

Política de dividendos en una cartera de seguros no vida: Un análisis desde la teoría colectiva del riesgo

Maite Mármol Jiménez

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

Política de dividendos en una cartera
de seguros no vida: Un análisis desde la
teoría colectiva del riesgo

Maite Mármol Jiménez

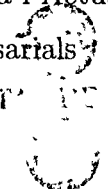
Tesis Doctoral presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales

Programa de doctorado: Métodos Matemáticos
en Economía Financiera. Bienio 1994-1996

Directores: Dra. M.Mercè Claramunt Bielsa y Dr. Antonio Alegre Escolano

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.

Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales

Universitat de Barcelona  UNIVERSITAT DE BARCELONA

Barcelona, 2003

Índice

1 Aspectos básicos de la solvencia. Introducción a la teoría del riesgo.	5
1.1 Aspectos económicos de la solvencia	6
1.2 Introducción a la Teoría del riesgo	11
1.3 La distribución de la siniestralidad agregada	12
1.3.1 Procesos de Poisson	14
1.4 Criterio de la probabilidad de ruina	17
1.4.1 Análisis de la probabilidad de ruina última y chequeo continuo	23
2 Políticas de dividendos: Formalización y efectos de su introducción en el modelo.	29
2.1 Formalización del reparto de dividendos	30
2.1.1 Reparto discreto	33
2.1.2 Reparto continuo	35
2.2 Medidas del efecto de la introducción de políticas de dividendos .	36
2.3 Clasificación de las barreras de dividendos	39
3 Política de dividendos en caso continuo: Barrera constante	43
3.1 Introducción	43
3.2 Probabilidad de ruina	45

3.3	Quantificación de los dividendos repartidos. Esperanza del valor actual de los dividendos cuando el proceso acaba con la ruina:	
	$W(u,b)$	47
3.3.1	Planteamiento alternativo	48
3.3.2	Condición de contorno	53
3.3.3	Solución de $W(u,b)$	54
3.3.4	Caso exponencial	55
3.4	Quantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos cuando el proceso acaba con la ruina condicionados a que sean positivos: $W_\chi(u,b)$	57
3.4.1	Probabilidades que condicionan	58
3.4.2	Cálculo de $W_\chi(u,b)$	60
3.4.3	Tiempo promedio de espera para el reparto de dividendos si son positivos	61
3.4.4	Caso exponencial	63
3.5	Quantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos cuando el proceso no acaba con la ruina:	
	$V(d)$	64
3.5.1	Planteamiento alternativo	66
3.5.2	Caso exponencial	69
3.5.3	Condiciones de contorno	70
3.5.4	Solución $V(d)$	70
3.6	Estudio de la sensibilidad de las medidas de dividendos respecto a las variables de control	72
3.6.1	Sensibilidad de $W(u,b)$	72
3.6.2	Sensibilidad de $\chi(u,b)$	97
3.6.3	Sensibilidad de $W_\chi(u,b)$	99
3.6.4	Sensibilidad de $\tau(u,b)$	104
3.6.5	Sensibilidad de $V(d)$	106
3.7	Resultados numéricos	107
3.7.1	Resultados para $W(u,b)$	108

3.7.2	Resultados para $\xi(u, b)$	110
3.7.3	Resultados para $W_\chi(u, b)$	112
3.7.4	Resultados para $\tau(u, b)$	114
3.7.5	Resultados para $V(d)$	115
3.8	Estudio para el caso $\delta = 0$	116
3.8.1	Análisis de $W(u, b)$	116
3.8.2	Análisis de $W_\chi(u, b)$	118
4	Política de dividendos en caso continuo: Barrera lineal	121
4.1	Introducción	121
4.2	Probabilidad de supervivencia	124
4.2.1	Planteamiento alternativo	126
4.2.2	Caso exponencial	137
4.2.3	Resultados numéricos	141
4.3	Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos $W(u, b)$	145
4.3.1	Planteamiento alternativo	147
4.3.2	Caso exponencial	157
4.4	Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos $V(d)$	162
4.4.1	Planteamiento alternativo	164
4.4.2	Caso exponencial	167
4.5	Resultados numéricos	170
4.5.1	Resultados para $W(u, b)$	170
4.5.2	Resultados para $V(d)$	175
5	Política de dividendos en caso continuo: Barrera parabólica	177
5.1	Introducción	177
5.2	Probabilidad de supervivencia	180
5.2.1	Argumento diferencial	180
5.2.2	Planteamiento alternativo	182

5.2.3	Caso exponencial	193
5.2.4	Resultados numéricos	197
5.2.5	Comparación barrera lineal-barrera parabólica	199
5.3	Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos $W(u, b)$	203
5.3.1	Argumento diferencial	203
5.3.2	Caso exponencial	205
6	Política de dividendos en caso discreto: Barrera constante	209
6.1	Introducción	209
6.2	Análisis del proceso	210
6.3	Probabilidad de ruina	212
6.4	Cuantificación de los dividendos repartidos: Cálculo de $W(u, b)$	214
6.4.1	Solución caso dicotómico	216
6.4.2	Solución caso $c = 1$	219
6.4.3	Solución caso general	221
6.4.4	Solución recursiva para $c = 1$	240
6.5	Cuantificación de los dividendos repartidos: Cálculo de $V(d)$	246
6.5.1	Solución caso dicotómico	247
6.5.2	Solución de $V(d)$	250
7	Conclusiones: sinopsis y aportaciones	257
8	Anexos	265

Introducción

El análisis de la solvencia en las carteras de seguros no vida es un tema que ha sido muy tratado en la literatura actuarial generando una amplia bibliografía. Las hipótesis y los riesgos analizados han ido ampliándose, incluyéndose, ya no sólo el riesgo básico que viene representado por las fluctuaciones de la siniestralidad, sino otros muchos factores como la rentabilidad de las reservas, la inflación, los ciclos económicos, el reparto de dividendos, etc...

El entorno en el que se desarrolla la tesis es el enfoque que ofrece la teoría del riesgo, que se centra básicamente en la modelización de la cuantía total de los siniestros de una cartera de riesgo.

Dentro de la teoría del riesgo se encuentran trabajos que plantean la introducción de políticas de dividendos en los modelos básicos que formalizan el comportamiento de las reservas en carteras de seguros no vida. La idea consiste en que la parte de las reservas consideradas excedentes se repartan en forma de dividendos. Formalmente, su introducción en el modelo, se realiza mediante la definición de barreras de dividendos que determinan las cuantías de reservas que como máximo la compañía de seguros ha decidido mantener.

El estudio de los efectos de la modificación del modelo mediante la introducción de estrategias de reparto de dividendos se convierte en el punto de partida de la tesis. Así, los objetivos generales de la tesis se pueden agrupar básicamente en dos:

- Analizar los efectos de la introducción de barreras de dividendos en la probabilidad de ruina.

- Cuantificar los dividendos repartidos.

Respecto al primer objetivo indicado, es evidente que la introducción de políticas de dividendos provoca una menor acumulación de reservas, y por tanto una mayor probabilidad de que las reservas sean insuficientes para cubrir la siniestralidad. Analizar cómo se verá afectada la solvencia de las carteras en función de la política de dividendos elegida será pues uno de los puntos a tratar a lo largo del trabajo.

En lo relativo a la cuantificación de los dividendos repartidos, se puede considerar el papel de los dividendos como incentivo a los accionistas que han aportado el capital inicial, dividendos que pueden ser considerados, bien como rendimientos, bien como amortización a su inversión inicial. Se debería valorar, por tanto, si un mayor reparto de dividendos compensa el mayor riesgo de insolvencia, situación que puede interpretarse como una más rápida amortización de las aportaciones iniciales.

De ahí surge la necesidad de cuantificar los dividendos repartidos, de analizar su influencia sobre la solvencia de la cartera y de determinar la política de dividendos considerada óptima desde el punto de vista de criterios económico-actuariales.

La elección de la magnitud elegida para valorar los dividendos repartidos es un aspecto básico. Así, veremos a lo largo del trabajo como en la literatura actuarial se trabaja con la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, asumiendo que el proceso acaba en el momento de ruina o bien permitiéndose valores negativos de las reservas, y por tanto la recuperación del proceso.

Una vez planteados los objetivos, surgió la necesidad de formalizar el modelo modificado con el reparto de dividendos. Así, en el Capítulo 2, se especifican las hipótesis a partir de las cuales se determina el reparto: se puede considerar que se repartirán dividendos siempre que el nivel de las reservas alcance el nivel de la barrera de dividendos (reparto continuo), o bien que el reparto sólo se producirá en momentos determinados del tiempo, suponiendo que las reservas sean mayores que la cuantía predeterminada por la barrera de dividendos (reparto

discreto). Se recogen también los dos tipos de barreras definidas en la literatura actuarial: por un lado, las barreras reflectantes, que mantienen el nivel de las reservas en la barrera hasta la ocurrencia del siguiente siniestro, y por otro, las barreras absorbentes, definidas de tal forma que siempre que las reservas alcancen la barrera, se da por acabado el proceso.

Una vez definidas las hipótesis de reparto y su formalización, otro de los temas interesantes fue el de analizar las barreras que aparecían definidas en la literatura actuarial para controlar el crecimiento ilimitado de las reservas. Así, encontramos trabajos sobre la barrera constante y la barrera lineal creciente.

Nos centramos primero en el estudio de la barrera constante, realizado en los Capítulos 3 y 6. En el capítulo 3 se analiza suponiendo reparto continuo, y en el capítulo 6 se asume reparto discreto. Independientemente del reparto asumido, la característica básica es que, en el análisis en tiempo infinito, se producen valores de la probabilidad de ruina igual a uno. Se recoge la demostración asumiendo reparto continuo, y se presenta la demostración de que en el reparto discreto la ruina también es segura.

En el análisis de la barrera constante, al ser la ruina cierta, centramos el estudio en la cuantificación de los dividendos repartidos. En la primera parte del capítulo 3 se presentan nuevas medidas que permiten aportar datos sobre la cuantía y el momento en que se empiezan a repartir dividendos, suponiendo que éstos sean positivos, mientras que en la segunda parte se realiza un estudio en el que se determina un óptimo económico del nivel de la barrera y el nivel inicial de las reservas. La idea que nos llevó a plantear este problema es que se puede considerar el nivel inicial de las reservas como una aportación de los accionistas. La comparación de esta cuantía con los dividendos que recibirán a cambio permite hallar combinaciones óptimas y obtener datos para analizar la rentabilidad obtenida por los accionistas.

En el capítulo 6, en el que se analiza la barrera constante con reparto discreto, y tras buscar la bibliografía existente, hallamos que el cálculo de los dividendos repartidos se realizaba para unas distribuciones del coste total concretas. Así, nos planteamos un método de resolución válido para cualquier distribución dis-

creta de la siniestralidad agregada. Optamos por el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineal y su correspondiente generalización en la forma matricial que nos permitiese hallar la esperanza del valor actual de los dividendos, independientemente de la distribución del coste agregado.

La otra barrera planteada hasta ahora, es la barrera lineal tratada en el Capítulo 4. Aquí la ruina ya no es segura, por lo que debemos plantearnos el cálculo de la probabilidad de ruina, tema tratado en la primera parte del capítulo. La segunda parte está dedicada a la valoración de las cuantías repartidas en forma de dividendos. De especial importancia en este capítulo es el uso de un planteamiento alternativo para el cálculo de la probabilidad de ruina y de los dividendos repartidos (Grandell (1991)), que nos permite la demostración analítica de las condiciones de contorno necesarias para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales obtenidas.

En el capítulo 5 presentamos una nueva barrera de dividendos a la que denominamos barrera parabólica. La idea de introducir una nueva estrategia de reparto de dividendos surgió cuando, mediante simulación, pudimos comprobar que existen barreras alternativas equivalentes desde el punto de vista de la solvencia, pero que producen un reparto de dividendos diferente. Analizamos en este capítulo la probabilidad de ruina y los dividendos repartidos, incluyéndose comparaciones con la barrera lineal.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones de la Tesis. En el capítulo 8 se incluyen los programas informáticos en Fortran y APL2 necesarios para el desarrollo de algunos apartados de la Tesis.

Capítulo 1

Aspectos básicos de la solvencia. Introducción a la teoría del riesgo.

En una entidad dedicada a cubrir riesgos, las prestaciones que se ofrecen son de naturaleza aleatoria, de ahí la necesidad del asegurador de reducir el riesgo de incapacidad de hacer frente a sus compromisos futuros. Así, la posible insolvencia de estas entidades va estrechamente relacionada con las fluctuaciones de la siniestralidad, lo que lleva a la necesidad de un estudio estadístico-actuarial para garantizar las obligaciones asumidas.

La solvencia de un asegurador puede definirse como la capacidad para hacer frente a sus obligaciones de pagar los siniestros presentes y futuros de los asegurados (International Actuarial Association, IAA (2000)).

La solvencia puede entenderse desde dos puntos de vista diferentes: la solvencia estática y la solvencia dinámica. El primer enfoque se refiere a la capacidad de la entidad de riesgo de hacer frente a las obligaciones nacidas de compromisos ya adquiridos. Según Latorre (1992): "La solvencia estática contempla la capacidad del asegurador en un momento dado de pagar las indemnizaciones

derivadas de las primas contabilizadas”. Cuando las fluctuaciones no han sido excesivas y las primas han coincidido con el valor medio de la siniestralidad, el asegurador podrá cubrir el pago de siniestros si calcula bien las provisiones técnicas.

La solvencia dinámica surge de la posibilidad de que la siniestralidad sufra fluctuaciones alrededor de su valor medio. Cubrir esas fluctuaciones obliga a la creación de provisiones. Las variables de control serán básicamente el margen de solvencia y las provisiones para desviación de siniestralidad. Todo ello para crear unas reservas que no estén ligadas a los compromisos previamente contraídos y que ya se han hecho efectivos con el cobro de primas.

Por tanto, la existencia de unas reservas libres es básica para garantizar el poder hacer frente a las obligaciones y garantizar la solvencia. Se puede afirmar que el hecho de que en la cartera de seguros los ingresos se produzcan antes que los pagos y que éstos sean de naturaleza aleatoria, da importancia al objetivo de solvencia y estabilidad.

1.1 Aspectos económicos de la solvencia

Parece claro que es imposible tener en cuenta todos los factores que influyen en la solvencia de una compañía por el carácter dinámico de todos los elementos que confluyen en ella y en su entorno.

Tener un nivel de reservas suficiente es una necesidad de la entidad gestora de la cartera de riesgos para poder hacer frente con garantías a los compromisos aleatorios que se ha comprometido a cubrir. La tenencia de un nivel excesivamente alto que dé seguridad a la compañía, puede provocar problemas de financiación, lo que provoca ineficiencia debido a que se ve restringido el uso de esas reservas libres.

En todo el mundo, la actividad de las aseguradoras está sujeta a reglamentación con la finalidad de proteger los intereses de los consumidores. Los aseguradores cuentan, por lo general, con unas reservas mucho más elevadas que el nivel requerido por ley, tal y como se puede observar en los datos presenta-

dos en el Informe Sigma (2000). Por tanto, las normas de solvencia impuestas por el Estado no ocasionan prácticamente costes efectivos para el asegurador. Por el contrario, los requerimientos de capitales adicionales provenientes de las agencias de clasificación, son mucho más severos y constituyen una restricción para muchas aseguradoras a la hora de constituir el capital propio. La razón para la reglamentación de la solvencia es desplegar protección al consumidor. Las causas son:

1. Los siniestros pueden provocar la crisis financiera del consumidor, lo que da lugar a una necesidad de protección especial.
2. Las fuentes públicas de información no brindan datos lo suficientemente transparentes y actuales como para poder evaluar la situación financiera del asegurador. El esfuerzo de obtener y analizar la información es demasiado grande.

Los objetivos que persigue la imposición de un capital mínimo requerido por ley pueden clasificarse en (IAA (2002)):

- Reducir la probabilidad de que los aseguradores no puedan hacer frente a los siniestros.
- Proveer un mínimo para que las pérdidas de los asegurados sean limitadas en caso de quiebra.
- Actuar como señal de alarma para una intervención regulatoria a tiempo, que pueda llevar a acciones regulatorias en el momento oportuno.
- Promover la confianza entre el público general de la estabilidad financiera del sector asegurador.

El requerimiento mínimo de capital pone en evidencia que el horizonte temporal usado para examinar la solvencia, debe ser un período lo suficientemente amplio para asegurar que todas las obligaciones futuras puedan ser asumidas y para asegurar que las acciones correctivas puedan ser llevadas a cabo en el

momento adecuado. Como resultado, los factores de riesgo tenidos en cuenta en cualquier cálculo de la solvencia, deben ser considerados en un futuro relativamente largo.

Así, las normas de solvencia pretenden garantizar que las aseguradoras dispongan de capital suficiente para responder a las obligaciones contraídas. Si un asegurador no cumple con ellas, las autoridades de control de seguros deben poder intervenir a tiempo para que no se produzca un exceso de deudas en detrimento del asegurado.

La esencia del negocio del seguro es la asunción de riesgos, lo que está estrechamente ligado a la gestión de activos, puesto que las reservas técnicas constituidas con los pagos de primas anticipadas y el capital propio, se invierten para que produzcan rendimientos.

La insolvencia puede provocarse tanto por el activo como por el pasivo. Una clasificación de los riesgos asumidos por una compañía de seguros es, (IAA (2002)):

- Riesgo técnico: Incluye aquellos riesgos que están directa o indirectamente asociados con las bases técnicas o actuariales de cálculo de primas y provisiones técnicas. Según Kastelijn and Remmerswaal (1986) este riesgo técnico se puede clasificar en
 - Riesgo fortuito: Alta siniestralidad aleatoria a pesar de haberse estimado correctamente la distribución de siniestros.
 - Riesgo de error: El cálculo de primas se basa en una estimación incorrecta de la distribución de siniestros.
 - Riesgo de cambio: la distribución de los siniestros varía durante la vigencia del contrato o el período de liquidación de siniestros.
- Riesgos de inversión: Son aquellos riesgos relacionados directa o indirectamente con la gestión de los activos de la compañía. Pueden venir provocados por las depreciaciones de los activos o bien de las inversiones de capital (derrumbe bursátil, cambios en la tasa de interés...).

- **Riesgos no técnicos:** Formarían parte aquellos riesgos que no se pueden incluir en las dos categorías anteriores.

Más concretamente, las seis categorías básicas de los riesgos asumidos por una compañía aseguradora son:

1. **Riesgos de contratación:** Incluye riesgos como el de precio (definido como el riesgo de que las primas determinadas por la compañía sean inadecuadas para asegurar una cobertura correcta sobre el contrato), riesgos del entorno económico (riesgo de que las condiciones sociales cambien de forma que sean adversas para la compañía), riesgo de reserva (riesgo de que las provisiones mantenidas por el asegurador sean inadecuadas) o riesgo de siniestros (definido como el riesgo de que, o bien el número de siniestros, o la cuantía de éstos, sea superior a las esperadas)
2. **Riesgo de crédito:** En esta categoría encontraríamos el riesgo de crédito del negocio (riesgo de que la contra parte quiebre, incluyendo el riesgo generado por la quiebra de un reasegurador), riesgo político (producido por cambios en las políticas gubernamentales que afecten al valor de los instrumentos financieros mantenidos por el asegurador) o el riesgo de crédito sobre la inversión en activos.
3. **Riesgo de mercado:** Definido como el riesgo genérico que surge de la volatilidad de los precios de mercado de los activos, por tanto responde a los cambios de precios de opciones, tipos de interés o tipos de cambio.
4. **Riesgo operacional:** Asociado a aspectos como el fraude o la fallida de sistemas
5. **Riesgo de liquidez:** Riesgo que recoge el hecho de que, para hacer frente a obligaciones inesperadas, deban venderse activos en momentos en que el mercado produzca pérdidas.
6. **Riesgo exógeno (event risk):** Incluiría todos aquellos riesgos fuera del control de la empresa que pueden influir de forma negativa sobre ella,

entre los que encontramos el riesgo legal, el riesgo de reputación o el riesgo provocado por la ocurrencia de grandes desastres.

El dilema básico que nos encontramos al plantearnos el tema de la solvencia es el del equilibrio entre seguridad y coste de capital. La ventaja principal de mantener un nivel de reservas elevado radica en que los asegurados pueden tener la seguridad de recibir las prestaciones acordadas, y los accionistas, de que la habilidad de la compañía para continuar originando beneficios está protegida. Sin embargo, eso es costoso (costes de capital). La incursión en costes de capital innecesarios reduce los beneficios de inversión de los accionistas y aumenta la tasa de prima de los asegurados. Cada grupo de interés alberga diferentes expectativas en cuanto a la dotación de capital propio de un asegurador: Los asegurados se benefician sabiendo que el asegurador puede cumplir con los compromisos contraídos, las autoridades de control se centran también en la protección del asegurado, las agencias de clasificación se interesan por el cumplimiento de todas las obligaciones, incluidas las exigencias de los inversores. Tanto el personal como la dirección empresarial tienen un interés en la continuidad del negocio y en obtener un mayor campo de acción. Por el contrario, los propietarios de la compañía apuntan a generar un alto rendimiento ajustado al riesgo de su inversión en capital.

La solvencia de las entidades aseguradoras ha sido objeto de estudio, existiendo una amplia literatura sobre el tema. Existen una gran variedad de métodos para abordar el estudio de la solvencia. Según Kastelijn and Remmerswaal (1986), se pueden agrupar esos métodos en tres grandes grupos,

1. Métodos basados en ratios. Estos métodos, en muchos casos, tienen una justificación pragmática ya que se determinan los márgenes de reservas considerados necesarios como porcentaje de otra cantidad, como puede ser el volumen de primas.
2. Métodos que consideran especialmente el riesgo de variación en el coste total agregado.

3. Métodos que incluyen el análisis de otras fuentes del riesgo, añadiendo factores como gastos, rendimiento de activos, inflación, tendencias, ciclos...

En IAA (2002) se define el modelo actuarial de riesgo como una descripción matemática del comportamiento de un conjunto de riesgos (cartera de seguros) bajo unas determinadas hipótesis, que debe construirse basándose en el conocimiento y experiencia del actuario combinado con datos del pasado. Se agrupan los modelos actuariales que analizan la solvencia en cinco líneas básicas,

1. Modelos colectivos del riesgo: Estos modelos se basan en determinar un modelo de probabilidad para la ocurrencia y cuantía de los siniestros, evitándose el tratamiento individual de las pólizas que conforman la cartera.
2. Modelos agregados: Son modelos que no plantean de forma separada la distribución de ocurrencia y cuantía de los siniestros, sino que aproximan directamente la siniestralidad agregada de la cartera.
3. Modelos de difusión y otros procesos estocásticos: Utilizan procesos estocásticos para representar bien el proceso de reservas, bien la siniestralidad, u otros factores tenidos en cuenta en el modelo como puede ser el interés sobre las reservas.
4. Modelos multi-estado: Describen probabilísticamente los cambios de estado a lo largo del tiempo.
5. Modelos de Cash-flow: Describen el cash-flow a lo largo del tiempo. Pueden incluir alguno de los modelos anteriores como elementos de descripción.

1.2 **Introducción a la Teoría del riesgo**

En Gerber (1979) se define la Teoría del Riesgo como el conjunto de ideas para diseñar, dirigir y regular una empresa de riesgos. Según Panjer (1986) el objeto de estudio de la Teoría del Riesgo son las fluctuaciones aleatorias en los

resultados financieros del asegurador u otras empresas de riesgo. Esas fluctuaciones tienen diversos orígenes, centrándose la Teoría del Riesgo básicamente en la modelización de la cuantía total de los siniestros de una cartera de riesgos.

Por tanto, para estudiar la solvencia de las entidades aseguradoras, debemos aproximarnos al comportamiento estadístico de la siniestralidad. La modelización de la cuantía total de los siniestros se puede hacer desde el enfoque de la Teoría Individual o de la Teoría Colectiva. Trabajaremos con esta segunda opción que nos lleva a considerar la cartera de riesgos como una corriente de siniestros cuyo volumen depende del número de siniestros y de su cuantía. Por tanto, analizaremos la cartera como un todo, prescindiendo de los elementos individuales. En este caso S (coste total o siniestralidad total) es el resultado de sumar el importe de todos los siniestros ocurridos.

Recojemos a continuación la definición de las variables utilizadas en el proceso básico de las reservas (Gerber (1979), Beard et al. (1984), Bowers et al. (1987), Grandell (1991), Panjer and Willmot (1992), Vegas and Nieto de Alba (1993), Daykin et al. (1994)), en el que se considera como riesgo básico las fluctuaciones de la siniestralidad agregada, dejándose de lado la consideración de otra serie de factores como ingresos financieros, inflación, cambios en la cartera.....

A continuación se recuerda el proceso de la siniestralidad agregada, incluyéndose algunas propiedades del número de siniestros que son de utilidad en el desarrollo de posteriores capítulos de la Tesis. Posteriormente se describe el proceso de las reservas, y se recogen las definiciones de probabilidad de ruina bajo varias hipótesis.

1.3 La distribución de la siniestralidad agregada

En la teoría colectiva del riesgo, la siniestralidad agregada en un período para una cartera, se considera la suma de un número estocástico de siniestros (N) con cuantías z_i , $i = 1, 2, \dots, N$, con z_i idéntica e independientemente distribuidas, e

independientes de N . Por tanto

$$S = \sum_{i=1}^N z_i$$

En este caso la función distribución $F_S(s)$ puede calcularse como,

$$F_S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot F_z^{k*}(s)$$

donde

$$p_k = P[N = k]$$

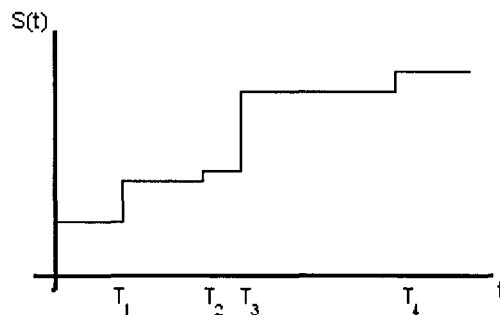
y F_z^{k*} es la función distribución de la k - *convolución* de la cuantía de los siniestros.

Más en general, y debido a la necesidad de analizar periodos de tiempo más largos, se define $S(t)$ como el proceso estocástico de la siniestralidad agregada, siendo

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} z_i$$

donde $N(t)$ es el proceso que indica el número de siniestros hasta el momento t , siendo $S(t) = 0$ si $N(t) = 0$.

$S(t)$ puede ser representado gráficamente de la siguiente forma:



Cada ocurrencia de un siniestro en los momentos $T_i, i = 1, 2, 3, \dots$ queda representado por un salto vertical, siendo la altura del salto la cuantía individual de cada uno de los siniestros. El tiempo está representado en abscisas, y la altura

$S(t)$ en cada momento indica la siniestralidad agregada en el intervalo $(0, t]$. El proceso es un Proceso Estocástico Compuesto, ya que tanto el momento de ocurrencia como el número de siniestros son fenómenos aleatorios, siendo la cuantía individual de cada siniestro una variable aleatoria.

En concreto, si $N(t)$ es un proceso de Poisson, $S(t)$ es un proceso de Poisson compuesto.

1.3.1 Procesos de Poisson

Debido a la importancia de los procesos de Poisson en los modelos de la teoría del riesgo, se adjunta a continuación una serie de propiedades y definiciones sobre su comportamiento que nos permiten situar y caracterizar los procesos de Poisson dentro de los procesos estocásticos (Feller (1971), Beard et al. (1984), Bowers et al. (1987), Latorre (1992), Panjer and Willmot (1992) o Asmussen (2000))

Definición 1 *Un proceso de recuento $N = \{N(t); t \geq 0\}$ es un proceso que representa el número total de sucesos ocurridos hasta el momento t , cumpliendo las siguientes propiedades:*

- $N(t) \geq 0$
- $N(t)$ es un número entero
- $N(t)$ es no decreciente, es decir para $s < t$, $N(t) \geq N(s)$
- Para $s < t$, la cuantía $N(t) - N(s)$ es el número de sucesos ocurridos en el intervalo (s, t)

Definición 2 *Los Procesos de Poisson son un tipo concreto de procesos de recuento .*

Diremos que un proceso de recuento $N = \{N(t); t \geq 0\}$ es un Proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ si:

- $N(0) = 0$

- $N(t)$ tiene incrementos estacionarios¹ e independientes²
- $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda h + o(h)$, $\forall t \geq 0$, siendo h un intervalo corto de tiempo.
- $P[N(t+h) - N(t) > 1] = o(h)$, $\forall t \geq 0$, siendo $o(h)$ un infinitésimo, tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}$, propiedad esta que anula la probabilidad de que ocurra más de un suceso en un mismo instante.

Teorema 1 En un proceso de Poisson el número de siniestros en un intervalo t se distribuye según una Poisson de media $\lambda \cdot t$. Es decir para todo $s, t \geq 0$:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda \cdot t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

de donde se deriva directamente, haciendo $s = 0$,

$$P[N(t) = n] = p_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda \cdot t)^n}{n!}$$

(Panjer and Willmot (1992), pag. 64-67)

Definición 3 Sea $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ los momentos de ocurrencia de los siniestros. Se denominan tiempos de interocurrencia a las variables $W_i = T_i - T_{i-1}$, siendo $W_1 = T_1$.

Teorema 2 Los tiempos de interocurrencia en un Proceso de Poisson de media λ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$. (Panjer and Willmot (1992), pag. 67-68)

Se define a continuación una generalización de los procesos de Poisson, en la que el parámetro λ deja de ser constante para pasar a ser una variable dependiente del tiempo $\lambda(t)$ (Proceso de Poisson no homogéneo), o bien pasa a ser la realización de una variable aleatoria (Procesos de Poisson mixtos)

¹La probabilidad de ocurrencia de un suceso en un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ depende sólo de su duración, y no de t_1 . Así, la probabilidad de que ocurran k sucesos en (t_1, t_2) y en (t_3, t_4) coincide si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = \Delta t$ aunque $t_1 \neq t_3$

²El número de sucesos en un intervalo (t_1, t_2) es independiente del número de sucesos en (t_3, t_4) , siendo disjuntos ambos intervalos. Es decir, la ocurrencia de un suceso no influye en la ocurrencia de sucesos posteriores

Definición 4 Un proceso de recuento $N = \{N(t); t \geq 0\}$ es un Proceso de Poisson no homogéneo con parámetro $\lambda(t) \geq 0$, para $t \geq 0$, si cumple que:

- $N(0) = 0$
- $N(t)$ tiene incrementos independientes
- $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda(t) \cdot h + o(h)$, $\forall t \geq 0$
- $P[N(t+h) - N(t) > 1] = o(h)$, $\forall t \geq 0$

Para los procesos de recuento que cumplen las cuatro propiedades anteriores, el número de siniestros en el intervalo $(t, t+s]$ es una distribución de Poisson de media $m(t, s) = \int_t^{t+s} \lambda(u) \cdot du$, $s, t \geq 0$, cumpliéndose

$$P[N(t+s) - N(t) = n] = \frac{e^{-m(t,s)} \cdot (m(t,s))^n}{n!}$$

Definición 5 Se denomina proceso mixto de Poisson a un proceso de recuento $N = \{N(t; \lambda); t \geq 0\}$, siendo λ la realización de una variable aleatoria Λ con función de distribución $U(\lambda)$, que cumple:

- $N(0) = 0$
- $P[N(t+s) - N(t) = n] = \int_0^{\infty} P[N(t+s) - N(t) = n/\Lambda = \lambda] \cdot dU(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda \cdot t)^n}{n!} \cdot dU(\lambda)$

Los procesos mixtos de Poisson tienen incrementos estacionarios, sin embargo no son independientes, ya que si planteamos

$$P[N(t_1) - N(t_0) = n_1, N(t_2) - N(t_1) = n_2], \text{ para } t_0 < t_1 < t_2$$

llegamos a

$$\begin{aligned} &P[N(t_1) - N(t_0) = n_1, N(t_2) - N(t_1) = n_2] = \\ &= \int P[N(t_1) - N(t_0) = n_1, N(t_2) - N(t_1) = n_2/\lambda] \cdot dU(\lambda) = \\ &= \int P[N(t_1) - N(t_0) = n_1/\lambda] \cdot P[N(t_2) - N(t_1) = n_2/\lambda] \cdot dU(\lambda) \neq \\ &\neq \int P[N(t_1) - N(t_0) = n_1]/\lambda \cdot dU(\lambda) \cdot \int P[N(t_2) - N(t_1) = \\ &= n_2/\lambda] \cdot dU(\lambda) \end{aligned}$$

Los Procesos de Poisson son un tipo particular de los procesos de renovación. Recogemos a continuación definiciones que nos permiten situar los procesos de Poisson dentro de los procesos de renovación.

Definición 6 Sea N un proceso puntual³, y T_k el momento de ocurrencia del k -ésimo suceso. N es un proceso de renovación, con tiempo de interocurrencia de distribución k° , si las variables $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ son independientes y $T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ tienen la misma distribución k° .

Diremos que N es un proceso de renovación ordinario si T_1 tiene también la distribución k° .

N es un proceso de renovación estacionario si k° tiene media finita $\frac{1}{\alpha}$ y la distribución de T_1 viene dada por,

$$k(t) = \alpha \int_0^t (1 - k^\circ(s)) ds$$

Definición 7 Un proceso de Poisson es un proceso de renovación ordinario y estacionario, siendo la distribución k° la exponencial.

El primer trabajo que trató en profundidad las hipótesis de los procesos de renovación en la teoría del riesgo fue el de Sparre Andersen (1959). El caso más simple, y posiblemente más tratado a lo largo de la literatura actuarial, ha sido el de asumir el caso de Poisson, donde tanto la distribución de T_1 como la de $T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ es exponencial.

1.4 Criterio de la probabilidad de ruina

En este apartado profundizamos en el proceso de las reservas, $R(t)$, básico para un análisis de la solvencia de las entidades aseguradoras, ya que la ruina

³Son aquellos procesos estocásticos, las realizaciones de los cuales consisten en una serie de sucesos puntuales, generalmente considerando que nos movemos en un espacio temporal unidimensional $N(t)$ representa el número de sucesos en el intervalo $(0, t]$, siendo el número de sucesos en $(t_1, t_2]$ igual a $N(t_2) - N(t_1)$

se producirá en el momento en que las reservas libres tengan una realización negativa.

Partimos de unas reservas iniciales $R(0) = u$ que se verán incrementadas por las primas recargadas, rendimiento de las inversiones... y disminuidas por la siniestralidad, los impuestos o los pagos de dividendos. Todo ello determina un saldo o margen de solvencia.

Se define, en el sentido del criterio de estabilidad de la probabilidad de ruina, que una trayectoria aleatoria es aceptable si su ordenante $R(t)$ es no negativo en los puntos en los que estamos interesados (Bühlmann (1970)).

Nos encontramos con dos criterios en función de los cuales se determinan los puntos a estudiar:

- Según el horizonte temporal,

1. Horizonte temporal finito: Interesan sólo los puntos en un intervalo $[0, T]$
2. Horizonte temporal infinito: Son objeto de estudio los puntos del intervalo $[0, \infty]$

- Según los puntos en que se analiza el proceso

- a. Caso discreto: Sólo se analiza un determinado conjunto de puntos, t_i , en el intervalo objeto de estudio
- b. Caso continuo: Todos los puntos del intervalo son tenidos en cuenta.

Para cada uno de los cuatro casos resultantes de la combinación de las clasificaciones anteriores, existe un conjunto de puntos D y un grupo de realizaciones del conjunto A aceptables en el camino aleatorio. Se definen como sigue:

- 1.a) $A_{T,h}$: horizonte finito y los puntos de interés son múltiplos de h
- 1.b) $A_{T,0}$: horizonte finito y todos los puntos del intervalo son de interés.
- 2.a) $A_{\infty,h}$: horizonte infinito y los puntos de interés son múltiplos de h
- 2.b) $A_{\infty,0}$: horizonte infinito y todos los puntos son de interés.

Cumpléndose la siguiente relación entre ellos,

$$A_{T,h} \subset A_{\infty,h} \subset A_{\infty,0}$$

$$A_{T,h} \subset A_{T,0} \subset A_{\infty,0}$$

La probabilidad de ruina queda definida como la probabilidad de que una trayectoria aleatoria del correspondiente conjunto A analizado, no sea aceptable.

Podemos escribir:

$$P[A_{T,h}] \leq P[A_{\infty,h}] \leq P[A_{\infty,0}]$$

$$P[A_{T,h}] \leq P[A_{T,0}] \leq P[A_{\infty,0}]$$

donde,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P[A_{T,h}] = P[A_{\infty,h}] \quad \forall h$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} P[A_{T,h}] = P[A_{T,0}] \quad \forall T$$

relaciones que expresan la continuidad de la medida de probabilidad.

A partir de esa clasificación se define la probabilidad de ruina.

Se define el momento de ruina τ , como:

$$\tau = \min \{t : t \geq 0 \mid R(t) < 0\} , t \in D$$

siendo $R(t)$ el nivel de reservas en el momento t , y $R(\tau)$ el nivel de las reservas negativas en el momento de la ruina. Evidentemente para $\tau = \infty$, se cumple que $R(t) \geq 0$ para todo t .

Se denomina $\psi(u)$ a la probabilidad de ruina, y se define como:

$$\psi(u) = P[\tau < \infty]$$

siendo $\psi(u)$ la probabilidad de ruina en tiempo infinito y campo continuo, denominada probabilidad de ruina última

Si el análisis se realiza en horizonte temporal finito, $[0, T]$, se denomina a la probabilidad de ruina $\psi_T(u)$, siendo

$$\psi_T(u) = P[\tau \leq T] , \tau \in [0, T]$$

definiéndose como la probabilidad de ruina antes del momento T .

Es obvio que la probabilidad de ruina en tiempo infinito $\psi(u)$ actúa como un tope para la probabilidad de ruina en tiempo finito T .

Por otro lado, el análisis se puede realizar también en tiempo discreto. En ese caso se considera que $R(t_i)$ es el nivel de las reservas en el momento t_i . En el proceso discreto se define el momento de ruina como

$$\tilde{\tau} = \min \{t_i \mid R(t_i) < 0\}$$

cumpléndose, al asumir horizonte temporal infinito, que $\tilde{\tau} = \infty$ si $R(t_i) \geq 0$ para todo t_i , definiéndose la probabilidad de ruina en este contexto como

$$\tilde{\psi}(u) = P[\tilde{\tau} < \infty]$$

y asumiendo horizonte temporal finito,

$$\tilde{\psi}_T(u) = P[\tilde{\tau} < T]$$

La probabilidad de supervivencia $\phi(u)$ se define como la probabilidad complementaria,

$$\phi(u) = 1 - \psi(u)$$

El análisis sobre probabilidad de ruina en tiempo infinito es más sencillo de tratar matemáticamente. Debido a que a lo largo del trabajo asumimos horizonte temporal infinito, en posteriores apartados de este capítulo se profundiza en las expresiones obtenidas para la probabilidad de ruina.

