

Política de dividendos en una cartera de seguros no vida: Un análisis desde la teoría colectiva del riesgo

Maite Mármol Jiménez

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

Política de dividendos en una cartera
de seguros no vida: Un análisis desde la
teoría colectiva del riesgo

Maite Mármol Jiménez

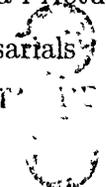
Tesis Doctoral presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales

Programa de doctorado: Métodos Matemáticos
en Economía Financiera. Bienio 1994-1996

Directores: Dra. M.Mercè Claramunt Bielsa y Dr. Antonio Alegre Escolano

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.

Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales

Universitat de Barcelona  UNIVERSITAT DE BARCELONA

Barcelona, 2003

Capítulo 5

Política de dividendos en caso continuo: Barrera parabólica

5.1 Introducción

Analizadas en los capítulos anteriores las barreras de dividendos existentes en la literatura actuarial (barrera constante y barrera lineal) introducimos en este capítulo una nueva política de dividendos definida por una barrera parabólica. La definición y aplicación de esta nueva barrera fue presentada, conjuntamente con algunos de los resultados obtenidos para la barrera lineal, en el Third International Congress on Insurance: Mathematics and Economics (IME, Londres 1999) bajo el título "Dividend policy and ruin probabilities" y en el Documento de trabajo "Políticas de dividendos y probabilidad de ruina" (Alegre, Claramunt y Marmol (2000)). Los resultados definitivos se encuentran publicados en Alegre, Claramunt y Marmol (2001).

Presentamos por primera vez una barrera de dividendos no lineal que ha sido utilizada con posterioridad en Albrecher and Kainhofer (2002) y Albrecher,

Kainhofer and Tichy (2002) desde un punto de vista numérico.

La expresión funcional de la barrera parabólica es,

$$b(t) = \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} \quad (5.1)$$

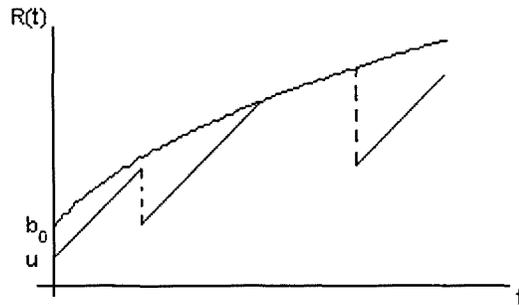
para $b_0 \geq u \geq 0$ y $\alpha > 0$.

El valor b_0 indica el valor inicial de la barrera, y α el parámetro que determina la tasa de crecimiento de la barrera.

Con esta nueva barrera, el diferencial de las reservas, $dR(t)$, toma la forma,

$$dR(t) = \begin{cases} c \cdot dt - dS(t) & \text{si } R(t) < b(t) \\ \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \cdot dt - dS(t) & \text{si } R(t) = b(t) \end{cases}$$

La idea gráfica de como afecta la barrera parabólica al proceso de las reservas es,



En los siguientes apartados nos planteamos el cálculo de la probabilidad de supervivencia y de la esperanza del valor actual de los dividendos mediante el uso del planteamiento diferencial y de renovación, obteniéndose una ecuación en derivadas parciales, cuya estructura comparamos con la obtenida en el caso de la barrera lineal. Finalmente, se obtienen resultados numéricos por simulación, y se comprueba que existen barreras de dividendos que, provocando la misma probabilidad de ruina, generan un reparto de dividendos diferentes.

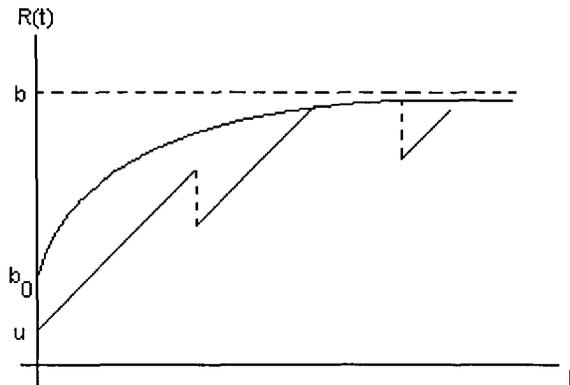
Precisamente, el hecho de que existan barreras de dividendos no lineales que en comparación con una barrera lineal, $b(t) = b + a \cdot t$, permiten obtener la misma

probabilidad de insolvencia pero generan un reparto de dividendos diferente (tanto en cuantía como en momento de reparto) fue una de las motivaciones básicas a la hora de plantear una barrera de dividendos diferente a las definidas hasta ahora en la literatura actuarial.

La primera política de dividendos no lineal que planteamos fue una barrera asintótica de la forma

$$b(t) = b + (b_0 - b) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

cuya idea gráfica es,



Esta barrera de dividendos cumple que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (b + (b_0 - b) \cdot e^{-\alpha \cdot t}) = b$$

es decir, que existe un tope en el crecimiento del nivel de las reservas que viene determinado por la asíntota horizontal b . Esta asíntota provoca que la probabilidad de ruina sea 1, teniendo sentido plantearse sólo la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos.

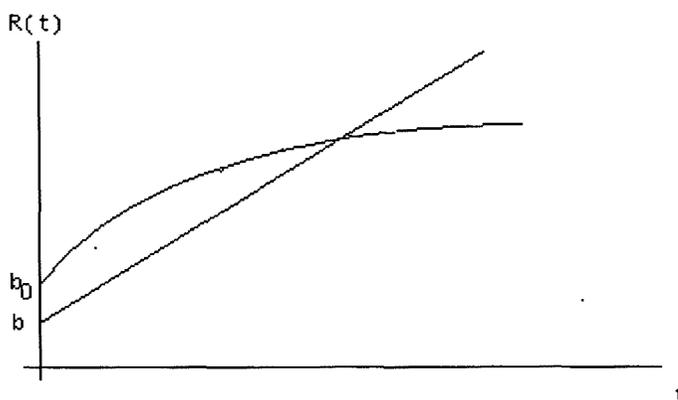
De ahí que consideremos más interesante el análisis de la barrera parabólica definida en (5.1), ya que no provoca la ruina segura y produce una esperanza del valor actual de los dividendos repartidos diferente.

Al analizar la pendiente de la barrera parabólica obtenemos,

$$b'(t) = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} > 0$$

$$b''(t) = -\frac{1}{(b_0^2 + \frac{t}{\alpha})^{\frac{3}{2}}} < 0$$

por tanto, al contrario de lo que sucede en la barrera lineal, $b(t) = b + a \cdot t$, la variación de la pendiente de la barrera es decreciente, con lo cual el nivel máximo que se permite acumular en un t determinado sufre una variación más suave que para una pendiente constante a . Gráficamente,



En el apartado 5.2 nos centramos en el análisis de la probabilidad de supervivencia, y en el 5.3 nos planteamos la cuantificación de los dividendos repartidos.

5.2 Probabilidad de supervivencia

5.2.1 Argumento diferencial

De forma análoga al caso de la barrera constante y la barrera lineal, aplicamos el argumento diferencial al cálculo de la probabilidad de supervivencia en un modelo modificado con barrera parabólica.

Partimos de la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \phi\left(u + c \cdot dt, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) + \\ & + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi\left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.2)$$

El primer sumando de (5.2) indica el caso que en un dt no ocurra siniestro (con probabilidad $1 - \lambda \cdot dt$), siendo el nuevo nivel de las reservas $u + c \cdot dt$, y el nivel de la barrera en dt , $\sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}$.

El segundo sumando de (5.2) recoge la probabilidad de que ocurra siniestro en un dt (con la probabilidad complementaria, $\lambda \cdot dt$). El nuevo nivel de las reservas es $u + c \cdot dt - z$, siendo el nivel de la barrera en dt , $\sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}$.

Podemos desarrollar el primer sumando de (5.2), teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} \phi\left(u + c \cdot dt, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) = & \phi(u, b_0) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \\ & + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Al sustituir (5.3) en (5.2) obtenemos,

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & (1 - \lambda \cdot dt) \cdot [\phi(u, b_0) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \\ & + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0}] + \\ & + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi\left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Desarrollando la expresión (5.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & \phi(u, b_0) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} - \\ & - \lambda \cdot dt \cdot \phi(u, b_0) - \lambda \cdot dt \cdot c \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \\ & - \lambda \cdot dt \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \\ & + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi\left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.5)$$

y simplificando (5.5),

$$\begin{aligned} \lambda \cdot dt \cdot \phi(u, b_0) = & c \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} - \\ & - \lambda \cdot (dt)^2 \cdot c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \lambda \cdot (dt)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \\ & + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi\left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Al dividir (5.6) entre dt llegamos a

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \phi(u, b_0) &= c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} - \\ &- \lambda \cdot dt \cdot c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \lambda \cdot dt \cdot \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \\ &+ \lambda \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} \phi \left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}} \right) \cdot dF(z) \end{aligned}$$

y haciendo $dt \rightarrow 0$

$$\lambda \cdot \phi(u, b_0) = c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u + c \cdot dt - z, b_0) \cdot dF(z)$$

expresión que podemos escribir como,

$$\begin{aligned} c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \alpha b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} - \lambda \cdot \phi(u, b_0) \\ + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u + c \cdot dt - z, b_0) \cdot dF(z) = 0 \end{aligned}$$

ecuación integro-diferencial que determina la probabilidad de supervivencia asumiendo barrera de dividendos parabólica.

5.2.2 Planteamiento alternativo

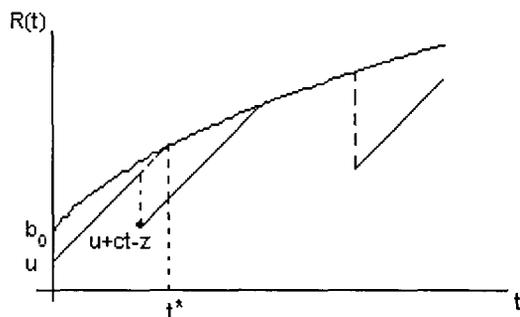
A continuación se plantea la probabilidad de supervivencia mediante el planteamiento alternativo ya utilizado en capítulos anteriores.

La ecuación de partida es,

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) &= \int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^{u+c \cdot t} \phi \left(u + c \cdot t - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} \right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ &+ \int_{t^*}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} \right) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

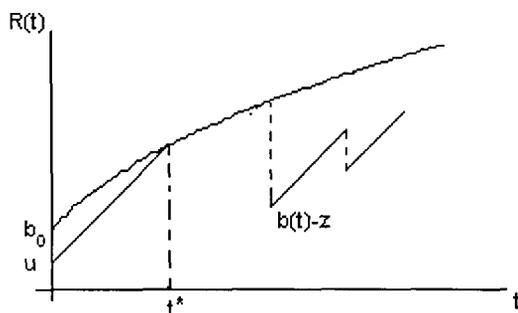
El primer sumando de (5.7) representa el caso en que el primer siniestro ocurra antes de que la función lineal que representa el proceso de las reservas, $u + c \cdot t$, corte a la función parabólica $\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}$ en un punto al que denominamos t^* . Por tanto, justo después de la ocurrencia del primer siniestro, el nuevo nivel de reservas es $u + c \cdot t - z$, y el nuevo nivel de la barrera es $\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}$.

Gráficamente:



El segundo sumando de (5.7) representa la situación complementaria, es decir, el caso en que el primer siniestro se produzca una vez que las reservas hayan alcanzado el nivel de la barrera parabólica, es decir en $t > t^*$. El nuevo nivel de reservas es $\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z$, y el nivel de la barrera es $\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}$.

Gráficamente:



A partir de (5.7), siguiendo un proceso similar al aplicado en el caso de la barrera lineal, obtendremos la correspondiente ecuación en derivadas parciales.

Planteamos primero el cálculo de la parcial de $\phi(u, b_0)$ respecto a u . Sobre el primer sumando de la ecuación (5.7) hacemos el cambio de variable $u + c \cdot t = x$, de donde $c \cdot dt = dx$. Los nuevos extremos de la integral son,

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow x = u \\ t = t^* \rightarrow x = u + c \cdot t^* = x^* \end{cases}$$

puediendo escribirse el primer sumando de (5.7) como,

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi \left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (5.8)$$

Al derivar (5.8) respecto a u , se obtiene,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi \left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi \left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

Se resuelve la parcial respecto a u que aparece en (5.9),

$$\begin{aligned} & \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi \left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\partial x^*}{\partial u} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{c}} \cdot \int_0^{x^*} \phi \left(x^* - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x^*-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) - \\ & - e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_0^u \phi \left(u - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{u-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Por tanto, agrupando las expresiones (5.9) y (5.10), se obtiene la parcial respecto a u del primer sumando de (5.7)

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \phi \left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi \left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial u} \cdot e^{-\frac{\lambda x^*}{c}} \cdot \int_0^{x^*} \phi \left(x^* - z, x^* \right) \cdot dF(z) - \\ & - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi \left(u - z, \sqrt{b_0^2} \right) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para hallar la parcial respecto a u del segundo sumando de (5.7), aplicamos también el cambio de variable $u + c \cdot t = x$, quedando los límites de la integral:

$$\begin{cases} t = t^* \rightarrow x = x^* \\ t = \infty \rightarrow x = \infty \end{cases}$$

llegando a:

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx \quad (5.12)$$

Al derivar (5.12) respecto a u , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para resolver la parcial respecto a u del segundo sumando de la expresión (5.13), deshacemos el cambio de variable y derivamos respecto a u :

$$\begin{aligned} & c \cdot \left(-\frac{\lambda}{c} \right) \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} \right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + c \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} \right) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde la parcial que aparece en el segundo sumando de (5.14) se resuelve como,

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial t^*}{\partial u} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t^*}{\alpha}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t^*}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t^*}{\alpha}} \right) \cdot dF(z) = \\ & = -\frac{\partial t^*}{\partial u} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por tanto, a partir de (5.13), (5.14) y (5.15) se halla la parcial respecto a u del segundo sumando de (5.7)

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot c \cdot \left(-\frac{\lambda}{c} \right) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi \left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} \right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot c \cdot e^{-\frac{\lambda u}{c}} \cdot \left(-\frac{\partial t^*}{\partial u} \right) \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Una vez obtenidas las parciales respecto a u de los dos sumandos de la

expresión (5.7), agrupando (5.11) y (5.16), se obtiene $\frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \int_0^{x^*} e^{-\frac{\lambda \cdot x}{c}} \cdot \int_0^x \phi\left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
&+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda \cdot x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
&+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial u} \cdot e^{-\frac{\lambda \cdot x^*}{c}} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
&- \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi\left(u - z, \sqrt{b_0^2}\right) \cdot dF(z) + \\
&+ \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda \cdot x}{c}} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
&+ \lambda \cdot \left(-\frac{\lambda}{c}\right) \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
&+ \lambda \cdot \left(-\frac{\partial t^*}{\partial u}\right) \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Podemos simplificar (5.17) teniendo en cuenta que la suma del primer sumando y el quinto sumando son los sumandos de (5.7) a los que se les ha aplicado el cambio de variable, es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u, b_0) &= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \int_0^{x^*} e^{-\frac{\lambda \cdot x}{c}} \cdot \int_0^x \phi\left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
&+ \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda \cdot x}{c}} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}\right) \cdot dF(z) \cdot dx
\end{aligned} \tag{5.18}$$

y al agrupar el tercer y el séptimo sumando de (5.17) se obtiene,

$$\left[-\lambda \cdot \frac{\partial t^*}{\partial u} \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \frac{-\lambda \cdot x^*}{c} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial u} \right] \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \tag{5.19}$$

y teniendo en cuenta las siguientes igualdades

$$\frac{\partial x^*}{\partial u} = 1 + c \cdot \frac{\partial t^*}{\partial u}$$

$$e^{\frac{\lambda \cdot u}{c} - \frac{-\lambda \cdot x^*}{c}} = e^{\frac{-\lambda \cdot c \cdot t^*}{c}} = e^{-\lambda \cdot t^*}$$

podemos escribir (5.19) como

$$\begin{aligned} & \left[-\lambda \cdot \frac{\partial t^*}{\partial u} \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \cdot \left(1 + c \cdot \frac{\partial t^*}{\partial u} \right) \right] \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) = \\ & = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \left[\frac{1}{c} \cdot \left(1 + c \cdot \frac{\partial t^*}{\partial u} \right) - \frac{\partial t^*}{\partial u} \right] \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) = \\ & = \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Así, teniendo en cuenta (5.18) y (5.20), podemos escribir (5.17) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(u, b_0) + \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{\frac{-\lambda \cdot x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}\right) \cdot dF(z) \cdot dx - \\ &- \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \phi(u - z, b_0) \cdot dF(z) + \\ &- \frac{\lambda^2}{c} \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (5.21)$$

Planteamos a continuación el cálculo de la parcial de $\phi(u, b_0)$ respecto a b_0 .

Hacemos el cambio de variable $x = \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}$ en (5.7), obteniéndose,

$$\begin{cases} t = (x^2 - b_0^2) \cdot \alpha \\ dt = 2 \cdot \alpha \cdot x \cdot dx \end{cases}$$

Aplicamos el cambio al primer sumando de (5.7). Los extremos de la integral quedan:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow x = b_0 \\ t = t^* \rightarrow x = x^* \end{cases}$$

Así, el primer sumando de (5.7) se puede escribir como,

$$\begin{aligned} & \int_{b_0}^{x^*} \lambda e^{-\lambda \alpha (x^2 - b_0^2)} \int_0^{u+c \alpha (x^2 - b_0^2)} \phi(u + c \alpha (x^2 - b_0^2) - z, x) dF(z) x 2 \alpha dx = \\ & = 2 \lambda \alpha e^{\lambda \alpha b_0^2} \int_{b_0}^{x^*} e^{-\lambda \alpha x^2} x \int_0^{u+c \alpha (x^2 - b_0^2)} \phi(u + c \alpha (x^2 - b_0^2) - z, x) dF(z) dx \end{aligned} \quad (5.22)$$

Al derivar (5.22) respecto a b_0 se obtiene

$$\begin{aligned} & 4 \lambda^2 \alpha^2 b_0 e^{\lambda \alpha b_0^2} \int_{b_0}^{x^*} e^{-\lambda \alpha x^2} x \int_0^{u+c \alpha (x^2 - b_0^2)} \phi(u + c \alpha (x^2 - b_0^2) - z, x) dF(z) dx + \\ & + 2 \lambda \alpha e^{\lambda \alpha b_0^2} \frac{\partial}{\partial b_0} \int_{b_0}^{x^*} e^{-\lambda \alpha x^2} x \int_0^{u+c \alpha (x^2 - b_0^2)} \phi(u + c \alpha (x^2 - b_0^2) - z, x) dF(z) dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

Para resolver la parcial que aparece en el segundo sumando de (5.23) deshacemos el cambio, llegando a:

$$\frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot e^{-\lambda \alpha b_0^2} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+c t} \phi\left(u + c \cdot t - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt \quad (5.24)$$

siendo su derivada respecto a b_0 ,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-2 \lambda \alpha b_0}{2 \alpha}\right) \cdot e^{-\lambda \alpha b_0^2} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+c t} \phi\left(u + c \cdot t - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \frac{1}{2 \alpha} \cdot e^{-\lambda \alpha b_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+c t} \phi\left(u + c \cdot t - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde la parcial respecto a b_0 que aparece en (5.25) es

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+c t} \phi\left(u + c \cdot t - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\ & + \frac{\partial t^*}{\partial b_0} \cdot e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \end{aligned} \quad (5.26)$$

La parcial respecto a b_0 del primer sumando de la ecuación (5.7), a partir

de (5.22), (5.25) y (5.26), es

$$\begin{aligned}
& 4\lambda^2 \alpha^2 b_0 e^{\lambda \alpha b_0^2} \int_{b_0}^{x^*} e^{-\lambda \alpha x^2} x \int_0^{u+c\alpha(x^2-b_0^2)} \phi(u+c\alpha(x^2-b_0^2)-z, x) dF(z) dx + \\
& + 2\lambda \alpha e^{\lambda \alpha b_0^2} \frac{1}{2\alpha} e^{-\lambda \alpha b_0^2} \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}) dF(z) dt + \\
& + 2\lambda \alpha e^{\lambda \alpha b_0^2} \frac{1}{2\alpha} e^{-\lambda \alpha b_0^2} \frac{\partial t^*}{\partial b_0} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) dF(z) - \\
& - 4\lambda^2 \alpha^2 e^{\lambda \alpha b_0^2} \frac{1}{2\alpha} b_0 e^{-\lambda \alpha b_0^2} \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}) dF(z) dt
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Realizamos el mismo proceso con el segundo sumando de la expresión (5.7). Aplicamos el cambio de variable $x = \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}$, quedando los extremos de la integral:

$$\begin{cases} t = t^* \rightarrow x = x^* \\ t = \infty \rightarrow x = \infty \end{cases}$$

pudiendo escribirse el segundo sumando de la expresión (5.7) como

$$2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot e^{\lambda \alpha b_0^2} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda \alpha x^2} \cdot x \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx \tag{5.28}$$

Al derivar (5.28) respecto a b_0 se obtiene,

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot e^{\lambda \alpha b_0^2} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda \alpha x^2} \cdot x \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot e^{\lambda \alpha b_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial b_0} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda \alpha x^2} \cdot x \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx
\end{aligned} \tag{5.29}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial b_0} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda \alpha x^2} \cdot x \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx = \\
& = -\frac{\partial x^*}{\partial b_0} \cdot e^{-\lambda \alpha (x^*)^2} \cdot x^* \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Por tanto, si agrupamos (5.29) y (5.30) la parcial respecto a b_0 del segundo

sumando de (5.7) es,

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot e^{\lambda \alpha b_0^2} \cdot \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda \alpha x^2} x \cdot \int_0^x \phi(x-z, x) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot e^{\lambda \alpha b_0^2} \cdot \left(-\frac{\partial x^*}{\partial b_0}\right) \cdot e^{-\lambda \alpha (x^*)^2} \cdot x^* \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Si agrupamos las expresiones (5.27) y (5.31) obtendremos la parcial de $\phi(u, b_0)$ respecto a b_0 ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = & \\
= & 4\lambda^2 \alpha^2 b_0 \int_{b_0}^{x^*} x e^{\lambda \alpha b_0^2 - \lambda \alpha x^2} \int_0^{u+c\alpha(x^2-b_0^2)} \phi(u+c\alpha(x^2-b_0^2)-z, x) dF(z) dx + \\
& - 2\lambda^2 e^{\lambda \alpha b_0^2} \alpha b_0 e^{-\lambda \alpha b_0^2} \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi\left(u+ct-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) dF(z) dt + \\
& + \lambda e^{\lambda \alpha b_0^2} e^{-\lambda \alpha b_0^2} \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+ct} \phi\left(u+ct-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) dF(z) dt + \\
& + 2\lambda \alpha e^{\lambda \alpha b_0^2} \frac{1}{2\alpha} e^{-\lambda \alpha b_0^2} \frac{\partial t^*}{\partial b_0} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) dF(z) + \\
& + 2\lambda \alpha 2\lambda \alpha b_0 e^{\lambda \alpha b_0^2} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda \alpha x^2} x \int_0^x \phi(x-z, x) dF(z) dx + \\
& + 2\lambda \alpha e^{\lambda \alpha b_0^2} \left(-\frac{\partial x^*}{\partial b_0}\right) e^{-\lambda \alpha (x^*)^2} x^* \int_0^{x^*} \phi(x^*-z, x^*) dF(z)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Sobre (5.32) podemos realizar algunas simplificaciones. Si agrupamos el primer y el quinto sumando de (5.32), podemos observar que corresponden al primer y segundo sumando de (5.7) después de aplicar el cambio de variable.

