La llengua d'Arquimedes en *De Sphaera et Cylindro*

Ramon Masià Fornos

Índex

Part I

Archimedis

De Sphaera et Cylindro

Libri II

Liber primus

⌜χαίρειν⌝

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Πρότερον μὲν ἀπέσταλκά σοι τῶν ὑφ’ ἡμῶν τεθεωρημένων γράψας μετὰ ἀποδείξεως, ὅτι πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. ὕστερον δὲ ἡμῖν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίων λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. ἔστιν δὲ τάδε, πρῶτον μέν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶν τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ, ἔπειτα δέ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, πρὸς δὲ τούτοις, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρό ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος, ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία, διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πασα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πας κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρό Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ’ ὑφ’ ἑνὸς κατανοηθῆναι.

Ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκέψασθαι τοῖς δυνησομένοις. ὤφειλε μὲν οὖν Κόνωνος ἔτι ζῶντος ἐκδίδοσθαι ταῦτα, τῆνον γὰρ ὑπολαμβάνομεν που μάλιστα ἄν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἁρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφασιν ποιήσασθαι, δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων ἀποστέλλομεν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι.

Ἐρρωμένως.

⌈Salutació⌉

Arquimedes a Dositeu, salut.

De les propietats que hem investigat, t'he enviat anteriorment aquestes, que vam redactar acompanyant-les d'una demostració: que tot segment comprès tant per una recta com per una secció de con recte és quatre terços d'un triangle que té la mateixa base que el segment i altura igual. Després, però, com que se'ns van acudir alguns teoremes dignes de menció, hem treballat en la seva demostració. I són aquests: en primer lloc, que la superfície de tota esfera és el quàdruple del cercle màxim dels seus cercles; després, que, a la superfície de tot segment d'esfera és igual un cercle el radi del qual és igual a la recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la circumferència del cercle que és base del segment; i, a més d'aquests, que, de tota esfera, el cilindre que té base igual al cercle màxim dels cercles en l'esfera, mentre que altura igual al diàmetre de l'esfera tant és, ell mateix, una hemiòlia de l'esfera, com la seva superfície una hemiòlia de la superfície de l'esfera.

I aquestes propietats referents a les figures esmentades preexistien en la natura, però eren desconegudes per als qui s'han ocupat de la geometria abans que nosaltres: cap d'ells no havia arribat a concebre que la commensurabilitat era pròpia d'aquestes figures. I, precisament per això, jo no dubtaria a equiparar-les tant amb les investigades per la resta de geòmetres com també amb les que semblen destacar de les investigades per Eudox sobre els sòlids: que tota piràmide és una tercera part d'un prisma que té la mateixa base que la piràmide i altura igual; i que tot con és una tercera part del cilindre que té la mateixa base que el con i altura igual. I, en efecte, per bé que les propietats sobre aquestes figures preexistien naturalment i han estat molts els geòmetres dignes de menció abans d'Eudox, succeïa que tothom les desconeixia i no havien estat mai copsades per ningú.

I, els qui en tinguin la capacitat, podran examinar-les. Certament, s'haurien d'haver lliurat en vida de Conó, ja que suposem que és ell qui més podria copsar-les i fer-ne un judici afinat. però, admetent que és bo fer-ne partícips els familiaritzats amb les matemàtiques, t'enviem les demostracions per tal que es facin públiques i així podran examinar-les els qui s'ocupen de les matemàtiques.

Que estiguis bo.

⌈ἀξιώματα καὶ λαμβανόμενα⌉

Γράφονται πρῶτον τά τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

⌈1⌉Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

⌈2⌉Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πασαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ’ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

⌈3⌉Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

⌈4⌉Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἵ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πασαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ’ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

⌈5⌉Τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. ⌈6⌉Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ’ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ’εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα.

Λαμβάνω δὲ ταῦτα·

⌈1⌉Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ⌈2⌉Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

⌈3⌉Ομοίως δὲ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον. ⌈4⌉Τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν καὶ

⌈Definicions i assumpcions⌉

Són redactades primer tant les definicions com les assumpcions per a les demostracions de les propietats.

⌈1⌉Hi ha en el pla certes línies corbes limitades que, o bé la seva totalitat són sobre un mateix costat de les rectes que uneixen els seus límits, o bé no tenen res sobre l'altre costat.

⌈2⌉Anomenaré, doncs, còncava sobre un mateix costat aquella línia en la qual, sempre que prenguem dos punts qualssevol, les rectes entre aquests punts, o bé cauran totes sobre un mateix costat de la línia, o bé unes sobre un mateix costat mentre que les altres per la mateixa línia, i cap sobre l'altre costat.

⌈3⌉D'una manera semblant, doncs, hi ha superfícies limitades que no hi són, elles mateixes, en un pla, mentre que tenen els seus límits en un pla i, o bé llur totalitat estarà sobre un mateix costat del pla en el qual tenen els límits, o bé no tenen res sobre l'altre costat.

⌈4⌉Anomenaré, doncs, còncaves sobre un mateix costat aquelles superfícies en les quals, un cop presos dos punts qualssevol, les rectes entre aquests punts, o bé cauen totes sobre un mateix costat de la superfície, o bé unes sobre un mateix costat, mentre que les altres per la mateixa recta, i cap sobre l'altre costat.

⌈5⌉I, quan un con talli una esfera, tenint vèrtex vers el centre de l'esfera, anomenaré sector sòlid la figura continguda tant dins de la superfície del con com dins de la superfície de l'esfera dins del con. ⌈6⌉I, quan dos cons que tenen la mateixa base tinguin els vèrtexs sobre cadascun dels costats del pla de la base, de tal manera que els seus eixos estiguin posats sobre una recta, anomenaré rombe sòlid la figura sòlida composta a partir d'ambdós cons.

I assumeixo això:

⌈1⌉ De les línies que tenen els mateixos límits la menor és la recta. ⌈2⌉ I, de les altres línies, sempre que, d'un pla estant, tinguin els mateixos límits, dues línies són desiguals quan ambdues siguin còncaves sobre un mateix costat i, o bé la totalitat d'una d'aquestes estigui continguda per l'altra i per la recta que té els mateixos límits que aquesta, o bé una part estigui continguda mentre que l'altra la tingui en comú, i és més petita la continguda.

⌈3⌉I, també, d'una manera semblant, de les superfícies que tenen els mateixos límits, sempre que tinguin els límits en un pla, és més petita la superfície plana.

τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

⌈5⌉Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.

⌈4⌉I, de les altres superfícies que també tenen els mateixos límits, sempre que estiguin en un pla, dues superfícies són desiguals quan ambdues siguin còncaves sobre un mateix costat i, o bé la totalitat d'una superfície estigui continguda per l'altra i per la superfície plana que té els mateixos límits que aquesta, o bé una part estigui continguda mentre que l'altra la tingui en comú, i és més petita la continguda.