Sobre el análisis en un horizonte temporal finito no incidiremos a lo largo del trabajo. Algunos trabajos sobre esta hipótesis son: Amsler (1982), en el que se plantea una extensión del tope de la probabilidad de ruina de Cramer-Lundberg para un horizonte temporal finito, De Vylder (1999), De Vylder and Goovaerts (1988,1999), Picard and Lefevre (1997), Dickson and Waters (1991,1992) en los que se trabaja con algoritmos de cálculo o el trabajo de Pervozvansky (1998) en el que se hallan ecuaciones integro-diferenciales para la probabilidad de supervivencia.

El caso en el que nos centramos a continuación es el modelo básico asumiendo análisis continuo, (Gerber (1979), Latorre (1992), Panjer and Willmot (1992), Bowers et al. (1987)), donde en el cálculo de las reservas no se incluyen elementos como inflación, rendimientos de la inversión, gastos o reparto de dividendos, resultando la ecuación que determina el proceso de reservas:

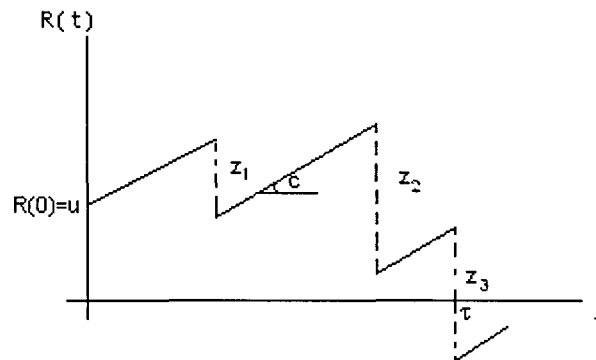
$$R(t) = u + c \cdot t - S(t) \quad (1.1)$$

siendo u el nivel inicial de las reservas, c la intensidad de prima en t , cumpliéndose que $c > \lambda \cdot E[z]$, es decir, que existe un coeficiente de seguridad ρ positivo que recarga la prima pura, de tal forma que:

$$\rho = \frac{c}{\lambda \cdot E[z]} - 1$$

Los gastos vienen determinados por la siniestralidad agregada $S(t)$, es decir, la suma de los N siniestros de cuantía individual z_i en el periodo $(0, t]$.

Podemos representar gráficamente el proceso de las reservas como,



Este modelo conlleva que las primas se ingresan de forma continua, siendo el recargo de seguridad ρ proporcional a la prima pura, y la prima c constante, lo que implica asumir una cartera estable con unos ingresos por primas no aleatorios.

Si asumimos análisis discreto, se define el nivel de las reservas en el momento t_i , $R(t_i)$, como,

$$R(t_i) = u + c \cdot t_i - S(t_i)$$

considerándose t_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ momentos equidistantes, u las reservas iniciales en t_0 siendo $t_0 = 0$, $S(t_i)$ la siniestralidad agregada en el periodo $(0, t_i]$, y c el ingreso por prima en un periodo $(t_i - t_{i-1})$.

El caso discreto ha sido estudiado por diferentes autores entre los que encontramos a Bowers et al. (1987), Gerber (1988), Michel (1989), Shiu (1989), Willmot (1993), De Vylder (1996), Asmussen (2000), Willmot and Cai (2001), o Li and Garrido (2002).

Se presenta a continuación una clasificación, que no intenta ser exhaustiva, con la que se busca dar una idea general de las múltiples metodologías usadas en el estudio del proceso del riesgo y la probabilidad de ruina:

1. Métodos que intentan encontrar de forma analítica o por soluciones aproximadas, expresiones para la probabilidad de ruina para distribuciones específicas, o topes para todo tipo de distribuciones de la siniestralidad agregada.
2. Métodos en los que el ajuste de las reservas depende del nivel alcanzado. Aquí encontramos todo el apartado de las estrategias de barreras que evidentemente, y como veremos en capítulos posteriores, tienen un efecto directo sobre la probabilidad de ruina, al proponer el reparto de parte de las reservas en forma de dividendos.
3. Métodos que generalizan $R(t)$, tomando más factores en cuenta, por ejemplo, gastos o rentabilidad de inversiones.

Estas tres aproximaciones comentadas para el cálculo de la probabilidad de ruina no son excluyentes. Así, por ejemplo, existen estudios de la probabilidad de ruina en modelos modificados con barreras de reparto de dividendos, donde para el cálculo de las reservas se incluyen factores como la rentabilidad que generan las reservas técnicas.

Dentro de la amplia literatura existente en este tema, se encuentran trabajos que centran su análisis en otros aspectos de la teoría de la ruina, como las distribuciones del momento de ruina, la distribución de las reservas antes y después

de la ruina, o la distribución de los siniestros que causan ruina. Encontramos, relacionados con el estudio de estos aspectos, trabajos de Dufresne and Gerber (1988), Gerber et al. (1987), Dickson and Waters (1992), Dickson (1993), Dickson and Egídio dos Reis (1994), Picard (1994), Gerber and Shiu (1997). Picard and Lefevre (1998), Willmot and Lin (1998), Lin and Willmot (2000) o Egídio dos Reis (1993, 2000). De igual forma encontramos trabajos que analizan la duración de las situaciones de ruina (Dickson and Egidio dos Reis (1996)), y el efecto del interés sobre reservas negativas (Dickson and Egídio dos Reis (1997))

1.4.1 Análisis de la probabilidad de ruina última y chequeo continuo

El análisis de la probabilidad de ruina en un horizonte infinito y chequeo continuo es el caso sobre el que la investigación actuarial se centró primero, lo que posiblemente se debe a que permite encontrar expresiones analíticas. Trabajamos con el modelo básico definido en la ecuación (1.1).

Este planteamiento conlleva una serie de limitaciones. Por un lado, para un recargo de seguridad positivo, el nivel de las reservas de las trayectorias que no se arruinan, que vienen determinadas por la probabilidad de supervivencia $\phi(u)$, tiende a infinito (De Finetti (1957)). Por otro lado, las hipótesis de trabajo deben hacerse para el largo plazo de la compañía, lo que puede ser una visión poco realista, especialmente en lo referente al recargo de seguridad.

Las expresiones obtenidas para este caso actúan como tope para la probabilidad de ruina, asumiendo bien chequeo discreto, bien análisis en horizonte temporal finito.

Algunos resultados básicos pueden encontrarse en Kastelijn and Remmerswaal (1986), Bowers et al. (1987), Gerber (1979), Latorre (1992) o Panjer and Willmot (1992)).

Se detalla a continuación el procedimiento para hallar las ecuaciones integro-diferenciales que determinan la probabilidad de supervivencia en el modelo clásico. Se presentan dos planteamientos : el planteamiento diferencial, basado

en la ocurrencia o no de un siniestro en un diferencial de tiempo, y el planteamiento alternativo, basado en las ecuaciones de renovación.

Una metodología equivalente a la usada en los dos planteamientos comentados, se utilizará a lo largo del trabajo para el cálculo de probabilidad de ruina en modelos con reparto de dividendos y para el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos

1.4.1.1 Fórmula explícita para la probabilidad de supervivencia

Una primera aproximación para la determinación de la ecuación que permite obtener la probabilidad de supervivencia, es el argumento diferencial usado por Cramer (1930), y que también podemos encontrar en Panjer and Willmot (1992).

Si asumimos que el número de siniestros se distribuye según una distribución de Poisson, sabemos que la probabilidad de ocurrencia de un siniestro en un intervalo infinitesimal dt viene determinada por el parámetro λ de la distribución, siendo esa probabilidad $\lambda \cdot dt$. Por tanto, la probabilidad de no ocurrencia de un siniestro en dt será la complementaria $(1 - \lambda \cdot dt)$, teniendo en cuenta que asumimos que la probabilidad de ocurrencia de más de un siniestro en un instante es nula.

El argumento diferencial se basa en esta última propiedad: si no ocurre siniestro, lo que sucede con probabilidad $(1 - \lambda \cdot dt)$, en dt al nivel inicial de reservas u se le acumulan las primas generadas en ese periodo, es decir $c \cdot dt$, con lo que el nuevo nivel de reservas (variable de la que depende la probabilidad de ruina) será $u + c \cdot dt$.

Si ocurre siniestro, al nivel inicial de reservas le acumulamos las primas cobradas en ese intervalo y tendremos que restarle la cuantía del siniestro z . Por tanto, el nuevo nivel de reservas será $u + c \cdot dt - z$, limitando la cuantía del siniestro a un tope de $u + c \cdot dt$, porque en caso de que el siniestro superase esa cuantía, nos encontraríamos con unas reservas menores que cero, lo que provocaría la ruina. Por tanto:

$$\phi(u) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \phi(u + c \cdot dt) + \lambda \cdot dt \int_0^{u+c \cdot dt} \phi(u + c \cdot dt - z) \cdot dF(z) + \sigma(dt)$$

expresión que podemos escribir como

$$c \cdot \frac{\phi(u+c \cdot dt) - \phi(u)}{c \cdot dt} = \lambda \cdot \phi(u + c \cdot dt) - \\ - \lambda \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi(u + c \cdot dt - z) \cdot dF(z) + \frac{\sigma(dt)}{dt}$$

y haciendo $dt \rightarrow 0$

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u - z) \cdot dF(z)$$

ecuación integro-diferencial que determina la probabilidad de supervivencia en el modelo clásico.

Un planteamiento alternativo, propuesto por Feller (1971), Gerber (1979) y Grandell (1991), es el basado en las ecuaciones de renovación. Como el proceso de Poisson es un proceso de renovación, y la ruina no puede producirse antes del momento de ocurrencia del primer siniestro, se puede escribir:

$$\phi(u) = E[\phi(u + c \cdot t - z)] = \\ = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - z) \cdot dF(z) \cdot dt \quad (1.2)$$

Si en (1.2) hacemos el cambio de variable $u + c \cdot t = s$, siendo $t = \frac{s - u}{c}$

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \int_u^\infty e^{-\lambda \cdot \frac{s-u}{c}} \cdot \int_0^s \phi(s - z) \cdot dF(z) \cdot dt \quad (1.3)$$

y al derivar (1.3) respecto a u

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u - z) \cdot dF(z) \quad (1.4)$$

Integrando entre 0 y t

$$\int_0^t \phi'(u) \cdot du = \int_0^t \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) \cdot du - \int_0^t \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u - z) \cdot dF(z) \cdot du$$

de donde,

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u - z) \cdot (1 - F(z)) \cdot dz \quad (1.5)$$

A partir de este resultado se extrae el valor de la probabilidad de supervivencia para un nivel inicial de las reservas nulo (Grandell (1991), Panjer and

Willmot (1992)): Haciendo $u \rightarrow \infty$ sobre (1.5),

$$\phi(\infty) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{\infty} \phi(\infty) \cdot (1 - F(z)) \cdot dz$$

expresión que se puede escribir como,

$$\phi(\infty) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(\infty) \cdot \int_0^{\infty} (1 - F(z)) \cdot dz \quad (1.6)$$

y sabiendo que $E[z] = \int_0^{\infty} (1 - F(z)) \cdot dz$, (1.6) toma la forma

$$\phi(\infty) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(\infty) \cdot E[z]$$

y como $\phi(\infty) = 1$ y $\rho = \frac{c}{\lambda \cdot E[z]} - 1$, llegamos a

$$\phi(0) = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

Podemos observar que la probabilidad de supervivencia para unas reservas iniciales nulas es independiente del número medio de siniestros λ , y de la función distribución de la cuantía de los siniestros $F(z)$.

1.4.1.2 Caso exponencial

Podemos llegar a la expresión exacta para la probabilidad de supervivencia asumiendo distribución exponencial para la cuantía de los siniestros (Grandell (1991), pág. 6). Si recuperamos la expresión (1.4)

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u-z) \cdot dF(z)$$

y sabiendo que

$$dF(z) = \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{z}{\mu}} \cdot dx \quad (1.7)$$

al sustituir (1.7) en (1.4),

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) - \frac{\lambda}{c \mu} \cdot \int_0^u \phi(u-z) \cdot e^{-\frac{z}{\mu}} \cdot dx = \\ &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) - \frac{\lambda}{c \mu} \cdot \int_0^u \phi(z) \cdot e^{-\frac{u-z}{\mu}} \cdot dx \end{aligned} \quad (1.8)$$

Derivando (1.8) respecto a u

$$\phi''(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) + \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u) - \phi'(u) \right) - \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \cdot \phi'(u)$$

que podemos escribir como:

$$\phi''(u) = - \left(\frac{\rho}{\mu \cdot (1 + \rho)} \right) \cdot \phi'(u) \quad (1.9)$$

ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, que cumple las siguientes condiciones de contorno:

- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 1$
- $\phi(0) = \frac{\rho}{1 + \rho}$, siendo $\rho = \frac{c}{\lambda \cdot \mu} - 1$

Aplicando estas condiciones de contorno a (1.9), llegamos a

$$\phi(u) = 1 - \frac{1}{1 + \rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{(1 + \rho) \mu} u} \quad (1.10)$$

En Mármol, Alegre y Claramunt (2000) se obtiene la expresi3n de la probabilidad de ruina asumiendo que la siniestralidad agregada se ve perturbada por un modelo de difusi3n, como alternativa a la hip3tesis de un proceso de Poisson Compuesto. Se realiza tambi3n un análisis comparativo entre la expresi3n obtenida y la expresi3n (1.10). Una versi3n inicial de este trabajo fue presentado en el Fourth International Congress on Insurance: Mathematics and Economics (Barcelona, 2000).

Capítulo 2

Políticas de dividendos: Formalización y efectos de su introducción en el modelo.

Recordemos que para estudiar la solvencia de las carteras de seguros desde el criterio de la probabilidad de ruina debemos analizar el proceso de las reservas, planteado bajo diferentes hipótesis (horizonte temporal finito/infinito, chequeo continuo/discreto), estudiando la probabilidad de que éstas sean negativas.

Como modelo alternativo, se encuentra en la literatura actuarial un enfoque que propone el reparto de parte de las reservas en forma de dividendos, es decir, se introducen políticas que diseñan el reparto de dividendos.

La base técnica para proponer el control de las reservas nace de la crítica de De Finetti (1957). En ella se afirma que bajo las hipótesis clásicas del proceso de riesgo, para unas reservas iniciales $R(0) = u$, si la intensidad de prima es superior al producto de la cuantía media de los siniestros, $c > \lambda \cdot \mu$ (es decir,

siempre que el recargo de seguridad es positivo, $\rho > 0$), analizando el caso de probabilidad de ruina última en chequeo continuo, las trayectorias que no se arruinan tienden a infinito cuando t tiende a infinito.

Por tanto las políticas de dividendos aparecen como una forma de control de un crecimiento ilimitado en $R(t)$

Por otro lado, el reparto de dividendos tiene sentido en si mismo como un objetivo de la gestora de la cartera de riesgos, ya que esas cuantías pueden ser interpretadas como excesos de beneficios cuya finalidad podría ser la de cubrir otras carteras de riesgos con resultados deficitarios.

Como dividendos repartidos a accionistas, el papel de éstos como incentivos para conseguir el capital inicial (nivel inicial de las reservas u) es indudable.

De esta justificación de la política de dividendos en la gestión de una cartera de seguros surge la necesidad de cuantificar la parte de las reservas que se destinan al pago de dividendos. La cuantificación de los dividendos aparece como una medida indispensable para la valoración de las políticas de reparto introducidas en el modelo.

Además, el reparto de dividendos afectará también a la probabilidad de ruina. Es evidente que la limitación en el nivel de acumulación de las reservas provoca que la probabilidad de ruina sea mayor. La causa es que siniestros que en el modelo clásico no provocan niveles de reservas negativas, sí lo hacen en el modelo con reparto de dividendos, ya que pueden producir la ruina debido a que el nivel de las reservas se ve disminuido por las cuantías repartidas como dividendos.

2.1 Formalización del reparto de dividendos

Independientemente de la política de reparto que se determine mediante la elección de una determinada barrera de dividendos, la cuantificación de los dividendos depende de una serie de hipótesis sobre en qué momento se reparten dividendos, hasta cuándo y cuál es la medida utilizada para valorarlos

La magnitud elegida para valorar las reservas consideradas excedentes es la

esperanza del valor actual de las cuantías repartidas.

Respecto al plazo durante el cual se reparten dividendos se plantean dos hipótesis:

1. **Hipótesis 1:** En el momento en que se produce la ruina se da por acabado el proceso. En este caso se representa la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos hasta ese momento como W . Será una función que dependerá del nivel de las reservas y de alguno de los parámetros que definen la barrera que representa una política de dividendos.
2. **Hipótesis 2:** El proceso no acaba con la ruina, es decir, no damos por acabado el proceso cuando se produce un nivel de las reservas negativo ya que se permite la recuperación de $R(t)$. Bajo esta hipótesis la esperanza del valor actual de los dividendos se representa como V , función que no depende de forma separada de u y los parámetros de la barrera, sino que es función de una única variable d , definida como la diferencia entre el nivel de las reservas y los niveles predeterminados como máximos en las políticas de dividendos.

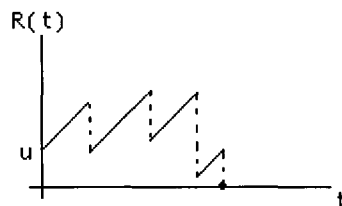
Respecto a los momentos en que se produce el reparto:

- Consideramos la **política de dividendos discreta** como aquella que realiza el reparto en momentos determinados, t_i para $i = 1, 2, 3, \dots$, siempre que $R(t_i) > b(t_i)$, sin considerar que en algún momento intermedio, el nivel de las reservas supere el nivel previamente fijado en la política mediante la barrera de dividendos.
- En una **política de dividendos continua** el reparto se realiza de forma continua $\forall t \in (0, \infty)$ siempre que tengamos exceso de reservas.

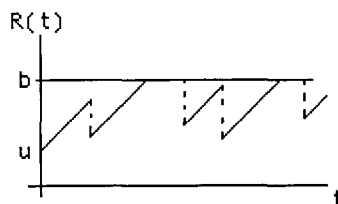
Podemos diferenciar dos tipos de barreras que modifican el proceso de las reservas cuando asumimos análisis continuo (Egidio dos Reis (1999))

1. **Barreras absorbentes:** En esta situación el proceso acaba cuando el nivel de las reservas alcanza el valor prefijado en la política de

control. Gráficamente, y suponiendo el caso más usual, que consiste en imponer una barrera absorbente en cero para controlar la ruina, tenemos:



2. **Barreras reflectantes:** Este tipo de barreras modifica el proceso de tal forma, que cuando el nivel de las reservas alcanza el tope prefijado, $R(t)$ se mantiene en el nivel de la barrera hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. Gráficamente, suponiendo una barrera constante, $b(t) = b$, tenemos:



Para el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos, sólo tiene sentido usar las barreras reflectantes. Esto es debido a que consideramos que cada vez que las reservas alcanzan el nivel de la barrera, una parte de los ingresos por primas producidos a partir de ese momento y hasta la ocurrencia del siguiente siniestro se destinan al pago de dividendos. La parte destinada a reparto de dividendos dependerá del tipo de barrera elegido: con una barrera constante, todo el ingreso por primas se destina a dividendos, en cambio, si trabajásemos con una barrera lineal creciente, se reparte la diferencia entre la intensidad de prima y la pendiente de la barrera lineal.

En el cálculo de W el proceso se ve limitado por una barrera absorbente inferior en el nivel $R(t) = 0$, ya que se considera que cuando se produce la ruina se produce el final del proceso, y por otro lado por una barrera reflectante en $b(t)$. En el cálculo de V sólo aparece la barrera reflectante en $b(t)$.

A continuación se formalizan las expresiones utilizadas para cuantificar los dividendos repartidos en función de si trabajamos con reparto discreto o continuo.

2.1.1 Reparto discreto

Consideramos $\tilde{\tau}$ como el momento de ruina definido en el apartado (1.4), y los momentos t_i para $i = 1, 2, 3, \dots$ equidistantes, considerándose $t_0 = 0$, siendo la unidad temporal el año.

Denominamos D_{t_i} a los dividendos repartidos en t_i para $i = 1, 2, 3, \dots$, con $t_i < \tilde{\tau}$ si el proceso acaba con la ruina.

$$D_{t_i} = \text{Max} \{ (R^*(t_i) - b(t_i)), 0 \}$$

siendo $R^*(t_i)$ el nivel de las reservas en el instante anterior al reparto de dividendos.

La suma total de los dividendos repartidos en un intervalo $(0, t]$ es

$$\begin{aligned} SD(t) &= D_{t_1} + D_{t_2} + \dots + D_{t_s} \\ SD(0) &= 0 \end{aligned}$$

siendo $t_s = \text{Max} \{ t_i / t_i \leq t \}$.

Así, la ecuación que determina el nivel de las reservas, $R(t)$, en el modelo modificado con reparto discreto toma la forma

$$R(t) = u + c \cdot t - S(t) - SD(t) \quad (2.1)$$

siendo $S(t)$ la siniestralidad agregada en el periodo $(0, t]$, y c la intensidad anual de prima.

El proceso de reservas $R(t)$, explicitado en (2.1), es un proceso definido para todo t , pero debido a que en el reparto discreto lo que interesa es el nivel

de las reservas en los momentos t_i para $i = 1, 2, 3, \dots$, nos centramos en el análisis de $R(t_i)$, definido como el nivel de las reservas en t_i , después del pago de dividendos, si hubiera. Así,

$$R(t_i) = u + c \cdot t_i - S(t_i) - SD(t_i)$$

pudiendo definir el nivel de las reservas antes del reparto de dividendos, $R^*(t_i)$, como:

$$R^*(t_i) = u + c \cdot t_i - S(t_i) - SD(t_{i-1}) \quad (2.2)$$

donde tanto los siniestros como los repartos de dividendos en t_i actúan como saltos en el proceso de las reservas.

Por tanto, la relación entre $R(t_i)$ y $R^*(t_i)$ viene dada por,

$$R(t_i) = R^*(t_i) - D_{t_i} \quad (2.3)$$

Podemos escribir (2.2) como

$$R^*(t_i) = R(t_{i-1}) + c \cdot (t_i - t_{i-1}) - (S(t_i) - S(t_{i-1})) \quad (2.4)$$

Por tanto, a partir de (2.3) y (2.4), podemos escribir,

$$R^*(t_i) = R^*(t_{i-1}) - D_{t_{i-1}} + c \cdot (t_i - t_{i-1}) - (S(t_i) - S(t_{i-1}))$$

Consideramos $v = (1 + i)^{-1}$ como el factor de actualización financiero constante para todos los periodos, siendo i el tanto de interés efectivo aplicable a un periodo $[t_i, t_{i+1}]$.

La esperanza del valor actual de los dividendos repartidos suponiendo que el proceso no acaba con la ruina es

$$V = E \left[\sum_{i=1}^{\infty} D_{t_i} \cdot v^{t_i} \right] \quad (2.5)$$

y suponiendo que el reparto de dividendos sólo se produce hasta el momento de ruina:

$$W = E \left[\sum_{i=1}^k D_{t_i} \cdot v^{t_i} \right] \text{ siendo } k = \text{Max} \{i \in N / t_i \leq \bar{\tau}\} \quad (2.6)$$

2.1.2 Reparto continuo

En el modelo clásico sin barrera, el proceso de las reservas viene definido por $R(t) = u + c \cdot t - S(t)$, siendo la variación de las reservas en un instante su diferencial $dR(t)$. Es decir,

$$dR(t) = c \cdot dt - dS(t)$$

En el modelo modificado con el reparto de dividendos esa expresión es:

$$dR(t) = \begin{cases} c \cdot dt - dS(t) & \text{si } R(t) < b(t) \\ db(t) - dS(t) & \text{si } R(t) = b(t) \end{cases}$$

donde

$$R(t) = u + c \cdot t - S(t) - SD(t)$$

La suma de los dividendos repartidos hasta el momento t , $SD(t)$, viene dada por

$$SD(t) = \int_0^t D(s) \cdot ds$$

siendo $D(t)$ la intensidad de los dividendos repartidos en cada instante:

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } R(t) < b(t) \\ c - \frac{db(t)}{dt} & \text{si } R(t) = b(t) \end{cases}$$

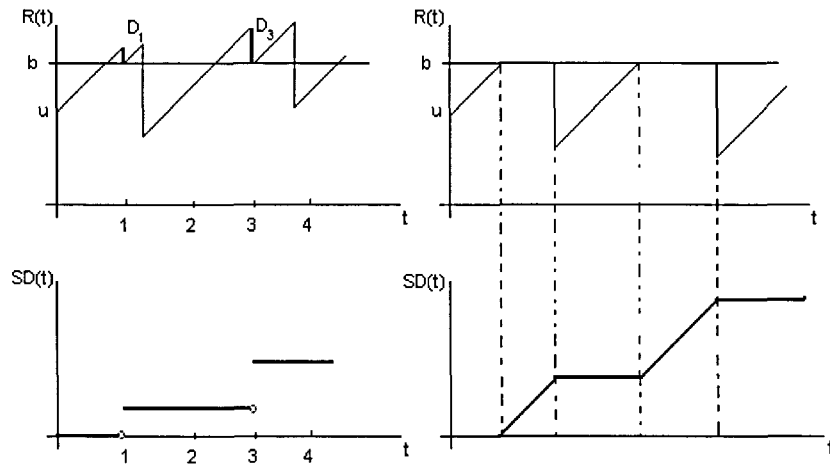
Definimos V y W en reparto continuo como:

$$V = E \left[\int_0^{\infty} D(t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot dt \right] \quad (2.7)$$

$$W = E \left[\int_0^{\tau} D(t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot dt \right] \quad (2.8)$$

siendo δ el tanto instantáneo de actualización.

Gráficamente podemos observar la diferencia entre el reparto discreto y el reparto continuo en el caso concreto de una barrera de dividendos constante $b(t) = b$



2.2 Medidas del efecto de la introducción de políticas de dividendos

Una vez definido cómo queda modificado el modelo con la introducción de políticas de dividendos, y analizadas las diferentes hipótesis que se pueden aplicar al reparto, nos planteamos a continuación alguna de las cuestiones básicas que van a ser objeto de desarrollo en los siguientes capítulos de la tesis.

Las políticas de reparto de dividendos, prefijadas para controlar el crecimiento excesivo de las reservas en tiempo infinito en una cartera de riesgos generan unos criterios de elección que, bien de forma individual, bien de forma conjunta, determinarán si la política de dividendos elegida es interesante o no para la entidad aseguradora.

Los criterios que se pueden tener en cuenta son:

1. **Probabilidad de ruina:** El primer efecto que podemos valorar es como queda afectada la probabilidad de ruina con la introducción de barreras de dividendos. Es evidente que la limitación en la acumulación de las reservas provoca valores mayores en la probabilidad de ruina, pudiendo

incluso convertir la ruina en cierta. La causa es que siniestros que en el modelo clásico no provocan niveles de reservas negativos, en el modelo con barreras de dividendos pueden provocar la ruina debido a que el nivel de las reservas se ve disminuido por las cuantías que se han repartido en forma de dividendos. Así, si imponemos un tope en el crecimiento de $R(t)$ su valor se verá disminuido, y por tanto la probabilidad de que $R(t)$ alcance valores negativos es mayor.

2. **Valor actual de los dividendos repartidos:** Evidentemente uno de los datos básicos para valorar una determinada política de dividendos es el cálculo de los dividendos repartidos, que como hemos visto, dependerá de si optamos por reparto continuo o discreto.

La medida, comentada en el apartado 2.1, utilizada en los trabajos que tratan modelos modificados con barreras de dividendos, es la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, que como hemos comentado, pueden ser valorados hasta que se produzca la ruina (W) o bien permitiendo la recuperación del proceso (V). Dado que los dividendos se producen en diferentes momentos del tiempo, es lógico el uso del valor actual de los dividendos repartidos como dato representativo, en media, de las cuantías que recibirán los accionistas.

En los capítulos posteriores de la tesis centramos el estudio de los dividendos repartidos en el cálculo de la esperanza (W y V). La justificación del uso de esta medida se basa en los siguientes puntos:

- La importancia de la esperanza como valor representativo de la variable es indudable.
- El hecho de que los dividendos repartidos en diferentes momentos del tiempo no sean independientes, no provoca problemas a la hora de utilizar la esperanza. Así, por ejemplo, las ecuaciones (2.5) y (2.6)

pueden ser escritas como,

$$V = E \left[\sum_{i=1}^{\infty} D_{t_i} \cdot v^{t_i} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} E[D_{t_i}] \cdot v^{t_i}$$

$$W = E \left[\sum_{i=1}^k D_{t_i} \cdot v^{t_i} \right] = \sum_{i=1}^k E[D_{t_i}] \cdot v^{t_i}$$

- El uso de la esperanza implica convertir la distribución de los dividendos en un valor cierto representativo. Este hecho, tal y como veremos en capítulos posteriores, es útil para la valoración de ciertas políticas, ya que nos permitirá comparar la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos con otras variables, como puede ser el nivel inicial de las reservas $R(0) = u$. La interpretación de u como inversión inicial, permite que la relación entre la esperanza y u nos aporte datos importantes sobre la rentabilidad de la cartera.

Se podría completar el análisis de los dividendos repartidos mediante la esperanza con otras características de la distribución como por ejemplo la varianza. La dependencia entre los dividendos repartidos genera ciertos problemas a la hora de aplicar la varianza. En este trabajo, de igual forma a lo que ocurre en la literatura existente sobre este tema, no se encara el problema del cálculo de la varianza.

El análisis completo del modelo con reparto de dividendos debería incluir a su vez el cálculo de otros elementos tratados en modelos sin barrera. Así, sería interesante conocer el valor negativo de las reservas en el momento de la ruina (severidad de ruina), o la distribución del momento de ruina.

Tanto el planteamiento de la varianza como de otras características del modelo son, sin duda, futuras líneas de investigación en el campo de la valoración de los dividendos repartidos. Una primera aproximación podría ser el uso de simulación como forma de conocer su comportamiento, y su comparación con los modelos sin reparto de dividendos.

Como complemento al criterio esperanza, planteamos a lo largo del trabajo dos nuevas medidas que, pensamos, pueden ayudar a completar la valoración de las políticas de reparto. Estas dos nuevas medidas, usadas sólo en los capítulos referentes a barrera constante, son:

- Presentamos la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos condicionados a que éstos sean positivos ($W_{\chi}(u, b)$). Es decir, eliminamos, mediante el uso de probabilidades definidas en el modelo básico de la teoría del riesgo, aquellas trayectorias que se arruinan sin haber alcanzado el nivel de la barrera, y que por tanto no han producido reparto de dividendos. La motivación de esta medida es ofrecer a los accionistas información sobre la probabilidad con la que recibirán dividendos, y en ese caso, cual será, en media, el valor actual de esas cuantías repartidas.
- Incluimos también el cálculo de una variable a la que denominamos tiempo promedio de espera ($\tau(u, b)$), que se define como el tiempo medio que deberá esperar el accionista para cobrar dividendos. Es pues, un nuevo dato útil tanto para el gestor de la cartera como para los accionistas que confían rentabilizar parte de su inversión mediante el cobro de dividendos.

Tal y como hemos comentado, estas medidas se aplican sólo al caso de barrera constante. Su cálculo para otro tipo de barreras es un análisis interesante, y, sin duda, será objeto de estudio en futuros trabajos.

2.3 Clasificación de las barreras de dividendos

La forma de concretar el control sobre el nivel de las reservas se realiza mediante la introducción de barreras de dividendos, que formalmente se representan como $b(t)$.

En la literatura actuarial encontramos trabajos sobre la barrera constante (Bulhmann (1970), Gerber (1972), Paulsen and Gjessing (1997)) que determinan

un mismo nivel máximo de acumulación de las reservas para todo el horizonte temporal. Su expresión matemática es

$$b(t) = b, \quad b \geq u \geq 0$$

La introducción de una barrera constante tiene un primer efecto determinante a la hora de valorar esta política de dividendos: La probabilidad de ruina en un horizonte temporal infinito es uno, independientemente de que asumamos reparto continuo o discreto. El hecho de que la ruina sea segura en el modelo con una barrera constante, no debe hacernos olvidar que el momento de ruina es diferente dependiendo de los parámetros definidos.

El análisis de esta barrera asumiendo reparto continuo se realiza en el capítulo 3, donde se presenta y aplica un método alternativo para el cálculo de los dividendos, que será utilizado para otras políticas de dividendos estudiadas en la tesis. Se presentan las dos nuevas medidas comentadas en el apartado anterior (esperanza del valor actual de los dividendos condicionada a que sean positivos y tiempo promedio de espera), y finalmente se incorporan análisis de sensibilidad respecto a algunas de las variables de control que ayudan a comprender la influencia de las barreras de dividendos en el proceso de las reservas.

En el capítulo 6 se analiza también la barrera constante, pero asumiendo reparto discreto, incluyéndose la demostración de que la ruina es segura, y planteando un método general de solución de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, válido para cualquier distribución de la siniestralidad agregada en un periodo.

Podemos encontrar también trabajos sobre la barrera lineal (Gerber (1981), Siegl and Tichy (1996,1999)), que permite una acumulación creciente de $R(t)$, quedando expresada formalmente como

$$b(t) = b + a \cdot t, \quad b \geq u \geq 0, \quad a \geq c \geq 0$$

siendo b el valor de la barrera para $t = 0$, y a la pendiente, es decir la tasa de incremento instantáneo para el valor máximo de las reservas que se permiten en cada momento del tiempo.

En el capítulo 4 se trabaja con la barrera lineal en reparto continuo, planteándose el cálculo de la probabilidad de ruina mediante el proceso alternativo utilizado en la barrera constante, que permite justificar las condiciones de contorno necesarias para la resolución de la ecuación en derivadas parciales obtenida. Se plantea también mediante ese método el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos. Al final del capítulo se incorporan resultados numéricos que permiten ver la variación de la cuantificación de los dividendos y de la probabilidad de ruina respecto a variables del modelo, tales como el nivel inicial de las reservas u , el nivel inicial de la barrera b , o la pendiente de la barrera a .

En el capítulo 5 introducimos una nueva política de dividendos que viene representada por una barrera a la que denominamos parabólica. La idea de plantear una barrera de dividendos no lineal, alternativa a las existentes en la literatura actuarial, surgió de que barreras diferentes podían producir la misma probabilidad de ruina, pero generar unos dividendos repartidos diferentes.

La expresión de la barrera parabólica es

$$b(t) = \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}, \quad b_0 \geq u \geq 0, \quad a \geq 0$$

siendo b_0 el nivel inicial de la barrera y α determina la tasa de crecimiento del valor máximo permitido para la acumulación de las reservas.

Planteamos con esta nueva barrera el cálculo de la probabilidad de supervivencia y de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos. Se incluye una comparación entre la barrera lineal y la parabólica que nos permite hallar barreras equivalentes desde el punto de vista de la solvencia.

A lo largo de la tesis asumimos un proceso de Poisson compuesto para la siniestralidad agregada.

Capítulo 3

Política de dividendos en caso continuo: Barrera constante

3.1 Introducción

La política de dividendos que se plantea en este capítulo es aquella que determina un nivel máximo de acumulación de reservas libres constante, de tal forma que siempre que el proceso de reservas alcance el tope predeterminado se empiezan a repartir dividendos hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. Asumimos, por tanto, reparto continuo.

Algunos de los resultados que a lo largo de éste capítulo se muestran se incluyen en el trabajo "Reparto de dividendos en una cartera de seguros no vida. Obtención de la barrera constante óptima bajo criterios económico actuariales"(Mármol, Claramunt y Alegre) presentado en el VI Congreso de Matemática Financiera y Actuarial y 5th Italian-spanish Conference on Financial Mathematics (Valencia, 2002).

Matemáticamente modificaremos el modelo clásico de la teoría del riesgo

con la inclusión de una barrera de dividendos que expresaremos como $b(t) = b$. Así, el proceso de las reservas del proceso clásico, $R(t) = u + c \cdot t - S(t)$ siendo $dR(t) = c \cdot dt - dS(t)$, queda modificado. En el capítulo 2 definíamos la variación de las reservas en modelos con barreras $b(t)$ como:

$$dR(t) = \begin{cases} c \cdot dt - dS(t) & \text{si } R(t) < b \\ db(t) - dS(t) & \text{si } R(t) = b \end{cases}$$

expresión que para una barrera $b(t) = b$ toma la forma

$$dR(t) = \begin{cases} c \cdot dt - dS(t) & \text{si } R(t) < b \\ -dS(t) & \text{si } R(t) = b \end{cases}$$

Como ya hemos comentado, la inclusión de barreras de dividendos afecta a la probabilidad de ruina. En el modelo modificado con una barrera constante, $b(t) = b$, la probabilidad de ruina es uno. Independientemente del nivel concreto en el que impongamos la barrera constante, todas las trayectorias de las reservas acabarán arruinándose.

Así, en este capítulo centramos el estudio, asumiendo un proceso de Poisson compuesto, en las diferentes medidas que, bajo las hipótesis definidas en el capítulo anterior, cuantifican el valor actual de los dividendos repartidos. Trabajaremos con las medidas presentadas en la literatura actuarial, que, como ya hemos comentado son $W(u, b)$ (definida como el valor actual de los dividendos repartidos suponiendo que el proceso acabe en el momento de ruina), y $V(d)$ (definida como el valor actual de los dividendos repartidos permitiendo niveles de reservas negativas y la posterior recuperación de $R(t)$).

Para estas dos medidas calculadas según el "argumento diferencial", planteamos un método de cálculo alternativo que es el "enfoque de renovación".

Presentamos además una nueva medida para el cálculo de dividendos, a la que denominamos $W_\chi(u, b)$, que incluye el condicionamiento a que la cuantía repartida de dividendos sea positiva. Para ello usamos probabilidades definidas en el modelo clásico sin barrera.

Sobre las tres medidas realizamos un estudio de sensibilidad respecto a las variables nivel inicial de las reservas, u , y nivel de la barrera b , presentando

resultados numéricos para diferentes valores de los parámetros.

3.2 Probabilidad de ruina

Tal y como hemos comentado, la modificación del modelo con una política de dividendos que impone un tope máximo a la acumulación de reservas provoca una probabilidad de ruina unitaria.

Teorema 3 *En un proceso modificado con una barrera de dividendos constante, $b(t) = b$, la probabilidad de ruina en tiempo infinito y chequeo continuo, $\psi(u, b)$, es uno.*

Demostración. *Egídio dos Reis (1999) plantea la siguiente ecuación integro-diferencial para la probabilidad de ruina $\psi(u, b)$ suponiendo que el nivel inicial de las reservas coincide con el nivel de la barrera $u = b$.*

$$\begin{aligned} \psi(b, b) = & (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \psi(b, b) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^b \psi(b - z, b) \cdot dF(z) + \\ & + \lambda \cdot dt \cdot [1 - F(b)] + \sigma(dt) \end{aligned} \quad (3.1)$$

El primer sumando indica el caso en que no ocurra siniestro en un diferencial de tiempo dt , situación que se produce con probabilidad $(1 - \lambda \cdot dt)$. En ese caso el proceso se mantiene en el nivel de la barrera, por tanto la probabilidad de ruina seguirá siendo $\psi(b, b)$.

El segundo sumando nos indica el caso en que ocurra siniestro (lo que ocurre con probabilidad $\lambda \cdot dt$), la cuantía del cual es menor que el nivel de la barrera, b , para evitar la ruina. Por tanto, el nuevo nivel de las reservas estará en $b - z$, por lo que la probabilidad de ruina entonces será $\psi(b - z, b)$.

El tercer sumando recoge el caso en que ese siniestro ocurrido con probabilidad $\lambda \cdot dt$ sea de una cuantía superior al nivel de las reservas b , mientras $\sigma(dt)$ indica la probabilidad de que en un intervalo dt ocurra más de un siniestro.

Al dividir entre $\lambda \cdot dt$ la ecuación (3.1),

$$\begin{aligned} \frac{\psi(b, b)}{\lambda \cdot dt} &= \frac{(1 - \lambda \cdot dt) \cdot \psi(b, b)}{\lambda \cdot dt} + \frac{\lambda \cdot dt \cdot \int_0^b \psi(b - z, b) \cdot dF(z)}{\lambda \cdot dt} + \\ &+ \frac{\lambda \cdot dt \cdot [1 - F(b)]}{\lambda \cdot dt} + \frac{\sigma(dt)}{\lambda \cdot dt} \end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{\psi(b, b)}{\lambda \cdot dt} = \frac{\psi(b, b)}{\lambda \cdot dt} - \psi(b, b) + \int_0^b \psi(b - z, b) \cdot dF(z) + [1 - F(b)] + \frac{\sigma(dt)}{\lambda \cdot dt}$$

$$\psi(b, b) = \int_0^b \psi(b - z, b) \cdot dF(z) + 1 - F(b) + \frac{\sigma(dt)}{\lambda \cdot dt} \quad (3.2)$$

Al hacer $dt \rightarrow 0$ sobre (3.2) se obtiene,

$$\psi(b, b) = \int_0^b \psi(b - z, b) \cdot dF(z) + 1 - F(b)$$

Y sabiendo que $\psi(b, b) < \psi(b - z, b)$, ya que el nivel de las reservas es menor y por tanto, la probabilidad de que $R(t)$ sea negativo es mayor, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \psi(b, b) &= \int_0^b \psi(b - z, b) \cdot dF(z) + 1 - F(b) \geq \\ &\geq \int_0^b \psi(b, b) \cdot dF(z) + 1 - F(b) = \\ &= \psi(b, b) \cdot \int_0^b dF(z) + 1 - F(b) = \\ &= \psi(b, b) \cdot F(b) + 1 - F(b) \end{aligned}$$

de donde

$$\psi(b, b) \cdot [1 - F(b)] \geq 1 - F(b)$$

lo que implica $\psi(b, b) \geq 1$. Y sabiendo que $\psi(b, b) \leq \psi(u, b) \leq 1$, llegamos a,

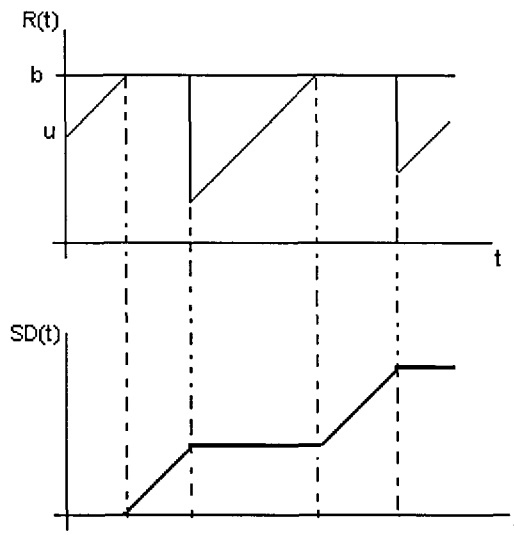
$$\psi(u, b) = 1$$

Por tanto la modificación producida con la introducción de una barrera constante nos da una probabilidad de ruina unitaria independientemente del nivel de b . ■

3.3 Cuantificación de los dividendos repartidos. Esperanza del valor actual de los dividendos cuando el proceso acaba con la ruina: $W(u,b)$

En el capítulo 2 hemos definido $W(u,b)$ como la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos hasta el momento en que se produce la ruina, siendo u el nivel inicial de las reservas, y b el nivel de la barrera, para $0 \leq u \leq b$.

La idea gráfica es:



Para calcular ese valor podemos recurrir al planteamiento diferencial indicado por Bühlmann (1970).

$$W(u,b) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot W(u + c \cdot dt, b) \cdot e^{-\delta \cdot dt} + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^u W(u + c \cdot dt - z, b) \cdot dF(z) + O(dt^2) \quad (3.3)$$

donde δ es la tasa de actualización.

El primer sumando de (3.3) indica el caso en que en un dt no ocurra siniestro, lo que se produce con una probabilidad $(1 - \lambda \cdot dt)$. En este caso las reservas

iniciales u se ven incrementadas en las primas ingresadas en dt , y los futuros dividendos repartidos en el momento dt serán $W(u + c \cdot dt, b)$, que debemos trasladar al momento $t = 0$ con el factor de actualización $e^{-\delta \cdot dt}$.

El segundo sumando de (3.3) representa el caso de que en ese intervalo dt ocurra siniestro, lo que ocurre con una probabilidad $\lambda \cdot dt$. En ese caso las reservas iniciales u disminuirán en la cuantía del siniestro z .

El tercer sumando de (3.3) nos indica la probabilidad de que en un dt ocurra más de un siniestro, probabilidad que se considera cero.

Para conseguir una ecuación integro-diferencial a partir de (3.3) se hace una aproximación lineal de los factores de actualización en el punto cero,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda \cdot dt} \cdot e^{-\delta \cdot dt} &= e^{-(\delta + \lambda) \cdot dt} \\ e^{-(\delta + \lambda) \cdot dt} &= 1 - \lambda \cdot dt - \delta \cdot dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

Al sustituir (3.4) en (3.3),

$$\begin{aligned} W(u, b) &= W(u + c \cdot dt, b) \cdot (1 - \lambda \cdot dt - \delta \cdot dt) + \\ &+ \lambda \cdot dt \int_0^u W(u + c \cdot dt - z, b) \cdot dF(z) = \\ &= W(u + c \cdot dt, b) - dt \cdot (\lambda + \delta) \cdot W(u + c \cdot dt, b) + \\ &+ \lambda \cdot dt \cdot \int_0^u W(u + c \cdot dt - z, b) \cdot dF(z) \end{aligned}$$

que reorganizando, dividiendo entre dt , y haciendo $dt \rightarrow 0$,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{W(u + c \cdot dt, b) - W(u, b)}{c \cdot dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(\lambda + \delta) \cdot W(u + c \cdot dt, b)}{c} - \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\lambda \cdot \int_0^u W(u + c \cdot dt - z, b) \cdot dF(z)}{c}$$

Podemos observar que el primer miembro de la igualdad es la definición de derivada de $W(u, b)$ respecto a u , por tanto

$$\frac{\partial W(u, b)}{\partial u} = \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot W(u, b) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) \quad (3.5)$$

ecuación integro-diferencial para la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos en un modelo modificado con barrera constante.

3.3.1 Planteamiento alternativo

Podemos plantear un método alternativo para el cálculo de $W(u, b)$ basado en la ley de probabilidad total, coincidente con el utilizado en el cálculo de

probabilidades de supervivencia, que se utiliza en Grandell (1991) para hallar la probabilidad de supervivencia sin barrera. En ese trabajo se plantea:

$$\phi(u) = E[\phi(u + c \cdot t - z)] = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - z) \cdot dF(z) \cdot dt$$

Aplicamos la misma idea para hallar el valor actual de los dividendos, lo que nos permite plantear:

$$W(u, b) = E \left[W(R(t), b) \cdot e^{-\delta t} + \int_0^t D(s) \cdot e^{-\delta s} \cdot ds \right],$$

siendo t el momento de ocurrencia del primer siniestro.

Debido a que nuestro proceso se ve modificado con la introducción de la barrera constante, el valor de las reservas en t , $R(t)$, depende de si t es mayor o menor que t^* , siendo t^* el punto de corte entre el proceso de las reservas y la barrera, suponiendo que no ocurra siniestro:

$$u + c \cdot t^* = b \Rightarrow t^* = \frac{b - u}{c}.$$

Por tanto podemos escribir:

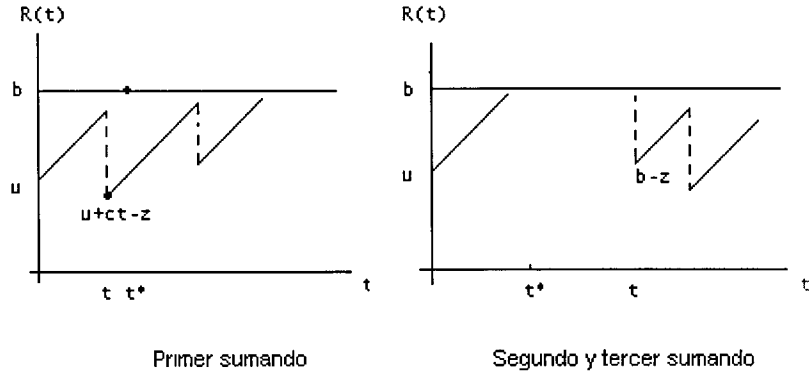
$$\begin{aligned} W(u, b) &= \int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+c \cdot t} W(u + c \cdot t - z, b) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt \\ &+ \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt + \\ &+ \int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

El primer sumando de (3.6) indica la probabilidad de que el primer siniestro ocurra en $t < t^*$. En este caso no se produce reparto de dividendos, pero debemos actualizar $W(u + c \cdot t - z, b)$ a una tasa δ , limitando la ocurrencia del siniestro por el extremo superior de la integral a $u + c \cdot t$ para evitar la ocurrencia de la ruina.

El segundo y tercer sumando de (3.6) nos indica el caso en que el primer siniestro ocurra en $t > t^*$. En el momento de ocurrencia del siniestro los dividendos futuros vienen recogidos en $W(b - z, b)$, la actualización de los cuales queda recogida en el segundo sumando. El tercer sumando recoge la actualización de los dividendos repartidos entre el punto de corte, t^* , y la ocurrencia del

sinistro mediante la actualización de un flujo de intensidad constante diferido representado por $c \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr$.

Gráficamente:



Para solucionar la ecuación integro-diferencial definida en (3.6), seguimos los siguientes pasos:

Sobre el primer sumando de (3.6), que es

$$\int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+c \cdot t} W(u+c \cdot t-z, b) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt, \quad (3.7)$$

se aplica el cambio de variable $u+c \cdot t = r$, quedando los extremos de la integral

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow r = u + c \cdot 0 = u \\ t = t^* \rightarrow r = u + c \cdot \frac{b-u}{c} = b \end{cases}$$

por tanto, podemos escribir (3.7) como

$$\begin{aligned} \int_u^b \lambda \cdot e^{-\lambda \frac{r-u}{c}} \int_0^r W(r-z, b) \cdot e^{-\delta \frac{r-u}{c}} \cdot dF(z) \cdot \frac{dr}{c} = \\ = \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \int_0^r W(r-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se deriva la expresión (3.8) respecto a u ,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \cdot [(\lambda+\delta) \cdot \frac{1}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \cdot \int_0^r W(r-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr + \\ + e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[\int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \cdot \int_0^r W(r-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr \right]] \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde la parcial respecto a u que aparece en la expresión (3.9) es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[\int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \int_0^r W(r-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr \right] = \\ = -e^{-(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \int_0^u W(u-z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) en (3.9) se obtiene la parcial respecto a u del primer sumando de la expresión (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \cdot [(\lambda + \delta) \cdot \frac{1}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \int_0^r W(r-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr - \\ - e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \int_0^u W(u-z, b) \cdot dF(z)] = \\ = \frac{\lambda}{c} \cdot [(\lambda + \delta) \cdot \frac{1}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \int_0^r W(r-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr - \\ - \int_0^u W(u-z, b) \cdot dF(z)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

A continuación trabajamos con el segundo sumando de (3.6), sobre el que hacemos el cambio de variable $u + c \cdot t = r$, quedando los extremos de la integral

$$\begin{cases} t = t^* \rightarrow r = u + c \cdot t^* = u + c \cdot \frac{b-u}{c} = b \\ t = \infty \rightarrow r = \infty \end{cases},$$

Por tanto, podemos escribir el segundo sumando de (3.6) como

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_b^\infty e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \cdot \int_0^b W(b-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr \quad (3.12)$$

y al derivar (3.12) respecto a u , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda+\delta}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_b^\infty e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \int_0^b W(b-z, b) \cdot dF(z) \cdot dr = \\ = \left\{ \int_b^\infty e^{-(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \cdot dr = \frac{c}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b}{c}} \right\} = \\ = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda+\delta}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \int_0^b W(b-z, b) \cdot dF(z) \cdot \left[\frac{c}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b}{c}} \right] = \\ = \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^b W(b-z, b) \cdot dF(z) \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{(u-b)}{c}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Respecto al tercer sumando de (3.6), $\int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt$, resolvemos la integral llegando a

$$\int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt = \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b-u}{c}} \quad (3.14)$$

que al derivar respecto a u :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c}} \right] = e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c}} \quad (3.15)$$

Por tanto tenemos la expresión de partida (3.6), que podemos escribir a partir de las expresiones (3.8), (3.12) y (3.14), como

$$\begin{aligned} W(u, b) &= \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_u^b e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \int_0^r W(r - z, b) \cdot dF(z) \cdot dr + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_0^\infty e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) \cdot dr + \\ &+ \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

siendo su expresión derivada respecto a u , a partir de (3.11), (3.13) y (3.15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \cdot (\lambda + \delta) \cdot \frac{1}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \int_u^b e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \int_0^r W(r - z, b) \cdot dF(z) \cdot dr \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) - \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) \cdot e^{-\frac{-(\lambda + \delta)}{c} (u-b)} + e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Despejamos en (3.16) el primer sumando

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \int_u^b e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \int_0^r W(r - z, b) \cdot dF(z) \cdot dr &= \\ = W(u, b) - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_b^\infty e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) \cdot dr - \\ - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Al sustituir (3.18) en (3.17),

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} &= \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot [W(u, b) - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_b^\infty e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) \cdot dr - \\ &- \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c}}] - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) - \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{-(\lambda + \delta)}{c} (u-b)} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) + e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c}} \end{aligned}$$

que de forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} &= \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot W(u, b) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot \left[\frac{\lambda + \delta}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_b^\infty e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) \cdot dr - \right. \\ &- \left. e^{-\frac{(\lambda + \delta)}{c} (u - b)} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) \right] - \\ &- e^{-(\lambda + \delta) \frac{b - u}{c}} + e^{-(\lambda + \delta) \frac{b - u}{c}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

En (3.19) podemos observar que el tercer sumando se anula, ya que resolviendo la integral respecto a r que encontramos en el primer sumando:

$$\int_b^\infty e^{-(\lambda + \delta) \frac{r}{c}} \cdot dr = \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b}{c}}$$

pudiendo escribir el corchete que aparece en (3.19) como,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \cdot \left[\frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b}{c}} \right] \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) - \\ - e^{-\frac{(\lambda + \delta)}{c} (u - b)} \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto la expresión (3.19) toma la forma

$$\frac{\partial W(u, b)}{\partial u} = \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot W(u, b) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z)$$

expresión coincidente con la (3.5), obtenida mediante el uso del argumento diferencial.

3.3.2 Condición de contorno

Para la solución de la ecuación (3.5) necesitamos una condición de contorno que hallamos para $u = b$. Si $u = b$, la variable t^* definida anteriormente como el punto de corte entre el proceso de reservas y la barrera suponiendo que no ocurre siniestro, toma valor cero, por lo que en la expresión (3.6) desaparece la primera integral, quedando,

$$\begin{aligned} W(b, b) &= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \left[c \cdot \int_0^t e^{-\delta r} \cdot dr + \right. \\ &\left. + \int_0^b W(b - z, b) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \right] \cdot dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si resolvemos la integral que corresponde al primer sumando de la expresión (3.20)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c \int_0^t e^{-\delta r} \cdot dr &= \lambda \cdot c \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[-\frac{1}{\delta} \cdot (e^{-\delta t} - 1) \right] \cdot dt = \\ &= -\frac{\lambda c}{\delta} \cdot \int_0^\infty (e^{-(\lambda+\delta)t} - e^{-\lambda t}) \cdot dt = \\ &= \frac{c}{\lambda+\delta} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Al resolver el segundo sumando de (3.20)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^b W(b-z, b) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt &= \\ &= \lambda \cdot \int_0^b W(b-z, b) \cdot dF(z) \cdot \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} \cdot dt = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot \int_0^b W(b-z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Al sustituir (3.21) y (3.22) en (3.20)

$$W(b, b) = \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot \int_0^b W(b-z, b) \cdot dF(z) \quad (3.23)$$

Para resolver la ecuación integro-diferencial (3.5) con la condición de contorno (3.23) y hallar la expresión concreta en el caso de que la cuantía de los siniestros se distribuya según una exponencial, seguimos los pasos desarrollados por Bühlmann (1970).

3.3.3 Solución de $W(u, b)$

Consideramos que $W(u, b)$ tiene como variable de decisión el valor inicial de las reservas u , y consideramos el nivel de la barrera $b(t) = b$ como un parámetro, lo que nos permitirá referirnos a $W(u, b)$ como $W_b(u)$, es decir

$$W_b(u) = C(b) \cdot h(u) \quad (3.24)$$

de donde al derivar se obtiene,

$$W'_b(u) = C(b) \cdot h'(u) \quad (3.25)$$

Al sustituir (3.25) en (3.5)

$$h'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} \cdot h(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u h(u-z) \cdot dF(z) \quad (3.26)$$

y sustituyendo (3.25) en (3.23), se obtiene

$$C(b) \cdot h(b) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b C(b) \cdot h(b - z) \cdot dF(z) \quad (3.27)$$

Al despejar $C(b)$ de (3.27)

$$C(b) = \frac{c}{(\lambda + \delta) \cdot h(b) - \lambda \cdot \int_0^b h(b - z) \cdot dF(z)} = \frac{c}{c \cdot h'(b)} = \frac{1}{h'(b)} \quad (3.28)$$

Por tanto sustituyendo (3.28) en (3.24)

$$W_b(u) = C(b) \cdot h(u) = \frac{h(u)}{h'(b)} \quad (3.29)$$

3.3.4 Caso exponencial

En el caso de que la función distribución de la cuantía de los siniestros siga una exponencial normalizada tenemos $F(z) = 1 - e^{-z}$. Sustituyendo la exponencial en la ecuación (3.26), en la que sustituimos u por x , sabiendo que $dF(z) = e^{-z}$, llegamos a:

$$c \cdot h'(x) = (\lambda + \delta) \cdot h(x) - \lambda \cdot \int_0^x h(x - z) \cdot e^{-z} \cdot dz \quad (3.30)$$

Al derivar (3.30)

$$c \cdot h''(x) = (\lambda + \delta) \cdot h'(x) - \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x h(x - z) \cdot e^{-z} \cdot dz \quad (3.31)$$

Se soluciona la parcial del último sumando de (3.31),

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x h(x - z) \cdot e^{-z} \cdot dz = h(x - x) \cdot e^{-x} - \int_0^x h'(x - z) \cdot e^{-z} \cdot dz \quad (3.32)$$

y resolviendo por partes la integral que aparece en la expresión (3.32)

$$\begin{aligned} \int_0^x h'(x - z) \cdot e^{-z} \cdot dz &= \left\{ \begin{array}{l} dv = h'(x - z) \quad v = h(x - z) \\ u = e^{-z} \quad du = -e^{-z} \cdot dz \end{array} \right\} = \\ &= [e^{-z} \cdot h(x - z)]_0^x + \int_0^x h(x - z) \cdot e^{-z} \cdot dz = e^{-x} \cdot h(x - x) - \\ &- e^{-0} \cdot h(x - 0) + \int_0^x h(x - z) \cdot e^{-z} \cdot dz \end{aligned} \quad (3.33)$$

Al sustituir (3.33) en (3.32)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x h(x-z) \cdot e^{-z} \cdot dz &= h(0) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot h(0) + \\ &+ h(x) + \int_0^x h(x-z) \cdot e^{-z} \cdot dz = \\ &= h(x) + \int_0^x h(x-z) \cdot e^{-z} \cdot dz \end{aligned} \quad (3.34)$$

y sustituyendo (3.34) en (3.31) llegamos a :

$$c \cdot h''(x) = (\lambda + \delta) \cdot h'(x) - \lambda \cdot h(x) + \lambda \cdot \int_0^x h(x-z) \cdot e^{-z} \cdot dz \quad (3.35)$$

En la ecuación (3.30) podemos despejar $\lambda \cdot \int_0^x h(x-z) \cdot e^{-z} \cdot dz$, y al sustituir en (3.35)

$$c \cdot h''(x) - (\lambda + \delta - c) \cdot h'(x) - \delta \cdot h(x) = 0 \quad (3.36)$$

ecuación diferencial de segundo orden que se soluciona hallando su ecuación característica, que es de la forma,

$$c \cdot r^2 - (\lambda + \delta - c) \cdot r - \delta = 0 \quad (3.37)$$

cuyas raíces son r_1 y r_2

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(\lambda + \delta - c) + \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4 \cdot c \cdot \delta}}{2 \cdot c} \\ r_2 &= \frac{(\lambda + \delta - c) - \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4 \cdot c \cdot \delta}}{2 \cdot c} \end{aligned}$$

Por tanto :

$$h(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} \quad (3.38)$$

siendo su derivada

$$h'(x) = C_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 x} \quad (3.39)$$

Al sustituir (3.38) y (3.39) en (3.30) se obtiene

$$\begin{aligned} [C_1 \cdot r_1] \cdot e^{r_1 x} + [C_2 \cdot r_2] \cdot e^{r_2 x} &= e^{r_1 x} \cdot \left[C_1 \cdot \frac{(\lambda + \delta)}{c} - \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{C_1}{1 + r_1} \right] + \\ &+ e^{r_2 x} \cdot \left[C_1 \cdot \frac{(\lambda + \delta)}{c} - \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{C_2}{1 + r_2} \right] + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-x} \cdot \left[\frac{C_1}{1 + r_1} + \frac{C_2}{1 + r_2} \right] \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{1+r_1}{1+r_2}$$

A partir de (3.29), (3.38) y (3.39)

$$\begin{aligned} W(u, b) &= \frac{C_1 \cdot e^{r_1 u} + C_2 \cdot e^{r_2 u}}{C_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 b} + C_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 b}} = \\ &= \frac{\frac{C_1}{C_2} \cdot e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{\frac{C_1}{C_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 b} + r_2 \cdot e^{r_2 b}} = \\ &= \left\{ \frac{C_1}{C_2} = -\frac{1+r_1}{1+r_2} \right\} = \\ &= \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 b} + r_2 \cdot e^{r_2 b}} \end{aligned}$$

Es decir la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos bajo la hipótesis de que la cuantía de los siniestros sea una distribución exponencial unitaria es,

$$W(u, b) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 b} + r_2 \cdot e^{r_2 b}} \quad (3.40)$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de

$$c \cdot r^2 - (\lambda + \delta - c) \cdot r - \delta = 0$$

3.4 Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos cuando el proceso acaba con la ruina condi- cionados a que sean positivos: $W_\chi(u, b)$

En este apartado se presenta una nueva medida para valorar la política de dividendos. Recogemos primero unas probabilidades definidas en el modelo

clásico de la teoría del riesgo, para aplicarlas luego al condicionamiento de la medida ya presentada, $W(u, b)$.

3.4.1 Probabilidades que condicionan

En este apartado utilizamos las probabilidades planteadas para el modelo clásico de la teoría del riesgo (Gerber et al. (1987), Dickson (1989, 1992, 1993), Dufresne and Gerber (1988), Bowers et al. (1987)). En la literatura citada se plantea el proceso clásico de Poisson Compuesto, donde las reservas parten de un nivel inicial $R(0) = u$ y crecen a una intensidad de prima constante c . Se fija un valor de las reservas x mayor que el nivel u , y se definen las siguientes probabilidades:

- $\xi(u, x)$. Es la probabilidad de que la ruina ocurra para $R(0) = u$, y que las reservas no hayan alcanzado previamente el nivel x .
- $\chi(u, x)$. Es la probabilidad de que el proceso de las reservas $R(t)$ alcance el nivel x antes de que se produzca la ruina.

Ese nivel planteado x no actúa como barrera reflectante en los trabajos citados, pero podemos replantear el sentido de esas probabilidades de la siguiente forma:

Definición 8 $\xi(u, b)$. *Dado que implica la ocurrencia de ruina antes de que el proceso haya alcanzado el nivel de la barrera b , será la probabilidad de que no se produzca reparto de dividendos, es decir la probabilidad de que $\mathbf{W}(u, b)$ sea igual a cero.*

Definición 9 $\chi(u, b)$. *Como $\chi(u, b)$ indica la probabilidad de que se alcance la barrera antes de que se produzca la ruina, podemos interpretarla como la probabilidad de que exista reparto de dividendos, es decir, que $\mathbf{W}(u, b)$ sea positivo. Es la probabilidad complementaria de $\xi(u, b)$.*

Son probabilidades complementarias, por lo que:

$$\xi(u, b) + \chi(u, b) = 1$$

Entre estas nuevas probabilidades podemos remarcar una serie de relaciones. Tendremos que para $u < b$,

$$F(u, b) = \xi(u, b) + \chi(u, b) \cdot F(b, b)$$

siendo $F(u, b)$ la probabilidad de que la ruina ocurra para $R(0) = u$ y las reservas en el momento inmediatamente anterior a la ruina no alcancen el nivel b . Esa probabilidad se divide en dos sumandos. El primero indica la probabilidad de que se produzca la ruina sin que las reservas hayan alcanzado previamente el nivel b , y el segundo indica la probabilidad de que se alcance el nivel b antes de la ruina, multiplicado por la probabilidad de que la ruina ocurra para $R(0) = b$ y las reservas en el momento inmediatamente anterior a la ruina no alcancen b .

Despejando:

$$\xi(u, b) = \frac{F(u, b) - F(b, b)}{1 - F(b, b)}$$

Teorema 4 Si $c > \lambda \cdot E[z]$, entonces (Dickson and Grey (1984)),

$$\xi(u, b) = \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)}$$

Demostración. Sabiendo que,

$$\psi(u) = \xi(u, b) + \chi(u, b) \cdot \psi(b)$$

despejando $\xi(u, b)$,

$$\xi(u, b) = \psi(u) - \chi(u, b) \cdot \psi(b) \quad (3.41)$$

y considerando que,

$$\phi(u) = \chi(u, b) \cdot \phi(b)$$

Al despejar $\chi(u, b)$

$$\chi(u, b) = \frac{\phi(u)}{\phi(b)} = \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)} \quad (3.42)$$

y sustituir en (3.41),

$$\xi(u, b) = \psi(u) - \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)} \cdot \psi(b)$$

de donde:

$$\xi(u, b) = \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)} \quad (3.43)$$

Iguando (3.41) y (3.43) se llega a,

$$\frac{F(u, b) - F(b, b)}{1 - F(b, b)} = \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)}$$

■

Egídio dos Reis (1993) demuestra que para $\xi(u, b)$ se mantiene la misma ecuación integro-diferencial que para la probabilidad de ruina, es decir, partiendo de la siguiente ecuación cuya interpretación es la misma que para probabilidad de ruina:

$$\begin{aligned} \xi(u, b) &= (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \xi(u + c \cdot dt, b) + \\ &+ \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \xi(u + c \cdot dt - z, b) \cdot dF(z) + \\ &+ \lambda \cdot dt \cdot [1 - P[u + c \cdot dt]] + \sigma(dt) \end{aligned}$$

y realizando las mismas operaciones que realizábamos en el proceso de resolución de $W(u, b)$ usando el método diferencial se llega a:

$$\frac{d}{du} \xi(u, b) = \frac{\lambda}{c} \cdot \xi(u, b) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \xi(u - z, b) \cdot dF(z) - \frac{\lambda}{c} \cdot [1 - P[u]]$$

3.4.2 Cálculo de $W_\chi(u, b)$

Condicionamos el cálculo de $W(u, b)$ a que se repartan dividendos, es decir a que el proceso alcance el nivel de la barrera antes de que se produzca la ruina. Por tanto, si tenemos en cuenta que $W(u, b)$ es la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos bajo la hipótesis de una barrera constante, podemos hallar esa esperanza condicionada a que se produzca reparto, magnitud que representaremos como $W_\chi(u, b)$, y que hallaremos a partir de:

$$W(u, b) = W_\chi(u, b) \cdot P[\mathbf{W}(u, b) > 0] \quad (3.44)$$

y por la definición 9,

$$\chi(u, b) = P[\mathbf{W}(u, b) > 0] \quad (3.45)$$

Al despejar $W_\chi(u, b)$ de (3.44), teniendo en cuenta la definición de $\chi(u, b)$ en (3.42),

$$\begin{aligned} W_\chi(u, b) &= \frac{W(u, b)}{\chi(u, b)} = \frac{W(u, b)}{\left[1 - \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)}\right]} = \\ &= \frac{W(u, b)}{\left[\frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)}\right]} \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.4.3 Tiempo promedio de espera para el reparto de dividendos si son positivos

A partir de la definición de $W_\chi(u, b)$, interpretada como la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos condicionados a que sean positivos, planteamos el cálculo de una nueva variable, que denominamos $\tau(u, b)$ y que definimos como el tiempo promedio que deberá esperar el accionista para empezar a cobrar dividendos.

Las trayectorias que recoge $W_\chi(u, b)$ son aquéllas que llegan a la barrera y que por tanto producen reparto de dividendos. En el momento de alcanzar la barrera la esperanza del valor actual de los dividendos es $W(b, b)$. Por tanto la actualización de $W(b, b)$ para un periodo $[0, \tau(u, b)]$ coincidirá con $W_\chi(u, b)$.

Es decir para $\tau(u, b) > 0$

$$W_\chi(u, b) = e^{-\delta \cdot \tau(u, b)} \cdot W(b, b) \quad (3.47)$$

Al despejar $\tau(u, b)$ de (3.47):

$$\tau(u, b) = \frac{1}{\delta} \cdot [\ln W(b, b) - \ln W_\chi(u, b)] = \frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{W(b, b)}{W_\chi(u, b)} \quad (3.48)$$

Podemos observar en (3.47) que cuando el factor de actualización, δ , es estrictamente positivo, $W(b, b)$ es mayor que $W_\chi(u, b)$. Mientras que para $\delta = 0$, $W_\chi(u, b)$ coincide con $W(b, b)$.

Sabemos además, que a mayor es el factor de actualización menor es la esperanza del valor actual de los dividendos, por tanto $W_\chi(u, b)$ es menor que $W_\chi(u, b)$ calculado para $\delta = 0$, al cual nos referiremos como $W_\chi^{\delta=0}(u, b)$. La

situación equivalente se produce para $W(b, b)$, siendo $W^{\delta=0}(b, b)$ mayor que $W(b, b)$ calculado para $\delta > 0$. Es decir

$$\begin{array}{ccc} W(b, b) & > & W_{\chi}(u, b) \\ \wedge & & \wedge \\ W^{\delta=0}(b, b) & = & W_{\chi}^{\delta=0}(u, b) \end{array} \quad (3.49)$$

La relación entre $W^{\delta=0}(b, b)$ y $W(b, b)$, al ser $W^{\delta=0}(b, b)$ la suma aritmética de los dividendos actualizados en $W(b, b)$, viene dada por un diferimiento medio, (Rodríguez (1984)), al que denominamos τ_0 , que cumple,

$$(W(b, b), 0) \sim (W^{\delta=0}(b, b), \tau_0)$$

por tanto

$$W(b, b) = e^{-\delta \tau_0} \cdot W^{\delta=0}(b, b) \quad (3.50)$$

De forma análoga desarrollamos la relación entre $W_{\chi}^{\delta=0}(u, b)$ y $W_{\chi}(u, b)$, al ser $W_{\chi}^{\delta=0}(u, b)$ la suma aritmética de los dividendos actualizados en $W_{\chi}(u, b)$, se define un diferimiento medio al que representamos como τ_{χ} que cumple

$$(W_{\chi}(u, b), 0) \sim (W_{\chi}^{\delta=0}(u, b), \tau_{\chi})$$

que por equivalencia financiera

$$W_{\chi}(u, b) = e^{-\delta \tau_{\chi}} \cdot W_{\chi}^{\delta=0}(u, b) \quad (3.51)$$

Al despejar $W_{\chi}^{\delta=0}(u, b)$ de (3.51), y $W^{\delta=0}(b, b)$ de (3.50), teniendo en cuenta que según (3.49) coinciden, podemos escribir

$$W(b, b) \cdot e^{\delta \tau_0} = e^{\delta \tau_{\chi}} \cdot W_{\chi}(u, b) \quad (3.52)$$

o de forma equivalente

$$W_{\chi}(u, b) = e^{-\delta (\tau_{\chi} - \tau_0)} \cdot W(b, b) \quad (3.53)$$

Al comparar (3.53) con (3.47) se observa que

$$\tau(u, b) = \tau_{\chi} - \tau_0$$

lo que nos permite definir el tiempo promedio de espera como la diferencia entre los diferimientos medios τ_χ y τ_0 .

Se observa que cuando la tasa de actualización financiera tiende a cero ($\delta \rightarrow 0$), τ_χ tiende a τ_0 , con lo cual $\tau(u, b)$ tiende a cero.

3.4.4 Caso exponencial

Vamos a desarrollar las expresiones de $\xi(u, b)$, $\chi(u, b)$, $W_\chi(u, b)$ y $\tau(u, b)$ cuando la cuantía de los siniestros se distribuye según una exponencial unitaria

Sabemos que la expresión de la probabilidad de ruina bajo esta hipótesis toma la forma (Panjer and Willmot (1992)),

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u} \quad (3.54)$$

Aplicando (3.54) a la expresión (3.43) donde se define $\xi(u, b)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \xi(u, b) &= \frac{\frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u} - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} = \\ &= \frac{\frac{1}{1+\rho} \cdot \left[e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u} - e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b} \right]}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

siendo su complementaria $\chi(u, b)$

$$\chi(u, b) = \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)} = \frac{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} \quad (3.56)$$

Al sustituir (3.54) y (3.40) en la expresión (3.46) que definía el valor de $W_\chi(u, b)$

$$W_\chi(u, b) = \frac{\frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}}}{\left[\frac{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u}}{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} \right]} \quad (3.57)$$

La ecuación del tiempo promedio de espera $\tau(u, b)$ en el caso exponencial,

sustituyendo las expresiones halladas para $W(u, b)$ y $W_\chi(u, b)$ en (3.48), es,

$$\begin{aligned} \tau(u, b) &= \frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{W(b, b)}{W_\chi(u, b)} = \frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{W(b, b)}{\frac{W(u, b)}{\chi(u, b)}} = \frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{W(b, b) \cdot \chi(u, b)}{W(u, b)} = \\ &= \frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{\left[\frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 b} + e^{r_2 b}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}} \right] \cdot \left[\frac{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b}} \right]}{\frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}}} = \quad (3.58) \\ &= \frac{1}{\delta} \cdot \left[\ln \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 b} + e^{r_2 b}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 u} + e^{r_2 u}} + \ln \frac{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b}} \right] \end{aligned}$$

3.5 Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividen- dos cuando el proceso no acaba con la ruina: $V(d)$

El cálculo de $V(d)$ determina la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos suponiendo que el proceso no acaba con la ruina. La idea de aceptar la existencia de niveles de reservas negativos, permitiéndose la recuperación del proceso, asume la hipótesis de que la entidad aseguradora se endeuda por la cuantía de ruina a un tipo de interés cero, devolviéndose ese préstamo a una tasa constante equivalente a la intensidad de prima (Dickson and Egídio dos Reis (1997)). Otra interpretación sería considerar el tiempo durante el que las reservas son negativas como un periodo de inversión, ya que se da por hecho que el proceso se recuperará.

En este apartado se plantea el cálculo de $V(d)$, función que depende de $d \geq 0$, siendo d la distancia entre la barrera y el nivel inicial de las reservas, $d = b - u$. A diferencia de $V(d)$, las magnitudes definidas previamente como medidas de cálculo del reparto de dividendos, $W(u, b)$ y $W_\chi(u, b)$, dependían de forma independiente de u y de b . La diferencia se encuentra en la propia definición

de $V(d)$, ya que es una medida que acumula dividendos independientemente de que se haya producido la ruina o no, lo que explica que sólo tengamos en cuenta la distancia existente entre la barrera y las reservas.

De forma equivalente al cálculo de $W(u, b)$, podemos plantear para su resolución el argumento diferencial y el argumento de renovación.

El argumento diferencial, basado en la ocurrencia o no de un siniestro en un dt parte de :

$$V(d) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot (1 - \delta \cdot dt) \cdot V(d - c \cdot dt) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{\infty} V(d - c \cdot dt + z) \cdot dF(z) \quad (3.59)$$

donde el primer sumando representa el caso en que no ocurre siniestro en un intervalo dt , lo que sucede con probabilidad $(1 - \lambda \cdot dt)$. En este caso la diferencia entre la barrera y el nivel inicial de las reservas se ve disminuida por los ingresos en primas producidos en ese intervalo dt . Por tanto, en ese momento, los dividendos futuros repartidos vienen expresados por $V(d - c \cdot dt)$ que actualizaremos con el factor $(1 - \delta \cdot dt)$ que es la aproximación lineal de $e^{-\delta \cdot dt}$.

El segundo sumando representa el caso en que ocurra siniestro, con probabilidad $\lambda \cdot dt$. En este caso la diferencia d se ve incrementada por la cuantía del siniestro acaecido. Remarcar que aquí no se limita la cuantía de la ocurrencia del siniestro tal y como se hacía en el cálculo de $W(u, b)$, ya que aunque se produzca la ruina no finaliza el proceso.

Por definición de derivada:

$$V'(d) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{V(d) - V(d - c \cdot dt)}{c \cdot dt} \quad (3.60)$$

y al sustituir (3.60) en (3.59) se obtiene,

$$V(d) = (1 - \lambda \cdot dt) (1 - \delta \cdot dt) \cdot [V(d) - V'(d) \cdot c \cdot dt] + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{\infty} V(d - c \cdot dt + z) \cdot dF(z) \quad (3.61)$$

Al restar $V(d)$ en los dos miembros de (3.61)

$$0 = [1 - (\lambda + \delta) \cdot dt + \delta \cdot \lambda \cdot dt^2] \cdot [V(d) - V'(d) \cdot c \cdot dt] + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{\infty} V(d - c \cdot dt + z) \cdot dF(z) - V(d)$$

de donde, operando

$$\begin{aligned}
0 = & V(d) - (\lambda + \delta) \cdot dt \cdot V(d) + \delta \cdot \lambda \cdot dt^2 \cdot V(d) - \\
& -V'(d) \cdot c \cdot dt + (\lambda + \delta) \cdot dt^2 \cdot V'(d) \cdot c - \\
& -\delta \cdot \lambda \cdot dt^3 \cdot V'(d) \cdot c + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^\infty V(d - c \cdot dt + z) \cdot dF(z) - V(d)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Al dividir (3.62) entre dt , y hacer $dt \rightarrow 0$, llegamos a la ecuación integro-diferencial que usaremos para determinar el valor de $V(d)$:

$$V'(d) + \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot V(d) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^\infty V(d + z) \cdot dF(z) = 0 \tag{3.63}$$

3.5.1 Planteamiento alternativo

De forma análoga al desarrollo usado en el cálculo de $W(u, b)$ por el método alternativo, planteamos $V(d)$ como

$$V(d) = E \left[V(b - R(t)) \cdot e^{-\delta t} + \int_0^t D(s) \cdot e^{-\delta s} ds \right]$$

expresión que toma la forma,

$$\begin{aligned}
V(d) = & \int_{-\infty}^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^\infty V(d - ct + z) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt + \\
& + \int_{-\infty}^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt + \\
& + \int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Donde t^* es el punto de corte entre el proceso de las reservas y la barrera suponiendo que no se produzca siniestro antes de la intersección, por tanto

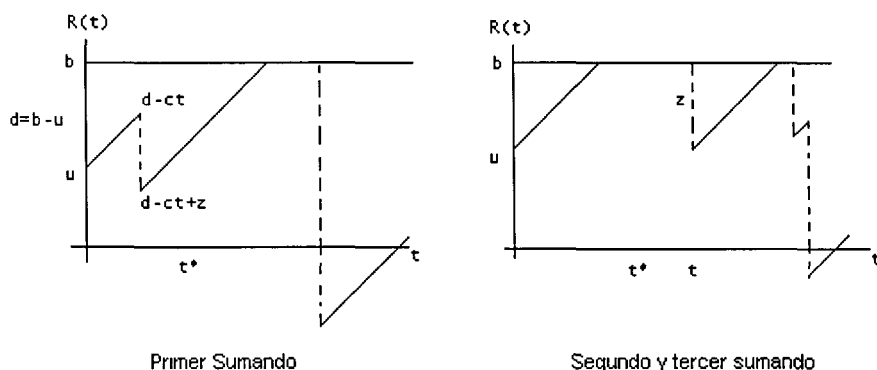
$$t^* = \frac{d}{c} \tag{3.65}$$

El primer sumando de (3.64) indica el caso en que el primer siniestro ocurre antes del punto de corte t^* . En este caso, la cuantía del siniestro no queda limitada a $d - c \cdot t$, sino que se permite que sea mayor y se produzca la ruina, ya que eso no representa el fin del proceso.

El segundo y tercer sumando de (3.64) indican el caso en que el primer siniestro ocurra una vez alcanzada la barrera en el punto de corte t^* , es decir

para $t > t^*$: El segundo sumando actualiza los futuros dividendos en el momento de ocurrencia del siniestro que vendrán dados por $V(z) \cdot e^{-\delta t}$ y el tercer sumando actualiza los dividendos que se reparten entre el momento de corte, t^* , y el de ocurrencia del siniestro, t .

Gráficamente:



Aplicamos el cambio de variable $d - c \cdot t = r$ sobre el primer sumando de la expresión (3.64), que es

$$\int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{\infty} V(d - ct + z) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt \quad (3.66)$$

Los nuevos extremos de la integral son:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow r = d \\ t = \frac{d}{c} \rightarrow r = 0 \end{cases}$$

lo que permite escribir (3.66) como,

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \cdot \int_0^d e^{(\lambda+\delta) \frac{r}{c}} \cdot \int_0^{\infty} V(r + z) \cdot dF(z) \cdot dr \quad (3.67)$$

Se deriva (3.67) respecto a d , obteniéndose

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \cdot \left[\frac{-(\lambda+\delta)}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \int_0^d e^{\frac{(\lambda+\delta)}{c} r} \cdot \int_0^{\infty} V(r + z) \cdot dF(z) \cdot dr + \right. \\ & \left. + e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial d} \int_0^d e^{\frac{(\lambda+\delta)}{c} r} \cdot \int_0^{\infty} V(r + z) \cdot dF(z) \cdot dr \right] \quad (3.68) \end{aligned}$$

Se resuelve la parcial respecto a d que aparece en el último sumando de (3.68)

$$\frac{\partial}{\partial d} \int_0^d e^{\frac{(\lambda+\delta)}{c} r} \int_0^\infty V(r+z) \cdot dF(z) \cdot dr = e^{\frac{(\lambda+\delta)}{c} d} \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z) \quad (3.69)$$

Sustituyendo (3.69) en (3.68) se obtiene

$$\frac{\lambda}{c} \cdot \left[\frac{-(\lambda+\delta)}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \int_0^d e^{\frac{(\lambda+\delta)}{c} r} \int_0^\infty V(r+z) \cdot dF(z) \cdot dr + \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z) \right]$$

El segundo sumando de la expresión (3.64) es

$$\int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^\infty V(z) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt = \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) \quad (3.70)$$

Al derivar (3.70) respecto a d

$$\frac{\partial}{\partial d} \cdot \left[\frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) \right] = -\frac{\lambda}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z)$$

Se resuelve la integral del tercer sumando de (3.64)

$$\int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt = \frac{c}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \quad (3.71)$$

Al derivar (3.71) respecto a d se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{c}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \right] = -e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}}$$

Por tanto la derivada de la expresión (3.64), es:

$$\begin{aligned} V'(d) &= \frac{\lambda}{c} \cdot \left[\frac{-(\lambda+\delta)}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \cdot \int_0^d e^{\frac{(\lambda+\delta)}{c} r} \int_0^\infty V(r+z) \cdot dF(z) \cdot dr + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z) \right] - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) - e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Si en (3.64) despejamos el primer sumando y lo sustituimos en (3.72) llegamos a:

$$\begin{aligned} V'(d) &= \frac{-(\lambda+\delta)}{c} \cdot V(d) + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) + e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z) - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) - e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c}} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Podemos observar que el tercer y el sexto sumando de (3.73) se anulan, e igual ocurre con el segundo y el quinto sumando de (3.73). Por tanto, llegamos a la ecuación integro-diferencial coincidente con (3.63):

$$V'(d) + \frac{(\lambda + \delta)}{c} \cdot V(d) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{\infty} V(d+z) \cdot dF(z) = 0 \quad , \quad d \geq 0$$

3.5.2 Caso exponencial

En el caso concreto de distribución exponencial $F(z) = 1 - e^{-z}$, $z > 0$, sabiendo que $dF(z) = e^{-z}$, la expresión (3.63) toma la forma concreta

$$V'(d) + \frac{(\lambda + \delta)}{c} \cdot V(d) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{\infty} V(d+z) \cdot e^{-z} \cdot dz = 0$$

o de forma equivalente:

$$c \cdot V'(d) + (\lambda + \delta) \cdot V(d) - \lambda \cdot \int_0^{\infty} V(d+z) \cdot e^{-z} \cdot dz = 0 \quad (3.74)$$

Al derivar (3.74) respecto a d ,

$$V''(d) + \frac{(\lambda + \delta)}{c} \cdot V'(d) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{\infty} V'(d+z) \cdot e^{-z} \cdot dz = 0 \quad (3.75)$$

resolviendo por partes la integral que aparece en el último sumando de (3.75):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} V'(d+z) \cdot e^{-z} \cdot dz &= \left\{ \begin{array}{l} dv = V'(d+z) \Rightarrow v = V(d+z) \\ u = e^{-z} \Rightarrow du = -e^{-z} \cdot dz \end{array} \right\} = \\ &= [e^{-z} \cdot V(d+z)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} V(d+z) \cdot e^{-z} \cdot dz = \\ &= -V(d) + \int_0^{\infty} V(d+z) \cdot e^{-z} dz \end{aligned} \quad (3.76)$$

Al sustituir (3.76) en (3.75) se obtiene

$$c \cdot V''(d) + (\lambda + \delta) \cdot V'(d) + \lambda \cdot V(d) - \lambda \cdot \int_0^{\infty} V(d+z) \cdot e^{-z} = 0 \quad (3.77)$$

Al restar (3.77) de (3.74) llegamos a la ecuación diferencial ordinaria a resolver:

$$c \cdot V''(d) + (\lambda + \delta - c) \cdot V'(d) - \delta \cdot V(d) = 0 \quad (3.78)$$

3.5.3 Condiciones de contorno

Para resolver (3.78) utilizamos las siguientes condiciones de contorno:

- La primera condición de contorno que usamos en la resolución de $V(d)$ es el valor para $d = 0$ de $V'(d)$.

Para hallar el valor de $V'(0)$ simplemente tenemos que hacer $d = 0$ en la expresión (3.72), obtenida gracias a la utilización del método alternativo, que es la que nos determina $V'(d)$. De esa forma obtenemos

$$V'(0) = \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) - 1 = -1 \quad (3.79)$$

Es decir, $V'(0) = -1$. La interpretación de esta condición de contorno es que cuando d incrementa en una unidad (es decir cuando la distancia entre b y u incrementa), se produce una disminución en el valor actual de los dividendos en una unidad, ya que la unidad que, en el caso de no partir de $d = 0$, iría a dividendos, no se destina a ellos.

- Es evidente que si la diferencia entre la barrera y los dividendos, d , tiende a infinito, no se produce reparto de dividendos, por tanto,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} V(d) = 0 \quad (3.80)$$

3.5.4 Solución $V(d)$

Para resolver la ecuación (3.78) hallamos su ecuación característica que es,

$$c \cdot r^2 + (\lambda + \delta - c) \cdot r - \delta = 0$$

cuyas raíces son r_1 y r_2 .

Podemos observar que la ecuación característica para el cálculo de $V(d)$ es similar a la obtenida para el cálculo de $W(u, b)$. La única diferencia es el signo del coeficiente de r . Esta diferencia provoca que los valores hallados para las raíces en la obtención de $V(d)$ y $W(u, b)$ aparezcan intercambiados y con signo cambiado.

Sabemos que la solución de $V(d)$ es de la forma,

$$V(d) = C_1 \cdot e^{r_1 d} + C_2 \cdot e^{r_2 d} \quad (3.81)$$

Sobre las raíces r_1 y r_2 se puede asegurar que una será positiva y la otra negativa: Sabemos que el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado es el cociente de los coeficientes entre el término independiente y el coeficiente de la variable al cuadrado. En este caso tenemos

$$r_1 \cdot r_2 = -\frac{\delta}{c}$$

expresión negativa que nos permite asegurar que $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$.

Aplicamos las condiciones de contorno definidas en (3.79) y (3.80) para hallar la solución de $V(d)$.

Al derivar (3.81) llegamos a:

$$V'(d) = C_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 d} + C_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 d}$$

que para $d = 0$

$$V'(0) = C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2 \quad (3.82)$$

Aplicando (3.79) a (3.82),

$$C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2 = -1$$

de donde

$$C_2 = -\frac{1}{r_2} - \frac{r_1}{r_2} \cdot C_1 \quad (3.83)$$

Al aplicar (3.80) a (3.81):

$$\lim_{d \rightarrow \infty} V(d) = \lim_{d \rightarrow \infty} (C_1 \cdot e^{r_1 d} + C_2 \cdot e^{r_2 d}) = 0$$

y teniendo en cuenta que $r_2 < 0$, para que se cumpla esta última expresión y recordando que $r_1 > 0$, tiene que cumplirse que $C_1 = 0$. Si aplicamos esta conclusión en (3.83), llegamos a

$$C_2 = -\frac{1}{r_2}$$

Por tanto, sustituyendo el valor de C_1 y C_2 en (3.81):

$$V(d) = -\frac{1}{r_2} \cdot e^{r_2 d} \quad (3.84)$$

3.6 Estudio de la sensibilidad de las medidas de dividendos respecto a las variables de control

Realizamos a continuación un análisis de como se ven afectadas las medidas presentadas para la cuantificación de los dividendos cuando se producen variaciones en el nivel inicial de las reservas, u , y en el nivel de la barrera constante $b(t) = b$, para un factor de actualización estrictamente positivo, es decir para $\delta > 0$.

Desarrollamos el estudio para el caso de distribución de la cuantía de los siniestros exponencial unitaria.

3.6.1 Sensibilidad de $W(u, b)$

3.6.1.1 Análisis de las raíces r_1 y r_2

Para la cuantía del siniestro exponencial unitaria hemos obtenido en el apartado anterior la expresión (3.40) para $W(u, b)$

$$W(u, b) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 b} + r_2 \cdot e^{r_2 b}}$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación (3.37):

$$c \cdot r^2 - (\lambda + \delta - c) \cdot r - \delta = 0$$

Como primer paso para la demostración analítica de la sensibilidad de $W(u, b)$ respecto a u y b , realizamos un análisis de r_1 y r_2 . Sabiendo que $c = \lambda \cdot (1 + \rho)$, podemos escribir (3.37) como:

$$\lambda \cdot (1 + \rho) \cdot r^2 - (\delta - \lambda \rho) \cdot r - \delta = 0 \quad (3.85)$$

Teorema 5 La ecuación $\lambda \cdot (1 + \rho) \cdot r^2 - (\delta - \lambda \rho) \cdot r - \delta = 0$ con $\lambda, \rho, \delta > 0$

tiene dos raíces no nulas y de distinto signo, $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$, cumpliéndose,

$$Si (\delta - \lambda\rho) < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < r_1 < 1 \\ -1 < r_2 < 0 \\ |r_2| > |r_1| \end{cases}$$

$$Si (\delta - \lambda\rho) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < r_1 \\ -1 < r_2 < 0 \\ |r_2| < |r_1| \end{cases}$$

$$Si (\delta - \lambda\rho) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < r_1 < 1 \\ -1 < r_2 < 0 \\ |r_2| = |r_1| \end{cases}$$

Demostración. El resultado del estudio de la función (3.85), nos permite conocer los signos de r_1 y r_2 . Podemos observar que es una ecuación de segundo grado cóncava ya que $\lambda \cdot (1 + \rho) > 0$, asegurando la existencia de dos raíces si el mínimo se encuentra para un valor de ordenadas negativo.

Si buscamos el mínimo de (3.85), hallando su punto crítico,

$$f'(r) = 2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot r - (\delta - \lambda \cdot \rho) = 0 \Rightarrow r_{\min} = \frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)}$$

expresión positiva o negativa en función de si $(\delta - \lambda\rho)$ es mayor o menor que cero.

Si buscamos $f(r_{\min})$:

$$\begin{aligned} f(r_{\min}) &= \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \left(\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} \right)^2 - (\delta - \lambda \rho) \cdot \frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} - \delta = \\ &= -\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2}{4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} - \delta < 0 \end{aligned}$$

expresión que independientemente del signo de $(\delta - \lambda \cdot \rho)$ es menor que cero.

Por tanto, se asegura la existencia de dos raíces r_1 y r_2 :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(\delta - \lambda \cdot \rho) + \sqrt{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \delta}}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} > 0 \\ r_2 &= \frac{(\delta - \lambda \cdot \rho) - \sqrt{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \delta}}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} < 0 \end{aligned}$$

Podemos observar que existe una raíz positiva y una negativa, independientemente del signo de $(\delta - \lambda \cdot \rho)$, ya que:

- Si $(\delta - \lambda \cdot \rho) > 0$, entonces $r_1 > 0$. Si recordamos que el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado, $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$, es el cociente de coeficientes $\frac{c}{a}$, sabemos que

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-\delta}{\lambda \cdot (1 + \rho)} < 0 \quad (3.86)$$

expresión negativa, por lo que $r_2 < 0$.

- Si $(\delta - \lambda \cdot \rho) < 0$ podemos asegurar que $r_2 < 0$, y teniendo en cuenta (3.86) se cumple que $r_1 > 0$.
- Si $(\delta - \lambda \cdot \rho) = 0$ es inmediato comprobar que $r_1 > 0$ y que $r_2 < 0$.

Además $f(0) = -\delta$, siendo el punto de corte con el eje OY el punto $(0, -\delta)$

Podemos hallar también cotas máximas y mínimas para los valores de las raíces en función del signo de $(\delta - \lambda \rho)$.

Si $\delta - \lambda \rho < 0$ sabemos que el mínimo se encuentra en el tercer cuadrante en

$$\left(\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)}, -\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2}{4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} - \delta \right), \quad \text{siendo } r_1 > 0 \text{ y } r_2 < 0$$

Como $f(r_1) = 0$ y la función es creciente, si $f(1) > 0$ entonces $0 < r_1 < 1$,

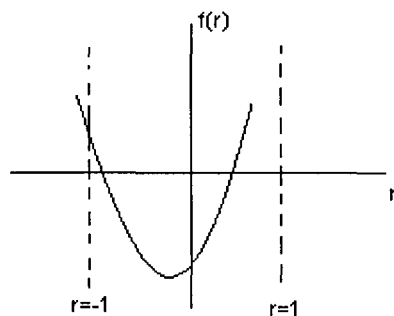
$$f(1) = \lambda \cdot (1 + \rho) - (\delta - \lambda \cdot \rho) - \delta = \lambda - (\delta - \lambda \cdot \rho) > 0 \Rightarrow 0 < r_1 < 1$$

Usamos el mismo argumento para saber si r_2 es mayor o menor que -1 :

$$f(-1) = \lambda \cdot (1 + \rho) + (\delta - \lambda \cdot \rho) - \delta = \lambda > 0$$

como $f(r_2) = 0$ podemos asegurar que $-1 < r_2 < 0$.

Gráficamente:



Conociendo la simetría de las ecuaciones de segundo grado, entonces $|r_2| > |r_1|$

Si $\delta - \lambda \cdot \rho > 0$, sabemos que el mínimo se encuentra en el cuarto cuadrante en el punto

$$\left(\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)}, -\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2}{4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} - \delta \right), \text{ siendo } r_1 > 0 \text{ y } r_2 < 0$$

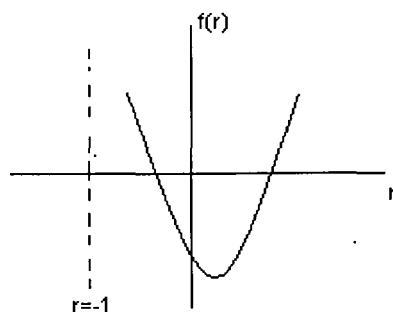
Al hallar $f(1)$ tenemos

$$f(1) = \lambda \cdot (1 + \rho) - (\delta - \lambda \cdot \rho) - \delta = \lambda - (\delta - \lambda \cdot \rho) = \lambda \cdot (1 + \rho) - \delta$$

expresión que no podemos afirmar si es positiva o negativa, lo que nos impide determinar el valor de r_1 respecto a 1.

Como $f(-1) = \lambda$, entonces $-1 < r_2 < 0$.

Gráficamente:



y por simetría de la parábola podemos asegurar que $|r_2| < |r_1|$

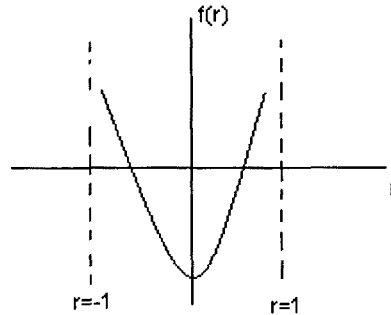
Si analizamos el caso en que $\delta - \lambda\rho = 0$, la ecuación (3.85) se puede escribir como,

$$\lambda \cdot (1 + \rho)r^2 - \delta = 0$$

siendo el valor de las raíces r_1 y r_2 ,

$$r_1 = \sqrt{\frac{\rho}{1 + \rho}} \quad r_2 = -\sqrt{\frac{\rho}{1 + \rho}}$$

por tanto $|r_2| = |r_1|$, y $-1 < r_2 < 0$, $1 > r_1 > 0$, siendo la gráfica una parábola simétrica respecto al eje de ordenadas,



■

3.6.1.2 Sensibilidad de $W(u, b)$ respecto al nivel de la barrera

A partir de la expresión (3.40), Bühlmann (1970) plantea el cálculo del valor de la barrera que, considerando los demás parámetros prefijados, optimiza el valor de $W(u, b)$.

Para maximizar el cociente (3.40), se halla el valor de b que minimiza el denominador.

Recordemos que esta optimización está condicionada a que $0 \leq u \leq b$. Por tanto, el punto resultante de minimizar el denominador de (3.40), al que se denomina b^* , y que se obtiene sin tener en cuenta el numerador, por tanto como una optimización libre, será óptimo siempre que $b^* \geq u \geq 0$.

Para hallar b^* se hace la primera derivada del denominador de (3.40), se

igual a cero y se despeja b , obteniéndose

$$b^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{1 + r_1}{1 + r_2} \quad b^* \in R \quad (3.87)$$

valor que es independiente de u .

Haciendo la segunda derivada del denominador de (3.40) para determinar si b^* es máximo o mínimo,

$$-\frac{1 + r_1}{1 + r_2} \cdot r_1^3 \cdot e^{r_1 b} + r_2^3 \cdot e^{r_2 b}$$

expresión que sabiendo que $-1 < r_2 < 0$ y que $0 < r_1$ podemos asegurar es negativa. Con lo cual el punto b^* es un punto mínimo del denominador de (3.40), y por tanto un punto máximo de $W(u, b)$ siempre que $0 \leq u \leq b^*$

Observamos que b^* existe para $\frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} > 0$, condición que conociendo el comportamiento de las raíces r_1 y r_2 se cumple siempre. Además b^* es positivo cuando $0 < \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} < 1$.

Recordando el Teorema 5, en que se afirmaba que $(\delta - \lambda\rho) < 0 \Rightarrow |r_2| > |r_1|$ y $(\delta - \lambda\rho) > 0 \Rightarrow |r_2| < |r_1|$ podemos representar gráficamente el rango de variación de b^* en función del signo de $(\delta - \lambda\rho)$,

$(\delta - \lambda\rho) > 0$	$(\delta - \lambda\rho) = 0$	$(\delta - \lambda\rho) < 0$
$b^* < 0$	$b^* < 0$	$b^* < 0$
		$0 < b^* < u$
		$b^* \geq u$

(3.88)

siendo el valor de b^* para el caso $(\delta - \lambda\rho) = 0$,

$$b^* = -\frac{\sqrt{1+\rho}}{2 \cdot \sqrt{\rho}} \cdot \ln \frac{\sqrt{1+\rho} + \sqrt{\rho}}{\sqrt{1+\rho} - \sqrt{\rho}} < 0$$

Por tanto el valor de b que maximiza $W(u, b)$ considerando el resto de parámetros constantes es

$$b_{\max} = \begin{cases} b^* & \text{si } b^* \geq u \\ u & \text{si } b^* < u \end{cases}$$

siendo el valor máximo de los dividendos para un valor fijado de u ,

$$W_{\max}(u, b) = \begin{cases} W(u, b^*) & \text{si } b^* \geq u \\ W(u, u) & \text{si } b^* < u \end{cases} \quad (3.89)$$

es decir,

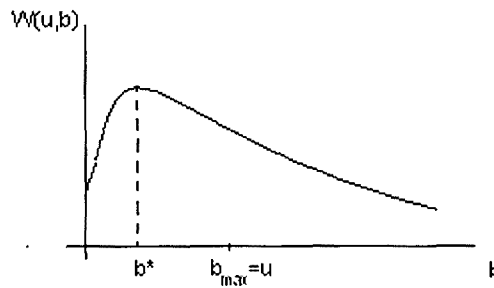
$$W_{\max}(u, b) = \begin{cases} W(u, b^*) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b^*} + r_2 e^{r_2 b^*}} & \text{si } b^* \geq u \\ W(u, u) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 u} + r_2 e^{r_2 u}} & \text{si } b^* < u \end{cases}$$

Lo que nos permite convertir (3.88) en una tabla del valor que toma $W_{\max}(u, b)$ en función del signo de $(\delta - \lambda\rho)$,

$(\delta - \lambda\rho) > 0$	$(\delta - \lambda\rho) = 0$	$(\delta - \lambda\rho) < 0$
$b^* < 0 \Rightarrow W(u, u)$	$b^* < 0 \Rightarrow W(u, u)$	$b^* < 0 \Rightarrow W(u, u)$
		$0 < b^* < u \Rightarrow W(u, u)$
		$b^* > u \Rightarrow W(u, b^*)$

Como hemos comentado, la interpretación de b^* como máximo queda condicionada a que $b^* \geq u \geq 0$. Si el valor de b^* fuese menor que u entonces el valor máximo de la barrera que maximiza la esperanza del valor actual de los dividendos es $b = u$. Por ejemplo para $\rho = 0.5, \delta = 0.2, \lambda = 1$ y $u = 0.3$ hallaríamos un valor de $b^* = 0.2445$.

Gráficamente:

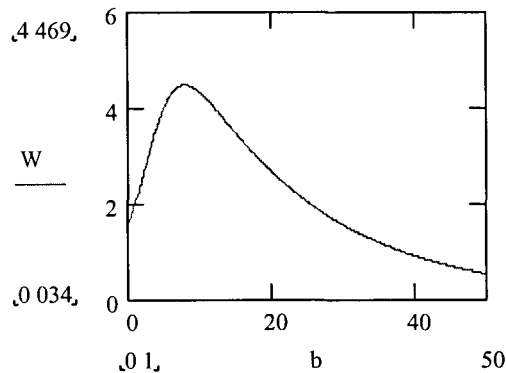


Por tanto, a medida que incrementa el valor de b hasta b^* se produce un incremento de $W(u, b)$. Este comportamiento podría parecer contrario a la lógica

ya que retrasa el momento en que las reservas alcanzan el nivel de la barrera y empieza el reparto de dividendos, pero se compensa con un retraso del momento de ruina que permitirá un reparto durante un periodo de tiempo mayor. Una vez alcanzado el máximo, empieza el tramo decreciente de $W(u, b)$. En ese tramo influye el hecho de que los dividendos repartidos en un tiempo más alejado de $t = 0$ tienen una menor repercusión en el valor actual de los dividendos debido al factor de actualización.

Así, si el objetivo del asegurador es maximizar la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, existe un valor óptimo para la barrera, es decir, un valor máximo de las reservas libres a mantener por la entidad aseguradora que maximiza $W(u, b)$.

Gráficamente podemos observar el comportamiento de $W(u, b)$ respecto a b para $u = 0.1, c = 1.5, \delta = 0.03$ y $\lambda = 1$:



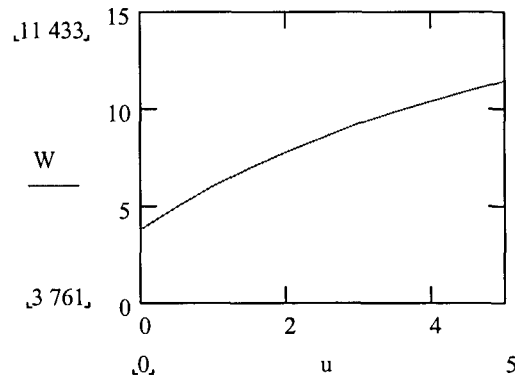
3.6.1.3 Sensibilidad de $W(u, b)$ respecto al nivel inicial de las reservas

Si estudiamos el comportamiento de $W(u, b)$ respecto a u observamos que la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos es creciente respecto a u . Un incremento de u provoca un retraso en el momento de ruina, además de facilitar que el nivel de las reservas alcance el nivel de la barrera. Para demostrarlo analíticamente, y recordando que $u \leq b$, calculamos la parcial de

$W(u, b)$ respecto a u , obteniéndose

$$\frac{\partial W(u, b)}{\partial u} = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 u} + r_2 \cdot e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 b} + r_2 \cdot e^{r_2 b}} \quad (3.90)$$

Los valores hallados de r_1 y r_2 nos permiten asegurar que (3.90) es positivo, y por tanto que el valor de $W(u, b)$ es creciente respecto a u . Gráficamente para $b = 2, c = 1.5, \delta = 0.03$ y $\lambda = 1$



Por tanto, el valor de las reservas iniciales, u , que maximiza el valor actual de los dividendos repartidos para un valor de la barrera b predeterminado es $u_{\max} = b$.

3.6.1.4 Análisis conjunto de $W(u, b)$

Teniendo en cuenta que b^* definida en (3.87) no depende de u , y que $W(u, b)$ para un determinado valor de la barrera b es monótona creciente respecto a u , podemos concluir que si el decisor puede variar libremente las dos variables, u y b , las combinaciones óptimas de u y b consisten en la igualdad de ambas, es decir

$$u = b = k$$

siendo

$$W(k) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k}} \quad (3.91)$$

Analizamos a continuación el comportamiento de $W(k)$.

Es fácil comprobar que $W(k)$ definida en (3.91) no tiene óptimos, pero podemos demostrar que es creciente, tiene un punto de inflexión y tiene una asíntota horizontal para $k \rightarrow \infty$.

Teorema 6 $W(k)$ para $0 \leq k \leq \infty$ es monótona creciente y tiene una asíntota horizontal de valor $\frac{1}{r_1}$.

Demostración. Hallamos el valor de $W(k)$ para $k = 0$. A partir de (3.91),

$$W(0) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} + 1}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 + r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot (1+r_2) - r_1(1+r_1)} > 0$$

Para analizar su crecimiento, hacemos la primera derivada

$$W'(k) = \frac{\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{(r_1+r_2)k} \cdot (r_1 - r_2)^2}{\left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k}\right)^2} > 0$$

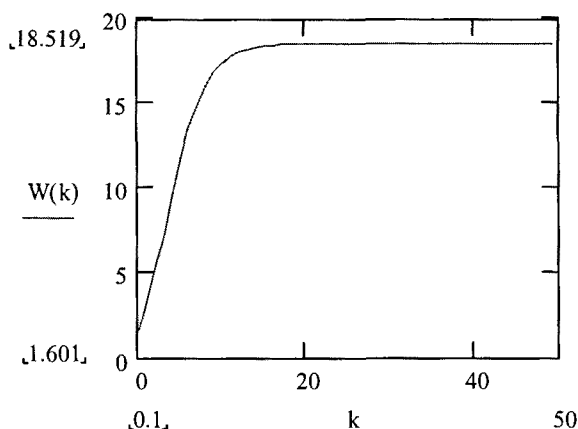
siendo, por tanto, $W(k)$ monótona creciente respecto a k .

Para demostrar la existencia de una asíntota horizontal resolvemos el límite de $k \rightarrow \infty$ de la función $W(k)$,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} W(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 k} + e^{r_2 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 k} + r_2 e^{r_2 k}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 k} + r_2 e^{r_2 k}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{r_2 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 k} + r_2 e^{r_2 k}} = \quad (3.92) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1 - r_2 e^{(r_2-r_1)k} \frac{1+r_2}{1+r_1}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{(r_1-r_2)k} + r_2} = \\ &= \frac{1}{r_1} \end{aligned}$$

■

Gráficamente podemos representar $W(k)$ para $\delta = 0.03, \lambda = 1$ y $\rho = 0.5$, valores para los cuales $r_1 = 0.054$



siendo el valor de la asíntota $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{0.054} = 18.5185$.

El análisis de la función $W(k)$ nos permite comprobar la siguiente relación

$$\lim_{b \rightarrow \infty} W(b, b) = \lim_{k \rightarrow \infty} W(k) = V(0) \quad (3.93)$$

es decir para $u = b$, y por tanto para $d = 0$, al hacer tender b a infinito, $W(b, b)$ coincide con $V(0)$. La causa es que al hacer $b \rightarrow \infty$ la probabilidad de ruina es cero, con lo cual la diferencia entre W y V , que es que la ruina acabe con el proceso o no, desaparece.

Si recordamos la expresión a partir de la que obtenemos $V(d)$,

$$V(d) = -\frac{1}{r_2} \cdot e^{r_2 \cdot d}$$

y hacemos $d = 0$, se obtiene $V(0) = -\frac{1}{r_2}$ siendo

$$r_2 = \frac{-(\lambda + \delta - c) - \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4 \cdot c \cdot \delta}}{2 \cdot c} < 0$$

El límite de $W(b, b)$ es $\lim_{b \rightarrow \infty} W(b, b) = \lim_{k \rightarrow \infty} W(k) = \frac{1}{r_1}$, siendo

$$r_1 = \frac{(\lambda + \delta - c) + \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4 \cdot c \cdot \delta}}{2 \cdot c}$$

Por tanto, sabiendo que r_2 para $V(d)$ es r_1 para $W(u, b)$ con signo cambiado, queda demostrado (3.93).

Teorema 7 $W(k)$ tiene un punto de inflexión para $k = u^t = \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{-r_1}{r_2} \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2}$

Demostración. Podemos escribir (3.91) como

$$W(k) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k}} = \frac{h(k)}{h'(k)}$$

siendo su primera derivada,

$$W'(k) = \frac{[h'(k)]^2 - h(k) \cdot h''(k)}{[h'(k)]^2}$$

Por derivación sucesiva se halla $W''(k)$

$$W''(k) = \frac{-[h'(k)]^2 \cdot h''(k) - h(k) \cdot h'(k) \cdot h'''(k) + 2 \cdot h(k) \cdot [h''(k)]^2}{[h'(k)]^3}$$

Al igualar $W''(k)$ a cero,

$$[h'(k)]^2 \cdot h''(k) + h(k) \cdot h'(k) \cdot h'''(k) - 2 \cdot h(k) \cdot [h''(k)]^2 = 0 \quad (3.94)$$

y sustituyendo en (3.94) los valores de las derivadas sucesivas de $h(k)$, que son

$$\begin{aligned} h(k) &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k} \\ h'(k) &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k} \\ h''(k) &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 k} + r_2^2 \cdot e^{r_2 k} \\ h'''(k) &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^3 \cdot e^{r_1 k} + r_2^3 \cdot e^{r_2 k} \end{aligned}$$

llegamos a

$$e^{(r_1+2r_2)k} \cdot \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2}\right) \cdot r_2 \cdot (r_1 - r_2)^3 + e^{(2r_1+r_2)k} \cdot \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^2 \cdot r_1 \cdot (r_2 - r_1)^3 = 0$$

de donde,

$$e^{(r_2-r_1)k} = \frac{\left(-\frac{1+r_1}{1+r_2}\right) \cdot r_1}{r_2} \quad (3.95)$$

Al despejar k de (3.95) se halla el punto de inflexión $k = u^t$ de $W(k)$

$$u^t = \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{-r_1}{r_2} \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} \quad (3.96)$$

■

De forma análoga a lo que ocurre con el valor de b^* , el signo de u^i depende del signo de $(\delta - \lambda\rho)$. Por el Teorema 5, podemos asegurar,

$(\delta - \lambda\rho) > 0$	$(\delta - \lambda\rho) = 0$	$(\delta - \lambda\rho) < 0$
$u^i < 0$	$u^i < 0$	$u^i < 0$
		$u^i > 0$

(3.97)

Corolario 1 *Se cumple que*

$$\text{Si } (\delta - \lambda\rho) < 0 \Rightarrow u^i < b^*$$

$$\text{Si } (\delta - \lambda\rho) = 0 \Rightarrow u^i = b^*$$

$$\text{Si } (\delta - \lambda\rho) > 0 \Rightarrow u^i > b^*$$

Demostración. A partir de las expresiones (3.96) y (3.87), al plantear la diferencia $u^i - b^*$ podemos determinar la relación entre u^i y b^* ,

$$\begin{aligned} u^i - b^* &= \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{-r_1}{r_2} \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} = \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \left[\ln \frac{-r_1}{r_2} + \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} - \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} - \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} \right] = \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \left[\ln \frac{-r_2}{r_1} \right] \end{aligned} \quad (3.98)$$

El signo de (3.98) dependerá de si $|r_1| \geq |r_2|$. Por el Teorema 5, podemos afirmar que,

$$\text{Si } (\delta - \lambda\rho) < 0 \Rightarrow |r_2| > |r_1| \Rightarrow u^i - b^* < 0 \Rightarrow u^i < b^*$$

$$\text{Si } (\delta - \lambda\rho) = 0 \Rightarrow |r_2| = |r_1| \Rightarrow u^i - b^* = 0 \Rightarrow u^i = b^* \quad (3.99)$$

$$\text{Si } (\delta - \lambda\rho) > 0 \Rightarrow |r_2| < |r_1| \Rightarrow u^i - b^* > 0 \Rightarrow u^i > b^*$$

■

De los análisis realizados hasta ahora sobre la función $W(u, b)$, sus parciales respecto a u y b , y de la función $W(k)$ podemos extraer las siguientes interpretaciones,

Interpretación 1

Si la única variable que puede mover el decisor es el nivel de la barrera b , siendo el valor inicial de las reservas u un dato del problema, el máximo viene determinado por la expresión (3.89), que es,

$$W_{\max}(u, b) = \begin{cases} W(u, b^*) & \text{si } b^* \geq u \\ W(u, u) & \text{si } b^* < u \end{cases}$$

Interpretación 2

Si se puede determinar el valor de b y de u , por el Teorema 6 , no existe una combinación óptima de (u, b) en el sentido que maximice $W(u, b)$. Pero si existe un valor máximo de $W(u, b)$, para las combinaciones óptimas $k = u = b$, que es el valor de su asíntota $\frac{1}{r_1}$, valor que no depende ni del nivel inicial de las reservas, ni del nivel de la barrera, dependiendo sólo de λ, ρ y δ .

Nos podemos plantear cuál es el valor de k que nos permite hallar un porcentaje α del valor máximo de $W(k)$, es decir de su asíntota $\frac{1}{r_1}$, valor que denominamos k^α .

Por tanto $W(k^\alpha) = \alpha \cdot \frac{1}{r_1}$, es decir

$$W(k^\alpha) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k^\alpha} + e^{r_2 k^\alpha}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k^\alpha} + r_2 \cdot e^{r_2 k^\alpha}} = \alpha \cdot \frac{1}{r_1} \quad (3.100)$$

Al despejar k^α de (3.100) se obtiene

$$-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k^\alpha} + r_2 \cdot e^{r_2 k^\alpha} = -\alpha \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k^\alpha} + \alpha \cdot r_2 \cdot e^{r_2 k^\alpha}$$

$$e^{(r_2-r_1) k^\alpha} = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot (1-\alpha)}{\alpha \cdot r_2 - r_1}$$

de donde

$$k^\alpha = \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \ln \left(\frac{(1-\alpha)}{r_1 - \alpha \cdot r_2} \cdot \frac{r_1^2 + r_1}{1+r_2} \right) \quad (3.101)$$

Numéricamente para diferentes porcentajes α , con $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$ y $\rho = 0.5$,

α	k^α	$W(k^\alpha)$
0.1	0.262	1.839
0.2	1.343	3.677
0.3	2.258	5.516
0.4	3.101	7.354
0.5	3.930	9.193
0.6	4.799	11.032
0.7	5.778	12.870
0.8	7.002	14.709
0.9	8.882	16.547
1	90.674	18.386

Interpretación 3

A mayor sea el valor de k , mayor es la esperanza del valor actual de los dividendos. Pero económicamente, mientras mover la barrera no representa ningún esfuerzo inicial, incrementar el nivel inicial de las reservas si que representa una inversión inicial más fuerte.

Hemos determinado el punto de inflexión de la función $W(k)$, siendo u^i el valor en el que la función cambia el signo de su segunda derivada.

Para valores de k mayores que u^i , el esfuerzo que representa un incremento en el nivel inicial de las reservas conlleva un incremento relativamente menor en la esperanza del valor actual de los dividendos. Por tanto podemos optar por elegir $k = u^i$, como el esfuerzo que económicamente es óptimo asumir.

Por tanto, una primera combinación óptima de las variables u y b sería (u^i, u^i) .

$$W(u^i, u^i) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 \cdot u^i} + e^{r_2 \cdot u^i}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot u^i} + r_2 \cdot e^{r_2 \cdot u^i}} \quad (3.102)$$

y al sustituir (3.96) en (3.102) se obtiene

$$\begin{aligned}
W(u^i, u^i) &= \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}} + e^{r_2 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}} + r_2 \cdot e^{r_2 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}}} = \\
&= \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \left(\frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + \left(\frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 \left(\frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + r_2 \cdot \left(\frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}} = \\
&= \frac{-\left(\frac{-r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + \left(\frac{-r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}}{-r_1 \cdot \left(\frac{-r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + r_2 \cdot \left(\frac{-r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Al dividir (3.103) entre $-r_1^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}$ y $r_2^{\frac{-r_1}{r_2-r_1}}$,

$$W(u^i, u^i) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Reagrupamos en el siguiente cuadro los valores de u^i y b^* en función del signo de $(\delta - \lambda\rho)$, a partir de (3.88), (3.97) y (3.99),

$(\delta - \lambda\rho) > 0$	$(\delta - \lambda\rho) = 0$	$(\delta - \lambda\rho) < 0$
$b^* < 0$	$b^* < 0$	$b^* \geq 0$
$u^i < 0$	$u^i < 0$	$u^i \geq 0$
$u^i > b^*$	$u^i = b^*$	$u^i < b^*$

(3.104)

Si $u^i < b^*$, para $u^i, b^* > 0$, sobre la combinación (u^i, u^i) podemos incrementar el nivel de la barrera (incremento que no representa un esfuerzo extra en la inversión inicial), convirtiéndola en (u^i, b^*) . Alcanzamos una combinación que podemos considerar óptima para el decisor, siendo

$$W(u^i, b^*) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 \cdot u^i} + e^{r_2 \cdot u^i}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot b^*} + r_2 \cdot e^{r_2 \cdot b^*}} \tag{3.105}$$

Al sustituir (3.87) y (3.96) en (3.105), se obtiene,

$$\begin{aligned}
W(u^i, b^*) &= \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \left(\frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + \left(\frac{-r_1}{r_2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + r_2 \cdot \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2}\right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}} = \\
&= \frac{-r_1 - r_2}{(-r_1)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}} \cdot r_2^{\frac{-2r_1+r_2}{r_2-r_1}} + (-r_1)^{\frac{2r_2-r_1}{r_2-r_1}} \cdot r_2^{\frac{-r_1}{r_2-r_1}}}
\end{aligned} \tag{3.106}$$

y sacando factor comun de $(-r_1)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}$ y de $r_2^{\frac{-r_1}{r_2-r_1}}$ en (3.106)

$$W(u^i, b^*) = \frac{-r_1 - r_2}{(-r_1)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}} r_2^{\frac{-r_1}{r_2-r_1}} \cdot [r_2 - r_1]}$$

o de forma equivalente

$$W(u^i, b^*) = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \cdot \left[\frac{(r_2)^{r_1}}{(-r_1)^{r_2}} \right]^{\frac{1}{r_2-r_1}}$$

Si $u^i \geq b^*$ nos encontramos, según (3.104), en la situación en que $u^i, b^* < 0$, por tanto la combinación óptima en función de los valores de u^i y b^* carece de sentido. Deberíamos fijarnos entonces en el valor de k^α que, fijando el porcentaje que consideramos aceptable obtener sobre el máximo de la esperanza del valor actual de los dividendos, α , nos lleva a elegir como combinación óptima $u = b = k^\alpha$

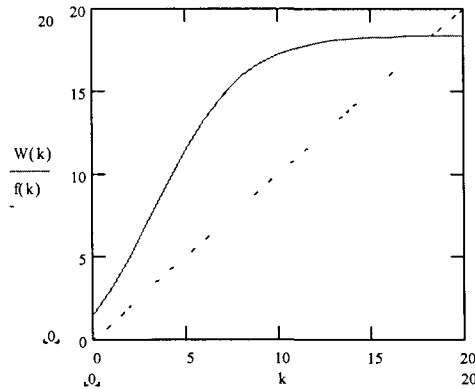
Interpretación 4

Otro planteamiento para hallar una combinación económicamente óptima en la función $W(k)$, es plantear la siguiente igualdad

$$W(k) = k \tag{3.107}$$

El valor de k que cumple (3.107), al que denominamos umbral de eficiencia y representamos como k^e , es aquél que iguala la inversión inicial con la esperanza del valor actual de los dividendos actualizados a una tasa δ . Por tanto la rentabilidad para el gestor de la cartera, a la que representamos como $\hat{\rho}$, coincide con la tasa δ .

Gráficamente,



Para valores $k > k^e$, ocurre que $k > W(k)$, por tanto, la rentabilidad conseguida, $\hat{\rho}$, es menor que δ . Así, los valores de k incluidos en el intervalo (k^e, ∞) , son ineficientes desde un punto de vista económico, ya que la rentabilidad obtenida es inferior a la tasa de mercado δ .

Para $k < k^e$, se cumple que $k < W(k)$. Es decir, la rentabilidad $\hat{\rho}$ es mayor que la tasa δ . Por tanto, los valores de k pertenecientes al intervalo $(0, k^e)$ son valores económicamente eficientes.

Se demuestra a continuación la existencia de un único umbral de eficiencia, k^e . Si sustituimos (3.91) en (3.107), se obtiene,

$$\frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k}} = k$$

de donde,

$$-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k} = -k \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot k \cdot e^{r_2 k}$$

y agrupando las funciones exponenciales se obtiene

$$(k \cdot r_1 - 1) \cdot \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} = (r_2 \cdot k - 1) \cdot e^{r_2 k}$$

$$e^{(r_2-r_1)k} = \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{(k \cdot r_1 - 1)}{(k \cdot r_2 - 1)} \quad (3.108)$$

La existencia del valor de k que cumple la igualdad (3.108) no se puede obtener de forma analítica, pero si podemos asegurar la existencia de ese punto.

Si consideramos

$$\begin{aligned} a(k) &= e^{(r_2-r_1)k} \\ b(k) &= \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{(k \cdot r_1 - 1)}{(k \cdot r_2 - 1)} \end{aligned}$$

y analizamos las funciones $a(k)$ y $b(k)$:

- Al hacer la primera derivada de $a(k)$ se obtiene,

$$a'(k) = (r_2 - r_1) \cdot e^{(r_2-r_1)k} < 0$$

por tanto $a(k)$ es una función monótona decreciente. Sabemos además que $\lim_{k \rightarrow \infty} a(k) = 0$, y que no existe valor de k que hace $a(k) = 0$ y que $a(0) = 1$

- La primera derivada de $b(k)$ es,

$$\begin{aligned} b'(k) &= \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{r_1 \cdot (k \cdot r_2 - 1) - (k \cdot r_1 - 1) r_2}{(k \cdot r_2 - 1)^2} = \\ &= \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{(k \cdot r_2 - 1)^2} < 0 \end{aligned}$$

por tanto, $b(k)$ es una función monótona decreciente, donde

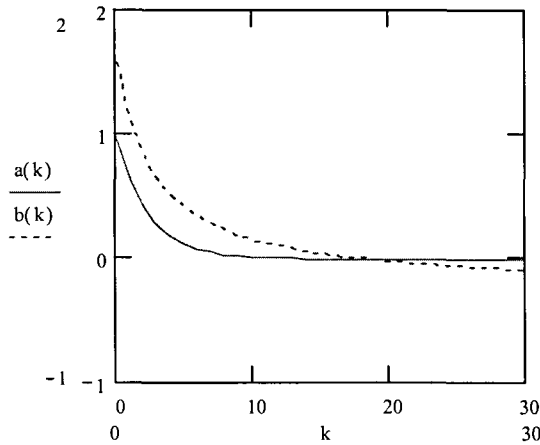
$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(k) = \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} < 0$$

siendo $b(0) = \frac{1+r_1}{1+r_2} > 1$, y el valor de k que hace $b(k) = 0$ es,

$$\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{(k \cdot r_1 - 1)}{(k \cdot r_2 - 1)} = 0 \Rightarrow (1+r_1) \cdot (k \cdot r_1 - 1) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{r_1}$$

Por tanto, una vez analizadas las funciones $a(k)$ y $b(k)$, dado que ambas son decrecientes, que $b(0) > a(0)$, y que $\lim_{k \rightarrow \infty} a(k) > \lim_{k \rightarrow \infty} b(k)$, podemos asegurar la existencia de un único valor que cumple $W(k) = k$, y por tanto queda demostrado la unicidad de k^e .

Gráficamente, para $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$ y $\rho = 0.5$, la idea es,



En el tramo $(0, k^e)$ podemos hallar el valor que consideramos óptimo, que es aquél que maximiza la diferencia entre $W(k)$ y k . Nos referimos a ese punto como k^* , y queda definido como

$$k^* = k \in (0, k^e) / \text{Max} \{W(k) - k\} \quad (3.109)$$

Por tanto, el proceso que debemos seguir para hallar k^* es optimizar la función diferencia que definimos como,

$$d(k) = W(k) - k$$

es decir

$$d(k) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k}} - k \quad (3.110)$$

Al hacer la primera derivada de $d(k)$ e igualar a cero se obtiene,

$$d'(k) = \frac{-\left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k}\right) \cdot \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 k} + r_2^2 \cdot e^{r_2 k}\right)}{\left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k}\right)^2} = 0$$

de donde

$$-\left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k}\right) \cdot \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 k} + r_2^2 \cdot e^{r_2 k}\right) = 0$$

expresión a partir de la cual se hallan los puntos singulares, a los que denominamos k_1 y k_2 ,

$$\begin{cases} -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k} = 0 & \Rightarrow k_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \ln\left(\frac{1+r_2}{1+r_1}\right) \\ -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 k} + r_2^2 \cdot e^{r_2 k} = 0 & \Rightarrow k_2 = \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{1+r_2}{1+r_1}\right) \end{cases} \quad (3.111)$$

y conociendo los valores de r_1 y r_2 , podemos asegurar que $k_1 < 0$, quedando por tanto fuera de nuestro ámbito de estudio. Se comprueba a continuación la naturaleza del punto k_2 . Para ello, debemos hacer la segunda derivada de (3.110). Para simplificar, escribimos (3.110) como

$$d(k) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 k} + e^{r_2 k}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 k} + r_2 \cdot e^{r_2 k}} - k = \frac{h(k)}{h'(k)} - k$$

siendo

$$d'(k) = \frac{-h(k) \cdot h''(k)}{[h'(k)]^2}$$

y por tanto

$$d''(k) = \frac{-[h'(k)]^2 \cdot h''(k) - h(k) \cdot h'(k) \cdot h'''(k) + 2 \cdot h(k) \cdot [h''(k)]^2}{[h'(k)]^3} \quad (3.112)$$

Sabemos por (3.111) que $h''(k_2) = 0$. Por tanto $d''(k_2)$ es,

$$d''(k_2) = \frac{-h(k_2) \cdot h'(k_2) \cdot h'''(k_2)}{[h'(k_2)]^3} = \frac{-h(k_2) \cdot h'''(k_2)}{[h'(k_2)]^2} \quad (3.113)$$

Así, el signo de $d''(k_2)$ depende del signo de $[-h(k_2) \cdot h'''(k_2)]$. Analizamos por separado $h(k_2)$ y $h'''(k_2)$:

1. Al sustituir k_2 en $h(k)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} h(k_2) &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 \frac{1}{r_1-r_2} \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)} + e^{r_2 \frac{1}{r_1-r_2} \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)} = \\ &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)^{r_1 \frac{1}{r_1-r_2}} + \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)^{r_2 \frac{1}{r_1-r_2}} = \\ &= -\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)^{\frac{r_1}{r_1-r_2}} \cdot \left(\frac{r_1^2+r_2^2}{r_1^2}\right) < 0 \end{aligned}$$

2. La tercera derivada de $h(k)$ es,

$$h'''(k) = -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^3 \cdot e^{r_1 k} + r_2^3 \cdot e^{r_2 k}$$

Al sustituir k_2 en $h'''(k)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} h'''(k_2) &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^3 \cdot e^{r_1 \frac{1}{r_1-r_2} \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)} + r_2^3 \cdot e^{r_2 \frac{1}{r_1-r_2} \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)} = \\ &= -\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^3 \cdot \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)^{r_1 \frac{1}{r_1-r_2}} + r_2^3 \cdot \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)^{r_2 \frac{1}{r_1-r_2}} = \\ &= \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{1+r_2}{1+r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1-r_2}} \cdot r_2^2 \cdot (r_2 - r_1) < 0 \end{aligned}$$

Por tanto, como $h(k_2) < 0$ y $h'''(k_2) < 0$, entonces, a partir de (3.113), podemos asegurar que

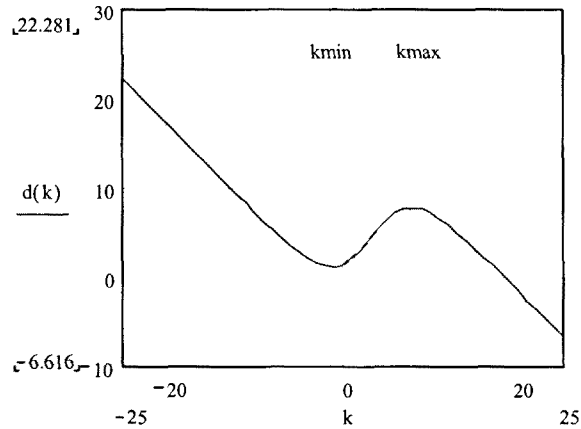
$$d''(k_2) = \frac{-h(k_2) \cdot h'''(k_2)}{[h'(k_2)]^2} < 0$$

Quedando demostrado que k_2 es máximo de $W(k)$, y por tanto $k_2 = k^*$, valor definido en (3.109).

Podemos observar que k_2 coincide con el valor de b^* que recordemos es aquél que maximiza $W(u, b)$. Por tanto, el análisis realizado para b^* es válido para k_2 . Así la tabla (3.104) toma la forma,

$(\delta - \lambda\rho) > 0$	$(\delta - \lambda\rho) = 0$	$(\delta - \lambda\rho) < 0$
$k_2 < 0$	$k_2 < 0$	$k_2 \geq 0$
$u^i < 0$	$u^i < 0$	$u^i \geq 0$
$u^i > k_2$	$u^i = k_2$	$u^i < k_2$

Según la definición (3.109), el único caso en el que tiene sentido que $k^* = k_2$ es cuando $(\delta - \lambda\rho) < 0$, ya que sólo bajo esa condición, k_2 puede tomar valores positivos. Por ejemplo, para $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$ y $\rho = 0.5$, la representación gráfica de $d(k)$ es,



siendo $k_1 = -1.212$ y $k_2 = 7.844$.

Por tanto, si $(\delta - \lambda\rho) < 0$, podemos afirmar que el valor óptimo de la esperanza del valor actual de los dividendos según esta interpretación se obtiene para $k = k^* = k_2 = b^*$.

Sustituyendo el valor obtenido de k_2 en $W(k)$

$$\begin{aligned}
 W(k_2) &= \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2}} + e^{r_2 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2}}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2}} + r_2 e^{r_2 \frac{1}{r_2-r_1} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2}}} = \\
 &= \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2} \right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2} \right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}}{-\left(\frac{1+r_1}{1+r_2} \right) r_1 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2} \right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + r_2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1+r_1}{1+r_2} \right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}} = \\
 &= \frac{-\left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}}{-r_1 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right)^{\frac{r_1}{r_2-r_1}} + r_2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right)^{\frac{r_2}{r_2-r_1}}} = \\
 &= \frac{-\frac{2r_1}{r_1^{r_2-r_1}} \cdot r_2^{-\frac{2r_1}{r_2-r_1}} + r_1^{\frac{2r_2}{r_2-r_1}} \cdot r_2^{-\frac{2r_2}{r_2-r_1}}}{-r_1^{\frac{r_1+r_2}{r_2-r_1}} \cdot r_2^{-\frac{2r_1}{r_2-r_1}} + r_1^{\frac{2r_2}{r_2-r_1}} \cdot r_2^{-\frac{r_2-r_1}{r_2-r_1}}}
 \end{aligned}$$

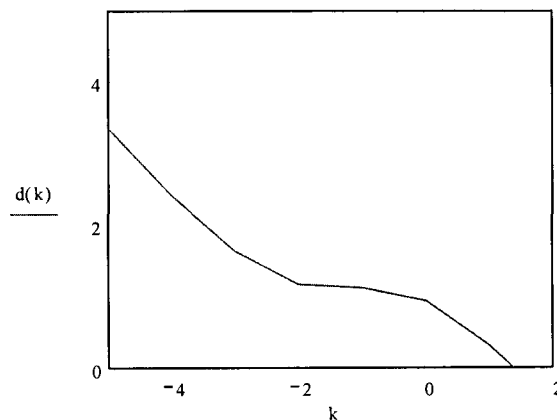
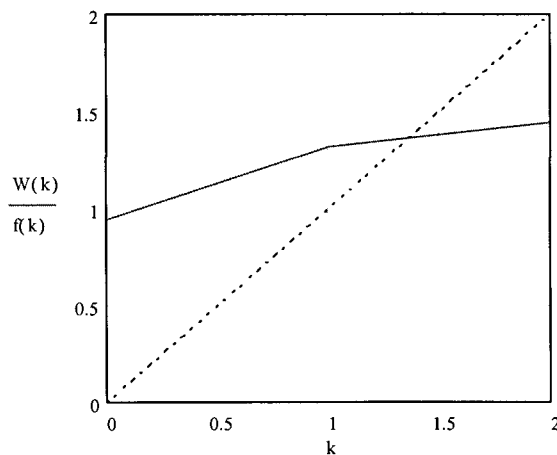
y al dividir esta última expresión entre $r_2^{-\frac{2r_1}{r_2-r_1}} \cdot r_1^{\frac{2r_2}{r_2-r_1}}$, se obtiene

$$W(k_2) = \frac{-r_1^{-2} + r_2^{-2}}{-r_1^{-1} + r_2^{-1}} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2}$$

expresión esta última, que recordando el valor de r_1 y r_2 , podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 W(k_2) &= \frac{\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho) + \sqrt{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \delta}}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} + \frac{(\delta - \lambda \cdot \rho) - \sqrt{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \delta}}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)}}{\frac{(\delta - \lambda \cdot \rho) + \sqrt{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \delta}}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)} \cdot \frac{(\delta - \lambda \cdot \rho) - \sqrt{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \delta}}{2 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho)}}} = \\
 &= \frac{4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) (\delta - \lambda \cdot \rho)}{(\delta - \lambda \cdot \rho)^2 - ((\delta - \lambda \cdot \rho)^2 + 4 \cdot \lambda \cdot (1 + \rho) \cdot \delta)} = \\
 &= \frac{-(\delta - \lambda \cdot \rho)}{\delta} = \frac{\lambda \cdot \rho}{\delta} - 1
 \end{aligned}$$

Para los casos en que $(\delta - \lambda \rho) \geq 0$ nos encontramos en situaciones en que $k_2 < 0$ y que $u^i > k_2$. La idea gráfica en estos casos es,



Por tanto, según esta interpretación la máxima diferencia para $k \geq 0$ estaría para una inversión inicial nula, lo que carece de sentido desde el punto de vista económico.

Ejemplo

Se adjuntan a continuación resultados obtenidos para los puntos considerados óptimos en el análisis conjunto de la función $W(u, b)$.

El primer caso analizado es considerar una tasa de actualización $\delta = 0.03$ y número medio de siniestros $\lambda = 1$. Los valores para un coeficiente de seguridad de $\rho = 0.1$ y $\rho = 0.2$ son,

	$\rho = 0'1$	$\rho = 0'2$
r_1	0.136	0.102
r_2	-0.2	-0.244
b^*	1.234	3.923
u^*	0.095	1.417
$W(u^*, u^*)$	1.167	2.833
$W(u^*, b^*)$	1.188	3.088
k^e	5.7152	8.7518
k_1	-1.043	-1.089
k_2	1.234	3.923
$W(k_2)$	2.333	5.667

Si calculamos esos valores para un factor de actualización $\delta = 0'05$, mante-

niendo $\lambda = 1$ y $\rho = 0'2$, se obtiene,

	$\rho = 0'2$
r_1	0.151
r_2	-0.276
b^*	1.74
u^*	0.327
$W(u^*, u^*)$	1.5
$W(u^*, b^*)$	1.567
k^e	5.676
k_1	-1.086
k_2	1.74
$W(k_2)$	3

3.6.2 Sensibilidad de $\chi(u, b)$

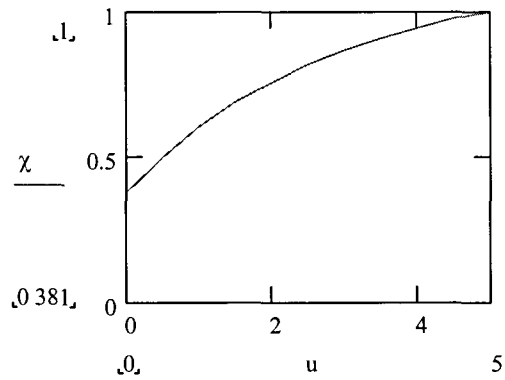
3.6.2.1 Sensibilidad de $\chi(u, b)$ respecto a u

Intuitivamente se puede determinar que si analizamos la sensibilidad de $\chi(u, b)$ respecto al nivel inicial de las reservas u , a mayor es el valor de u mayor es la probabilidad de que las reservas alcancen la barrera antes de que se produzca la ruina, por tanto mayor será el valor de $\chi(u, b)$. Analíticamente podemos demostrarlo hallando la parcial de $\chi(u, b)$ respecto a u :

$$\frac{\partial \chi(u, b)}{\partial u} = \frac{\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b}} > 0$$

expresión positiva ya que numerador y denominador son positivos (el denominador es la probabilidad de supervivencia para $u = b$ en el modelo clásico de la teoría del riesgo).

Gráficamente para $b = 5, c = 1.5, \delta = 0.03$ y $\lambda = 1$



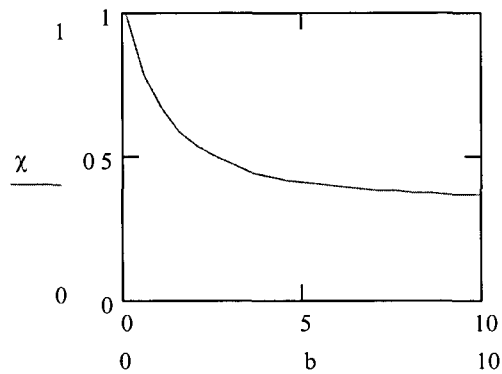
3.6.2.2 Sensibilidad de $\chi(u, b)$ respecto a b

Respecto a la variación de $\chi(u, b)$ respecto a b , se puede observar que a mayor es b , más difícil será que se alcance la barrera antes de la ruina, y por tanto menor es el valor de $\chi(u, b)$. Analíticamente:

$$\frac{\partial \chi(u, b)}{\partial b} = \left(1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u}\right) \cdot \frac{-\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}{\left(1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}\right)^2} < 0$$

parcial de signo negativo que demuestra que a mayor b , menor es el valor de $\chi(u, b)$

Gráficamente, para $u = 0.1, c = 1.5, \delta = 0.03$ y $\lambda = 1$



3.6.3 Sensibilidad de $W_\chi(u, b)$

3.6.3.1 Sensibilidad de $W_\chi(u, b)$ respecto a b

Si recordamos la expresión (3.57) en la que se define $W_\chi(u, b)$ podemos observar que viene expresado como el cociente entre una función que tiene un máximo y una función decreciente. Para analizar su comportamiento respecto a b , al calcular su parcial encontramos problemas para determinar su signo y hallar los posibles puntos críticos. Como alternativa, para determinar si existe un valor de b que maximice $W_\chi(u, b)$, reescribimos la expresión (3.57) como

$$W_\chi(u, b) = C(u) \cdot \frac{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}{\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1 \cdot e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}} \quad (3.114)$$

siendo

$$C(u) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u}}$$

Al reorganizar la expresión (3.114) se obtiene,

$$W_\chi(u, b) = \frac{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}{-\frac{1}{C(u)} \frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + \frac{1}{C(u)} r_2 e^{r_2 b}} = \frac{P(b)}{Q(b)}$$

y sabiendo que los óptimos de $W_\chi(u, b)$ coinciden con los óptimos de $\ln W_\chi(u, b)$, siendo $\ln W_\chi(u, b) = \ln P(b) - \ln Q(b)$, calculamos $\frac{\partial \ln W_\chi(u, b)}{\partial b}$, e igualamos a cero,

$$\frac{\partial \ln W_\chi(u, b)}{\partial b} = \frac{P'(b)}{P(b)} - \frac{Q'(b)}{Q(b)} = 0$$

de donde:

$$\frac{\frac{\rho}{(1+\rho)^2} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} = \frac{-\frac{1}{C(u)} \frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2 e^{r_1 b} + \frac{1}{C(u)} r_2^2 e^{r_2 b}}{-\frac{1}{C(u)} \frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + \frac{1}{C(u)} r_2 e^{r_2 b}} \quad (3.115)$$

Debido a la imposibilidad de despejar b , analizamos las funciones que conforman ambos lados de la igualdad. Consideramos

$$f(b) = \frac{\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} \quad g(b) = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2 e^{r_1 b} + r_2^2 e^{r_2 b}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}}$$

Analizamos $f'(b)$ para estudiar su signo

$$f'(b) = \frac{-\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b} \cdot \left[\frac{1}{1+\rho} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b} \right) + \frac{1}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b} \right]}{\left(1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b} \right)^2} = 0$$

de donde

$$\frac{1}{1+\rho} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b} \right) = -\frac{1}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b}$$

$$1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b} = -\frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b}$$

$$1 \neq 0$$

quedando demostrado que esta función no tiene óptimo, y además $f'(b) < 0$, siendo una función decreciente.

Hallamos el valor de $f(0)$,

$$f(0) = \frac{\frac{\rho}{(1+\rho)^2}}{1 - \frac{1}{1+\rho}} = \frac{1}{1+\rho}$$

Analizamos a continuación $g'(b)$:

$$g'(b) = \frac{\left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^3 e^{r_1 b} + r_2^3 e^{r_2 b} \right) \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b} \right) - \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2 e^{r_1 b} + r_2^2 e^{r_2 b} \right)^2}{\left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b} \right)^2} = 0$$

de donde, desarrollando el numerador y haciendo $g'(b) = 0$, se obtiene,

$$\frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot e^{(r_1+r_2) \cdot b} \cdot (-r_1^3 \cdot r_2 - r_1 \cdot r_2^3 + 2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2) = 0$$

y como $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$, entonces $(-r_1^3 \cdot r_2 - r_1 \cdot r_2^3 + 2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2) > 0$. Por tanto $g'(b)$ es positiva, siendo $g(b)$ una función creciente.

Hallamos el valor de b que hace $g(b) = 0$, por tanto,

$$\frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2 e^{r_1 b} + r_2^2 e^{r_2 b}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}} = 0 \Rightarrow -\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2 e^{r_1 b} + r_2^2 e^{r_2 b} = 0$$

de donde despejando,

$$\begin{aligned} \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot r_1^2 \cdot e^{r_1 \cdot b} &= r_2^2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \\ \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} &= e^{(r_2-r_1) \cdot b} \\ b &= \frac{1}{r_2-r_1} \cdot \ln \frac{1+r_1}{1+r_2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \end{aligned}$$

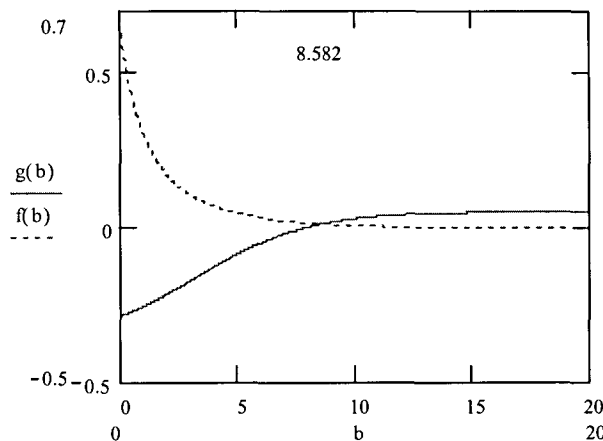
Podemos observar que la raíz de $g(b)$ coincide con el valor b^* hallado en (3.87).

Analizamos a continuación los límites de b que tiende a infinito de las funciones $f(b)$ y $g(b)$,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} f(b) &= 0 \\ \lim_{b \rightarrow \infty} g(b) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2 e^{r_1 b} + r_2^2 e^{r_2 b}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}} = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2 + r_2^2 e^{(r_2-r_1)b}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 + r_2 e^{(r_2-r_1)b}} = \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1^2}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1} = r_1 > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, como $f(b)$ es decreciente y $g(b)$ es creciente, y analizados los límites de las funciones, podemos asegurar que existe un único valor de b que cumple la igualdad (3.115), lo que nos permite asegurar que $W_X(u, b)$ tiene un óptimo. Además, hemos comprobado que $g(b^*) = 0$, por tanto podemos asegurar que el punto de corte es mayor que b^* .

Gráficamente, para $\rho = 0.5$, $\delta = 0.03$ y $\lambda = 1$, encontramos que el punto de corte es $b = 8.582$.



Sobre $W_X(u, b)$ sabemos que es siempre positivo, y que $\lim_{b \rightarrow \infty} W_X(u, b) = 0$,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} W_X(u, b) = C(u) \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}} = C(u) \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$

así, podemos asegurar que $W_\chi(u, b)$ es una función creciente hasta un determinado $b = b^\chi$, pasando a ser a, partir de ese punto, decreciente.

Podemos comprobar, de forma alternativa, que $b^\chi > b^*$.

Sabemos que

$b \in$	$[0, b^*]$	$[b^*, b^\chi]$	$[b^\chi, \infty)$
$W(u, b)$	$\frac{\partial W(u, b)}{\partial b} > 0$	$\frac{\partial W(u, b)}{\partial b} < 0$	$\frac{\partial W(u, b)}{\partial b} < 0$
$\chi(u, b)$	$\frac{\partial \chi(u, b)}{\partial b} < 0$	$\frac{\partial \chi(u, b)}{\partial b} < 0$	$\frac{\partial \chi(u, b)}{\partial b} < 0$

(3.116)

A partir de (3.116) y sabiendo que

$$\frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b} = \frac{\frac{\partial W(u, b)}{\partial b} \cdot \chi(u, b) - W(u, b) \cdot \frac{\partial \chi(u, b)}{\partial b}}{(\chi(u, b))^2} \quad (3.117)$$

se puede determinar el signo de $\frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b}$ en cada uno de los intervalos definidos en (3.116):

- En el intervalo $[0, b^*]$, se demuestra a partir de (3.116) y (3.117) que $W_\chi(u, b)$ es creciente ya que:

$$\frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b} > 0$$

- En $b = b^*$

$$\left. \frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b} \right|_{b=b^*} = \frac{-W(u, b) \cdot \frac{\partial \chi(u, b)}{\partial b}}{(\chi(u, b))^2} > 0$$

por tanto $W_\chi(u, b)$ es creciente en b^* , pudiendo asegurarse que el óptimo de $W_\chi(u, b)$ se alcanza para b^χ mayores que b^* .

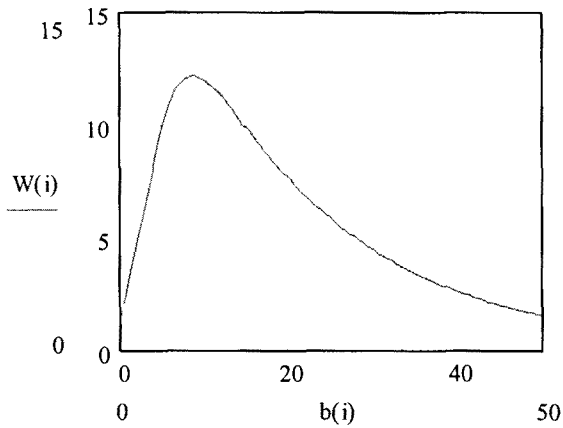
- En el intervalo $[b^\chi, \infty)$, a partir de (3.116) y (3.117), $W_\chi(u, b)$ es decreciente ya que

$$\frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b} < 0$$

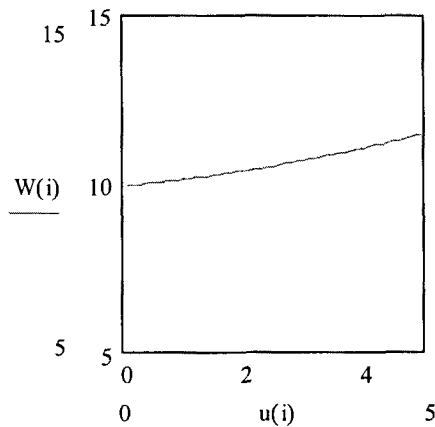
Es decir

$b \in$	$[0, b^*]$	$[b^*, b^\chi]$	$[b^\chi, \infty)$
$W_\chi(u, b)$	$\frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b} > 0$	$\frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b} > 0$	$\frac{\partial W_\chi(u, b)}{\partial b} < 0$

Gráficamente para $u = 0.1, c = 1.5, \delta = 0.03$ y $\lambda = 1$



Si analizamos la variación de $W_x(u, b)$ respecto a u , podemos asegurar, vistos desarrollos anteriores, que a mayor u mayor es $W_x(u, b)$. La causa es que al incrementar el nivel inicial de las reservas la probabilidad de alcanzar la barrera es mayor. Además, se provoca una disminución del tiempo promedio de espera, empezándose a repartir dividendos más cerca del origen, dividendos que debido a un factor de actualización positivo tienen un mayor peso.



3.6.4 Sensibilidad de $\tau(u, b)$

Recordando la expresión del tiempo promedio de reparto de dividendos hallada en (3.48)

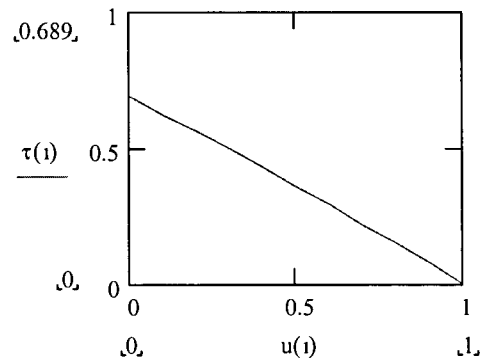
$$\tau(u, b) = \frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{W(b, b)}{W_\chi(u, b)} = \frac{1}{\delta} \cdot [\ln W(b, b) - \ln W_\chi(u, b)] \quad (3.118)$$

podemos analizar su sensibilidad respecto a u y b .

3.6.4.1 Sensibilidad de $\tau(u, b)$ respecto a u

Respecto a u sabemos que ante un incremento del nivel inicial de las reservas se produce un incremento en $W_\chi(u, b)$, lo que provoca una disminución en el valor de $\ln \frac{W(b, b)}{W_\chi(u, b)}$ y por tanto una disminución de $\tau(u, b)$.

Gráficamente para $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$ y $c = 1.5$ y $b = 1$,



Por tanto para un mismo valor de la barrera b , el valor de $\tau(u, b)$ tendrá un mínimo en $u = b$, siendo $\tau(b, b) = 0$. La causa es que al partir de unas reservas iguales al nivel de la barrera, desde ese mismo momento empieza a producirse reparto de dividendos, por tanto el tiempo promedio de espera es cero.

El máximo de $\tau(u, b)$ para un mismo valor de la barrera b está en $u = 0$.

Partiendo de (3.58) :

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max}(u) &= \tau(0, b) = \frac{1}{\delta} \cdot [\ln W(b, b) - \ln W_{\chi}(0, b)] = \\
 &= \frac{1}{\delta} \cdot \left[\ln \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 b} + e^{r_2 b}}{\frac{r_2 - r_1}{1+r_2}} + \ln \frac{\frac{\rho}{1+\rho}}{1 - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} \right] = \\
 &= \frac{1}{\delta} \cdot \left[\ln \frac{(1+r_2) \cdot \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 b} + e^{r_2 b}\right)}{r_2 - r_1} + \ln \frac{\rho}{1 + \rho - e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

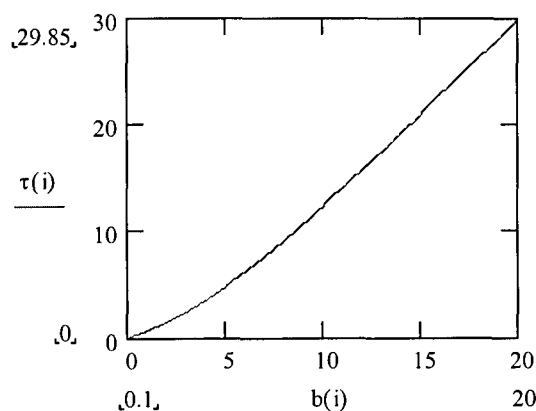
Por tanto para $0 \leq u \leq b$, considerando b una constante, los valores de $\tau(u, b)$ están comprendidos en el intervalo

$$\left[0, \frac{1}{\delta} \cdot \left[\ln \frac{(1+r_2) \cdot \left(-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 b} + e^{r_2 b}\right)}{r_2 - r_1} + \ln \frac{\rho}{1 + \rho - e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}} \right] \right]$$

3.6.4.2 Sensibilidad de $\tau(u, b)$ respecto a b

Si analizamos la sensibilidad de $\tau(u, b)$ respecto a b podemos observar que es creciente respecto a b , lo que es lógico, ya que para un mismo valor de las reservas iniciales, a mayor sea b , más tardarán las trayectorias en alcanzar la barrera, y más se retrasará el momento en que se empiezan a repartir dividendos.

Gráficamente para $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$ y $c = 1.5$ y $u = 1$,



3.6.5 Sensibilidad de $V(d)$

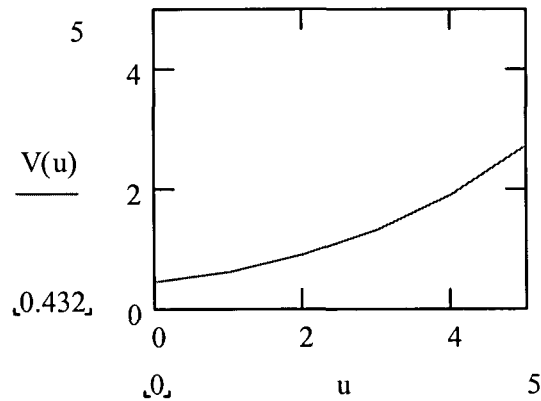
La esperanza del valor actual de los dividendos suponiendo que el proceso no acabe con la ruina, como se observa intuitivamente, es decreciente respecto a d . A mayor es la diferencia entre el nivel de las reservas y la barrera menor será el valor de los dividendos repartidos. Como $d = b - u$, es evidente que $V(d)$ es creciente respecto a u , y decreciente respecto a b .

Si hacemos la derivada de V respecto a u , una vez sustituido d por su valor $b - u$, se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial u} = e^{r_2(b-u)} > 0$$

expresión positiva, quedando demostrado que a mayor u mayor es $V(d)$.

Gráficamente para $b = 5$

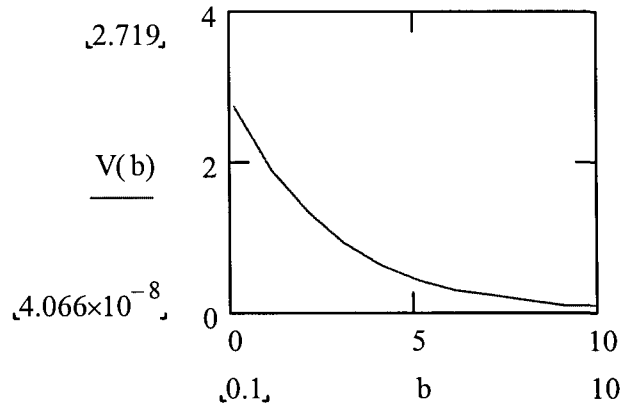


De forma análoga planteamos la parcial de $V(d)$ respecto a b :

$$\frac{\partial V}{\partial b} = -e^{r_2(b-u)} < 0$$

expresión negativa, por tanto a mayor b , menor es el valor de $V(d)$.

Gráficamente, para $u = 0.1$



3.7 Resultados numéricos

En los apartados anteriores hemos presentado las expresiones correspondientes a las magnitudes utilizadas para la cuantificación de los dividendos repartidos, $W(u, b)$, $W_\chi(u, b)$ y $V(d)$, asumiendo una barrera de dividendos constante. Hemos reinterpretado las expresiones de las probabilidades utilizadas en el modelo clásico sin barrera, $\chi(u, b)$ y $\xi(u, b)$, y hemos presentado la variable tiempo promedio de espera $\tau(u, b)$.

A continuación, sobre todas estas variables hallamos resultados para diferentes valores del nivel inicial de las reservas, u , y para diferentes valores de la barrera, b , mediante programas de Mathcad. Asumimos que la cuantía de los siniestros se distribuye según una exponencial unitaria, $F(z) = 1 - e^{-z}$.

Los resultados están calculados para los parámetros $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$ y $c = 1.5$

3.7.1 Resultados para $W(u, b)$

Los resultados hallados para diferentes valores de u y b son

$u \backslash b$	0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1
0	1 4563	1 4981	1 5406	1 5839	1 6278	1 6725	1 7179	1 7639	1 8105	1 8577	1 9056
0 1		1 5995	1 6449	1 6911	1 738	1 7857	1 8342	1 8833	1 9331	1 9835	2 0346
0 2			1 7463	1 7953	1 8452	1 8958	1 9472	1 9994	2 0523	2 1058	2 16
0 3				1 8967	1 9494	2 0029	2 0572	2 1123	2 1682	2 2247	2 282
0 4					2 0508	2 1071	2 1642	2 2222	2 2809	2 3404	2 4007
0 5						2 2084	2 2683	2 3291	2 3906	2 453	2 5162
0 6							2 3697	2 4331	2 4975	2 5626	2 6286
0 7								2 5345	2 6015	2 6693	2 738
0 8									2 7028	2 7733	2 8447
0 9										2 8746	2 9486
1											3 0499

Tabla 3.1

Podemos observar que para el mismo nivel de reservas inicial u , a medida que incrementa el valor de b , la esperanza del valor actual de los dividendos incrementa, lo que podría parecer contrario a la lógica ya que el momento de alcanzar la barrera y de empezar a repartir dividendos se producirá más tarde, pero es debido a que el desplazamiento hacia arriba de la barrera b retrasa el momento de ruina y permite la acumulación de más dividendos.

La misma tendencia se produce cuando mantenemos el nivel de la barrera b e incrementamos el nivel inicial de las reservas. Es decir, aumenta el valor de $W(u, b)$ debido a que antes se alcanzará el nivel de la barrera. Influye también el hecho de que a mayor es u para un mismo b , el momento de ruina se produce más tarde.

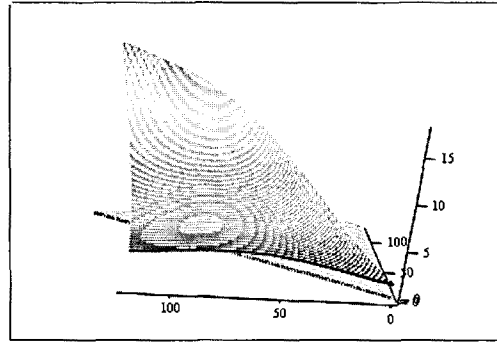
Si nos desplazamos por la diagonal del cuadro, $W(u, b)$ también aumenta, debido a que la ruina se producirá más tarde, ya que tanto el valor inicial de las reservas como el nivel de la barrera parten de niveles más elevados.

Los valores para b que aparecen en la Tabla 3.1 pertenecen al tramo creciente de $W(u, b)$ respecto a b , por tanto valores de $b < b^*$.

Si calculamos el valor $b(t) = b^*$ para los parámetros definidos, tendremos que el valor de la barrera que maximiza $W(u, b)$ es $b^* = 7.8437$, siendo $W_{max}(u, b) = W(u, b^*) = 4.4687$ para $u = 0.1$. Podemos observar que para este ejemplo se cumple que $\delta - \lambda \cdot \rho < 0$, lo que implica, tal y como hemos visto, que $b^* > 0$. Hallamos resultados para una b comprendida en el intervalo $[7.5, 8.5]$, manteniendo los valores de u entre $[0, 1]$.

u\b	7 5	7 6	7 7	7 8	7 9	8	8 1	8 2	8 3	8 4	8 5
0	4 1802	4 1828	4 1844	4 1852	4 1852	4 1843	4 1826	4 1802	4 1770	4 1731	4 1685
0 1	4 4632	4 4660	4 4677	4 4686	4 4685	4 4676	4 4658	4 4632	4 4598	4 4557	4 4507
0 2	4 7384	4 7414	4 7432	4 7441	4 7440	4 7430	4 7411	4 7384	4 7348	4 7303	4 7251
0 3	5 0060	5 0091	5 0111	5 0120	5 0120	5 0109	5 0089	5 0060	5 0022	4 9975	4 9920
0 4	5 2663	5 2696	5 2717	5 2727	5 2726	5 2715	5 2694	5 2663	5 2623	5 2574	5 2516
0 5	5 5197	5 5231	5 5253	5 5263	5 5263	5 5251	5 5229	5 5197	5 5155	5 5103	5 5043
0 6	5 7663	5 7698	5 7721	5 7732	5 7732	5 7720	5 7697	5 7663	5 7619	5 7565	5 7502
0 7	6 0064	6 0101	6 0125	6 0137	6 0136	6 0123	6 0099	6 0064	6 0019	5 9963	5 9897
0 8	6 2403	6 2442	6 2467	6 2479	6 2478	6 2465	6 2440	6 2404	6 2356	6 2298	6 2229
0 9	6 4683	6 4723	6 4748	6 4761	6 4760	6 4747	6 4721	6 4683	6 4634	6 4573	6 4502
1	6 6905	6 6946	6 6972	6 6985	6 6984	6 6970	6 6944	6 6905	6 6854	6 6791	6 6718

Se observa que el valor máximo, b^* , es independiente del valor de u . Gráficamente



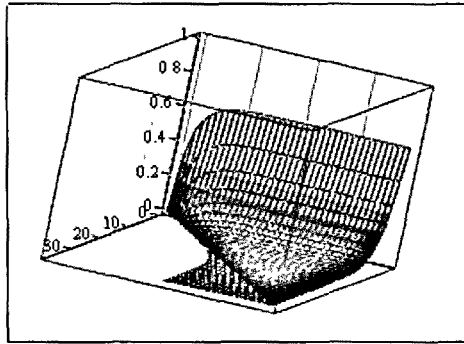
W

3.7.2 Resultados para $\xi(u, b)$

Para $\xi(u, b)$ encontramos los siguientes resultados:

$u \backslash b$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0.0615	0.1142	0.1599	0.1998	0.2349	0.2661	0.2939	0.3189	0.3414	0.3618
0.1		0	0.0562	0.1048	0.1473	0.1847	0.218	0.2476	0.2742	0.2982	0.32
0.2			0	0.0515	0.0966	0.1362	0.1714	0.2028	0.231	0.2564	0.2795
0.3				0	0.0475	0.0893	0.1264	0.1595	0.1892	0.216	0.2403
0.4					0	0.0439	0.0828	0.1176	0.1488	0.177	0.2025
0.5						0	0.0407	0.0771	0.1097	0.1392	0.1695
0.6							0	0.0379	0.0719	0.1026	0.1304
0.7								0	0.0354	0.0673	0.0962
0.8									0	0.0331	0.063
0.9										0	0.039
1											0

Gráficamente:



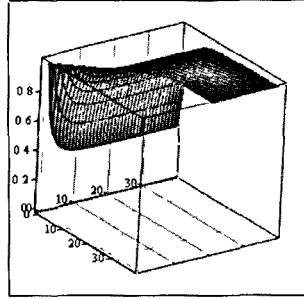
m

siendo la probabilidad complementaria $\chi(u, b)$,

u\b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	1	0.9385	0.8858	0.8401	0.8002	0.7651	0.7339	0.7061	0.6811	0.6586	0.6382
0.1		1	0.9438	0.8952	0.8527	0.8153	0.782	0.7524	0.7258	0.7018	0.68
0.2			1	0.9485	0.9034	0.8638	0.8286	0.7972	0.769	0.7436	0.7205
0.3				1	0.9525	0.9107	0.8736	0.8405	0.8108	0.784	0.7597
0.4					1	0.9561	0.9172	0.8824	0.8512	0.823	0.7975
0.5						1	0.9593	0.9229	0.8903	0.8608	0.8341
0.6							1	0.9621	0.9281	0.8974	0.8696
0.7								1	0.9646	0.9327	0.9038
0.8									1	0.9669	0.937
0.9										1	0.969
1											1

El valor de la probabilidad de que los dividendos sean positivos disminuye cuando, manteniendo el nivel de u , incrementamos el valor de b , situación que se produce debido a que el nivel de la barrera está más alejada y por tanto la probabilidad de arruinarse antes de empezar el reparto de dividendos es menor. Cuando mantenemos el nivel de b e incrementamos u se produce la situación contraria, ya que en ese caso estamos acercando el nivel de las reservas al de la barrera, y por tanto incrementamos el número de trayectorias que alcanzarán la barrera y producirán reparto de dividendos antes de que se produzca la ruina.

Gráficamente:



s

3.7.3 Resultados para $W_\chi(u, b)$

Los resultados numéricos hallados para la esperanza del valor actual de los dividendos condicionados a que sean positivos, $W_\chi(u, b)$, son:

$u \backslash b$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	1.4563	1.5963	1.7393	1.8853	2.0342	2.186	2.3407	2.498	2.6581	2.8207	2.9859
0.1		1.5995	1.7428	1.8891	2.0383	2.1904	2.3453	2.503	2.6634	2.8264	2.9919
0.2			1.7463	1.8929	2.0424	2.1948	2.3501	2.5081	2.6688	2.8321	2.9979
0.3				1.8967	2.0466	2.1993	2.3549	2.5132	2.6742	2.8378	3.004
0.4					2.0508	2.2038	2.3597	2.5184	2.6797	2.8437	3.0102
0.5						2.2084	2.3646	2.5236	2.6853	2.8496	3.0165
0.6							2.3697	2.529	2.691	2.8557	3.0229
0.7								2.5345	2.6968	2.8619	3.0294
0.8									2.7028	2.8682	3.0361
0.9										2.8746	3.0429
1											3.0499

Tabla 3.2

Las variaciones respecto a u y b mantienen las mismas relaciones que en el caso de $W(u, b)$. Evidentemente los valores obtenidos para $u \neq b$ son más elevados que los hallados en la Tabla 3.1, ya que en el cálculo de $W_\chi(u, b)$ se eliminan las trayectorias en las que la ruina se produce antes de alcanzar la

barrera y por tanto no producen reparto de dividendos. Pero la Tabla 3.1 y la Tabla 3.2 coinciden en aquellos valores en que $u = b$, es decir $W(b, b) = W_\chi(b, b)$. La causa es que si partimos de unas reservas que coinciden con la barrera, todas las trayectorias producen reparto de dividendos, trayectorias que son las únicas valoradas en $W_\chi(u, b)$.

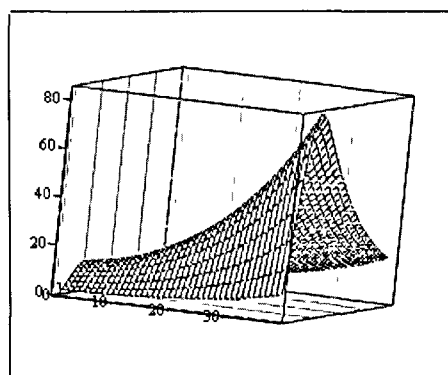
Hallamos numéricamente el valor de la barrera b que maximiza $W_\chi(u, b)$.

Para $u = 0.5$ el máximo se alcanza para $b^\chi = 8.62$

Los valores de $W_\chi(u, b)$ para una b comprendida en el intervalo $[8.2, 9.1]$ son,

$u \setminus b$	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9	9.1
0	11.997	12.005	12.011	12.015	12.016	12.014	12.010	12.004	11.996	11.986
0.1	12.021	12.03	12.036	12.039	12.040	12.038	12.034	12.028	12.020	12.01
0.2	12.045	12.054	12.060	12.063	12.064	12.063	12.059	12.053	12.044	12.034
0.3	12.070	12.078	12.084	12.088	12.089	12.087	12.083	12.077	12.069	12.058
0.4	12.094	12.103	12.109	12.113	12.114	12.112	12.108	12.102	12.094	12.083
0.5	12.120	12.129	12.135	12.138	12.139	12.137	12.133	12.127	12.119	12.108
0.6	12.146	12.154	12.160	12.164	12.165	12.163	12.159	12.153	12.145	12.134
0.7	12.172	12.181	12.187	12.190	12.191	12.189	12.186	12.179	12.171	12.160
0.8	12.199	12.207	12.213	12.217	12.218	12.216	12.212	12.206	12.198	12.187
0.9	12.226	12.235	12.241	12.244	12.245	12.244	12.240	12.233	12.225	12.214
1	12.254	12.263	12.269	12.272	12.273	12.272	12.268	12.261	12.253	12.242

Gráficamente



t

3.7.4 Resultados para $\tau(u, b)$

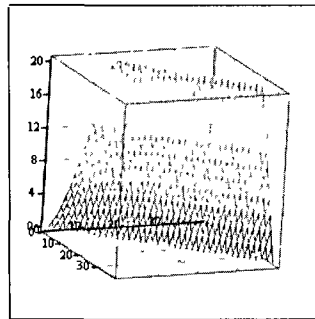
Los valores del tiempo promedio de espera hallados en función de los diferentes valores de u y b son:

$u \backslash b$	0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1
0	0	0 0646	0 1297	0 1956	0 2624	0 3303	0 3994	0 4698	0 5415	0 6147	0 6892
0 1		0	0 0651	0 131	0 1978	0 2657	0 3348	0 4052	0 477	0 5501	0 6246
0 2			0	0 0659	0 1327	0 2006	0 2697	0 3401	0 4118	0 485	0 5595
0 3				0	0 0668	0 1347	0 2038	0 2742	0 346	0 4191	0 4937
0 4					0	0 0679	0 137	0 2074	0 2792	0 3523	0 4268
0 5						0	0 0691	0 1395	0 2112	0 2844	0 3589
0 6							0	0 0704	0 1421	0 2153	0 2898
0 7								0	0 0717	0 1449	0 2194
0 8									0	0 0731	0 1477
0 9										0	0 0746
1											0

Podemos observar que para un mismo valor de las reservas iniciales, a mayor es b , mayor es el valor de $\tau(u, b)$. Obtenemos la relación inversa cuando para un mismo valor de la barrera b , incrementamos las reservas iniciales u : a mayor u menor es el tiempo promedio de espera.

El estudio de las diagonales del cuadro, para $u \neq b$, nos indica que manteniéndose la diferencia entre las reservas y la barrera, cuanto más alejados estemos del nivel de ruina, también se produce un incremento de $\tau(u, b)$. La justificación se encuentra en que cuando estamos en niveles más altos de u y de b , las trayectorias que alcanzan la barrera lo harán, en media, en puntos más alejados de $t = 0$, ya que trayectorias que para niveles más cercanos a la ruina no habrían llegado a la barrera, aquí tienen posibilidad de recuperarse y alcanzar la barrera, lo que hará que el tiempo promedio de espera, $\tau(u, b)$, sea mayor.

Gráficamente:



τ

3.7.5 Resultados para $V(d)$

Podemos observar que a mayor es el valor de d (o de forma equivalente cuando para un mismo valor de b el valor de u disminuye, o bien para un mismo valor de u el valor de b incrementa) $V(d)$ disminuye. Es lógico ya que eso implica una mayor distancia entre la barrera y el proceso de reservas. En este caso no afecta el momento de ocurrencia de la ruina, ya que los niveles negativos de las reservas no suponen el fin del proceso.

Los valores de $V(d)$, para diferentes valores de d son,

d	V(d)
0	18.386
0.1	18.286
0.2	18.187
0.3	18.089
0.4	17.99
0.5	17.893
0.6	17.796
0.7	17.699

d	V(d)
0.8	17.603
0.9	17.508
1	17.413
1.1	17.318
1.2	17.224
1.3	17.131
1.4	17.038
1.5	16.946

3.8 Estudio para el caso $\delta = 0$

En este apartado se analiza el caso concreto de que la tasa de actualización δ sea igual a cero. La finalidad de incidir sobre esta situación, es remarcar relaciones entre algunas de las magnitudes presentadas a lo largo del capítulo y profundizar sobre el sentido de las definiciones e interpretaciones ya expuestas.

3.8.1 Análisis de $W(u, b)$

Analizamos a continuación que sucede con $W(u, b)$ asumiendo $\delta = 0$.

Si el factor de actualización financiero es nulo, la ecuación (3.37) que nos permite hallar las raíces r_1 y r_2 , utilizadas en el cálculo de $W(u, b)$, toma la forma concreta

$$c \cdot r^2 - (\lambda - c) \cdot r = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} r_1 &= 0 \\ r_2 &= \frac{\lambda - c}{c} = -\frac{\rho}{1 + \rho} \end{aligned} \quad (3.120)$$

Al sustituir (3.120) en la expresión (3.40) que determina $W(u, b)$, se obtiene la esperanza del valor actual de los dividendos suponiendo que el proceso finalice con la ruina asumiendo $\delta = 0$,

$$\begin{aligned} W^{\delta=0}(u, b) &= \frac{-\frac{1+r_1}{1+r_2} e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{1+r_1}{1+r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}} = \frac{e^{r_2 u} - \frac{1}{1+r_2}}{r_2 e^{r_2 b}} = \\ &= \frac{1}{r_2} \cdot e^{-r_2 b} \cdot \left[e^{r_2 u} - \frac{1}{1+r_2} \right] = \\ &= -\frac{1+\rho}{\rho} \cdot e^{\frac{\rho}{1+\rho}(b-u)} + \frac{(1+\rho)^2}{\rho} \cdot e^{\frac{\rho}{1+\rho} \cdot b} \end{aligned} \quad (3.121)$$

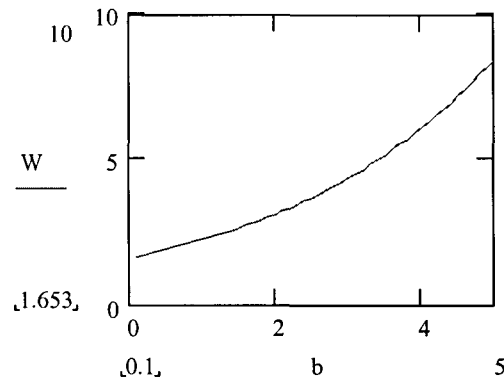
Al analizar la expresión (3.121) respecto al nivel de la barrera b ,

$$\frac{\partial W^{\delta=0}(u, b)}{\partial b} = e^{-r_2 b} \cdot \left[\frac{1}{1+r_2} - e^{r_2 u} \right] > 0$$

expresión positiva, ya que al ser $-1 < r_2 < 0$ podemos asegurar que $\frac{1}{1+r_2}$ es mayor que uno, mientras que $e^{r_2 u}$ es menor que uno. Por tanto, a mayor es el nivel de la barrera mayor es el valor de $W^{\delta=0}(u, b)$. Esta relación se debe a que a mayor es el nivel de la barrera, mayor es la probabilidad de supervivencia, y

aunque se tarde más en repartir dividendos, al ser $\delta = 0$, valoramos de la misma forma los dividendos repartidos en diferentes momentos del horizonte temporal. Este hecho elimina la existencia de un valor de b que maximiza la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos.

Gráficamente, para $\rho = 0.05$ y $\lambda = 1$,

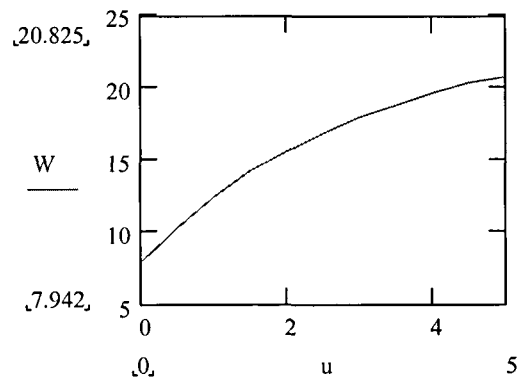


Analizamos a continuación $W^{\delta=0}(u, b)$ respecto a u . Haciendo la parcial de $W^{\delta=0}(u, b)$ respecto al nivel inicial de las reservas obtenemos,

$$\frac{\partial W^{\delta=0}(u, b)}{\partial u} = e^{r_2 \cdot (u-b)} > 0$$

expresión positiva, y por tanto $W^{\delta=0}(u, b)$ es creciente respecto al nivel inicial de las reservas. Por tanto el valor máximo de $W^{\delta=0}(u, b)$ para un b constante se encuentra en $u = b$.

Gráficamente, para $b = 5$



Numéricamente obtenemos los siguientes resultados para $W^{\delta=0}(u, b)$,
asumiendo $\rho = 0.05$ y $\lambda = 1$

u\b	0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1
0	1 5	1 5508	1 6034	1 6578	1 7139	1 772	1 8321	1 8942	1 9584	2 0248	2 0934
0 1		1 6525	1 7085	1 7665	1 8263	1 8882	1 9522	2 0184	2 0868	2 1575	2 2307
0 2			1 8102	1 8716	1 935	2 0006	2 0684	2 1385	2 211	2 286	2 3634
0 3				1 9733	2 0402	2 1093	2 1808	2 2547	2 3311	2 4102	2 4918
0 4					2 1418	2 2144	2 2895	2 3671	2 4473	2 5303	2 616
0 5						2 3161	2 3946	2 4758	2 5597	2 6465	2 7362
0 6							2 4963	2 5809	2 6684	2 7589	2 8524
0 7								2 6826	2 7735	2 8675	2 9647
0 8									2 8752	2 9727	3 0734
0 9										3 0744	3 1786
1											3 2803

3.8.2 Análisis de $W_\chi(u, b)$

Para hallar el valor de $W_\chi(u, b)$ asumiendo $\delta = 0$, sustituimos el valor de $W^{\delta=0}(u, b)$ obtenido en (3.121) en la expresión (3.57)

$$\begin{aligned}
 W_\chi^{\delta=0}(u, b) &= \frac{W^{\delta=0}(u, b)}{\chi(u, b)} = \frac{\frac{1}{r_2 e^{r_2 b}} \left(e^{r_2 u} - \frac{1}{1+r_2} \right)}{\frac{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u}}{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}} = \\
 &= \frac{e^{r_2 u} - \frac{1}{1+r_2}}{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} u}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho} b}}{r_2 e^{r_2 b}}
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Y al sustituir (3.120) en (3.122), se obtiene

$$\begin{aligned}
 W_X^{\delta=0}(u, b) &= \frac{e^{-\frac{\rho}{1+\rho}u} - \frac{1}{1-\frac{\rho}{1+\rho}}}{1-\frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho}u}} \cdot \frac{1-\frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho}b}}{-\frac{\rho}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho}b}} = \\
 &= \frac{e^{-\frac{\rho}{1+\rho}u} - (1+\rho)}{1-\frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho}u}} \cdot \frac{1+\rho - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho}b}}{-\rho e^{-\frac{\rho}{1+\rho}b}} = \\
 &= \frac{(1+\rho) - e^{-\frac{\rho}{1+\rho}u}}{\frac{\rho}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho}b}} = \\
 &= \frac{1+\rho}{\rho} \cdot \left[(1+\rho) \cdot e^{\frac{\rho}{1+\rho}b} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

En (3.123) se observa que $W_X^{\delta=0}(u, b)$ sólo depende de b . Resultado lógico, ya que $W_X^{\delta=0}(u, b)$ sólo analiza las trayectorias que alcanzan la barrera, y al hacer $\delta = 0$ eliminamos en su cálculo la importancia de que se empiecen a repartir dividendos antes o después, momento que para una misma barrera viene determinado por el nivel inicial de las reservas. Así u no influye en el cálculo de $W_X^{\delta=0}(u, b)$.

Análiticamente, al hallar la parcial de $W_X^{\delta=0}(u, b)$ respecto a b se obtiene

$$\frac{\partial W_X^{\delta=0}(u, b)}{\partial b} = (1+\rho) \cdot e^{\frac{\rho}{1+\rho}b} > 0 \tag{3.124}$$

Al ser (3.124) una expresión positiva, podemos asegurar que $W_X^{\delta=0}(u, b)$ es creciente respecto a b . Al incrementar el nivel de la barrera se permite mayor acumulación de reservas, con lo cual se retrasa el momento de ruina y se permite que ciertas trayectorias alcancen b antes de arruinarse. Que ese momento se de más tarde no influye negativamente en el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, ya que con una tasa de actualización nula los dividendos se valoran de igual forma, independientemente del momento en que se produzcan.

Si nos planteamos el cálculo de $\tau(u, b)$ a partir de la ecuación (3.47) que define $\tau(u, b)$, que recordamos es

$$W_X(u, b) = e^{-\delta \tau(u, b)} \cdot W(b, b)$$

observamos que para $\delta = 0$ pierde sentido el concepto de $\tau(u, b)$, llegándose a

Capítulo 4

Política de dividendos en caso continuo: Barrera lineal

4.1 Introducción

En la bibliografía actuarial encontramos, además de la barrera constante ya comentada en el capítulo anterior, la política de dividendos determinada por una barrera de dividendos lineal creciente, cuya expresión matemática es

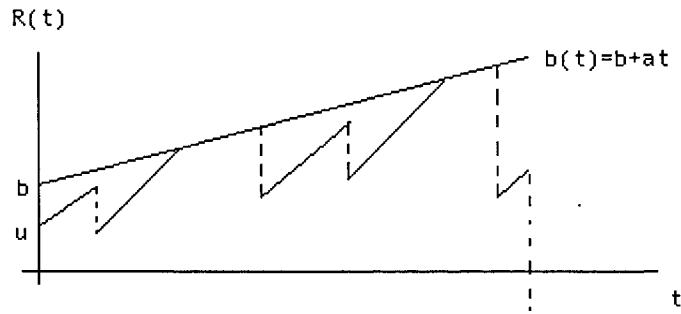
$$b(t) = b + a \cdot t, \quad b, a > 0$$

siendo b el nivel de la barrera para $t = 0$, y a la pendiente de la barrera (Siegl and Tichy (1996,1999), Gerber (1981)).

La aplicación del planteamiento alternativo, ya utilizado en el capítulo anterior para la barrera constante, a la obtención de la ecuación para la probabilidad de supervivencia con barrera lineal se presentó en el Third International Congress on Insurance: Mathematics and Economics (IME, Londres 1999) bajo el título "Dividend policy and ruin probabilities" y en el Documento de trabajo

"Políticas de dividendos y probabilidad de ruina"(Alegre, Claramunt y Marmol (2000)). Los resultados definitivos se encuentran publicados en Alegre, Claramunt y Mármol (2001).

La idea gráfica del modelo modificado por una barrera lineal es,



Los parámetros que definen la barrera tienen que cumplir, por un lado, que $b \geq u$, ya que el nivel de las reservas no puede ser superior al nivel de la barrera, y por otro lado, que la intensidad de prima, c , sea mayor que la pendiente de la barrera, a .

Esta última imposición es necesaria para asegurar que en algún momento el nivel de las reservas, $R(t)$, alcance la barrera, $b(t)$, ya que en caso contrario, si $a > c$, el modelo no se vería afectado por la introducción de la barrera y se obtendrían las expresiones de probabilidad de ruina del modelo sin reparto de dividendos.

La diferencia básica entre la barrera lineal y la barrera constante es que, mientras que una barrera del tipo $b(t) = b$ impone un nivel máximo de acumulación de reservas que no varía a lo largo del tiempo, la barrera lineal determina una política de dividendos que impone un tope creciente en el tiempo. Esta diferencia evidente tiene un primer efecto importante, que es la probabilidad de ruina: en la barrera lineal la ruina ya no es segura. Por tanto, en este capítulo además de plantearnos la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, se trabaja con la probabilidad de ruina.

El modelo de la siniestralidad agregada se sigue considerando un proceso de

Poisson compuesto, con el número de siniestros distribuido como una Poisson de parámetro λ , y cuantía individual de los siniestros $F(z)$, siendo $c > \lambda \cdot E(z)$ y $\rho = \frac{c}{\lambda \cdot E(z)} - 1$.

Así el proceso clásico de las reservas definido como $R(t) = R(0) + c \cdot t - S(t)$ que determina una variación $dR(t) = c \cdot dt - dS(t)$, con la introducción de una barrera de dividendos lineal $b(t) = b + at$, se ve modificado, llegando a la siguiente expresión,

$$dR(t) = \begin{cases} c \cdot dt - dS(t) & \text{si } R(t) < b + a \cdot t \\ a \cdot dt - dS(t) & \text{si } R(t) = b + a \cdot t \end{cases}$$

Es decir, cuando el nivel de las reservas alcanza el nivel de la barrera, la variación de las reservas en un diferencial de tiempo es la pendiente de la barrera, a , menos el diferencial de la siniestralidad, $a \cdot dt - dS(t)$. Recordamos que en el caso de la barrera constante la variación de las reservas sólo depende de la ocurrencia o no de un siniestros, es decir $-dS(t)$.

Siguiendo la formalización del reparto continuo planteado en el capítulo 2, la intensidad de dividendos repartidos en cada instante, $D(t)$, toma la forma,

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } R(t) < b + a \cdot t \\ c - a & \text{si } R(t) = b + a \cdot t \end{cases}$$

Por tanto, cuando las reservas alcanzan la barrera, de la cuantía ingresada en un dt en concepto de prima, c , sólo a incrementa las reservas, mientras que $(c - a)$ se reparte en forma de dividendos.

El capítulo se divide en dos partes básicas. Por un lado, el cálculo de la probabilidad de supervivencia mediante el planteamiento diferencial y el planteamiento alternativo, ya usados en el caso del modelo modificado con una barrera constante. Por otro lado, se plantea el cálculo de las magnitudes usadas para valorar los dividendos repartidos, W y V , usando también el planteamiento diferencial y el planteamiento alternativo.

4.2 Probabilidad de supervivencia

Consideramos el modelo clásico modificado con una barrera lineal, $b(t) = b + a \cdot t$, donde $0 \leq u \leq b$ y $0 < a < c$.

La probabilidad de supervivencia en este modelo pasa a depender de dos variables: el valor inicial de las reservas u , y el nivel inicial de la barrera b . Se expresa, por tanto, la probabilidad de supervivencia como $\phi(u, b)$

En Gerber (1981), se utiliza el planteamiento diferencial para el cálculo de $\phi(u, b)$. La ecuación de partida es,

$$\begin{aligned} \phi(u, b) = & (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \phi(u + c \cdot dt, b + a \cdot dt) + \\ & + \lambda \cdot dt \int_0^{u+c \cdot dt} \phi(u + c \cdot dt - z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.1)$$

La idea que recoge la ecuación (4.1) es la misma que en el caso del planteamiento de la esperanza del valor actual de los dividendos utilizado en el caso del modelo modificado con barrera constante. Se analiza la situación del proceso en un dt , diferenciando si ocurre o no ocurre siniestro, para lo que se usa la propiedad del proceso de Poisson compuesto, que determina que el tiempo de interocurrencia entre dos siniestros consecutivos se distribuye según una exponencial de media la inversa del parámetro de la distribución de Poisson que define el número de los siniestros.

El primer sumando de (4.1) recoge el caso de que en un intervalo dt no ocurra siniestro, lo que ocurre con probabilidad $(1 - \lambda \cdot dt)$. Si no ocurre siniestro, las reservas iniciales u se ven incrementadas en la intensidad de prima c por el espacio de tiempo transcurrido dt . Por tanto, la primera variable de la que dependerá ϕ pasará a ser $u + c \cdot dt$, mientras que la segunda pasará a ser el nuevo nivel de la barrera en dt , es decir $b + a \cdot dt$.

El segundo sumando de (4.1) está referido al caso en que en ese diferencial dt ocurra siniestro (situación que se da con probabilidad $\lambda \cdot dt$). Ahora las reservas iniciales, u , disminuyen en la cuantía del siniestro z .

Se resume a continuación el proceso seguido por Gerber (1981) para hallar la ecuación integro-diferencial para el cálculo de $\phi(u, b)$.

Operando sobre (4.1) y teniendo en cuenta la diferenciabilidad de funciones¹, obtenemos

$$\phi(u + c \, dt, b + a \, dt) = \phi(u, b) + c \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} \quad (4.2)$$

Sustituyendo (4.2) en (4.1)

$$\begin{aligned} \phi(u, b) &= (1 - \lambda \, dt) \left[\phi(u, b) + c \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} \right] + \\ &+ \lambda \, dt \int_0^{u+c \, dt} \phi(u + c \, dt - z, b) \, dF(z) \end{aligned}$$

de donde, operando

$$\begin{aligned} \phi(u, b) &= \phi(u, b) - \lambda \, dt \, \phi(u, b) + c \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} - \\ &- \lambda \, dt \, c \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} - \\ &- \lambda \, dt \, a \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \lambda \, dt \int_0^{u+c \, dt} \phi(u - z, b) \, dF(z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Simplificando (4.3)

$$\begin{aligned} \lambda \, dt \, \phi(u, b) &= c \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} - \lambda \, dt \, c \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + \\ &+ a \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} - \lambda \, dt \, a \, dt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \\ &+ \lambda \, dt \int_0^{u+c \, dt} \phi(u + c \, dt - z, b) \, dF(z) \end{aligned}$$

1

Si f es diferenciable en x_0

⇕

$$f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \Delta \vec{x}_0$$

Si la función depende de dos variables, x e y , entonces

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Propiedad que hemos aplicado para llegar a la expresión (4.2), haciendo

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u \\ \Delta x = c \, dt \\ y = b \\ \Delta y = a \, dt \end{array} \right.$$

y al dividir entre dt :

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \phi(u, b) &= c \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} - \lambda \cdot c \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + \\ &+ a \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} - \lambda \cdot a \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \\ &+ \lambda \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi(u + c \cdot dt - z, b) \cdot dF(z)\end{aligned}$$

Al hacer $dt \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \phi(u, b) &= c \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u - z, b) \cdot dF(z) \\ c \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} - \lambda \cdot \phi(u, b) + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u - z, b) \cdot dF(z) &= 0 \quad (4.4)\end{aligned}$$

Siendo (4.4) la ecuación integro-diferencial que nos da la probabilidad de supervivencia cuando el proceso se modifica con una barrera de dividendos lineal.

4.2.1 Planteamiento alternativo

Como se ha comentado en la introducción del capítulo, la probabilidad de supervivencia sin barrera, puede obtenerse con el planteamiento basado en las ecuaciones de renovación, cuya ecuación de partida en el modelo clásico es,

$$\phi(u) = E[\phi(u + c \cdot t - z)] = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - z) \cdot dF(z) \cdot dt$$

A continuación utilizamos este enfoque para la obtención de la probabilidad de supervivencia con barrera lineal de forma análoga al desarrollo alternativo para el cálculo del valor actual de los dividendos con barrera constante.

Partimos de la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned}\phi(u, b) &= \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ &+ \int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} \phi(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt\end{aligned} \quad (4.5)$$

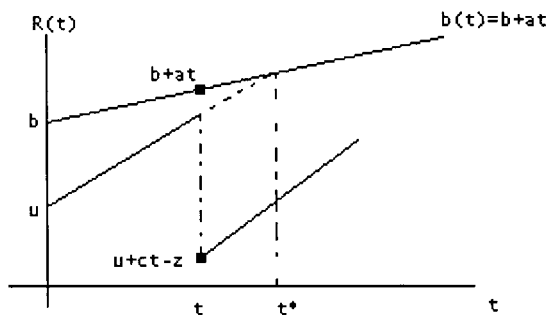
siendo t^* el punto de corte entre el proceso de las reservas y la barrera de dividendos lineal suponiendo que no se produzca siniestro. Es decir, a partir de la siguiente igualdad se halla t^*

$$u + c \cdot t = b + a \cdot t$$

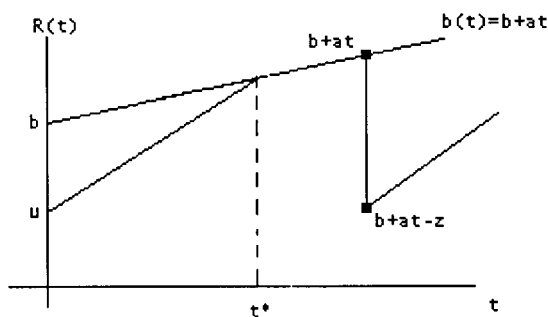
siendo su valor

$$t^* = \frac{b-u}{c-a}$$

La primera de las integrales dobles de (4.5) corresponde al caso en que el primer siniestro ocurra antes del punto de corte t^* . En este caso no se ha alcanzado la barrera, y por tanto el nuevo nivel de reservas es $u + c \cdot t - z$, siendo el nivel de la barrera en ese instante $b + a \cdot t$. La idea gráfica es,



El segundo sumando de (4.5) indica el caso en que el primer siniestro se produzca una vez que las reservas hayan alcanzado la barrera (es decir para $t > t^*$). El nuevo nivel de reservas es $b + a \cdot t - z$, mientras que el nivel de la barrera de dividendos es $b + a \cdot t$. Gráficamente,



Sobre la expresión (4.5) realizamos a continuación una serie de operaciones para llegar a la ecuación integro-diferencial que nos permita calcular la probabilidad de supervivencia.

Para hallar la expresión de la parcial de $\phi(u, b)$ respecto a u , hacemos el cambio de variable $u + c \cdot t = x$ sobre el primer sumando de la expresión (4.5).

Por tanto $t = \frac{x - u}{c}$

Para aplicar el cambio de variable, sabemos que $c \cdot dt = dx$, y que los intervalos de la integral quedan,

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow x = u \\ t = t^* \rightarrow x = u + c \cdot t^* = x^* \end{cases} \quad (4.6)$$

siendo el valor de x^*

$$x^* = u + c \cdot t^* = \frac{c \cdot b - a \cdot u}{c - a}$$

Aplicando el cambio de variable al primer sumando de (4.5) se obtiene

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x - u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (4.7)$$

Al derivar (4.7) respecto a u llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x - u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[\int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x - u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

siendo la solución de la parcial que aparece en el último sumando de (4.8)

$$\begin{aligned} & \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x - u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\partial x^*}{\partial u} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{c}} \int_0^{x^*} \phi\left(x^* - z, b + a \cdot \frac{x^* - u}{c}\right) \cdot dF(z) - \\ & - e^{-\frac{\lambda u}{c}} \int_0^u \phi(u - z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde

$$\frac{\partial x^*}{\partial u} = -\frac{a}{c - a}$$

Agrupando (4.8) y (4.9), llegamos a la parcial respecto a u del primer

sumando de (4.5)

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{a}{a-c} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{c}} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, b+a \cdot \frac{x^*-u}{c}) \cdot dF(z) - \\
& - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u-z, b) \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Trabajamos a continuación con el segundo sumando de (4.5). Se hace el cambio de variable $u + c \cdot t = x$, quedando los límites de la integral

$$\begin{cases} t = t^* \rightarrow x = x^* \\ t = \infty \rightarrow x = \infty \end{cases}$$

Así podemos escribir el segundo sumando de (4.5) como

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{b+a \cdot \frac{x-u}{c}} \phi\left(b+a \cdot \frac{x-u}{c} - z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx \tag{4.11}$$

Al derivar (4.11) respecto a u :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{b+a \cdot \frac{x-u}{c}} \phi\left(b+a \cdot \frac{x-u}{c} - z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[\int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{b+a \cdot \frac{x-u}{c}} \phi\left(b+a \cdot \frac{x-u}{c} - z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx \right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Para resolver la parcial respecto a u que aparece en el segundo sumando de (4.12), deshacemos el cambio, pudiendo escribirse como:

$$\begin{aligned}
& c \cdot \left(\frac{-\lambda}{c}\right) \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+a t} \phi(b+a \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
& + c \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+a t} \phi(b+a \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{4.13}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+a t} \phi(b+a \cdot t-z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt = \\ = -\frac{1}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por tanto, la parcial respecto a u del segundo sumando de (4.5) a partir de (4.12), (4.13) y (4.14), es

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-\lambda x}{c}} \int_0^{b+a \frac{x-u}{c}} \phi\left(b+a \cdot \frac{x-u}{c}-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot c \cdot \left(\frac{-\lambda}{c}\right) \cdot e^{\frac{-\lambda u}{c}} \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+a t} \phi(b+a \cdot t-z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot c \cdot e^{\frac{-\lambda u}{c}} \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.15)$$

A partir de (4.10) y (4.15) obtenemos la parcial respecto a u de la expresión (4.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{\frac{-\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{\frac{-\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{a}{a-c} \cdot e^{\frac{-\lambda x^*}{c}} \cdot \int_0^{x^*} \phi\left(x^*-z, b+a \cdot \frac{x^*-u}{c}\right) \cdot dF(z) - \\ - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z, b) \cdot dF(z) + \\ + \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{b+a \frac{x-u}{c}} \phi\left(b+a \cdot \frac{x-u}{c}-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ + \frac{\lambda}{c} \cdot c \cdot \left(\frac{-\lambda}{c}\right) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+a t} \phi(b+a \cdot t-z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ + \frac{\lambda}{c} \cdot c \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para simplificar (4.16), podemos observar que el primer y el quinto sumando, son respectivamente el primer y segundo sumando de (4.5) después de realizar el cambio de variable. Por tanto, pueden ser sustituidos por $\frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u, b)$, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u, b) &= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{\frac{-\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{b+a \cdot \frac{x-u}{c}} \phi(b+a \cdot \frac{x-u}{c} - z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si agrupamos el tercer y el séptimo sumando de (4.16) llegamos a,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{a}{a-c} \cdot e^{\frac{-\lambda x^*}{c}} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, b+a \cdot \frac{x^*-u}{c}) \cdot dF(z) + \\ + \frac{\lambda}{c} \cdot c \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.18)$$

y sacando factor común en (4.18), se obtiene,

$$\frac{\lambda}{c} \cdot \left[\frac{a}{a-c} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{c} + \frac{\lambda u}{c}} - \frac{c}{a-c} \cdot e^{-\lambda t^*} \right] \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \quad (4.19)$$

La función exponencial $e^{-\frac{\lambda x^*}{c} + \frac{\lambda u}{c}}$ que aparece en (4.19), sabiendo que $x^* = u + c \cdot t^*$, la podemos transformar en $e^{-\frac{\lambda c t^*}{c}} = e^{-\lambda t^*}$, por tanto podemos escribir (4.19) como

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z)$$

Así, teniendo en cuenta (4.17) y (4.19), la expresión (4.16) toma la forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u, b) + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{\frac{-\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot (-\lambda) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} \phi(b+a \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u-z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Se presenta a continuación el desarrollo para encontrar la parcial de $\phi(u, b)$ respecto a b , de forma similar al proceso que hemos realizado para hallar la parcial de $\phi(u, b)$ respecto a u ,

Trabajamos con el primer sumando de (4.5). Se hace el cambio de variable $b + a \cdot t = x$, de donde $a \cdot dt = dx$.

Los nuevos límites de la integral son

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow x = b \\ t = t^* \rightarrow x = b + at^* = x^* \end{cases}$$

por tanto el primer sumando de (4.5), una vez realizado el cambio de variable, se puede escribir como,

$$\int_b^{x^*} e^{-\lambda \frac{x-b}{a}} \cdot \int_0^{u+c \frac{x-b}{a}} \phi\left(u + c \cdot \frac{x-b}{a} - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot \frac{dx}{a}$$

o de forma equivalente,

$$\frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_b^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^{u+c \frac{x-b}{a}} \phi\left(u + c \cdot \frac{x-b}{a} - z, x\right) dF(z) \cdot dx \quad (4.21)$$

Al derivar (4.21) respecto a b ,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_b^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^{u+c \frac{x-b}{a}} \phi\left(u + c \cdot \frac{x-b}{a} - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_b^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^{u+c \frac{x-b}{a}} \phi\left(u + c \cdot \frac{x-b}{a} - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para resolver la parcial que aparece en el segundo sumando de (4.22), deshacemos el cambio y resolvemos la parcial obteniéndose

$$\begin{aligned} & a \cdot \frac{-\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+c t} \phi(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + a \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+c t} \phi(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (4.23)$$

siendo la solución de la parcial respecto a b que aparece en (4.23)

$$\int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} \phi(u+c \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \frac{\partial t^*}{\partial b} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{u+ct^*} \phi(u+c \cdot t^* - z, b+a \cdot t^*) \cdot dF(z) \cdot dt \quad (4.24)$$

donde $\frac{\partial t^*}{\partial b} = \frac{1}{c-a}$.

Por tanto agrupando (4.22), (4.23) y (4.24), la parcial respecto a b del primer sumando de la ecuación (4.5) es,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{a^2} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_b^{x^*} e^{\frac{-\lambda x}{a}} \cdot \int_0^{u+c \frac{x-b}{a}} \phi(u+c \cdot \frac{x-b}{a} - z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot a \cdot \frac{-\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+ct} \phi(u+c \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot a \cdot e^{\frac{-\lambda b}{a}} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} \phi(u+c \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot a \cdot e^{\frac{-\lambda b}{a}} \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

Calculamos a continuación la parcial respecto a b del segundo sumando de (4.5). Hacemos el cambio de variable $b+a \cdot t = x$, quedando los extremos de la integral:

$$\begin{cases} t = t^* \rightarrow x = b + a \cdot t^* = x^* \\ t = \infty \rightarrow x = \infty \end{cases}$$

por tanto el primer sumando de (4.5) toma la forma

$$\frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-\lambda x}{a}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (4.26)$$

y al derivar (4.26) respecto a b :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-\lambda x}{a}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \left[\int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-\lambda x}{a}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se resuelve la parcial del segundo sumando de (4.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \left[\int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx \right] = \\ = -\frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{a}} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.28)$$

siendo:

$$\frac{\partial x^*}{\partial b} = \left\{ x^* = b + a \cdot t^* = b + a \cdot \frac{b-u}{c-a} = \frac{b \cdot c - a \cdot u}{c-a} \right\} = \frac{c}{c-a} \quad (4.29)$$

Por tanto, la parcial respecto a b del segundo sumando de (4.5) a partir de (4.27), (4.28) y (4.29) es,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx - \\ - \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{a}} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Agrupando (4.25) y (4.30) obtenemos la parcial de $\phi(u, b)$ respecto a b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} = \frac{\lambda^2}{a^2} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_b^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^{u+c \frac{x-b}{a}} \phi(u+c \frac{x-b}{a} - z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ + \frac{\lambda}{a} \cdot a \cdot \frac{-\lambda}{a} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+ct} \phi(u+c \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ + \frac{\lambda}{a} \cdot a \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} \phi(u+c \cdot t - z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ + \frac{\lambda}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{u+ct^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ + \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx - \\ - \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{a}} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{a}} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Podemos observar que el primer y quinto sumando de (4.31) son, respectivamente, el segundo y primer sumando de (4.5) tras el cambio de variable, es

decir:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} \cdot \phi(u, b) &= \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda x}{a}} \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ &+ \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot \int_{x^*}^\infty e^{-\frac{\lambda x}{a}} \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned}$$

Y agrupando el cuarto y sexto sumando de (4.31)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{u+ct^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \cdot dt - \\ - \frac{\lambda}{a} \cdot e^{\frac{\lambda b}{a}} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{a}} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.32)$$

pudiendo escribirse (4.32) como:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} \cdot \left[\frac{a}{c-a} \cdot e^{-\lambda t^*} - \frac{c}{c-a} \cdot e^{-\frac{\lambda \cdot b}{a} - \frac{\lambda \cdot x^*}{a}} \right] \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) = \\ = \left\{ \begin{array}{l} b - x^* = b - \frac{b \cdot c - a \cdot u}{c-a} = \frac{u-b}{c-a} = -t^* \\ \frac{a}{c-a} - \frac{c}{c-a} = -1 \end{array} \right\} = -\frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\lambda t^*} \end{aligned}$$

Por tanto podemos simplificar (4.31) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} &= \frac{\lambda}{a} \cdot \phi(u, b) - \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ &+ \lambda \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, b+at) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ &+ \frac{\lambda}{a} \cdot a \cdot \left(-\frac{\lambda}{a} \right) \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, b+at) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (4.33)$$

Agrupando las expresiones que hemos hallado para la parcial de la probabilidad de supervivencia respecto a u , definida en la expresión (4.20), y la parcial de la probabilidad de supervivencia respecto a b hallada en la expresión (4.33),

llegamos a:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} &= \phi(u, b) - e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \cdot ds + \\
&+ a \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} \phi(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt - \\
&- \lambda \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+ct} \phi(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
&+ \phi(u, b) + e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) + \\
&+ e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx - \\
&- \int_0^u \phi(u - z, b) \cdot dF(z) - \\
&- \lambda \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+at} \phi(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Podemos observar que los sumandos segundo y sexto de (4.34) se anulan. Lo mismo sucede con los sumandos cuarto y noveno que anulan una de las $\phi(u, b)$.

Por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} &= \phi(u, b) - \int_0^u \phi(u - z, b) \cdot dF(z) + \\
&+ a \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} \phi(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt - \\
&+ e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Comprobamos a continuación que los dos últimos sumandos de (4.35) también se anulan. Si en el primero de ellos deshacemos el cambio, llegamos a:

$$\begin{aligned}
a \cdot \int_u^{x^*} e^{-\lambda \frac{x-u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot \frac{dx}{c} + \\
+ e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot dx
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Al sacar factor común en (4.36)

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\lambda \frac{x}{c}} \cdot \left[a \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \cdot \frac{1}{c} + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) \right] \cdot dx
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Para simplificar (4.37) se considera $\phi(f_1, f_2)$, lo que nos permite interpretar

el corchete que aparece en (4.37) como:

$$\frac{a}{c} \cdot \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial b} \cdot dF(z) + \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot dF(z) \quad (4.38)$$

y sabiendo que

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial b} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{a}{c} \end{cases}$$

la expresión (4.38) toma la forma

$$\frac{a}{c} \cdot \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot dF(z) + \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \left(-\frac{a}{c}\right) \cdot dF(z) = 0$$

Por tanto, podemos escribir (4.35) como

$$\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} = \phi(u, b) - \int_0^u \phi(u-z, b) \cdot dF(z) \quad (4.39)$$

expresión esta última coincidente con (4.4).

4.2.2 Caso exponencial

Asumimos que $F(z)$ sigue una distribución exponencial unitaria, es decir:

$$F(z) = 1 - e^{-z}, \quad z > 0 \quad (4.40)$$

Se plantea el cálculo de la ecuación en derivadas parciales que determina $\phi(u, b)$ a partir de la ecuación integro-diferencial (4.39), siguiendo el trabajo de Gerber (1981).

Al hacer el cambio de variable $x = u - z$ sobre (4.40), llegamos a

$$F(z) = 1 - e^{-z} \Rightarrow F(u-x) = 1 - e^{-(u-x)}$$

por tanto:

$$dF(u-x) = -e^{-(u-x)} \cdot dx \quad (4.41)$$

Sustituyendo (4.41) en (4.39), teniendo en cuenta que los nuevos extremos de la integral son

$$\begin{cases} z = 0 \Rightarrow x = u \\ z = u \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

llegamos a

$$\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} = \phi(u, b) - \int_0^u \phi(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx \quad (4.42)$$

Podemos escribir (4.42) como:

$$a \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + c \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} - \lambda \cdot \phi(u, b) + \lambda \cdot \int_0^u \phi(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \quad (4.43)$$

que al derivar respecto a u :

$$a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial^2 u} - \lambda \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^u \phi(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \quad (4.44)$$

La solución de la integral que aparece en (4.44) es,

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_0^u \phi(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = \phi(u, b) \cdot e^{-(u-u)} - \int_0^u \phi(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx \quad (4.45)$$

Al sustituir (4.45) en (4.44) se obtiene

$$a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial^2 u} - \lambda \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + \lambda \cdot \phi(u, b) - \lambda \cdot \int_0^u \phi(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0$$

de donde, despejando la integral

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \int_0^u \phi(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx &= a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + \\ &+ c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial^2 u} - \lambda \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + \lambda \cdot \phi(u, b) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Si sustituimos (4.46) en (4.43):

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + c \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} - \lambda \cdot \phi(u, b) + a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + \\ &+ c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial^2 u} - \lambda \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + \lambda \cdot \phi(u, b) \end{aligned}$$

que se puede simplificar como:

$$c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial u^2} + a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + (c - \lambda) \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} = 0 \quad (4.47)$$

ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

Las condiciones de contorno utilizadas para resolver (4.47) las encontramos en Gerber (1981). Las desarrollamos a continuación, obteniéndolas a partir de ecuaciones utilizadas en el desarrollo del método alternativo:

- $\left. \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} = 0$, la variación en la probabilidad de supervivencia ante cambios del nivel de las reservas, cuando éste coincide con el nivel de la barrera, es nula.

Para comprobar esta condición de contorno, partimos de la expresión (4.20) en la que, gracias al uso del planteamiento alternativo, se obtenía $\frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u}$, y hallamos el valor de esa parcial para $u = b$.

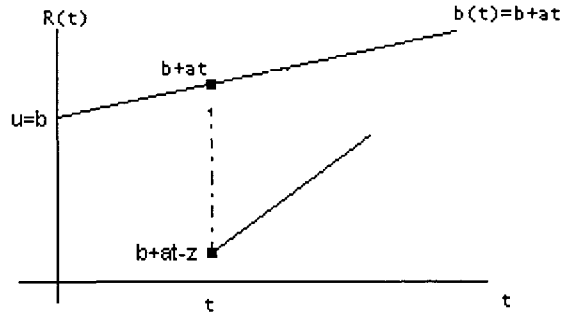
Sabemos que $t^* = \frac{b-u}{c-a}$ y $x^* = u + c \cdot t^*$. Cuando $u = b$, entonces $t^* = 0$ y $x^* = b$. Por tanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(b, b) + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^b \phi(b-z, b) \cdot dF(z) + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot (-\lambda) \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+at} \phi(b+at-z, b+at) \cdot dF(z) \cdot dt - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^b \phi(b-z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.48)$$

y al simplificar (4.48), llegamos a,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(b, b) - \\ &- \lambda \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{b+at} \phi(b+at-z, b+at) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (4.49)$$

Si nos planteamos el valor de $\phi(b, b)$ a partir del planteamiento alternativo, sabemos que $t^* = 0$. La idea gráfica es



por tanto, la ecuación que determina $\phi(b, b)$ es

$$\phi(b, b) = \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} \phi(b+a \cdot t-z, b+a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt \quad (4.50)$$

Al sustituir (4.50) en (4.49), queda demostrado que $\left. \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} = 0$.

- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b) = 1$ ($b \rightarrow \infty$). A medida que u tiende a ∞ (uniformemente con b , ya que $b \geq u$), la probabilidad de supervivencia tiende a 1.
- $\lim_{b \rightarrow \infty} \phi(u, b) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{c-\lambda}{c} \cdot u}$. Hacer tender el punto inicial de la barrera a infinito, es equivalente a hacer desaparecer la barrera. Por tanto, la probabilidad de supervivencia con barrera tenderá a la probabilidad de supervivencia sin barrera, que en el caso de cuantía de los siniestros exponencial toma esa expresión (Panjer and Willmot (1992)).

4.2.2.1 Solución de la probabilidad de supervivencia asumiendo distribución exponencial para la cuantía de los siniestros

La solución de la ecuación en derivadas parciales definida en (4.47) para la probabilidad de supervivencia, asumiendo distribución exponencial para la cuantía de los siniestros la encontramos en Gerber (1981).

Gerber obtiene un proceso recursivo como solución a la ecuación en derivadas parciales. La serie convergente que determina el valor de $\phi(u, b)$ es,

$$\phi(u, b) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{s^{(k)} b} \cdot \left(e^{r_1^{(k)} u} - \frac{1 + r_2^{(k)}}{1 + r_1^{(k)}} \cdot e^{r_2^{(k)} u} \right)$$

Los coeficientes que aparecen en (4.97) vienen fijados por el siguiente proceso recursivo,

$$\begin{cases} C_{k+1} = C_k \cdot \frac{r_2^{(k)}}{r_1^{(k+1)}} \cdot \frac{1 + r_2^{(k)}}{1 + r_1^{(k)}} \\ r_1^{(k)} = \left(\frac{c}{c-a} \right)^k - 1 \\ r_2^{(k)} = - \left(\frac{c-a}{c} \right)^k \cdot R - \left[1 - \left(\frac{c-a}{c} \right)^k \right] \\ s^{(k)} = -\frac{c}{a} \cdot \left[1 - \left(\frac{c-a}{c} \right)^k \right] \cdot R - \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{c}{c-a} \right)^k \cdot \left[1 - \left(\frac{c-a}{c} \right)^{2k} \right] \end{cases}$$

siendo los valores iniciales del proceso,

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ s^{(0)} &= r_1^{(0)} = 0 \\ r_2^{(0)} &= R \end{aligned}$$

4.2.3 Resultados numéricos

Se adjunta a continuación la solución de $\phi(u, b)$, mediante el uso de Mathcad, en el que se resuelve el proceso recursivo planteado por Gerber (1981). Los

parámetros utilizados son $\lambda = 1$, $c = 1.5$ y $a = 1.1$.

$u \backslash b$	0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1
0	0 2566	0 2768	0 2918	0 3028	0 3109	0 3169	0 3212	0 3244	0 3268	0 3285	0 3298
0 1		0 2798	0 2997	0 3144	0 3252	0 3332	0 339	0 3433	0 3465	0 3488	0 3505
0 2			0 3026	0 3221	0 3365	0 347	0 3548	0 3605	0 3647	0 3678	0 3701
0 3				0 3249	0 3439	0 358	0 3683	0 3758	0 3814	0 3855	0 3885
0 4					0 3467	0 3652	0 3788	0 3888	0 3962	0 4016	0 4056
0 5						0 3679	0 3858	0 3991	0 4088	0 4159	0 4212
0 6							0 3884	0 4058	0 4187	0 4281	0 435
0 7								0 4083	0 4252	0 4377	0 4468
0 8									0 4277	0 444	0 4561
0 9										0 4464	0 4622
1											0 4645

Tabla 4.1

Podemos observar en los resultados obtenidos que para un mismo valor de u , si incrementa el nivel inicial de la barrera b , la probabilidad de supervivencia incrementa, ya que eso retrasa el momento de ruina al permitir una mayor acumulación de reservas.

La misma tendencia se observa si para un mismo b se incrementa el valor de u : partimos de unas reservas iniciales más elevadas y por tanto la probabilidad de supervivencia es mayor.

Si nos fijamos en la diagonal de la Tabla 4.1, nos encontramos con situaciones en que $b - u$ es constante, pero a medida que nos desplazamos a la derecha, partimos de niveles más elevados, de ahí que la probabilidad de supervivencia sea mayor.

Otro de los resultados intuitivos es que a menor sea el valor de la pendiente de la barrera a , para un mismo b , la probabilidad de supervivencia es menor, ya que se permite una menor acumulación de las reservas para $t > 0$. A continuación

se adjuntan los resultados obtenidos para $a = 0.6$,

$b \backslash u$	0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1
0	0 0693	0 0834	0 0979	0 1124	0 1267	0 1406	0 154	0 1668	0 1789	0 1903	0 201
0 1		0 0838	0 0991	0 1146	0 13	0 1449	0 1549	0 1732	0 1864	0 1988	0 2105
0 2			0 0996	0 1159	0 1323	0 1483	0 1638	0 1787	0 1929	0 2063	0 219
0 3				0 1164	0 1337	0 1507	0 1672	0 1832	0 1984	0 2128	0 2264
0 4					0 1341	0 1521	0 1697	0 1867	0 2029	0 2183	0 2329
0 5						0 1526	0 1711	0 1891	0 2064	0 2229	0 2384
0 6							0 1716	0 1906	0 2089	0 2264	0 2429
0 7								0 1911	0 2104	0 2289	0 2464
0 8									0 2109	0 2304	0 2489
0 9										0 2309	0 2504
1											0 2509

Tabla 4.2

Si comparamos los resultados de la Tabla 4.1, calculada para $a = 1.1$, y los de la Tabla 4.2, calculada para $a = 0.6$, podemos observar que las probabilidades de supervivencia para una pendiente a menor, son más pequeñas.

Podemos comprobar numéricamente una de las condiciones de contorno comentadas en apartados anteriores. Sabemos que $\lim_{b \rightarrow \infty} \phi(u, b) = \phi(u)$. Si hacemos

$b = 100$, para valores de u comprendidos entre 0 y 1, se obtiene,

u	$\phi(u, 100)$
0	0.333
0.1	0.355
0.2	0.376
0.3	0.396
0.4	0.416
0.5	0.435
0.6	0.454
0.7	0.472
0.8	0.489
0.9	0.506
1	0.522

valores que coinciden con los resultados obtenidos al calcular la probabilidad de supervivencia en el modelo sin barrera, que tal y como comentamos en el capítulo 1, se calculaba a partir de la expresión,

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{c-\lambda}{c} \cdot u}$$

Hemos calculado también la probabilidad de supervivencia en el modelo modificado con la barrera lineal mediante un programa en Fortran que simula el proceso (Anexo I). Los resultados, lógicamente, coinciden con los obtenidos mediante el uso del proceso recursivo. El resultado de las simulaciones en el caso de la barrera lineal para $c = 1.5$ y $\lambda = 1$, para diferentes valores de la pendiente es,

- Para $a = 1.1$,

$u \backslash b$	0	0.3	0.5	1
0	0.256202	0.302632	0.316768	0.329914
0.3		0.324746	0.357508	0.389174
0.5			0.367498	0.421402
1				0.465062

- Para $a = 0.8$

$u \backslash b$	0	0.3	0.5	1
0	0.172760	0.226926	0.253740	0.295494
0.3		0.237762	0.277696	0.338576
0.5			0.282572	0.360874
1				0.385998

4.3 Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos $W(u, b)$

Se plantea en este apartado el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos suponiendo que el proceso no acabe en el momento de ruina, $W(u, b)$, en el modelo con una barrera de dividendos lineal, $b(t) = b + a \cdot t$.

En Gerber (1981) se halla $W(u, b)$ a partir de un planteamiento diferencial (basado en si en un dt ocurre o no siniestro), de forma similar a la planteada para el cálculo de $\phi(u, b)$.

La ecuación de partida es,

$$W(u, b) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot W(u + c \cdot dt, b + a \cdot dt) \cdot e^{-\delta \cdot dt} + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} W(u + c \cdot dt - z, b + a \cdot dt) \cdot dF(z) \quad (4.51)$$

ecuación integro-diferencial que determina la esperanza del valor actual de los dividendos.

El primer sumando de (4.51) representa la posibilidad de que en el intervalo dt no ocurra siniestro, por tanto, se deben actualizar los dividendos que se repartirán en el futuro, que vienen recogidos en $W(u + c \cdot dt, b + a \cdot dt)$.

El segundo sumando de (4.51) nos indica la posibilidad de que se produzca siniestro en el intervalo dt , en cuyo caso el nivel de las reservas se ve disminuido en la cuantía del siniestro z .

Por aproximación lineal, sabemos que:

$$1 - \lambda \cdot dt = e^{-\lambda dt}$$

y que

$$1 - \lambda \cdot dt - \delta \cdot dt = e^{-(\lambda+\delta) dt}$$

Debido a que la función $W(u, b)$ es diferenciable (Gerber (1981)), se cumple que,

$$W(u + c \cdot dt, b + a \cdot dt) = W(u, b) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + a \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} \quad (4.52)$$

Sustituyendo (4.52) en (4.51), se llega a:

$$W(u, b) = (1 - \lambda \cdot dt - \delta \cdot dt) \cdot \left(W(u, b) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + a \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} \right) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} W(u + c \cdot dt - z, b + a \cdot dt) \cdot dF(z)$$

expresión que al desarrollar se llega a,

$$\begin{aligned} W(u, b) = & W(u, b) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + a \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - \\ & - \lambda \cdot dt \cdot W(u, b) - \lambda \cdot dt \cdot c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} - \\ & - \lambda \cdot dt \cdot a \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - \delta \cdot dt \cdot W(u, b) - \\ & - \delta \cdot dt \cdot c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} - \delta \cdot dt \cdot a \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} + \\ & + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} W(u + c \cdot dt - z, b + a \cdot dt) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Al dividir (4.53) entre dt , y aplicando $\lim_{dt \rightarrow 0}$, se obtiene

$$\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot W(u, b) + \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) = 0$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned} 0 = & c \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - (\lambda + \delta) \cdot W(u, b) + \\ & + \lambda \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.54)$$

ecuación integro-diferencial que define $W(u, b)$.

Si comparamos la estructura de la expresión (4.54) con la hallada en el capítulo anterior para la barrera constante $b(t) = b$, que era

$$c \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} = (\lambda + \delta) \cdot W(u, b) - \lambda \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z)$$

se puede observar que haciendo $a = 0$ en (4.54), por tanto convirtiendo la barrera lineal en barrera constante al hacer que la pendiente sea cero, se llega a la ecuación integro-diferencial obtenida para el valor actual de los dividendos $W(u, b)$ para barrera constante.

4.3.1 Planteamiento alternativo

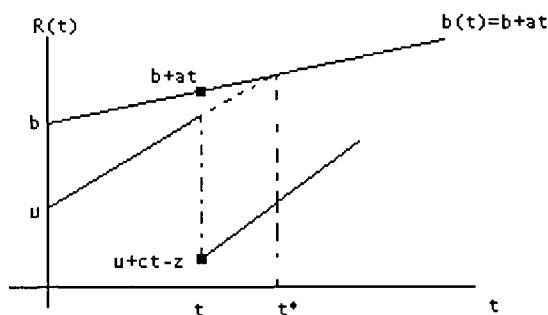
De forma similar al proceso para el cálculo de $W(u, b)$ en caso de barrera constante o en el cálculo de $\phi(u, b)$ para el caso de la barrera lineal, partimos de la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} W(u, b) = & \int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (c - a) \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt + \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{b+at} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (4.55)$$

El primer sumando de (4.55) nos indica la probabilidad de que el primer siniestro ocurra antes de que las reservas alcancen la barrera, es decir antes del punto de corte, t^* , entre $u + c \cdot t$ y $b + a \cdot t$,

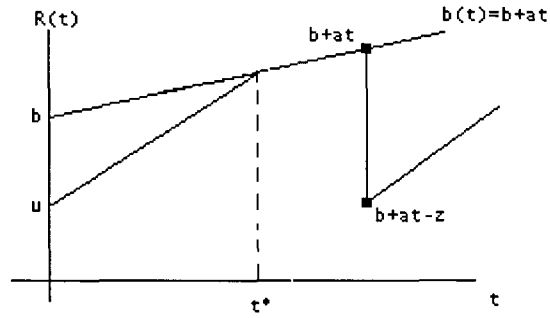
$$t^* = \frac{b - u}{c - a}$$

Gráficamente,



El segundo y tercer sumando de (4.55) representan el caso en que el primer siniestro ocurra después del momento en que las reservas hayan alcanzado la barrera, es decir en $t > t^*$. Por tanto, se tendrán que actualizar los dividendos

repartidos entre el momento de corte, t^* , y el de ocurrencia del siniestro, t , (actualización de un flujo constante de intensidad $(c - a)$), y el valor actual de los dividendos en el momento de ocurrencia, $W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t)$. La idea gráfica es,



Trabajamos a continuación sobre la expresión (4.55) para llegar a la ecuación integro-diferencial.

Nos planteamos para empezar el cálculo de la parcial de $W(u, b)$ respecto a b .

Para empezar se hace el cambio de variable $x = b + a \cdot t$ sobre el primer sumando de (4.55). Por tanto tendremos $dx = a \cdot dt$, y los límites de la integral quedan:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = b \\ t = t^* = \frac{b - u}{c - a} \Rightarrow x = b + a \cdot \frac{b - u}{c - a} = \frac{b \cdot c - a \cdot u}{c - a} = x^* \end{cases} \quad (4.56)$$

siendo $x^* = \frac{c \cdot b - u \cdot a}{c - a}$, es decir el nivel de las reservas en el punto de corte t^* .

Aplicando (4.56) al primer sumando de (4.55), se llega a

$$\frac{\lambda}{a} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{b}{a}} \cdot \int_b^{x^*} e^{-(\lambda + \delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^{u + \frac{c}{a}(x - b)} W\left(u + \frac{c}{a} \cdot (x - b) - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (4.57)$$

Al derivar la expresión (4.57) respecto a b , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda(\lambda+\delta)}{a^2} e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \int_b^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^{u+\frac{c}{a}(x-b)} W\left(u + \frac{c}{a}(x-b) - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{a} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \left[\int_b^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^{u+\frac{c}{a}(x-b)} W\left(u + \frac{c}{a}(x-b) - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot dx \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde la parcial que aparece en el último sumando de (4.58) se resuelve deshaciendo el cambio de variable, llegándose a:

$$\begin{aligned} & \frac{-(\lambda+\delta)}{a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot a \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda+\delta) t} \cdot \int_0^{u+ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + e^{-(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot a \cdot \frac{\partial}{\partial b} \left[\int_0^{t^*} e^{-(\lambda+\delta) t} \cdot \int_0^{u+ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

siendo la solución de la parcial respecto a b que aparece en (4.59),

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^*} e^{-(\lambda+\delta) t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \frac{1}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned}$$

Por tanto la derivada de la expresión (4.57), es decir, del primer sumando de (4.55), respecto a b , es

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{(\lambda+\delta)}{a} e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \int_b^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^{u+\frac{c}{a}(x-b)} W\left(u + \frac{c}{a}(x-b) - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot dx - \\ & - (\lambda + \delta) \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda+\delta) t} \cdot \int_0^{u+ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \frac{\lambda}{a} \cdot a \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda+\delta) t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \lambda \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Resolvemos a continuación la integral que aparece en el segundo sumando de (4.55), obteniéndose

$$\begin{aligned} \int_{t^*}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (c-a) \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt &= \\ = \left\{ t^* = \frac{b-u}{c-a} \right\} &= \frac{c-a}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b-u}{c-a}} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Al derivar (4.61) respecto a b :

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{c-a}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b-u}{c-a}} \right] = -e^{-(\lambda+\delta) \frac{b-u}{c-a}} \quad (4.62)$$

Trabajamos ahora con el tercer sumando de (4.55). Hacemos el cambio de variable $b+a \cdot t = x$, siendo $a \cdot dt = dx$, quedando los extremos de la integral,

$$\begin{cases} t = t^* \Rightarrow x = b + a \cdot t^* = x^* \\ t = \infty \Rightarrow x = \infty \end{cases}$$

pudiendo escribirse el tercer sumando de (4.55) como

$$\frac{\lambda}{a} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^x W(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (4.63)$$

Si derivamos respecto a b la expresión (4.63) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda+\delta}{a} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^x W(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ + \frac{\lambda}{a} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_{x^*}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^x W(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde la solución de la parcial que aparece en la expresión (4.64) es

$$-\frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{x^*}{a}} \cdot \int_0^{x^*} W(x^*-z, x^*) \cdot dF(z)$$

Por tanto, la parcial respecto a b del tercer sumando de (4.55) es

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda+\delta}{a} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^x W(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ - \frac{\lambda}{a} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{b}{a}} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{x^*}{a}} \cdot \int_0^{x^*} W(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Agrupando (4.60), (4.62) y (4.65) se obtiene la parcial respecto a b de la ecuación de partida (4.55),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(u, b)}{\partial b} &= \frac{\lambda(\lambda + \delta)}{a^2} \cdot \int_b^{x^*} e^{-(\lambda + \delta) \frac{x-b}{a}} \int_0^{u + \frac{c(x-b)}{a}} W\left(u + \frac{c(x-b)}{a} - z, x\right) \cdot dF(z) \cdot dx - \\
&- (\lambda + \delta) \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda + \delta) t} \int_0^{u + ct} W(u + c \cdot t, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
&+ \frac{\lambda}{a} \cdot a \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda + \delta) t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u + ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
&+ \lambda \cdot \frac{1}{c-a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
&- e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c-a}} + \\
&+ \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\lambda + \delta}{a} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{b}{a}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) \frac{x}{a}} \cdot \int_0^x W(x - z, x) \cdot dF(z) \cdot dx - \\
&- \frac{\lambda}{a} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{b}{a}} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{x^*}{a}} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

El primer y séptimo sumando de (4.66) se pueden agrupar, obteniéndose

$$\frac{\lambda + \delta}{a} \cdot \left[W(u, b) - \frac{c-a}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c-a}} \right]$$

y el último sumando de (4.66) puede simplificarse como:

$$-\frac{\lambda}{a} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z)$$

Por tanto la expresión (4.66) toma la forma :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - \frac{(\lambda + \delta)}{\lambda} \cdot W(u, b) &= -\frac{c}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c-a}} - \\
&- e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
&- (\lambda + \delta) \int_0^{t^*} e^{-(\lambda + \delta) t} \int_0^{u + ct} W(u + c \cdot t, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
&+ a \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda + \delta) t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u + ct} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Nos planteamos a continuación la parcial de $W(u, b)$ respecto a u .

Para ello hacemos el cambio de variable $u + c \cdot t = x$ sobre el primer sumando de la ecuación (4.55). Tendremos $c \cdot dt = dx$, y los extremos de la integral quedarán

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = u \\ t = t^* \Rightarrow x = u + c \cdot t^* = x^* \end{cases} \quad (4.68)$$

por tanto, a partir de (4.68), el primer sumando de (4.55) es

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{c}} \cdot \int_0^x W(x-z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (4.69)$$

Al derivar (4.69) respecto a u se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda+\delta}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{c}} \cdot \int_0^x W(x-z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{c}} \cdot \int_0^x W(x-z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (4.70)$$

y al resolver la parcial respecto a u que aparece en (4.70),

$$\begin{aligned} & \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x-z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + e^{-(\lambda+\delta) \frac{x^*}{c}} \cdot \frac{a}{a-c} \cdot \int_0^{x^*} W(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) - e^{\frac{-(\lambda+\delta)u}{c}} \cdot \int_0^u W(u-z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Por tanto a partir de (4.70) y (4.71), se obtiene la parcial respecto a u del primer sumando de (4.55):

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda+\delta}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{c}} \cdot \int_0^x W(x-z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta) \frac{x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x-z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b-u}{c-a}} \cdot \frac{a}{a-c} \cdot \int_0^{x^*} W(x^*-z, x^*) \cdot dF(z) - \\ & - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u W(u-z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Trabajamos a continuación con el segundo sumando de la expresión (4.55). Resolvemos la integral:

$$\int_{t^*}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (c-a) \cdot \int_{t^*}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt = \frac{c-a}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{b-u}{c-a}}$$

y al derivar respecto a u ,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{c-a}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{b-u}{c-a}} \right] = e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{b-u}{c-a}} \quad (4.73)$$

Sobre el tercer sumando de (4.55) se aplica el cambio de variable $u + c \cdot t = x$, quedando los intervalos de la integral

$$\begin{cases} t = t^* \Rightarrow x = u + c \cdot t^* = x^* = \frac{c \cdot b - a \cdot u}{c - a} \\ t = \infty \Rightarrow x = \infty \end{cases}$$

puediendo escribirse el tercer sumando de (4.55) como,

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{x}{c}} \int_0^{b+a \cdot \frac{x-u}{c}} W(b + a \cdot \frac{x-u}{c} - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (4.74)$$

Al derivar (4.74) respecto a u , llegamos a :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda \cdot (\lambda+\delta)}{c^2} e^{(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-(\lambda+\delta) \cdot x}{c}} \int_0^{b+\frac{a(x-u)}{c}} W(b + \frac{a(x-u)}{c} - z, b + \frac{a(x-u)}{c}) dF(z) dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} e^{(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \frac{\partial}{\partial u} \left[\int_{x^*}^{\infty} e^{\frac{-(\lambda+\delta)x}{c}} \int_0^{b+\frac{a(x-u)}{c}} W(b + \frac{a(x-u)}{c} - z, b + \frac{a(x-u)}{c}) dF(z) dx \right] \end{aligned} \quad (4.75)$$

Para resolver la parcial respecto a u que aparece en el segundo sumando de la expresión (4.75), deshacemos el cambio, llegando a la expresión:

$$\begin{aligned} & e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\ & - e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot (\lambda + \delta) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta) \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (4.76)$$

Por tanto, la parcial respecto a u del tercer sumando de (4.55), a partir de

(4.74) y (4.76), es:

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) \frac{x-u}{c}} \cdot \int_0^{b + \frac{a(x-u)}{c}} W(b + \frac{a(x-u)}{c} - z, b + \frac{a(x-u)}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) t^*} \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
& - \frac{\lambda}{c} \cdot (\lambda + \delta) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Al agrupar (4.72), (4.73) y (4.77) obtenemos la derivada respecto a u de la expresión (4.55),

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} = \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \int_0^{x^*} e^{-(\lambda + \delta) \frac{x}{c}} \cdot \int_0^x W(x - z, b + \frac{a(x-u)}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + e^{(\lambda + \delta) \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda + \delta) \frac{x-u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x - z, b + \frac{a(x-u)}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \frac{a}{a-c} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
& - \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) + \frac{c}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c-a}} + \\
& + \frac{\lambda + \delta}{c} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{(\lambda + \delta)(x-u)}{c}} \int_0^{b + \frac{a(x-u)}{c}} W(b + \frac{a(x-u)}{c} - z, b + \frac{a(x-u)}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + \frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
& - (\lambda + \delta) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{4.78}$$

La expresión (4.78) puede ser simplificada si tenemos en cuenta que el primer y sexto sumando pueden ser simplificados como:

$$\frac{\lambda + \delta}{c} \cdot \left[\frac{c}{\lambda} \cdot W(u, b) - \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{c-a}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \frac{b-u}{c-a}} \right]$$

y también podríamos agrupar los sumandos tercero y séptimo de (4.78), obteniéndose

$$\begin{aligned}
& e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) = \\
& = -e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \frac{a}{c-a} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) + \\
& + \frac{c}{c-a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z)
\end{aligned}$$

por tanto, podemos escribir (4.78) como

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot W(u, b) &= \frac{a}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{b-u}{c-a}} \\
&+ e^{(\lambda + \delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
&+ e^{-(\lambda + \delta) \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
&- \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) - \\
&- (\lambda + \delta) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Si agrupamos las parciales respecto a u y b , es decir, las expresiones (4.79) y (4.67), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - \frac{(\lambda + \delta)}{\lambda} \cdot W(u, b) + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot W(u, b) &= \\
-\frac{c}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{b-u}{c-a}} - e^{-(\lambda + \delta) \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
-(\lambda + \delta) \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \int_0^{u+c \cdot t} W(u + c \cdot t, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
+a \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+c \cdot t} W(u + c \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
+ e^{(\lambda + \delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
+ e^{-(\lambda + \delta) \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
- \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) + \frac{a}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{b-u}{c-a}} - \\
- (\lambda + \delta) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Se observa que el segundo y sexto sumando de (4.80) se anulan.

Si agrupamos el tercer y octavo sumando de (4.80) llegamos, a partir de (4.55), a

$$\begin{aligned}
-(\lambda + \delta) \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \int_0^{u+c \cdot t} W(u + c \cdot t, x) \cdot dF(z) \cdot dx - \\
-(\lambda + \delta) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt = \\
= -\frac{(\lambda + \delta)}{\lambda} \cdot W(u, b) + \frac{(c-a)}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{b-u}{c-a}}
\end{aligned}$$

que nos permite escribir (4.80) como:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u,b)}{\partial b} - \frac{(\lambda+\delta)}{\lambda} \cdot W(u,b) + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u,b)}{\partial u} = \\ & + a \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda+\delta)t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} W(u+ct-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta)\frac{x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & - \int_0^u W(u-z, b) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (4.81)$$

donde podemos observar además que los sumandos en los que aparecen parciales respecto a u y b , también se anulan:

$$\begin{aligned} & a \cdot \int_0^{t^*} e^{-(\lambda+\delta)t} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} W(u+ct-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta)\frac{x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (4.82)$$

Deshaciendo el cambio de variable en el primer sumando de (4.82) y sacando factor común, se obtiene

$$\begin{aligned} & e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta)\frac{x}{c}} \cdot \left[\frac{a}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \cdot \int_0^x W(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial u} \cdot \int_0^x W(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \right] \cdot dx \end{aligned} \quad (4.83)$$

Podemos observar que el último corchete de (4.83) se anula. Al considerar $W(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c})$ como $W(f_1, f_2)$, podemos interpretar:

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial b} W\left(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) = \frac{\partial W}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial b} = \frac{\partial W}{\partial f_2} \cdot 1$$

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial u} W\left(x-z, b+a \cdot \frac{x-u}{c}\right) \cdot dF(z) = \frac{\partial W}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial f_2} \cdot \left(-\frac{a}{c}\right)$$

por tanto

$$e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda+\delta)\frac{x}{c}} \cdot \left[\frac{a}{c} \cdot \frac{\partial W}{\partial f_2} - \frac{\partial W}{\partial f_2} \cdot \frac{a}{c} \right] \cdot dx = 0$$

Así la expresión (4.81) toma la forma:

$$\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u,b)}{\partial u} + \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u,b)}{\partial b} - \frac{\lambda+\delta}{\lambda} \cdot W(u,b) + \int_0^u W(u-z, b) \cdot dF(z) = 0 \quad (4.84)$$

coincidente a la expresión (4.54).

4.3.2 Caso exponencial

En el caso concreto de que $F(z)$ siga una distribución exponencial normalizada, siendo su función distribución

$$F(z) = 1 - e^{-z} \quad , z > 0 \quad (4.85)$$

se puede hallar la ecuación en derivadas parciales a partir de la ecuación integro-diferencial (4.84), (Gerber(1981)).

Al hacer un cambio de variable en (4.85) de la forma $x = u - z \Rightarrow z = u - x$, se llega a

$$F(z) = 1 - e^{-z} \Rightarrow F(u - x) = 1 - e^{-(u-x)}$$

por tanto:

$$dF(u - x) = -e^{-(u-x)} \cdot dx \quad (4.86)$$

Al sustituir (4.86) en (4.84),

$$\begin{aligned} \frac{a}{\lambda + \delta} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} &= \\ = W(u, b) - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^u W(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx & \end{aligned} \quad (4.87)$$

quedando los extremos de la integral:

$$\begin{cases} z = 0 \Rightarrow x = u \\ z = u \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Se puede escribir (4.87) como:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\lambda + \delta} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} - \\ - W(u, b) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^u W(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

que al derivar respecto a u :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\lambda + \delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial b \partial u} + \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial^2 u} - \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + \\ + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^u W(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_0^u W(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = W(u, b) \cdot e^{-(u-u)} - \int_0^u W(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx \quad (4.90)$$

Al sustituir (4.90) en (4.89), se obtiene:

$$0 = \frac{a}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial b \partial u} + \frac{c}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial^2 u} - \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot W(u, b) - \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot \int_0^u W(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx$$

de donde, al despejar

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot \int_0^u W(x, b) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = \frac{a}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial b \partial u} + \frac{c}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial^2 u} - \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot W(u, b) \quad (4.91)$$

Sustituyendo (4.91) en (4.88) :

$$0 = \frac{a}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} - W(u, b) + \frac{a}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial b \partial u} + \frac{c}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial^2 u} - \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot W(u, b)$$

expresión que se puede simplificar como:

$$0 = \frac{a}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} + \left(\frac{c}{\lambda+\delta} - 1 \right) \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + \frac{c}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial^2 u} + \frac{a}{\lambda+\delta} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial b \partial u} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta} - 1 \right) \cdot W(u, b)$$

llegando a:

$$c \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial u^2} + a \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial b \partial u} + (c - \lambda - \delta) \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - \delta \cdot W(u, b) = 0 \quad (4.92)$$

ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

Las condiciones de contorno utilizadas para resolver (4.92) vienen definidas en Gerber (1981). Las desarrollamos a continuación justificándolas a partir de las expresiones halladas en el planteamiento alternativo:

- $\left. \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} \right]_{u=b} = 1$. La parcial de $W(u, b)$ respecto al nivel inicial de las reservas u , para $u = b$ es uno.

Para demostrar esta condición de contorno usamos la expresión (4.79) hallada en el desarrollo del planteamiento alternativo, de donde, despejando $\frac{\partial W(u, b)}{\partial u}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot W(u, b) + \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{b-u}{c-a}} + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda + \delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x W(x - z, b + a \cdot \frac{x-u}{c}) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} W(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u W(u - z, b) \cdot dF(z) - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot (\lambda + \delta) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (4.93)$$

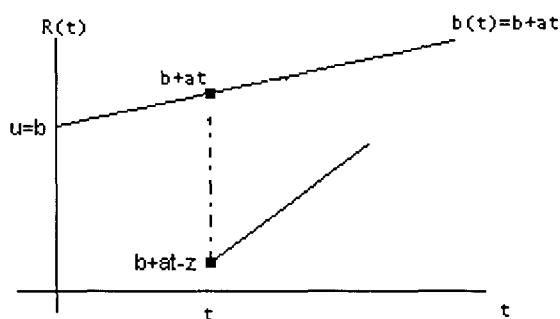
Al hacer $u = b$ en (4.93), sabiendo que $t^* = 0$ y $x^* = b$ cuando $u = b$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} &= \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot W(b, b) + \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^b W(b - z, b) \cdot dF(z) - \\ &- \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned}$$

expresión que podemos simplificar como

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} &= \frac{a}{c} + \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot [W(b, b) - \\ &- \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt] \end{aligned} \quad (4.94)$$

Calculamos a continuación, a partir del planteamiento alternativo, el valor de $W(b, b)$. La idea gráfica es,



- La ecuación de partida para hallar $W(b, b)$ es,

$$\begin{aligned}
 W(b, b) = & \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (c - a) \cdot \int_0^t e^{-\delta \cdot r} \cdot dr \cdot dt + \\
 & + \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot dF(z) \cdot dt
 \end{aligned}
 \tag{4.95}$$

El primer sumando de (4.95) indica la actualización de los dividendos repartidos, flujo de intensidad $(c - a)$, hasta el momento de ocurrencia del primer siniestro.

El segundo sumando de (4.95) es la actualización de los dividendos futuros en el momento de ocurrencia del siniestro que vienen determinados por $W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t)$.

Si resolvemos la integral que aparece en (4.95), se obtiene

$$W(b, b) = \frac{c - a}{\lambda + \delta} + \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot dF(z) \cdot dt
 \tag{4.96}$$

Al sustituir (4.96) en (4.94),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} &= \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot \left(\frac{c-a}{\lambda + \delta} + \right. \\ &+ \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-(\lambda + \delta)t} \cdot \int_0^{b+a \cdot t} W(b + a \cdot t - z, b + a \cdot t) \cdot dF(z) \cdot dt - \\ &- \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-(\lambda + \delta)t} \cdot \int_0^{b+at} W(b + at - z, b + at) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ &\left. + \frac{a}{c} \right) \end{aligned}$$

expresión que simplificada

$$\left. \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} = \frac{c-a}{c} + \frac{a}{c} = 1$$

quedando demostrada la condición de contorno $\left. \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} \right|_{u=b} = 1$

- $\lim_{b \rightarrow \infty} W(u, b) = 0$. Cuando b tiende a infinito, es equivalente a hacer desaparecer la barrera, por tanto, la esperanza del valor actual de los dividendos tiende a cero.
- $\lim_{u \rightarrow \infty} W(u, u + d) = V(d)$. Al hacer depender los dividendos repartidos de la diferencia entre las reservas y la barrera, $d = b - u$, y hacer tender u a infinito, estamos eliminando la probabilidad de ruina, lo que provoca que el cálculo de W y de V sea equivalente.

4.3.2.1 Solución del valor actual de los dividendos asumiendo distribución exponencial para la cuantía de los siniestros

De forma equivalente a la solución de la ecuación en derivadas parciales para el cálculo de $\phi(u, b)$, Gerber (1981) presenta la solución de la ecuación (4.92)

La serie convergente que determina el valor de $W(u, b)$ es de la forma,

$$W(u, b) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{s^{(k)} \cdot b} \cdot \left(e^{r_1^{(k)} \cdot u} - \frac{1 + r_2^{(k)}}{1 + r_1^{(k)}} \cdot e^{r_2^{(k)} \cdot u} \right) \quad (4.97)$$

siendo la expresión recurrente para los coeficientes,

$$C_{k+1} = C_1 \cdot \frac{r_2^{(k)}}{r_1^{(k+1)}} \cdot \frac{1 + r_2^{(k)}}{1 + r_1^{(1)}}$$

y para los valores de $r_1^{(k)}$, $r_2^{(k)}$ y $s^{(k)}$

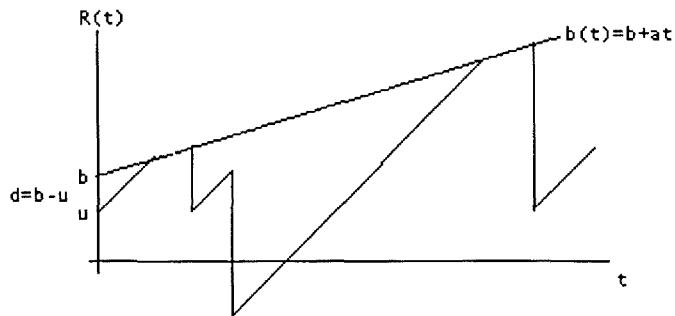
$$\begin{cases} r_1^{(k)} = \left(\frac{c-a}{c}\right)^k \cdot \rho + \left(\frac{c-a}{c}\right)^k - 1 \\ r_2^{(k)} = -\left(\frac{c-a}{c}\right)^k \cdot \frac{\delta}{c \cdot \rho} - \left[1 - \left(\frac{c-a}{c}\right)^{k+1}\right] \\ s^{(k)} = \frac{c \cdot r_1^{(k)} \cdot r_2^{(k)} + \delta}{a} \end{cases}$$

con los siguientes valores iniciales para la recurrencia,

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\rho} \\ s^{(0)} &= -\rho \\ r_1^{(0)} &= \rho \\ r_2^{(0)} &= -\frac{a \cdot \rho + \delta}{c \cdot \rho} \end{aligned}$$

4.4 Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos $V(d)$

Calculamos a continuación la esperanza del valor actual de los dividendos suponiendo que el proceso no acabe con la ruina, magnitud representada por $V(d)$, siendo d la diferencia entre las reservas y la barrera, $d = b - u$, para $d > 0$. La idea gráfica es,



Al aplicar el planteamiento diferencial, se parte de la expresión (Gerber 1981)

$$V(d) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot (1 - \delta \cdot dt) \cdot V(d - (c - a) \cdot dt) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^\infty V(d + z) \cdot dF(z) \quad (4.98)$$

El primer sumando de (4.98) indica el caso de que en un dt no ocurra siniestro lo que sucede con probabilidad $(1 - \lambda \cdot dt)$. El valor actual de los dividendos en ese dt dependerá de la diferencia inicial entre la barrera y las reservas, $d = b - u$, que ahora se verá disminuida en $c - a$.

El segundo sumando de (4.98) se refiere al caso en que ocurra siniestro en un dt , lo que sucede con probabilidad $\lambda \cdot dt$. En ese caso la distancia entre barrera y reservas se ve incrementada en la cuantía del siniestro.

Sobre la expresión (4.98) se sustituye $V(d - (c - a) \cdot dt)$ por $V(d) - V'(d) \cdot (c - a) \cdot dt$, a partir de la definición de derivada. Por tanto, (4.98) es,

$$V(d) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot (1 - \delta \cdot dt) \cdot [V(d) - V'(d) \cdot (c - a) \cdot dt] + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^\infty V(d + z) \cdot dF(z) \quad (4.99)$$

Al restar $V(d)$ en los dos sumandos de (4.99) se llega a:

$$0 = -(\lambda + \delta) \cdot V(d) + \delta \cdot \lambda \cdot dt \cdot V(d) - (c - a) \cdot V'(d) + (\lambda + \delta) \cdot (c - a) \cdot dt \cdot V'(d) + \lambda \cdot \int_0^\infty V(d + z) \cdot dF(z)$$

y haciendo $dt \rightarrow 0$

$$0 = -(\lambda + \delta) \cdot V(d) - (c - a) \cdot V'(d) + \lambda \cdot \int_0^\infty V(d + z) \cdot dF(z)$$

llegando a la siguiente ecuación integro-diferencial,

$$(c - a) \cdot V'(d) + (\lambda + \delta) \cdot V(d) - \lambda \cdot \int_0^\infty V(d + z) \cdot dF(z) = 0 \quad (4.100)$$

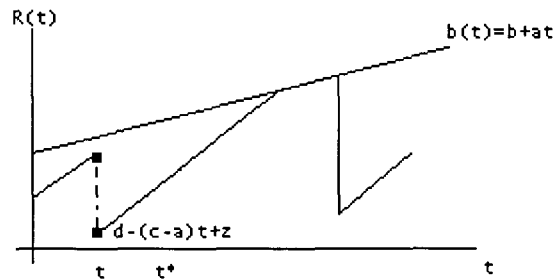
4.4.1 Planteamiento alternativo

Siguiendo la metodología del método alternativo usado anteriormente, podemos plantear la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 V(d) = & \int_0^{\frac{d}{c-a}} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^\infty V(d - (c-a)t + z) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt + \\
 & + \int_{\frac{d}{c-a}}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt + \\
 & + \int_{\frac{d}{c-a}}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (c-a) \cdot \int_{\frac{d}{c-a}}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

El primer sumando de (4.101) indica el caso en que el primer siniestro se produzca antes del punto de corte entre la barrera y el proceso de reservas, punto al que denominamos $t^* = \frac{d}{c-a}$.

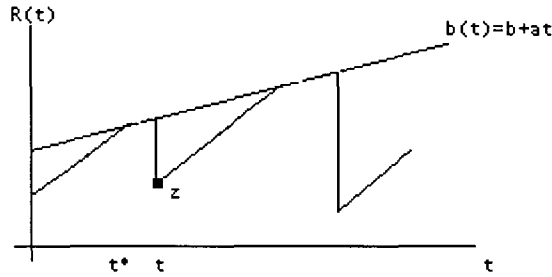
Gráficamente,



La diferencia, d , se ve disminuida por los ingresos en concepto de primas, e incrementada en la cuantía del siniestro, teniendo que actualizarse los dividendos futuros en el momento de ocurrencia del siniestro, $V(d - (c-a) \cdot t + z)$.

El segundo y tercer sumando de (4.101) representan el caso en que el primer siniestro se produzca una vez alcanzada la barrera. En este caso tendremos que actualizar el flujo constante de dividendos repartidos, que es la diferencia entre la intensidad de prima y la pendiente de la barrera $(c-a)$, y el valor actual de los dividendos en el momento t , en el que la diferencia es la cuantía del siniestro, $d = z$.

Gráficamente,



Hacemos el cambio de variable $x = d - (c - a) \cdot t$ en el primer sumando de (4.101), de donde,

$$dx = -(c - a) \cdot dt \rightarrow dt = -\frac{dx}{(c - a)} \quad (4.102)$$

quedando los extremos de la integral:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow x = d \\ t = \frac{d}{c - a} \rightarrow x = d - (c - a) \cdot \frac{d}{c - a} = 0 \end{cases} \quad (4.103)$$

A partir de (4.102) y (4.103), el primer sumando de (4.101) se puede escribir como

$$\frac{\lambda}{c - a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{d}{c - a}} \cdot \int_0^d e^{(\lambda + \delta) \cdot \frac{x}{c - a}} \cdot \int_0^\infty V(x + z) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (4.104)$$

Al derivar la expresión (4.104) respecto a d , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c - a} \cdot \frac{-(\lambda + \delta)}{(c - a)} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{d}{c - a}} \cdot \int_0^d e^{(\lambda + \delta) \cdot \frac{x}{c - a}} \cdot \int_0^\infty V(x + z) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c - a} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{d}{c - a}} \cdot \left[e^{(\lambda + \delta) \cdot \frac{d}{c - a}} \cdot \int_0^\infty V(x + z) \cdot dF(z) \cdot dx \right] \end{aligned}$$

y simplificando, obtenemos la parcial respecto a d del primer sumando de (4.101)

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c - a} \cdot \frac{-(\lambda + \delta)}{(c - a)} \cdot e^{-(\lambda + \delta) \cdot \frac{d}{c - a}} \cdot \int_0^d e^{(\lambda + \delta) \cdot \frac{x}{c - a}} \cdot \int_0^\infty V(x + z) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c - a} \cdot \int_0^\infty V(x + z) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (4.105)$$

Sobre el segundo sumando de (4.101) resolvemos la integral:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{d}{c-a}}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot e^{-\delta t} \cdot dF(z) \cdot dt = \\
 & = \lambda \cdot \int_{\frac{d}{c-a}}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) \cdot dt = \\
 & = \lambda \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) \cdot \left[-\frac{1}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta)t} \right]_{\frac{d}{c-a}}^{\infty} = \\
 & = \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z)
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

Al derivar (4.106) respecto a d llegamos a

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot \frac{-(\lambda+\delta)}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) = \\
 & = \frac{\lambda}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z)
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Trabajamos con el tercer sumando de (4.101). Resolviendo,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{d}{c-a}}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (c-a) \cdot \int_{\frac{d}{c-a}}^t e^{-\delta r} \cdot dr \cdot dt = \\
 & = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (c-a) \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+\delta} \right] = \frac{1}{\lambda+\delta} \cdot (c-a) \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}}
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

Y si derivamos (4.108) respecto a d , obtenemos la derivada del tercer sumando de (4.101) respecto a d ,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda+\delta} (c-a) e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \right)}{\partial d} = \frac{c-a}{\lambda+\delta} \cdot \frac{-(\lambda+\delta)}{c-a} e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} = \\
 & = -e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}}
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Por tanto, agrupando (4.104), (4.106) y (4.108), llegamos a,

$$\begin{aligned}
 V(d) & = \frac{\lambda}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^d e^{(\lambda+\delta) \frac{x}{c-a}} \cdot \int_0^{\infty} V(x+z) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
 & \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) + \frac{c-a}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}}
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Y para hallar la derivada de $V(d)$ respecto a d , agrupamos (4.105), (4.107)

y (4.109), obteniéndose

$$\begin{aligned}
 V'(d) &= \frac{\lambda}{c-a} \cdot \frac{-(\lambda+\delta)}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^d e^{(\lambda+\delta) \frac{x}{c-a}} \cdot \int_0^\infty V(x+z) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
 &+ \frac{\lambda}{c-a} \cdot \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z) - \\
 &- \frac{\lambda}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) - e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}}
 \end{aligned} \tag{4.111}$$

Si en las expresiones (4.110) y (4.111) despejamos el sumando en el que aparece la integral doble e igualamos, se obtiene

$$\begin{aligned}
 V'(d) &= -\frac{\lambda+\delta}{c-a} \cdot V(d) + \frac{\lambda+\delta}{c-a} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) + \\
 &+ \frac{\lambda+\delta}{c-a} \cdot \frac{c-a}{\lambda+\delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} + \frac{\lambda}{c-a} \cdot \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z) - \\
 &- \frac{\lambda}{c-a} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}} \cdot \int_0^\infty V(z) \cdot dF(z) - e^{-(\lambda+\delta) \frac{d}{c-a}}
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

donde podemos observar que los sumandos segundo y quinto se anulan, e igual ocurre con los sumandos tercero y sexto, por lo que (4.112) queda:

$$V'(d) = -\frac{\lambda+\delta}{c-a} \cdot V(d) + \frac{\lambda}{c-a} \cdot \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z)$$

o de forma equivalente,

$$(c-a) \cdot V'(d) + (\lambda+\delta) \cdot V(d) - \lambda \cdot \int_0^\infty V(d+z) \cdot dF(z) = 0 \tag{4.113}$$

ecuación diferencial coincidente con la (4.100).

4.4.2 Caso exponencial

En el caso concreto de función exponencial normalizada, la distribución para la cuantía de los siniestros es:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= 1 - e^{-z} \\
 dF(z) &= e^{-z} \cdot dz
 \end{aligned} \tag{4.114}$$

si sustituimos (4.114) en (4.113):

$$(c-a) \cdot V'(d) + (\lambda+\delta) \cdot V(d) - \lambda \cdot \int_0^\infty V(d+z) \cdot e^{-z} \cdot dz = 0 \tag{4.115}$$

Al derivar la expresión (4.115) respecto a d se llega a

$$(c - a) \cdot V''(d) + (\lambda + \delta) \cdot V'(d) - \lambda \cdot \int_0^{\infty} V'(d + z) \cdot e^{-z} \cdot dz = 0 \quad (4.116)$$

Se resuelve por partes la última integral de la expresión (4.116), haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} u = e^{-z} & du = -e^{-z} \cdot dz \\ dv = V'(d + z) \cdot dz & v = V(d + z) \end{cases}$$

y aplicándolo a la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} V'(d + z) \cdot e^{-z} \cdot dz &= e^{-z} \cdot V(d + z) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} V(d + z) \cdot e^{-z} \cdot dz = \\ &= -V(d) + \int_0^{\infty} V(d + z) \cdot e^{-z} \cdot dz \end{aligned} \quad (4.117)$$

Al sustituir (4.117) en (4.116):

$$\begin{aligned} (c - a) \cdot V''(d) + (\lambda + \delta) \cdot V'(d) + \\ + \lambda \cdot V(d) - \lambda \cdot \int_0^{\infty} V(d + z) \cdot e^{-z} \cdot dz = 0 \end{aligned} \quad (4.118)$$

Restando la expresión (4.118) de (4.115) llegamos a:

$$(c - a) \cdot V''(d) + (\lambda + \delta - c + a) \cdot V'(d) - \delta \cdot V(d) = 0 \quad (4.119)$$

ecuación diferencial con las siguientes condiciones de contorno definidas en Gerber (1981):

- $V'(0) = -1$.

Para comprobar esta condición de contorno, recurrimos a la expresión (4.111), obtenida gracias a la utilización del planteamiento alternativo, en la que se definía $V'(d)$.

Al hacer $d = 0$ en (4.111), llegamos a

$$\begin{aligned} V'(0) &= \frac{\lambda}{c-a} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) - \\ &\quad - \frac{\lambda}{c-a} \cdot \int_0^{\infty} V(z) \cdot dF(z) - 1 = -1 \end{aligned}$$

quedando comprobada la primera condición de contorno.

- $\lim_{d \rightarrow \infty} V(d) = 0$. Si la distancia entre la barrera y el nivel de las reservas tiende a infinito, los dividendos repartidos tienden a cero.

4.4.2.1 Solución del valor actual de los dividendos

Se plantea a continuación la solución de la ecuación diferencial definida en (4.119). Su ecuación característica es,

$$(c - a) \cdot r^2 + (\lambda + \delta - c + a) \cdot r - \delta = 0 \quad (4.120)$$

siendo sus raíces r_1 y r_2 , donde $r_1 < 0 < r_2$. Esta última relación es fácilmente demostrable, ya que el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado es el cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable al cuadrado. En (4.120) ese cociente es $\frac{-\delta}{(c-a)} < 0$, por tanto podemos asegurar la existencia de una raíz positiva y una negativa. La solución de $V(d)$ es de la forma

$$V(d) = C_1 \cdot e^{r_1 d} + C_2 \cdot e^{r_2 d} \quad (4.121)$$

siendo la derivada de (4.121),

$$V'(d) = C_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 d} + C_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 d} \quad (4.122)$$

Si aplicamos la primera de las condiciones de contorno definidas, $V'(0) = -1$, sobre (4.122), se obtiene

$$V'(0) = C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2 = -1$$

de donde, despejando C_1

$$C_1 = -\frac{1}{r_1} - \frac{r_2}{r_1} \cdot C_2 \quad (4.123)$$

Al aplicar la segunda condición de contorno, $\lim_{d \rightarrow \infty} V(d) = 0$, sobre (4.121)

$$\lim_{d \rightarrow \infty} V(d) = C_1 \cdot e^{r_1 \infty} + C_2 \cdot e^{r_2 \infty} = 0$$

como r_1 es la solución negativa:

$$C_2 \cdot e^{r_2 \infty} = 0$$

por tanto $C_2 = 0$.

Así, sustituyendo $C_2 = 0$ en (4.123), obtenemos $C_1 = -\frac{1}{r_1}$.

Por tanto, la solución de $V(d)$ es:

$$V(d) = -\frac{1}{r_1} \cdot e^{r_1 d}$$

4.5 Resultados numéricos

Se adjuntan a continuación los resultados obtenidos mediante el uso de Mathcad para las magnitudes que cuantifican los dividendos repartidos comentados en el presente capítulo, es decir $W(u, b)$ y $V(d)$.

4.5.1 Resultados para $W(u, b)$

Para el cálculo de $W(u, b)$ usamos el proceso recursivo planteado por Gerber (1981). Los datos que definen el proceso en este ejemplo son $\lambda = 1$, $c = 1.5$, $a = 1.1$ y $\delta = 0.03$, obteniéndose los siguientes resultados para diferentes valores de u y b ,

$u \backslash b$	0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1
0	0 5519	0 472	0 4022	0 3423	0 2911	0 2476	0 2105	0 179	0 1522	0 1295	0 1101
0 1		0 5656	0 483	0 4114	0 3501	0 2977	0 2532	0 2153	0 1831	0 1557	0 1324
0 2			0 5764	0 4918	0 4187	0 3562	0 303	0 2576	0 2191	0 1863	0 1584
0 3				0 5849	0 4987	0 4245	0 3611	0 3071	0 2611	0 2221	0 1888
0 4					0 5916	0 5041	0 429	0 3649	0 3013	0 2639	0 2244
0 5						0 5969	0 5084	0 4326	0 3679	0 3129	0 2661
0 6							0 6011	0 5118	0 4354	0 3703	0 3149
0 7								0 6044	0 5145	0 4376	0 3722
0 8									0 607	0 5166	0 4394
0 9										0 6091	0 5182
1											0 6107

Tabla 4.3

Podemos observar en la tabla 4.3 la tendencia de la esperanza del valor actual de los dividendos en función de cómo varia u y b : Para un mismo valor de u , si incrementa b , $W(u, b)$ disminuye, lo que se debe a que la distancia entre reservas y barrera incrementa y por tanto cuesta más alcanzar el nivel en el que se empiezan a repartir dividendos. Si mantenemos la barrera b , e incrementamos u , la esperanza del valor actual de los dividendos es mayor.

A continuación se listan los resultados obtenidos para un valor de a próximo a cero ($a = 0.007$), que sería equivalente a hacer tender la barrera lineal a la barrera constante. Los resultados obtenidos son,

$u \backslash b$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	1.4592	1.5015	1.5446	1.5885	1.6332	1.6786	1.7247	1.7715	1.8191	1.8672	1.916
0.1		1.6029	1.6489	1.6958	1.7435	1.792	1.8412	1.8912	1.9412	1.9934	2.0455
0.2			1.7504	1.8001	1.8507	1.9022	1.9545	2.0076	2.0614	2.116	2.1713
0.3				1.9015	1.9550	2.0094	2.0646	2.1207	2.1776	2.2353	2.2937
0.4					2.0564	2.1136	2.1717	2.2307	2.2906	2.3512	2.4127
0.5						2.215	2.2759	2.3377	2.4004	2.464	2.5284
0.6							2.3773	2.4418	2.5074	2.5738	2.6411
0.7								2.5432	2.6114	2.6806	2.7507
0.8									2.7128	2.7846	2.8574
0.9										2.886	2.9614
1											3.0627

Tabla 4.4

Si comparamos los resultados de la Tabla 4.4 con los obtenidos en la Tabla 3.1 del capítulo 3 en la que se calculaba $W(u, b)$ para un modelo modificado con una barrera constante, podemos observar que los resultados son muy parecidos. Así por ejemplo, si hacemos la diferencia entre algunos resultados de la Tabla 3.1 y la Tabla 4.4, obtenemos

$u \backslash b$	0	0.3	0.5	0.8	1
0	0.0029	0.0046	0.0061	0.0086	0.0044
0.3		0.0048	0.0065	0.0094	0.0055
0.5			0.0031	0.0098	0.0122
0.8				0.01	0.0127
1					0.0128

Los resultados obtenidos para la barrera lineal para una pendiente que tiende a cero, son ligeramente mayores que los resultados obtenidos para la barrera

constante.

Debido a no disponer de expresión analítica para la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, el análisis de sensibilidad realizado para la barrera constante mediante el uso de derivadas parciales no es posible. Por tanto, las ideas que se adjuntan a continuación, se basan en análisis numéricos realizados con el uso de programas en Mathcad.

Respecto a b , para un mismo valor de a , no existe un valor b^* que maximice $W(u, b)$. En la barrera constante, para un mayor b , a pesar de alejarse la barrera de las reservas, se produce el efecto compensador de retraso del momento de ruina, lo que provoca (durante un tramo) un incremento en los dividendos repartidos. En la barrera lineal, esta tendencia no se produce, lo que se debe a la pendiente a de la barrera. Salvo para valores de a cercanos a cero, en cuyo caso sí se puede comprobar numéricamente la existencia de un máximo respecto a b .

Así, por ejemplo, para $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$, $c = 1.5$ y un valor de la pendiente de $a = 0.007$ encontramos un valor de b que maximiza $W(u, b)$. En los datos que se adjuntan, es decir para los valores de u comprendidos entre 0 y 1, el valor de b que maximiza es común. Pero esta situación no es extrapolable, ya que sólo ocurre hasta valores de $u = 5$. A partir de ese valor de las reservas iniciales, el

óptimo se desplaza a valores mayores de b .

$u \backslash b$	0	2	4	6	7	7 5	7 6	7 7	7 8	9	10
0	1 459	2 429	3 43	4 048	4 166	4 183	<u>4 1841</u>	<u>4 1838</u>	4 183	4 113	3 996
0 1		2 594	3 662	4 322	4 448	4 467	<u>4 4673</u>	<u>4 4671</u>	4 466	4 391	4 267
0 2		2 753	3 887	4 589	4 722	4 742	<u>4 7427</u>	<u>4 7425</u>	4 741	4 662	4 53
0 3		2 908	4 107	4 848	4 989	5 01	<u>5 0106</u>	<u>5 0103</u>	5 009	4 925	4 786
0 4		3 059	4 32	5 1	5 248	5 27	<u>5 2712</u>	<u>5 2709</u>	5 269	5 181	5 035
0 5		3 206	4 527	5 345	5 501	5 524	<u>5 5247</u>	<u>5 5244</u>	5 523	5 431	5 277
0 6		3 349	4 729	5 584	5 746	5 771	<u>5 7716</u>	<u>5 7713</u>	5 77	5 674	5 513
0 7		3 488	4 926	5 816	5 986	6 011	<u>6 0119</u>	<u>6 0116</u>	6 01	5 91	5 743
0 8		3 624	5 118	6 043	6 219	6 245	<u>6 2461</u>	<u>6 2457</u>	6 244	6 14	5 966
0 9		3 756	5 304	6 263	6 446	6 473	<u>6 4742</u>	<u>6 4739</u>	6 472	6 364	6 184
1		3 884	5 486	6 478	6 667	6 696	<u>6 6966</u>	<u>6 6962</u>	6 695	6 583	6 397

Para los mismos valores de δ , λ y c que en el ejemplo anterior, y asumiendo $a = 0.05$, los resultados obtenidos son,

$u \backslash b$	0	0 5	0 8	0 9	1	1 1	1 2	1 3	1 4	2	4
0	1 7876	2 014	2 052	<u>2 0529</u>	<u>2 0486</u>	2 04	2 0279	2 0126	1 994	1 851	1 310
0 1		2 141	2 189	<u>2 1924</u>	<u>2 1894</u>	2 1817	2 1699	2 1546	2 136	1 986	1 407
0 2		2 263	2 322	<u>3 3273</u>	<u>2 326</u>	2 3194	2 3083	2 2933	2 274	2 119	1 503
0 3		2 379	2 450	2 4578	<u>2 4585</u>	<u>2 4534</u>	2 4432	2 4286	2 410	2 249	1 598
0 4		2 488	2 573	2 5839	<u>2 5869</u>	<u>2 5835</u>	2 5745	2 5606	2 542	2 377	1 692
0 5		2 591	2 691	2 7053	2 7111	<u>2 7098</u>	<u>2 7023</u>	2 6894	2 672	2 504	1 785
0 6			2 804	2 8222	<u>2 8311</u>	<u>2 8322</u>	2 8265	2 815	2 798	2 628	1 877
0 7			2 912	2 9345	2 9468	<u>2 9507</u>	<u>2 9472</u>	2 9373	2 921	2 751	1 968
0 8			3 015	3 0419	3 0582	<u>3 0653</u>	<u>3 0643</u>	3 0563	3 042	2 871	2 059
0 9				3 1444	3 1651	3 1758	<u>3 1778</u>	<u>3 172</u>	3 159	2 990	2 148
1					3 2674	3 2822	<u>3 2875</u>	<u>3 2844</u>	3 274	3 107	2 238

Se puede observar que dependiendo del valor de u , el valor de b que actúa como máximo está comprendido entre 0.9 y 1.2.

Respecto a a , en un principio, a mayor es la pendiente, mayor es la distancia entre las reservas y la barrera y por tanto más difícil es empezar a repartir dividendos. Pero esto provoca un efecto compensador, que es una mayor probabilidad de supervivencia, y por tanto se reparten dividendos durante más tiempo. Existe un valor de a que maximiza $W(u, b)$, a partir del cual a mayor a , disminuye $W(u, b)$.

En este tramo decreciente, el efecto compensador de la probabilidad de supervivencia no es suficiente. Se listan a continuación resultados para diferentes valores de a , manteniendo los demás parámetros constantes,

a	$u = 0$ $b = 0$	$u = 0.1$ $b = 0.1$	$u = 0.3$ $b = 0.5$	$u = 0.5$ $b = 0.8$
0.1	1.5061	1.6601	2.0786	2.5840
0.2	1.5957	1.7719	2.3545	2.9172
0.3	1.7278	1.9253	2.5689	<u>3.1309</u>
0.4	<u>1.815</u>	<u>2.0092</u>	<u>2.5895</u>	<u>3.0407</u>
0.5	<u>1.7876</u>	<u>1.9551</u>	<u>2.3792</u>	2.6916
0.6	1.647	1.7773	2.0324	2.2116
0.7	1.436	1.5299	1.6394	1.7172
0.8	1.119	1.2627	1.26	1.2736
0.9	0.9646	1.0055	0.9326	0.9024
1	0.747	0.7717	0.6536	0.6029
1.1	0.5519	0.5656	0.4245	0.3679

Se puede observar que existe un valor de a , a partir del cual la esperanza del valor actual de los dividendos empieza a disminuir.

4.5.2 Resultados para $V(d)$

Se listan a continuación los resultados para $\delta = 0.03$, $\lambda = 1$, $c = 1.5$ y $a = 1.1$ obtenidos mediante un programa de Mathcad.

u\b	0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1
0	0 6168	0 5245	0 446	0 3792	0 3225	0 2742	0 2332	0 1983	0 1686	0 1434	0 1219
0 1		0 6168	0 5245	0 446	0 3792	0 3225	0 2742	0 2332	0 1983	0 1686	0 1434
0 2			0 6168	0 5245	0 446	0 3792	0 3225	0 2742	0 2332	0 1983	0 1686
0 3				0 6168	0 5245	0 446	0 3792	0 3225	0 2742	0 2332	0 1983
0 4					0 6168	0 5245	0 446	0 3792	0 3225	0 2742	0 2332
0 5						0 6168	0 5245	0 446	0 3792	0 3225	0 2742
0 6							0 6168	0 5245	0 446	0 3792	0 3225
0 7								0 6168	0 5245	0 446	0 3792
0 8									0 6168	0 5245	0 446
0 9										0 6168	0 5245
1											0 6168

Podemos observar en los resultados que los valores de la diagonal coinciden, ya que son situaciones con d constante. Si nos desplazamos a la derecha en el cuadro, el valor de d incrementa con lo cual la esperanza del valor actual de los dividendos, $V(d)$, disminuye.