Por tanto, se pueden sustituir por $2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot \phi(u, b_0)$, es decir:

$$\begin{aligned}
& 2\lambda\alpha b_0\phi(u, b_0) = \\
& = 4\lambda^2\alpha^2 b_0 e^{\lambda\alpha b_0^2} \int_{b_0}^{x^*} e^{-\lambda\alpha x^2} x \int_0^{u+c\alpha(x^2-b_0^2)} \phi(u+c\alpha(x^2-b_0^2)-z, x) dF(z) dx + \\
& + 4\lambda^2\alpha^2 b_0 e^{\lambda\alpha b_0^2} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda\alpha x^2} x \int_0^x \phi(x-z, x) dF(z) dx
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Al agrupar los sumandos tercero y quinto de (5.32),

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot \frac{\partial t^*}{\partial b_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
& - \frac{\partial x^*}{\partial b_0} \cdot 2 \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot e^{\lambda \cdot \alpha \cdot b_0^2} \cdot e^{-\lambda \cdot \alpha \cdot (x^*)^2} \cdot x^* \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

y sabiendo que

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda \cdot \alpha \cdot b_0^2 - \lambda \cdot \alpha \cdot (x^*)^2} = e^{-\lambda \cdot t^*} \\
& \frac{\partial t^*}{\partial b_0} = -2 \cdot \alpha \cdot b_0 + 2 \cdot x^* \cdot \alpha \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b_0}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

podemos sustituir (5.35) en (5.34), obteniéndose

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \cdot [-2 \cdot \alpha \cdot b_0 + 2 \cdot x^* \cdot \alpha \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b_0} - \\
& - 2 \cdot x^* \cdot \alpha \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b_0}] \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) = \\
& = -2 \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Por tanto, a partir de (5.33) y (5.36), podemos escribir (5.32) como,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} & = 2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0 \cdot \left[\phi(u, b) - e^{-\lambda \cdot t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) \right] - \\
& - \lambda \cdot 2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0 \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda \cdot s} \cdot \int_0^{u+c \cdot s} \phi\left(u+c \cdot s-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
& + \lambda \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda \cdot s} \cdot \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+c \cdot s} \phi\left(u+c \cdot s-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{5.37}$$

A continuación agrupamos las expresiones (5.21) y (5.37) en las que hemos

obtenido las parciales de $\phi(u, b_0)$ respecto a u y respecto a b_0 , obteniéndose

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} = \phi(u, b) + \\
& + e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) + \\
& + e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}) \cdot dF(z) \cdot dx - \\
& - \int_0^u \phi(u - z, b_0) \cdot dF(z) - \\
& - \lambda \cdot \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda s} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot ds + \\
& + \phi(u, b_0) - \\
& - e^{-\lambda t^*} \cdot \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) \cdot dF(z) - \\
& - \lambda \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda s} \cdot \int_0^{u+c \cdot s} \phi\left(u + c \cdot s - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt + \\
& + \frac{1}{2 \alpha b_0} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda s} \cdot \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+c \cdot s} \phi\left(u + c \cdot s - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Podemos observar en (5.38) que los sumandos segundo y séptimo se anulan. Los sumandos quinto y octavo no son más que los sumandos de la ecuación original (5.7), por tanto, se pueden anular con uno de los $\phi(u, b_0)$. Así, (5.38) toma la forma,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} = \phi(u, b_0) - \\
& - \int_0^u \phi(u - z, b_0) \cdot dF(z) - \\
& + e^{\frac{\lambda \cdot u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha \cdot c}}\right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\
& + \frac{1}{2 \alpha b_0} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda s} \cdot \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+c \cdot s} \phi\left(u + c \cdot s - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Y podemos observar en (5.39) que los dos últimos sumandos también se anulan. Para comprobarlo consideramos $\phi(f_1, f_2)$, pudiendo escribirlos como:

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \cdot \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot dx + \\
& + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda s} \cdot \int_0^{u+c \cdot s} \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial b_0} \cdot dF(z) \cdot dt
\end{aligned} \tag{5.40}$$

donde,

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha \cdot c}}} \cdot \left(\frac{-1}{\alpha \cdot c} \right) \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial b_0} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \cdot 2 \cdot b_0$$

Sustituyendo (5.41) en (5.40), se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda \cdot u}{e \cdot c} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\lambda \cdot \frac{x-u}{c}} \cdot \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha \cdot c}}} \cdot \left(\frac{-1}{\alpha \cdot c} \right) \cdot dF(z) \cdot dx + \\ & + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \int_0^{t^*} e^{-\lambda \cdot s} \cdot \int_0^{u+c \cdot s} \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \cdot 2 \cdot b_0 \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned}$$

y haciendo un cambio de variable en el segundo sumando, al simplificar llegamos

a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha \cdot c} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\lambda \cdot \frac{x-u}{c}} \cdot \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha \cdot c}}} \cdot dF(z) \cdot dx - \\ & - \frac{1}{\alpha \cdot c} \cdot \int_u^{x^*} e^{-\lambda \cdot \frac{x-u}{c}} \cdot \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha \cdot c}}} \cdot dF(z) \cdot dx = 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (5.42), podemos escribir (5.39) como,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \\ & - \lambda \cdot \partial \phi(u, b_0) + \lambda \cdot \int_0^u \phi(u-z, b_0) \cdot dF(z) = 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

ecuación integro-diferencial a partir de la que se puede obtener la probabilidad de supervivencia en un modelo modificado con una barrera de dividendos parabólica.

5.2.3 Caso exponencial

Suponemos a continuación que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una exponencial cuya función distribución es,

$$F(z) = 1 - e^{-z}, \quad z > 0 \quad (5.44)$$

Hacemos el cambio de variable

$$u - z = x \Rightarrow z = u - x \quad (5.45)$$

y sustituyendo (5.45) en (5.44)

$$\begin{aligned} F(u - x) &= 1 - e^{-(u-x)} \\ dF(u - x) &= -e^{-(u-x)} \cdot dx \end{aligned} \quad (5.46)$$

Al aplicar el cambio de variable (5.45) sobre (5.43), los nuevos extremos de la integral son

$$\begin{cases} z = 0 \Rightarrow x = u \\ z = u \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

por tanto, (5.43) toma la forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \\ - \phi(u, b_0) + \int_0^u \phi(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Al derivar (5.47) respecto a u :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} - \\ - \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^u \phi(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_0^u \phi(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = \phi(u, b_0) \cdot e^{-(u-u)} - \int_0^u \phi(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx \quad (5.49)$$

Al sustituir (5.49) en (5.48)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} - \\ - \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \phi(u, b_0) - \int_0^u \phi(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

de donde podemos despejar $\int_0^u \phi(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx$, obteniéndose

$$\begin{aligned} \int_0^u \phi(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \\ + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} - \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \phi(u, b_0) \end{aligned}$$

expresión que al sustituir en (5.47)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \phi(u, b_0) + \\ & + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} - \\ & - \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \phi(u, b_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Simplificando (5.50),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + c \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \\ & + c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} - \lambda \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} = 0 \end{aligned}$$

lo que nos permite llegar a la ecuación en derivadas parciales con coeficientes variables a partir de la que se obtendrá la probabilidad de supervivencia en caso de barrera parabólica:

$$c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0$$

Las condiciones de contorno son equivalentes a las utilizadas en el caso de la barrera lineal. Son las siguientes,

- $\left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0} = 0$

Para comprobar esta condición de contorno partimos de la ecuación (5.21)

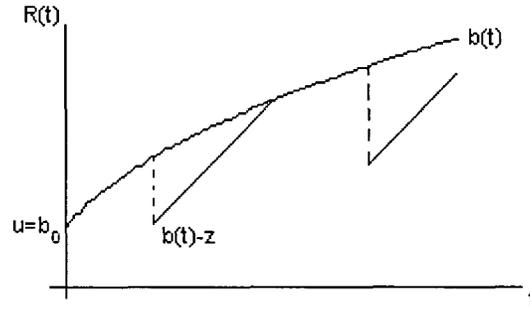
en la que se obtenía la parcial de $\phi(u, b_0)$ respecto a u . Para calcular $\left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0}$ para $u = b_0$, sabemos que $t^* = 0$, y que $x^* = b_0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(b_0, b_0) + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{b_0} \phi(b_0 - z, b_0) \cdot dF(z) - \\ & - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{b_0} \phi(b_0 - z, b_0) \cdot dF(z) - \\ & - \frac{\lambda}{c} \cdot \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0} &= \frac{\lambda}{c} \cdot \phi(b_0, b_0) - \\ & - \frac{\lambda}{c} \cdot \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt \end{aligned} \quad (5.51)$$

Para hallar el valor de $\phi(b_0, b_0)$ que aparece en la expresión (5.51), planteamos el cálculo de la probabilidad de supervivencia suponiendo que $u = b_0$. La idea gráfica es,



a partir de la cual, podemos escribir

$$\phi(b_0, b_0) = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) \cdot dF(z) \cdot dt \quad (5.52)$$

Al sustituir (5.52) en (5.51), se obtiene

$$\left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0} = 0$$

quedando comprobada la primera condición de contorno.

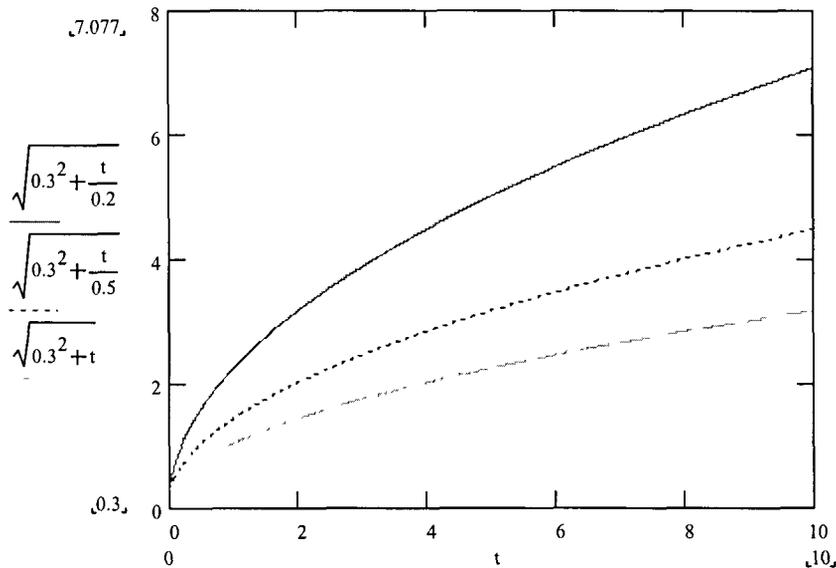
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = 1$ ($b_0 \rightarrow \infty$). Si el nivel inicial de las reservas, u , tiende a infinito, lo que implica que b_0 tiende a infinito ya que $u \leq b_0$, la probabilidad de supervivencia es uno.
- $\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\frac{c-\lambda}{c} u}$. Hacer tender el valor inicial de la barrera, b_0 , a infinito es equivalente a hacer desaparecer la barrera, lo que implica que la probabilidad de supervivencia es la obtenida en el modelo sin barrera.

5.2.4 Resultados numéricos

Podemos hallar el valor de la probabilidad de supervivencia con barrera de dividendos parabólica mediante la simulación del proceso. Para las simulaciones se han utilizado programas en Fortran 77, así como diversas librerías de la NAG (Anexo II). El número de trayectorias simuladas es de 100.000, y los resultados son la media de veinte ejecuciones, suponiendo que las trayectorias que se mantienen "vivas" en el momento $t = 100$ ya se consideran trayectorias no arruinadas.

La simulación se realiza para diferentes valores de α , teniendo en cuenta que a mayor sea el valor de α , menor es la pendiente.

Gráficamente, suponiendo $b_0 = 0.3$, la representación de la barrera para $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 1$, es,



Para diferentes valores de α , asumiendo $c = 1.5$, $\lambda = 1$ y $E(z) = 1$, mediante simulación del proceso se obtienen los siguientes resultados,

Para $\alpha = 0.2$

$b_0 \backslash u$	0	0.3	0.5	1
0	0.271133			
0.3	0.271522	0.319003		
0.5	0.272130	0.319765	0.346733	
1	0.274655	0.323516	0.351447	0.406361

Para $\alpha = 0.5$

$b_0 \backslash u$	0	0.3	0.5	1
0	0.102504			
0.3	0.103856	0.115944		
0.5	0.106014	0.119080	0.124178	
1	0.115080	0.131237	0.139540	0.149554

Para $\alpha = 1$

$b_0 \backslash u$	0	0.3	0.5	1
0	0.018439			
0.3	0.019294	0.020622		
0.5	0.020692	0.022582	0.022976	
1	0.026458	0.029745	0.031242	0.032758

Se puede observar que para un mismo valor de u y b_0 , a medida que el valor de α incrementa, las probabilidades de supervivencia disminuyen, lo que se intuía en la observación de los gráficos: a mayor α , el crecimiento de la barrera parabólica es menor, por tanto el tope que representa la barrera está más cerca del proceso de las reservas, limitando el crecimiento de $R(t)$.

Mediante simulación, podemos hallar algunos resultados que confirman la influencia de las variables que definen la barrera sobre la probabilidad de supervivencia. Una de las condiciones de contorno definida es :

$$\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = \phi(u)$$

es decir, que cuando el nivel inicial de la barrera tiende a infinito, la probabilidad de supervivencia tiende a la probabilidad de supervivencia sin barrera. El valor

de esa probabilidad sin barrera lo podemos hallar por la fórmula

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot \frac{1}{E(z)} \cdot u}$$

y por simulación. Los resultados obtenidos son,

u	0	0.3	0.5	1
$\phi(u)$ segun formula	0.333333	0.396775	0.435678	0.52233
$\phi(u)$ segun simulación	0.332246	0.397497	0.436344	0.522705

Comprobaremos que para un valor de $b_0 = 1000$, los resultados de la simulación del proceso con barrera de dividendos parabólica tienden a los resultados de $\phi(u)$. Así, obtenemos los siguientes valores de $\phi(u, b_0)$, para $b_0 = 1000$ y $\alpha = 0.5$,

u	0	0.3	0.5	1
$\phi(u, 1000)$	0.332246	0.397497	0.436344	0.522705

De forma similar podemos comprobar que cuando α tiende a cero, el proceso no se ve alterado por la presencia de la barrera de dividendos, ya que el efecto es equivalente a hacer desaparecer la barrera de dividendos. Es decir,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi(u, b_0) = \phi(u)$$

Calculamos $\phi(u, b_0)$ para $\alpha = 0.001$, comprobando que para un valor dado de u , el valor de $\phi(u, b_0)$ no varía para diferentes valores de b_0 , y que los valores conseguidos coinciden con los del proceso sin reparto de dividendos.

u	0	0.3	0.5	1
$\phi(u, b_0)$	0.332246	0.397497	0.436344	0.522705

5.2.5 Comparación barrera lineal-barrera parabólica

Si comparamos la estructura de la ecuación en derivadas parciales obtenida en el caso de barrera lineal con la obtenida en el caso de la barrera parabólica, podemos observar la similitud existente entre ambas. En el caso de barrera

lineal la expresión obtenida era:

$$c \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial u^2} + a \cdot \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + (c - \lambda) \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} = 0$$

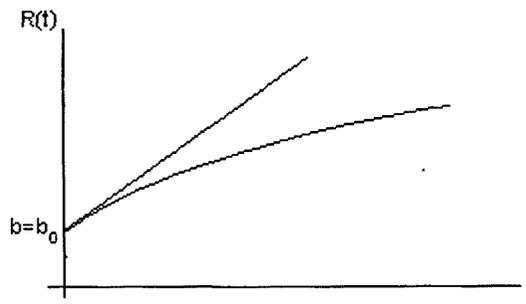
La obtenida con barrera parabólica es la misma sustituyendo a (pendiente de la barrera lineal) por la pendiente de la barrera parabólica en cero, es decir

$$b'(0) = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0}$$

La solución de la ecuación en derivadas parciales correspondientes a la barrera lineal y la barrera parabólica, a pesar de la similitud existente en la estructura de las ecuaciones, será muy diferente debido a que la correspondiente a la barrera lineal es una ecuación en derivadas parciales de coeficientes constantes, mientras que en el caso de barrera parabólica, la ecuación en derivadas parciales resultante, es de coeficientes variables.

Evidentemente, la probabilidad de supervivencia será muy diferente cuando el proceso esté modificado con una barrera lineal con pendiente a y con una parabólica cuya pendiente en $t = 0$ también tenga valor a (es decir cuando $a = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0}$).

Gráficamente,



En el gráfico se puede observar como, intuitivamente, la probabilidad de supervivencia en el caso de barrera lineal será mayor, ya que se permite una mayor acumulación en el nivel de las reservas. Si hallamos el valor de la probabilidad de supervivencia, mediante un proceso de simulación, para nivel inicial de las

reservas $u = 1$, intensidad de prima $c = 1,5$, nivel inicial de la barrera $b_0 = 1$, número medio de siniestros $\lambda = 1$, y cuantía media de los siniestros $E(z) = 1$, encontraremos para barrera lineal y barrera parabólica los siguientes resultados:

Barrera	Parámetros	Pendiente en $t = 0$	$\phi(u, b_0)$
Lineal	$a = 1.1$	$b'(0) = a = 1.1$	0.464492
Parabólica	$\alpha = 0.45$	$b'(0) = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} = \frac{1}{2 \cdot 0.45 \cdot 1} = 1.1$	0.173732

Parece intuitiva la existencia de una barrera de dividendos lineal y una parabólica que para un mismo punto inicial de las barreras b_0 , y un mismo nivel inicial de reservas, u , permitan obtener la misma probabilidad de supervivencia. Planteamos a continuación el cálculo de esas barreras "equivalentes" desde el punto de vista de la solvencia. Para ello, utilizamos un programa en Fortran 77 (Anexo III).