⌈5⌉I, a més, la més gran de dues línies desiguals (i de dues superfícies desiguals i de dos sòlids desiguals) supera la més petita en una quantitat tal que, component-se amb ella mateixa, és possible superar tota quantitat proposada de les que diem que, l'una respecte de l'altra, <tenen relació>.

⌈0⌉

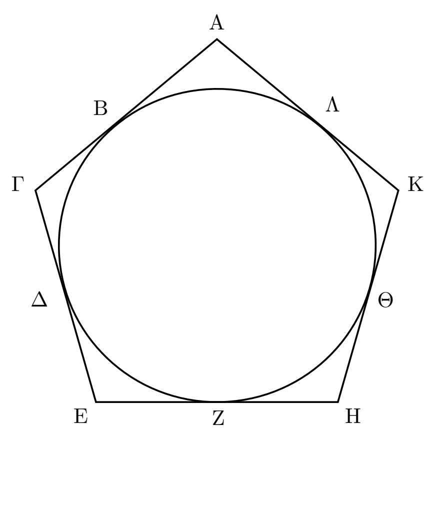
Τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

⌈α′⌉

Ἐὰν περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΒΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΛ περιφερείας διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως δὲ καὶ συναμφότερος μὲν ἡ ΔΓ, ΓΒ τῆς ΔΒ, συναμφότερος δὲ ἡ ΛΚ, ΚΘ τῆς ΛΘ, συναμφότερος δὲ ἡ ΖΗΘ τῆς ΖΘ, ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.



⌈0⌉

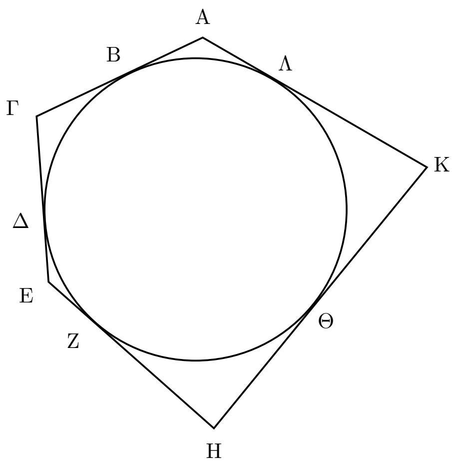
I suposant el mateix, sempre que un polígon sigui inscrit a un cercle, és clar que el perímetre del polígon inscrit serà més petit que la circumferència del cercle. En efecte, cada un dels costats del polígon és més petit que la circumferència del cercle retallat per aquest.

⌈1⌉

Sempre que un polígon sigui circumscrit al voltant d’un cercle, el perímetre del polígon circumscrit serà més gran que el perímetre del cercle.

En efecte, estigui un polígon circumscrit al voltant d’un cercle, el suposat. Jo dic que el perímetre del polígon és més gran que el perímetre del cercle.

En efecte, atès que ΒΑΛ, conjuntament, és més gran que la circumferència ΒΛ, pel fet que tenen els mateixos límits i que <ΒΑΛ> conté la circumferència i, d’una manera semblant, també ΔΓ, ΓΒ, conjuntament, més gran que ΔΒ, mentre que ΛΚ, ΚΘ, conjuntament, més gran que ΛΘ, i ΖΗΘ, conjuntament, més gran que ΖΘ i, a més, ΔΕ, ΕΖ, conjuntament, que ΔΖ, per tant, la totalitat del perímetre del polígon és més gran que la circumferència del cercle.



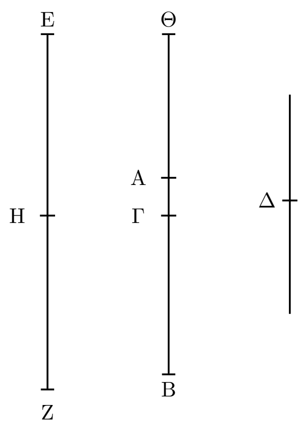
⌈β′⌉

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Δ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας.

κείσθω [διὰ τὸ β᾽ τοῦ α᾽ τῶν Εὐκλείδου] τῷ Δ ἴσον τὸ ΒΓ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ· τὸ δὴ ΓΑ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ ΑΘ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΘ τοῦ ΑΓ, τοσαυταπλάσιος ἔστω ἡ ΖΗ τῆς ΗΕ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΘΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ. καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν, ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς ΑΘ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστιν τὸ ΑΘ τοῦ Δ, τουτέστι τοῦ ΓΒ, τὸ ἄρα ΓΑ πρὸς τὸ ΑΘ λόγον ἐλάσσονα ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΓΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ. ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ. καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ [διὰ λῆμμα]. ἴσον δὲ τὸ ΒΓ τῷ Δ· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ.

εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι ποιοῦσαι τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα [τουτέστιν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον].



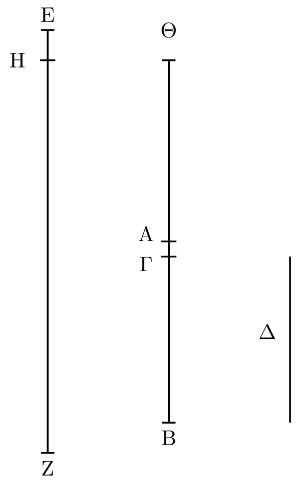
[2]

Donades dues magnituds desiguals és possible trobar dues rectes desiguals, de manera que la recta més gran respecte de la més petita tingui una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita.

Heus aquí dues magnituds desiguals AB, Δ, i sigui més gran AB. Jo dic que és possible trobar dues rectes desiguals complint el requisit esmentat.

Estigui BΓ posada igual a Δ i estigui una certa línia recta ZH posada. ΓA, superposant-se a ella mateixa, superarà, doncs, Δ. Així, doncs, estigui multiplicada i heus aquí <el resultat> AΘ, i que quantes vegades AΘ és d'AΓ, tantes ho sigui ZH d'HE. Per tant, com ΘA respecte d'AΓ, així és ZH respecte d'HE. I, per inversió, com EH respecte d'HZ, així AΓ respecte d'AΘ. I, atès que AΘ és més gran que Δ (és a dir, que ΓB), per tant, ΓA respecte d'AΘ té una raó més petita que ΓA respecte de ΓB. Tanmateix, com ΓA respecte d'AΘ, així EH respecte d'HZ. Per tant, EH respecte d'EZ té una raó més petita que ΓA respecte de ΓB. I, per composició, per tant, EZ respecte de ZH té una raó més petita que AB respecte de BΓ [pel lema]. Però BΓ és igual a Δ. Per tant, EZ respecte de ZH té una raó més petita que AB respecte de Δ.

S'han trobat, per tant, dues rectes desiguals que compleixen el requisit esmentat, [és a dir, la més gran respecte de la més petita té una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita].



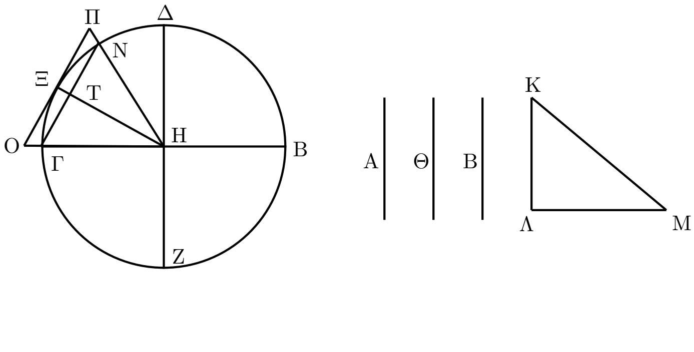
⌈γ′⌉

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθεντων καὶ κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον.

ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα.

εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Θ, ΚΛ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Θ, ὥστε τὴν Θ πρὸς τὴν ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΛΚ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ Θ ἴση κατήχθω ἡ ΚΜ [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΒ, ΔΖ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν ΔΗΓ γωνίαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ αἰεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομέν τινα γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ ΛΚΜ. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΝΗΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΓ. ἡ ἄρα ΝΓ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου [ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΝΗΓ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΔΗΓ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ΝΓ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν ΓΔ τέταρτον οὖσαν κύκλου·] [ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου· φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο]. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΓΗΝ γωνία δίχα τῇ ΗΞ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΗΝΠ, ΗΓΟ· ὥστε καὶ ἡ ΠΟ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον καὶ ἰσοπλεύρου [φανερόν, ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ΝΓ].

ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ΝΗΓ τῆς ὑπὸ ΛΚΜ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ ΤΗΓ, ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΤΗΓ τῆς ὑπὸ ΛΚΜ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Λ, Τ· ἡ ἄρα ΜΚ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΗ τῇ ΗΞ· ὥστε ἡ ΗΞ πρὸς ΗΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ ΠΟ πρὸς ΝΓ, ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· ἔτι δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α πρὸς τὸ Β. καί ἐστιν ἡ μὲν ΠΟ πλευρά τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ ΓΝ τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.



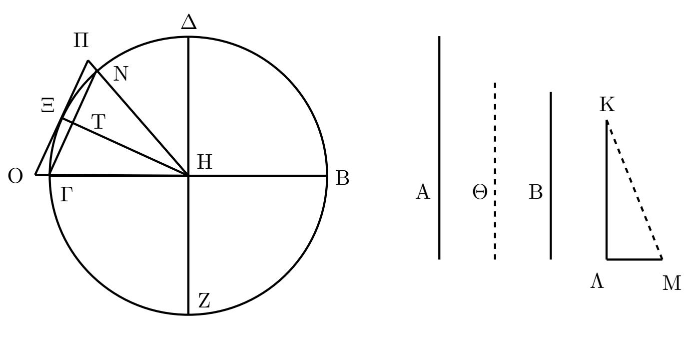
[3]

Donades dues magnituds desiguals i un cercle, és possible inscriure un polígon al cercle i circumscriure-n'hi un altre, de tal manera que un costat del polígon circumscrit respecte d'un costat del polígon inscrit tingui una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita.

Heus aquí dues magnituds donades A, B, i un cercle donat, el suposat. Jo dic, doncs, que és possible complir el requisit.

En efecte, estiguin trobades dues rectes Θ, ΚΛ, de les quals sigui més gran Θ, de manera que Θ respecte de ΚΛ tingui una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita. Estigui conduïda ΛΜ des de Λ ortogonal a ΛΚ, i estigui conduïda cap avall ΚΜ des de Κ igual a Θ [ja que això és possible]. Estiguin conduits dos diàmetres del cercle ortogonal l'un a l'altre, ΓΒ, ΔΖ. Així, doncs, tallant l'angle comprès per ΔΗΓ en dos, i la seva meitat en dos, i això fent-ho repetidament, restaran uns certs angles més petits que el doble de l'angle ΛΚΜ. Que n'hagi restat un i heu-lo aquí, l'angle ΝΗΓ. Estigui unit ΝΓ. Per tant, ΝΓ és un costat d'un polígon equilàter [atès que l'angle per ΝΗΓ mesura precisament el comprès per ΔΗΓ, que és ortogonal, per tant, també la circumferència ΝΓ mesura el ΓΔ, que és la quarta part del cercle, de manera que també mesura el cercle. Per tant, és un costat d'un polígon equilàter, ja que això és clar.] Estigui l'angle comprès per ΓΗΝ tallat en dos amb la recta ΗΞ, estigui ΟΞΠ tocant el cercle des de Ξ, i estiguin allargades ΗΝΠ, ΗΓΟ, de manera que ΠΟ també sigui un costat d'un polígon circumscrit al voltant del cercle i equilàter [és clar que també és semblant a l'inscrit, el costat del qual és ΝΓ.]

I, atès que l'angle ΝΗΓ és més petit que el doble de l'angle ΛΚΜ (i que el doble de l'angle ΤΗΓ), per tant, l'angle ΤΗΓ és més petit que l'angle ΛΚΜ. I els angles vers Λ, Τ són ortogonals. Per tant, ΜΚ respecte de ΛΚ té una raó més gran que ΓΗ respecte d'ΗΤ. Però ΓΗ és igual a ΗΞ, de manera que ΗΞ respecte d'ΗΤ (és a dir, ΠΟ respecte de ΝΓ) té una raó més petita que ΜΚ respecte de ΚΛ. Però, a més, ΜΚ respecte de ΚΛ té una raó més petita que Α respecte de Β. I ΠΟ és un costat del polígon circumscrit, mentre que ΓΝ ho és de l'inscrit, cosa que precisament s'havia proposat de trobar.

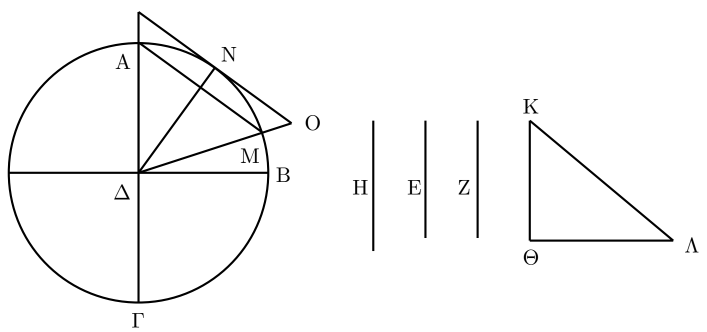


⌈δ′⌉

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

ἔστω γὰρ πάλιν δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ Ε, κύκλος δέ τις ὁ ΑΒΓ κέντρον ἔχων τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τομεὺς συνεστάτω ὁ ΑΔΒ. δεῖ δὴ περιγράψαι καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν ΑΒΔ τομέα ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν ΒΔΑ, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα.

εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Η, ΘΚ ἄνισοι καὶ μείζων ἡ Η, ὥστε τὴν Η πρὸς τὴν ΘΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΘ προσβεβλήσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΛ [δυνατὸν γάρ, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Η τῆς ΘΚ]. τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν ΑΔΒ γωνίας δίχα καὶ τῆς ἡμισείας δίχα καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ ΛΚΘ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ ΑΔΜ· ἡ ΑΜ οὖν γίνεται πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ ΑΔΜ γωνίαν δίχα τῇ ΔΝ καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ΞΝΟ, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ· καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΑΜ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε μέγεθος πρὸς τὸ Ζ.

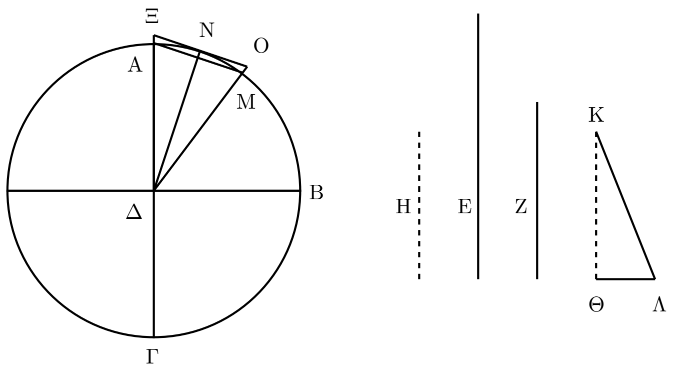


⌈4⌉

Havent-hi al seu torn dues magnituds desiguals i un sector, és possible circumscriure un polígon al voltant del sector i inscriure-n'hi un altre, de manera que el costat del polígon circumscrit respecte del costat del polígon inscrit tingui una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita.

En efecte, heus aquí, al seu torn, dues magnituds desiguals E, Z, de les quals sigui més gran, E i un cert cercle ΑΒΓ, que té centre Δ. Que s'erigeixi un sector ΑΔΒ vers Δ. Cal, doncs, circumscriure i inscriure un polígon al voltant del sector ΑΒΔ que tingui els costats iguals, llevat de ΒΔΑ, de tal manera que en resulti el requisit.

En efecte, estiguin trobades dues rectes desiguals H, ΘΚ, més gran H, de manera que H respecte de ΘΚ tingui una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita [ja que això és possible]. D'una manera semblant, estigui prolongada ΚΛ igual a H, conduint-la des de Θ ortogonal a ΚΘ [ja que és possible, atès que H és més gran que ΘΚ]. Un cop tallat, doncs, en dos l'angle comprès per ΑΔΒ, la meitat tallada en dos, i esdevenint-se això repetidament, restarà un cert angle més petit que el doble de l'angle ΛΚΘ. Així, doncs, n'hagi restat l'angle ΑΔΜ. Així, doncs, ΑΜ resulta un costat del polígon inscrit al cercle. I, sempre que tallem l'angle per ΑΔΜ en dos en ΔΝ, i des de Ν conduïmΝΞΟ tocant el cercle, aquesta <recta> serà un costat del polígon circumscrit al voltant del mateix cercle, semblant a l'esmentat <polígon>. I, d'una manera semblant al que s'ha esmentat abans, ΞΟ respecte d'ΑΜ té una raó més petita que la magnitud E respecte de Z.

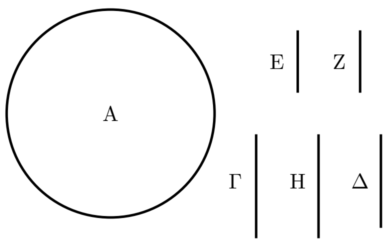


⌈ε′⌉

Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

ἐκκείσθω κύκλος ὁ Α καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ καὶ μεῖζον τὸ Ε. δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν.

λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς Γ, Δ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Γ, ὥστε τὴν Γ πρὸς τὴν Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Ε πρὸς τὴν Ζ· καὶ τῶν Γ, Δ μέσης ἀνάλογον ληφθείσης τῆς Η μείζων ἄρα καὶ ἡ Γ τῆς Η. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πλευραν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Γ πρὸς τὴν Η [καθώς ἐμάθομεν]· διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν διπλάσιός ἐστι ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸν πολύγωνον [ὅμοια γάρ], τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Η ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

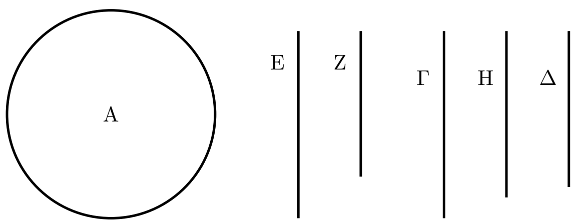


[5]

Donat un cercle i dues magnituds desiguals, circumscriure un polígon al voltant del cercle i inscriure-n'hi un altre, de manera que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita.

Estigui disposat un cercle A, i dues magnituds desiguals E, Z, més gran E. Així, doncs, cal inscriure un polígon al cercle i circumscriure-n'hi un altre, per tal que es compleixi el requeriment.

En efecte, prenc dues rectes desiguals Γ, Δ, de les quals sigui més gran Γ, de manera que Γ respecte de Δ tingui una raó més petita que E respecte de Z. I, prenent H una mitjana proporcional de Γ, Δ, Γ és, per tant, també més gran que H. Estigui circumscrit, doncs, un polígon al voltant dle cercle i n'hi estigui inscrit un altre, de manera que el costat del polígon circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que Γ respecte d'H [com hem après abans]. Per això, doncs, també la raó doble és més petita que la raó doble. I la del polígon respecte del polígon és una raó doble de la del costat respecte del costat [ja que són semblants], mentre que la de Γ respecte de Δ és la raó doble de la de Γ respecte d'H. I, per tant, el polígon circumscrit respecte de l'inscrit té una raó més petita que Γ respecte de Δ. Per tant, el circumscrit respecte de l'inscrit té, de molt, una raó més petita que E respecte de Z.



⌈ϛʹ⌉

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστιν περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι, ἐὰν δοθῇ κύκλος ἢ τομεὺς καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει παραδέδοται.

Δεικτέον δέ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος ἢ τομέως καὶ χωρίου δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου· ἔσται γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

δεδόσθω κύκλος ὁ Α καὶ χωρίον τι τὸ Β. δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ Β χωρίου.

καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ τε χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν, οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ Β. εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον, τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον· ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ Β χωρίου.

ἢ οὕτως· ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου. ὥστε καὶ ὅλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου

⌈6⌉

D'una manera semblant, doncs, provarem que, donades dues magnituds desiguals i un sector, és possible circumscriure un polígon al voltant del sector i inscriure-n'hi un altre de semblant a aquest, per tal que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que la magnitud més gran respecte de la més petita.

I també això és clar: que, sempre que sigui donat un cercle o un sector i una certa àrea, inscrivint al cercle o al sector polígons equilàters i, a més, <esdevenint-se això> repetidament en els segments que resten al voltant, és possible que restin certs segments del cercle o del sector que seran precisament més petits que l'àrea que ha estat proposada, ja que això s'ha transmès als Elements.

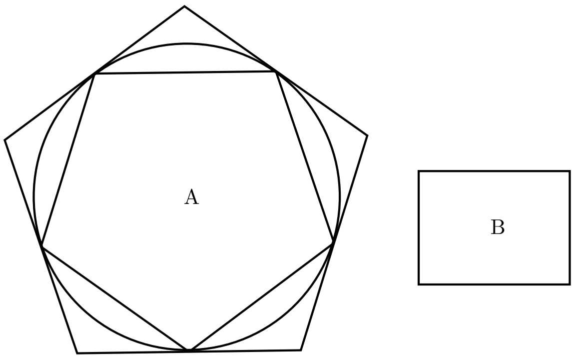
S'ha de provar que, donat un cercle o un sector i una àrea, és possible circumscriure un polígon al voltant del cercle o del sector, de manera que els segments que resten al voltant de la circumscripció siguin més petits que l'àrea donada. De fet, serà després de provar-ho sobre un cercle que traduirem el mateix raonament també sobre el sector.

Estigui donat un cercle A, i una certa àrea B. És possible, doncs, circumscriure un polígon al voltant del cercle, de manera que els segments que resten fora entre el cercle i el polígon siguin més petits que l'àrea B.

I, en efecte, havent-hi dues magnituds desiguals (més gran tant l'àrea com el cercle, conjuntament, mentre que més petit el cercle), estigui circumscrit un polígon al voltant del cercle i n'hi estigui inscrit un altre, de manera que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que l'esmentada magnitud més gran respecte de la més petita. Aqueix és, doncs, el polígon circumscrit, les restes circumdants del qual seran més petites que l'àrea proposada B, ja que si el circumscrit respecte de l'inscrit té una raó més petita que el cercle i l'àrea B, conjuntament, respecte del mateix cercle, però el cercle és més gran que l'inscrit, el circumscrit respecte del cercle té, de molt, una raó més petita que el cercle i l'àrea B, conjuntament, respecte del mateix cercle. I, per divisió, per tant, les restes externes del polígon circumscrit respecte del cercle té una raó més petita que l'àrea B respecte del cercle. Per tant, les restes externes del polígon circumscrit són més petites que l'àrea B.

O així: atès que el circumscrit respecte del cercle té una raó més petita que el cercle i l'àrea B, conjuntament, respecte del cercle, per això, el circumscrit serà, doncs, més petit que aquests, conjuntament. De manera que la totalitat de les τοῦ Β.

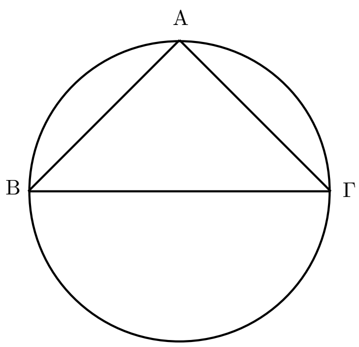
ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.



⌈ζ′⌉

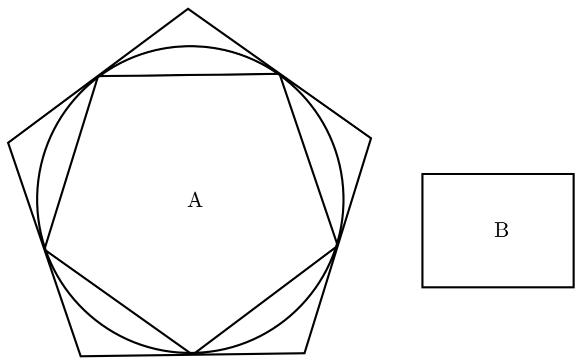
Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην.

ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.



restes circumdants també serà més petita que l'àrea B.

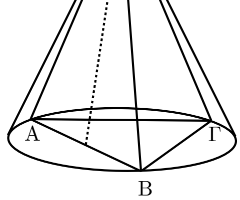
I, també d'una manera semblant, sobre el sector.



⌈7⌉

Sempre que en un con isòsceles hi sigui inscrita una piràmide que tingui base equilàtera, la seva superfície, llevat de la base, serà igual a un triangle que té base igual al perímetre de la base mentre que altura una recta conduïda perpendicular des del vèrtex fins a un costat de la base.

Heus aquí un con isòsceles base del qual és el cercle ΑΒΓ. Hi estigui inscrita una piràmide que tingui base equilàtera ΑΒΓ. Jo dic que la seva superfície, llevat de la base, és igual al triangle esmentat.

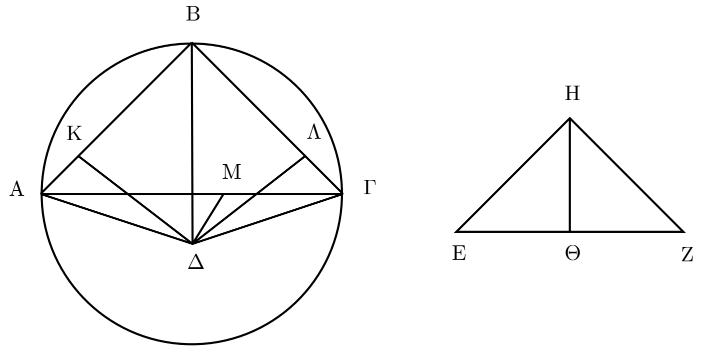


ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὸ εἰρημένον· ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν [τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου].

[σαφέστερον ἄλλως ἡ δεῖξις.]

[ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμὶς βάσιν [μὲν] ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ·] [λέγω, ὅτι τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀγομένῃ.]

[ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ ΔΚ, ΔΛ, ΔΜ·] [αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ ΕΖΗ ἔχον τὴν μὲν ΕΖ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἴσην, τὴν δὲ ΗΘ κάθετον τῇ ΔΛ ἴσην.] [ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΔΛ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ΔΒΓ τριγώνου, ἔστιν δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΚ διπλάσιον τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΓ, ΔΜ διπλάσιον τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου,] [τουτέστι τῆς ΕΖ, καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστι τῆς ΗΘ, διπλάσιόν ἐστι τῶν ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΘ διπλάσιον τοῦ ΕΖΗ τριγώνου·] [ἴσον ἄρα τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τοῖς ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνοις].

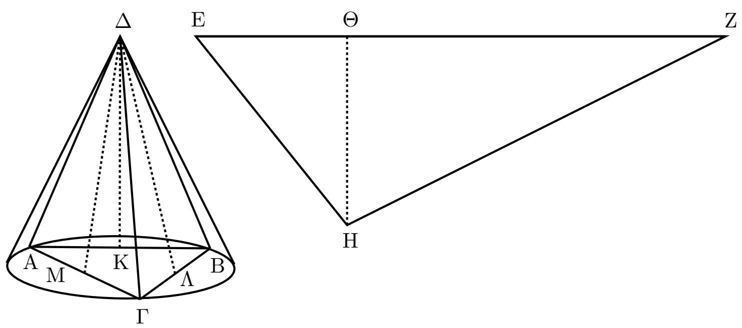


En efecte, atès que el con és isòsceles i la base de la piràmide és equilàtera, les altures dels triangles que comprenen la piràmide són iguals, les unes a les altres. I els triangles tenen base AB, ΒΓ, ΓΑ, mentre que altura l'esmentada, de manera que els triangles són iguals a un triangle que té base la recta igual a AB, ΒΓ, ΓΑ mentre que altura la recta esmentada [és a dir, la superfície de la piràmide, llevat del triangle ΑΒΓ].

[la prova d'una altra manera més clara:

Heus aquí un con isòsceles, base del qual és un cercle ΑΒΓ, mentre que vèrtex, un punt Δ. Estigui inscrita al con una piràmide que tingui base un triangle equilàter ΑΒΓ, i estiguin unides ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ. Jo dic que els triangles ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΒΔΓ són iguals a un triangle base del qual és igual al perímetre del triangle ΑΒΓ, mentre que la perpendicular des del vèrtex fins a la base és igual a una recta conduïda perpendicular des de Δ fins a ΒΓ.

En efecte, estiguin conduïdes unes perpendiculars ΔΚ, ΔΛ, ΔΜ. Per tant, aquestes són iguals les unes a les altres. Estigui posat un triangle ΕΖΗ que tingui la base ΕΖ igual al perímetre del triangle ΑΒΓ, mentre que la perpendicular ΗΘ, igual a ΔΛ. Així, doncs, atès que el rectangle comprès per ΒΓ, ΔΛ és el doble del triangle ΔΒΓ, i és, també, el comprès per ΑΒ, ΔΚ el doble del triangle ΑΒΔ, mentre que el comprès per ΑΓ, ΔΜ és el doble del triangle ΑΔΓ, per tant, el comprès pel perímetre del triangle ΑΒΓ (és a dir, ΕΖ), i per ΔΛ (és a dir, ΗΘ), és el doble dels triangles ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ. Però també el comprès per ΕΖ, ΗΘ és el doble del triangle ΕΖΗ. Per tant, el triangle ΕΖΗ és igual als triangles ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ.]



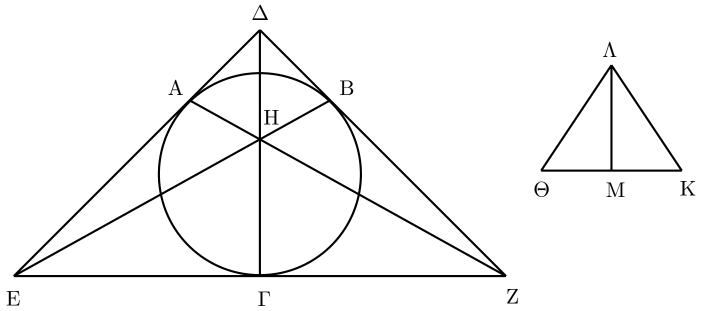
⌈η′⌉

Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶν τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

ἔστω κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω, ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ ΔΕΖ πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον εἶναι. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.

ἐπεὶ γὰρ [ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ] αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ. αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. πλευραὶ γάρ εἰσιν τοῦ κώνου.

κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΘΚΛ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ τριγώνου, τὴν δὲ ΛΜ κάθετον ἴσην τῇ ΗΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΔΕ, ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΕΔΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΖ, ΗΒ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΖΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΓΗ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ΕΗΖ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΘΚ καὶ τῆς ΑΗ, τουτέστι τῆς ΜΛ, διπλάσιον τῶν ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ τριγώνων. ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΛΜ διπλάσιον τοῦ ΛΚΘ τριγώνου. διὰ τοῦτο δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.



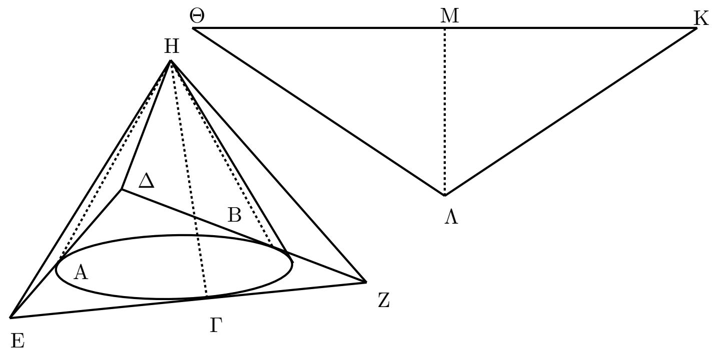
[8]

Sempre que al voltant d'un con isòsceles hi sigui circumscrita una piràmide, la superfície de la piràmide, llevat de la base, serà igual a un triangle que té base la recta igual al perímetre de la base mentre que altura el costat del con.

Heus aquí un con base del qual és el cercle ΑΒΓ. Hi estigui circumscrita una piràmide, de manera que la seva base (és a dir, el polígon ΔΕΖ) sigui circumscrita al voltant del cercle ΑΒΓ. Jo dic que la superfície de la piràmide, llevat de la base, és igual al triangle esmentat.

En efecte, atès que [l'eix del con és ortogonal respecte de la base, és a dir, respecte del cercle ΑΒΓ, i] unes rectes unides des del centre del cercle fins als punts de contacte són perpendiculars sobre les rectes que els toquen, per tant, també les unides des del vèrtex del con fins als punts de contacte seran perpendiculars sobre ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ. Per tant, les perpendiculars esmentades, ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, són iguals les unes a les altres, ja que són costats del con.

Estigui, doncs, posat el triangle ΘΚΛ que té ΘΚ igual al perímetre del triangle ΔΕΖ, mentre que la perpendicular ΛΜ, igual a ΗΑ. Així, doncs, atès que el rectangle ΔΕ, ΑΗ és el doble del triangle ΕΔΗ, mentre que el rectangle ΔΖ, ΗΒ és el doble del triangle ΔΖΗ, però el rectangle ΕΖ, ΓΗ és el doble del triangle ΕΗΖ, per tant, el comprès per ΘΚ i per ΑΗ (és a dir, ΜΛ) és el doble dels triangles ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ. Però també el rectangle comprès per ΘΚ, ΛΜ és el doble del triangle ΛΚΘ. Per això, doncs, la superfície de la piràmide, llevat de la base, és igual a un triangle que té base igual al perímetre de ΔΕΖ mentre que altura el costat del con.



⌈ϑʹ⌉

Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν.

ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔΓ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς τῆς μεταξὺ τῶν ΑΔΓ.

τετμήσθω ἡ ΑΒΓ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΒ, ΔΒ· ἔσται δὴ τὰ ΑΒΔ, ΒΓΔ τρίγωνα μείζονα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου. ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἔστω τὸ Θ. τὸ δὴ Θ ἤτοι τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν ἢ οὔ.

ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος καὶ ἡ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος τοῦ ΑΒΔ τριγώνου. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τοῦ ΓΖΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ Θ χωρίου μείζων ἐστὶ τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶν τῷ τε ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Θ χωρίον· λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου.

ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς ΑΒ, ΒΓ περιφερείας δίχα καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΕ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΕ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΕ τριγώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΔΒ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΕΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΕΔΒ τριγώνου. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ τμημάτων μείζων ἐστὶν τῶν ΑΔΕ, ΕΒΔ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΒ τρίγωνα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, [καθὼς δέδεικται], πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ

⌈9⌉

Sempre que, d'un cert con isòsceles, una línia recta caigui dintre del cercle que és base del con, i des dels seus límits siguin conduides unes línies rectes fins al vèrtex del con, el triangle contingut tant per la recta que cau dintre com per les rectes unides fins al vèrtex haurà de ser més petit que la superfície del con entre les rectes unides fins al vèrtex.

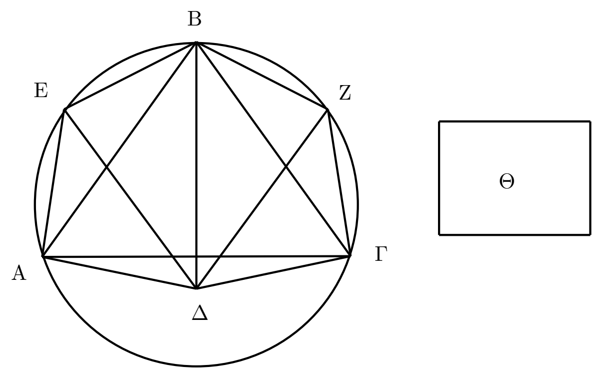
Heus aquí la base d'un con isòsceles, el cercle ΑΒΓ, i el vèrtex Δ. Estigui travessada amb una certa recta ΑΓ, i des del vèrtex fins a Α, Γ estiguin unides ΑΔ, ΔΓ. Jo dic que el triangle ΑΔΓ és més petit que la superfície cònica entre les rectes ΑΔΓ.

Estigui tallada en dos la circumferència ΑΒΓ per Β, i estiguin unides ΑΒ, ΓΒ, ΔΒ. Els triangles ΑΒΔ, ΒΓΔ seran, doncs, més grans que el triangle ΑΔΓ. El que superen els triangles esmentats al triangle ΑΔΓ, heu-la aquí, doncs, Θ. Θ, doncs, o bé, és més petita que els segments ΑΒ, ΒΓ, o bé, no.

Heus aquí, en primer lloc, que no és més petita. Així, doncs, atès que hi ha dues superfícies, tant la cònica entre les rectes ΑΔΒ juntament amb el segment ΑΕΒ, com la del triangle ΑΔΒ, que tenen el mateix límit (el perímetre del triangle ΑΔΒ), serà més gran la que conté que la continguda. Per tant, és més gran la superfície cònica entre les rectes ΑΔΒ, juntament amb el segment ΑΕΒ, que el triangle ΑΒΔ. Però, d'una manera semblant, la superfície entre les rectes ΒΔΓ, juntament amb el segment ΓΖΒ, també és més gran que el triangle ΒΔΓ. Per tant, la totalitat de la superfície cònica, juntament amb l'àrea Θ, és més gran que els triangles esmentats. Però els triangles esmentats són iguals al triangle ΑΔΓ i a l'àrea Θ. Estigui extreta una àrea comuna Θ. Per tant, la superfície cònica restant entre les rectes ΑΔΓ, és més gran que el triangle ΑΔΓ.

Heus aquí, doncs, que Θ és més petita que els segments ΑΒ, ΒΓ. Tallant, doncs, en dos les circumferències ΑΒ, ΒΓ, i les seves meitats també en dos, restaran uns segments que seran més petits que l'àrea Θ. N'hagin restat els segments sobre les rectes ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, i estiguin unides ΔΕ, ΔΖ. Llavors, al seu torn, exactament pels mateixos <arguments>, la superfície del con entre les rectes ΑΔΕ, juntament amb el segment sobre ΑΕ, és més gran que el triangle ΑΔΕ, mentre que la superfície entre les rectes ΕΔΒ, juntament amb el segment sobre ΕΒ, és més gran que el triangle ΕΔΒ. Per tant, la superfície entre les rectes ΑΔΒ, juntament amb els segments sobre ΑΕ, ΕΒ, és més gran que els triangles ΑΔΕ, ΕΒΔ.

τμημάτων μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΒΖ, ΖΓ τμημάτων μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν ΑΒΔ, ΔΒΓ, τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ· ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου.

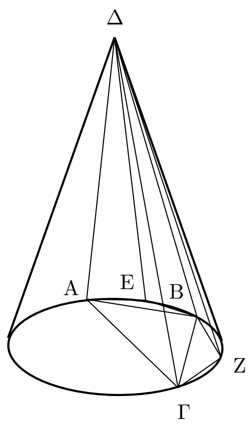


⌈ι′⌉

Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσιν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστιν τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν.

ἔστω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου, ὅ ἐστιν κορυφὴ τοῦ κώνου, ἐπὶ τὰ Α, Δ, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΔ, ΕΓ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΓΕ εὐθειῶν καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας.

Però atès que els triangles AEΔ, ΔEB són més grans que el triangle ABΔ [, com ha estat provat,] per tant, la superfície del con entre les rectes AΔB, juntament amb els segments sobre AE, EB és, de molt, més gran que el triangle AΔB. I pels mateixos <arguments>, doncs, la superfície entre les rectes BΔΓ, juntament amb els segments sobre BZ, ZΓ, també és més gran que el triangle BΔΓ. Per tant, la totalitat de la superfície entre les rectes AΔΓ, juntament amb els segments esmentats, és més gran que els triangles ABΔ, ΔBΓ. Però això és igual al triangle AΔΓ i a l'àrea Θ, i els segments esmentats són més petits que l'àrea Θ. Per tant, la superfície restant entre les rectes AΔΓ és més gran que el triangle AΔΓ.

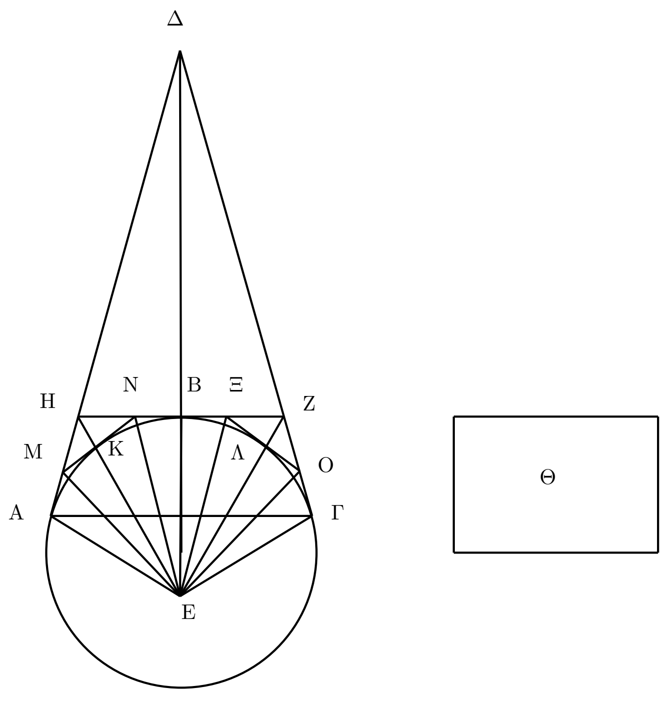


⌈10⌉

Sempe que del cercle que és base del con siguin conduides unes tangents que són en el mateix pla que el cercle i que hi concorren, l'una amb l'altra, i des dels punts de contacte i de concurrència siguin conduides unes rectes fins al vèrtex del con, els triangles compresos per les tangents i per les rectes unides fins al vèrtex del con són més grans que la superfície del con separada per elles.

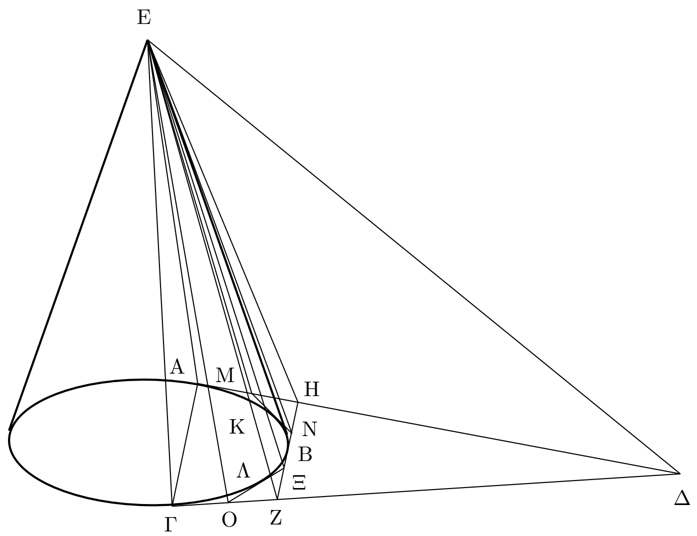
Heus aquí un con base del qual és un cercle ABΓ, mentre que vèrtex, un punt E. Estiguin conduides unes rectes que toquen el cercle ABΓ que són en el mateix pla, AΔ, ΓΔ, i des del punt E (que és el vèrtex del con) fins a A, Δ, Γ estiguin unides les rectes EA, EΔ, EΓ. Jo dic que els triangles AΔE, ΔEΓ són més grans que la superfície cònica entre les rectes AE, ΓE i la circumferència ABΓ.

ἤχθω γὰρ ἡ ΗΒΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ παράλληλος οὖσα τῇ ΑΓ δίχα τμηθείσης τῆς ΑΒΓ περιφερείας κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ζ ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ ΗΔ, ΔΖ τῆς ΗΖ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΗΑ, ΖΓ· ὅλαι ἄρα αἱ ΑΔ, ΔΓ μείζους εἰσὶν τῶν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ πλευραί εἰσιν τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσὶν διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον· ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν [ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι] [τὰ δὲ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων διπλασίονα ἐστιν τῶν τριγώνων]· μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων [εἰσὶν γὰρ αἱ μὲν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ ἐλάσσους τῶν ΓΔ, ΔΑ, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα] [φανερὸν γάρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην]. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν τὰ ΑΕΔ, ΔΓΕ τρίγωνα τῶν ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων, ἔστω τὸ Θ χωρίον. τὸ δὴ Θ χωρίον ἤτοι ἔλαττόν ἐστιν τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ ἀποτμημάτων ἢ οὐκ ἔλαττον.



ἔστω πρότερον μὴ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσιν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ ΗΑΓΖ τραπεζίου κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος, καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον

En efecte, estigui conduïda una recta que toca el cercle, HBZ, també paral·lela a ΑΓ, tallant en dos la circumferència ΑΒΓ per B, i des d'H, Z fins a E estiguin unides les rectes HE, ZE. I, atès que HΔ, ΔZ són més grans que HZ (hi estiguin juxtaposades unes rectes comunes HA, ZΓ), per tant, la totalitat de les rectes AΔ, ΔΓ és més gran que AH, HZ, ZΓ. I, atès que AE, EB, EΓ són costats del con, són iguals pel fet que el con és isòsceles. Però, d'una manera semblant, també són perpendiculars [com fou demostrat en el lema][però els rectangles compresos per les perpendiculars i per les bases són el duple dels triangles]. Per tant, els triangles AEΔ, ΔEΓ són més grans que els triangles AHE, HEZ, ZEΓ [ja que AH, HZ, ZