827991
22	29,62012876
23	26,13772939
24	25,26712955
25	30,92602852

Factor de credibilidad: Z = 0,8705998408

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: $M_0 = 99{,}39$

Esperanza de la varianza: $\hat{a}_{ff} = 1177{,}091475$

Varianza de la media: $\hat{b}_{ff} = 1979{,}857786$

En el tercer caso, con $f(X) = X^2$ y $f_0(X) = X$:

Sucursal	Estimador de Credibilidad
1	90,18975858
2	93,84891248
3	100,61749960
4	104,45101430
5	110,25698480
6	87,81288263
7	116,42983940
8	121,49719850
9	128,29000240
10	134,95809000
11	119,45209230
12	146,06753310
13	74,67528500
14	96,21368000
15	101,27135240
16	135,03679450
17	148,84640740
18	104,82395250
19	128,41592960
20	143,68339210
21	38,84415254
22	40,11190044
23	39,33938548
24	39,19650654
25	40,41945341

Factor de credibilidad: $Z = 0{,}004843353947$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: $M_{\emptyset} = 99{,}39$

Estimador colectivo para f: $M_f = 12659{,}31$

Esperanza de la varianza: $\hat{a}_{ff} = 64112251{,}44$

Esperanza de la covarianza: $\hat{a}_{\emptyset f} = 257089{,}2567$

Varianza de la media: $\hat{b}_{ff} = 38886953{,}11$

Covarianza de la media: $\hat{b}_{\emptyset f} = 265972{,}8594$

Y en el cuarto caso, con $f(X) = \ln X$ y $f_{\emptyset}(X) = X$:

Sucursal	**Estimador de Credibilidad**
1	109,52291780
2	111,88613930
3	115,48785830
4	117,10971270
5	119,49297230
6	108,44153870
7	121,54116440
8	122,91662720
9	124,74889280
10	126,81308990
11	122,17468650
12	129,92611860
13	99,69327660
14	112,32989360
15	115,65138510
16	127,05429110
17	130,54463800
18	116,85536120
19	125,16032240
20	129,30744270
21	6,15360760
22	28,36932746
23	17,55191508
24	13,75436037
25	32,26246025

Factor de credibilidad: $Z = 49{,}02113721$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: $M_{\emptyset} = 99,39$

Estimador colectivo para f: $M_f = 4,332154544$

Esperanza de la varianza: $\hat{a}_{ff} = 0,1213561991$

Esperanza de la covarianza: $\hat{a}_{\emptyset f} = 9,85478057$

Varianza de la media: $\hat{b}_{ff} = 0,6894858678$

Covarianza de la media: $\hat{b}_{\emptyset f} = 35,28663605$

Lo primero que cabe destacar es que los estimadores ajustados de credibilidad coinciden en la primera y segunda definición de la función dada $f(X)$, a pesar de que los factores de credibilidad son distintos, siendo respectivamente $Z = 0,8291427055$ y $Z = 0,8705998408$, coincidiendo a su vez con los estimadores de credibilidad obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN[36].

Al ser $f(X) = 1,05 \cdot X$ el estimador ajustado de credibilidad, $\hat{\mu}_f(\theta_j)$, se puede también escribir del siguiente modo:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = Z \cdot M_{fj} + [1 - 1,05 \cdot Z] \cdot M_{\emptyset}$$

donde:

$$M_{fj} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=1}^{k} 1,05 \cdot X_{js}$$

$$M_{\emptyset} = \frac{1}{k \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{t} X_{js}$$

36 Véase el apartado 6.2.2.1. del presente capítulo.

$$Z = \frac{t \cdot b_{\emptyset f}}{a_{ff} + t \cdot b_{ff}}$$

Como puede apreciarse, dicho estimador se ha transformado en una combinación lineal entre la media individual de las observaciones transformadas a través de la función dada $f(X) = 1{,}05 \cdot X$ y la media colectiva de todas las observaciones de la cartera. Si lo comparamos con el obtenido en el Modelo de BÜHLMANN:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = Z \cdot \bar{X} + [1 - Z] \cdot m$$

donde:

$$\bar{X} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=1}^{t} X_{js}$$

$$M_\emptyset = \frac{1}{k \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{t} X_{js} \qquad \text{(estimador de m)}$$

$$Z = \frac{a \cdot t}{S^2 + a \cdot t}$$

resulta que también podemos escribir el estimador ajustado de credibilidad semilineal como sigue:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = 1{,}05 \cdot Z \cdot \bar{X} + [1 - 1{,}05 \cdot Z] \cdot M_\emptyset$$

verificándose a su vez:

$$1{,}05 \cdot Z = Z_{\text{BÜHLMANN}}$$

En general, siempre que en el Modelo Semilineal de De VYLDER con una única función dada, ésta sea $f(X) = CONSTANTE \cdot X$ y $f_{\emptyset}(X) = X$, los estimadores ajustados de credibilidad que se obtienen coinciden numéricamente con los del Modelo de BÜHLMANN, puesto que el estimador ajustado de credibilidad semilineal es en este caso:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = CONSTANTE \cdot Z \cdot \bar{X} + [1 - CONSTANTE \cdot Z] \cdot M_{\emptyset}$$

con

$$CONSTANTE \cdot Z = Z_{BÜHLMANN}$$

A su vez, cuanto mayor sea la constante considerada menor será el factor de credibilidad semilineal, y mayores los estimadores de los parámetros estructurales, como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

a) Si $f(X) = 1{,}1 \cdot X$ y $f_{\emptyset}(X) = X$:

$Z = 0{,}791454407$

$M_f = 109{,}329$

$\hat{a}_{ff} = 1291{,}864567$

$\hat{a}_{\emptyset f} = 1174{,}422333$

$\hat{b}_{ff} = 2172{,}905144$

$\hat{b}_{\emptyset f} = 1975{,}368312$

b) Si $f(X) = 1{,}05 \cdot X$ y $f_{\emptyset}(X) = X$:

$Z = 0{,}8291427055$

$M_f = 104{,}3595$

$\hat{a}_{ff} = 1177{,}091475$

$\hat{a}_{\emptyset f} = 1121{,}0395$

$\hat{b}_{ff} = 1979{,}857786$

$\hat{b}_{\emptyset f} = 1885{,}578844$

c) Si $f(X) = 5 \cdot X$ y $f_{\emptyset}(X) = X$:

$Z = 0{,}1741199682$

$M_f = 496{,}95$

$\hat{a}_{ff} = 26691{,}41667$

$\hat{a}_{\emptyset f} = 5338{,}283333$

$\hat{b}_{ff} = 44894{,}73437$

$\hat{b}_{\emptyset f} = 8978{,}946875$

El segundo caso considerado $(f(X) = f_{\emptyset}(X) = X)$ no es más que un caso particular del primero, cuando la constante es igual a la unidad (CONSTANTE = 1), siendo el estimador ajustado de credibilidad:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = Z \cdot M_{fj} + [1 - Z] \cdot M_{\emptyset} = Z \cdot \bar{X} + [1 - Z] \cdot M_{\emptyset}$$

con

$$Z = Z_{\text{BÜHLMANN}}$$

estimador que coincide con el obtenido en el Modelo de BÜHLMANN[37]. De manera que da lo mismo aplicar directamente el Modelo de BÜHLMANN que

---

37 Véase para más detalles el apartado 4.1.5. del presente trabajo.

considerar dentro del Modelo Semilineal de De VYLDER la hipótesis de que existe una única función dada y además que $f(X_s) = f_\emptyset(X_s) = X_s$

En el tercer caso, hemos considerado que $f(X) = X^2$ y $f_\emptyset(X) = X$. Al asumir que $f(X) = X^2$ estamos ampliando el campo de variabilidad de los datos, es decir, aumentamos su dispersión como puede apreciarse en los valores obtenidos para los estimadores de los parámetros estructurales a_{ff}, $a_{\emptyset f}$, b_{ff} y $b_{\emptyset f}$, y en especial en $\hat{a}_{ff}$ y $\hat{b}_{ff}$, que son respectivamente los estimadores de $E[Cov[X_s^2, X_s^2/\theta]]$ y $Cov[E[X_s^2/\theta], E[X_s^2/\theta]]$. Como $f_\emptyset(X) = X$, el valor de $M_\emptyset$ es siempre el mismo, lo que difiere de una situación a otra es M_f, que en este caso tiene un valor muy elevado debido a la propia definición de la función $f(X)$.

Los estimadores ajustados de credibilidad que hemos obtenido ya no coinciden con los del Modelo de BÜHLMANN, sino que para algunas sucursales son mayores y para otras menores que en dicho modelo. Como puede apreciarse, para la mayoría de las sucursales los estimadores de credibilidad son superiores al estimador colectivo $M_\emptyset$, pero para $j = 1,2,6,13,14,21,22,23, 24,25$, al ser $M_f > M_{fj}$ resulta que la diferencia $(M_{fj} - M_f)$ es negativa, y el sumando $Z \cdot (M_{fj} - M_f)$ actúa como un elemento reductor dentro del estimador ajustado de credibilidad, el cual es inferior a $M_\emptyset$ para estas diez sucursales. Lo que sí cabe destacar es que el factor de credibilidad obtenido es muy pequeño en comparación al de los dos casos anteriores, y ello es debido al elevado valor de los estimadores de los parámetros estructurales que intervienen en su fórmula.

En general podemos decir, que cuanto mayor es el grado del exponente considerado en la definición de la función $f(X)$ como función potencial, menores son los estimadores de credibilidad obtenidos para las veinte primeras sucursales, al mismo tiempo que aumentan para las cinco últimas. Por otra parte, los factores de credibilidad van disminuyendo y los estimadores de los parámetros estructurales van aumentando, como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

a) Si $f(X) = X^2$ y $f_\emptyset(X) = X$:

$$Z = 0{,}004843353947$$
$$M_f = 12659{,}31$$
$$\hat{a}_{ff} = 64112251{,}44$$
$$\hat{a}_{\emptyset f} = 257089{,}2567$$
$$\hat{b}_{ff} = 38886953{,}11$$
$$\hat{b}_{\emptyset f} = 265972{,}8594$$

b) Si $f(X) = X^3$ y $f_\emptyset(X) = X$:

$$Z = 0{,}00002731360896$$
$$M_f = 1768061{,}13$$
$$\hat{a}_{ff} = 2{,}541277449 \cdot 10^{12}$$
$$\hat{a}_{\emptyset f} = 49316119{,}98$$
$$\hat{b}_{ff} = 7{,}570794461 \cdot 10^{11}$$
$$\hat{b}_{\emptyset f} = 38031436{,}56$$

c) Si $f(X) = X^5$ y $f_\emptyset(X) = X$:

$$Z = 0{,}004843353947$$
$$M_f = 12659{,}31$$
$$\hat{a}_{ff} = 64112251{,}44$$
$$\hat{a}_{\emptyset f} = 257089{,}2567$$
$$\hat{b}_{ff} = 38886953{,}11$$
$$\hat{b}_{\emptyset f} = 265972{,}8594$$

Si al asumir que $f(X) = X^2$ estamos ampliando el campo de variabilidad de los datos, al considerar $\mathbf{f(X) = ln\ X}$ ocurre exactamente lo contrario. La homogenización de los datos, a través de la función logaritmo, tiene como consecuencia inmediata la disminución de la dispersión, como puede apreciarse en el reducido valor de los estimadores de los parámetros estructurales $\hat{a}_{ff}$, $\hat{a}_{\emptyset f}$, $\hat{b}_{ff}$ y $\hat{b}_{\emptyset f}$, y en especial en $\hat{a}_{ff}$ y $\hat{b}_{ff}$.

En cuanto a los dos estimadores colectivos, $M_\emptyset$ sigue siendo el mismo que en los casos anteriores, pero M_f, al ser en este caso particular $M_f = \frac{1}{k \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{t} \ln X_{js}$, tiene un valor pequeñísimo en comparación al estimador colectivo $M_\emptyset$ y a los otros tres estimadores M_f. A pesar de ello, y aunque el valor de $M_{f\,j}$ sea también reducido, la experiencia individual de cada sucursal juega un importante papel a la hora de determinar los estimadores ajustados de credibilidad, debido al elevado valor del factor de credibilidad obtenido, que en este caso es $Z = 49{,}02113721$.

Como puede apreciarse en los resultados obtenidos, los estimadores de credibilidad son superiores al estimador colectivo para las veinte primeras sucursales, sin embargo para las cinco últimas son más pequeños. Ello es debido a que la diferencia entre la media individual y la colectiva de las observaciones transformadas a través de la función $f(X) = \ln X$ es negativa, es decir, $M_{fj} < M_f$ para $j = 21,22,23,24,25$, lo que implica que el producto $Z \cdot (M_{fj} - M_f)$ en lugar de aumentar el importe de la prima lo que hace es disminuirlo.

Nuestro objetivo al considerar la función dada $f(X) = \ln X$ es homogeneizar los datos, o lo que es lo mismo, reducir el campo de variabilidad de los mismos, y hemos elegido para ello la función logaritmo neperiano, pero hubiésemos podido elegir la función logaritmo en cualquier otra base. Sea cual sea la base elegida, los estimadores de credibilidad obtenidos siempre son los mismos, lo que varía es el importe del factor de credibilidad y de los estimadores de los parámetros estructurales, verificándose que cuanto mayor es la base de la función logaritmo considerada mayor es el factor de credibilidad obtenido, y menores son los estimadores de los parámetros estructurales. Así, por ejemplo:

a) Si $f(X) = \log_2 X$:

$$Z = 33,97886305$$

$$M_f = 6,249977877$$

$$\hat{a}_{ff} = 0,2525870284$$

$$\hat{a}_{0f} = 14,21744306$$

$$\hat{b}_{ff} = 1,435074498$$

$$\hat{b}_{0f} = 50,90785484$$

b) Si $f(X) = \ln X$:

$$Z = 49{,}02113721$$
$$M_f = 4{,}332154544$$
$$\hat{a}_{ff} = 0{,}1213561991$$
$$\hat{a}_{0f} = 9{,}85478057$$
$$\hat{b}_{ff} = 0{,}6894858678$$
$$\hat{b}_{0f} = 35{,}28663605$$

c) Si $f(X) = \log_{10} X$:

$$Z = 112{,}8753398$$
$$M_f = 1{,}881430813$$
$$\hat{a}_{ff} = 0{,}02288919865$$
$$\hat{a}_{0f} = 4{,}279876822$$
$$\hat{b}_{ff} = 0{,}1300450996$$
$$\hat{b}_{0f} = 15{,}32479132$$

Por último, si comparamos los estimadores de credibilidad obtenidos en los cuatro casos considerados, que en realidad se reducen a tres puesto que el segundo es un caso particular del primero, se observa que los estimadores de credibilidad obtenidos para las cinco últimas sucursales son más elevados cuando hemos asumido que $f(X) = X^2$, es decir, cuando hemos aumentado la dispersión entre los datos, y para las siete primeras sucursales cuando $f(X) = \ln X$, en el caso contrario.

6.2.2.4.- Aplicación del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

Tanto en el Modelo de BÜHLMANN, como en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, como en el Semilineal de De VYLDER, hemos asumido que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, al mismo tiempo que hemos considerado que las sucursales son independientes y que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos, no siendo ninguno de estos tres modelos aptos para detectar tendencias o tener en cuenta los efectos de la inflación.

Otra alternativa que se nos presenta para hallar los estimadores ajustados de credibilidad para las veinticinco sucursales que integran nuestra cartera, es suprimir la hipótesis de homogeneidad en el tiempo considerada hasta ahora, y sustituirla por otra de tipo polinómica o de tipo no-lineal, por ejemplo, exponencial, para las observaciones esperadas. En este caso, podemos aplicar bien sea el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER o bien el Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER, y de entre estos dos debemos elegir áquel que mejor se adecue a los datos disponibles de la experiencia de reclamaciones.

En nuestro caso, los datos de que disponemos respecto al montante de las indemnizaciones pagadas cada año, que se hallan en el Cuadro 1 del apartado 6.2.1. del presente capítulo, muestran una clara tendencia creciente que a simple vista parece de tipo lineal, siendo bajo esta circunstancia más adecuado aplicar el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, que no el Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER, pero en el caso particular que $n = 2$.

Las hipótesis que asumimos para hallar los estimadores ajustados de credibilidad son las siguientes:

H.1) Las sucursales son independientes y las variables $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ son independientes y están idénticamente distribuidas.

H.2) Para todo $j = 1,2,\ldots,k$ y $r,s = 1,2,\ldots,t_j$ se tiene:

a) $E[X_j/\theta_j] = Y_j \cdot \beta(\theta_j)$

donde $\beta(\theta_j)$ es un vector de regresión desconocido de dimensión $(n,1)$, e Y_j son matrices dadas de dimensión (t_j,n).

b) $Cov[X_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j) \cdot v_j$

donde $\sigma^2(\theta_j)$ es una función escalar desconocida, y v_j son matrices dadas, semidefinidas positivas, de dimensión (t_j,t_j).

La introducción de las matrices Y_j reemplaza la rígida asunción de homogeneidad en el tiempo por otra de tipo polinómica, y en este caso al considerar que $n = 2$, por otra de tipo lineal. Como el número de periodos observados para cada sucursal es el mismo e igual a cuatro ($t_j = t = 4$), resulta que todas las matrices Y_j van a tener la misma dimensión por lo que podemos prescindir del subíndice j, siendo la definición de la matriz Y la siguiente:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{o alternativamente} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Nosotros vamos a utilizar la primera definición por ventajas desde el punto de vista de la predicción, ya que en el próximo periodo, esto es, en el quinto, $s = 0$ y del modelo lineal sólo será significativo el término independiente o punto de corte.

Para definir las matrices v_j, que según las hipótesis asumidas son matrices dadas, semidefinidas positivas de dimensión (t,t), vamos a asumir que no existe correlación entre los montantes de las indemnizaciones para una sucursal dada, de manera que serán matrices diagonales de dimensión $(4,4)$, que vamos a suponer que vienen definidas del siguiente modo:

$$v_j = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{w_{j1}}\ ,\ \frac{1}{w_{j2}}\ ,\ \frac{1}{w_{j3}}\ ,\ \frac{1}{w_{j4}}\right)$$

siendo w_{js} la ponderación o peso natural correspondiente a la sucursal j-ésima en el periodo s-ésimo. Estos pesos naturales vienen dados en el Cuadro 2 del apartado 6.2.1. del presente capítulo, y en este caso indican el capital que está en riesgo en cada sucursal y en cada año.

Para obtener los estimadores ajustados de credibilidad para las veinticinco sucursales de nuestra cartera, bajo las hipótesis del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, hemos utilizado la función elaborada en APL por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987), titulada HACHEMEISTER que se halla también en el workspace CREDI. En dicha función, se asume al igual que hemos hecho nosotros y el propio HACHEMEISTER, C. (1975), que las matrices v_j son matrices diagonales, siendo los elementos de su diagonal principal el inverso de los pesos naturales para cada periodo, y que $n = 2$. Para poderla aplicar lo único que se necesita son los datos de la experiencia de reclamaciones y los pesos o ponderaciones naturales, que se hallan respectivamente en los Cuadros 1 y 2 del apartado 6.2.1. del presente capítulo.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 1:		
Punto de corte:	170,2472471	166,6499674
Pendiente:	-28,6609973	-26,8450390
Sucursal 2:		
Punto de corte:	172,7740749	170,2125053
Pendiente:	-28,1140292	-26,8213082
Sucursal 3:		
Punto de corte:	176,0692768	175,4380839
Pendiente:	-26,5513910	-26,2407875
Sucursal 4:		
Punto de corte:	179,8340340	179,5533451
Pendiente:	-26,6480731	-26,5196930
Sucursal 5:		
Punto de corte:	183,7960323	184,4847602
Pendiente:	-26,1046213	-26,4590343
Sucursal 6:		
Punto de corte:	166,6229212	163,0586173
Pendiente:	-28,1312660	-26,3276277
Sucursal 7:		
Punto de corte:	191,2998570	191,9481303
Pendiente:	-27,1106612	-27,4446555
Sucursal 8:		
Punto de corte:	198,7021761	198,9171213
Pendiente:	-28,5654701	-28,6854340
Sucursal 9:		
Punto de corte:	206,806539	206,8854876
Pendiente:	-29,785205	-29,8397053
Sucursal 10:		
Punto de corte:	209,6272455	210,8268821
Pendiente:	-28,7611626	-29,3684022
Sucursal 11:		
Punto de corte:	198	197,7703298
Pendiente:	-29	-28,8987702

Sucursal 12:		
Punto de corte:	216,9659307	219,148938
Pendiente:	-28,4212028	-29,5105240
Sucursal 13:		
Punto de corte:	146,7825293	140,9834644
Pendiente:	-25,9302675	-22,8824962
Sucursal 14:		
Punto de corte:	178,4937656	173,7987458
Pendiente:	-29,6209476	-27,2232055
Sucursal 15:		
Punto de corte:	177,1096208	176,1152885
Pendiente:	-26,2647838	-26,7519456
Sucursal 16:		
Punto de corte:	211,6081303	209,9017498
Pendiente:	-29,7306117	-28,8555574
Sucursal 17:		
Punto de corte:	224,8448931	222,7106275
Pendiente:	-31,1899219	-30,1035732
Sucursal 18:		
Punto de corte:	180,1883692	180,8313081
Pendiente:	-26,6542504	-26,9603757
Sucursal 19:		
Punto de corte:	205,6272424	204,5985115
Pendiente:	-29,2829418	-28,7439783
Sucursal 20:		
Punto de corte:	218,9950915	216,4530071
Pendiente:	-30,2486126	-28,9652855
Sucursal 21:		
Punto de corte:	24,82964515	20,4937799
Pendiente:	-5,39024453	-3,39712818
Sucursal 22:		
Punto de corte:	37,13117937	35,11634265
Pendiente:	-7,23677571	-6,35540704
Sucursal 23:		
Punto de corte:	30,37586906	27,37715092
Pendiente:	-6,22509625	-4,87080394
Sucursal 24:		
Punto de corte:	29,24093188	26,41068077
Pendiente:	-6,15189302	-4,88184610
Sucursal 25:		
Punto de corte:	39,03516064	36,89545221
Pendiente:	-7,41264610	-6,44358009

Matrices de credibilidad:

Sucursal 1:

$$\begin{bmatrix} 1,132112988 & 1.0133074770 \\ -0,06733619 & 0,4869628906 \end{bmatrix}$$

Sucursal 2:

$$\begin{bmatrix} 1,12497185 & 0,9582731973 \\ -0,0637709 & 0,5141687885 \end{bmatrix}$$

Sucursal 3:

$$\begin{bmatrix} 1,120941453 & 0,9273355531 \\ -0,06122393 & 0,5335343278 \end{bmatrix}$$

Sucursal 4:

$$\begin{bmatrix} 1,120219426 & 0,9218055656 \\ -0,06045391 & 0,5393644260 \end{bmatrix}$$

Sucursal 5:

$$\begin{bmatrix} 1,116023336 & 0,8895029657 \\ -0,05850986 & 0,5542096479 \end{bmatrix}$$

Sucursal 6:

$$\begin{bmatrix} 1,133043621 & 1,020456938 \\ -0,06791758 & 0,482541210 \end{bmatrix}$$

Sucursal 7:

$$\begin{bmatrix} 1,113216025 & 0,8680142977 \\ -0,05667235 & 0,5681676827 \end{bmatrix}$$

Sucursal 8:

$$\begin{bmatrix} 1,108535843 & 0,8320028978 \\ -0.05424935 & 0,5866408835 \end{bmatrix}$$

Sucursal 9:

$$\begin{bmatrix} 1,107285809 & 0,8223994222 \\ -0,05342719 & 0,5928906870 \end{bmatrix}$$

Sucursal 10:

$$\begin{bmatrix} 1,105143400 & 0,8059132092 \\ -0,05215532 & 0,6025725093 \end{bmatrix}$$

Sucursal 11:

$$\begin{bmatrix} 1,111799773 & 0,8570551429 \\ -0,05627687 & 0,5712229731 \end{bmatrix}$$

Sucursal 12:

$$\begin{bmatrix} 1,102227940 & 0,7835593359 \\ -0,05050073 & 0,6151628763 \end{bmatrix}$$

Sucursal 13:

$$\begin{bmatrix} 1,194512848 & 1,4971916570 \\ -0,10283756 & 0,2160853689 \end{bmatrix}$$

Sucursal 14:

$$\begin{bmatrix} 1,177490477 & 1,3644869210 \\ -0,09202641 & 0,2985585971 \end{bmatrix}$$

Sucursal 15:

$$\begin{bmatrix} 1,172151698 & 1,3231990900 \\ -0,08736468 & 0,3339506012 \end{bmatrix}$$

Sucursal 16:

$$\begin{bmatrix} 1,156914355 & 1,2052749750 \\ -0,07828834 & 0,4031310175 \end{bmatrix}$$

Sucursal 17:

$$\begin{bmatrix} 1,151376365 & 1,1626972030 \\ -0,07508473 & 0,4275194573 \end{bmatrix}$$

Sucursal 18:

$$\begin{bmatrix} 1,175646480 & 1,3502748760 \\ -0,08884263 & 0,3226262664 \end{bmatrix}$$

Sucursal 19:

$$\begin{bmatrix} 1,160201091 & 1,2307341100 \\ -0,08015246 & 0,3889184063 \end{bmatrix}$$

Sucursal 20:

$$\begin{bmatrix} 1,153324189 & 1,1777898590 \\ -0,07599121 & 0,4205844213 \end{bmatrix}$$

Sucursal 21:

$$\begin{bmatrix} 1,237046198 & 1,83577960800 \\ -0,12368369 & 0,05550020103 \end{bmatrix}$$

Sucursal 22:

$$\begin{bmatrix} 1,213660076 & 1.6475422880 \\ -0,10988086 & 0,1617055914 \end{bmatrix}$$

Sucursal 23:

$$\begin{bmatrix} 1,223920513 & 1,72969479400 \\ -0,11968257 & 0,08657871897 \end{bmatrix}$$

Sucursal 24:

$$\begin{bmatrix} 1,226790175 & 1,75355587800 \\ -0,11968257 & 0,08657871897 \end{bmatrix}$$

Sucursal 25:

$$\begin{bmatrix} 1,205791248 & 1,5852797940 \\ -0,10674255 & 0,1859538933 \end{bmatrix}$$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo:

Punto de corte: 158,3067271
Pendiente: -23,55417871

Varianza esperada: $\hat{S}^2 = 991,3330516$

Matriz de covarianza:

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} 4598,0598800 & -610,60488480 \\ -610,6048848 & 83,20865059 \end{bmatrix}$$

A la vista de los resultados obtenidos, lo primero que llama la atención es que tanto los estimadores individuales, como el colectivo, como los estimadores ajustados de credibilidad tengan pendiente negativa, a pesar de que los datos de las indemnizaciones muestran una clara tendencia creciente. Ello es debido a la definición que hemos dado a las matrices Y, que es la siguiente:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo, en este caso, la previsión para la prima de riesgo para el quinto año, precisamente, el valor del punto de corte o término independiente.

Si queremos representar gráficamente los estimadores obtenidos, tenemos que tener en cuenta que el valor del punto de corte es el valor estimado de la prima para el quinto año, el punto de corte más el valor de la pendiente, el importe de la prima para el cuarto año, el punto de corte más dos veces la pendiente, el valor de la prima para el tercer año, y así sucesivamente hasta llegar al primer año.

Otro elemento a destacar, es que en este modelo los factores de credibilidad ya no son escalares sino que son **matrices**, de dimensión (2,2), cuyos elementos no tienen porque ser números comprendidos entre 0 y 1, siendo a su vez la matriz $\hat{\Gamma}$ una matriz simétrica. Para obtenerla se hemos tenido que utilizar un proceso iterativo, puesto que se trata de un pseudo-estimador que contiene a través de la matriz de credibilidad Z_j el propio parámetro que estamos estimando[38]. Para su obtención ha sido preciso hacer en este caso siete iteraciones.

Si comparamos los estimadores ajustados de credibilidad obtenidos para las veinticinco sucursales para el quinto año con el estimador colectivo, también para el quinto año, resulta que los estimadores de credibilidad son superiores al mismo excepto para la sucursal décimotercera y para las cinco últimas sucursales, mientras que si los comparamos con los estimadores individuales no se puede hablar de un comportamiento homogéneo, puesto que, por ejemplo, para las cuatro primeras sucursales el estimador de credibilidad es más pequeño que el individual, para la quinta sucursal ocurre lo contrario, para la sexta el de credibilidad es más pequeño que el individual, etc... Lo que sí podemos decir es que para todas las sucursales los estimadores ajustados de credibilidad para el quinto año son muy próximos a sus respectivos

---

38 Véase para más detalles el apartado 3.1.4.3. del presente trabajo.

estimadores individuales, lo que nos indica que se da mucho peso a la experiencia individual para prever las primas de riesgo para el próximo año.

6.2.2.5.- Comparación de los resultados obtenidos.

En los cuatro modelos que hemos aplicado hasta el momento, para hallar los estimadores ajustados de credibilidad para las veinticinco sucursales que integran nuestra cartera, hemos considerado que cada sucursal tiene asociado un solo parámetro de riesgo, a la vez que hemos asumido la existencia de independencia entre y dentro de las sucursales, y que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos. Lo que diferencia a un modelo de otro, son las hipótesis asumidas en cuanto al comportamiento de las observaciones esperadas y de la matriz de covarianzas.

En primer lugar, hemos aplicado el Modelo de BÜHLMANN cuyas hipótesis no consideramos que sean las más adecuadas para explicar el comportamiento de nuestra experiencia de reclamaciones, puesto que asume la existencia de homogeneidad en el tiempo tanto para las observaciones esperadas como en la matriz de covarianzas, al mismo tiempo que considera que todas las sucursales tienen la misma importancia dentro de la cartera, cosa que no ocurre en nuestro caso.

En segundo lugar, hemos aplicado en Modelo de BÜHLMANN-STRAUB cuyas principales novedades respecto al primero son la introducción de los pesos o ponderaciones naturales, elemento de gran importancia, así como el abandono de la hipótesis de homogeneidad en el tiempo en cuanto a la matriz de covarianzas. Aunque se sigue asumiendo que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, la introducción de estos dos nuevos elementos hace que los estimadores de credibilidad obtenidos sean superiores a los de Modelo de BÜHLMANN para todas las sucursales, al mismo tiempo que cada sucursal tiene su propio factor de credibilidad.

La aplicación de este modelo para prever la prima a pagar por cada sucursal el próximo año es más realista que el anterior, aunque no del todo, ya que los datos disponibles en cuanto a las indemnizaciones pagadas durante los cuatro años de vigencia del seguro presentan una tendencia lineal creciente, que no se ha tenido en cuenta de forma explícita a la hora de hallar los estimadores de credibilidad. A pesar de ello, la aplicación de este modelo nos ha puesto de manifiesto un hecho importante: **las sucursales se pueden dividir en tres grupos bastante diferenciados, y dentro de cada uno de ellos el comportamiento de las mismas es similar.** Ello nos hace pensar que no es del todo correcto considerar que cada sucursal tiene asociado un solo parámetro de riesgo, sino que por el contrario deberíamos dividir la cartera en tres subcarteras, formada la primera de ellas por las doce primeras sucursales, la segunda por las ocho siguientes y la tercera por las cinco últimas. En este caso, cada sucursal estará caracterizada por dos parámetros de riesgo, uno por cada nivel considerado, y deberemos aplicar o bien el Modelo Jerárquico de JEWELL o bien el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, según la hipótesis que consideremos respecto a las observaciones esperadas.

Aunque nos hemos percatado de la necesidad de introducir una jerarquización dentro de la cartera, en los dos modelos que hemos aplicado a continuación del de BÜHLMANN-STRAUB hemos seguido considerando que cada sucursal tiene asociado un solo parámetro de riesgo, pues también estamos interesados en comparar el comportamiento de los estimadores de credibilidad calculados bajo las hipótesis de los Modelos Semilineal de De VYLDER y de Regresión de HACHEMEISTER.

Para hallar los **estimadores de credibilidad semilineales** hemos considerado que la función $f_0(X) = X$ **y que existe una única función dada** $f(X)$, con cuatro posibles definiciones.

Cuando la función dada $f(X) = \text{CONSTANTE}\cdot X$, los estimadores de credibilidad coinciden con los del Modelo de BÜHLMANN, aunque los factores de credibilidad son distintos, y en el caso particular en que la constante es igual a la unidad el Modelo Semilineal de De VYLDER se convierte en el Modelo de BÜHLMANN. Como ya hemos descartado la posibilidad de aplicar el Modelo de BÜHLMANN por considerarlo inadecuado, también debemos descartar el Modelo Semilineal cuando $f(X) = \text{CONSTANTE}\cdot X$, puesto que presenta los mismos inconvenientes que aplicar directamente el Modelo de BÜHLMANN.

Las otras dos posibilidades que hemos considerado en cuanto a la definición de la función dada $f(X)$, la función exponencial y la función logaritmo, que aumentan y disminuyen respectivamente la dispersión existente entre los datos, no se puede decir que permitan obtener unos estimadores de credibilidad ni mejores ni peores que en el Modelo de BÜHLMANN. Así, por ejemplo, cuando $f(X) = X^2$ los siete primeros estimadores de credibilidad semilineales son inferiores a los de BÜHLMANN, mientras que para las cinco últimas sucursales son superiores, y ocurre exactamente lo contrario cuando $f(X) = \ln X$, mientras que para las otras sucursales, en algunos casos el estimador semilineal es superior y en otros inferior al de BÜHLMANN.

Por último, hemos aplicado el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER en el cual, como ya hemos indicado, se abandona completamente la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, y se reemplaza por otra de tipo polinómica en cuanto a las observaciones esperadas. En nuestro caso particular, hemos considerado que las observaciones esperadas siguen una función de tipo lineal (n = 2), puesto que los datos disponibles de las indemnizaciones pagadas muestran una tendencia lineal creciente, y además hemos considerado que no existe correlación en el tiempo entre los montantes de las indemnizaciones para una sucursal dada, aunque el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER admite dicha posibilidad, ya que en él se asume que las matrices v_j son matrices dadas y semidefinidas positivas de dimensión (t_j, t_j). No sólo hemos considerado que no existe correlación, sino que además hemos definido las matrices v_j del siguiente modo, como hizo el propio HACHEMEISTER, C. (1975):

$$v_j = \text{diag}\left(\frac{1}{w_{j1}}, \frac{1}{w_{j2}}, \frac{1}{w_{j3}}, \frac{1}{w_{j4}}\right)$$

La aplicación de este modelo, para prever la prima a pagar por las veinticinco sucursales el próximo año, es según nuestro punto de vista, el más adecuado, puesto que tiene en cuenta de forma explícita que las observaciones siguen una tendencia lineal creciente, aunque no se contempla de forma clara la necesidad de dividir la cartera en tres subcarteras, como sí se vió en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, sino más bien en dos, la primera formada por las veinte primeras sucursales y la segunda por las cinco últimas.

Si comparamos los estimadores de credibilidad de HACHEMEISTER con los de BÜHLMANN-STRAUB, resulta que para las veinte primeras sucursales los obtenidos aplicando el Modelo de Regresión son considerablemente superiores, mientras que para las cinco últimas sucursales son más elevados los de BÜHLMANN-STRAUB.

En cuanto a la **prima de riesgo a pagar en total por la entidad bancaria** el próximo año para cada uno de los modelos aplicados, que se obtiene sumando las veinticinco primas de credibilidad individuales, es la siguiente:

•) Modelo de BÜHLMANN: P = 2484,750001

•) Modelo de BÜHLMANN-STRAUB: P = 2801,858165

•) Modelo Semilineal de De VYLDER: a) P = 2484,750001

b) P = 2484,750001

c) P = 2484,75

d) P = 2484,749999

•) Modelo de Regresión de HACHEMEISTER: P = 3957,70118

Cabe destacar que al aplicar el Modelo Semilineal de De VYLDER la prima de riesgo a pagar por la entidad bancaria es siempre la misma, sea cual sea la función dada f(X) que se considere, y coincide a su vez, con la obtenida al aplicar el Modelo de BÜHLMANN. En los casos a) y b) al coincidir los estimadores de credibilidad obtenidos con los del Modelo de BÜHLMANN, es lógico que su suma sea la misma, pero en los casos c) y d) no coinciden, siendo para algunas sucursales mayores y para otras menores que los obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN, pero al sumarse los estimadores mayores compensan a los menores y resulta que la prima total a pagar por la entidad bancaria coincide con la obtenida en el Modelo de BÜHLMANN.

Por otro lado, el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER que es en principio el más adecuado de los cuatro que hemos aplicado hasta este momento, es el que proporciona la prima de riesgo total a cobrar más alta.

6.2.2.6.- Aplicación de los Modelos Jerárquicos.

En los cuatro modelos que hemos aplicado hasta el momento se considera que cada sucursal está caracterizada por un único parámetro de riesgo, que describe como cada sucursal difiere de las demás sucursales pertenecientes a la cartera considerada. Sin embargo, al aplicar el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB se ha puesto de manifiesto que las sucursales se deberían dividir en tres grupos, ya que las mismas presentan un comportamiento similar dentro de cada uno de ellos, idea que se ha visto reforzada al aplicar el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, aunque en el mismo sólo se han observado dos posibles subcarteras. Ello nos muestra que la hipótesis que hemos aceptado desde el principio, de que cada sucursal está caracterizada por un solo parámetro de riesgo, no refleja la situación real existente, y que debemos cambiarla.

Si consideramos que la cartera está dividida en un cierto número p de subcarteras ya no podemos aplicar ninguno de los modelos anteriores, sino que en este caso debemos utilizar o bien el Modelo Jerárquico de JEWELL o bien el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, según la hipótesis que se considere en cuanto al comportamiento de las observaciones esperadas.

Aunque los datos de las indemnizaciones presentan una tendencia de tipo lineal, vamos aplicar los dos modelos antes citados.

Para obtener los resultados numéricos de los estimadores de credibilidad para cada una de las sucursales en ambos modelos hemos diseñado nuestras propias funciones[39] en APL, que hemos denominado JEWELL y SUNDT respectivamente, y que hemos incluido en el workspace JERARQUICO, que junto con el workspace CREDI, elaborado por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987) se halla en un disket al final del presente trabajo.

6.2.2.6.1.- Aplicación del Modelo Jerárquico de JEWELL.

En este caso, vamos a considerar que **la cartera se halla dividida en un cierto número de subcarteras**, de manera que cada sucursal tiene asociados dos parámetros de riesgo, uno para cada nivel, y al mismo tiempo, que **las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo**. En líneas generales, es lo mismo que decir que vamos a aplicar el Modelo Jerárquico de JEWELL, cuyas hipótesis son las siguientes:

J.1) Las subcarteras $p = 1,2,\ldots,P$ son independientes.

J.2) Para cada $p = 1,2,\ldots,P$ y para cada θ_p dado, las pólizas son condicionalmente independientes.

---

39 El listado de estas dos funciones se halla en el apéndice del presente trabajo.

J.3) Para cada $p = 1,2,\ldots,P$; $j = 1,2,\ldots,k_p$ y para cada (θ_p, θ_{pj}) dado, las observaciones condicionales son independientes.

J.4) Todos los pares de variables (θ_p, θ_{pj}), con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, están idénticamente distribuidos.

J.4) Para todo p, j y s:

a) $E[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = \mu(\theta_p, \theta_{pj})$

b) $Var[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = \frac{1}{w_{pjs}}\cdot\sigma^2(\theta_p, \theta_{pj})$

donde $\mu(\theta_p, \theta_{pj})$ y $\sigma^2(\theta_p, \theta_{pj})$ no dependen de los subíndices p, j y s.

Al tratarse de un modelo en en cual se considera que la cartera está estructurada en dos niveles, no sólo deberemos calcular el estimador de credibilidad para cada sucursal, sino que un paso previo es estimar la prima de riesgo para cada subcartera considerada, $\mu(\theta_p)$, con $p = 1,2,\ldots,P$, cuya definición es la siguiente:

$$\mu(\theta_p) = E[\mu(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p] = E[X_{pjs}/\theta_p]$$

Como en los cuatro modelos aplicados anteriormente, lo que nos interesa es estimar la prima de riesgo a pagar el próximo año para cada una de las veinticinco sucursales, que en este caso están divididas en un cierto número de subcarteras. Si seguimos asumiendo las hipótesis de este modelo para los próximos periodos, el importe de los estimadores de credibilidad para cada sucursal son los valores previstos para las primas de riesgo individuales, sin necesidad de hacer ningún otro cálculo.

El estimador ajustado de credibilidad para la sucursal j-ésima adopta en este modelo la siguiente expresión:

$$\widehat{\mu(\theta_p, \theta_{pj})} = [1 - Z_{pj}]\cdot\widehat{\mu(\theta_p)} + Z_{pj}\cdot X_{pjw}$$

donde:

$$\widehat{\mu(\theta_p)} = [1 - Z_p]\cdot X_{zzw} + Z_p\cdot X_{pzw}$$

$$Z_{pj} = \frac{a\cdot w_{pj\bullet}}{S^2 + a\cdot w_{pj\bullet}}$$

$$Z_p = \frac{b\cdot Z_{p\bullet}}{a + b\cdot Z_{p\bullet}}$$

$$X_{pjw} = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{pjs}\cdot X_{pjs}}{w_{pj\bullet}}$$

$$X_{pzw} = \sum_{j=1}^{k_p} \frac{Z_{pj}\cdot X_{pjw}}{Z_{p\bullet}}$$

$$X_{zzw} = \sum_{p=1}^{P} \frac{Z_p\cdot X_{pzw}}{Z_\bullet}$$

siendo los estimadores propuestos para los parámetros estructurales S^2, a y b:

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p}\sum_{t=1}^{t_{pj}} w_{pjs}\cdot[X_{pjs} - X_{pjw}]^2}{\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p}(t_{pj} - 1)} \qquad \text{con } t_{pj} \geq 2$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj}\cdot[X_{pjw} - X_{pzw}]^2}{\sum_{p=1}^{P}(k_p - 1)} \qquad \text{con } k_p \geq 2$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{p=1}^{P} Z_p\cdot[X_{pzw} - X_{zzw}]^2}{P - 1}$$

Para obtener los estimadores de credibilidad para las veinticinco sucursales que integran nuestra cartera hemos elaborado nuestra propia función en APL denominada JEWELL, que se halla en el workspace JERARQUICO. Dicha función ha sido diseñada para el caso que el número de periodos observados para cada sucursal sea el mismo ($t_{pj} = t$), y se puede elegir el número de subcarteras a considerar entre 2 y 5. Su elaboración ha sido bastante complicada, ya que por un lado la existencia de subcarteras complica considerablemente el tratamiento de los datos, y por otro, al ser $\hat{a}$ y $\hat{b}$ pseudo-estimadores no se pueden calcular directamente, sino que su obtención sólamente es posible a través de un proceso iterativo, debiéndose desarrollar en este caso dos, uno para cada parámetro.

El proceso iterativo para calcular el parámetro estructural "a", que contiene a través de Z_{pj} y X_{pjw} el propio parámetro que estamos estimando, lo hemos iniciado haciendo los factores de credibilidad Z_{pj} iguales a la unidad. A continuación hemos calculado $Z_{p\cdot}$ y X_{pzw}, valores que hemos utilizado para calcular el parámetro $\hat{a}$, con el que hemos calculado unos nuevos valores para Z_{pj}, $Z_{p\cdot}$ y X_{pzw}. Con estos valores se obtiene un nuevo valor para el parámetro $\hat{a}$ más perfecionado que el anterior, volviéndose a iniciar el proceso que se repite hasta que el valor del parámetro $\hat{a}$ se estabiliza, que en nuestro caso es cuando el valor de $\hat{a}$ difiere del anterior en 0,00001 o cuando se han hecho 75 iteraciones.

Al ser el parámetro "b" también un pseudo-estimador nos encontramos con el mismo problema que para $\hat{a}$, ya que contiene a través de Z_p y X_{zzw} el propio parámetro que estamos estimando. Este segundo proceso iterativo lo hemos iniciado haciendo los factores de credibilidad para cada subcartera, Z_p, iguales a la unidad, con los cuales hemos obtenido un valor inicial para $Z_{\cdot}$ y X_{zzw}, que hemos utilizado para hallar el primer valor para $\hat{b}$. Con este primer valor, y junto con el del parámetro $\hat{a}$ obtenido en el proceso iterativo anterior, se calculan unos nuevos valores para Z_p, $Z_{\cdot}$ y X_{zzw}, que a su vez se utilizan para obtener un nuevo valor para $\hat{b}$. Este proceso se va repitiendo hasta que el valor de $\hat{b}$ se estabiliza, que en nuestro caso es cuando difiere del valor anterior en 0,00001 o cuando se han hecho 75 iteraciones.

En esta aplicación práctica, no está claro cuántas subcarteras debemos considerar dentro de la cartera, ya que en el Modelo de

BÜHLMANN-STRAUB se han observado tres y en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER sólamente dos. Como no sabemos cuál de las dos opciones elegir, pues a priori no podemos decir cuál de las dos es mejor, hemos aplicado el Modelo Jerárquico de JEWELL para los dos casos.

En primer lugar, hemos calculado los estimadores ajustados de credibilidad para cada sucursal en el supuesto que la cartera está dividida en dos subcarteras, estando formada la primera de ellas por las veinte primeras sucursales y la segunda por las cinco últimas. Para su obtención hemos utilizado la función JEWELL, siendo los resultados obtenidos los siguientes:

SUBCARTERA 1:

Sucursal	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad	Factor de Credibilidad
1	107,34302330	129,74523220	6,12097046E-6
2	111,13368980	129,74524550	6,65477247E-6
3	117,38734180	129,74528250	7,02843354E-6
4	120,82758620	129,74530490	7,22416065E-6
5	125,89573460	129,74534050	7,50885450E-6
6	104,98235290	129,74521960	6,04979681E-6
7	130,70319630	129,74537680	7,79354819E-6
8	134,78158460	129,74541120	8,30955508E-6
9	139,94560670	129,74545610	8,50528169E-6
10	144,87122740	129,74550310	8,84335475E-6
11	133,53378380	129,74539930	7,90030828E-6
12	152,70212770	129,74558060	9,19922089E-6
13	91,80379747	129,74526270	2,81138527E-6
14	114,46464650	129,74531550	3,52312587E-6
15	118,03240740	129,74532430	3,84340881E-6
16	143,68525900	129,74543160	4,46618060E-6
17	154,62181820	129,74549110	4,89322367E-6
18	121,13333333	129,74533720	3,73664785E-6
19	140,21200000	129,74541590	4,44838713E-6
20	150,87732340	129,74547050	4,78646293E-6

SUBCARTERA 2:

Sucursal	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad	Factor de Credibilidad
21	13,13333333	20,00404617	1,60142392E-6
22	21,25000000	20,00406010	2,34875333E-6
23	16,80180180	20,00405085	1,97508877E-6
24	15,97029703	20,00404992	1,79715316E-6
25	22,98620690	20,00406487	2,58006935E-6

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: M_0 = 74,87471327

Varianza esperada: $\hat{S}^2$ = 87226,45758

Varianza esperada dentro de las subcarteras: $\hat{a}$ = 0,001552075111

Varianza entre las subcarteras: $\hat{b}$ = 6102,102453

A continuación hemos aplicado de nuevo la función JEWELL para obtener los estimadores ajustados de credibilidad individuales, pero en el supuesto que la cartera está dividida en tres subcarteras, estando formadas la primera por las doce primeras sucursales, la segunda por las ocho siguientes y la tercera por las cinco últimas, siendo los resultados obtenidos en este caso:

SUBCARTERA 1:

Sucursal	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad	Factor de Credibilidad
1	107,34302330	128,72132262	5,70259003E-5
2	111,13368980	128,72145490	6,19987809E-5
3	117,38734180	128,72180310	6,54797679E-5
4	120,82758620	128,72201400	6,73031324E-5
5	125,89573460	128,72234760	6,99552871E-5
6	104,98235290	128,72120730	5,63628458E-5
7	130,70319630	128,72268920	7,26074277E-5
8	134,78158460	128,72301440	7,74143966E-5
9	139,94560670	128,72343460	7,92377176E-5
10	144,87122740	128,72387580	8,23870745E-5
11	133,53378380	128,72289950	7,36019767E-5
12	152,70212770	128,72460050	8,57021656E-5

SUBCARTERA 2:

Sucursal	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad	Factor de Credibilidad
13	91,80379747	132,18954260	2,61929362E-5
14	114,46464650	132,19001860	3,28238417E-5
15	118,03240740	132,19009350	3,58077204E-5
16	143,68525900	132,19107870	4,16096559E-5
17	154,62181820	132,19162300	4,55880871E-5
18	121,13333333	132,19021550	3,48130961E-5
19	140,21200000	132,19093290	4,14438873E-5
20	150,87732340	132,19143380	4,45934822E-5

SUBCARTERA 3:

Sucursal	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad	Factor de Credibilidad
21	13,13333333	21,33488651	1,49201958E-5
22	21,25000000	21,33500702	2,18828005E-5
23	16,80180180	21,33492546	1,84015099E-5
24	15,97029703	21,33491906	1,67437440E-5
25	22,98620690	21,33504857	2,40378730E-5

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo: $M_0 = 94{,}08271823$

Varianza esperada: $\hat{S}^2 = 87226{,}45758$

Varianza esperada dentro de las subcarteras: $\hat{a} = 0{,}01446061322$

Varianza entre las subcarteras: $\hat{b} = 4080{,}864371$

En los dos casos considerados, los estimadores individuales, X_{pjw}, y el estimador de la varianza esperada, $\hat{S}^2$, coinciden. Ello es debido a la propia definición de X_{pjw} y de $\hat{S}^2$, que es respectivamente:

$$X_{pjw} = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{pjs} \cdot X_{pjs}}{w_{pj\cdot}}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{\displaystyle\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} \sum_{t=1}^{t_{pj}} w_{pjs} \cdot [X_{pjs} - X_{pjw}]^2}{\displaystyle\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} (t_{pj} - 1)} \qquad t_{pj} \geq 2$$

y que a su vez coincide con la dada en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB para estos dos elementos[40]. Si la definición es la misma tanto en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB como en el Modelo Jerárquico de JEWELL, y el número de sucursales consideradas en total es el mismo, los resultados numéricos para X_{pjw} y $\hat{S}^2$ deben coincidir en ambos modelos, independientemente del número de subcarteras consideradas en el segundo modelo, puesto que

[40] Véanse los apartados 2.2.3. y 2.2.4.2. del presente trabajo.

su existencia no influye propiamente en el cálculo de X_{pjw} y $\hat{S}^2$, ya que hay tantos estimadores individuales como sucursales, y en $\hat{S}^2$ se utiliza toda la información de la cartera.

Como anteriormente hemos visto, un paso previo para poder hallar los estimadores de credibilidad individuales en este modelo, es calcular los estimadores de credibilidad para cada subcartera considerada, puesto que:

$$\widehat{\mu(\theta_p, \theta_{pj})} = Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot \widehat{\mu(\theta_p)}$$

siendo a su vez:

$$\widehat{\mu(\theta_p)} = Z_p \cdot X_{pzw} + [1 - Z_p] \cdot X_{zzw}$$

Cuando el número de subcarteras considerado es dos, los factores de credibilidad para cada una de ellas son muy elevados, siendo $Z_1 = 0{,}9979471514 \simeq 1$. Ello nos indica que se está dando un gran peso a la experiencia de cada subcartera frente a la de la cartera en su totalidad, X_{zzw}, lo que da lugar a que los estimadores de credibilidad para ambas subcarteras tengan unos valores muy próximos a sus estimadores individuales X_{pzw}, con p = 1,2, siendo el estimador de credibilidad para la primera subcartera ligeramente inferior.

Por el contrario, los factores de credibilidad obtenidos para cada sucursal son muy próximos a cero, de manera que en la determinación de los estimadores de credibilidad individuales, la experiencia propia de cada sucursal, X_{pjw}, apenas interviene, siendo los mismos muy próximos a los estimadores de credibilidad para cada subcartera.

Cuando consideramos tres subcarteras, los factores de credibilidad para cada subcartera también son muy elevados, sobre todo $Z_1 \simeq 1$, mientras que los factores de credibilidad individuales son muy reducidos, aunque ligeramente superiores a los obtenidos con dos subcarteras. Ello nos indica, que en este caso se da un poco más de peso a la experiencia propia de cada sucursal, pero sigue siendo tan reducido que apenas se aprecia en los estimadores de credibilidad individuales, que igual que antes, coinciden prácticamente con los obtenidos para cada subcartera.

Como ya hemos indicado, sea cual sea el número de subcarteras considerado, el importe de la varianza esperada entre las observaciones, $\hat{S}^2$, es siempre el mismo, mientras que los valores de la varianza esperada dentro de las subcarteras, $\hat{a}$, y de la varianza entre las subcarteras, $\hat{b}$, varían de un caso a otro. En este caso, el parámetro $\hat{a}$ es mayor cuando consideramos tres subcarteras, y el $\hat{b}$ cuando consideramos sólamente dos.

Lo que sí cabe mencionar es que, cuando sólo hemos considerado dos subcarteras, formada la primera por las veinte primeras sucursales, resulta que el estimador de credibilidad y el estimador individual para dicha subcartera, adoptan un valor intermedio entre los valores correspondientes a la primera y segunda subcartera cuando hemos considerado tres, es decir, cuando hemos desglosado la primera subcartera en dos, una formada por las doce primeras sucursales y la otra por las ocho siguientes.

Si comparamos los resultados obtenidos en Modelo Jerárquico de JEWELL, bajo los dos supuestos, con los del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, se aprecia en primer lugar que tanto si consideramos dos como tres subcarteras el estimador colectivo es superior en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, lo mismo que los factores de credibilidad individuales. En cuanto a los estimadores de credibilidad individuales, resulta que cuando hemos considerado sólo dos subcarteras éstos son superiores a los del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB para las siete primeras sucursales, de la octava a la décimooctava en algunos casos son superiores y en otro inferiores, mientras que para las siete últimas sucursales son inferiores, siendo la suma de los veinticinco estimadores de credibilidad P = 2694,925417 que es inferior a la obtenida en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB (P = 2801,858165).

En cuanto a los estimadores de credibilidad individual obtenidos al considerar tres subcarteras, para las siete primeras sucursales los de JEWELL son superiores a los de BÜHLMANN-STRAUB, para las cinco sucursales siguientes inferiores, para las tres siguientes superiores, y para las diez últimas de nuevo inferiores, excepto para la sucursal décimooctava. Bajo este supuesto, la suma de los veinticinco estimadores de credibilidad asciende a P = 2708,870393 que es ligeramente superior a la obtenida cuando sólo hemos considerado dos subcarteras, pero sigue siendo inferior a la del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB.

6.2.2.6.2.- Aplicación del Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

En la siguiente aplicación práctica vamos a considerar que la cartera considerada está dividida en un cierto número de subcarteras, de manera que cada sucursal tiene asociados dos parámetros de riesgo, al igual que en el Modelo Jerárquico de JEWELL, pero en este caso vamos a asumir que las observaciones esperadas siguen una función de tipo lineal, ya que los datos disponibles de la experiencia de reclamaciones presentan una tendencia lineal creciente a lo largo del tiempo.

Vamos a aplicar el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, pero en el caso particular que **n = 2**, cuyas hipótesis son las siguientes:

S.1) Las subcarteras $p = 1,2,\ldots,P$ son independientes.

S.2) Para cada $p = 1,2,\ldots,P$ y un θ_p dado, las pólizas $pj = p1, p2,\ldots, pk_p$ son condicionalmente independientes.

S.3) Los pares (θ_p, θ_{pj}) están idénticamente distribuidos.

S.4) Para todo p, j y s:

$$E[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p, \theta_{pj}) = \mu(\theta_p, \theta_{pj})$$

donde Y_{pj} son matrices dadas de dimensión (t_{pj},n), y $\beta(\theta_p, \theta_{pj})$ es un vector de regresión desconocido de dimensión $(n,1)$.

La prima de riesgo para una subcartera dada, por ejemplo, la p-ésima es:

$$\mu_p(\theta_p) = E[X_p/\theta_p] = Y_p^*\cdot\beta(\theta_p)$$

que es un vector de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},1)$, donde Y_p^* es una matriz particionada de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},n)$, formada por las k_p matrices Y_{pj} puestas en columna.

S.5) También asumimos que:

$$\phi_{pj} = E[Cov[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]] \quad y \quad \phi_p = E[Cov[X_p/\theta_p]]$$

con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, son matrices definidas positivas de dimensión (t_{pj},t_{pj}) y $(k_p \cdot t_{pj}, k_p \cdot t_{pj})$ respectivamente, y a la vez simétricas.

Además definimos:

$\beta(\theta_p) = E[\beta(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]$ con $p = 1,2,\ldots,P$, que es un vector de dimensión $(n,1)$.

$\beta = E[\beta(\theta_p)]$ vector de dimensión $(n,1)$.

$\Lambda_p = E[Cov[\beta(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]]$ matriz cuadrada y simétrica de dimensión (n,n).

$\Lambda = Cov[\beta(\theta_p)]$ matriz cuadrada y simétrica de dimensión (n,n).

Al considerar $n = 2$ y al ser el número de periodos observados para cada sucursal el mismo, $t_{pj} = t = 4$, resulta que las matrices dadas Y_{pj}, con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, están definidas del mismo modo para todas las sucursales, por lo que podemos prescindir de los subíndices, siendo:

$$Y_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que implica que las matrices Y_p^* van a tener en este caso dimensión $(k_p \cdot 4,2)$.

Lo que nos interesa al aplicar este modelo es obtener el importe estimado para las veinticinco primas de riesgo individuales que integran nuestra cartera para el próximo año, el quinto, que en este caso se hallan divididas en un cierto número de subcarteras. Si seguimos asumiendo las hipótesis de este modelo para los siguientes periodos, y al haber asumido que las matrices $Y_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, resulta que en el próximo periodo $s = 0$, y del estimador de credibilidad para cada sucursal sólo es significativo el punto de corte o término independiente, que es precisamente el importe estimado para la prima de riesgo individual en el quinto año.

En este modelo, el estimador ajustado de credibilidad para una póliza concreta la pj, por ejmplo, recordemos que adopta la siguiente expresión:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p,\theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj} \cdot Z_{pj} + \tilde{\beta}' \cdot [I - Z_{pj}] \right] \cdot Y_{pjs}$$

donde:

$\widehat{\mu_{pj}}(\theta_p) = \tilde{\beta}' \cdot Y'_{pj} = \left[\hat{\beta}'_p \cdot Z_p + \beta' \cdot [I - Z_p] \right] \cdot Y'_{pj}$ que es el estimador de credibilidad para la prima de riesgo de la subcartera p-ésima.

$$\hat{\beta}'_{pj} = X'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot (Y'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1}$$

$$Z_{pj} = Y'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot \Lambda_p \cdot [I + Y'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot \Lambda_p]^{-1}$$

$$\hat{\beta}'_p = X'_p \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot (Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^*)^{-1}$$

$$Z_p = Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot \Lambda \cdot [I + Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_{pj}^* \cdot \Lambda]^{-1}$$

$\beta' = E[\beta'(\theta_p)]$ que es uno de los parámetros estructurales que debemos estimar

siendo en este caso Z_{pj} y Z_p matrices de dimensión (2,2), y $\hat{\beta}'_{pj}$, $\hat{\beta}'_p$, $\tilde{\beta}'$ y β' vectores de dimensión (1,2).

El problema fundamental que se presenta a la hora de calcular los estimadores de credibilidad reside en la obtención de los estimadores de los parámetros estructurales[41]. Siguiendo a NORBERG, R. (1986), hemos asumido que existe una función positiva σ^2 y unas matrices conocidas, definidas positivas v_{pj}, con $p = 1,2,\ldots P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, tales que:

$$\mathrm{Cov}[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = \sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj}) \cdot v_{pj}^{-1}$$

de manera que:

$$\phi_{pj} = E[\sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj})] \cdot v_{pj}^{-1} = S^2 \cdot v_{pj}^{-1}$$

Nosotros hemos asumido, a su vez, que las matrices dadas v_{pj}^{-1}, vienen definidas del siguiente modo:

$$v_{pj}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{w_{pj1}},\ \frac{1}{w_{pj2}},\ \frac{1}{w_{pj3}},\ \frac{1}{w_{pj4}}\right)$$

es decir, hemos asumido que no existe correlación entre los montantes de las indemnizaciones para una sucursal dada, al igual que en el Modelo de

41 Véase para más detalles el apartado 5.3.7. del presente trabajo.

Regresión de HACHEMEISTER, siendo w_{pjs}, con $s = 1,2,3,4$, los pesos o ponderaciones naturales para cada sucursal en el tiempo, que vienen dados en el Cuadro 2 del apartado 6.2.1. del presente capítulo.

Del mismo modo que NORBERG, R. (1986) hemos considerado que los estimadores para los parámetros estructurales son los siguientes:

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} A'_{pj} \cdot Y_{pj} \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} A'_{pj} \cdot X_{pj} \right]$$

$$\hat{S}^2 = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} \text{traza}[B_{pj} \cdot B'_{pj} \cdot v_{pj}^{-1}] \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} \alpha_{pj} \right]$$

donde $\alpha_{pj} = X'_{pj} \cdot B_{pj} \cdot B'_{pj} \cdot X_{pj}$

$$\Lambda^* = \frac{1}{2} \cdot (G_1 + G'_1 - G_\emptyset - G'_\emptyset)$$

$$\Lambda^*_p = \frac{1}{2} \cdot [(G_2 + G'_2 - G_1 - G'_1) - \hat{S}^2 \cdot (H + H')]$$

con:

$$G_\emptyset = G^*_\emptyset \cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1} \qquad \text{siendo:}$$

$$G_0^* = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} \left[\sum_{p'=1}^{P-\{p\}} \sum_{j'=1}^{k_{p'}} A'_{p'j'} \cdot Y_{p'j'} \right]^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\sum_{p'=1}^{P-\{p\}} \sum_{j'=1}^{k_{p'}} A'_{p'j'} \cdot X_{p'j'} \cdot X'_{pj} \cdot A_{pj} \right] \right]$$

$$G_1 = G_1^* \cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1} \qquad \text{siendo:}$$

$$G_1^* = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j'=1}^{k_p-\{j\}} A'_{pj'} \cdot Y_{pj'} \right]^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j'=1}^{k_p-\{j\}} A'_{pj'} \cdot X_{pj'} \cdot X'_{pj} \cdot A_{pj} \right] \right]$$

$$G_2 = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} (A'_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1} \cdot A'_{pj} \cdot X_{pj} \cdot X'_{pj} \cdot A_{pj} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1}$$

$$H = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} (A'_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1} \cdot A'_{pj} \cdot v_{pj}^{-1} \cdot \cdot A_{pj} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1}$$

Para obtener los resultados numéricos de los estimadores de credibilidad hemos elaborado nuestra propia función en APL, denominada SUNDT, que se halla en el workspace JERARQUICO. Esta función ha sido diseñada para el caso particular que $n = 2$, que el número de periodos observados para cada sucursal sea el mismo ($t_{pj} = t$), y que las matrices dadas v_{pj}^{-1} vengan definidas del siguiente modo:

$$v_{pj}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{w_{pj1}}, \frac{1}{w_{pj2}}, \ldots, \frac{1}{w_{pjt}}\right)$$

A su vez, se puede elegir el número de subcarteras entre 2 y 5, y al mismo tiempo si queremos considerar las matrices A_{pj} y B_{pj} iguales para todas las sucursales o variables, que son las dos posibilidades admitidas por NORBERG, R. (1986), aunque él aconseja la segunda.

Cuando se elige la primera opción, que en nuestro caso es considerar las matrices A_{pj} y B_{pj}, ambas de dimensión (4,2), constantes para todas las sucursales, hemos utilizado como matrices A_{pj} la matriz A, definida del siguiente modo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

que es una de las posibles matrices cuyas columnas son dos vectores ortogonales que generan el mismo subespacio vectorial que los vectores de las matrices Y, y como matrices B_{pj} la matriz B, definida como sigue:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es también una de las posibles matrices cuyas columnas forman una base ortocomplementaria del subespacio vectorial generado por las columnas de las matrices Y, ya que según NORBERG, R. (1986) éstas son las condiciones que deben verificar las matrices A_{pj} y B_{pj}.

Y si se elige la segunda opción, las matrices A_{pj} y B_{pj} son variables, y vienen definidas como propone el propio NORBERG, R. (1986):

$$A'_{pj} = Y' \cdot v_{pj}$$

$$B_{pj} \cdot B'_{pj} = v_{pj} - v_{pj} \cdot Y \cdot (Y' \cdot v_{pj} \cdot Y)^{-1} \cdot Y' \cdot v_{pj}$$

en las cuales se tiene en cuenta la información de cada una de las sucursales.

Para poder ejecutar la función SUNDT, además de necesitar los datos de la experiencia de reclamaciones y de los pesos o ponderaciones naturales, que vienen dados en los Cuadros 1 y 2 del apartado 6.2.1. del presente capítulo, se precisa como un dato adicional los valores de $G_{\emptyset}^{*}$ y G_1^{*}, que deben ser calculados a parte de la función SUNDT, ya que nos ha sido imposible programar sus expresiones debido a su gran casuística.

Al igual que en el Modelo Jerárquico de JEWELL, hemos considerado en primer lugar que la cartera está dividida en dos subcarteras y en segundo lugar, dividida en tres subcarteras. Pero como a su vez, hemos admitido dos posibilidades en cuanto a la definición de las matrices A_{pj} y B_{pj}, resulta que hemos aplicado el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT para cuatro casos distintos:

$\boxed{\text{CASO 1}}$:

Consideramos la cartera dividida en dos subcarteras, la primera formada por las veinte primeras sucursales y la segunda por las cinco últimas, y consideramos también que las matrices A_{pj} y B_{pj} son constantes, siendo en este caso los resultados obtenidos los siguientes, con:

$$G_{\emptyset}^{*} = \begin{bmatrix} 341767,95 & 211932,3 \\ -58361,23 & -35897,6 \end{bmatrix}$$

y

$$G_{1}^{*} = \begin{bmatrix} 1837006,763 & 1074402,442 \\ -271180,0316 & -158580,9474 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 1:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 1:		
Punto de corte:	170,2472471	163,501411100
Pendiente:	-28,6609973	-25,438700950
Sucursal 2:		
Punto de corte:	172,7740749	168,515840500
Pendiente:	-28,1140292	-26,068091080
Sucursal 3:		
Punto de corte:	176,0692768	180,007213200
Pendiente:	-26,5513910	-28,348482160
Sucursal 4:		
Punto de corte:	179,8138987	184,244765300
Pendiente:	-26,6417423	-28,670354410
Sucursal 5:		
Punto de corte:	183,7960323	192,343177200
Pendiente:	-26,1046213	-30,050970640
Sucursal 6:		
Punto de corte:	166,6229212	161,562427800
Pendiente:	-28,1312660	-25,685383630
Sucursal 7:		
Punto de corte:	191,2998570	196,490396700
Pendiente:	-27,1106612	-29,497212140
Sucursal 8:		
Punto de corte:	198,7021761	197,089028500
Pendiente:	-28,5654701	-27,836203110
Sucursal 9:		
Punto de corte:	206,806539	199,262359300
Pendiente:	-29,785205	-26,356739710
Sucursal 10:		
Punto de corte:	209,6272455	209,878291100
Pendiente:	-28,7611626	-28,906135280
Sucursal 11:		
Punto de corte:	198	193,766187200
Pendiente:	-29	-27,052273170
Sucursal 12:		
Punto de corte:	216,9659307	222,561415600
Pendiente:	-28,4212028	-31,005434180

Sucursal 13:		
Punto de corte:	146,7825293	147,665202500
Pendiente:	-25,9302675	-26,096196770
Sucursal 14:		
Punto de corte:	178,4937656	171,848202900
Pendiente:	-29,6209476	-26,379174900
Sucursal 15:		
Punto de corte:	177,1096208	179,286936200
Pendiente:	-26,2647838	-27,707959550
Sucursal 16:		
Punto de corte:	211,6081303	209,619865000
Pendiente:	-29,7306117	-28,784998110
Sucursal 17:		
Punto de corte:	224,8448931	219,676429400
Pendiente:	-31,1899219	-28,816049850
Sucursal 18:		
Punto de corte:	180,1883692	182,811936500
Pendiente:	-26,6542504	-27,836032830
Sucursal 19:		
Punto de corte:	205,6272424	203,911443600
Pendiente:	-29,2829418	-28,470548840
Sucursal 20:		
Punto de corte:	218,9950915	216,818224200
Pendiente:	-30,2486126	-29,209624720

SUBCARTERA 2:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 21:		
Punto de corte:	24,82964515	24,196868460
Pendiente:	-5,39024453	-5,059454020
Sucursal 22:		
Punto de corte:	37,13117937	32,319635910
Pendiente:	-7,23677571	-5,038804450
Sucursal 23:		
Punto de corte:	30,37586906	27,889537960
Pendiente:	-6,22509625	-5,071008248
Sucursal 24:		
Punto de corte:	29,24093188	26,800486640
Pendiente:	-6,15189302	-5,012483147

Sucursal 25:

Punto de corte:	39,03516064	34,034078150
Pendiente:	-7,41264610	-5,093578873

Matrices de credibilidad:

SUBCARTERA 1:

Sucursal 1:

$$\begin{bmatrix} 1,1842581800 & -0,08904602201 \\ 4,3058779100 & -1,02023144700 \end{bmatrix}$$

Sucursal 2:

$$\begin{bmatrix} 1,1999772330 & -0,09627893835 \\ 4,6508726870 & -1,18357585600 \end{bmatrix}$$

Sucursal 3:

$$\begin{bmatrix} 1,2163536600 & -0,10298571930 \\ 5,0110082260 & -1,33323749200 \end{bmatrix}$$

Sucursal 4:

$$\begin{bmatrix} 1,2241905000 & -0,10635560530 \\ 5,1840010010 & -1,40882805900 \end{bmatrix}$$

Sucursal 5:

$$\begin{bmatrix} 1,2367246680 & -0,11189009700 \\ 5,4620166290 & -1,53330989100 \end{bmatrix}$$

Sucursal 6:

$$\begin{bmatrix} 1,1816525530 & -0,08800233036 \\ 4,2491601020 & -0,99699866330 \end{bmatrix}$$

Sucursal 7:

$$\begin{bmatrix} 1,2552623610 & -0,11946788310 \\ 5,8724336970 & -1,70238351100 \end{bmatrix}$$

Sucursal 8:

$$\begin{bmatrix} 1,2831756260 & -0,13200266240 \\ 6,4954915120 & -1,98478057800 \end{bmatrix}$$

Sucursal 9:

$$\begin{bmatrix} 1,2956426520 & -0,13722502280 \\ 6,7725391780 & -2,10160219400 \end{bmatrix}$$

Sucursal 10:

$$\begin{bmatrix} 1,3171282330 & -0,14650462850 \\ 7,2514771730 & -2,30984944100 \end{bmatrix}$$

Sucursal 11:

$$\begin{bmatrix} 1,2576281060 & -0,12119554340 \\ 5,9276377080 & -1,74277901100 \end{bmatrix}$$

Sucursal 12:

$$\begin{bmatrix} 1.3514156760 & -0,16137728030 \\ 8,0181829540 & -2,64376044000 \end{bmatrix}$$

Sucursal 13:

$$\begin{bmatrix} 1,1106172400 & -0,05989128212 \\ 2,8075051960 & -0,37209593630 \end{bmatrix}$$

Sucursal 14:

$$\begin{bmatrix} 1,1262169770 & -0,06494180963 \\ 3,0974903650 & -0,48153081970 \end{bmatrix}$$

Sucursal 15:

$$\begin{bmatrix} 1,1365116270 & -0,06796932993 \\ 3,3053130150 & -0,54618771620 \end{bmatrix}$$

Sucursal 16:

$$\begin{bmatrix} 1,1564728520 & -0,07523553211 \\ 3,7137677890 & -0,70611400300 \end{bmatrix}$$

Sucursal 17:

$$\begin{bmatrix} 1,1654597570 & -0,07861056545 \\ 3,9049998940 & -0,78068193680 \end{bmatrix}$$

Sucursal 18:

$$\begin{bmatrix} 1,1348299920 & -0,06712399206 \\ 3,2727377120 & -0,52694153740 \end{bmatrix}$$

Sucursal 19:

$$\begin{bmatrix} 1,1519662710 & -0,07351013195 \\ 3,6207494850 & -0,66790529290 \end{bmatrix}$$

Sucursal 20:

$$\begin{bmatrix} 1,1633126090 & -0,07764134684 \\ 3,8600903610 & -0,75883438750 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 2:

Sucursal 21:

$$\begin{bmatrix} 1,0912673990 & -0,05410368007 \\ 2,5852933760 & -0,24816359190 \end{bmatrix}$$

Sucursal 22:

$$\begin{bmatrix} 1,1074894520 & -0,05795506580 \\ 2,7888427480 & -0,32728931210 \end{bmatrix}$$

Sucursal 23:

$$\begin{bmatrix} 1,0998702360 & -0,05603856731 \\ 2,6834777040 & -0,28746226400 \end{bmatrix}$$

Sucursal 24:

$$\begin{bmatrix} 1,0939173820 & -0,05488722217 \\ 2,5919033380 & -0,26491156040 \end{bmatrix}$$

Sucursal 25:

$$\begin{bmatrix} 1,1094576000 & -0,05882181761 \\ 2,8039188350 & -0,34677911730 \end{bmatrix}$$

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Subcartera 1:		
Punto de corte:	190,15701490	192,315957000
Pendiente:	-27,96971571	-28,038709460
Subcartera 2:		
Punto de corte:	29,620113830	32,993680360
Pendiente:	-5,357475041	-5,270774167

Matrices de credibilidad:

Subcartera 1:

$$\begin{bmatrix} 3,561101096 & -0,0822754174 \\ 17,760760330 & 0,4293549265 \end{bmatrix}$$

Subcartera 2:

$$\begin{bmatrix} -0,0806931467 & -0,0402859039 \\ -7,4801125630 & 0,7189999554 \end{bmatrix}$$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo:

Punto de corte: 158,04
Pendiente: -23,46

Varianza esperada: $\hat{S}^2 = 587,7937275$

$$\Lambda^{*} = \begin{bmatrix} 23577,0896000 & -3402,4510390 \\ -3402,4510390 & 490,7333896 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{p}^{*} = \begin{bmatrix} 337,01113250 & -13,612901760 \\ -13,61290176 & 0 \end{bmatrix}$$

Con:

$$G_{0} = \begin{bmatrix} 5537,0025000 & -847,72920000 \\ -942,5883000 & 143,59040000 \end{bmatrix}$$

$$G_{1} = \begin{bmatrix} 29114,092100 & -4297,60978800 \\ -4297,609790 & 634,32378960 \end{bmatrix}$$

$$G_{2} = \begin{bmatrix} 29464,920000 & -4316,35400000 \\ -4316,354000 & 636,06680000 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0,0235061499500 & -0,008729778831 \\ -0,0087297788310 & 0,003982322281 \end{bmatrix}$$

CASO 2 :

Consideramos la cartera dividida en tres subcarteras, la primera formada por las doce primeras sucursales, la segunda por las ocho siguientes, y la tercera por las cinco últimas, y consideramos también que las matrices A_{pj} y B_{pj} son constantes, siendo en este caso los resultados obtenidos los siguientes, con:

$$G_0^* = \begin{bmatrix} 1355072,765 & 803068,2846 \\ -202391,9098 & -119920,8449 \end{bmatrix}$$

y

$$G_1^* = \begin{bmatrix} 1835219,949 & 1074192,032 \\ -271109,9818 & -158566,8312 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 1:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 1:		
Punto de corte:	170,2472471	162,971795900
Pendiente:	-28,6609973	-25,871554840
Sucursal 2:		
Punto de corte:	172,7740749	168,077389200
Pendiente:	-28,1140292	-25,871554840
Sucursal 3:		
Punto de corte:	176,0692768	180,162972200
Pendiente:	-26,5513910	-28,428503500
Sucursal 4:		
Punto de corte:	179,8138987	184,460732000
Pendiente:	-26,6417423	-28,777483860
Sucursal 5:		
Punto de corte:	183,7960323	192,975862200
Pendiente:	-26,1046213	-30,350068020
Sucursal 6:		
Punto de corte:	166,6229212	161,134315100
Pendiente:	-28,1312660	-25,495441510
Sucursal 7:		
Punto de corte:	191,2998570	196,875789000
Pendiente:	-27,1106612	-29,679442750
Sucursal 8:		
Punto de corte:	198,7021761	196,730246100
Pendiente:	-28,5654701	-27,675715210

Sucursal 9:		
Punto de corte:	206,806539	198,107974200
Pendiente:	-29,785205	-25,831998630
Sucursal 10:		
Punto de corte:	209,6272455	209,757898900
Pendiente:	-28,7611626	-28,854057550
Sucursal 11:		
Punto de corte:	198	193,168568300
Pendiente:	-29	-26,780694870
Sucursal 12:		
Punto de corte:	216,9659307	223,379002200
Pendiente:	-28,4212028	-31,378631680

SUBCARTERA 2:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 13:		
Punto de corte:	146,7825293	148,402973200
Pendiente:	-25,9302675	-26,494098260
Sucursal 14:		
Punto de corte:	178,4937656	172,557743400
Pendiente:	-29,6209476	-26,741461070
Sucursal 15:		
Punto de corte:	177,1096208	180,282179000
Pendiente:	-26,2647838	-28,192607000
Sucursal 16:		
Punto de corte:	211,6081303	210,724765100
Pendiente:	-29,7306117	-29,302418020
Sucursal 17:		
Punto de corte:	224,8448931	220,746530900
Pendiente:	-31,1899219	-29,311440790
Sucursal 18:		
Punto de corte:	180,1883692	183,791904800
Pendiente:	-26,6542504	-28,311995280
Sucursal 19:		
Punto de corte:	205,6272424	204,964351100
Pendiente:	-29,2829418	-28,966963990
Sucursal 20:		
Punto de corte:	218,9950915	218,006202100
Pendiente:	-30,2486126	-29,759101200

SUBCARTERA 3:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 21:		
Punto de corte:	24,82964515	24,461863750
Pendiente:	-5,39024453	-5,191350283
Sucursal 22:		
Punto de corte:	37,13117937	32,551208070
Pendiente:	-7,23677571	-5,148477878
Sucursal 23:		
Punto de corte:	30,37586906	28,145861970
Pendiente:	-6,22509625	-5,195447561
Sucursal 24:		
Punto de corte:	29,24093188	27,043695454
Pendiente:	-6,15189302	-5,133480033
Sucursal 25:		
Punto de corte:	39,03516064	34,265185130
Pendiente:	-7,41264610	-5,203485235

Matrices de credibilidad:

SUBCARTERA 1:

Sucursal 1:

$$\begin{bmatrix} 1,1960698100 & -0,09442069590 \\ 4,5534947150 & -1,13588456600 \end{bmatrix}$$

Sucursal 2:

$$\begin{bmatrix} 1,2149115380 & -0,10313524720 \\ 4,9686765910 & -1,33227039800 \end{bmatrix}$$

Sucursal 3:

$$\begin{bmatrix} 1,2346340620 & -0,11134993300 \\ 5,4034064450 & -1,51543001100 \end{bmatrix}$$

Sucursal 4:

$$\begin{bmatrix} 1,2442698080 & -0,11554175690 \\ 5,6165944380 & -1,60932180000 \end{bmatrix}$$

Sucursal 5:

$$\begin{bmatrix} 1,2599423320 & -0,12251911920 \\ 5,9647801580 & -1,76597262600 \end{bmatrix}$$

Sucursal 6:

$$\begin{bmatrix} 1,1930331510 & -0,09318188743 \\ 4,4871550130 & -1,10832576200 \end{bmatrix}$$

Sucursal 7:

$$\begin{bmatrix} 1,2832771540 & -0,13222930390 \\ 6,4822079110 & -1,98245501300 \end{bmatrix}$$

Sucursal 8:

$$\begin{bmatrix} 1,3200466420 & -0,14881665120 \\ 7,3031306550 & -2,35535140000 \end{bmatrix}$$

Sucursal 9:

$$\begin{bmatrix} 1,3366803650 & -0,15589242200 \\ 7,6731061670 & -2,80164014500 \end{bmatrix}$$

Sucursal 10:

$$\begin{bmatrix} 1,3661419530 & -0,16875325280 \\ 8,3301948190 & -2,80164014500 \end{bmatrix}$$

Sucursal 11:

$$\begin{bmatrix} 1,2866856110 & -0,13450670410 \\ 6,5609657510 & -2,03529262800 \end{bmatrix}$$

Sucursal 12:

$$\begin{bmatrix} 1,1138073410 & -0,19013408350 \\ 9,4215182470 & -3,28087376600 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 2:

Sucursal 13:

$$\begin{bmatrix} 1,1138073410 & -0,06109214154 \\ 2,8561194040 & -0,39501533240 \end{bmatrix}$$

Sucursal 14:

$$\begin{bmatrix} 1,1304014610 & -0,06665931177 \\ 3,1708712000 & -0,51591635400 \end{bmatrix}$$

Sucursal 15:

$$\begin{bmatrix} 1,1414483500 & -0,07002156930 \\ 3,3959475030 & -0.58790749980 \end{bmatrix}$$

Sucursal 16:

$$\begin{bmatrix} 1,1634744270 & -0,07823965083 \\ 3,8516481620 & -0,76884871800 \end{bmatrix}$$

Sucursal 17:

$$\begin{bmatrix} 1,7358199600 & -0,082112797480 \\ 4,0679695030 & -0,854398157200 \end{bmatrix}$$

Sucursal 18:

$$\begin{bmatrix} 1,1395653480 & -0,069069763660 \\ 3,3585448030 & -0,566284582800 \end{bmatrix}$$

Sucursal 19:

$$\begin{bmatrix} 1,1584426890 & -0,076271899250 \\ 3,7466573660 & -0,725281927600 \end{bmatrix}$$

Sucursal 20:

$$\begin{bmatrix} 1,1711184150 & -0,080992456530 \\ 4,0158325890 & -0,829192127100 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 3:

Sucursal 21:

$$\begin{bmatrix} 1,0939830350 & -0,054805904540 \\ 2,6118124830 & 0,259585350100 \end{bmatrix}$$

Sucursal 22:

$$\begin{bmatrix} 1,1104663540 & -0,058954674890 \\ 2,8293231360 & -0,345566253900 \end{bmatrix}$$

Sucursal 23:

$$\begin{bmatrix} 1,1026631160 & -0,056882730760 \\ 2,7165837050 & -0,302197667900 \end{bmatrix}$$

Sucursal 24:

$$\begin{bmatrix} 1,0966111490 & -0,055651878140 \\ 2,6209600560 & -0,277850662900 \end{bmatrix}$$

Sucursal 25:

$$\begin{bmatrix} 1,1125135250 & -0,059905839590 \\ 2,8479298010 & -0,367010465400 \end{bmatrix}$$

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Subcartera 1:		
Punto de corte:	189,014895400	192,315957000
Pendiente:	-27,875926140	-27,894639780
Subcartera 2:		
Punto de corte:	192,120833200	192,120833200
Pendiente:	-28,224109430	-28,145320910
Subcartera 3:		
Punto de corte:	29,623128820	33,092014130
Pendiente:	-5,359236963	-5,369745587

Matrices de credibilidad:

Subcartera 1:

$$\begin{bmatrix} 5,536896399 & -0,16715846170 \\ 31,700909670 & -0,16827185440 \end{bmatrix}$$

Subcartera 2:

$$\begin{bmatrix} -3,839253132 & 0,08723630295 \\ -33,781376220 & 1,60752117900 \end{bmatrix}$$

Subcartera 3:

$$\begin{bmatrix} -0,3066755980 & -0,04168707867 \\ -9,0786397400 & 0,70366813680 \end{bmatrix}$$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo:

Punto de corte: 158,04
Pendiente: -23,46

Varianza esperada: $\hat{S}^2 = 587,7937275$

$$\Lambda^* = \begin{bmatrix} 7512,7013140 & -1079,0677860 \\ -1079,0677860 & 154,5839452 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^*_p = \begin{bmatrix} 356,991422500 & -14,454561760 \\ -14,454561760 & 0 \end{bmatrix}$$

Con:

$$G_0 = \begin{bmatrix} 21581,4105000 & -3212,27313800 \\ -3223,1275470 & 479,68337960 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 29094,111810 & -4296,76812800 \\ -4296,768130 & 634,26732480 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 29464,920000 & -4316,35400000 \\ -4316,354000 & 636,06680000 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0,0235061499500 & -0,008729778831 \\ -0,0087297788310 & 0,003982322281 \end{bmatrix}$$

CASO 3 :

Consideramos la cartera dividida en dos subcarteras, la primera formada por las veinte primeras sucursales, y la segunda por las cinco últimas, y consideramos también que las matrices A_{pj} y B_{pj} son variables, siendo en este caso los resultados obtenidos los siguientes, con:

$$G_0^* = \begin{bmatrix} 29400139,18 & 57744144,12 \\ -5136728,996 & -10097388,90 \end{bmatrix}$$

y

$$G_1^* = \begin{bmatrix} 173394810,7 & 342139533,3 \\ -251129393,7 & -49588376,9 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 1:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 1:		
Punto de corte:	170,2472471	170,895465700
Pendiente:	-28,6609973	-28,542250780
Sucursal 2:		
Punto de corte:	172,7740749	170,744314200
Pendiente:	-28,1140292	-28,542250780
Sucursal 3:		
Punto de corte:	176,0692768	177,940808300
Pendiente:	-26,5513910	-27,425020080
Sucursal 4:		
Punto de corte:	179,8138987	181,678731000
Pendiente:	-26,6417423	-27,522191720
Sucursal 5:		
Punto de corte:	183,7960323	185,943527900
Pendiente:	-26,1046213	-27,137301930
Sucursal 6:		
Punto de corte:	166,6229212	167,543636500
Pendiente:	-28,1312660	-28,503064360
Sucursal 7:		
Punto de corte:	191,2998570	192,976516200
Pendiente:	-27,1106612	-27,937992030
Sucursal 8:		
Punto de corte:	198,7021761	199,684646700
Pendiente:	-28,5654701	-29,084767090
Sucursal 9:		
Punto de corte:	206,806539	207,293142300
Pendiente:	-29,785205	-30,093316660
Sucursal 10:		
Punto de corte:	209,6272455	210,636353700
Pendiente:	-28,7611626	-29,320256110
Sucursal 11:		
Punto de corte:	198	198,781946400
Pendiente:	-29	-29,427359200
Sucursal 12:		
Punto de corte:	216,9659307	218,202414800
Pendiente:	-28,4212028	-29,103298130

Sucursal 13:		
Punto de corte:	146,7825293	150,033028300
Pendiente:	-25,9302675	-27,208405140
Sucursal 14:		
Punto de corte:	178,4937656	178,787953400
Pendiente:	-29,6209476	-29,731681470
Sucursal 15:		
Punto de corte:	177,1096208	179,813783800
Pendiente:	-26,2647838	-28,020973330
Sucursal 16:		
Punto de corte:	211,6081303	211,377524600
Pendiente:	-29,7306117	-29,718614380
Sucursal 17:		
Punto de corte:	224,8448931	223,459283000
Pendiente:	-31,1899219	-30,681337020
Sucursal 18:		
Punto de corte:	180,1883692	183,501995500
Pendiente:	-26,6542504	-28,236503900
Sucursal 19:		
Punto de corte:	205,6272424	206,084772700
Pendiente:	-29,2829418	-29,588539910
Sucursal 20:		
Punto de corte:	218,9950915	217,929143800
Pendiente:	-30,2486126	-29,854950730

SUBCARTERA 2:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 21:		
Punto de corte:	24,82964515	21,976512200
Pendiente:	-5,39024453	-3,963661198
Sucursal 22:		
Punto de corte:	37,13117937	33,383723710
Pendiente:	-7,23677571	-5,550948463
Sucursal 23:		
Punto de corte:	30,37586906	27,108380710
Pendiente:	-6,22509625	-4,688300730
Sucursal 24:		
Punto de corte:	29,24093188	26,103487940
Pendiente:	-6,15189302	-4,656379878

Sucursal 25:

Punto de corte:	39,03516064	35,197037740
Pendiente:	-7,41264610	-5,664649420

Matrices de credibilidad:

SUBCARTERA 1:

Sucursal 1:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0182727610 & -0{,}0134645168 \\ 0{,}6254171570 & 0{,}6966303597 \end{bmatrix}$$

Sucursal 2:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0173587720 & -0{,}01266039018 \\ 0{,}5867591387 & 0{,}71524751650 \end{bmatrix}$$

Sucursal 3:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0166391360 & -0{,}01199290552 \\ 0{,}5646551392 & 0{,}72827968210 \end{bmatrix}$$

Sucursal 4:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0163572610 & -0{,}01172594329 \\ 0{,}5541989397 & 0{,}73389600230 \end{bmatrix}$$

Sucursal 5:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0159272680 & -0{,}01135282842 \\ 0{,}5383488932 & 0{,}74201411910 \end{bmatrix}$$

Sucursal 6:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0184386630 & -0{,}01362033263 \\ 0{,}6306445828 & 0{,}69356943830 \end{bmatrix}$$

Sucursal 7:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0153702240 & -0.01087101936 \\ 0{,}5234443689 & 0{,}75112458270 \end{bmatrix}$$

Sucursal 8:

$$\begin{bmatrix} 1,0147497040 & -0,01033958516 \\ 0,4990362653 & 0,76313087490 \end{bmatrix}$$

Sucursal 9:

$$\begin{bmatrix} 1,0145479520 & -0,01013348636 \\ 0,4923380072 & 0,76714401680 \end{bmatrix}$$

Sucursal 10:

$$\begin{bmatrix} 1,0142525710 & -0,00983602224 \\ 0,4809951328 & 0,77334483410 \end{bmatrix}$$

Sucursal 11:

$$\begin{bmatrix} 1,0152946500 & -0,01084250868 \\ 0,5163235283 & 0,75315845200 \end{bmatrix}$$

Sucursal 12:

$$\begin{bmatrix} 1,0137736360 & -0,00945107981 \\ 0,4661584751 & 0,78131145150 \end{bmatrix}$$

Sucursal 13:

$$\begin{bmatrix} 1,0253820630 & -0,02316527439 \\ 1,0074027390 & 0,48891271600 \end{bmatrix}$$

Sucursal 14:

$$\begin{bmatrix} 1,0236139170 & -0,01979780264 \\ 0,8928858573 & 0,55726235500 \end{bmatrix}$$

Sucursal 15:

$$\begin{bmatrix} 1.0224674870 & -0,01818170075 \\ 0,8549794093 & 0,58556461060 \end{bmatrix}$$

Sucursal 16:

$$\begin{bmatrix} 1,0204541250 & -0,01568416773 \\ 0,7623073783 & 0,63746212140 \end{bmatrix}$$

Sucursal 17:

$$\begin{bmatrix} 1,0194772060 & -0,01482121231 \\ 0,7306694187 & 0,65501843260 \end{bmatrix}$$

Sucursal 18:

$$\begin{bmatrix} 1,0227900990 & -0,01849836526 \\ 0,8748697269 & 0,57704588070 \end{bmatrix}$$

Sucursal 19:

$$\begin{bmatrix} 1,0208244250 & -0,01616454260 \\ 0,7818662869 & 0,62703583070 \end{bmatrix}$$

Sucursal 20:

$$\begin{bmatrix} 1,0196435690 & -0,01501508144 \\ 0,7416307120 & 0,65007157360 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 2:

Sucursal 21:

$$\begin{bmatrix} 1,0213615590 & -0,02855530371 \\ 1,2928502620 & 0,34748889950 \end{bmatrix}$$

Sucursal 22:

$$\begin{bmatrix} 1,0250047730 & -0,02440570857 \\ 1,1218237390 & 0,44490624870 \end{bmatrix}$$

Sucursal 23:

$$\begin{bmatrix} 1,0238766980 & -0,02631839662 \\ 1,1970634140 & 0,40143970540 \end{bmatrix}$$

Sucursal 24:

$$\begin{bmatrix} 1,0231706950 & -0,02780348379 \\ 1,2277029410 & 0,37470583130 \end{bmatrix}$$

Sucursal 25:

$$\begin{bmatrix} 1,0256107140 & -0,02381428391 \\ 1,0727688010 & 0,46495885570 \end{bmatrix}$$

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Subcartera 1:		
Punto de corte:	190,36597880	182,837930000
Pendiente:	-28,06630463	-30,065316320
Subcartera 2:		
Punto de corte:	29,439622260	30,723009530
Pendiente:	-5,267159906	-4,713016027

Matrices de credibilidad:

Subcartera 1:

$$\begin{bmatrix} 2,470101075 & 0,3911911229 \\ 10,453027570 & 3,7797942940 \end{bmatrix}$$

Subcartera 2:

$$\begin{bmatrix} 0,7823606162 & -0,1522870705 \\ -1,5265714060 & -0,0850422612 \end{bmatrix}$$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo:

Punto de corte: 178,3398596
Pendiente: -23,65478705

Varianza esperada: $\hat{S}^2 = 991,3734855$

$$\Lambda^{*} = \begin{bmatrix} 27958,119840 & -3934,7437850 \\ -3934,743785 & 553,3000849 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_p^{*} = \begin{bmatrix} 365,4037435 & -29,368148500 \\ -29,3681485 & 7,236860866 \end{bmatrix}$$

Con:

$$G_0 = \begin{bmatrix} 5789,252823 & -850,86636390 \\ -1009,363447 & 147,70556710 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 33747,37267 & -4839,73017400 \\ -4889,987206 & 701,00565200 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 34129,873750 & -4830,91380900 \\ -4969,980313 & 711,04430760 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0,0172461144700 & -0,006274347825 \\ -0,006274347825 & 0,002826174718 \end{bmatrix}$$

CASO 4 :

Consideramos la cartera dividida en tres subcarteras, la primera formada por las doce primeras sucursales, la segunda por las ocho siguientes, y la tercera por las cinco últimas, y consideramos también que las matrices A_{pj} y B_{pj} son variables, siendo en este caso los resultados obtenidos los siguientes, con:

$$G_0^* = \begin{bmatrix} 145221786 & 286354088,2 \\ -20545204,58 & -40511488,6 \end{bmatrix}$$

y

$$G_1^* = \begin{bmatrix} 173129436 & 341572949,3 \\ -25116296,39 & -49560431,13 \end{bmatrix}$$

<u>SUBCARTERA 1:</u>

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
<u>Sucursal 1:</u>		
Punto de corte:	170,2472471	169,906611000
Pendiente:	-28,6609973	-28,436788480
<u>Sucursal 2:</u>		
Punto de corte:	172,7740749	172,822689200
Pendiente:	-28,1140292	-28,092337720
<u>Sucursal 3:</u>		
Punto de corte:	176,0692768	177,064221800
Pendiente:	-26,5513910	-26,997957760
<u>Sucursal 4:</u>		
Punto de corte:	179,8138987	184,824381400
Pendiente:	-26,6417423	-27,105284920
<u>Sucursal 5:</u>		
Punto de corte:	183,7960323	185,121514000
Pendiente:	-26,1046213	-26,734869110
<u>Sucursal 6:</u>		
Punto de corte:	166,6229212	166,541298600
Pendiente:	-28,1312660	-28,016409260
<u>Sucursal 7:</u>		
Punto de corte:	191,2998570	192,186737100
Pendiente:	-27,1106612	-27,551976940
<u>Sucursal 8:</u>		
Punto de corte:	198,7021761	198,938812100
Pendiente:	-28,5654701	-28,719032250
<u>Sucursal 9:</u>		
Punto de corte:	206,806539	206,566299700
Pendiente:	-29,785205	-29,735884250

<u>Sucursal 10:</u>		
Punto de corte:	209,6272455	209,932748700
Pendiente:	-28,7611626	-28,973953680
<u>Sucursal 11:</u>		
Punto de corte:	198	198,007890400
Pendiente:	-29	-29,045494940
<u>Sucursal 12:</u>		
Punto de corte:	216,9659307	217,531895500
Pendiente:	-28,4212028	-28,771885430

<u>SUBCARTERA 2:</u>

	Estimador Individual	**Estimador de Credibilidad**
<u>Sucursal 13:</u>		
Punto de corte:	146,7825293	144,068713400
Pendiente:	-25,9302675	-23,997496675
<u>Sucursal 14:</u>		
Punto de corte:	178,4937656	173,556430700
Pendiente:	-29,6209476	-26,969166476
<u>Sucursal 15:</u>		
Punto de corte:	177,1096208	174,818111900
Pendiente:	-26,2647838	-25,444471350
<u>Sucursal 16:</u>		
Punto de corte:	211,6081303	206,988095100
Pendiente:	-29,7306117	-27,484720260
<u>Sucursal 17:</u>		
Punto de corte:	224,8448931	219,281165900
Pendiente:	-31,1899219	-28,563604260
<u>Sucursal 18:</u>		
Punto de corte:	180,1883692	178,404336400
Pendiente:	-26,6542504	-25,610225090
<u>Sucursal 19:</u>		
Punto de corte:	205,6272424	201,573092900
Pendiente:	-29,2829418	-27,286926680
<u>Sucursal 20:</u>		
Punto de corte:	218,9950915	213,680971800
Pendiente:	-30,2486126	-27,705113400

SUBCARTERA 3:

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Sucursal 21:		
Punto de corte:	24,82964515	18,874180730
Pendiente:	-5,39024453	-2,279556015
Sucursal 22:		
Punto de corte:	37,13117937	30,687200680
Pendiente:	-7,23677571	-4,124297754
Sucursal 23:		
Punto de corte:	30,37586906	24,228285710
Pendiente:	-6,22509625	-3,145887711
Sucursal 24:		
Punto de corte:	29,24093188	23,154295210
Pendiente:	-6,15189302	-3,042125045
Sucursal 25:		
Punto de corte:	39,03516064	32,611955220
Pendiente:	-7,41264610	-4,288477234

Matrices de credibilidad:

SUBCARTERA 1:

Sucursal 1:

$$\begin{bmatrix} 1,0201892620 & -0,01386662836 \\ 0,6287536106 & 0,69593112120 \end{bmatrix}$$

Sucursal 2:

$$\begin{bmatrix} 1,0191325810 & -0,01303538363 \\ 0,5898300028 & 0,71459908370 \end{bmatrix}$$

Sucursal 3:

$$\begin{bmatrix} 1,0185341680 & -0,01236094453 \\ 0,5676209310 & 0,72764396360 \end{bmatrix}$$

Sucursal 4:

$$\begin{bmatrix} 1,0180377210 & -0,01208860578 \\ 0,5571019840 & 0,73327020600 \end{bmatrix}$$

Sucursal 5:

$$\begin{bmatrix} 1,0175555350 & -0,01170623714 \\ 0,5411565433 & 0,74140542440 \end{bmatrix}$$

Sucursal 6:

$$\begin{bmatrix} 1,0203695360 & -0,01402418413 \\ 0,6340070102 & 0,69286697900 \end{bmatrix}$$

Sucursal 7:

$$\begin{bmatrix} 1,0169670260 & -0,01122129478 \\ 0,5261965827 & 0,75052152220 \end{bmatrix}$$

Sucursal 8:

$$\begin{bmatrix} 1,0162612600 & -0,01067382030 \\ 0,5016329493 & 0,76255733460 \end{bmatrix}$$

Sucursal 9:

$$\begin{bmatrix} 1,0160398170 & -0,01046564456 \\ 0,4949000861 & 0,76657420420 \end{bmatrix}$$

Sucursal 10:

$$\begin{bmatrix} 1,0157057140 & -0,01016255391 \\ 0,4834881286 & 0,772785245500 \end{bmatrix}$$

Sucursal 11:

$$\begin{bmatrix} 1,0168543250 & -0,01118297996 \\ 0,5190057429 & 0,75257360330 \end{bmatrix}$$

Sucursal 12:

$$\begin{bmatrix} 1,0151866180 & -0,00977067083 \\ 0,4685792186 & 0,78076450630 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 2:

Sucursal 13:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0289083760 & -0{,}02378310250 \\ 1{,}0137761230 & 0{,}48779721430 \end{bmatrix}$$

Sucursal 14:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0266217580 & -0{,}02036548254 \\ 0{,}8982853427 & 0{,}55624434240 \end{bmatrix}$$

Sucursal 15:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0253678990 & -0{,}01875387373 \\ 0{,}8601995782 & 0{,}58453579440 \end{bmatrix}$$

Sucursal 16:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0229961970 & -0{,}01621081669 \\ 0{,}7668480396 & 0{,}63652229830 \end{bmatrix}$$

Sucursal 17:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0219292490 & -0{,}01533437394 \\ 0{,}7350385199 & 0{,}65410491600 \end{bmatrix}$$

Sucursal 18:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0257805030 & -0{,}01908875310 \\ 0{,}8802718872 & 0{,}57598033290 \end{bmatrix}$$

Sucursal 19:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0234485450 & -0{,}01670280167 \\ 0{,}7865631523 & 0{,}62607331150 \end{bmatrix}$$

Sucursal 20:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0221465470 & -0{,}01553768400 \\ 0{,}7460989664 & 0{,}64913948960 \end{bmatrix}$$

SUBCARTERA 3:

Sucursal 21:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0270999880 & -0{,}02945033223 \\ 1{,}3037100150 & 0{,}34579626270 \end{bmatrix}$$

Sucursal 22:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0292948900 & -0{,}02516120925 \\ 1{,}1297891490 & 0{,}44350465220 \end{bmatrix}$$

Sucursal 23:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0287550910 & -0{,}02712985194 \\ 1{,}2061894700 & 0{,}39992287140 \end{bmatrix}$$

Sucursal 24:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0283083610 & -0{,}02861381697 \\ 1{,}2372814670 & 0{,}37319625760 \end{bmatrix}$$

Sucursal 25:

$$\begin{bmatrix} 1{,}0295251470 & -0{,}02451040341 \\ 1{,}0799573610 & 0{,}46368161620 \end{bmatrix}$$

	Estimador Individual	Estimador de Credibilidad
Subcartera 1:		
Punto de corte:	189,20865420	184,742865900
Pendiente:	-27,97038336	-28,584687280
Subcartera 2:		
Punto de corte:	192,13274710	207,980471700
Pendiente:	-28,22343159	-24,998422060
Subcartera 3:		
Punto de corte:	29,43657954	39,725742630
Pendiente:	-5,26670323	-2,554600402

Matrices de credibilidad:

Subcartera 1:

$$\begin{bmatrix} 2,000294811 & 0,1426158702 \\ 6,623687881 & 1,9346907840 \end{bmatrix}$$

Subcartera 2:

$$\begin{bmatrix} -4,124421668 & -1,0270049200 \\ -33,686364580 & -5,7702528070 \end{bmatrix}$$

Subcartera 3:

$$\begin{bmatrix} 0,4417443055 & -0,2036986956 \\ -3,5725250860 & -0,3546786114 \end{bmatrix}$$

Parámetros estructurales:

Estimador colectivo:

Punto de corte: 178,3398596
Pendiente: -25,6547870

Varianza esperada: $\hat{S}^2 = 991,3734855$

$$\Lambda^* = \begin{bmatrix} 5393,4474140 & -822,0302719 \\ -822,0302719 & 124,2690941 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^*_p = \begin{bmatrix} 406,27323810 & -31,65472206 \\ -31,65472206 & 7,36482662 \end{bmatrix}$$

Con:

$$G_0 = \begin{bmatrix} 28313,055760 & -4075,4125070 \\ -4005,671182 & 576,6085921 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 33706,503170 & -4837,17866300 \\ -4887,965570 & 700,87768630 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 34129,873750 & -4830,91380900 \\ -4969,980313 & 711,04430760 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0,017246114470 & -0,006274347825 \\ -0,006274347825 & 0,002826174718 \end{bmatrix}$$

En los cuatro casos que hemos considerado, los estimadores individuales para las veinticinco sucursales coinciden con los obtenidos en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, puesto que su definición es la misma en ambos modelos, ya que en el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT hemos asumido que:

$$\phi_{pj} = S^2 \cdot v_{pj}^{-1}$$

siendo:

$$v_{pj} = \text{diag}(w_{pj1}, w_{pj2}, \ldots, w_{pjt})$$

Si no hubiésemos considerado las matrices ϕ_{pj} y v_{pj} definidas de este modo, los estimadores individuales para los cuatro casos seguirían coincidiendo pero ya no con los obtenidos en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

En los Casos 1 y 2, lo primero que se observa es que los valores de $\hat{\beta}$, $\hat{S}^2$, G_2 y H coinciden ya que su definición es la misma, pues no depende del número de subcarteras consideradas. Por el contrario, las matrices G_0 y G_1 difieren de un caso a otro, siendo la matriz G_0 mayor con tres subcarteras que con dos, mientras que las matrices G_1 son prácticamente iguales en ambos casos.

Otro elemento a destacar, es que en los dos casos en las matrices Λ_p^* el elemento que se halla en la segunda fila y segunda columna vale 0. En realidad su valor no es 0, sino que es un número negativo, pero al tratarse de una varianza ésta siempre debe ser positiva, y es por ello que en la obtención de dicha matriz hemos impuesto que para los elementos de la diagonal principal se tome como valor el máximo entre 0 y el valor realmente obtenido. Ello no quiere decir que si hubiésemos elegido como matrices A_{pj} y B_{pj} otras, este problema se hubiese presentado, como ha ocurrido al considerar las matrices A_{pj} y B_{pj} variables. Al mismo tiempo, también se aprecia que la matriz Λ^* obtenida al considerar tres subcarteras es inferior que la obtenida con dos, ocurriendo lo contrario para la matriz Λ_p^*.

En cuanto a los estimadores de credibilidad para cada subcartera, en el Caso 1 ambos estimadores son superiores a sus respectivos estimadores individuales, mientras que en el Caso 2 el de la segunda subcartera es inferior a su estimador individual. Sin embargo, en los dos casos los estimadores de credibilidad son similares a sus respectivos estimadores individuales, lo que indica que se está dando un gran peso a la experiencia propia de cada subcartera en la determinación de los estimadores de credibilidad, frente al poco peso dado a la información de toda la cartera.

En este modelo, los factores de credibilidad al ser matrices no ayudan a la hora de interpretar los resultados, y es difícil indicar si en los estimadores de credibilidad individuales se da mayor importancia al estimador de credibilidad obtenido para cada subcartera o a la propia experiencia. Lo único que podemos decir, es que en los dos casos los estimadores de credibilidad individuales están próximos a sus estimadores individuales, pero no excesivamente, sin embargo no se puede hablar de un comportamiento homogéneo, ya que para algunas sucursales son superiores y para otras inferiores.

Por otro lado, los estimadores de credibilidad individuales obtenidos en el Caso 2 para el quinto año para las trece últimas sucursales, son superiores que los obtenidos en el Caso 1, mientras que los obtenidos para las doce primeras sucursales en unos casos son mayores y en otros menores. Sin embargo, si comparamos la prima total a pagar por la entidad bancaria el quinto año en el Caso 1, que asciende $P = 3946,101361$, con la obtenida en el Caso 2, cuyo importe es $P = 3953,74727$, la diferencia existente entre ellas es prácticamente despreciable. Al mismo tiempo, si comparamos estas dos primas totales con la obtenida al aplicar el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, que asciende a $P = 3957,70118$, ambas son inferiores.

En los Casos 3 y 4, con las matrices A_{pj} y B_{pj} variables, resulta al igual que en la comparación de los Casos 2 y 3, que los valores de $\hat{\beta}$, $\hat{S}^2$, G_2 y H coinciden en ambos casos, ya que su definición es la misma, la matriz G_0 es mayor con tres subcarteras que con dos y las matrices G_1 son prácticamente iguales, al mismo tiempo que la matriz Λ^* obtenida al considerar tres subcarteras es inferior a la obtenida con dos subcarteras, mientras que la matriz Λ_p^* es superior con tres subcarteras.

En cuanto a los estimadores de credibilidad para cada subcartera, resulta que en el Caso 3, el de la primera subcartera es inferior a su estimador individual, lo mismo que en el Caso 4, aunque en ambos casos tienen unos valores similares, lo que nos indica la gran importancia que tienen los estimadores individuales en la determinación de los estimadores de credibilidad para cada subcartera.

Los estimadores de credibilidad individuales obtenidos en el Caso 3, tienen unos valores similares a sus estimadores individuales, aunque son ligeramente superiores para las veintiuna primeras sucursales, siendo a su vez superiores a los obtenidos en el Caso 1 (dos subcarteras con A_{pj} y B_{pj} constantes), excepto para j = 11,23,24,25. Al mismo tiempo, presentan notables diferencias con los estimadores de credibilidad obtenidos en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, siendo considerablemente superiores para las diecinueve primeras sucursales, excepto para j = 10,12,16.

Por otro lado, los estimadores de credibilidad obtenidos en el Caso 4 son inferiores a los obtenidos en el Caso 3, circunstancia que también se pone de manifiesto si comparamos las primas totales previstas a pagar por la entidad bancaria, que en el Caso 3 asciende a P = 3980,078132 y en el Caso 4 a P = 3917,371936.

6.3.- Comparación global de los resultados obtenidos.

El objetivo de esta aplicación práctica consiste en prever el importe de la prima de riesgo que en total deberá pagar la entidad bancaria el próximo año, el quinto, para seguir ofreciendo a sus clientes el seguro en caso de muerte. Dicha prima la hemos obtenido como suma de las veinticinco primas de riesgo individuales previstas para el quinto año, que han sido calculadas aplicando algunos de los modelos propuestos dentro del marco de la Teoría de la Credibilidad.

Para obtener dichas primas, hemos considerado en primer lugar que cada una de las veinticinco sucursales que integran la cartera viene caracterizada por un solo parámetro de riesgo, y bajo esta hipótesis hemos aplicado el Modelo de BÜHLMANN, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, el Modelo Semilineal de De VYLDER y el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER. Sin embargo, al aplicar el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, se ha puesto de manifiesto un hecho importante: las sucursales las podemos dividir en tres grupos bastante diferenciados, y dentro de cada uno de ellos, el comportamiento de las mismas es similar, volviéndose a manifestar, en este caso la existencia de dos grupos, al aplicar el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER. Ello nos ha hecho pensar que no es del todo correcto considerar que cada sucursal tiene asociado un solo parámetro de riesgo, sino que debemos considerar **una jerarquización con dos niveles dentro de la cartera**, estando cada sucursal caracterizada por dos parámetros de riesgo, uno para cada nivel considerado, el de las subcarteras y el de las sucursales. Y es por ello, que en segundo lugar hemos aplicado el Modelo Jerárquico de JEWELL y el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Como es de suponer, la entidad aseguradora que tiene contratado el seguro que estamos estudiando, eligirá aplicar de entre todos los modelos que hemos citado, aquel que se adecue lo mejor posible al caso estudiado, que en este caso resulta ser el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

En primer lugar hemos aplicado el **Modelo de BÜHLMANN**[42], cuyos estimadores de credibilidad son los más bajos que hemos obtenido, siendo el importe previsto para la prima a pagar en total por la entidad bancaria el quinto año P = 2484,750001. Este modelo, como ya hemos indicado, no es adecuado para prever las primas de riesgo individuales, puesto que asume la existencia de homogeneidad en el tiempo tanto para las observaciones esperadas como en la matriz de covarianzas, al mismo tiempo que considera que todas las sucursales tienen la misma importancia dentro de la cartera. En nuestro caso no podemos considerar que los datos de la experiencia de reclamaciones, dados en el Cuadro 1 del apartado 6.2.1. del presente capítulo, tengan un carácter homogéneo, ya que presentan una tendencia claramente creciente de tipo lineal,y a su vez, si observamos los pesos o ponderasciones naturales dados en el Cuadro 2 del apartado 6.2.1. también del presente capítulo, es evidente que todas las sucursales no tienen el mismo peso dentro de la cartera, sino que unas tienen mayor importancia que las otras.

Del mismo modo que el Modelo de BÜHLMANN es inadecuado en este caso para obtener el importe estimado de las primas de riesgo individuales para el próximo año, también lo es el **Modelo Semilineal de De VYLDER**[43] ya que adolece de los mismos inconvenientes, a pesar de que en lugar de trabajar directamente con los datos, los transforma previamente a través de unas funciones dadas. Nosotros hemos considerado una única función dada, f(X), para la cual hemos considerado cuatro definiciones:

---

42 Véase para más detalles el apartado 6.2.2.1. del presente capítulo.

43 Véase para más detalles el apartado 6.2.2.3. del presente capítulo.

1º) $f(X) = 1{,}05 \cdot X$

2º) $f(X) = X$

3º) $f(X) = X^2$

4º) $f(X) = \ln X$

al mismo tiempo que hemos elegido como función $f_\emptyset(X)$, la función identidad ($f_\emptyset(X) = X$).

De la aplicación de este modelo cade destacar que cuando la función dada es **$f(X)$ = CONSTANTE·X**, los estimadores de credibilidad coinciden exactamente con los obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN, aunque los factores de credibilidad son distintos ya que, en este caso los estimadores de credibilidad semilineales adoptan la siguiente expresión:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = \mathrm{CONSTANTE} \cdot Z \cdot \bar{X} + [1 - \mathrm{CONSTANTE}] \cdot M_\emptyset$$

siendo:

$$\mathrm{CONSTANTE} \cdot Z = Z_{\text{BÜHLMANN}}$$

y en el caso particular que la constante es igual a la unidad, el Modelo Semilineal de De VYLDER se convierte en el Modelo de BÜHLMANN.

Por otro lado, cuando $f(X) = X^2$ ó $f(X) = \ln X$, los estimadores de credibilidad ya no coinciden con los de BÜHLMANN. En algunos casos son mayores y en otros menores, pero no se puede decir que presenten grandes diferencias.

Lo que sí cabe mencionar, es que la prima de riesgo total a pagar por la entidad bancaria es siempre la misma, sea cual sea la función dada $f(X)$ que se considere, y además coincide con la obtenida en el Modelo de BÜHLMANN que asciende a $P = 2484{,}75$.

Cuando la función $f(X) = \text{CONSTANTE}\cdot X$, es lógico que la suma de los estimadores de credibilidad coincida con la obtenida en el Modelo de BÜHLMANN, ya que los estimadores de credibilidad son iguales en los dos modelos, pero cuando $f(X) = X^2$ ó $f(X) = \ln X$ los estimadores de credibilidad ya no coinciden con los obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN, pero al sumarse los estimadores mayores compensan a los menores, y el resultado de la suma es el mismo.

Otro de los modelos que hemos aplicado ha sido el **Modelo de BÜHLMANN-STRAUB**[44] el cual, como ya sabemos, es una extensión del Modelo de BÜHLMANN. En este modelo, se abandona la hipótesis de homogeneidad en el tiempo en cuanto a la matriz de covarianzas, aunque se sigue asumiendo que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, hipótesis que no puede considerarse válida en nuestro caso, pues como ya hemos dicho, la experiencia de reclamaciones presenta una clara tendencia lineal creciente. Sin embargo, la introducción de los pesos o ponderaciones naturales para cada sucursal, junto con la novedad de las varianzas variables en el tiempo, hace que este modelo se adapte mejor al caso estudiado que no los modelos anteriores. Los estimadores de credibilidad obtenidos son, para todas las sucursales, superiores a los del Modelo de BÜHLMANN, siendo la prima total a pagar por la entidad bancaria $P = 2801{,}858165$.

A pesar de que el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB sigue siendo inadecuado para tratar el caso que estamos analizando, nos ha puesto de manifiesto un hecho importante: **la necesidad de introducir una jerarquización con dos niveles dentro de la cartera**, ya que en la

44 Véase para más detalles el apartado 6.2.2.2. del presente capítulo.

aplicación numérica del ismo, hemos observado que los factores de credibilidad obtenidos para cada sucursal no presentan el mismo comportamiento en toda la cartera, sino que:

•) Para las doce primeras sucursales, los factores de credibilidad están comprendidos entre 0,773 y 0,839, lo que indica que se está dando mayor peso a la experiencia individual que no a la colectiva, siendo los estimadores de credibilidad muy próximos a los individuales, aunque ligeramente inferiores excepto para la primera y la sexta sucursal.

•) Para las ocho siguientes sucursales, los factores de credibilidad son inferiores al de las doce primeras sucursales, y sus valores están comprendidos entre 0,61 y 0,735. En estas sucursales se sigue dando mayor peso a la experiencia individual que no a la colectiva pero ya no de forma tan agudizada.

•) Y por último, para las cinco últimas sucursales, los factrores de credibilidad están comprendidos entre 0,47 y 0,60, siendo en este caso bastante pequeños. Cabe destacar que el valor para la sucursal vigésimoprimera es 0,5. En estas sucursales, se da aproximadamente el mismo peso a la experiencia individual que a la colectiva, aunque los estimadores de credibilidad son muy superiores a los individuales debido al elevado valor del estimador colectivo M_0.

Siguiendo dentro de la línea de los modelos no jerárquicos, hemos aplicado también el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER[45], que es el que mejor se adecua al caso estudiado, ya que en el mismo la hipótesis de homogeneidad en el tiempo es abandonada completamente y es sustituida por otra de tipo polinómica para las observaciones esperadas. Nosotros hemos considerado el caso particular que n = 2, es decir, una **función de tipo lineal** puesto que, como ya hemos dicho, las indemnizaciones pagadas presentan una tendencia lineal creciente. Para obtener los estimadores de credibilidad en este modelo, hemos asumido que no existe correlación en el tiempo entre los montantes de las indemnizaciones para una sucursal dada, y hemos definido las matrices dadas v_j, con $j = 1,2,\ldots,k$, del siguiente modo:

$$v_j = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{w_{j1}}, \frac{1}{w_{j2}}, \frac{1}{w_{j3}}, \frac{1}{w_{j4}}\right)$$

De los estimadores de credibilidad que hemos obtenido, lo único que nos interesa es el importe del punto de corte o término independiente, ya que es el valor de la prima de riesgo prevista para el quinto año.

En este modelo, los estimadores de credibilidad obtenidos son superiores al estimador colectivo, excepto para la sucursal décimotercera y para las cinco últimas sucursales, mientras que si los comparamos con los estimadores individuales para algunas sucursales son superiores y, para otros, inferiores. Lo que sí podemos decir es que para todas las sucursales, los estimadores de credibilidad están muy próximos a sus

45 Véase para más detalles el apartado 6.2.2.4. del presente capítulo.

respectivos estimadores individuales lo que nos está indicando que se da mucho peso a la experiencia individual para prever las primas de riesgo para el próximo año.

Por otro lado, si comparamos el importe de los estimadores de credibilidad de HACHEMEISTER, con los de BÜHLMANN-STRAUB, se observa que para las veinte primeras sucursales, los obtenidos en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER son superiores a los de BÜHLMANN-STRAUB, mientras que para las cinco últimas sucursales pasa exactamente lo contrario.

En el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER no se contempla de forma tan clara la necesidad de dividir la cartera considerada en tres subcarteras como se vió en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, sino más bien en dos, la primera formada por las veinte primeras sucursales, y la segunda formada por las cinco últimas, aunque sí es evidente la necesidad de introducir una jerarquización a dos niveles dentro de la cartera.

La entidad aseguradora va a elegir, de entre estos cuatro modelos que hemos citado hasta ahora, sin ninguna duda el de HACHEMEISTER, ya que es el que mejor se adapta al caso estudiado, aunque es el que proporciona la prima total de riesgo a cobrar más alta, que en este caso asciende a P = 3957,70118.

Para obtener los estimadores de credibilidad en cada uno de estos cuatro modelos, hemos utilizado las funciones elaboradas en APL por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987) denominadas BUHLMANN, BUHLMANNSTRA, SEMILINEAR y HACHEMEISTER, ya que se ajustan perfectamente a nuestras necesidades.

Una vez aplicados estos cuatro modelos, el siguiente paso ha sido introducir **una jerarquización a dos niveles** dentro de la cartera, ya que tanto en la aplicación del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB como en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, nos hemos percatado de su existencia.

Aunque los datos de las indemnizaciones presentan una tendencia lineal creciente, hemos aplicado el Modelo Jerárquico de JEWELL junto con el Modelo Jerárquico de SUNDT. Para obtener los resultados numéricos en ambos modelos, hemos diseñado nuestras propias funciones también en APL, que hemos denominado JEWELL y SUNDT respectivamente, y que hemos incluido en el workspace JERARQUICO.

En primer lugar hemos aplicado el **Modelo Jerárquico de JEWELL**[46], bajo dos supuestos, con dos y después con tres subcarteras. En los dos casos, los estimadores individuales para las primas de riesgo y el estimador de la varianza esperada, $\hat{S}^2$, coinciden y a su vez, con los valores obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, ya que su definición es la misma en ambos modelos.

Tanto si el número de subcarteras considerado es dos como si es tres, resulta que los factores de credibilidad para cada subcartera son muy elevados, mientras que los factores de credibilidad individuales son muy reducidos, aunque al considerar tres subcarteras son ligeramente superiores. En cuanto a los estimadores de credibilidad para cada subcartera, tanto si consideramos dos subcarteras como tres, están muy próximos a sus respectivos estimadores individuales, X_{pzw}, lo que indica el poco peso que tiene el estimador colectivo de la cartera en la determinación de estos estimadores de credibilidad.

Por otro lado, los estimadores de credibilidad individuales coinciden prácticamente con los obtenidos para cada subcartera, de manera

---

46 Véase para más detalles el apartado 6.2.2.6.1. del presente capítulo.

que los estimadores individuales para cada sucursal tienen, en este modelo, un escaso peso en la determinación de los mismos.

Si la entidad aseguradora tuviese que elegir entre aplicar el Modelo Jerárquico de JEWELL con dos o tres subcarteras, seguramente eligiría aplicarlo con tres subcarteras, ya que es el número de subcarteras que se han detectado en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, siendo en este caso el importe de la prima total a pagar por parte de la entidad bancaria ligeramente superior que con dos subcarteras.

Por último, hemos aplicado el **Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT**[47], en el caso particular que n = 2, esto es, considerando que las observaciones esperadas se ajustan a una función lineal, que es lo que ocurre en nuestro caso, y considerando también que las matrices ϕ_{pj}, con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, vienen definidas del siguiente modo:

$$\phi_{pj} = S^2 \cdot v_{pj}^{-1}$$

con:

$$v_{pj} = \mathrm{diag}(w_{pj1}, w_{pj2}, w_{pj3}, w_{pj4})$$

Hemos aplicado este modelo, a su vez, bajo dos supuestos en cuanto a las matrices A_{pj} y B_{pj}. En primer lugar las hemos considerado constantes para cada sucursal, siendo:

$$A_{pj} = A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B_{pj} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

47 Véase para más detalles el apartado 6.2.2.6.2. del presente capítulo.

y en segundo lugar variables, y definidas como propone el propio NORBERG, R. (1986):

$$A'_{pj} = Y' \cdot v_{pj}$$

$$B_{pj} \cdot B'_{pj} = v_{pj} - v_{pj} \cdot Y \cdot (Y' \cdot v_{pj} \cdot Y)^{-1} \cdot Y \cdot v_{pj}$$

en las cuales se tiene en cuenta la información de cada una de las sucursales.

Al igual que en el Modelo Jerárquico de JEWELL, hemos considerado la cartera dividida en dos subcarteras y luego en tres, de manera que hemos aplicado el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT para cuatro casos:

Caso 1: Dos subcarteras con A_{pj} y B_{pj} constantes.
Caso 2: Tres subcarteras con A_{pj} y B_{pj} constantes.
Caso 3: Dos subcarteras con A_{pj} y B_{pj} variables.
Caso 4: Tres subcarteras con A_{pj} y B_{pj} variables.

En estos cuatro casos, los estimadores individuales para las sucursales coinciden, y a su vez, con los obtenidos en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, puesto que su definición es la misma en ambos modelos, siempre y cuando en el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT[48] se asuma que $\phi_{pj} = S^2 \cdot v_{pj}^{-1}$ y $v_{pj} = \mathrm{diag}(w_{pj1}, \ldots, w_{pjt})$

[48] Las matrices que en Modelo de Regresión de HACHEMEISTER vienen definidas por $v_j = \mathrm{diag}(\frac{1}{w_{j1}}, \ldots, \frac{1}{w_{jt}})$, en el Modelo de Regrsión Jerárquico de SUNDT son las matrices $v_{pj}^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{w_{pj1}}, \ldots, \frac{1}{w_{pjt}})$.

A su vez, en los Casos 1 y 2, y al mismo tiempo en los Casos 2 y 3, lo primero que se observa es que los valores de $\hat{\beta}$, S^2, G_2 y H coinciden, ya que su definición es la misma pues no depende del número de subcarteras considerado.

La matriz G_0 es mayor con tres subcarteras que con dos, y las matrices G_1 son prácticamente iguales con dos y tres subcarteras. Por otro lado, las matrices Λ^* obtenidas al considerar tres subcarteras son inferiores que al considerar dos, y pasa exactamente lo contrario con las dos matrices Λ^*_p.

En los cuatro casos, los estimadores de credibilidad para las subcarteras son similares a sus respectivos estimadores individuales, lo que indica que la experiencia de cada subcartera juega un papel importante en la determinación de los estimadores de credibilidad. Sinembargo, en los estimadores de credibilidad individuales al ser los factores de credibilidad matrices, es difícil de indicar si se da más importancia a los estimadores individuales de cada sucursal que a los estimadores de credibilidad de las subcarteras. Lo único que podemos decir, es que en líneas generales están próximos a sus estimadores individuales.

Si la entidad aseguradora tuviese que elegir entre considerar dos o tres subcarteras, con las matrices A_{pj} y B_{pj} constantes (Casos 1 y 2), la elección no sería demasiado difícil, ya que la diferencia existente entre la prima total a pagar por la entidad bancaria el quinto año en el los dos casos es prácticamente despreciable, ascendiendo en el Caso 1 a $P = 3964,101361$ y en el Caso 2 a $P = 3953,74727$, aunque seguramente la entidad aseguradora se decantaría por el Caso 1, ya que el número de subcarteras detectado en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER ha sido dos.

Por otro lado, los estimadores de credibilidad individuales obtenidos en el Caso 3 (dos subcartersa con las matrices A_{pj} y B_{pj} variables), son ligeramente superiores, para las veintiuna primeras sucursales, que sus estimadores individuales, y a su vez, son superiores a los obtenidos en el Caso 1, excepto para $j = 11,23,24,25$. Al mismo tiempo, presentan notables diferencias con los del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, siendo considerablemente superiores para las diecinueve primeras sucursales, excepto para $j = 10,12,16$. Por otro lado, los estimadores de credibilidad obtenidos en el Caso 4 son inferiores a los obtenidos en Caso 3, hecho que también se pone de manifiesto al comparar las primas totales para ambos casos, que ascienden respectivamente a $P = 3980,078132$ y $P = 3917,371936$.

De los cuatro casos considerados, creemos que la entidad aseguradora debería elegir entre aplicar el Caso 3 o el Caso 4, ya que en los dos primeros casos no está nada claro que la elección de las matrices A_{pj} y B_{pj} constantes sea la más adecuada, provocando a su vez problemas en la estimación de las matrices Λ_p^*. Siguiendo la opinión de NORBERG, R. (1986) creemos más conveniente aplicar el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT con las matrices $A'_{pj} = Y' \cdot v_{pj}$ y $B_{pj} \cdot B'_{pj} = v_{pj} - v_{pj} \cdot Y \cdot (Y' \cdot v_{pj} \cdot Y)^{-1} \cdot Y \cdot v_{pj}$. El dilema está en aplicar el modelo con dos o con tres subcarteras. Según nuestro punto de vista, aunque en el Caso 3 la prima total a cobrar sea más alta, parece más conveniente considerar sólo dos subcarteras ya que es el número de subcarteras que se han detectado en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

INDICE DEL CAPITULO

INTRODUCCION 503

7.1.- CONCLUSIONES GENERALES SOBRE LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD 505

7.2.- CONCLUSIONES RESPECTO A CADA UNO DE LOS MODELOS ANALIZADOS Y SUS RELACIONES 508

7.2.1.- Modelo de BÜHLMANN 508

7.2.2.- Modelo de BÜHLMANN-STRAUB 509

7.2.3.- Modelo de Regresión de HACHEMEISTER 511

7.2.4.- Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER 514

7.2.5.- Modelo Semilineal de De VYLDER 515

7.2.6.- Modelo Semilineal Optimo de De VYLDER 519

7.2.7.- Modelo Jerárquico de JEWELL 521

7.2.8.- Modelo Jerárquico con múltiples niveles 525

7.2.9.- Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT 526

7.2.10.- Modelo de Regresión Jerárquico con múltiples niveles 529

7.3.- CONCLUSIONES RESPECTO A LOS RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD EN LA APLICACION PROPUESTA 529

7.4.- CONCLUSIONES RESPECTO A LAS POSIBLES LINEAS A SEGUIR DENTRO DE LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD 539

El objetivo de este capítulo es exponer de forma ordenada las conclusiones a las que hemos llegado a lo largo del presente trabajo, y para ello hemos dividido el capítulo en cuatro grandes apartados.

El primer apartado, titulado "Conclusiones generales sobre la Teoría de la Credibilidad", hemos definido lo que es la Teoría de la Credibilidad, indicando sus orígenes. También hemos justificado la clasificación que hemos propuesto para ordenar los distintos modelos credibilísticos, que han aparecido a partir de que BÜHLMANN, H. (1967) presentó su fórmula de credibilidad de distribución libre.

En el segundo apartado, titulado "Conclusiones respecto a cada uno de los modelos analizados y sus relaciones", hemos expuesto las características fundamentales de cada modelo de credibilidad, centrándonos principalmente en las hipótesis asumidas, así como en las relaciones y diferencias existentes entre los modelos.

En el tercer apartado, titulado en este caso "Conclusiones respecto a los resultados obtenidos mediante la Teoría de la Credibilidad en la aplicación práctica", hemos justificado porque el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT es el más adecuado para prever las primas de riesgo individuales en el caso estudiado. Al mismo tiempo, hemos comentado los resultados numéricos obtenidos, no sólo en este modelo sino también en los otros cinco que hemos aplicado, indicando las principales diferencias entre ellos, así como el motivo de su inadecuación.

Y por último en el cuarto apartado, titulado "Conclusiones respecto a las posibles líneas a seguir dentro de la Teoría de la Credibilidad", hemos indicado los puntos que a nuestro entender aún no están suficientemente desarrollados en los modelos de credibilidad propuestos hasta el momento, pero que sería conveniente tratar. A su vez, hemos indicado la posibilidad de desarrollar nuevos modelos, a partir del Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER.

7.1.- Conclusiones generales sobre la Teoría de la Credibilidad.

El término **Credibilidad** fue introducido en la ciencia actuarial como una medida de la creencia, de la importancia, que el actuario cree que debe ser dada a un cuerpo particular de experiencia con el objeto de elaborar una tarifa. La Teoría de la Credibilidad estima las primas de riesgo individuales basándose en la información disponible sobre la experiencia de reclamaciones de cada póliza, de tal manera que las fórmulas de credibilidad obtenidas son una especie de medias ponderadas entre la prima colectiva del riesgo y la media empírica de las indemnizaciones pagadas por cada póliza.

La Teoría de la Credibilidad surgió a principios del siglo XX, y en su formulación actual fue desarrollada en los años anteriores a la Primera Guerra Mundial. Dicha teoría ha tenido y tiene una gran relevancia práctica, de tal modo que los procedimientos credibilísticos precedieron a su justificación teórica. Como herramienta práctica, es en gran parte invención de los actuarios norteamericanos, sin embargo, sus raíces provienen de la Teoría del Riesgo y de la estimación estadística.

Aunque LONGLEY-COOK, L. (1962) planteó ya la necesidad de un modelo matemático firme para desarrollar correctamente la Teoría de la Credibilidad, no fue hasta 1965, en el coloquio de Astin, cuando se plantearon los verdaderos fundamentos teóricos de la Teoría de la Credibilidad al presentar BÜHLMANN, H. su **fórmula de credibilidad de distribución libre** basada en el criterio de los mínimos cuadrados, que fue publicada en 1967.

Desde la aparición del Modelo de BÜHLMANN se han expuesto una gran variedad de modelos credibilísticos, que nosotros hemos clasificado del siguiente modo:

- Modelos Clásicos
- Modelos de Regresión
- Modelos Semilineales
- Modelos Jerárquicos

siendo los modelos que hemos denominado clásicos el punto de partida de los demás.

Hemos propuesto esta clasificación, que no sigue estrictamente el orden cronológico de aparición de los modelos, ya que a nuestro entender da una visión clara de las interrelaciones que existen entre los modelos dentro de cada grupo, y entre los distintos grupos.

En primer lugar, en el Capítulo II del presente trabajo, hemos analizado los modelos que hemos denominado **Modelos Clásicos**, que son el Modelo de BÜHLMANN y el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB. El término "clásico" lo hemos utilizado para indicar que estos dos modelos fueron los dos primeros que aparecieron como tales, y al mismo tiempo porque sentaron las bases para la aparición de los demás modelos credibilísticos, que cada vez son más generales y perfeccionados.

En el Capítulo III, hemos analizado los **Modelos de Regresión**, que incluyen el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER y el Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER, siendo el segundo una generalización del primero, al mismo tiempo que es el último de los modelos credibilísticos que ha sido propuesto.

A estos modelos los hemos denominado Modelos de Regresión pues, como su propio nombre indica, uno de sus elementos característicos es la utilización de la técnica de regresión para el cálculo de los estimadores de credibilidad, junto con el completo abandono de la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, tanto para las observaciones esperadas como en la matriz de covarianzas entre las observaciones, siendo aptos en este caso para detectar tendencias o tener en cuenta los efectos de la inflación.

En el Capítulo IV hemos analizado los **Modelos Semilineales**, ambos propuestos por De VYLDER, F. (1976), que son respectivamente el Modelo Semilineal de De VYLDER y el Modelo Semilineal Optimo de De VYLDER. Estos modelos se hallan en la misma línea que el Modelo de BÜHLMANN, en cuanto que siguen asumiendo la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, sin embargo, no utilizan directamente los datos de la experiencia de reclamaciones sino que los transforman previamente a través de unas funciones.

Y por último, en el Capítulo V, hemos analizado los **Modelos Jerárquicos**, que engloban al Modelo Jerárquico de JEWELL, el Modelo Jerárquico con múltiples niveles, el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT y el Modelo de Regresión Jerárquico con múltiples niveles.

Bajo la denominación de modelos jerárquicos hemos englobado aquellos modelos en los cuales cada póliza ya no viene caracterizada por un único parámetro de riesgo, sino por tantos como niveles se hayan considerado dentro de la cartera.

7.2.- Conclusiones respecto a cada uno de los modelos analizados y sus relaciones.

7.2.1.- Modelo de BÜHLMANN.

BÜHLMANN, H. (1967), con su modelo conocido con el nombre de **Modelo de BÜHLMANN**, replanteó el problema de la estimación de las primas de riesgo individuales. Se desea que las primas sean lineales, y propuso **seleccionar la mejor prima dentro de la clase restringida de las primas lineales, utilizando el procedimiento de los mínimos cuadrados**, no siendo preciso en este caso hacer ninguna hipótesis ni sobre la función de distribución que gobierna los riesgos individuales, ni sobre la función de distribución a priori de los parámetros estructurales. Las únicas hipótesis que asume son la de existencia de independencia entre las pólizas y dentro de cada póliza en el tiempo, así como la de homogeneidad en el tiempo. Así mismo considera que todas las pólizas tienen igual importancia dentro de la cartera, independientemente de su volumen.

Los **estimadores de credibilidad lineales**, que se obtienen aplicando este modelo, no son más que una combinación lineal convexa entre la media colectiva y la individual de las observaciones, siendo su expresión:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z]\cdot m + Z\cdot\bar{X}$$

donde:

$$\bar{X} = \sum_{s=1}^{t} \frac{X_{js}}{t}$$

Z es el denominado factor de credibilidad, que es único para toda la cartera y $0 \leq Z \leq 1$, que viene definido del siguiente modo: $Z = \dfrac{a \cdot t}{S^2 + a \cdot t}$

$m = E[\mu(\theta_j)]$ cuyo estimador es $M_0 = \dfrac{1}{k \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{t} X_{js}$

Se trata de un modelo de **tiempo homogéneo con observaciones no ponderadas**, que sólamente es apto en el caso de utilizar datos deflactados o sin tendencia, lo que reduce considerablemente su campo de aplicación, ya que hoy en día en pocas ocasiones nos vamos a encontrar con que las observaciones presenten un comportamiento más o menos homogéneo en el tiempo.

7.2.2.- Modelo de BÜHLMANN-STRAUB.

El **Modelo de BÜHLMANN-STRAUB** apareció para superar la limitación que suponía el Modelo de BÜHLMANN al considerar que todas las pólizas tienen igual importancia dentro de la cartera, independientemente de su volumen. Este modelo, no es más que una sencilla ampliación del Modelo de BÜHLMANN, el cual se puede obtener como un caso particular.

Las novedades que se introducen en este modelo respecto al primero son dos:

•) La incorporación de unos pesos o ponderaciones naturales para cada póliza, que son unos números positivos dados, que suelen representar, en la mayoría de los casos, el número de pólizas que han tenido siniestros cada año, y que influyen considerablemente en la determinación de los estimadores de credibilidad.

•) El abandono de la hipótesis de homogeneidad en el tiempo en la matriz de covarianzas, que en este modelo es una matriz diagonal, siendo los elementos de la diagonal principal $\dfrac{\sigma^2(\theta_j)}{w_{js}}$, con $s = 1,2,\ldots,t$.

La incorporación de estos dos nuevos elementos tiene como consecuencia que el factor de credibilidad deja de ser único para toda la cartera, y **cada póliza pasa a tener su propio factor de credibilidad**, que sigue siendo un número comprendido entre 0 y 1, ambos inclusives.

Para obtener los estimadores de credibilidad se utiliza el mismo procedimiento que en el Modelo de BÜHLMANN, los cuales siguen siendo una combinación lineal convexa, en este caso, entre X_{jw} y el estimador X_{zw} del parámetro estructural m, siendo su expresión:

$$\hat{\mu}(\theta_j) = [1 - Z_j]\cdot m + Z_j\cdot X_{jw}$$

donde:

$$X_{jw} = \sum_{s=1}^{t} \frac{w_{js}\cdot X_{js}}{w_{j\cdot}}$$

Z_j es el factor de credibilidad para la póliza j-ésima, siendo: $Z_j = \dfrac{a\cdot w_{j\cdot}}{S^2 + a\cdot w_{j\cdot}}$

$$m = E[\mu(\theta_j)] \quad \text{cuyo estimador es} \quad M_\emptyset = X_{zw} = \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j \cdot X_{jw}}{Z_\bullet}$$

A pesar de las novedades introducidas, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB es apto sólamente en el caso de trabajar con cantidades deflactadas o sin tendencia, como el propio Modelo de BÜHLMANN, pero a pesar de ello es el modelo credibilístico que se ha utilizado con mayor frecuencia en las aplicaciones prácticas, debido a su sencillez y también a la incorporación de los pesos o ponderaciones naturales.

7.2.3.- Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

El **Modelo de Regresión de HACHEMEISTER** es una generalización del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, en el sentido que abandona la hipótesis de *homogeneidad en el tiempo para las observaciones esperadas*, y la sustituye por otra con tendencia de tipo polinómico. Para ello introduce las matrices Y_j, con $j = 1,2,\dots,k$, que son matrices dadas de dimensión (t_j,n), que deben verificar que $n < t_j$ y ser de rango pleno, donde n es el grado, más una unidad, de la mayor tendencia polinómica considerada dentro de la cartera, aunque lo más habitual en las aplicaciones prácticas es considerar $n = 2$ (tendencia lineal).

En este modelo, $E[X_j/\theta_j] = Y_j \cdot \beta(\theta_j)$ que es un vector de dimensión $(t_j,1)$, donde $\beta(\theta_j)$ es, a su vez, un vector de regresión desconocido de dimensión $(n,1)$, que nos indica cual es la verdadera tendencia polinómica para la póliza considerada, según el número de términos significativos que posea.

Lo que sí tiene importancia a la hora de prever el importe de las primas de riesgo individuales es la forma que demos a las matrices Y_j, con $j = 1,2,\ldots,k$, puesto que si consideramos que:

$$Y_j = \begin{bmatrix} 1 & t_j & \ldots & t_j^{n-1} \\ 1 & t_j - 1 & \ldots & (t_j - 1)^{n-1} \\ 1 & t_j - 2 & \ldots & (t_j - 2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1^{n-1} \end{bmatrix}$$

resulta que para el próximo periodo, $s = 0$, y del modelo polinómico sólo es significativo el término independiente o punto de corte, que es el importe del estimador de credibilidad para el periodo t_j+1.

Al igual que el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, se considera que las varianzas son variables en el tiempo, y en este caso se asume que: $\mathrm{Cov}[X_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j)\cdot v_j$, donde $\sigma^2(\theta_j)$ es una función escalar desconocida, y v_j, con $j = 1,2,\ldots,k$, son matrices dadas, semidefinidas positivas, de dimensión (t_j,t_j), admitiéndose en este modelo la posibilidad de covarianzas significativas entre instantes temporales distintos.

A pesar de ello, en las aplicaciones prácticas se suele asumir que no existe correlación entre los montantes de las indemnizaciones para una póliza dada, ya que al ser matrices dadas no se sabe que valores asignar a las covarianzas siendo, por lo tanto, matrices diagonales que suelen venir definidas del siguiente modo:

$$v_j = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{w_{j1}}, \frac{1}{w_{j1}}, \frac{1}{w_{j2}}, \ldots, \frac{1}{w_{jt_j}}\right)$$

siendo ésta la hipótesis que nosotros hemos utilizado en la aplicación práctica del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, que coincide con la hipótesis asumida en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB.

Otra de las novedades que introduce este modelo, respecto a los dos anteriores, es la utilización de la técnica de regresión para estimar las primas de riesgo individuales, aunque los estimadores de credibilidad siguen siendo lineales, y adoptan la siguiente expresión:

$$\hat{\mu}_{js}(\theta_j) = \left[\hat{\beta}'_j \cdot Z_j + \beta' \cdot [I - Z_j]\right] \cdot Y_{js}$$

donde:

$$\hat{\beta}'_j = X'_j \cdot v_j^{-1} \cdot Y_j \cdot (Y'_j \cdot v_j^{-1} \cdot Y_j)^{-1} \qquad \text{dim } (1,n)$$

$$Z_j = Y'_j \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma[I + Y'_j \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma]^{-1} \qquad \text{dim } (n,n)$$

$$\beta' = E[\beta'(\theta_j)] \qquad \text{dim } (1,n)$$

En este modelo los factores de credibilidad ya no son escalares, sino matrices cuadradas de dimensión (n,n), cuyos elementos no tienen porque ser *números comprendidos entre 0 y 1*.

Otro elemento a destacar, es la dificultad de obtención de los estimadores propuestos para los parámetros estructurales, debido a su gran complejidad de cálculo, sobre todo, el estimador para la matriz de covarianzas $\Gamma = \mathrm{Cov}[\beta(\theta_j)]$, ya que se trata de un pseudo-estimador, siendo preciso utilizar un proceso iterativo para su cálculo.

Por último, este modelo a diferencia de los dos modelos clásicos, es apto para detectar tendencia o tener en cuenta los efectos de la inflación.

7.2.4.- Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER.

El **Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER** no es más que una generalización del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER. En este modelo, la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, respecto a las observaciones esperadas, es sustituida por otra, no necasariamente de tipo polinómica, sino mucho más general: $E[X_j/\theta_j] = f(\beta(\theta_j))$, siendo $\beta(\theta_j)$ un vector de regresión desconocido. Al mismo tiempo se asume, al igual que en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, que $Cov[X_j/\theta_j] = \sigma^2(\theta_j)\cdot v_j$, donde v_j es una matriz dada semidefinida positiva, admitiéndose, por lo tanto, la posibilidad de covarianzas significativas entre instantes temporales distintos.

El objetivo de este modelo sigue siendo estimar las primas de riesgo individuales, y según De VYLDER, F. (1985) el problema reside en **encontrar la mejor aproximación de tipo credibilistico para $\beta(\theta_j)$**, con $j = 1,2,\ldots,k$, y utiliza para ello el instrumental de las distancias, siendo preciso además **hallar la mejor aproximación polinómica para el modelo de regresión general**, ya que sin dicha aproximación es imposible obtener una expresión concreta para los estimadores individuales de los vectores $\beta(\theta_j)$, y en consecuencia para las matrices de credibilidad, ya que en este modelo, al igual que en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, los factores de credibilidad no son escalares sino matrices, siendo a su vez apto para detectar tendencias o tener en cuenta los efectos de la inflación.

En cuanto a los estimadores de los parámetros estructurales están fuertemente inspirados en los del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, pues como ya hemos dicho, para obtener los estimadores de credibilidad es preciso hallar la mejor aproximación polinómica al modelo de regresión general.

7.2.5.- Modelo Semilineal de De VYLDER.

El **Modelo Semilineal** fue el primero de los dos modelos semilineales que expuso De VYLDER, F. (1976). Se trata de una extensión del Modelo de BÜHLMANN, en el cual la principal innovación es que ya no se utilizan directamente **los datos de la experiencia de reclamaciones**, sino que se **transforman previamente mediante p funciones dadas**, cuadrado-integrables, con p = 1,2,...,P. Estas funciones hacen más flexible al modelo, sin embargo es imposible incorporar diferentes precisiones para las observaciones.

Al igual que en el Modelo de BÜHLMANN, si se siguen manteniendo las hipótesis del modelo para las observaciones del periodo siguiente resulta que:

$$E_{Total}[\mu_{\emptyset}(\theta_j)/f_1(X_1),\ldots,f_1(X_t),\ldots,f_p(X_1),\ldots,f_p(X_t)] =$$

$$= E_{Total}[f_{\emptyset}(X_{t+1})/f_1(X_1),\ldots,f_1(X_t),\ldots,f_p(X_1),\ldots,f_p(X_t)]$$

Naturalmente la elección de la función $f_{\emptyset}(X_{t+1})$ es libre, sin embargo, en la práctica lo usual es considerar $f_{\emptyset}(X_{t+1}) = X_{t+1}$ (función identidad), ya que lo que interesa es estimar la esperanza condicionada de la experiencia de reclamaciones para el periodo t+1.

Los estimadores de credibilidad siguen siendo lineales, pero no necesariamente respecto a las variables aleatorias observadas, sino respecto a las p funciones dadas, en los cuales aparecen tantos factores de credibilidad como funciones dadas hemos considerado, siendo su expresión para una póliza concreta, por ejemplo, la j-ésima:

$$\hat{\mu}_p(\theta_j) = \sum_{p=1}^{P} Z_p \cdot M_{pj} + M_{\emptyset} - \sum_{p=1}^{P} Z_p \cdot M_p$$

donde:

$$M_{pj} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=1}^{t} f_p(X_{js}) \qquad p = \emptyset, 1, 2, \ldots, P$$

$$M_p = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k} M_{pj} \qquad p = \emptyset, 1, 2, \ldots, P$$

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_P$ son P escalares solución del sistema de ecuaciones lineal:

$$\sum_{p=1}^{P} (a_{pq} + t \cdot a_{pq}) \cdot Z_p = t \cdot b_{\emptyset q} \qquad q = 1, 2, \ldots, P$$

donde a_{pq}, b_{pq} y $b_{\emptyset q}$ son matrices.

En este modelo, los P factores de credibilidad, que son únicos para toda la cartera, pueden ser cualquier número perteneciente a los reales ($Z_p \in R$), y no tienen porque estar comprendidos entre Ø y 1, ambos inclusives, como ocurre en el Modelo de BÜHLMANN.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas se suele utilizar el **Modelo Semilineal de De VYLDER con una sola función, $f(X_s)$,** que es la hipótesis que nosotros hemos considerado en la aplicación práctica. En este caso, existe un solo factor de credibilidad que es único para toda la cartera, pero en principio sigue verificando $Z \in R$. Por otro lado, los parámetros estructurales dejan de ser matrices para convertirse en escalares, siendo el estimador de credibilidad para la póliza j-ésima:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = M_\emptyset + Z \cdot (M_{fj} - M_f)$$

donde:

$$Z = \frac{t \cdot b_{\emptyset f}}{a_{ff} + t \cdot b_{ff}}$$

Si definimos la función dada $f(X)$ como $\mathbf{f(X) = CONSTANTE \cdot X}$ y $\mathbf{f_\emptyset(X) = X}$ resulta que el estimador ajustado de credibilidad anterior se puede también escribir del siguiente modo:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = \mathrm{CONSTANTE} \cdot Z \cdot \bar{X} + [1 - \mathrm{CONSTANTE} \cdot Z] \cdot M_\emptyset$$

siendo:

$$\bar{X} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=1}^{t} X_{js}$$

$$M_\emptyset = \frac{1}{k \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{t} X_{js}$$

$$Z = \frac{t \cdot b_{\emptyset f}}{a_{ff} + t \cdot b_{ff}}$$

Como ya hemos señalado en el apartado 6.2.2.3. del presente trabajo, sea cual sea la constante considerada, los estimadores de credibilidad semilineales coinciden exactamente con los del Modelo de BÜHLMANN, ya que se verifica que:

$$\text{CONSTANTE} \cdot Z = Z_{\text{BÜHLMANN}}$$

Cuanto mayor sea la constante considerada menor será el factor de credibilidad semilineal, aunque en este caso $0 \leq Z \leq 1$, y mayores los estimadores de los parámetros estructurales.

En el caso particular que **CONSTANTE = 1** el estimador de credibilidad semilineal coincide exactamente con el del Modelo de BÜHLMANN, una vez que en éste se ha sustituido el parámetro estructural m por su correspondiente estimador $M_{\emptyset}$. Resultando, por lo tanto, que el **Modelo de BÜHLMANN se puede obtener como un caso particular del Modelo Semilineal de De VYLDER cuando existe una única función dada y $f(X) = f_{\emptyset}(X) = X$.**

Si en lugar de considerar $f(X) = \text{CONSTANTE} \cdot X$, se elige cualquier otra definición para la función dada $f(X)$, los estimadores de credibilidad semilineales que se obtienen ya no coinciden con los del Modelo de BÜHLMANN póliza a póliza, pero si sumamos los estimadores de credibilidad de todas las pólizas que constituyen la cartera, sea cual sea la definición asumida para la función dada $f(X)$, la suma es siempre la misma, y además coincide con la que se obtiene en el Modelo de BÜHLMANN.

El Modelo Semilineal de De VYLDER, a pesar de la introducción de las p funciones dadas, adolece de los mismos inconvenientes que el Modelo de BÜHLMANN, ya que en él es imposible incorporar distintas precisiones para las observaciones, y además tampoco es apto para detectar tendencias.

Su contribución más importante, desde nuestro punto de vista, es que si las funciones dadas se eligen cuidadosamente pueden servir, entre otras cosas, para detectar y eliminar observaciones atípicas o cualquier otras superfluas influencias que pueden distorsionar las estimaciones. Una definición adecuada para la función $f_p(X_s)$ podría ser en este caso:

$$f_p(X_s) = \text{Min}\ (M_p\ ,\ X_s)$$

donde M_p es una cierta cantidad por encima de la cual se consideran las observaciones como puntos outliers.

7.2.6.- <u>Modelo Semilineal Optimo de De VYLDER.</u>

Paralelamente a la aparición del Modelo Semilineal, De VYLDER, F. (1976) expuso su otro modelo, también semilineal, que es conocido con el nombre de **Modelo Semilineal Optimo de De VYLDER.** Se trata de una generalización del Modelo Semilineal, en el cual ya no se consideran p funciones dadas sino **una única función, $f(X_s)$**, que es cuadrado-integrable, pero **desconocida**, siendo uno de los objetivos de este modelo la búsqueda de la misma.

Los estimadores de credibilidad siguen siendo lineales, pero en este caso, respecto a la función óptima $f^*(X_s)$, siendo su expresión para el elemento j-ésimo:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = \sum_{s=1}^{t} f^*(X_{js}) = f^*(X_{j1}) + \ldots + f^*(X_{jt})$$

donde, según De VYLDER, F. (1976), f^* es la solución de:

$$E[X_2/X_1] = f^*(X_1) + (t-1)\cdot E[f^*(X_2)/X_1]$$

Como lo más usual es que las variables X tomen un número finito de valores $(0,1,2,\ldots,n)$, esta ecuación se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{l=0}^{n} l\cdot p_{lm} = f_m^*\cdot\sum_{l=0}^{n} p_{ml} + (t-1)\cdot\sum_{l=0}^{n} f_l^*\cdot p_{ml}$$

$$m = 0,1,2,\ldots,n$$

donde:

$$p_{ml} = P(X_1 = m\ ,\ X_2 = l)$$

$$f_m^* = f^*(m)$$

siendo la estimación de la distribución conjunta de los pares (X_r, X_s), con $r,s = 1,2,\ldots,t$, un prerrequisito para poder hallar los estimadores de credibilidad semilineales óptimos.

La aproximación credibilística que proporciona la Teoría de la Credibilidad semilineal óptima es por lo menos tan buena como la hallada a través del Modelo Semilineal, pero si la comparamos con la obtenida en el Modelo de BÜHLMANN, la diferencia es considerable.

A pesar de que el Modelo Semilineal no sea más que un caso particular del Modelo Semilineal Optimo, ya que las funciones dadas introducidas en el mismo pueden ser una de las posibles soluciones que hallemos en la búsqueda de la función óptima, se sigue utilizando el Modelo Semilineal en detrimento del Modelo Semilineal Optimo, puesto que la obtención de los estimadores de credibilidad en el primer modelo dependen en última instancia de los valores de los parámetros estructurales a_{pq}, b_{pq} y $b_{\emptyset q}$, para los cuales no es demasiado difícil construir estimadores insesgados, mientras que para obtener los estimadores de credibilidad semilineales óptimos un paso previo es estimar la distribución conjunta de los pares (X_r, X_s), lo cual consume más tiempo y es mucho más difícil, e incluso es imposible si no se dispone de la información adecuada.

7.2.7.- Modelo Jerárquico de JEWELL.

El **Modelo Jerárquico de JEWELL** aparece paralelamente al Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, y lo hemos interpretado como una generalización del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB (en realidad JEWELL, W. (1975e) presentó su modelo como una generalización del Modelo de BÜHLMANN). En este modelo, se considera la cartera dividida en un cierto número p de subcarteras, donde cada una de ellas está caracterizada por su propio parámetro de riesgo. Cada subcartera está formada por un cierto número de pólizas, que han sido agrupadas por poseer determinadas características básicas comunes. Pero, a su vez, cada póliza posee unas características específicas que la diferencian de las demás pólizas de la subcartera, características que vienen cuantificadas por otro parámetro de riesgo. Se trata, por lo tanto, de un Modelo Jerárquico a dos niveles, en el cual el objetivo sigue siendo estimar las primas de riesgo individuales.

Las hipótesis asumidas en cuanto a las observaciones esperadas, y a la matriz de varianzas entre las observaciones, son las mismas que en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB:

$$E[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = \mu(\theta_p,\ \theta_{pj})$$

$$Var[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = \frac{1}{w_{pjs}}\cdot\sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj})$$

donde $\mu(\theta_p,\ \theta_{pj})$ y $\sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj})$ no dependen de los subíndices p, j y s, con $p = 1,2,\ldots,P$; $j = 1,2,\ldots,k_p$ y $s = 1,2,\ldots,t_{pj}$, siendo en este caso $\mu(\theta_p) = E[\mu(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]$ la prima de riesgo para la subcartera p.

Para hallar los estimadores de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales se utiliza el mismo procedimiento que en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB: Seleccionar la mejor prima lineal dentro de la clase restringida de las primas lineales, utilizando el procedimiento de los mínimos cuadrados. Al tratarse de un modelo jerárquico con dos niveles, cada póliza forma parte de la cartera a través de la subcartera a la cual pertenece, de manera que el problema de minimización que debemos considerar para la póliza pj es:

$$\text{Min } E\left[\left[\mu(\theta_p,\ \theta_{pj}) - c_0 - \sum_{i=1}^{k_p}\sum_{s=1}^{t_{pi}} c_{pis}\cdot X_{pis}\right]^2 /\theta_p\right]$$

Este problema de minimización consiste simplemente en aplicar el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB restringido a la subcartera p, siendo su resultado:

$$\mu^*(\theta_p, \theta_{pj}) = Z_{pj}\cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}]\cdot E[\mu(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]$$

donde:

$$Z_{pj} = \frac{a\cdot w_{pj\cdot}}{s^2 + a\cdot w_{pj\cdot}}$$

$$X_{pjw} = \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs}\cdot X_{pjs}}{w_{pj\cdot}}$$

$\mu(\theta_p) = [\mu(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]$ que es la prima de riesgo para la subcartera p.

siendo preciso volver a aplicar de nuevo el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, en este caso para estimar la prima de riesgo para la subcartera p, $\mu(\theta_p)$, para lo cual se utilizará la información de toda la cartera, siendo su resultado:

$$\widehat{\mu(\theta_p)} = Z_p\cdot X_{pzw} + [1 - Z_p]\cdot m$$

donde:

$$Z_p = \frac{b\cdot Z_{p\cdot}}{a + b\cdot Z_{p\cdot}}$$

$$X_{pzw} = \sum_{j=1}^{k_p} \frac{Z_{pj}\cdot X_{pjw}}{Z_{p\cdot}}$$

$m = E[\mu(\theta_p)]$ que es uno de los parámetros estructurales del modelo.

Una vez obtenido el estimador de credibilidad para $\mu(\theta_p)$, se sustituye en $\mu^*(\theta_p, \theta_{pj})$, siendo el estimador ajustado de credibilidad para la póliza pj el siguiente:

$$\widehat{\mu(\theta_p, \theta_{pj})} = Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot \widehat{\mu(\theta_p)}$$

que es, a su vez, el mejor estimador de credibilidad lineal para la prima de riesgo individual pj.

Al igual que en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, obtenemos un factor de credibilidad para cada póliza, que es un número comprendido entre 0 y 1, ambos inclusives, al mismo tiempo que obtenemos un factor de credibilidad para cada subcartera, que también es número comprendido entre 0 y 1, ambos inclusives.

Otro elemento a destacar es que los estimadores individuales para las distintas pólizas obtenidos en este modelo, coinciden con los del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, lo mismo que el estimador para el parámetro estructural S^2, ya que su definición es la misma en ambos modelos, aunque expresada de diferente manera.

La diferencia que existe entre los estimadores de credibilidad individuales obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB y en el Modelo Jerárquico de JEWELL, es que en el primero el estimador colectivo para la prima de riesgo individual es el valor esperado para todas las pólizas de la cartera, m, mientras que en el segundo es el valor de la prima de riesgo para la subcartera a la cual pertenece la póliza considerada.

Para obtener los estimadores de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales hemos elaborado nuestra propia función en el lenguaje de programación APL titulada JEWELL, que se halla en el workspace JERARQUICO, cuyo listado se encuentra en el apéndice del presente trabajo. Dicha función ha sido elaborada para el caso particular que el número de periodos observados para cada póliza sea el mismo ($t_{pj} = t$), hipótesis que no es demasiado restrictiva para las aplicaciones prácticas, y además se puede elegir el número de subcarteras entre 2 y 5.

Al igual que el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, se trata de un modelo que no es apto ni para detectar tendencias ni para tener en cuenta los efectos de la inflación, pero dentro de los modelos jerárquicos creemos que será el más utilizado, ya que es el que está más desarrollado y a su vez, es el de más fácil aplicación.

7.2.8.- Modelo Jerárquico con múltiples niveles.

Posteriormente a la aparición del Modelo Jerárquico de JEWELL, TAYLOR, G. (1979); BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987) y GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990), generalizaron dicho modelo al considerar más de dos niveles dentro de la cartera, dando lugar al **Modelo Jerárquico con múltiples niveles**. Las hipótesis que se asumen son las mismas que en el Modelo de JEWELL, aunque extendidas para los niveles considerados.

Para obtener los estimadores de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales, los tres primeros autores que hemos citado han utilizado un nuevo método, la técnica del espacio Hilberiano, mientras que los cuatro últimos han seguido utilizando el procedimiento de los mínimos cuadrados, al igual que en el Modelo Jerárquico de JEWELL.

Si se utiliza el procedimiento de los mínimos cuadrados, la obtención de los estimadores de credibilidad es fácil, ya que basta aplicar tantas veces el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB como niveles se hayan considerado en la cartera, lo que según nuestro punto de vista no presenta demasiadas dificultades, y además es fácil de aplicar.

7.2.9.- Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Al igual que el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER es una generalización del Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, en el sentido que abandona completamente la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, y la reemplaza por otra de tipo polinómica para las observaciones esperadas e introduce además la técnica de regresión, el **Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT** es una generalización del Modelo Jerárquico de JEWELL en el mismo sentido.

SUNDT, B. (1978, 1979a, 1980) considera que la cartera se puede dividir en p subcarteras, con p = 1,2,...,P, de manera que se trata de un modelo jerárquico con dos niveles, pero asume además que las observaciones esperadas siguen una función de tipo polinómico. Este modelo se puede interpretar como la conjunción en un solo modelo del Modelo Jerárquico de JEWELL y del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, siendo apto para detectar tendencias y tener en cuenta los efectos de la inflación.

Para obtener los estimadores de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales, el procedimiento que se sigue es el mismo que en el Modelo de JEWELL, pero en este caso en lugar de aplicar el

Modelo de BÜHLMANN-STRAUB para solucionar los problemas de minimización se utiliza el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, siendo su resultado el siguiente:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p,\ \theta_{pj}) = \left[\ \hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + \tilde{\beta}'\cdot[I - Z_{pj}]\ \right]\cdot Y_{pjs}$$

donde:

$$\widehat{\mu_{pj}}(\theta_p) = \tilde{\beta}'\cdot Y_{pj} = \left[\ \hat{\beta}'_p\cdot Z_p + \beta'\cdot[I - Z_p]\ \right]\cdot Y_{pj}$$

$$\hat{\beta}'_{pj} = X'_{pj}\cdot\phi^{-1}_{pj}\cdot Y_{pj}\cdot(Y'_{pj}\cdot\phi^{-1}_{pj}\cdot Y_{pj})^{-1}$$

$$Z_{pj} = Y'_{pj}\cdot\phi^{-1}_{pj}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot[I + Y'_{pj}\cdot\phi^{-1}_{pj}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1}$$

$$\hat{\beta}'_p = X'_p\cdot\phi^{-1}_p\cdot Y^*_p\cdot(Y^{*'}_p\cdot\phi^{-1}_p\cdot Y^*_p)^{-1}$$

$$Z_p = Y^{*'}_p\cdot\phi^{-1}_p\cdot Y^*_p\cdot\Lambda\cdot[I + Y^{*'}_p\cdot\phi^{-1}_p\cdot Y^*_p\cdot\Lambda]^{-1}$$

$\beta' = E[\beta'(\theta_p)]$ que es uno de los parámetros estructurales del modelo.

Al igual que en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, los factores de credibilidad no son escalares, sino matrices de dimensión (n,n), habiendo obtenido en este caso uno para cada póliza y uno para cada subcartera. Por otro lado, aunque las definiciones de $\hat{\beta}'_{pj}$ y Z_{pj} coincidan con las del Modelo de HACHEMEISTER, sólo los valores de los estimadores $\hat{\beta}'_{pj}$ van a coincidir en ambos modelos, siempre y cuando en el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT se asuma que $\phi_{pj} = S^2\cdot v^{-1}_{pj}$ y $v^{-1}_{pj} = \text{diag}(\frac{1}{w_{pj1}}, \frac{1}{w_{pj2}}, \ldots, \frac{1}{w_{pjt_{pj}}})$.

A pesar de la importancia de este modelo, el problema de la estimación de los parámetros estructurales no está del todo resuelto según nuestra opinión. El único autor que ha tratado este tema ha sido NORBERG, R. (1986), el cual ha propuesto unos estimadores bastante complicados, basados en las matrices A_{pj} y B_{pj}, cuya elección aún no está del todo solucionada, aunque dicho autor recomienda utilizar como matrices A_{pj} y B_{pj} las siguientes:

$$A'_{pj} = Y'_{pj} \cdot v_{pj}$$

$$B_{pj} \cdot B'_{pj} = v_{pj} - v_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot (Y'_{pj} \cdot v_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1} \cdot Y'_{pj} \cdot v_{pj}$$

Para obtener los estimadores de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales hemos elaborado una función también en APL, denominada SUNDT, que se halla en el workspace JERARQUICO, cuyo listado se halla en el apéndice del presente trabajo. Esta función ha sido diseñada para el caso que $n = 2$, es dedir, que las observaciones esperadas sigan una función de tipo lineal, $t_{pj} = t$ (el número de periodos observados sea el mismo para todas las pólizas) y $v_{pj}^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{w_{pj1}}, \frac{1}{w_{pj2}}, \ldots, \frac{1}{w_{pjt_{pj}}})$. A su vez, se puede elegir el número de subcarteras a considerar entre 2 y 5, y si deseamos considerar las matrices A_{pj} y B_{pj} constantes para todas las pólizas o variables. Para diseñar los estimadores de los parámetros estructurales hemos utilizado los propuestos por NORBERG, R. (1986), ya que son los únicos que existen por el momento, aunque adaptados a nuestro caso particular.

7.2.10.- Modelo de Regresión Jerárquico con múltiples niveles.

Al igual que en el Modelo Jerárquico de JEWELL, el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT ha sido extendido para el caso de considerar más de dos niveles dentro de la cartera, dando lugar a la aparición del **Modelo de Regresión Jerárquico con múltiples niveles.** En este último modelo, para obtener los estimadores de credibilidad para las primas de riesgo individuales, se debe aplicar tantas veces el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER como niveles se consideren dentro de la cartera. La dificultad fundamental para su aplicación sigue siendo estimar los parámetros estructurales, siendo NORBERG, R. (1986) el único autor que ha tratado el tema.

7.3.- Conclusiones repecto a los resultados obtenidos mediante la Teoría de la Credibilidad en la aplicación propuesta.

El Capítulo VI consiste en una aplicación práctica de la Teoría de la Credibilidad. El objetivo de este capítulo es calcular el importe de la prima de riesgo que en total deberá pagar una entidad bancaria el próximo año, que consta de veinticinco sucursales, para seguir ofreciendo a sus clientes un seguro en caso de muerte, que lleva ya cuatro años en vigencia. La entidad bancaria contrató el seguro colectivo de muerte con una entidad aseguradora, tratándose de una prestación totalmente asegurada. A su vez, la entidad aseguradora dispone de la información respecto al montante global de las indemnizaciones que se han ido pagando, desglosada por sucursales y años de ocurrencia, y también de los capitales en riesgo en cada una de ellas, que en este caso actúan como pesos o ponderaciones naturales.

Al disponer cada sucursal de su propia experiencia de reclamaciones, la hemos utilizado para estimar su prima de riesgo para el próximo año, obteniendo la prima de riesgo total a pagar por parte de la entidad bancaria como suma de las veinticinco primas de riesgo individuales.

Para prever la prima de riesgo individual para cada sucursal hemos aplicado el Modelo de BÜHLMANN, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, el Modelo Semilineal de De VYLDER, el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, el Modelo Jerárquico de JEWELL y el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT. Como es de suponer, a la entidad aseguradora le interesará aplicar aquel modelo que se adecue mejor a las características del colectivo estudiado, que en este caso es, a nuestro entender, el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT con dos subcarteras y las matrices A_{pj} y B_{pj} variables, el cual resulta ser, a su vez, el que proporciona la prima de riesgo total a cobrar más alta.

En primer lugar, hemos aplicado los cuatro primeros modelos que hemos citado, en los cuales cada sucursal está caracterizada por un único parámetro de riesgo. De estos cuatro modelos, el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, con n = 2, es el que mejor se adapta a los datos disponibles, y es el que nos permite obtener, desde nuestro punto de vista, las primas de riesgo más realista para el próximo año, puesto que tiene en cuenta que las observaciones esperadas siguen una función de tipo lineal, y al mismo tiempo, que las varianzas no son constantes, sino que dependen de los pesos o ponderaciones naturales introducidos.

En los tres primeros modelos se asume que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, hipótesis que en nuestro caso es imposible asumir ya que los datos de las indemnizaciones presentan una clara tendencia lineal creciente. Al mismo tiempo, en el Modelo de BÜHLMANN y en el Modelo Semilineal de De VYLDER se considera que todas las sucursales tienen la misma importancia dentro de la cartera, y que la matriz de varianzas es homogénea en el tiempo, lo que es imposible aceptar en nuestro caso. Como es de suponer, en estos tres modelos los estimadores de credibilidad obtenidos son inferiores a los del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

A pesar de la inadecuación de estos tres modelos para el caso que estamos estudiando, cabe destacar lo siguiente:

•) En el **Modelo de BÜHLMANN-STRAUB**, el abandono de la hipótesis de homogeneidad en el tiempo en la matriz de covarianzas junto con la incorporación de los pesos o ponderaciones naturales, hace que obtengamos un factor de credibilidad para cada sucursal, al mismo tiempo que permite obtener unos estimadores de credibilidad superiores a los obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN para todas las sucursales.

A su vez, la aplicación de este **modelo nos ha permitido darnos cuenta de un hecho importante: La necesidad de introducir una jerarquización con dos niveles dentro de la cartera**, ya que en el mismo los estimadores de credibilidad se pueden dividir en tres grupos bastantes diferenciados, dentro de los cuales las sucursales presentan un comportamiento similar.

•) Cuando en el **Modelo Semilineal de De VYLDER** asumimos que existe una única función dada, definida del siguiente modo: $f(X) = \text{CONSTANTE}\cdot X$ y $f_{\emptyset}(X) = X$, los estimadores de credibilidad coinciden con los obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN, ya que en este caso el estimador de credibilidad semilineal adopta la siguiente forma:

$$\hat{\mu}_f(\theta_j) = \text{CONSTANTE}\cdot Z\cdot\bar{X} + [1 - \text{CONSTANTE}\cdot Z]\cdot M_{\emptyset}$$

con

$$\text{CONSTANTE}\cdot Z = Z_{\text{BÜHLMANNN}}$$

A su vez, cuanto mayor es la constante considerada menor es el factor de credibilidad semilineal, y mayores los estimadores de los parámetros estructurales.

•) Si en el **Modelo Semilineal de De VYLDER** consideramos una única función, y ésta es de **tipo potencial**, y $f_{\emptyset}(X) = X$, resulta que cuanto mayor es el grado del exponente considerado, menores son los estimadores de credibilidad obtenidos para las veinte primeras sucursales, al mismo tiempo que aumentan para las cinco últimas. Por otra parte, los factores de credibilidad van disminuyendo y los estimadores de los parámetros estructurales van aumentando.

•) Si en el **Modelo Semilineal de De VYLDER** consideramos una única función dada, y ésta es la **función logaritmo** y $f_{\emptyset}(X) = X$, sea cual sea la base elegida para la función logaritmo, los estimadores de credibilidad siempre son los mismos, lo que varía es el importe del factor de credibilidad y de los estimadores de los parámetros estructurales, verificándose que cuanto mayor es la base elegida mayor es el factor de credibilidad obtenido y menores los estimadores de los parámetros estructurales.

•) Sea cual sea la definición que elijamos para la función dada $f(X)$, si consideramos que es única, y $f_{\emptyset}(X) = X$ en el Modelo Semilineal el resultado de la suma de las veinticinco primas de credibiilidad es siempre la misma, y coincide con la obtenida en el Modelo de BÜHLMANN.

El **Modelo de Regresión de HACHEMEISTER** es, como ya hemos indicado, de los cuatro primeros modelos que hemos aplicado, el que mejor se adapta al caso que estamos analizando, y es a su vez el que proporciona la prima total a cobrar, para el próximo año, más elevada. Sin embargo, al igual que en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, en este modelo también se percata la necesidad de introducir una jerarquización con dos niveles dentro de la cartera, aunque en el mismo sólo se detectan dos subcarteras.

Hasta este punto, la aplicación práctica no nos ha presentado demasiadas dificultades, puesto que para obtener los resultados numéricos hemos contado con la ayuda de las funciones elaboradas en el lenguaje de programación APL, denominadas respectivamente BUHLMANN, BUHLMANNSTRA, SEMILINEAR y HACHEMEISTER, elaboradas por STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987). Pero una vez que hemos pasado a aplicar el Modelo Jerárquico de JEWELL y el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, han empezado las dificultades, debido a la introducción de una jerarquización a dos niveles en los mismos, y también a la mayor complejidad de los estimadores de los parámetros estructurales.

Para obtener los resultados numéricos en ambos modelos hemos diseñado nuestras propias funciones, también en APL, que hemos denominado JEWELL y SUNDT respectivamente, puesto que no tenemos conocimiento de que existan funciones en APL o en otro lenguaje de programación diseñadas para tal efecto.

La aplicación del Modelo Jerárquico de JEWELL es, en este caso, más bien redundante, puesto que ya hemos descartado aplicar el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB para obtener los estimadores de credibilidad en nuestro caso. El objetivo de su aplicación ha sido comprobar como afectaba en los estimadores de credibilidad individuales la introducción de una jerarquización a dos niveles, manteniendo la hipótesis de homogeneidad en el tiempo para las observaciones esperadas, ya que lo que a nosotros en realidad nos interesa es obtener los estimadores de credibilidad individuales a través del Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Hemos aplicado tanto el Modelo de JEWELL como el de SUNDT, considerando en primer lugar que la cartera está dividida en dos subcarteras ($k_1 = 20$ y $k_2 = 5$), y después en tres ($k_1 = 12$, $k_2 = 8$ y $k_3 = 5$).

En cuanto al **Modelo Jerárquico de JEWELL** cabe destacar lo siguiente:

•) En los dos casos considerados, los estimadores individuales X_{pjw} y el estimador $\hat{S}^2$ coinciden, ya que están definidos del mismo modo, coincidiendo a su vez, con los obtenidos en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB.

•) Los factores de credibilidad para cada subcartera, tanto si consideramos dos como tres subcarteras, son muy elevados, lo que indica que se está dando un gran peso a la experiencia individual de cada subcartera frente a la colectiva. Por el contrario, los factores de credibilidad individuales están muy próximos a cero, lo que indica el poco peso que tiene en este caso la experiencia individual en la obtención de los estimadores de credibilidad individuales.

•) El valor del estimador de credibilidad obtenido para la primera subcartera, cuando sólo hemos considerado dos, está comprendido entre el de la primera y segunda subcartera, cuando hemos considerado tres.

•) Si la entidad aseguradora tuviese que elegir entre considerar dos o tres subcarteras, eligiría seguramente el segundo caso, ya que tres es el número de subcarteras que se han detectado en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB. Sin embargo, en ambos casos la prima de riesgo total a cobrar el próximo año es inferior a la obtenida en el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB.

El modelo jerárquico que mejor se adapta al caso estudiado es el **Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT**, pues no sólo considera la cartera estructurada en dos niveles, sino que también asume que las observaciones esperadas siguen una función de tipo polinómico, que en nuestro caso es de tipo lineal $(n = 2)$. Para obtener los resultados numéricos a través de este modelo, hemos utilizado los estimadores de los parámetros estructurales propuestos por NORBERG, R. (1986), y hemos considerado cuatro casos:

Caso 1: Dos subcarteras con A_{pj} y B_{pj} constantes.
Caso 2: Tres subcarteras con A_{pj} y B_{pj} constantes.
Caso 3: Dos subcarteras con A_{pj} y B_{pj} variables.
Caso 4: Tres subcarteras con A_{pj} y B_{pj} variables.

A la vista de los resultados obtenidos, estamos de acuerdo con NORBERG, R. (1986) en utilizar como matrices A_{pj} y B_{pj} las siguientes:

$$A'_{pj} = Y' \cdot v_{pj}$$

$$B_{pj} \cdot B'_{pj} = v_{pj} - v_{pj} \cdot Y \cdot (Y' \cdot v_{pj} \cdot Y)^{-1} \cdot Y \cdot v_{pj}$$

en lugar de considerarlas constantes para todas las sucursales, ya que en este caso, hemos tenido problemas en la obtención de las matrices Λ_p^* (el elemento de la segunda fila y segunda columna nos ha dado un número negativo, pero como se trata de una varianza hemos impuesto en nuestra función SUNDT que para los elementos de la diagonal principal de las matrices Λ_p^* coja el valor máximo entre 0 y el valor realmente obtenido).

En cuanto a este modelo, cabe destacar también lo siguiente:

•) Al haber asumido que las matrices $\phi_{pj}^{-1} = (1/S^2)\cdot v_{pj}$ y $v_{pj} = \mathrm{diag}(w_{pj1}, w_{pj2},\ldots, w_{pjt})$, en los cuatro casos que hemos considerado los estimadores individuales para cada sucursal coinciden con los obtenidos en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

•) En los Casos 1 y 2, y también en los Casos 3 y 4, los valores de $\hat{\beta}$, $\hat{S}^2$, G_2 y H coinciden (dos a dos), las matrices G_0 son superiores con tres subcarteras que con dos, mientras que las matrices G_1 son prácticamente iguales con dos que con tres subcarteras. A su vez, las matrices Λ^* son superiores con tres subcarteras y las Λ_p^* con dos subcarteras.

•) Al ser los factores de credibilidad matrices dificultan en gran medida la interpretación de los resultados, siendo imposible en algunos casos indicar si se da más importancia al estimador individual que al colectivo, en la determinación de los estimadores de credibilidad.

•) En los cuatro casos, los estimadores de credibilidad para cada subcartera están próximos a sus estimadores individuales.

•) Si consideramos las matrices A_{pj} y B_{pj} constantes, las primas totales obtenidas para el quinto año en los Casos 1 y 2 son inferiores a la de HACHEMEISTER, pero si consideramos las matrices A_{pj} y B_{pj} variables, resulta que la prima total obtenida en el Caso 3 es superior a la de HACHEMEISTER.

De los cuatro casos considerados, la entidad aseguradora deberá elegir, a nuestro entender, entre el Caso 4 y el Caso 4, ya que creemos que son los que mejor se adptan a la situación que estamos etudiando. A pesar de que en los dos primeros casos la prima total a pagar por parte de la entidad bancaria sea inferior, no está nada claro que las matrices A_{pj} y B_{pj} constantes que hemos elegido sean las más adecuadas, pues como ya hemos indicado hemos tenido problemas en la estimación de las matrices Λ_p^*.

Nosotros creemos que la entidad aseguradora le conviene elegir el Caso 3, no porque le proporcione la prima a cobrar más alta, sino porque en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER sólo se han detectado dos subcarteras.

Como ya hemos dicho, en esta aplicación práctica hemos aplicado en primer lugar el Modelo de BÜHLMANN, el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, el Modelo Semilineal de De VYLDER, y el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, para pasar luego a aplicar el Modelo Jerárquico de JEWELL y el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT. Es decir, hemos aplicado en primer lugar cuatro modelos no jerárquicos, y después dos modelos jerárquicos. Esta especie de orden que hemos seguido en la aplicación práctica, se podría también utilizar para clasificar los modelos de credibilidad que han sido propuestos a partir del Modelo de BÜHLMANN, en:

- Modelo no jerárquicos
- Modelos jerárquicos

En el primer grupo estarían englobados los modelos que hemos denominado clásicos, los modelos semilineales y los modelos de regresión, y en el segundo, los cuatro modelos jerárquicos que hemos estudiado.

Esta clasificación es tan válida como la que hemos propuesto anteriormente, sin embargo, según nuestro punto de vista es demasiado general y ambigua, y consideramos más acertada la que hemos utilizado a lo largo del presente trabajo, ya que facilita la comprensión de las relaciones que existen entre los distintos modelos.

7.4.- Conclusiones respecto a las posibles líneas a seguir dentro de la Teoría de la Credibilidad.

De los modelos credibilísticos que hemos analizado, los dos modelos clásicos, el Modelo Semilineal de De VYLDER, el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER y el Modelo Jerárquico de JEWELL son los que están más desarrollados y, por así decirlo, más perfeccionados en cuanto a los estimadores propuestos para los parámetros estructurales.

En cuanto al resto de los modelos aún quedan algunos aspectos a tratar, que según nuestro punto de vista son los siguientes:

1) Respecto a los Modelos de Regresión, al Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT y al Modelo de Regresión Jerárquico con múltiples niveles, queda pendiente cómo salvar la hipótesis restrictiva que se introduce en la mayor parte de las aplicaciones prácticas, al considerar las covarianzas nulas, aunque en dichos modelos lo único que se impone es que las matrices v_{pj} sean matrices semidefinidas positivas. La supresión de esta hipótesis, ocasionará problemas en cuanto a su estimación, que también se deberán intentar solucionar de la mejor manera posible.

2) El Modelo de Regresión No-Lineal de De VYLDER, a pesar de su reciente aparición, pues ha sido el último de los modelos de credibilidad que ha sido propuesto, es un modelo muy completo, y lo único que queda pendiente es su implantación informática. Un aspecto interesante sería introducir dentro de este modelo una jerarquización, primero a dos niveles, para luego generalizarla a más de dos, del mismo modo que se ha hecho con el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB y el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER. A este nuevo modelo se le podría denominar Modelo de Regresión No-Lineal Jerárquico.

3) El Modelo Semilineal Optimo de De VYLDER está también bastante desarrollado, sin embargo, aún no se ha encontrado el camino óptimo para hallar la distribución conjunta de los pares (X_r, X_s), con $r,s = 1,2,\ldots,t$.

4) Respecto a los cuatro modelo jerárquicos que hemos estudiado, el Modelo de Regresión de Jerárquico de SUNDT así como el Modelo de Regresión de Jerárquico con múltiples niveles, son los que están menos perfeccionados en cuanto a los estimadores de los parámetros estructurales, a pesar de su gran importancia. El único autor que ha tratado dicho tema ha sido NORBERG, R. (1986).

Creemos que sería conveniente estudiar este tema con mayor profundidad, y si es posible obtener unos estimadores menos complejos y más fáciles de aplicar, así como hallar las matrices A_{pj} y B_{pj} que permitan que dichos estimadores sean los óptimos.

BIBLIOGRAFIA

En este capítulo se presenta la bibliografía ordenada alfabéticamente que, según nuestro conocimiento, se ha publicado sobre la Teoría de la Credibilidad. La mayor parte de ella la hemos utilizado para la elaboración del presente trabajo, sobre todo la que hace referencia a los orígenes de la Teoría de la Credibilidad, a los modelos credibilísticos y a la estimación de los parámetros estructurales.

Para distinguir si se trata de un libro o de un artículo, hemos puesto los títulos de los libros en itálicas y los de los artículos entre comillas. A su vez, en las referencias a revistas actuariales hemos utilizado las siguientes siglas:

IME: Insurance: Mathematics and Economics.

MVSVM: Mitteilungen der Vereinigung Scheweizerischen Versicherunsmathematiker.

PCAS: Proceedings of the Casualty Actuarial Society.

SAJ: Scandinavian Actuarial Journal (Nombre anterior SA: Skandinavisk Aktuarietidskrift).

TSA: Transactions Society of Actuaries.

ALBRECHT, P. (1985): "An evolutionary credibility model for claim numbers". Astin Bulletin, Vol. 15, Part 1, pp. 1-17.

AMMETER, H. (1962): "Experience rating. A new application of the collective theory of risk". Astin Bulletin, Vol. 2, Part 2, pp. 261-270.

ARVANITIS, E. (1965): "Credibility considerations of group underwriting and group dividends". Artículo presentado en el Credibility Seminar of the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries, 1965.

AVENHAUS, R. y JEWELL, W. (1975): "Bayesian inverse regression and discriminations: An application of credibility theory". RM-75-27, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxengurg, Austria.

BAUWELINCKX, T. (1990): "Numerical evaluation of loaded credibility premiums". K U Leuven.

BAILEY, A. (1945): "A generalized theory of credibility". PCAS, Vol. 32, pp. 13-20.

BAILEY, A. (1950): "Credibility procedures, Laplace's generalization of Bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data". PCAS, Vol. 37, Part 1, pp. 7-23. Discusión por Mises von, R. en PCAS, Vol. 37, No. 1, pp. 94-115.

BAILEY, A. (1961): "Experience rating reassessed". PCAS, Vol. 48, pp. 60-82. Discusión en PCAS, Vol. 49, pp. 90-98.

BAILEY, A. (1965): "Credibility as a correlation between past and future experience". Artículo presentado en el Credibility Seminar of the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries, 1965.

BAILEY, A. y SIMON, LeR. (1959): "An actuarial note on the credibility of experience of a single private passenger car". PCAS, Vol. 46, pp. 159-164. Discusión en PCAS, Vol. 47, pp. 150-152.

BAILEY, A. y SIMON, LeR. (1960): "Two studies in automobile insurance ratemarking". Astin Bulletin, Vol. 1, Part 4, pp. 192-217.

BEARD, R.; PENTIKAINEN, T. y PESONENM E. (1969): *Risk theory*. Segunda edición. Chapman and Hall Ltd.

BICHSEL, F. (1967): "Experience rating in subsets of risks". Astin Bulletin, Vol. 4, Part 3, pp. 210-230.

BICHSEL, S. (1959): "Une méthode pour calculer une ristourne adéquate pour anées sans sinistres". Astin Bulletin, Vol. 1, Part 3, pp. 106-112.

BILLINGSLEY, P. (1968): *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons. New York.

BOLNICK, H. (1974): "Experience rating group life insurance". TSA, Vol. 26, pp. 123-226.

BORCH K. (1968): "The economics of uncertainty". Capitulo 14: *Credibility and subjective probabilities*, pp. 202-213. Princeton University Press.

BRAAKMAN, T. y HAAG, D. (1968): "Experience rating and credibility". Astin Bulletin, Vol. 5, Part 1, pp. 7-14.

BRAVERMAN, J. (1967): "A critique of credibility tables". Journal of Risk and Insurance, Vol. 34, No. 3, pp. 409-416.

BRAVERMAN, J. (1968): "Credibility theory: A probabilistic development". Journal of Risk and Insurance, Vol. 35, No. 3, pp. 411-423.

BÜHLMANN, H. (1964a): "A distribution free method for general risk problems". Astin Bulletin, Vol. 3, Part 2, pp. 144-152.

BÜHLMANN, H. (1964b): "Optimale prämienstufensysteme". MVSVM, Heft 2, pp. 193-214.

BÜHLMANN, H. (1967): "Experience rating and credibility". Astin Bulletin, Vol. 4, Part 3, pp. 199-207.

BÜHLMANN, H. (1969): "Experience rating and credibility". Astin Bulletin, Vol. 5, Part 2, pp. 157-165.

BÜHLMANN, H. (1970a): "Credibility procedures". En *Probability and Statistics*, Berkeley. University of California Press. Sixth Berkeley symphosium, pp. 515-525.

BÜHLMANN, H. (1970b): *Mathematical methods in risk theory*. Springer-Verlag. New York.

BÜHLMANN, H. (1974): "A comparison of three credibility formulae using multidimensional techniques". Astin Bulletin, Vol. 7, Part 3, pp. 203-207.

BÜHLMANN, H.; GISLER, A. y JEWELL, W. (1982): "Excess claims and data trimming in the context of credibility rating procedures". MVSVM, Vol. 82, Heft 1, pp. 117-147.

BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987): "Hierarchical credibility revisited". MVSVM, Heft 1, pp. 35-54. o en BARAB (1987), No. 81, pp. 43-59.

BÜHLMANN, H. y STRAUB, E. (1970): "Glanbwürdigkeit für schadensätze". MVSVM, Vol. 70, Heft 1, pp. 111-133.

BÜHLMANN, H. y STRAUB, E. (1972): "Credibility for loss ratios". ARCH-1972. Traslation by C.E. Brooks with appendix added ARCH-1970, nr 2.

CABRAL, M. y GARCIA, J. (1974): "Calculation of provisions using Credibility Theory". Astin Bulletin, Vol. 7, Part 3, pp. 277-292.

CABRAL, M. y GARCIA J. (1977): "Study of factors influencing the risk and their relation to Credibility Theory". Astin Bulletin, Vol. 9, Part 3, pp. 84-104.

CENTENO DE LOURDES, M. (1989): "The Bühlmann-Straub model with premium calculated according to the variance principle". IME, Vol. 8, pp. 3-10.

DERRON, M. (1966): "A study in credibility betterment through exclusion of the largest claim". Astin Bulletin, Vol. 4, Part 1, pp. 39-48.

De FINNETI, B. (1964): "Sulla teoria della credibilità". Giornalle dell'Instituto Italiano degli Attuari, Vol. 27, No. 1, pp. 219-231.

De GROOT, M. (1970): Optimal statistical decisions. McGraw Hill. New York.

D'HOOGE y GOOVAERTS, M. (1975): "Bayesian inference in credibility theory". Astin Bulletin, Vol. 8, Part 2, pp. 164-174.

De PRIL, N.; D'HOOGE, L. y GOOVAERTS, M. (1976): "A bibliography on credibility theory and its applicatios". Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 2, No. 1, pp. 55-62.

De VYLDER, F. (1975): *Introduction aux theories actuarielles de credibilite*. Office des assureurs de Belgique. Bruxelles.

De VYLDER, F. (1976a): "Geometrical credibility". SAJ, No. 3, pp. 121-149.

De VYLDER, F. (1976b): "Optimal semilinear credibility". MVSVM, Vol. 76, Heft 1, pp. 27-40.

De VYLDER, F. (1977a): "Iterative credibility". MVSVM, Vol. 77, Heft 1, pp. 25-33.

De VYLDER, F. (1977b): "Optimal parameter estimation in semi-distribution free credibility theory". Artículo presentado en el 13-th Astin Colloquium in Washington.

De VYLDER, F. (1977c): "Le développement récent de la théorie de la credibilité". Bulletin de la Association Royale des Actuaries Belges. No. 72, pp. 55-75.

De VYLDER, F. (1978a): "Parameter estimation in credibility theory". Astin Bulletin, Vol. 10, Part 1, pp. 99-112.

De VYLDER, F. (1978b): "Estimations of IBNR claims by least squares". MVSVM, Vol. 78, Heft 2, pp. 249-254.

De VYLDER, F. (1981a): "Practical credibility theory with emphasis on optimal parameter estimation". Astin Bulletin, Vol. 12, Part 2, pp. 115-131.

De VYLDER, F. (1981b): "Regression model with scalar credibility weights". MVSVM, Vol. 81, Heft 1, pp. 27-39.

De VYLDER, F. (1982): "Estimation of IBNR-claims by credibility theory". IME, Vol. 82, Part 1, pp. 21-45.

De VYLDER, F. (1983): "Practical models in credibility theory, including parameter estimation". Journal of Econometrics, Vol. 23, pp. 147-164. North-Holland.

De VILDER, F. (1984): "Practical models in credibility theory, including parameter estimation". En *Premium calculation insurance*, pp. 133-150. Ed. De Vylder, F.and Goovaerts, M.. D. Reidel Publishing Company.

De VYLDER, F. (1985): "Non-linear regression in credibility theory". IME, Vol. 4, pp. 163-172.

De VYLDER, F. (1986): "General regression in multidimensional credibility theory". En *Insurance and risk theory*, pp. 165-175. Ed. Goovaerts, M. Haezendonck, V. and De Vylder, F.. D. Reidel Publishing Company.

De VYLDER, F. y BALLEGEER, Y. (1979): "A numerical illustration of optimal semilinear credibility". Astin Bulletin, Vol. 10, pp. 131-148.

De VYLDER, F. y GOOVAERTS, M. (1984): "The structure of the distribution of a couple of observable random variables in credibility theory". IME, No. 3, pp. 179-188.

De VYLDER, F. y GOOVAERTS, M. (1985): "Semilinear credibility with several approximating functions". IME, Vol. 4, No. 3, pp. 155-162.

De VYLDER, F. y SUNDT, B. (1982): "Constrained credibility estimators in the regression model". SAJ, No. 1, pp. 23-37.

De WIT, G. y otros (1986): "Special issue on credibility theory". Insurance: Abstract and Reviews 2, No. 3, North-Holland, Amsterdam.

DORWEILER, L. (1934): "A survey of risk credibility in experience rating". PCAS, Vol. 21, Part 1, pp. 1-25, o en PCAS, Vol 58, pp. 90-ss.

DUBEY, A. (1990): "Credibility-modell und schadenrückstellungen einige bemerkungen zu einer schwierigen (zwangs-)ehe". MVSVM, Heft 1, pp. 39-51.

DUBEY, A. y GISLER, A. (1981): "On parameter estimators in credibility". MVSVM, Vol. 81, Heft 2, pp. 107-122.

DUNFORD y SCHWARTZ (1957): *Linear Operators. Part 1: General Theory*. Interscience publishers.

EEGHEN, J. van (1981): *Loss reserving methods*. Surveys of actuarial studies, No. 1. Nationale-Nederlanden N. V.

FALK, W. y BOLNICK, H. (1975): "Credibility in group experience rating" y discusión por Jackson, P. En *Credibility, theory and applications*, pp. 51-70. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

FELLER, W. (1966): *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons. New York.

FRANCKX, E. (1970): "La théorie du comportament et la credibility theory américaine". Astin Bulletin, Vol. 5, Part 1, pp. 15-24.

FREIFELDER, L. (1975): "Statistical decision theory and credibility theory procedures". En *Credibility, theory and applications*, pp. 71-78. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

GERBER, H. (1979): "An introduction to mathematical risk theory". Huebner Foundation Monograph, No. 8, Richard Irwin Inc. Homewood. Illinois.

GERBER, H. (1980): "Credibility for Esscher premiums". MVSVM, Vol. 80, Heft 3, pp. 307-312.

GERBER, H. (1982): "An unbayased approach to credibility". IME, Vol. 1, No. 4, pp. 271-276.

GERBER, H. y JONES, D. (1975a): "Credibility formulae with geometric weigths". TSA, Vol. 27, pp. 31-46.

GERBER, H. y JONES, D. (1975b): "Credibility formulas of the updating type" y discusión por Hickman, J. and Miller, R. En *Credibility, theory and applications*, pp. 89-110. Editado por P.M. Kahn, Academis Press, New York o en TSA, Vol. 27, pp. 51-66.

GISLER, A. (1980a): "Optimum trimming of data in the credibility model". MVSVM, Vol. 80, Heft 3, pp. 313-325.

GISLER, A. (1980b): "Optimales stutzen von beobachtungen im credibility-modell". Diss. ETHZ nr. 6556.

GISLER, A. (1987): "Einize bemerkunzen zum hierachischen credibility modell". MVSVM, Heft 1, pp. 91-98.

GISLER, A. (1990): "Credibility theory made easy". MVSVM, Heft 1, pp. 75-99.

GOOVAERTS, M. y De VYLDER, F. (1984): "A characterization of the class of credibility matrices to a certain class of discrete distributions". IME, Vol. 3, No. 3, pp. 201-204.

GOOVAERTS, M. y HOOGSTAD, W. (1987): *Credibility theory*. Surveys of Actuarial Studies, No. 4. Publication of Nationale-Nederlanden N.V. the Netherlands.

GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990): *Effective actuarial methods*. Insurance Series 3, North-Holland.

GRADY, D. (1975): "Credibility and profitability" y discusión por Atwood. C. En *Credibility, theory and applications*, pp. 111-125. Editado por P.M. Kahn, Academis Press, New York.

GREENE, M. (1974): *Riesgo y seguro*. Editado por Mapfre.

GÜNTHER, D. (1984): "Credibility faktoren für gruppen-lebensversicherungen". 13-th International Congres of Actuaries, Vol. 4, pp. 233-239.

HACHEMEISTER, C. (1975): "Credibility for regression models with application to trend" y discusión por Al Quirin. En *Credibility, theory and applications*, pp. 129-169. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

HADIDI, N. (1985): "A note on De VYLDER's method of estimation of IBNR claims". IME, Vol. 4, pp. 263-266.

HANSEN, J. (1972): "A note on full credibility for estimating claim frequency". PCAS, Vol. 59, pp. 51-56. Discusión en PCAS, Vol. 59, pp. 57-67.

HESSELAGER, O. y WITTING, T. (1988): "A credibility model with random fluctuations in delay probabilities for the prediction of I.B.N.R. claims". Astin Bulletin, Vol. 18, Part 1, pp. 79-90.

HEWITT, C. Jr. (1960): "The negative binomial applied to the canadian merit rating plan for individual automobile risks". PCAS, Vol. 47, pp. 55-65.

HEWITT, C. Jr. (1965): "Reconciliation of some ideas of Albert W. Whtney, Arthur L. Bailey, Allen L. Mayerson". Artículo presentado en el Credibility Seminar of the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries, 1965.

HEWITT, C. Jr. (1970): "Credibility for severity". PCAS, Vol. 57, pp. 148-171. Discusión en PCAS, Vol. 58, pp. 25-31.

HEWITT, C. Jr. (1975): "Credibility for the Layman". En *Credibility, theory and applications*, pp. 71-78. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

HICKMAN, J. (1975): "Introduction and historical overview of credibility". En *Credibility, theory and applications*, pp. 181-192. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

HISS, K. (1991): "Lineare filtration and kredibilitätstheorie". Diplomarbeit an der Universität Basel, 1990.

HOUSTON, D. (1964): "Risk, insurance and sampling". Journal of Risk and Insurance. Diciembre, 1964, pp.535-538.

HURLEY, R. (1954): "A credibility framework for gauging fire classification experience". PCAS, Vol. 41, pp. 161-175. Discusión en PCAS, Vol. 42, pp. 241-251.

JACKSON, P. (1953): "Experience rating". TSA, No. 5, pp. 239-257.

JEWELL, W. (1973): "Multi-dimensional credibility". ORC 73-7, Operations Research Center, University of California, Berkeley.

JEWELL, W. (1974a): "Credible means are exact bayesian for exponential families". Astin Bulletin, Vol. 8, Part 1, pp. 77-90.

JEWELL, W. (1974b): "Exact multi-dimensional credibility". MVSVM, Vol. 74, Heft 2, pp. 193-214.

JEWELL, W. (1974c): "The credible distribution". Astin Bulletin, Vol. 7, Part 3, pp. 237-268.

JEWELL, W. (1974d): "Regularity conditions for exact credibility". Astin Bulletin, Vol. 8, pp. 336-341.

JEWELL, W. (1975a): "Bayesian regression and credibility theory". Research Memo 75-63, International Institute of Applied Analysis Laxenburg, Austria.

JEWELL, W. (1975b): "Credibility regression with simple trends". ORC 75-16, Operations Research Center , University of California, Berkeley.

JEWELL, W. (1975c): "Model variations in credibility theory" y discusión por Straub, E. En *Credibility, theory and applications*, pp. 193-248. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

JEWELL, W. (1975d): "Regularity conditions for exact credibility". Astin Bulletin, Vol. 8, Part 3, pp. 336-341.

JEWELL, W. (1975e): "The use of the collateral data in credibility theory: A hierarchical model". Giornalle dell'Instituto Italiano degli Attuari, Vol. 38, pp. 1-16.

JEWELL, W. (1975f): "Credibility regression with simple trends". Artículo presentado en el 12-th Astin Colloquium en Portugal.

JEWELL, W. (1976): "A survey of Credibility Theory". ORC 76-31, Operations Research Center, University of California, Berkeley.

JEWELL, W. (1987): "A heterocedastic hierarchical model". Bayesian Statistics 3, Proceedings of the Third Valencia International Meeting, 1-5 June 1987. Clarerdon Press, Oxford, pp. 657-663.

JEWELL, W. (1989a): "A general framework for credibility prediction of multidimensional first and second moments". IME, Vol. 8, pp. 1-10.

JEWELL, W. (1989b): "Credibility prediction of first and second moments in the hierarchical model". MVSVM, Heft 2, pp. 301-330.

JEWELL, W. (1990): "Up the misty staircase with credibility theory". MVSVM, Heft 2, pp. 281-309.

JEWELL, W. y SCHNIEPER, R. (1985): "Credibility approximations for bayesian prediction of seconds moments". Astin Bulletin, Vol. 15, pp. 103-125.

JHONS, M. Jr. (1957): "Nonparametric empirical Bayes procedures". Annals of mathematical Statistics, No. 28, pp. 649-669.

JOHNSON, R. Jr. (1941): "The multi-split experience rating plan in New York". PCAS, Vol. 28, pp. 15-36. Discusión en PCAS, Vol. 28, pp. 575-577.

JONG, P. y ZEHNWIRTH, B. (1981): "Credibility theory, linear bayesian estimation and the Kalman filter". Research Paper No. 239, Macquarie University.

JONG, P. y ZEHNWIRTH, B. (1983): "Credibility theory and the Kalman filter". IME, Vol. 2, No. 4, pp. 281-286.

KAHN, P. M. (1968): "A survey of some recent developments in credibility theory and experience rating from bayesian viewpoint". Transactions of XVIII-th International Congress Actuaries.

KAHN, P. M. (Editor) (1975): *Credibility, theory and applications*. Proceedings Berkeley Actuarial Research Conference on Credibility 1974. Academic Press, New York.

KARIN, H. (1991): "Lineare filtration und kredibilitätstheorie". MVSVM, Heft 1, pp. 85-103

KEFFER, R. (1929): "An experience rating formula". TSA, Vol. 30, pp. 130-139. Discusión en TSA, Vol. 30, pp. 593-611.

KENDALL, M. y STUART, A. (1977): "The advanced theory of statistics". Vol. 1. Distribution theory Charles Griffin and cia. London. 4ª Edición.

KLAASEN, E. (1960): "Multiple coverage experience rating plan". PCAS, Vol. 47, pp. 66-80. Discusión en PCAS, Vol. 47, pp. 217-218.

KLUGMAN, S. (1987): "Credibility for classification ratemaking via the hierarchical normal lineal model". PCAS, Vol. 5, Part 1, pp. 272-321.

KORMES, M. (1952): "Note on experience rating credibility". PCAS, Vol. 39, pp. 98-99.

KORMES, M. (1968): "A practical application of credibility to experience rating plans for hospitalization and medical-surgical insurance". Astin Bulletin, Vol. 5, Part 1, pp. 33-48.

KREMER, E. (1982a): "Credibility theory for some evolutionary models". SAJ, No. 3-4, pp. 129-142.

KREMER, E. (1982b): "Exponential smoothing and credibility theory". IME, Vol. 1, No. 3, pp. 213-218.

KREMER, E. (1983): "A remark on parameter estimation of autorregresive credibility models". MVSVM.

LANGE, J. (1965): "Credibility concepts in casualty insurance". Artículo presentado en el Credibility Seminar of the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries, 1965.

LEDOLTER, J.; KLUGMAN, S. y LEE, C. (1991): "Credibility models with time-varying trend components". Astin Bulletin, Vol. 21, Part 1, pp. 73-91.

LETSCH, V. y ZOPPI, G. (1981): "Credibility in group life insurance". MVSVM, Heft 2, pp. 177-185.

LINDLEY, D. (1971): "The estimation of many parameters". Foundations of statistical inference, pp. 435-455, Holt Rinehart and Winston, Toronto, Ed. V.P. Godambe & D.A. Sprott.

LINDLEY, D. y SMITH, A. (1972): "Bayes estimates for the linear model". Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 34, pp. 1-41.

LOCKYER, J. (1983): "Group life insurance". Journal of the Institute of Actuaries Student's Society, Vol. 26.

LOIMARANTA, K. (1977): "On the calculation of variances and credibilities by experience rating". Astin Bulletin, Vol. 4, Part 3, pp. 203-207.

LONGLEY-COOK, L. (1962): "An introduction to credibility theory". PCAS, Vol. 49, pp. 194-221.

LONGLEY-COOK, L. y PRUITT, D. (1952): "Law of large numbers in the fire insurance business and credibility of statistics used". Proceedings Insurance Accounts Association.

MACK, T. (1990): "Improved estimation of IBNR claims by credibility theory". IME, Vol. 9, No. 1.

MAGUIRE, R. (1969): "An empirical approach to the determination of credibility factors". TSA, Vol. 21, Part 1, pp. 1-8. Discusión por Jackson, P.; Shur, W.; Schreiner, W.; Varga, G.; Mayerson, A.; Hickman, T.; Jones, D. y respuesta de Maguire, R. en TSA, Vol. 21, Part 4, pp. 219-239.

MAHLER, H. (1986): "An actuarial note on credibility parameters". PCAS, Vol. 73, Part 1, No. 139, pp. 1-26.

MANGOLD, K. (1987): "Parameterschätzung in hierarchischen credibility-modell nach B. Sundt". MVSVM, Heft 1, pp. 99-103.

MARAZZI, A. (1976): "Minimax credibility". MVSVM, Vol. 76, Heft 2, pp. 219-229.

MARAZZI, A. (1990): "Restricted Minimax Credibility: Two special Cases". MVSVM, Heft 1, pp. 101-113.

MARGOLIN, M. (1971): "On the credibility of group insurance claim experience". TSA, Vol. 23, pp. 229-238.

MARGOLIN, M. (1975): "Are the classical and bayesian approaches to credibility empirically valid?". En *Credibility, theory and apllications*, pp. 281-288. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

MAYERSON, A. (1964a): "A bayesian view of credibility". PCAS, Vol. 51, pp. 85-104. Discusión por Hewitt, C. en PCAS, Vol. 52, pp. 121-127.

MAYERSON, A. (1964b): "The uses of credibility in property insurance ratemaking". Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Vol. 27, No. 1, pp. 197-218.

MAYERSON, A.; JONES, D. y BOWERS, N. (1968): "On the credibility of the pure premium". PCAS, Vol. 55, pp. 175-185. Discusión en PCAS, Vol. 56, pp. 63-82.

McCLURE, R. (1972): "An actuarial note on experience rating nuclear property insurance". PCAS, Vol. 59, pp. 150-155. Discusión en PCAS, Vol. 60, pp. 105-111.

McLEAN, G. (1961): "An actuarial analysis of a prospective experience rating approach for group hospital-surgical-medical coverage". PCAS, Vol. 48, pp. 155-180. Discusión en PCAS, Vol. 49, pp. 81-85.

MEHRA, R. (1975): "Credibility theory and kalman filtering with extensions". RM 75-64. International Institute of Applied Systems *Analysis, Laxenburg, Austria.*

MEYERS, G. (1984): "Empirical bayesian credibility for worker's compensation classification ratemaking". PCAS, Vol. 71, Part 1, No. 135, pp. 96-125.

MICHELBACHER, G. (1918): "The practice of experience rating". PCAS, Vol. 4, pp. 293-324. Discusión en PCAS, Vol. 5, pp. 133-159.

MIILER, R. (1978): "Actuarial aplications of Bayesian Statistics". Technical Repport. Departament of Statistics, University of Wisconsin.

MILLER, R. y HICKMAN, J. (1975): "Insurance credibility theory and bayesian estimation" y discusión por Lamps, D. En *Credibility, theoty and applications*, pp. 249-279. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

MONTGOMERY, J. (1975): "What has statutory valuation in the United Satates to do with credibility and risk theory?." y discusión por Collins, R. En *Credibility, theory and applications*, pp. 289-302. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

MOREAU, L. (1984): "Quelques applications interessantes du language APL en assurance sur la vie". 22-th International Congres of Actuaries, Vol. 4, pp. 1-5.

MOWBRAY, A. (1914): "How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium?". PCAS, Vol. 1, No. 1,2,3, pp. 24-30. Discusión en PCAS, Vol. 2, pp. 276-278.

NORBERG, R. (1975): "Credibility premium plans wich make allowance for bonus hunger". SAJ, No. 2, pp. 73-86.

NORBERG, R. (1976): "A credibility theory for automobile bonus system". SAJ, No. 2, pp. 92-107.

NORBERG, R. (1979): "The credibility approach to experience rating". SAJ, No. 4, pp. 181-221

NORBERG, R. (1980a): "Credibility in the regression case". Artículo presentado en el 1980 Oberwolfach Meeting on the Risk Theory.

NORBERG, R. (1980b): "Empirical Bayes credibility". SAJ, No. 4, pp. 177-194.

NORBERG, R. (1982): "On optimal parameter estimation in credibility". IME, Vol. 1, No. 2, pp. 73-89.

NORBERG, R. (1985): "Unbayesed credibility revisited". Astin Bulletin, Vol. 15, No. 1, pp. 37-43.

NORBERG, R. (1986a): "Hierarchical credibility: Analysis of a random effect linear model with nested clasification". SAJ, No. 3-4, pp. 204-222, o en Statistical Research Report, Institute of Mathematics, University of Oslo.

NORBERG, R. (1986b): "A contribution to modelling of IBNR claims". SAJ, pp. 155-203.

NORBERG, R. (1987): "A note on experience rating of large group life contracs". MVSVM, Heft 1, pp. 17-34.

PEREIRA, M. y ALFONSO, J. (1974a): "Calculation of provisions using credibility theory". Astin Bulletin, Vol. 7, Part 3, pp. 277-292.

PEREIRA, M. y ALFONSO, J. (1974b): "Study of the risk influent factors and its relation with credibility theory". 11-th Astin Colloquim.

PERRYMAN, F. (1932): "Some notes on credibility". PCAS, Vol. 19, Part 1, pp. 65-84.

PERRYMAN, F. (1937): "Experience rating plan credibilities". PCAS, Vol. 24, pp. 60-125, o en PCAS, 1971, Vol. 58, pp. 143-207.

PHILBRICK, S. (1981): "An examination of credibility concepts". PCAS, Vol. 68, Part 1, No. 129, pp. 195-219. Discusión por Herzog, T. en PCAS, Vol. 69, pp. 131-133.

PLACKETT, R. (1950): "*Some theorems in least squares*". *Biometrika*, *No.* 37, pp. 149-157.

RAMLAU-HANSEN, H. (1982): "An application of Credibility Theory to solvency margins". Astin Bulletin, Vol. 13, Part 1, pp. 37-45.

RAO, C. (1973): *Linear statistical inference and its applications.* Segunda edición. Wiley, New York.

ROBBIN, I. (1986): "A bayesian credibility formula for IBNR comits". PCAS, Vol. 73, Part 1, No. 139, pp. 129-164.

ROBBINS, H. (1955): "An empirical Bayes aproach to statistics". Proceedings of the third Berkeley symposium in mathematical statistics and probabilities, Vol. 1, pp. 157-163.

ROBBINS, H. (1964): "The empirical Bayes approach to statistical problems". Annals of Mathematical Statistics, No. 69, pp. 75-85.

ROBERTS, L. (1959): "Credibility of 12/20 experience as compared with 5/10 experience". PCAS, Vol. 46, pp. 235-250. Discusión en PCAS, Vol. 47, pp. 184.

ROBERTS, L. (1965): "Generalized theory of credibility". Artículo presentado en el Credibility Seminar of the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries, 1965.

ROBERTSON, R. (1975): "Reinsurance. A practical application of credibility theory", y discusión por Wooddy, J. En *Credibility, theory and applications*, pp. 303-316. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

SCARSINI, N. (1984): "Bayesian O-free credibility". SAJ, No. 4, pp. 248-252.

SCHMIDT, K. (1990): "Convergence of Bayes and credibility premiums". Astin Bulletin, Vol. 20, Part 2, pp. 167-172.

SIMON, LeR. (1965): "Credibility concepts in the property insurance field". Artículo presentado en el Credibility Seminar of the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries, 1965.

SKURNICK, D. (1975): "Credibility in workmen's compensation rating" y discusión por Atwood and Slyke van, O. En *Credibility, theory ans applications*, pp. 317-346. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

SLIKE, O. van (1981): "Credibility-weighted trend factors". PCAS, Vol. 68, Part 1, No. 129, pp. 160-171.

SMICK, J. (1939): "The proppused multi-split experience rating-plan and the present experience rating plan". PCAS, Vol. 26, pp. 84-129.

STIERS, D.; GOOVAERTS, M. y De KERF, J. (1987): *APL. The language and its actuarial applications*. Elsevier Science Publishers B.V.

STRAUB, E. (1971): "Estimation of number of excess claims by means of the Credibility Theory". Astin Bulletin, Vol. 5, Part 3, pp. 388-392.

STRAUB, E. (1975): "Credibility in practice" y discusión por Ansley, C. En *Credibility, theory and applications*, pp. 347-361. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

SUNDT, B. (1978): "On models and methods of credibility". Statistical Research Report, No. 7, Institute of Mathematics, University of Oslo, Norway.

SUNDT, B. (1979a): "A hierarchical credibility regression model". SAJ, No. 2-3, pp. 107-114.

SUNDT, B. (1979b): "An insurance model with collective seasonal random factors". MVSVM, Vol. 79, *Heft* 1, pp. 57-64.

SUNDT, B. (1979c): "Credibility and relative exchangeability". SAJ, No. 1, pp. 45-51.

SUNDT, B. (1979d): "On choice of statistics in credibility estimation". SAJ, No. 2-3, pp. 115-123.

SUNDT, B. (1980): "A multi-level hierarchical credibility regression model". SAJ, pp. 25-32.

SUNDT, B. (1981): "Recursive credibility estimation" SAJ, No. 1, pp. 3-21.

SUNDT, B. (1982a): "Invariantly recursive credibility estimation". IME, Vol. 1, No. 3, pp. 185-196.

SUNDT, B. (1982b): "The variance part of the credibility premium without the jacknife". SAJ, No. 3-4, pp. 179-187.

SUNDT, B. (1982c): "Credibility models allowing durational effects". Dissertation No. 7141, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich.

SUNDT, B. (1983a): "Finite credibility formulae in evolutionary models". SAJ, No. 2, pp. 106-116.

SUNDT, B. (1983b): "On time-heterogeneus credibility estimation". SAJ, No. 3, pp. 183-190.

SUNDT, B. (1983c): "Parameter estimation in some credibility models". SAJ, No. 4, pp. 239-255.

SUNDT, B. (1986a): "Credibility and old estimates". Storebrand-Norden Actuarial Research Report 2.

SUNDT, B. (1986b): "Some credibility regression models for the classification of individual passanger car models". Astin Colloquium, Tel Aviv, 1986. Astin Bulletin, 1987, Vol. 17, Part 1, pp. 41-70.

SUNDT, B. (1987a): "Credibility and old estimates". IME, Vol. 6, pp. 189-194.

SUNDT, B. (1987b): "Two credibility regression approaches for classification of passenger cars in multiplicative tariff". Astin Bulletin, Vol. 17, No. 1, pp. 41-70.

TAYLOR, G. (1974a): "Experience rating with credibility adjustement of the manual premium". Astin Bulletin, Vol. 7, Part 3, pp. 323-336.

TAYLOR, G. (1974b): "A review of credibility theory". Working paper 15-1974. School of Economic and Financial Studies, Macquarie University,

TAYLOR, G. (1974c): "Two generalizations of Jewell's theorem on exact credibility formulas". Research Paper No. 62, Scholl of Economic and Fiancial Studies, Macquarie University, 1974.

TAYLOR, G. (1975a): "Abstract credibility". SAJ, No. 3, pp. 148-168.

TAYLOR, G. (1975b): "Credibility for time-heterogeneus loss ratios". En *Credibility, theory and applications*, pp. 363-390. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

TAYLOR, G. (1975c): "Credibility under conditions of imperfect persistency". En *Credibility, theory and applications*, pp. 391-400. *Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.*

TAYLOR, G. (1975d): "Experience rating with credibility adjustament of the manual premium". Astin Bulletin, Vol. 7, Part 3, pp. 323-336.

TAYLOR, G. (1975e): "In search of a general parameter-free credibility formula". En *Credibility, theory and applications*, pp. 401-408. Editado por P.M. Kahn, Academic Press, New York.

TAYLOR, G. (1977): "Abstract credibility". SAJ, No. 3, pp. 149-168.

TAYLOR, G. (1979): "Credibility analysis of a general hierarchical model". SAJ, No. 1, pp. 1-12.

TAYLOR, G. (1984): "Experience rating with credibility adjustment of the manual premium". Astin Bulletin, Vol. 7, pp. 323-336.

TOLLET, G. (1972): "Crédilbité totale et partielle". Bulletin de l'Association des Licenciés en Sciences Actuarielles issus de l'U.L.B. 1972, No. 4, pp. 3-24.

UHTHOFF, D. (1959): "The compensation experience rating plan". PCAS, Vol. 46, pp. 285-ss.

VEGAS MONTANER, A. (1981): "Costes y precios del riesgo: Aproximación a través de la Teoría de Sistemas". Tesis doctoral. Departamento de Actuarial y Financiero. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid, 1981.

VEGAS PEREZ, A. (1968): "Aplicaciones actuariales de las teorías de la fiabilidad y de la credibilidad". Memorias del 18-th International Congress Actuaries. Munich, Junio 1968. Vol. 4, pp. 723-728. Anuales del Instituto de Actuarios Españoles, No. 8. 1968.

VENTER, G. (1986): "Classical partial credibility with application to trend". PCAS, Vol. 73, Part 1, No. 139, pp. 27-51.

WEAVER, A. (1965): "Credibility in group insurance". Artículo presentado en el Credibility Seminar of the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries, 1965.

WHEELER, R. (1930): "Credibility and automobile rate making". PCAS, Vol. 16, pp. 268-287. Discusión en PCAS, Vol. 17, pp. 85-92.

WHITNEY, A. (1918): "The theory of experience rating". PCAS, Vol. 4, No. 9-10, pp. 274-292. Discusión en PCAS, Vol. 5, pp. 133-159.

WITT, R. (1974): "Credibility Standards and pricing in automobile insurance". Journal of Risk and Insurance, Vol. 41, No. 3, pp. 375-396.

WITTING, T. (1986): "Über kredibilitätsschätzungen von reinen IBNR-Schäden". Diss. ETHZ nr. 8042.

WITTING, T. (1987): "The linear Markov property in credibility theory". Astin Bulletin, Vol. 17, Part 1, pp. 71-84.

WOODWARD, J. (1916): "The experience rating of workmen's compensation risks". PCAS, Vol. 2, pp. 356-369.

ZEHNWIRTH, B. (1977): "The mean credibility formula is a Bayes rule". SAJ, No. 4, pp. 212-216.

ZEHNWIRTH, B. (1978): "The credible distribution function is an admissible Bayes rule". SAJ, pp. 121-127.

ZEHNWIRTH, B. (1979): "A hierarchical model for the estimation of claims *rates in motor car insurance portfolio*". SAJ, No. 2-3, pp. 75-82.

ZEHNWIRTH, B. (1981): "A connection between Gauss-Markov theory linear bayesian theory with applications to the latter". School of Economic and Financial Studies research paper, No. 244. Macquire University, North Ryde.

ZEHNWIRTH, B. (1981): "The jacknife and the variance part of the credibilty premium". SAJ, No. 4, pp. 245-249.

ZEHNWIRTH, B. (1983): "Hachemeister's bayesian regression model revisited". Journal of econometrics, Vol. 23, pp. 119-129. North-Holland.

ZEHNWIRTH, B. (1984): "Credibility: estimation of structural parameters". En *Premium calculation in insurance*, pp. 347-359. Ed. De Vylder, F., Goovaerts, M.. D. Reidel Publishing Company.

ZEHNWIRTH, B. (1985): "Linear filtering and recursive credibility estimation". Astin Bulletin, Vol. 15, Part 1, pp. 19-35