Presentamos tres ejemplos:

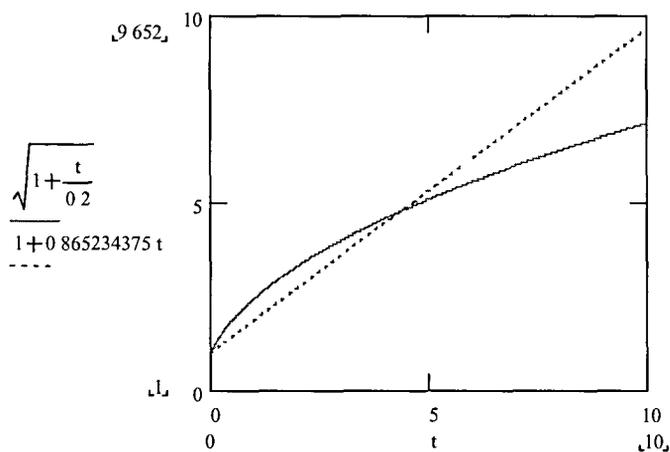
Ejemplo 1: Si consideramos la barrera parabólica $b(t) = \sqrt{1 + \frac{t}{0.2}}$ con $u = 1$ y $c = 1.5$, mediante un proceso de simulación hallamos que la probabilidad de supervivencia es 0,4063619971.

La barrera lineal que hará que la probabilidad de supervivencia coincida con la hallada en la parabólica será $b(t) = 1 + 0.865234375 \cdot t$

El punto de corte entre ambas barreras a partir de la igualdad

$$\sqrt{1 + \frac{t}{0.2}} = 1 + 0.865234375 \cdot t$$

se encuentra en $t = 4.3673$. Gráficamente



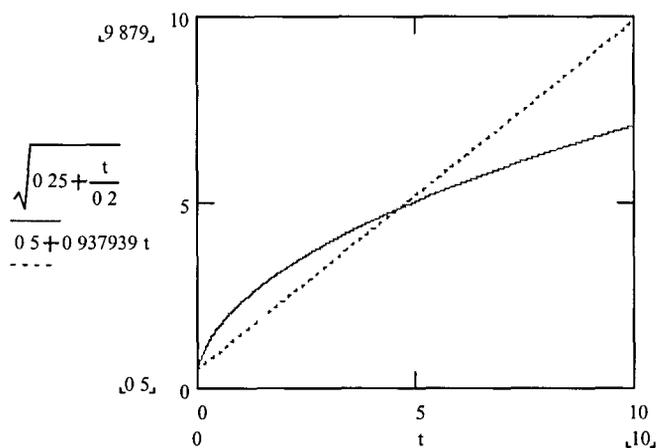
Ejemplo 2: Para la barrera parabólica $b(t) = \sqrt{0.25 + \frac{t}{0.2}}$ con $u = 0.3$ y $c = 1.5$, la simulación nos da una probabilidad de supervivencia de 0,319765.

La barrera lineal que hará que la probabilidad de supervivencia coincida con la hallada en la parabólica, será $b(t) = 0.5 + 0.937939453125 \cdot t$. El punto de corte entre ambas, resultante de

$$\sqrt{0.25 + \frac{t}{0.2}} = 0.5 + 0.937939 \cdot t$$

es $t = 4.6174$.

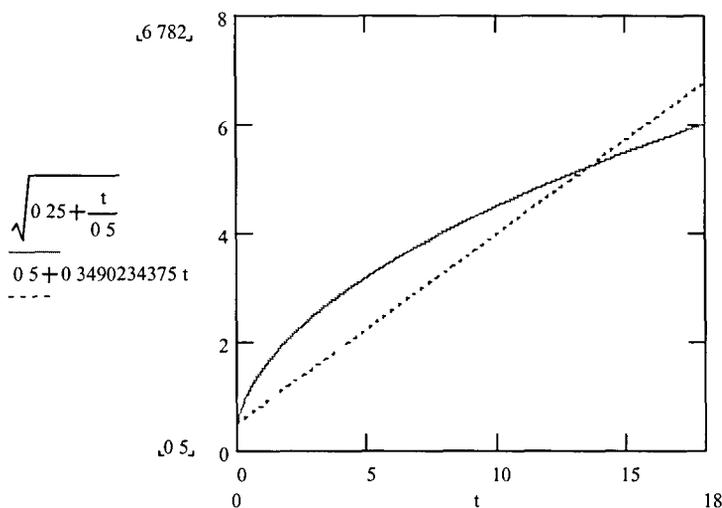
Gráficamente,



Ejemplo 3: Si trabajamos con la barrera parabólica $b(t) = \sqrt{0.25 + \frac{t}{0.5}}$ con $u = 1$ y $c = 1.5$, la simulación nos da una probabilidad de supervivencia de 0,149554.

La barrera lineal que hará que la probabilidad de supervivencia coincida con la hallada en la parabólica será $b(t) = 0.5 + 0.3490234375 t$, siendo el punto de corte $t = 13.553$.

Gráficamente



5.3 Cuantificación de los dividendos repartidos: Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos $W(u, b)$

5.3.1 Argumento diferencial

Plantemos a continuación el cálculo del valor actual de los dividendos repartidos suponiendo que el proceso acabe en el momento en el que se produce la ruina.

Para ello aplicamos el argumento diferencial, de forma similar al utilizado en el cálculo de la probabilidad de supervivencia. La ecuación de partida es,

$$\begin{aligned}
W(u, b_0) = & (1 - \lambda \cdot dt) \cdot W\left(u + c \cdot dt, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot e^{-\delta dt} + \\
& + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} W\left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot e^{-\delta dt} \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

El primer sumando de (5.53) indica el caso en que en un dt no ocurra siniestro (con probabilidad $1 - \lambda \cdot dt$). Por tanto, tenemos que actualizar mediante el factor $e^{-\delta dt}$, la esperanza del valor actual de los dividendos en dt , donde el nuevo nivel de las reservas es $u + c \cdot dt$, y el nivel de la barrera es $\sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}$. El segundo sumando recoge la situación de ocurrencia de siniestro en un dt (con probabilidad $\lambda \cdot dt$). En ese caso actualizamos los dividendos en dt , momento en el que el nivel de las reservas es $u + c \cdot dt - z$.

En el primer sumando de (5.53) sabemos que

$$1 - \lambda \cdot dt - \delta \cdot dt = e^{-(\lambda+\delta) dt} \tag{5.54}$$

Además podemos desarrollar el primer sumando de (5.53), teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned}
W\left(u + c \cdot dt, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) = & W(u, b_0) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \\
& + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0}
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Sustituyendo (5.54) y (5.55) en (5.53) llegamos a,

$$\begin{aligned}
W(u, b_0) = & (1 - \lambda \cdot dt - \delta \cdot dt) \cdot (W(u, b_0) + c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \\
& + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0}) + \\
& + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} W\left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot e^{-\delta dt} \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Al desarrollar la expresión (5.56) obtenemos,

$$\begin{aligned}
(\lambda + \delta) \cdot dt \cdot W(u, b_0) = & c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \\
& + \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} - \lambda \cdot dt \cdot c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \\
& - \lambda \cdot dt \cdot \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} - \\
& - \delta \cdot dt \cdot c \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \delta \cdot dt \cdot \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot dt \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} + \\
& + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} W\left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}\right) \cdot e^{-\delta dt} \cdot dF(z)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Se divide (5.57) entre dt ,

$$\begin{aligned} (\lambda + \delta) \cdot W(u, b_0) &= c \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} - \\ &- \lambda \cdot dt \cdot c \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \lambda \cdot dt \cdot \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} - \\ &- \delta \cdot dt \cdot c \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \delta \cdot dt \cdot \frac{1}{2 \alpha \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} + \\ &+ \lambda \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} W \left(u + c \cdot dt - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{dt}{\alpha}} \right) \cdot e^{-\delta \cdot dt} \cdot dF(z) \end{aligned}$$

y haciendo $dt \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (\lambda + \delta) W(u, b_0) &= c \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \alpha b_0} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} + \\ &+ \lambda \cdot \int_0^u W(u - z, b_0) \cdot dF(z) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} c \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} - \\ - (\lambda + \delta) \cdot W(u, b_0) + \lambda \cdot \int_0^u W(u - z, b_0) \cdot dF(z) = 0 \end{aligned}$$

o de forma equivalente,

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot \lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} - \\ - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot W(u, b_0) + \int_0^u W(u - z, b_0) \cdot dF(z) = 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

ecuación integro-diferencial que determina la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos en un modelo modificado con una barrera parabólica.

5.3.2 Caso exponencial

Suponemos a continuación que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una exponencial cuya función distribución es,

$$F(z) = 1 - e^{-z}, \quad z > 0 \quad (5.59)$$

Hacemos el cambio de variable

$$u - z = x \Rightarrow z = u - x \quad (5.60)$$

y sustituyendo (5.60) en (5.59)

$$\begin{aligned} F(u - x) &= 1 - e^{-(u-x)} \\ dF(u - x) &= -e^{-(u-x)} \cdot dx \end{aligned} \quad (5.61)$$

Al aplicar el cambio de variable (5.59) sobre (5.58), los nuevos extremos de la integral son

$$\begin{cases} z = 0 \Rightarrow x = u \\ z = u \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

por tanto (5.58) toma la forma,

$$\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot \lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot W(u, b_0) + \int_0^u W(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \quad (5.62)$$

Al derivar (5.62) respecto a u :

$$\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u^2} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \int_0^u W(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0 \quad (5.63)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_0^u W(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx &= \\ &= W(u, b_0) \cdot e^{-(u-u)} - \int_0^u W(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx \end{aligned} \quad (5.64)$$

Al sustituir (5.64) en (5.63)

$$\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u^2} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + W(u, b_0) - \int_0^u W(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = 0$$

de donde podemos despejar la integral

$$\int_0^u W(x, b_0) \cdot e^{-(u-x)} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u^2} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + W(u, b_0) \quad (5.65)$$

y sustituyendo (5.65) en (5.62)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot \lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \\ &\quad - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot W(u, b_0) + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \\ &\quad + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u^2} - \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} + W(u, b_0) \end{aligned}$$

y simplificando,

$$0 = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u^2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0 \cdot \lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} + \frac{c - \lambda - \delta}{\lambda} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \frac{\delta}{\lambda} \cdot W(u, b_0)$$

de donde

$$0 = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u \partial b_0} + c \cdot \frac{\partial^2 W(u, b_0)}{\partial u^2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0} \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial b_0} + (c - \lambda - \delta) \cdot \frac{\partial W(u, b_0)}{\partial u} - \delta \cdot W(u, b_0) \quad (5.66)$$

ecuación en derivadas parciales que determina la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos.

Si comparamos la estructura de la ecuación en derivadas parciales obtenida en la expresión (5.66) con la expresión (4.92), (a partir de la que se obtenía la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos asumiendo un modelo modificado con barrera lineal), que recordemos era

$$c \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial u^2} + a \cdot \frac{\partial^2 W(u, b)}{\partial b \partial u} + (c - \lambda - \delta) \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial u} + a \cdot \frac{\partial W(u, b)}{\partial b} - \delta \cdot W(u, b) = 0$$

podemos observar que la similitud existente es equivalente a la detectada cuando analizábamos probabilidad de supervivencia. Es decir, la estructura es equivalente, con la diferencia de que el valor de la pendiente de la barrera lineal, a , queda sustituido por el valor de la pendiente de la barrera parabólica en $t = 0$, $b'(0) = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot b_0}$.

Capítulo 6

Política de dividendos en caso discreto: Barrera constante

6.1 Introducción

Una vez analizado el reparto de dividendos continuo, nos centramos ahora en el estudio del caso del reparto de dividendos discreto, aplicándolo al proceso modificado con una barrera de dividendos constante, $b(t) = b$.

Analizamos primero la probabilidad de ruina para demostrar que con reparto discreto y barrera constante, la ruina es segura, igual que sucedía en el reparto continuo.

A continuación se presenta el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos. Se plantea el cálculo bajo las dos hipótesis recogidas en el capítulo 2: por un lado suponiendo que el proceso acaba con la ruina, W , y por otro, permitiendo la recuperación del proceso, V . De igual forma a como ocurría en el reparto continuo, W depende del nivel inicial de las reservas y del nivel de la barrera, u y b , y V depende de la diferencia entre esas dos variables, $d = b - u$.

Unos primeros resultados sobre este modelo se incluyen en los trabajos "Expected present value of dividends with a constant barrier in the discrete case", presentado en el Sixth International Congress on Insurance: Mathematics and Economics (IME, Lisboa, 2002), y "Análisis discreto de los dividendos repartidos en una cartera de seguros no vida", presentado en el VI Congreso de Matemática Financiera y Actuarial y 5th Italian-spanish Conference on Financial Mathematics (Valencia, 2002). Este último se encuentra como documento de trabajo en Claramunt, Mármol y Alegre (2002).

6.2 Análisis del proceso

Tal y como queda recogido en el capítulo 2, en la formalización del reparto de dividendos discreto, éste se produce en momentos t_i para $i = 1, 2, \dots$, equidistantes, considerándose $t_0 = 0$, siendo la unidad temporal el año.

Así, si en t_i el nivel de la barrera $b(t) = b$ es inferior al nivel de las reservas, se repartirá la diferencia D_{t_i} ,

$$D_{t_i} = \text{Max} \{ (R^*(t_i) - b), 0 \}$$

donde $R^*(t_i)$ es el nivel de las reservas antes del reparto de dividendos, suponiendo que haya, que recordemos, venía definido en la expresión (2.2)

$$R^*(t_i) = u + c t_i - S(t_i) - SD(t_{i-1}) = R(t_{i-1}) + c \cdot (t_i - t_{i-1}) - (S(t_i) - S(t_{i-1}))$$

siendo $SD(t)$ la suma total de los dividendos repartidos en un intervalo $(0, t]$, $SD(t) = D_{t_1} + D_{t_2} + \dots + D_{t_s}$, para $t_s = \text{Max} \{ t_i / t_i \leq t \}$.

Consideramos $S_i = S(t_i) - S(t_{i-1})$ la siniestralidad total en un periodo $[t_i, t_{i+1}]$. Asumimos que S_i son variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas, con función de densidad $P_s = P[S = s]$ y función de distribución $F_S(s) = P[S \leq s]$ para $s = 0, 1, 2, \dots$

Para simplificar, denominamos $c \cdot (t_i - t_{i-1})$ como c , considerando un recargo de seguridad positivo, $E[S] < c$.

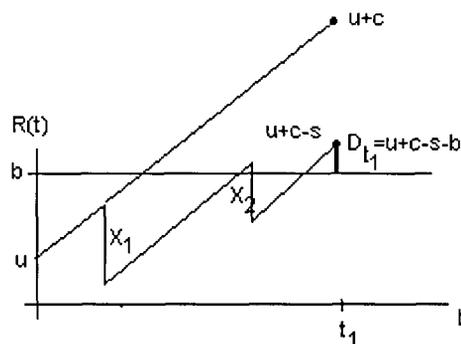
La resolución del problema implica la consideración de la variable aleatoria siniestralidad total acumulada en un periodo como variable aleatoria discreta, y la hipótesis de que todas las magnitudes monetarias (u, b, c, \dots) son múltiplos de una determinada unidad. Ninguna de las dos condiciones anteriores implica una restricción importante en la validez del modelo: en el caso de las magnitudes monetarias, simplemente debemos cambiar la unidad de referencia, y en el caso de la siniestralidad acumulada, simplemente debemos discretizar previamente la variable aleatoria, si ésta no es discreta.

Para el cálculo de la probabilidad de ruina y de la esperanza del valor actual de los dividendos, nos planteamos el nivel de las reservas en el momento t_1 , que toma la forma

$$R^*(t_1) = u + c - s \quad (6.1)$$

En función de si (6.1) es mayor o menor que $b(t) = b$, existirá o no reparto de dividendos. Recogemos a continuación esas dos posibles situaciones:

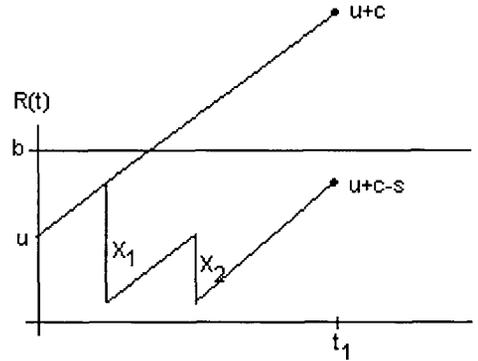
Caso 1 El primer caso se produce cuando $R^*(t_1) = u + c - s$ es mayor que el nivel de la barrera b . Gráficamente,



En este caso los dividendos repartidos en t_1 , $D_{t_1} = SD(t_1)$, son positivos siendo su importe la diferencia entre $R^*(t_1)$ y la barrera b , es decir $D_{t_1} = u + c - s - b$. El nivel de las reservas en t_1 después de repartir dividendos es $R(t_1) = b$

Caso 2 La otra situación posible es cuando $R^*(t_1)$ es menor que el nivel de la barrera b , independientemente de lo que haya ocurrido en el intervalo $(0, t_1]$.

Gráficamente,



En este caso no existe reparto de dividendos en t_1 , siendo el nivel de las reservas en t_1 , $R(t_1) = u + c - s$.

Partiendo del análisis de la situación del proceso en el momento t_1 , y teniendo en cuenta que nos encontramos con un proceso de renovación, planteamos el cálculo de la probabilidad de ruina y de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos.

6.3 Probabilidad de ruina

El estudio del proceso modificado con una barrera constante con reparto continuo, se centra en el estudio del cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos ya que la ruina es segura. A continuación se presenta la demostración de que la ruina con reparto discreto también es igual a uno.

Teorema 8 En un modelo modificado con una barrera de dividendos constante con reparto de dividendos discreto la probabilidad de ruina es 1, $\tilde{\psi}(u, b) = 1$.

Demostración. Partimos de la situación $u = b$. En este caso el nivel de las reservas en t_1 es,

$$R^*(t_1) = b + c - s \quad (6.2)$$

Dependiendo de si (6.2) es mayor o menor que b se producirá reparto de dividendos o no.

Así, D_{t_1} es diferente de cero si

$$b + c - s > b$$

lo que implica que $s < c$, lo que ocurre con probabilidad $F_S(c-1)$. En este caso, el nuevo nivel de las reservas tras el reparto es $R(t_1) = b$.

La otra situación posible es cuando $b + c - s \leq b$, por tanto para $s \geq c$, lo que ocurre con probabilidad $1 - F_S(c-1)$. El nivel de las reservas en t_1 es $R(t_1) = b + c - s$. Además la cuantía de la siniestralidad s no puede producir la ruina, lo que añade una nueva restricción a s ,

$$b + c - s > 0 \Rightarrow s < b + c$$

A partir de los dos casos comentados, podemos plantear la ecuación que determina la probabilidad de ruina asumiendo $u = b$,

$$\tilde{\psi}(b, b) = \tilde{\psi}(b, b) \cdot F_S(c-1) + \sum_{s=c}^{b+c} \tilde{\psi}(b+c-s, b) \cdot P_s + 1 - F_S(b+c)$$

de donde, reagrupando los sumandos,

$$\tilde{\psi}(b, b) = \tilde{\psi}(b, b) \cdot F_S(c) + \sum_{s=c+1}^{b+c} \tilde{\psi}(b+c-s, b) \cdot P_s + 1 - F_S(b+c) \quad (6.3)$$

Sacando factor común de $\tilde{\psi}(b, b)$ en (6.3),

$$\tilde{\psi}(b, b) \cdot (1 - F_S(c)) = \sum_{s=c+1}^{b+c} \tilde{\psi}(b+c-s, b) \cdot P_s + 1 - F_S(b+c) \quad (6.4)$$

Si tenemos en cuenta que, para un mismo valor de la barrera b , a menor es el nivel inicial de las reservas, mayor es la probabilidad de ruina, se cumple que

$$\tilde{\psi}(b-h, b) \geq \tilde{\psi}(b, b) \quad (6.5)$$

Al sustituir (6.5) en (6.4), se obtiene,

$$\tilde{\psi}(b, b) \cdot (1 - F_S(c)) \geq \sum_{s=c+1}^{b+c} \tilde{\psi}(b, b) \cdot P_s + 1 - F_S(b+c)$$

de donde

$$\tilde{\psi}(b, b) \cdot (1 - F_S(c)) \geq \tilde{\psi}(b, b) \cdot (F_S(b+c) - F_S(c)) + 1 - F_S(b+c)$$

$$\tilde{\psi}(b, b) \cdot (1 - F_S(c) - F_S(b+c) + F_S(c)) \geq 1 - F_S(b+c)$$

$$\tilde{\psi}(b, b) \cdot (1 - F_S(b+c)) \geq 1 - F_S(b+c)$$

por tanto $\tilde{\psi}(b, b) \geq 1$, y a partir de (6.5),

$$\tilde{\psi}(b-h, b) \geq \tilde{\psi}(b, b) \geq 1$$

quedando demostrado que $\tilde{\psi}(b, b) = \tilde{\psi}(u, b) = 1$. ■

6.4 Cuantificación de los dividendos repartidos: Cálculo de $W(u, b)$

Una vez demostrado que con barrera constante y reparto discreto, la probabilidad de ruina es uno, nos centramos a continuación en el análisis de la esperanza del valor actual de los dividendos, asumiendo que el proceso acaba con la ruina.

Para el cálculo de $W(u, b)$ encontramos en la literatura actuarial dos trabajos (Bühlmann (1970), Gerber (1972)) que asumen distribuciones concretas para la siniestralidad agregada en un periodo. A continuación, recogemos las hipótesis planteadas.

Se define L_{t_i} como el incremento en cada periodo de las reservas libres $R(t)$, es decir,

$$L_{t_i} = R(t_i) - R(t_{i-1}) = c + S(t_i) - S(t_{i-1}) \quad (6.6)$$

Se considera que la variación de las reservas definida en (6.6) sigue un proceso discreto. L_{t_i} es una variable aleatoria cuyos valores de realización son

enteros, independientes e idénticamente distribuidos, excepto para $L_0 = u$. La distribución de probabilidad de L_{t_i} es,

$$g_j = P[L_{t_i} = j], \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Analizando la situación del proceso en el momento t_1 se tiene,

$$W(u, b) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ v \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} W(u + j, b) \cdot g_j & 0 \leq u \leq b \\ u - b + W(b, b) & u > b \end{cases} \quad (6.7)$$

El valor de $W(u, b)$ para $u < 0$ se debe a que si el nivel inicial de las reservas es negativo el valor de los dividendos repartidos es nulo.

Para $0 \leq u \leq b$ las reservas no superan el nivel de la barrera, por tanto no existe reparto de dividendos en el intervalo $[t_0, t_1]$, pero sí se produce una actualización de los dividendos futuros valorados en t_1 como $W(u + j, b)$, siendo j la realización de la variable aleatoria L_{t_1} con probabilidad g_j .

Para $u > b$ las reservas iniciales son mayores que el nivel de la barrera. En este caso se reparte la diferencia entre ambos y se actualizan los dividendos partiendo de un nivel inicial de las reservas igual a b

Bühlmann (1970) limita la variación de las reservas al caso dicotómico, tomando sólo los valores $j = -1$ y $j = 1$ con probabilidad p y $q = 1 - p$ respectivamente. Dado que el único factor aleatorio considerado en el modelo es la ocurrencia de los siniestros, el caso resuelto por Bühlmann (1970) implica que los siniestros en un periodo pueden tomar sólo los valores $(c + 1)$ y $(c - 1)$ con probabilidades p y $(1 - p)$.

En el trabajo de Gerber (1972) se asume que los valores de la siniestralidad en un periodo son múltiplos de la prima c , por lo que, en unidades de c , la variación de las reservas puede ser $1, 0, -1, -2, \dots$

En los apartados 6.4.1 y 6.4.2 se analizan los casos particulares que acabamos de comentar, a los que denominamos caso dicotómico, el primero, y caso $c = 1$, el segundo. En el apartado 6.4.3 se plantea la solución de $W(u, b)$ para el caso

general, válida para cualquier distribución de la siniestralidad agregada en un periodo.

6.4.1 Solución caso dicotómico

El caso planteado por Bühlmann (1970), al asumir sólo dos realizaciones para la variable aleatoria L_{t_i} , se resuelve mediante un sistema de ecuaciones en diferencias.

Se plantea el cálculo de $W(u, b)$ a partir de (6.7), partiendo de la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} W(u, b) &= v \cdot [W(u+1, b) \cdot P[L_{t_i} = 1] + W(u-1, b) \cdot P[L_{t_i} = -1]] = \\ &= v \cdot p \cdot W(u+1, b) + v \cdot q \cdot W(u-1, b) \end{aligned} \quad (6.8)$$

que permite escribir (6.7) como

$$W(u, b) = \begin{cases} v \cdot p \cdot W(b, b) + v \cdot p + v \cdot q \cdot W(u-1, b) & u = b \\ v \cdot p \cdot W(u+1, b) + v \cdot q \cdot W(u-1, b) & u < b \end{cases} \quad (6.9)$$

Podemos observar que $W(u, b) = v \cdot p \cdot W(u+1, b) + v \cdot q \cdot W(u-1, b)$ es una ecuación en diferencias de segundo grado cuya ecuación característica es,

$$r^2 - \frac{1}{v \cdot p} \cdot r + \frac{q}{p} = 0$$

cuyas raíces son r_1 y r_2 , siendo la solución de $W(u, b)$ de la forma,

$$W(u, b) = C_1 \cdot r_1^u + C_2 \cdot r_2^u \quad (6.10)$$

A partir de (6.9), haciendo $u = 0$, se obtiene

$$W(0, b) = v \cdot p \cdot W(1, b) \quad (6.11)$$

y para $u = 0$ la expresión (6.10) toma la forma

$$W(0, b) = C_1 \cdot r_1^0 + C_2 \cdot r_2^0 = C_1 + C_2 \quad (6.12)$$

Al igualar (6.11) y (6.12) se obtiene

$$C_1 + C_2 = v \cdot p \cdot W(1, b) \quad (6.13)$$

y como $W(1, b) = C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2$, sustituyendo en (6.13)

$$C_1 + C_2 = v \cdot p \cdot (C_1 \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2)$$

de donde

$$C_1 = -\frac{1 - r_2 \cdot v \cdot p}{1 - r_1 \cdot v \cdot p} \cdot C_2 \quad (6.14)$$

A partir de (6.9), al hacer $u = b$ se obtiene

$$W(b, b) = v \cdot p \cdot W(b, b) + v \cdot p + v \cdot q \cdot W(b - 1, b) \quad (6.15)$$

de donde al despejar $W(b, b)$

$$W(b, b) = \frac{v \cdot p + v \cdot q \cdot W(b - 1, b)}{1 - v \cdot p} \quad (6.16)$$

Haciendo $u = b - 1$ en (6.9)

$$W(b - 1, b) = v \cdot p \cdot W(b, b) + v \cdot q \cdot W(b - 2, b)$$

de donde

$$W(b, b) = \frac{W(b - 1, b) - v \cdot q \cdot W(b - 2, b)}{v \cdot p} \quad (6.17)$$

Igualando (6.16) y (6.17), y sabiendo que, a partir de (6.10),

$$\begin{aligned} W(b - 1, b) &= C_1 \cdot r_1^{b-1} + C_2 \cdot r_2^{b-1} \\ W(b - 2, b) &= C_1 \cdot r_1^{b-2} + C_2 \cdot r_2^{b-2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{(C_1 \cdot r_1^{b-1} + C_2 \cdot r_2^{b-1}) - v \cdot q \cdot (C_1 \cdot r_1^{b-2} + C_2 \cdot r_2^{b-2})}{v \cdot p} = \\ &= \frac{v \cdot p + v \cdot q \cdot (C_1 \cdot r_1^{b-1} + C_2 \cdot r_2^{b-1})}{1 - v \cdot p} \end{aligned}$$

de donde, agrupando C_1 y C_2 , se llega a

$$\begin{aligned} v^2 \cdot p^2 &= C_1 \cdot (r_1^{b-1} - v \cdot q \cdot r_1^{b-2} - v \cdot p \cdot r_1^{b-1} + \\ &+ v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_1^{b-2} - v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_1^{b-1}) + \\ &+ C_2 \cdot (r_2^{b-1} - v \cdot q \cdot r_2^{b-2} - v \cdot p \cdot r_2^{b-1} + \\ &+ v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_2^{b-2} - v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_2^{b-1}) \end{aligned}$$

Recordando la relación entre coeficientes definida en (6.14),

$$\begin{aligned} v^2 \cdot p^2 = & -\frac{1-r_2 \cdot v \cdot p}{1-r_1 \cdot v \cdot p} \cdot C_2 \cdot (r_1^{b-1} - v \cdot q \cdot r_1^{b-2} - v \cdot p \cdot r_1^{b-1} + \\ & + v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_1^{b-2} - v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_1^{b-1}) + C_2 \cdot (r_2^{b-1} - v \cdot q \cdot r_2^{b-2} - \\ & - v \cdot p \cdot r_2^{b-1} + v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_2^{b-2} - v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_2^{b-1}) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Y despejando C_2 de (6.19),

$$C_2 = \frac{v^2 \cdot p^2}{f(r_2) - \frac{1-r_2 \cdot v \cdot p}{1-r_1 \cdot v \cdot p} \cdot f(r_1)} \quad (6.20)$$

siendo

$$\begin{aligned} f(r_2) &= (r_2^{b-1} - v \cdot q \cdot r_2^{b-2} - v \cdot p \cdot r_2^{b-1} + v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_2^{b-2} - v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_2^{b-1}) \\ f(r_1) &= (r_1^{b-1} - v \cdot q \cdot r_1^{b-2} - v \cdot p \cdot r_1^{b-1} + v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_1^{b-2} - v^2 \cdot p \cdot q \cdot r_1^{b-1}) \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión (6.14) en (6.10),

$$\begin{aligned} W(u, b) &= C_1 \cdot r_1^u + C_2 \cdot r_2^u = -\frac{1-r_2 \cdot v \cdot p}{1-r_1 \cdot v \cdot p} \cdot C_2 \cdot r_1^u + C_2 \cdot r_2^u = \\ &= C_2 \cdot \left(-\frac{1-r_2 \cdot v \cdot p}{1-r_1 \cdot v \cdot p} \cdot r_1^u + r_2^u \right) \end{aligned}$$

quedando C_2 definida en (6.20).

La resolución del caso dicotómico implica la condición de que $p > q$. La explicación es que se plantean dos únicas probabilidades para la variación de las reservas, que recordemos eran,

$$\begin{aligned} g_1 &= P[L_{t_1} = 1] = p \\ g_{-1} &= P[L_{t_1} = -1] = 1 - p = q \end{aligned}$$

y según (6.6), sabemos que $L_{t_1} = c - s$, por tanto

$$\begin{aligned} P[c - s = 1] &= P[s = c - 1] = p \\ P[c - s = -1] &= P[s = c + 1] = q \end{aligned}$$

que equivaldría a la siguiente distribución dicotómica para el coste total,

s	P_s	(6.21)
$c - 1$	p	
$c + 1$	$1 - p$	

por tanto $P_{c-1} = p$, $P_{c+1} = 1 - p$ y $P_i = 0 \forall i \neq c - 1, c + 1$.

Podemos observar a partir de (6.21) que la siniestralidad agregada esperada es

$$E[S] = (c - 1) \cdot p + (c + 1) \cdot q = c \cdot (p + q) - p + q = c - p + q$$

que debe ser menor que c para que el coeficiente de seguridad sea positivo. Es decir

$$c - p + q < c$$

de donde se debe cumplir que $p > q$.

Se resuelve a continuación el ejemplo concreto para unos valores de $p = 0.7, q = 0.3$ y $v = (1.1)^{-1}$, considerando diferentes valores de u y b , hallamos los siguientes resultados para $W(u, b)$,

$u \setminus b$	0	1	2	3	4	5
0	1.75000	2.13043	2.02958	1.74491	1.45050	1.19366
1		3.34782	3.18934	2.74200	2.27936	1.87576
2			4.14201	3.56104	2.96021	2.43605
3				4.42078	3.67489	3.02418
4					4.50617	3.70827
5						4.53120

(6.22)

El valor de $W(0, 0)$ se obtiene a partir de $W(u, b) = v \cdot p \cdot W(b, b) + v \cdot p + v \cdot q \cdot W(u - 1, b)$. Al hacer $u = b = 0$,

$$W(0, 0) = v \cdot p \cdot W(0, 0) + v \cdot p$$

de donde

$$W(0, 0) = \frac{v \cdot p}{1 - v \cdot p}$$

6.4.2 Solución caso $c = 1$

La ecuación de partida, de forma equivalente a (6.7) es,

$$W(u, b) = v \cdot \sum_{j=-u}^1 g_j \cdot W(u + j, b) \quad , \quad u = 0, 1, \dots, b - 1 \quad (6.23)$$

con la ecuación de contorno, caso de $u = b$,

$$W(b, b) = v \cdot \sum_{j=-b}^0 g_j \cdot W(b+j, b) + g_1 \cdot W(b, b) + g_1 \quad (6.24)$$

El proceso de resolución se basa en la siguiente fórmula de factorización (De Finetti (1957)),

$$W(u, b) = C(b) \cdot h(u) \quad (6.25)$$

A partir de (6.23), se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$h(u) = v \cdot \sum_{j=-u}^1 g_j \cdot h(u+j) \quad , \quad u = 0, 1, \dots, b \quad (6.26)$$

donde el cálculo de la función $h(u)$ se realiza mediante un proceso recursivo, expresando $h(u+1)$ en función de $h(0), h(1), \dots, h(u)$, asegurándose la existencia de una única solución.

Sustituyendo (6.25) en (6.24) se obtiene

$$C(b) \cdot h(u) = v \cdot \left[\sum_{j=-b}^1 g_j \cdot C(b) \cdot h(b+j) + g_1 \cdot C(b) \cdot h(b) + g_1 \right]$$

de donde

$$C(b) \cdot h(u) - v \cdot C(b) \cdot \sum_{j=-b}^1 g_j \cdot h(b+j) - g_1 \cdot C(b) \cdot h(b) \cdot v = v \cdot g_1$$

y al despejar $C(b)$,

$$C(b) = \frac{v \cdot g_1}{(1 - v \cdot g_1) \cdot h(b) - v \cdot \sum_{j=-b}^0 g_j \cdot h(b+j)} \quad (6.27)$$

Se halla, a partir de (6.26), para $u = b$ el valor de $h(b)$, obteniéndose

$$\begin{aligned} h(b) &= v \cdot \sum_{j=-b}^0 g_j \cdot h(b+j) + v \cdot g_1 \cdot h(b+1) \\ \sum_{j=-b}^0 g_j \cdot h(b+j) &= h(b) - v \cdot g_1 \cdot h(b+1) \end{aligned} \quad (6.28)$$

y sustituyendo (6.28) en (6.27),

$$C(b) = \frac{1}{h(b+1) - h(b)} \tag{6.29}$$

Sustituyendo (6.29) en (6.25), se obtiene

$$W(u, b) = \frac{h(u)}{h(b+1) - h(b)}$$

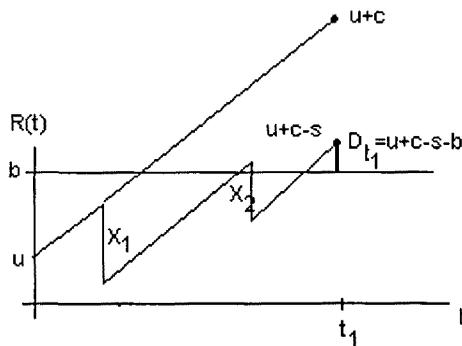
6.4.3 Solución caso general

El planteamiento del estudio del reparto de dividendos en momentos t_i para $i = 1, 2, 3, \dots$ implica el reparto de $D_{t_i} = \text{Max}\{(R^*(t_i) - b(t_i)), 0\}$, siendo $SD(t) = D_{t_1} + D_{t_2} + \dots + D_{t_s}$ la suma total de los dividendos repartidos en un intervalo $(0, t]$ para $t_s = \text{Max}\{t_s \leq \bar{\tau}\}$.

El reparto de dividendos dependerá de si $R^*(t_1)$ es mayor o menor que el nivel de la barrera $b(t)$, siendo $S(t_1) = s$ la siniestralidad agregada en el periodo $(0, t]$,

Para el cálculo de $W(u, b)$ planteamos las dos situaciones que nos podemos encontrar en el momento t_1 .

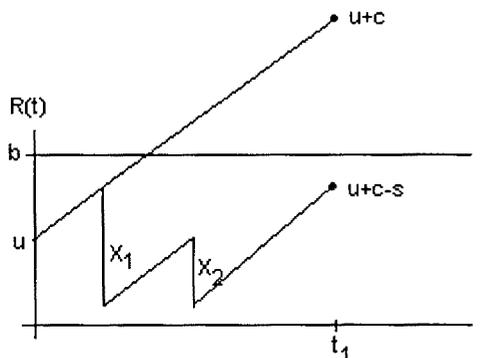
Caso 1 El primer caso es cuando $R^*(t_1) = u + c - s$ es mayor que el nivel de la barrera b . Gráficamente,



En ese caso los dividendos repartidos en $t_1, D_{t_1} = SD(t_1)$, son positivos siendo su importe la diferencia entre $R^*(t_1)$ y la barrera b , es decir $D_{t_1} = u +$

$c - s - b$. Además, para el cálculo de $W(u, b)$, se deben actualizar los dividendos futuros calculados en t_1 , que son $W(b, b)$.

Caso 2 La otra situación posible es cuando $R^*(t_1)$ es menor que el nivel de la barrera, independientemente de lo que haya ocurrido en el intervalo $(0, t_1]$. Gráficamente,



En este caso se deben actualizar los dividendos futuros valorados en t_1 , cuantía que asciende a $W(u + c - s, b)$.

6.4.3.1 Solución de $W(u, b)$

Para determinar la expresión de la esperanza del valor actual de los dividendos, formalizamos los casos descritos en la sección anterior, mediante la obtención de un sistema de ecuaciones.

Teniendo en cuenta que $u \leq b$, se pueden definir $b + 1$ ecuaciones para el cálculo de $W(u, b)$ para $u = 0, \dots, b$

Teorema 9 Para $x = 0, 1, \dots, c, c + 1, \dots, b$ se tiene

$$W(b - x, b) = v \cdot [W(b, b) \cdot F_S(c - x) + \sum_{s=0}^{c-(x+1)} (c - s - x) \cdot P_s + \sum_{s=1}^b W(b - s, b) P_{s+c-x}] \quad (6.30)$$

Demostración. Analizamos tres posibles situaciones

- Si el nivel inicial de las reservas coincide con el nivel de la barrera, $u = b$.

Recogemos primero el caso en que la siniestralidad s coincide con el ingreso por primas c . Por tanto, en t_1 , el nuevo nivel de las reservas es $b + c - s = b$,

$$W(b, b) \cdot P_c \tag{6.31}$$

En los casos en que la cuantía de los siniestros se encuentre en el intervalo $[0, c - 1]$, existirá reparto de dividendos, ya que $b + c - s$ es mayor que b , siendo $D_{t_1} = c - s$, quedando el nuevo nivel de las reservas en $u = b$,

$$\sum_{s=0}^{c-1} W(b + c - s, b) \cdot P_s = \sum_{s=0}^{c-1} (W(b, b) + (c - s)) \cdot P_s$$

o de forma equivalente,

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{c-1} (W(b, b) + (c - s)) \cdot P_s = \\ & = W(b, b) \cdot \sum_{s=0}^{c-1} P_s + \sum_{s=0}^{c-1} (c - s) \cdot P_s = \tag{6.32} \\ & = W(b, b) \cdot F_S(c - 1) + \sum_{s=0}^{c-1} (c - s) \cdot P_s \end{aligned}$$

Recogemos a continuación los casos en los que la cuantía de la siniestralidad agregada s , pertenece al intervalo $[c + 1, c + b]$. En estos casos el nivel de las reservas en t_1 , $b + c - s$, es menor que b , por tanto,

$$\sum_{s=c+1}^{b+c} W(b + c - s, b) \cdot P_s$$

Al aplicar el cambio de variable $r = s - c$, se obtiene

$$\sum_{s=c+1}^{b+c} W(b + c - s, b) \cdot P_s = \sum_{r=1}^b W(b - r, b) \cdot P_{r+c} \tag{6.33}$$

Por tanto, podemos escribir $W(b, b)$ como la suma actualizada de (6.31), (6.32) y (6.33),

$$\begin{aligned} W(b, b) = v \cdot [& W(b, b) \cdot F_S(c) + \sum_{s=0}^{c-1} (c - s) \cdot P_s + \\ & + \sum_{s=1}^b W(b - s, b) \cdot P_{s+c}] \tag{6.34} \end{aligned}$$

- Si el nivel inicial de las reservas es inferior a la barrera en menos de c unidades, $b - c < u < b$.

La ecuación planteada para $u = b - x$, cuando $x = 1, \dots, c - 1$, parte de tener en cuenta que el nuevo nivel de las reservas en t_1 es

$$b - x + c - s \quad (6.35)$$

La expresión (6.35) es mayor que b , y por tanto provoca reparto de dividendos, cuando $b - x + c - s > b \Rightarrow s < c - x$, situación que recoge el sumando

$$\sum_{s=0}^{c-(x+1)} W(b - x + c - s, b) \cdot P_s$$

donde se tendría que repartir $(c - s - x)$, siendo el nuevo nivel de las reservas b , por tanto

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{c-(x+1)} ((c - s - x) + W(b, b)) \cdot P_s = \\ & = W(b, b) \cdot F_S(c - (x + 1)) + \\ & + \sum_{s=0}^{c-(x+1)} (c - s - x) \cdot P_s \end{aligned} \quad (6.36)$$

La otra situación es cuando (6.35) es menor que b , es decir

$$b - x + c - s < b \Rightarrow s > c - x$$

en este caso no se produce reparto de dividendos. Además, para que no se produzca la ruina, se tiene que cumplir que

$$b - x + c - s \geq 0 \Rightarrow s \leq b - x + c$$

Así, la cuantía de s debe estar incluida en $[c - x + 1, c - x + b]$,

$$\sum_{s=c-x+1}^{c-x+b} W(b - x + c - s, b) \cdot P_s \quad (6.37)$$

Sobre (6.37) podemos hacer el cambio de variable $r = s - (c - x) \Rightarrow s = r + (c - x)$, obteniéndose

$$\sum_{r=1}^b W(b - r, b) \cdot P_{r+c-x} \quad (6.38)$$

Por último puede asumirse que

$$b - x + c - s = b \Rightarrow s = c - x$$

en cuyo caso tenemos

$$W(b, b) \cdot P_{c-x} \quad (6.39)$$

Agrupando (6.36), (6.38) y (6.39),

$$\begin{aligned} W(b-x, b) = & v \cdot [W(b, b) \cdot F_S(c - (x+1)) + \sum_{s=0}^{c-(x+1)} (c-s-x) \cdot P_s + \\ & + \sum_{r=1}^b W(b-r, b) \cdot P_{r+c-x} + W(b, b) \cdot P_{c-x}] \end{aligned} \quad (6.40)$$

pudiendo simplificarse (6.40) como,

$$\begin{aligned} W(b-x, b) = & v \cdot (W(b, b) \cdot F_S(c-x) + \\ & + \sum_{s=0}^{c-(x+1)} (c-s-x) \cdot P_s + \sum_{s=1}^b W(b-s, b) \cdot P_{s+c-x}) \end{aligned} \quad (6.41)$$

- **El nivel inicial de las reservas es inferior a la barrera en c o más unidades, $0 \leq u \leq b - c < b$.**

Planteamos la ecuación para $u = b - x$, cuando $x = c, c+1, \dots, b$. El nuevo nivel de las reservas en t_1 es $b - x + c - s$. Debido a los valores de x , el nuevo nivel de las reservas es siempre menor que b , por tanto no se produce reparto de dividendos,

$$W(b-x, b) = v \cdot \sum_{s=0}^{b+(c-x)} W(b-x+c-s, b) \cdot P_s \quad (6.42)$$

donde el extremo superior limita el caso en que el nuevo nivel de las reservas sea negativo,

$$b - x + c - s \geq 0 \Rightarrow s \leq b + (c - x)$$

■

A partir de los tres casos anteriores, podemos observar que las expresiones obtenidas, (6.34), (6.41) y (6.42), pueden agruparse en la ecuación (6.30), válida para $W(b-x, b)$ para $x = 0, \dots, b$

6.4.3.2 Ejemplo

Podemos plantear un ejemplo concreto antes de hallar el sistema matricial asociado al sistema de ecuaciones. Por ejemplo para $b = 6$ y $c = 2$ se plantea un sistema de ecuaciones de $b + 1 = 7$ ecuaciones, que son,

$$W(6,6) = v \cdot [W(6,6) \cdot F_s(2) + (2 \cdot P_0 + P_1) + W(5,6) \cdot P_3 + W(4,6) \cdot P_4 + \\ + W(3,6) \cdot P_5 + W(2,6) \cdot P_6 + W(1,6) \cdot P_7 + W(0,6) \cdot P_8]$$

$$W(5,6) = v \cdot [W(6,6) \cdot F_s(1) + P_0 + W(5,6) \cdot P_2 + W(4,6) \cdot P_3 + \\ + W(3,6) \cdot P_4 + W(2,6) \cdot P_5 + W(1,6) \cdot P_6 + W(0,6) \cdot P_7]$$

$$W(4,6) = v \cdot [W(6,6) \cdot P_0 + W(5,6) \cdot P_1 + W(4,6) \cdot P_2 + W(3,6) \cdot P_3 + \\ + W(2,6) \cdot P_4 + W(1,6) \cdot P_5 + W(0,6) \cdot P_6]$$

$$W(3,6) = v \cdot [W(5,6) \cdot P_0 + W(4,6) \cdot P_1 + W(3,6) \cdot P_2 + W(2,6) \cdot P_3 + \\ + W(1,6) \cdot P_4 + W(0,6) \cdot P_5]$$

$$W(2,6) = v \cdot [W(4,6) \cdot P_0 + W(3,6) \cdot P_1 + \\ + W(2,6) \cdot P_2 + W(1,6) \cdot P_3 + W(0,6) \cdot P_4]$$

$$W(1,6) = v \cdot [W(3,6) \cdot P_0 + W(2,6) \cdot P_1 + W(1,6) \cdot P_2 + W(0,6) \cdot P_3]$$

$$W(0,6) = v \cdot [W(2,6) \cdot P_0 + W(1,6) \cdot P_1 + W(0,6) \cdot P_2]$$

El sistema formado por las ecuaciones anteriores se pueden expresar de forma matricial como,

$$\begin{pmatrix} W(6,6) \\ W(5,6) \\ W(4,6) \\ W(3,6) \\ W(2,6) \\ W(1,6) \\ W(0,6) \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} F_s(2)P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ F_s(1)P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ F_s(0)P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(6,6) \\ W(5,6) \\ W(4,6) \\ W(3,6) \\ W(2,6) \\ W(1,6) \\ W(0,6) \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \cdot P_0 + P_1 \\ P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyo resultado es,

$$\begin{pmatrix} W(6,6) \\ W(5,6) \\ W(4,6) \\ W(3,6) \\ W(2,6) \\ W(1,6) \\ W(0,6) \end{pmatrix} = L^{-1} \cdot v \cdot D$$

siendo

$$L = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - v \begin{pmatrix} F_s(2) & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ F_s(1) & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ F_s(0) & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} \right]$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 2 \cdot P_0 + P_1 \\ P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.4.3.3 Forma matricial del sistema

Se comprueba fácilmente que la generalización del sistema presentada en el apartado anterior y definido en el teorema 9, se puede expresar de forma matricial, llegando a

$$v \cdot A \cdot \bar{w} + v \cdot D = \bar{w} \quad (6.43)$$

Donde A es la matriz de coeficientes compuesta por diferentes submatrices,

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

siendo:

- M_1 un vector de $(c + 1)$ componentes

$$M_1 = \begin{pmatrix} F_S(c) \\ F_S(c-1) \\ F_S(c-2) \\ \vdots \\ F_S(0) \end{pmatrix}$$

- M_2 una matriz de orden $(c + 1) \times b$

$$M_2 = \begin{pmatrix} P_{c+1} & P_{c+2} & P_{c+3} & \cdots & P_{c+b} \\ P_c & P_{c+1} & P_{c+2} & \cdots & P_{c+b-1} \\ P_{c-1} & P_c & P_{c+1} & \cdots & P_{c+b-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_b \end{pmatrix}$$

- M_3 un vector nulo de $(b - c)$ componentes

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- M_4 una matriz de orden $(b - c) \times b$

$$M_4 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & \cdots & \cdots & P_{b-1} \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_{c+b-1} \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & \cdots & \cdots & \cdots & P_{c+b-2} \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & \cdots & \cdots & \cdots & P_{c+b-3} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & P_0 & \cdots & P_c \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada de orden

$(b + 1)$,

$$A = \begin{pmatrix} F_s(c) & P_{c+1} & P_{c+2} & P_{c+3} & \cdots & \cdots & P_{c+b} \\ F_s(c-1) & P_c & P_{c+1} & P_{c+2} & \cdots & \cdots & P_{c+b-1} \\ F_s(c-2) & P_{c-1} & P_c & P_{c+1} & \cdots & \cdots & P_{c+b-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_s(0) & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & \cdots & P_b \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & P_{b-1} \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & \cdots & \cdots & P_{c+b-1} \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & \cdots & \cdots & P_{c+b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & P_{c+b-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & P_0 & \cdots & P_c \end{pmatrix}$$

El vector de términos independientes D es de orden $(b + 1) \times 1$, formado por los c primeros elementos diferentes de cero, y los $(b + 1 - c)$ elementos restantes iguales a cero,

$$D = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s \\ \sum_{s=0}^{c-2} (c-s-1) \cdot P_s \\ \sum_{s=0}^{c-3} (c-s-2) \cdot P_s \\ \vdots \\ P_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector de incógnitas es,

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} W(b, b) \\ W(b-1, b) \\ W(b-2, b) \\ \vdots \\ W(b-c, b) \\ W(b-c-1, b) \\ \vdots \\ W(0, b) \end{pmatrix}$$

La resolución del sistema (6.43) es,

$$\bar{w} = [I - v \cdot A]^{-1} \cdot v \cdot D \quad (6.44)$$

Demostramos a continuación que $[I - v \cdot A]^{-1}$ es una matriz regular, lo que nos permite hallar solución para el sistema que determina \bar{w} .

$$\bar{w} = [I - v \cdot A]^{-1} \cdot v \cdot D$$

Hacemos $P = v \cdot A$, así $[I - v \cdot A]^{-1} = [I - P]^{-1}$.

Sabemos que si $\sum_{k=0}^{\infty} P^k$ es convergente, entonces

$$[I - P]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \quad (6.45)$$

por tanto si demostramos que $\sum_{k=0}^{\infty} P^k$ es convergente podemos asegurar la existencia de inversa de $I - P$.

Utilizamos la propiedad que nos asegura que si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente, es decir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \text{ es convergente} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ es convergente} \quad (6.46)$$

Trabajamos con la norma fila de la matriz P , definida como,

$$\|P\|_f = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

donde a_{ij} es el elemento perteneciente a la fila i –ésima y la columna j –ésima de la matriz P .

Vista la estructura de la matriz $P = v \cdot A$ podemos asegurar que $\|P\|_f < 1$, ya que al estar formada A por probabilidades la suma de las filas como máximo será 1, y al estar multiplicado por el factor v , ese máximo es menor que 1. Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P\|^k \text{ es convergente} \quad (6.47)$$

La norma fila cumple la siguiente propiedad,

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

que aplicada a la matriz P ,

$$\begin{aligned} \|P^k\| &= \|P^{k-1} \cdot P\| \leq \|P^{k-1}\| \cdot \|P\| \\ &\leq \|P^{k-2} \cdot P\| \cdot \|P\| \leq \|P^{k-2}\| \cdot \|P\|^2 \\ &\leq \|P^{k-3} \cdot P\| \cdot \|P\|^2 \leq \|P^{k-3}\| \cdot \|P\|^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

de donde, generalizando

$$\|P^k\| \leq \|P\|^k \quad (6.48)$$

A partir de (6.47) y (6.48) podemos asegurar que $\sum_{k=0}^{\infty} \|P^k\|$ es convergente, y teniendo en cuenta (6.46),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P^k\| \text{ es convergente} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} P^k \text{ es convergente}$$

y a partir de (6.45), queda demostrada la existencia de $[I - P]^{-1} = [I - v \cdot A]^{-1}$

6.4.3.4 Solución del sistema: Ejemplo

A continuación se presenta la resolución del sistema mediante un programa de elaboración propia en APL2 (Anexo IV), adjuntándose un ejemplo.

Los datos que necesita el problema son: el valor de la barrera, b , la intensidad de prima por unidad temporal, c , el número medio de siniestros, λ , y una

distribución para la cuantía individual de los siniestros z . A partir de esos datos el programa incluye el cálculo del coste total a partir de la siguiente recursión (Panjer, 1980)¹

$$f_S(s) = \sum_{y=1}^s \left(a + b \cdot \frac{y}{s} \right) \cdot f_Z(y) \cdot f_S(s-y) \quad , s = 1, 2, 3, \dots$$

que para una distribución de Poisson toma los valores concretos $a = 0$ y $b = \lambda$, siendo el valor de partida $F_S(0) = P_0$.

El ejemplo está calculado para la siguiente distribución de la cuantía individual de los siniestros,

z	$\mathbf{P}[Z = z]$
1	0.2
2	0.35
3	0.25
4	0.2

suponiendo que $c = 9$, $v = (1'05)^{-1}$ y $\lambda = 3$.

Se transcriben a continuación los resultados obtenidos para $b = 50$.

Teniendo en cuenta que las probabilidades para el coste total, necesarias para crear la matriz de coeficientes, van desde P_0 hasta P_{b+c} , encontramos un vector de probabilidades $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_{59}\}$ con los siguientes valores,

¹La programación de este algoritmo en MapleV puede encontrarse en Vilar and Garcia (1999)

$$P_s = \begin{pmatrix}
 0.04978 & 0.02987 & 0.046301 & 0.07647 \\
 0.08223 & 0.07631 & 0.08685 & 0.087022 \\
 0.07753 & 0.07042 & 0.06411 & 0.05428 \\
 0.04472 & 0.03686 & 0.02957 & 0.02294 \\
 0.01759 & 0.01333 & 0.00987 & 0.00718 \\
 0.005167 & 0.00366 & 0.00255 & 0.00176 \\
 0.00120 & 0.0008086 & 0.0005375 & 0.0003537 \\
 0.0002303 & 0.00014 & 0.000094 & 0.0000598 \\
 0.000037 & 0.000023 & 0.000014 & 0.0000087 \\
 0 & \dots & \dots & 0
 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes es la siguiente,

$$D = \begin{pmatrix}
 2.6985 \\
 2.0861 \\
 1.55133 \\
 1.10349 \\
 0.74250 \\
 0.45784 \\
 0.25540 \\
 0.12944 \\
 0.04978 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Los resultados obtenidos de $W(u, 50)$ para $u = 50, 49, \dots, 1, 0$

$$W(u, 50) = \begin{pmatrix} 26.5664 & 25.7005 & 24.8523 & 24.0247 & 23.2196 & 22.4376 \\ 21.6810 & 20.9510 & 20.2453 & 19.5629 & 18.906 & 18.2716 \\ 17.6571 & 17.0630 & 16.4886 & 15.9335 & 15.3971 & 14.8785 \\ 14.3771 & 13.8925 & 13.4237 & 12.9704 & 12.5318 & 12.1075 \\ 11.6968 & 11.2992 & 10.9141 & 10.5407 & 10.1787 & 9.8272 \\ 9.4856 & 9.1531 & 8.8290 & 8.5123 & 8.2021 & 7.8975 \\ 7.5972 & 7.3002 & 7.0052 & 6.7108 & 6.4157 & 6.1022 \\ 5.7819 & 5.4530 & 5.1139 & 4.7629 & 4.3983 & 4.0207 \\ 3.6318 & 3.2308 & 2.8208 & & & \end{pmatrix}$$

Para los mismos datos iniciales, hemos hallado resultados para valores de la barrera comprendidos entre $b = 10$ y $b = 100$. Podemos analizar los resultados obtenidos agrupando algunos de los resultados obtenidos:

- Los valores obtenidos para $W(b, b)$ son los siguientes,

b	10	11	12	13	14
$W(b, b)$	21.5279	22.3576	23.0802	23.7	24.224
b	15	16	17	18	19
$W(b, b)$	24.66	25.025	25.32	25.56	25.76
b	30	31	32
$W(b, b)$	26.49	26.509	26.521
b	50	51	52
$W(b, b)$	26.5664	26.5665	26.5667
b	...	91	92	...	99
$W(b, b)$...	25.56728187	26.56728189	...	26.56728195

Podemos observar en los resultados, que para valores de las reservas iniciales coincidentes con el nivel de la barrera b , cuanto mayor es $u = b$, mayor es la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, lo que se debe a que el momento de ruina se retrasa, permitiéndose el reparto de dividendos durante un mayor periodo de tiempo.

Los datos obtenidos para $W(b, b)$ nos llevan a plantearnos la existencia de un valor asintótico al que tiende $W(b, b)$ cuando b tiende a infinito. Podemos asegurar la existencia de una asíntota comprobando que el límite de b que tiende a infinito del incremento de $W(b, b)$, es decir $\Delta W(b, b)$, es cero. Realizamos a continuación esta demostración partiendo de la ecuación (6.34),

$$W(b, b) = v \cdot \left[W(b, b) \cdot F_S(c) + \sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s + \sum_{s=1}^b W(b-s, b) \cdot P_{s+c} \right]$$

expresión que podemos escribir como,

$$W(b, b) = \frac{v}{1-v \cdot F_S(c)} \cdot \left[\sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s + \sum_{s=1}^b W(b-s, b) \cdot P_{s+c} \right] \quad (6.49)$$

Para el cálculo de $\Delta W(b, b)$ se necesita el valor de $W(b+1, b+1)$, que a partir de (6.49) es,

$$W(b+1, b+1) = \frac{v}{1-v \cdot F_S(c)} \cdot \left[\sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s + \sum_{s=1}^{b+1} W(b+1-s, b+1) \cdot P_{s+c} \right] \quad (6.50)$$

A partir de (6.49) y (6.50) hallamos el valor de $\Delta W(b, b) = W(b+1, b+1) - W(b, b)$,

$$\begin{aligned} \Delta W(b, b) &= \frac{v}{1-v \cdot F_S(c)} \cdot \left[\sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s + \sum_{s=1}^{b+1} W(b+1-s, b+1) \cdot P_{s+c} - \sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s - \sum_{s=1}^b W(b-s, b) \cdot P_{s+c} \right] \end{aligned}$$

de donde, reagrupando sumandos, se obtiene,

$$\Delta W(b, b) = \frac{v}{1-v \cdot F_S(c)} \cdot \left[\sum_{s=1}^b (W(b+1-s, b+1) - W(b-s, b)) \cdot P_{s+c} + W(0, b+1) \cdot P_{b+1+c} \right] \quad (6.51)$$

Al aplicar el $\lim_{b \rightarrow \infty}$ de (6.51) podemos observar que el resultado obtenido es cero, ya que $(W(b + 1 - s, b + 1) - W(b - s, b))$, para $b \rightarrow \infty$, es equivalente a anular la probabilidad de ruina, por lo que podemos escribir

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (W(b + 1 - s, b + 1) - W(b - s, b)) = V(s) - V(s) = 0$$

y, de igual forma, $W(0, b + 1)$ es cero cuando $b \rightarrow \infty$, ya que es equivalente a eliminar la barrera en el proceso.

Por tanto, podemos asegurar la existencia de un valor asintótico al que tiende $W(b, b)$ cuando b tiende a infinito, de igual forma a lo que ocurría cuando asumíamos reparto continuo.

Además, se puede observar en (6.51) que $\Delta W(b, b)$ es siempre positivo, ya que a mayor es el nivel de las reservas, mayor es la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos. Es decir

$$(W(b + 1 - s, b + 1) - W(b - s, b)) > 0$$

- Para $u = 0$, los resultados para diferentes valores de b son los siguientes,

b	10	11	12	13	14	15	16
$W(0, b)$	9.4705	9.4053	9.3032	9.1685	9.0063	8.8217	8.6197
b	17	18	19	30	31
$W(0, b)$	8.4050	8.1815	7.9527	5.5781	5.3929
b	32	50	51	52	...
$W(0, b)$	5.2133	2.8208	2.7260	2.6343	...
b	...	91	92	99	
$W(0, b)$...	0.6942	0.6709			0.5280	

En este cuadro se observa que para un mismo valor de u , en este caso $u = 0$, a mayor es el valor de la barrera, menor es $W(0, b)$.

6.4.3.5 Resolución del caso dicotómico por el sistema matricial

Aplicamos el sistema matricial hallado para la resolución del caso concreto planteado por Bühlmann (1970). En este caso el sistema matricial toma la

forma:

$$\begin{pmatrix} W(b, b) \\ W(b-1, b) \\ W(b-2, b) \\ \vdots \\ W(0, b) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I - v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{c-1} & P_{c+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ P_{c-1} & 0 & P_{c+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{c-1} & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ & & & & P_{c-1} & 0 & P_{c+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{c-1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_{c-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} v$$

Si aplicamos el método del sistema matricial para resolver el ejemplo resuelto en el apartado 6.3.1., donde $p = 0.7$, $q = 0.3$ y $v = (1.1)^{-1}$, con unos valores de la barrera b comprendidos entre 0 y 5, suponiendo $c = 1$, tendremos que la distribución del coste total es,

s	P_s
0	0.7
2	0.3

por tanto $P_0 = 0.7$, $P_2 = 0.3$ y $P_i = 0 \forall i \neq 0, 2$.

Para $b = 5$, el sistema matricial es,

$$\begin{pmatrix} W(5, 5) \\ W(4, 5) \\ W(3, 5) \\ W(2, 5) \\ W(1, 5) \\ W(0, 5) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I - v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 + P_1 P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

que toma la forma concreta,

$$\begin{pmatrix} W(5, 5) \\ W(4, 5) \\ W(3, 5) \\ W(2, 5) \\ W(1, 5) \\ W(0, 5) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I - v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

cuya solución es

$$\begin{pmatrix} W(5, 5) \\ W(4, 5) \\ W(3, 5) \\ W(2, 5) \\ W(1, 5) \\ W(0, 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.53120 \\ 3.70827 \\ 3.02418 \\ 2.43605 \\ 1.87576 \\ 1.19366 \end{pmatrix}$$

Para $b = 4$, el sistema matricial es,

$$\begin{pmatrix} W(4, 4) \\ W(3, 4) \\ W(2, 4) \\ W(1, 4) \\ W(0, 4) \end{pmatrix} = \left[I - v \begin{pmatrix} P_0 + P_1 P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \right]^{-1} v \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siendo la solución

$$\begin{pmatrix} W(4, 4) \\ W(3, 4) \\ W(2, 4) \\ W(1, 4) \\ W(0, 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.50617 \\ 3.67489 \\ 2.96021 \\ 2.27936 \\ 1.45050 \end{pmatrix}$$

Para $b = 3$, el sistema matricial es,

$$\begin{pmatrix} W(3, 3) \\ W(2, 3) \\ W(1, 3) \\ W(0, 3) \end{pmatrix} = \left[I - v \begin{pmatrix} P_0 + P_1 P_2 & P_3 & P_4 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \right]^{-1} v \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.42078 \\ 3.56104 \\ 2.74200 \\ 1.74491 \end{pmatrix}$$

Para $b = 2$, el sistema matricial es,

$$\begin{pmatrix} W(2, 2) \\ W(1, 2) \\ W(0, 2) \end{pmatrix} = \left[I - v \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & P_2 & P_3 \\ P_0 & P_1 & P_2 \\ 0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \right]^{-1} v \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.14201 \\ 3.18934 \\ 2.02958 \end{pmatrix}$$

Para $b = 1$, el sistema matricial es

$$\begin{pmatrix} W(1,1) \\ W(0,1) \end{pmatrix} = \left[I - v \begin{pmatrix} P_0+P_1 & P_2 \\ P_0 & P_1 \end{pmatrix} \right]^{-1} v \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.34782 \\ 2.13043 \end{pmatrix}$$

Para $b = 0$, el sistema matricial se convierte en la siguiente ecuación,

$$W(0,0) = [1 - v \cdot (P_0 + P_1)]^{-1} \cdot v \cdot P_0 = 1.75$$

Los resultados obtenidos coinciden con los hallados en la tabla (6.22).

6.4.3.6 Resolución del caso $c = 1$ por el sistema matricial

El sistema matricial general queda simplificado en la siguiente expresión asumiendo las hipótesis planteadas en el caso resuelto por Gerber (1972),

$$\begin{pmatrix} W(b,b) \\ W(b-1,b) \\ W(b-2,b) \\ \vdots \\ \vdots \\ W(0,b) \end{pmatrix} = \left[I - v \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots & P_{b+1} \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots & P_b \\ 0 & P_0 & P_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & P_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & P_0 & P_1 & P_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \right]^{-1} v \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.4.4 Solución recursiva para $c = 1$

Al suponer que la prima ingresada en un periodo es igual a la unidad, $c = 1$, se puede plantear un proceso recursivo para el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos, $W(u, b)$. Presentamos una solución alternativa a Gerber (1972). Sabemos que $E[S] < c = 1$, entonces $P_0 > 0$.

Podemos enunciar el siguiente teorema,

Teorema 10 *Se cumple que*

$$W(b-x, b) = \frac{1}{C_1(x)} \cdot \left(C_3(x) + \sum_{s=x+1}^b W(b-s, b) \cdot C_2(s, x) \right), x = 0, 1, \dots, b-1$$

siendo

$$\begin{aligned} C_1(x+1) &= C_1(x) (1 - v P_1) - v P_0 C_2(x+1, x) \\ C_2(s, x+1) &= C_2(s, x) v P_0 + C_1(x) v P_{s-x} \quad , \quad s = x+2, \dots, b \\ C_3(x+1) &= v P_0 C_3(x) = v^{x+2} P_0^{x+2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C_1(0) &= 1 - v P_1 - v P_0 \\ C_2(s, 0) &= v P_{s+1} \quad , \quad s = 1, \dots, b \\ C_3(0) &= v P_0 \end{aligned}$$

y

$$W(0, b) = \frac{C_3(b)}{C_1(b)}$$

Demostración. Planteamos la ecuación para $W(u, b)$ cuando $u = b$, que podemos obtener a partir de (6.30) haciendo $c = 1$ y $x = 0$,

$$W(b, b) = v \left[P_0 + W(b, b) P_0 + W(b, b) P_1 + \sum_{s=2}^{b+1} W(b+1-s, b) P_s \right]$$

de donde

$$(1 - v P_1 - v P_0) W(b, b) = v P_0 + v \sum_{s=2}^{b+1} W(b+1-s, b) P_s \quad (6.52)$$

y despejando $W(b, b)$ de (6.52) y haciendo un cambio de variable en el sumatorio,

$$W(b, b) = \frac{1}{1 - v P_1 - v P_0} \left(v P_0 + v \sum_{s=1}^b W(b-s, b) P_{s+1} \right) \quad (6.53)$$

Si planteamos la ecuación para $u = b - 1$, haciendo $x = 1$ y $c = 1$ en (6.30) se obtiene,

$$W(b-1, b) = v \left[W(b, b) P_0 + W(b-1, b) P_1 + \sum_{s=2}^b W(b-s, b) P_s \right]$$

y sacando factor común de $W(b-1, b)$ se obtiene

$$W(b-1, b) = \frac{v}{1 - v P_1} \left[W(b, b) P_0 + \sum_{s=2}^b W(b-s, b) P_s \right] \quad (6.54)$$

Al plantear la ecuación para $u = b - 2$

$$W(b-2, b) = v \cdot [W(b-1, b) \cdot P_0 + W(b-2, b) \cdot P_1 + \sum_{s=2}^{b-1} W(b-1-s, b) \cdot P_s]$$

de donde

$$W(b-2, b) = \frac{v}{1-v \cdot P_1} \cdot \left[W(b-1, b) \cdot P_0 + \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot P_s \right]$$

Al desarrollar de forma sucesiva podemos observar que la expresión genérica para $u = b - x$,

$$W(b-x, b) = v \cdot [W(b-x+1, b) \cdot P_0 + W(b-x, b) \cdot P_1 + \sum_{s=2}^{b-x+1} W(b-x+1-s, b) \cdot P_s] \quad (6.55)$$

que podemos escribir como

$$W(b-x, b) = v \cdot [W(b-x+1, b) \cdot P_0 + W(b-x, b) \cdot P_1 + \sum_{s=1}^{b-x} W(b-x-s, b) \cdot P_{s+1}]$$

En (6.54) sustituimos el valor de $W(b, b)$ obtenido en (6.53)

$$W(b-1, b) = \frac{v}{1-v \cdot P_1} \cdot \left[\frac{1}{1-v \cdot P_1 - v \cdot P_0} \cdot (v \cdot P_0 + v \cdot \sum_{s=2}^{b+1} W(b+1-s, b) \cdot P_s) \cdot P_0 + \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot P_s \right] \quad (6.56)$$

Operamos sobre la expresión (6.56),

$$W(b-1, b) = \frac{v^2 \cdot P_0^2}{(1-v \cdot P_1)(1-v \cdot P_1 - v \cdot P_0)} + \frac{v^2 \cdot P_0}{(1-v \cdot P_1)(1-v \cdot P_1 - v \cdot P_0)} \cdot \sum_{s=2}^{b+1} W(b+1-s, b) \cdot P_s + \frac{v}{1-v \cdot P_1} \cdot \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot P_s \quad (6.57)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{b+1} W(b+1-s, b) \cdot P_s &= W(b-1, b) \cdot P_2 + \sum_{s=3}^{b+1} W(b+1-s, b) \cdot P_s = \\ &= W(b-1, b) \cdot P_2 + \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot P_{s+1} \end{aligned} \quad (6.58)$$

al sustituir (6.58) en (6.57),

$$\begin{aligned}
 W(b-1, b) &= \frac{v^2 P_0^2}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} + \\
 &+ \frac{v^2 P_0}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} \cdot W(b-1, b) \cdot P_2 + \\
 &+ \frac{v^2 P_0}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} \cdot \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot P_{s+1} + \\
 &+ \frac{v}{1-v P_1} \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot P_s
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Operando sobre (6.59),

$$\begin{aligned}
 W(b-1, b) &= \frac{v^2 P_0^2}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} + \\
 &+ \frac{v^2 P_0}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} \cdot W(b-1, b) \cdot P_2 + \\
 &+ \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot \left(\frac{v^2 P_0 P_{s+1}}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} + \frac{v P_s}{1-v P_1} \right)
 \end{aligned}$$

de donde sacando factor común de $W(b-1, b)$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)-v^2 P_0 P_2}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} \right) \cdot W(b-1, b) &= \frac{v^2 P_0^2}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} + \\
 + \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot \left(\frac{v^2 P_0 P_{s+1} + v P_s (1-v P_1-v P_0)}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)} \right)
 \end{aligned}$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned}
 W(b-1, b) &= \frac{1}{(1-v P_1)(1-v P_1-v P_0)-v^2 P_0 P_2} \cdot (v^2 \cdot P_0^2 + \\
 &+ \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot (v^2 \cdot P_0 \cdot P_{s+1} + \\
 &+ v \cdot P_s (1-v \cdot P_1 - v \cdot P_0))
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

Si consideramos,

$$\begin{aligned}
 C_1(1) &= (1-v \cdot P_1) \cdot (1-v \cdot P_1 - v \cdot P_0) - v^2 \cdot P_0 \cdot P_2 \\
 C_2(s, 1) &= v^2 \cdot P_0 \cdot P_{s+1} + v \cdot P_s \cdot (1-v \cdot P_1 - v \cdot P_0) \\
 C_3(1) &= v^2 \cdot P_0^2
 \end{aligned}$$

podemos escribir (6.60) como,

$$W(b-1, b) = \frac{1}{C_1(1)} \cdot \left(C_3(1) + \sum_{s=2}^b W(b-s, b) \cdot C_2(s, 1) \right)$$

De donde, generalizando

$$W(b-x, b) = \frac{1}{C_1(x)} \cdot \left(C_3(x) + \sum_{s=x+1}^b W(b-s, b) \cdot C_2(s, x) \right) \quad (6.61)$$

A continuación demostramos (6.61) por inducción: Escribimos (6.55) para $x+1$,

$$W(b-(x+1), b) = v \cdot [W(b-x, b) \cdot P_0 + W(b-x-1, b) \cdot P_1 + \sum_{s=1}^{b-x-1} W(b-x-1-s, b) \cdot P_{s+1}]$$

que reagrupando queda

$$(1-v \cdot P_1) \cdot W(b-x-1, b) = v \cdot [W(b-x, b) \cdot P_0 + \sum_{s=1}^{b-x-1} W(b-x-1-s, b) \cdot P_{s+1}] \quad (6.62)$$

Sustituimos (6.61) en (6.62),

$$\begin{aligned} (1-v \cdot P_1) \cdot W(b-x-1, b) &= \\ &= v \cdot \left[\frac{1}{C_1(x)} \cdot \left(C_3(x) + \sum_{s=x+1}^b W(b-s, b) \cdot C_2(s, x) \right) \cdot P_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{b-x-1} W(b-x-1-s, b) \cdot P_{s+1} \right] \end{aligned}$$

o de forma equivalente,

$$\begin{aligned} (1-v \cdot P_1) \cdot W(b-x-1, b) &= \frac{v \cdot P_0 \cdot C_3(x)}{C_1(x)} + \\ &\quad + \frac{v \cdot P_0}{C_1(x)} \cdot \sum_{s=x+1}^b W(b-s, b) \cdot C_2(s, x) + \\ &\quad + v \cdot \sum_{s=1}^{b-x-1} W(b-x-1-s, b) \cdot P_{s+1} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Podemos escribir el segundo sumatorio de la expresión (6.63) como,

$$\begin{aligned} \sum_{s=x+1}^b W(b-s, b) \cdot C_2(s, x) &= W(b-x-1, b) \cdot C_2(x+1, x) + \\ &\quad + \sum_{s=x+2}^b W(b-s, b) \cdot C_2(s, x) \end{aligned} \quad (6.64)$$

Al sustituir (6.64) en (6.63), y despejando $W(b - x - 1, b)$ se obtiene,

$$W(b - x - 1, b) = \frac{1}{C_1(x)(1-vP_1) - vP_0 C_2(x+1, x)} \cdot (v \cdot P_0 \cdot C_3(x) + \sum_{s=x+2}^b W(b - s, b) \cdot (v \cdot P_0 \cdot C_2(s, x) + C_1(x) \cdot v \cdot P_{s-x})) \quad (6.65)$$

expresión que sigue la estructura de (6.61)

$$W(b - (x + 1), b) = \frac{1}{C_1(x+1)} \cdot (C_3(x + 1) + \sum_{s=x+1}^b W(b - s, b) \cdot C_2(s, x + 1)) \quad (6.66)$$

quedando demostrada (6.61).

Al comparar (6.65) con (6.66), hallamos el proceso recursivo para los coeficientes $C_1(x)$, $C_2(s, x)$ y $C_3(x)$

$$\begin{aligned} C_1(x + 1) &= C_1(x) \cdot (1 - v \cdot P_1) - v \cdot P_0 \cdot C_2(x + 1, x) \\ C_2(s, x + 1) &= v \cdot P_0 \cdot C_2(s, x) + C_1(x) \cdot v \cdot P_{s-x} \\ C_3(x + 1) &= v \cdot P_0 \cdot C_3(x) \end{aligned}$$

siendo los coeficientes iniciales los obtenidos de comparar (6.53) con (6.61), obteniéndose

$$\begin{aligned} C_1(0) &= 1 - v \cdot P_1 - v \cdot P_0 \\ C_2(s, 0) &= v \cdot P_{s+1} \\ C_3(0) &= v \cdot P_0 \end{aligned}$$

Planteamos a continuación el cálculo de $W(b, b)$. A partir de (6.55), para $x = b$

$$W(0, b) = v \cdot [W(1, b) \cdot P_0 + W(0, b) \cdot P_1]$$

expresión que podemos escribir como

$$(1 - v \cdot P_1) \cdot W(0, b) = v \cdot W(1, b) \cdot P_0 \quad (6.67)$$

A partir de (6.61), para $x = b - 1$, se obtiene

$$W(1, b) = \frac{1}{C_1(b-1)} \cdot (C_3(b-1) + W(0, b) \cdot C_2(b, b-1))$$

de donde

$$W(1, b) \cdot C_1(b-1) = C_3(b-1) + W(0, b) \cdot C_2(b, b-1) \quad (6.68)$$

Con las expresiones (6.67) y (6.68) hemos obtenido un sistema de ecuaciones, que, al multiplicar (6.67) por $C_1(b-1)$ y (6.68) por $v \cdot P_0$, toma la forma,

$$\begin{cases} (1 - v \cdot P_1) \cdot W(0, b) \cdot C_1(b-1) = v \cdot W(1, b) \cdot P_0 \cdot C_1(b-1) \\ W(1, b) \cdot C_1(b-1) \cdot v \cdot P_0 = C_3(b-1) \cdot v \cdot P_0 + \\ + W(0, b) \cdot C_2(b, b-1) \cdot v \cdot P_0 \end{cases}$$

de donde, restando ambas ecuaciones,

$$W(0, b) = \frac{v \cdot P_0 \cdot C_3(b-1)}{C_1(b-1) \cdot (1 - v \cdot P_1) - v \cdot P_0 \cdot C_2(b, b-1)}$$

siendo

$$C_3(b) = v \cdot P_0 \cdot C_3(b-1)$$

$$C_1(b) = C_1(b-1) \cdot (1 - v \cdot P_1) - v \cdot P_0 \cdot C_2(b, b-1)$$

■

6.5 Cuantificación de los dividendos repartidos:

Cálculo de $V(d)$

De forma análoga a la definición usada por Bühlmann (1970) para $W(u, b)$ en la que se analizaba el proceso en t_1 , podemos definir $V(d)$ como:

$$V(d) = \begin{cases} v \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} V(d-j) \cdot g_j & u \leq b \\ u - b + V(0) & u > b \end{cases} \quad (6.69)$$

Para $u \leq b$ el nivel de las reservas no alcanza la barrera constante, por tanto, no existe reparto de dividendos, pero sí se produce una actualización de los dividendos futuros que se repartirán. Si $L_t = j$, entonces la diferencia entre la barrera y el nivel de las reservas se ve disminuido en j , con probabilidad g_j .

Para $u > b$ las reservas iniciales son mayores que el nivel de la barrera. En este caso se reparte la diferencia entre el nivel de la barrera y el de las reservas, y se actualizan los dividendos repartidos en un futuro partiendo de $d = 0$.

6.5.1 Solución caso dicotómico

Para el caso dicotómico, partiendo de (6.69), podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias,

$$V(d) = \begin{cases} V(0) \cdot v \cdot p + v \cdot p + V(d+1) \cdot v \cdot q & d = 0 \\ V(d-1) \cdot v \cdot p + V(d+1) \cdot v \cdot q & d \geq 1 \end{cases} \quad (6.70)$$

De forma equivalente al cálculo de $W(u, b)$, planteamos la solución de $V(d)$. Podemos observar que

$$V(d) = V(d-1) \cdot v \cdot p + V(d+1) \cdot v \cdot q$$

ecuación en diferencias de segundo grado cuya ecuación característica es,

$$r^2 - \frac{1}{v \cdot q} \cdot r + \frac{p}{q} = 0$$

de donde obtenemos las raíces r_1 y r_2 , siendo la solución de la ecuación en diferencias de segundo orden de la forma:

$$V(d) = C_1 \cdot r_1^d + C_2 \cdot r_2^d \quad (6.71)$$

A continuación hallamos las condiciones de contorno necesarias para hallar los valores de C_1 y C_2 .

A partir de (6.70) se obtiene ,

$$V(0) = V(0) \cdot v \cdot p + v \cdot p + V(1) \cdot v \cdot q \quad (6.72)$$

de donde

$$V(0) = \frac{v \cdot p + v \cdot q \cdot V(1)}{1 - v \cdot p} \quad (6.73)$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} V(d) = 0 \quad (6.74)$$

y aplicando (6.74) en (6.71), sabiendo que $0 < r_2 < 1$, se puede afirmar que $C_1 = 0$, por lo que (6.71) se convierte en

$$V(d) = C_2 \cdot r_2^d \quad (6.75)$$

Por tanto

$$V(0) = C_2 \quad (6.76)$$

$$V(1) = C_2 \cdot r_2$$

Al sustituir (6.76) en (6.73), se obtiene

$$C_2 = \frac{v \cdot p + v \cdot q \cdot C_2 \cdot r_2}{1 - v \cdot p}$$

de donde

$$C_2 = \frac{v \cdot p}{1 - v \cdot p - v \cdot q \cdot r_2} \quad (6.77)$$

Al sustituir (6.77) en (6.75),

$$V(d) = \frac{v \cdot p}{1 - v \cdot p - v \cdot q \cdot r_2} \cdot r_2^d$$

Para unos valores de $p = 0.7$, $q = 0.3$ y $v = (1.1)^{-1}$, obtenemos para diferentes valores de d , los siguientes resultados de $V(d)$,

d	$V(d)$
0	4.54138
1	3.72184
2	3.05019
3	2.49975
4	2.04864
5	1.67894

A mayor es el valor de d , menor es la esperanza del valor actual de los dividendos, lo que intuitivamente era previsible, ya que a mayor es la distancia, más tarde se producirá el reparto de dividendos, y por tanto menor es el valor de su actualización.

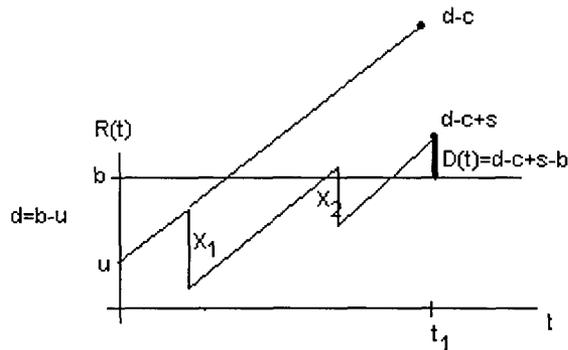
Nos planteamos a continuación el cálculo de $V(d)$ en campo discreto para el caso general de la siniestralidad agregada. Para ello analizamos la situación del proceso de las reservas en el momento t_1 .

El reparto de dividendos dependerá de la relación entre $R^*(t_1)$ y el nivel de la barrera b . Sabemos que,

$$R^*(t_1) = d + s - c$$

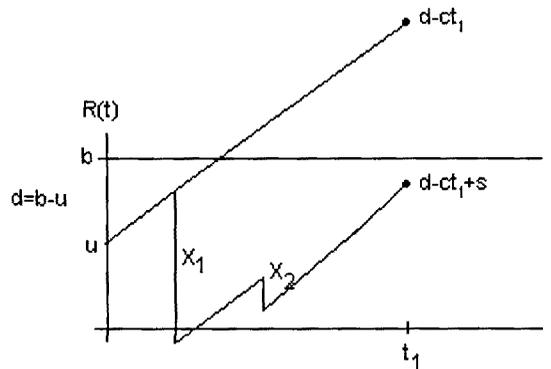
Podemos definir dos situaciones,

Caso 1 El primer caso es cuando $R^*(t_1) = d + s - c$ es mayor que el nivel de la barrera b . Gráficamente,



Los dividendos repartidos en t_1 , $D(t_1)$, es la diferencia entre $R^*(t_1)$ y la barrera b , es decir $D(t_1) = d + s - c - b$. Además, habrá que actualizar los dividendos futuros calculados en t_1 , que son $V(0)$, ya que tras el reparto de dividendos el nivel de las reservas u coincide con el nivel de la barrera, siendo $d = 0$

Caso 2 El caso en que $R^*(t_1)$ es menor que el nivel de la barrera, b , no produce reparto de dividendos. Tendremos que actualizar los dividendos futuros en t_1 , que son $V(d + s - c)$. Gráficamente,



6.5.2 Solución de $V(d)$

De forma análoga al desarrollo utilizado para el cálculo de $W(u, b)$, podemos plantear el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos suponiendo que el proceso no acabe con la ruina $V(d)$.

Podemos plantear el siguiente teorema,

Teorema 11 *Se cumple que para $d \geq 0$,*

$$V(d) = v \cdot [V(0) \cdot F_s(c-d) + \sum_{s=0}^{c-d-1} (c-d-s) \cdot P_s + \sum_{s=0}^{\infty} V(s) \cdot P_{s+c-d}] \quad (6.78)$$

Demostración. De forma equivalente a la demostración realizada para $W(u, b)$, analizamos tres casos en función del valor de d , que después se pueden agrupar en una única expresión.

- **Para $d = 0$**

El nivel de las reservas en el momento t_1 es mayor o menor que el nivel de la barrera b en función de si c es mayor o menor que s .

La primera situación se da cuando $c > s$. En este caso el nivel de las reservas en t_1 queda por encima del nivel de la barrera, y por tanto existe

reparto de dividendos, siendo

$$D(t_1) = c - s$$

Actualizaremos también los dividendos futuros en t_1 que serán $V(0)$. Es decir,

$$\sum_{s=0}^{c-1} ((c-s) + V(0)) \cdot P_s$$

o de forma equivalente,

$$\sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s + V(0) \cdot \sum_{s=0}^{c-1} P_s = \sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s + V(0) \cdot F_S(c-1) \quad (6.79)$$

Cuando $c < s$, el nuevo nivel de las reservas queda por debajo del nivel de la barrera, y por tanto no se produce reparto de dividendos. Se deben actualizar los dividendos futuros en t_1 , que vendrán representados por

$$\sum_{s=c+1}^{\infty} V(s-c) \cdot P_s$$

expresión sobre la que podemos hacer el cambio de variable $r = s - c$, llegando a

$$\sum_{r=1}^{\infty} V(r) \cdot P_{r+c} \quad (6.80)$$

Analizamos el caso en que $c = s$. En este caso no existe reparto de dividendos, siendo el valor de los dividendos futuros en t_1 , $V(0)$, por tanto

$$V(0) \cdot P_c \quad (6.81)$$

Agrupando (6.79), (6.80) y (6.81), y actualizando el resultado, llegamos a,

$$\begin{aligned} V(d) &= v \cdot \left[\sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s + V(0) \cdot F_S(c-1) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^{\infty} V(r) \cdot P_{r+c} + V(0) \cdot P_c \right] = \\ &= v \cdot \left[V(0) \cdot F_S(c) + \sum_{s=0}^{c-d-1} (c-s) \cdot P_s + \sum_{s=1}^{\infty} V(s) \cdot P_{s+c} \right] \end{aligned} \quad (6.82)$$

• Para $d < c$.

En este caso puede existir reparto de dividendos o no en función de si $u + c - s$ es mayor o menor que b . Si $u + c - s > b$ existe reparto de dividendos, de donde $s < c - d$, situación que podemos representar como,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{c-d-1} ((c-s-d) + V(0)) \cdot P_s &= \\ &= \sum_{s=0}^{c-d-1} (c-s-d) \cdot P_s + \sum_{s=0}^{c-d-1} V(0) \cdot P_s \end{aligned} \quad (6.83)$$

Si $u + c - s \leq b$ no existe reparto de dividendos, situación que se produce cuando $s \geq c - d$. Por tanto

$$\sum_{s=c-d}^{\infty} V(d+s-c) \cdot P_s$$

y si realizamos el cambio de variable $r = d + s - c$, llegamos a,

$$\sum_{r=0}^{\infty} V(r) \cdot P_{r+c-d} \quad (6.84)$$

Agrupando (6.83) y (6.84),

$$\begin{aligned} V(d) &= v \cdot \left[\sum_{s=0}^{c-d-1} (c-s-d) \cdot P_s + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=0}^{c-d-1} V(0) \cdot P_s + \sum_{s=0}^{\infty} V(s) \cdot P_{s+c-d} \right] = \\ &= v \cdot [V(0) \cdot F_S(c-d-1) + \\ &\quad + \sum_{s=0}^{c-d-1} (c-d-s) \cdot P_s + \sum_{s=0}^{\infty} V(s) \cdot P_{s+c-d}] \end{aligned} \quad (6.85)$$

• Para $d \geq c$

En este caso no se produce reparto de dividendos, ya que aunque la siniestralidad s fuese cero, debido a que la distancia es mayor que la intensidad de prima, no se supera el nivel de la barrera. Por tanto,

$$V(d) = v \cdot \left[\sum_{s=0}^{\infty} V(d-c+s) \cdot P_s \right] \quad (6.86)$$

■

pudiendo plantearse el valor de $V(d)$ para $d \rightarrow \infty$, lo que nos llevaría a un sistema con infinitas ecuaciones, cuya expresión matricial es,

$$v \begin{pmatrix} F_s(3) & P_4 & P_5 & P_6 & \cdots \\ F_s(2) & P_3 & P_4 & P_5 & \cdots \\ F_s(1) & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots \\ F_s(0) & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdots \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ V(3) \\ V(4) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3P_0 + 2P_1 + P_2 \\ 2P_0 + P_1 \\ P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ V(3) \\ V(4) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

6.5.2.2 Forma matricial del sistema

La expresión generalizada del sistema matricial es,

$$v \cdot (A \cdot \bar{v} + D) = \bar{v}$$

siendo A la matriz de coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} N_1 & N_3 \\ N_2 & N_4 \end{pmatrix}$$

donde N_1 es una matriz de orden $(c+1) \times 1$ siendo,

$$N_1 = \begin{pmatrix} F_s(c) \\ F_s(c-1) \\ F_s(c-2) \\ \vdots \\ F_s(0) \end{pmatrix}$$

donde N_2

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

donde N_3

$$N_3 = \begin{pmatrix} P_{c+1} & P_{c+2} & P_{c+3} & \cdots \\ P_c & P_{c+1} & P_{c+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

donde

$$N_4 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdots \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Siendo D la matriz de términos independientes,

$$D = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s \\ \sum_{s=0}^{c-2} (c-1-s) \cdot P_s \\ \sum_{s=0}^{c-3} (c-2-s) \cdot P_s \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La solución de \bar{v} sólo es posible en aquellos casos en que limitemos el número de ecuaciones que forman el sistema.

Por ejemplo, podemos plantearnos sólo el cálculo de $V(d)$ hasta un valor de d determinado. La explicación es que para valores de d muy superiores al nivel de la barrera b , nos encontramos en niveles de ruina con reservas negativas muy elevadas. Además, esos valores implicarían cuantías de la siniestralidad agregada muy elevadas, cuyas probabilidades pueden ser consideradas, en ciertos casos, casi nulas.

Capítulo 7

Conclusiones: sinopsis y aportaciones

El análisis de la solvencia en las carteras de seguros es uno de los temas claves desarrollados a lo largo de toda la literatura actuarial. Desde los primeros trabajos que planteaban topes para la probabilidad de ruina en los modelos clásicos de las reservas, el tema ha evolucionado y se han ido cambiando y ampliando las hipótesis básicas del proceso de las reservas.

Tal y como se ha comentado a lo largo del trabajo, en ausencia de barrera, la existencia de un recargo de seguridad positivo produce que aquellas trayectorias de las reservas que no se arruinan tiendan a infinito con probabilidad uno (De Finetti (1957)). De esta paradoja surgió la idea de modificar los modelos con políticas de reparto de dividendos que limiten un crecimiento excesivo en el nivel de las reservas que acabe produciendo un alto coste de capital. Además, la importancia del reparto a los accionistas de parte de las reservas consideradas excedentes, es un hecho clave en la política empresarial como forma de recabar el capital inicial del negocio.

Tal y como hemos visto, el reparto de dividendos puede estar sujeto a varios criterios. Así, se puede optar entre repartir siempre que las reservas alcancen

el nivel máximo predeterminado, independientemente del momento en que este hecho se produzca (reparto continuo), o bien comparar el nivel de las reservas con el tope prefijado sólo en determinados momentos del tiempo, permitiéndose reservas más elevadas en cualquier otro momento del tiempo (reparto discreto).

La introducción de estas políticas, representadas formalmente en el modelo como barreras de dividendos, $b(t)$, tienen un efecto negativo sobre la probabilidad de supervivencia de la cartera, ya que siniestros que en el modelo sin barrera no producirían la ruina, en los modelos con reparto que limitan el crecimiento de las reservas, pueden acabar produciendo niveles negativos de las reservas. Por tanto, un primer efecto que hemos analizado en la tesis es como se ve afectada la probabilidad de ruina con la introducción de barreras de dividendos.

Así, surgió la necesidad de cuantificar los dividendos repartidos a lo largo del tiempo. Se ha comentado que la magnitud elegida es la esperanza del valor actual de los dividendos. La utilización de la esperanza en todos los trabajos existentes en la literatura actuarial como medida de cuantificación no exime de la importancia de plantearse otras medidas que aporten más información sobre la distribución de la variable aleatoria "dividendos repartidos". Sin duda alguna, la inclusión del análisis de la varianza como dato complementario es un tema que será objeto de futuros trabajos. Debido a la complicación analítica que conlleva tratar con la varianza, la simulación puede ser una buena metodología que nos ayude a obtener conclusiones para valorar la necesidad de complementar el análisis con la medida de dispersión.

Las dos hipótesis usadas en el cálculo de la esperanza han sido asumir que en el momento de ruina se produce el final del proceso (W), y asumir que se permiten niveles de reservas negativos y la posterior recuperación del proceso (V).

Como medidas complementarias hemos presentado en el trabajo dos nuevas magnitudes que hemos aplicado al análisis de la barrera constante. Por un lado hemos condicionado la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos a que éstos sean positivos, y por otro lado hemos planteado el cálculo del tiempo promedio de espera hasta que se empiecen a repartir dividendos. Consideramos

que estos datos aportan información adicional útil para una mejor comprensión del modelo.

Las hipótesis asumidas para el reparto de dividendos, así como la formalización presentada del reparto de dividendos que incluye la definición de nuevas variables en el caso de asumir reparto discreto, se han recogido en el capítulo 2.

En la tesis se ha profundizado sobre las barreras existentes en la literatura actuarial, que como ya hemos comentado son la barrera constante y la barrera lineal, para introducir una nueva política de dividendos representada por la barrera parabólica.

En el Capítulo 3, la tesis se ha centrado en el análisis de la barrera de dividendos constante, asumiendo reparto continuo en un horizonte temporal infinito. El capítulo ha tratado en primer lugar de la influencia sobre la solvencia, remarcándose que la probabilidad de ruina en modelos que determinan un tope máximo constante para el crecimiento de la barrera es uno, incluyéndose la demostración de que la ruina es segura (Egídio dos Reis (1999)).

Sobre la cuantificación de los dividendos repartidos se han recogido los trabajos existentes sobre el tema, en los que se plantea el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos mediante el argumento diferencia, basado en la ocurrencia o no de un siniestro en un diferencial de tiempo. Dado que se asume que el modelo se comporta según una Poisson compuesta, la probabilidad de ocurrencia o no de siniestro en un diferencial de tiempo, viene determinado por $\lambda \cdot dt$ y $(1 - \lambda \cdot dt)$ respectivamente.

En la tesis se ha presentado un proceso alternativo, denominado argumento de renovación. La idea de incluir este desarrollo surge del trabajo de Grandell (1991) en el que se plantea el argumento de renovación, alternativo al diferencial, para el cálculo de la probabilidad de ruina.

La introducción de la esperanza del valor actual de los dividendos condicionados a que éstos sean positivos y el tiempo promedio de espera, busca aportar nuevos datos al análisis del modelo.

Se ha incluido a su vez en el capítulo la expresión de las magnitudes comentadas bajo la hipótesis de que la cuantía de los siniestros se distribuya según

una exponencial. El hecho de conseguir expresiones analíticas, nos ha permitido introducir la parte final del capítulo, en la que hemos presentado estudios de sensibilidad en función de las variables de control iniciales del modelo, es decir, nivel inicial de las reservas y nivel de la barrera.

Remarcable, a nuestro parecer, es la profundización que se ha realizado sobre el valor de la barrera que maximiza la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos asumiendo que el proceso acabe en el momento de ruina. Büllhman (1970) determina una barrera b^* que actúa como óptimo. Así, la idea inicial de que el valor en el que se determina la barrera b está directamente relacionado con los dividendos repartidos, es decir que a mayor b menos cuantía de dividendos se reparte, queda anulada. La causa es que el efecto de una barrera más alta, no sólo retrasa el momento de inicio de reparto de dividendos, sino que también provoca un retraso en el momento de ruina que permitirá repartir dividendos durante más tiempo, con lo que este hecho conlleva de positivo para el reparto de dividendos. Ese valor b^* es independiente del nivel inicial de las reservas, u . Y teniendo en cuenta que $u \leq b$, condicionamos el valor de la barrera que maximiza los dividendos a su relación con u .

Incluimos la determinación de un óptimo conjunto, es decir, la determinación de la combinación óptima del nivel inicial de las reservas y de la barrera cuando consideramos que podemos determinar ambas. Analizada la sensibilidad de $W(u, b)$ respecto a u y b de forma independiente, concluimos que las combinaciones conjuntas óptimas son aquellas en que $u = b = k$, de tal forma que a mayor k , mayor es la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos. Pero debe tenerse en cuenta que incrementar u representa un esfuerzo económico que debe tenerse en cuenta en el análisis, de ahí que incluyamos al final del capítulo interpretaciones económicas que valoran este hecho.

Se ha propuesto también una combinación óptima que se obtiene a partir de la comparación entre las reservas iniciales, consideradas como la aportación de los accionistas, con la esperanza del valor actual de los dividendos, considerados como el resultado de la inversión realizada por los accionistas. Surge de esa comparación un valor determinado umbral de eficiencia que determina el

tramo considerado eficiente, hallándose el valor que, en ese tramo, optimiza la rentabilidad de los inversores.

En el Capítulo 4 hemos profundizado sobre otra de las barreras presentadas en la literatura actuarial, la barrera lineal, $b(t) = b + at$. Su característica diferenciadora básica respecto a la barrera constante, es que elimina el tope máximo permitido para la acumulación de reservas, lo que hace que la ruina ya no sea segura. De ahí que el primer apartado del capítulo se centre en el análisis de la probabilidad de ruina, recogiendo el planteamiento diferencial para su cálculo, así como el método recursivo de resolución de la ecuación en derivadas parciales obtenida (Gerber (1981)).

Como método alternativo incluimos el método alternativo o de renovación. El uso de esta metodología nos ha permitido hallar las expresiones necesarias para demostrar analíticamente las condiciones de contorno. Así, hemos obtenido la parcial de la probabilidad de supervivencia respecto al nivel inicial de las reservas, lo que nos permite demostrar que el valor de esa parcial para $u = b$ es igual a cero. Se adjuntan al final de este apartado unos resultados numéricos que permiten analizar el comportamiento de la probabilidad de supervivencia respecto a los niveles de u y b , así como respecto a la pendiente de la barrera a .

En el apartado 4.3. hemos trabajado con la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, tanto si se asume que el proceso acaba con la ruina (W), como si se permite la recuperación del proceso (V). De forma equivalente a lo que ocurría con la probabilidad de supervivencia, se recoge el argumento diferencial, y hemos aplicado el argumento de renovación a su cálculo, con la consiguiente utilidad que conlleva para demostrar analíticamente las condiciones de contorno. Los resultados numéricos obtenidos determinan el comportamiento respecto a u y b , así como respecto a la pendiente a . El hecho de que no dispongamos de expresiones analíticas, no nos permite determinar valores óptimos, tal y como nos ocurría en la barrera constante. A partir de los resultados obtenidos podemos determinar el comportamiento de los dividendos repartidos respecto a los parámetros que definen la barrera.

En el Capítulo 5 hemos presentado una nueva política de dividendos que

viene definida por la barrera parabólica, alternativa a las barreras existentes en la literatura actuarial. Tal y como hemos comentado en la introducción del capítulo, la existencia de políticas de dividendos equivalentes desde el punto de vista de la solvencia (es decir, barreras que produzcan la misma probabilidad de ruina), y que generen cuantías diferentes de dividendos repartidos en diferentes momentos del tiempo, nos llevó a la introducción de esta nueva barrera.

De forma análoga a lo que ocurre con la barrera lineal, no existe tope máximo de acumulación (es decir, que cuando la variable tiempo, t , tiende a infinito la barrera, $b(t)$, tiende a infinito) lo que evita que la ruina sea segura. Así, en el primer apartado del capítulo nos hemos planteado el cálculo de la probabilidad de ruina mediante el argumento diferencial y el argumento de renovación, adjuntándose resultados numéricos mediante programación en Fortran.

Para remarcar la existencia de barreras lineal y parabólica equivalentes desde el punto de vista de la solvencia, hemos adjuntado un programa que halla la barrera lineal que produce la misma probabilidad de ruina que la barrera parabólica. Estas barreras, evidentemente, generarán una esperanza del valor actual de los dividendos repartidos diferentes. Un análisis comparativo más profundo, que incluya solvencia y dividendos repartidos, es un tema al que dedicaremos futuros trabajos.

Hemos planteado también, mediante el uso del argumento diferencial, el cálculo de $W(u, b)$.

En el capítulo 6 se introduce el análisis de un modelo con reparto discreto, analizando concretamente la política de dividendos que viene determinada por una barrera de dividendos constante.

Tras asumir que los momentos de reparto son equidistantes, que la prima y la tasa de actualización son constantes para cada periodo, y que la siniestralidad acumulada en un intervalo es una variable aleatoria e idénticamente distribuida, hemos analizado la situación de las reservas y su comparación con la barrera de dividendos en el primer instante analizado, t_1 . Dado que nos encontramos con un proceso de renovación, el análisis de esa situación nos ha permitido plantear ecuaciones para determinar probabilidad de ruina y dividendos repartidos.

Sobre la probabilidad de ruina, hemos presentado la demostración de, que igual que sucedía cuando trabajamos en reparto continuo, la probabilidad de ruina es uno.

Los trabajos existentes en la literatura actuarial sobre reparto discreto de dividendos con barrera constante (Bullhman (1970) y Gerber (1972)) analizan casos concretos de la distribución del coste total en un periodo. Hemos generalizado estos trabajos, y hemos presentado el sistema de ecuaciones lineal que nos permite hallar $W(u, b)$ para cualquier distribución discreta del coste agregado. A continuación hemos hallado la forma matricial del sistema, presentándose la generalización de la matriz de coeficientes, del vector de incógnitas y el vector de términos independientes. Un ejemplo programado en APL nos ha servido para analizar como varía $W(u, b)$ en función del nivel inicial de las reservas, u , y del nivel de la barrera, b .

Hemos presentado un proceso recursivo, alternativo al presentado por Gerber (1972), para el caso de que la prima es uno, $c = 1$.

Al final del capítulo 6 se desarrolla, de forma análoga al proceso para $W(u, b)$, la solución para $V(d)$, es decir asumiendo que el proceso no acaba con la ruina.

A modo de resumen, destacamos a continuación las aportaciones originales que se han realizado a lo largo de esta tesis:

- Definición de una nueva barrera de dividendos, a la que hemos denominado parabólica, como opción frente a las barreras lineales ya existentes. La introducción de esta barrera de dividendos no lineal, nos ha permitido obtener una conclusión importante que ha sido recogida por autores posteriores: Pueden encontrarse barreras equivalentes desde el punto de vista de la solvencia que proporciona una esperanza del valor actual de los dividendos repartidos distinta.
- Obtención del sistema matricial que, de una manera sencilla, permite obtener la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos en barrera constante y reparto discreto. La solución presentada es válida para cualquier distribución de la siniestralidad en un periodo, por lo que puede

considerarse una generalización de los métodos existentes.

- Análisis económico-financiero de la sensibilidad de $W(u, b)$ respecto de las variables de control, en el modelo de barrera constante y reparto continuo. La introducción de conceptos económicos nos ha permitido concluir que la combinación óptima de u y b , no es única. Así, hemos propuesto interpretaciones alternativas.
- Definición de las nuevas magnitudes en el caso de barrera constante y reparto continuo: Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos condicionados a que sean positivos y tiempo promedio de espera. Estas nuevas magnitudes nos permiten conocer más a fondo, y de manera sencilla y resumida, las propiedades del proceso modificado.
- Planteamiento del procedimiento alternativo para la obtención de las ecuaciones en derivadas parciales que nos ha permitido obtener analíticamente las condiciones de contorno necesarias para su solución.

Capítulo 8

Anexos

Anexo I

Adjuntamos el programa para obtener la probabilidad de supervivencia en el modelo modificado con barrera lineal

```
INTEGER J,NSIM,NT,TA
REAL*8 X,X1,B,B1,C,A,DELTA,Z,RES,PR,LAM,LAM1,PS
REAL*8 PTS,PTSM,T
DOUBLE PRECISION G05DBF
EXTERNAL G05DBF,G05CBF
LAM=1.D+0
LAM1=1.D+0
NSIM=100000
C=1.5D+0
A=1.1D+0
PTS=0.D+0
CALL G05CBF(LAM)
  DO 44 NT=1,5
    TA=0
```

```
PR=0.D+0
PS=0.D+0
DO 15 J=1,NSIM
X=0.5D+0
B=0.5D+0
T=0.D+0
    DO 7 WHILE (T.LT.100)
        DELTA=G05DBF(LAM)
        T=T+DELTA
        IF(T.GT.100) GOTO 15
        RES=X+C*DELTA
        Z=G05DBF(LAM1)
        B1=B+A*T
            IF(RES.LT.B1) THEN
                X1=RES-Z
            ELSEIF(RES.GE.B1) THEN
                X1=B1-Z
            ENDIF
        IF (X1.LT.0.D+0) GOTO 8
        X=X1
7    END DO
        GOTO 15
8    TA=TA+1
15    CONTINUE
        PR=DBLE(TA)/DBLE(NSIM)
        PS=1.D+0-PR
        PRINT*,"ps=",PS
        PTS=PTS+PS
44    CONTINUE
        PTSM=PTS/5
        PRINT*,"psm=",PTSM
```

END

Anexo II

Se adjunta a continuación el programa utilizado para la simulación del proceso modificado con la barrera parabólica para hallar la probabilidad de supervivencia

```
INTEGER J,NSIM,NSIN,U
REAL*8 LAM,LAM1,C,B,ALFA,T,DELTA,Z,B1,RES,X,X1,PR,PS
REAL*8 PST,PSTM
DOUBLE PRECISION G05DBF
EXTERNAL G05DBF
LAM=1.D+0
LAM1=1.D+0
NSIM=100000
C=1.5D+0
TA=0.D+0
PST=0.D+0
DO 47 U=1.5
PS=0.D+0
TA=0.D+0
PR=0.D+0
DO 15 J=1,NSIM
T=0.D+0
X=0.D+0
B=1000.D+0
ALFA=0.001D+0
DO 7 WHILE (T.LT.100)
DELTA=G05DBF(LAM1)
T=T+DELTA
```

```
RES=X+C*DELTA
Z=G05DBF(LAM1)
B1=SQRT((B**2)+T/ALFA)
IF (RES.LT.B1) THEN
    X1=RES-Z
ELSEIF(RES.GE.B1) THEN
    X1=B1-Z
ENDIF
IF(X1.LT.0) GOTO 8
X=X1
7  END DO
GOTO15
8  TA=TA+1
15  CONTINUE
    PR=TA/NSIM
    PS=1-PR
    PRINT*,PS
    PST=PST+PS
47  CONTINUE
    PSTM=PST/5
    PRINT*,PSTM
    END
```

Anexo III

Se adjunta a continuación el programa utilizado para hallar la barrera lineal "equivalente" a la barrera parabólica, en el sentido que producen la misma probabilidad de supervivencia.

```
REAL*8 BL,ALFA,AL,PL,ALI,PLI,S
```

```
REAL*8 A,AL1,PP,P,PA,PAL1,PALI
BL=0.5D+0
ALFA=0.5D+0
PP=0.119080
AL=1.D+0/(2*ALFA*BL)
PRINT*,AL
CALL PROBLIN(AL,PL)
PRINT*,"p1",PL
ALI=0.2
PRINT*,ALI
CALL PROBLIN(ALI,PLI)
PRINT*,"p2",PLI
  IF (PLI.GT.PP) THEN
    PRINT*,"VUELVE A INTRODUCIR VALOR INFERIOR"
    GOTO 9
  ENDIF
1  A=(AL-ALI)/2+ALI
  CALL PROBLIN(A,PA)
  P=PA-PP
  IF (ABS(P).LT.0.0001) THEN
    PRINT*,"AA",A
    PRINT*,"PAA",PA
    GOTO 9
  ENDIF
  IF (P.LT.0) THEN
    AL1=(AL-A)/2+A
    PRINT*,AL1
    CALL PROBLIN(AL1,PAL1)
    S=PAL1-PP
    PRINT*,S
  IF (ABS(S).LT.0.0001) GOTO 2
```

```
IF (S.GT.0) THEN
    AL=AL1
    ALI=A
    GOTO 1
ELSEIF (S.LT.0) THEN
    AL=AL
    ALI=AL1
    GOTO 1
ENDIF
ENDIF
IF (P.GT.0) THEN
    AL1=(A-ALI)/2+ALI
    PRINT*,AL1
    CALL PROBLIN (AL1,PAL1)
    S=PAL1-PP
    PRINT*,S
IF(ABS(S).LT.0.0001) GOTO 2
IF (S.GT.0) THEN
    AL=AL1
    ALI=ALI
    GOTO 1
ELSEIF (S.LT.0) THEN
    AL=A
    ALI=AL1
    GOTO 1
ENDIF
ENDIF
2  PRINT*,"a=",AL1
   PRINT*,"p(a)",PAL1
   PRINT*,"S=",S
9  END
```

```
SUBROUTINE PROBLIN(W,PW)
INTEGER NSIM,J,NT,TA
REAL*8 B,W,X,X1,B1,C,DELTA,Z,RES,PR,LAM,LAM1
REAL*8 PS,PTSM,T,PW
DOUBLE PRECISION G05DBF
EXTERNAL G05DBF,G05CBF
PW=0
NSIM=100000
C=1.5D+0
LAM=1.D+0
LAM1=1.D+0
PS=0
PTSM=0
PR=0
CALL G05CBF(LAM)
DO 44 NT=1,5
    TA=0
    PR=0.D+0
    PS=0.D+0
    DO 15 J=1,NSIM
        X=0.3D+0
        B=0.5D+0
        T=0.D+0
        DO 7 WHILE (T.LT.100)
            DELTA=G05DBF(LAM)
            T=T+DELTA
            IF (T.GT.100) GOTO 15
            RES=X+(C*DELTA)
            Z=G05DBF(LAM1)
            B1=B+(W*T)
            IF (RES.LT.B1) THEN
```

```

        X1=RES-Z
        ELSEIF (RES.GE.B1) THEN
            X1=B1-Z
        ENDIF
        IF (X1.LT.0) GOTO 8
        X=X1
7    END DO
    GOTO 15
8    TA=TA+1
15   CONTINUE
    PR=DBLE(TA)/DBLE(NSIM)
    PS=1-PR
    PTSM=PTSM+PS
44   CONTINUE
    PW=PTSM/5
    END

```

Anexo IV

Para el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos, en un modelo modificado con una barrera constante en análisis discreto, el programa utilizado ha sido el siguiente,

Nota: Area de trabajo SOLDIS. Contiene cuatro funciones: AUX, AUX-CAR, COSTE TOTAL y WDISCRETA

```

Y←AUX DATO
□←DATO
Y←±(ρDATO) +□

```

$Y \leftarrow \text{AUXCAR DATO}$

$\square \leftarrow \text{DATO}$

$Y \leftarrow (\rho \text{DATO}) + \square$

$PS \leftarrow \text{COSTETOTAL}; \text{LANDA}; \text{PX}; \text{R}; \text{Y}; \text{PS}; \text{S}; \text{EXT}$

$\square \text{IO} \leftarrow 0$

$\text{LANDA} \leftarrow \text{AUX 'NUMERO MEDIO DE SINIESTROS EN UNA U.T.: '}$

' '

$\text{PX} \leftarrow \text{AUX 'VECTOR DE PROBABILIDADES DE LA CUANTIA DE UN SINIESTRO: '}$

' '

$\text{R} \leftarrow \rho \text{PX}$

$\text{PS} \leftarrow * - \text{LANDA}$

$\text{S} \leftarrow 1$

$\text{OTRO} : \text{Y} \leftarrow 1 + \text{EXT} \leftarrow \text{R} \setminus \text{S}$

$\text{PS} \leftarrow \text{PS}, + / (\text{LANDA} \times \text{Y} \div \text{S}) \times (\text{EXT} + \text{PX}) \times (\phi(-\text{EXT}) + \text{PS})$

$\text{S} \leftarrow \text{S} + 1$

$\rightarrow (\text{S} < \text{B} + \text{C} + 1) \rho \text{OTRO}$

$\text{WDISCRETA}; \text{C}; \text{B}; \text{I}; \text{M2}; \text{J}; \text{JJ}; \text{M4}; \text{M1}; \text{M}; \square \text{IO}; \text{TI}; \text{MI}; \text{MT}; \text{JJJ}; \text{SOL}; \text{FA}; \text{CJ}; \text{D}$

$\square \text{IO} \leftarrow 0$

$\rho \text{B} \leftarrow \text{AUX 'NIVEL DE LA BARRERA CONSTANTE: '}$

' '

$\text{B} \leftarrow 10$

'TASA DE PRIMA RECARGADA ANUAL'

$\text{C} \leftarrow \text{AUX 'EN UNIDADES MONETARIAS/UNIDADES TEMPORALES: '}$

' '

' TIPO DE INTERES EFECTIVO ANUAL'

$\text{I} \leftarrow \text{AUX 'EN TANTO POR CIENTO: '}$

' '

$+ \text{PS} \leftarrow \text{COSTETOTAL}$

```

NUMS←PS
OTROB:
  A 'CONSTRUCCION DE LA MATRIZ M2'
  M2←0
  J←C+1
  OTRO:M2←M2,(B↑J+PS)
  J←J-1
  →(J>0)ρOTRO
  M2←((C+1),B)ρ1↑M2
  A 'CONSTRUCCION DE LA MATRIZ M4'
  M4←B↑PS
  JJ←1
  OTRO2:M4←M4,(B↑((JJρ0),PS))
  JJ←JJ+1
  →(JJ<B-C)ρOTRO2
  M4←((B-C),B)ρM4
  A 'CONSTRUCCION DE LA MATRIZ M1'
  M1←((C+1),1)ρφ+\(C+1)↑PS
  A 'CONSTRUCCION DE LA MATRIZ M'
  M←(M1,M2),[0](0,M4)
  'MATRIZ'
  ρM
  MI←((B+1),(B+1))ρ(1,(B+1)ρ0)
  A 'TERMINO INDEPENDIENTE'
  TI←JJJ←0
  OTRO3:CJ←C-JJJ
  TI←TI,(+/(CJ-1CJ)×CJ↑PS)
  JJJ←JJJ+1
  →(JJJ<C)ρOTRO3
  'TERMINO INDEPENDIENTE'
  +D←(1↑TI),(B+1-C)ρ0
  ' '
  'SOLUCION DEL SISTEMA'
  MT←MI-(FA←((1+I÷100)*-1))×M
  SOL←(FA×D)⊗MT
  SOL
  B←B+1
  →(B<100)ρOTROB

```

Bibliografía

- [1] Albrecher, H. and R. Kainhofer (2002). Risk theory with a non-linear dividend barrier. *Computing* 68, No.4, 289-311.
- [2] Albrecher, H., Kainhofer, R. and F. Tichy (2002). Simulation methods in ruin models with non-linear dividend barriers. *Math. Comput. Simulation*, (To appear).
- [3] Alegre, A., Claramunt, M.M. and M. Mármol (2000). Políticas de dividendos y probabilidad de ruina. *Documents de treball de la Divisió de ciències jurídiques econòmiques i socials. Universitat de Barcelona*. E00/60.
- [4] Alegre, A., Claramunt, M.M. and M. Mármol (2001). Probabilidad de ruina y estrategias de barrera bajo un proceso de Poisson Compuesto. *Cuadernos de ciencias económicas y empresariales*. N^o41. Malaga. (To appear).
- [5] Amsler, M.H. (1982). The ruin problem with a finite time horizon. *Astin Bulletin*, Vol. 14, n^o1.
- [6] Asmussen, S. (2000). *Ruin probabilities. Advanced series on statistical science and applied probability*. World Scientific.
- [7] Beard, R.E., Pentikäinen, T., and E. Pesonen (1984). *Risk Theory*. Chapman & Hall. London.
- [8] Bowers, N.L., H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones and C.J. Nesbitt (1987). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Itasca, IL.

-
- [9] Bühlmann, H (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag.
- [10] Claramunt, M.M., Marmol, M. and A. Alegre(2002). Discrete analysis of dividend payments in a non-life insurance portfolio. Documents de treball de la Divisió de ciències jurídiques econòmiques i socials. Universitat de Barcelona. E02/85.
- [11] Cramer, H. (1930). On the mathematical theory of risk. Skandia Jubilee Volume. Stocholm.
- [12] Daykin, T., Pentikäinen, T., and M. Pesonen (1994). *Practical Risk theory for Actuaries*. Chapman & Hall. London.
- [13] De Vylder, F.E. (1996). *Advanced risk theory*. Editions de l'Université de Bruxelles.
- [14] De Vylder, F. (1999). Numerical finite-time ruin probabilities by the Picard-Lefèvre formula. *Scandinavian Actuarial Journal*. n^o2. 97-105.
- [15] De Vylder, F.E. and M.J. Goovaerts (1988). Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*. 7. 1-8.
- [16] De Vylder, F.E. and M.J. Goovaerts (1999). Explicit finite-time ruin probabilities in the continuous case. *Insurance: Mathematics and Economics*. 24. 155-172.
- [17] Dickson, D.C.M. (1989) Recursive calculation of the probability and severity of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*.8. 145-148.
- [18] Dickson, D.C.M. (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*. 11. 191-207.
- [19] Dickson, D.C.M. (1993). On the distribution of the claim causing ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*. 12. 143-154.

-
- [20] Dickson, D.C.M. and A.D. Egídio dos Reis (1994). Ruin problems and dual events. *Insurance: Mathematics and Economics*. 14. 51-60.
- [21] Dickson, D.C.M. and A.D. Egídio dos Reis (1996). On the distribution of the duration of negative surplus. *Scandinavian Actuarial Journal*. 148-164.
- [22] Dickson, D.C.M. and A.D. Egídio dos Reis (1997). The effect of interest on negative surplus. *Insurance: Mathematics and Economics*. 21. 1-16.
- [23] Dickson, D.C.M. and J.R. Gray (1984). Approximations to ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*. 105-115.
- [24] Dickson, D.C.M. and H.R. Waters (1991) Recursive calculation of survival probabilities. *Astin Bulletin*, Vol. 21, n°2.
- [25] Dickson, D.C.M. and H.R. Waters (1992). The probability and severity of ruin in finite and infinite time. Vol. 22, n°2.
- [26] Dufresne, F and H.U.Gerber (1988). The surplus immediately before and at ruin and the amount of the claim causing ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, 193-199.
- [27] Egídio dos Reis, A.D.(1993). How long is the surplus below zero? *Insurance: Mathematics and Economics* 12, 23-38.
- [28] Egídio dos Reis, A.D. (1999). *Teoria da Ruína*. ISEG.
- [29] Egídio dos Reis, A.D. (2000). On the moments of ruin and recovery times. *Insurance: Mathematics and Economics*. 27.331-343.
- [30] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability and its Applications*, Vol II, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.
- [31] Finetti, B. de (1957). Su un 'impostazione alternativa della teoria collectiva del rischio. *Trans. XV. Int Congr. Act.* 2. 433-443.

-
- [32] Gerber, H.U. (1972). Games of economic survival with discrete and continuous income process. *Operations research*, vol. 20, n°1. 37-45.
- [33] Gerber, H.U. (1979). *An introduction to mathematical risk theory*. S.S. Huebner Foundation. University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [34] Gerber, H.U. (1981). On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*. 105-115.
- [35] Gerber, H.U., (1988). Mathematical fun with compound binomial model. *ASTIN Bulletin* 18, 161-168.
- [36] Gerber, H.U., Goovaerts, M.J. and R. Kaas (1987). On the probability and severity of ruin. *Astin Bulletin*, 17, 151-163.
- [37] Gerber, H.U., Shiu, E.S. (1997). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*. 21. 129-137.
- [38] Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Rheory*, Springer-Verlag, New York.
- [39] IAA (2000). On Solvency, Solvency Assessments and Actuarial Issues, An IAIS Issues paper. Disponible en <www.iaisweb.org>.
- [40] IAA (2002). Report of solvency working party. Prepared for IAA Insurance Regulation Committee. Disponible en <www.iaisweb.org>.
- [41] Informe Sigma (2000). La solvencia de aseguradores no-vida: una búsqueda de equilibrio entre seguridad y rentabilidad. N°1/2000. Swiss Re.
- [42] Kastelijjn, W.M., and J.C.M. Remmerswaal (1986). *Solvency. Surveys of actuarial studies*, n°3. nationale-Nederlanden N.V. search Department. Rotterdam.
- [43] Latorre, L. (1992). *Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora*. Ed. Mapfre. Madrid.

-
- [44] Li, S., and J. Garrido (2002). On the time value of ruin in the discrete time risk model. Working paper 02-18. University Carlos III. Madrid.
- [45] Lin, S.X, and G.E. Willmot (2000) The moments of the time of ruin, the surplus before ruin and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*. 27. 19-44.
- [46] Mármol, M, Alegre, A y M.M. Claramunt (2000). Probabilidad de ruina bajo diferentes hipótesis de la siniestralidad agregada. *Anales del Instituto de actuarios*, nº6.
- [47] Michel, R. (1989). Representation of a time-discrete probability of eventual ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*. 8/1989. 149-152.
- [48] Panjer, H. (1986). Models in risk theory. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematica*. Volumen 35.
- [49] Paulsen, J. and H.K. Gjessing (1997). Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments. *Insurance: Mathematics and Economics*. 20/1997. 215-223.
- [50] Panjer, H. and G.E. Willmot (1992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.
- [51] Pervozvansky, A.A. (1998). Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force. *Insurance: Mathematics and Economics*. 23. 278-295.
- [52] Picard, P (1994) On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model. *Insurance: Mathematics and Economics*. 14. 107-115.
- [53] Picard, P and C. Lefèvre (1997). The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 58-69.
- [54] Picard, P and C. Lefèvre (1998). The moments of ruin time in the classical risk model with discrete claim size distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*. 23. 157-172.

- [55] Rodríguez, A (1984). *Matemática de la financiación*. Barcelona.
- [56] Shiu, E. (1989). The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin* 19, 179-190.
- [57] Siegl, T. and F. Tichy (1996) Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung. *Mitteilungen der Schweiz. Heft* 1/1996.
- [58] Siegl, T. and F. Tichy (1999) A process with stochastic claim frequency and a linear dividend barrier. *Insurance: Mathematics and Economics*. 24/1999. 51-65.
- [59] Sparre Andersen, E. (1957) On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims. *Transactions XVth International Congress of Actuaries, New York, II*, 219-229.
- [60] Vegas, J and U. Nieto de Alba (1993). *Matemática Actuarial*. Editorial Mapfre, S.A.
- [61] Vilar Zanón, J.L. and Y. Garcia (1999). *Matemática actuarial no vida con MapleV*. Cuadernos de la fundación MAPFRE, nº48.
- [62] Willmot, G.E. (1993). Ruin probabilities in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*. 12/1993. 133-142.
- [63] Willmot, G.E. and J. Cai (2001). Aging and other distributional properties of discrete compound geometric distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*. 28/2001. 361-379.
- [64] Willmot, G.E. and X. Lin (1998). Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*. 23. 91-110.



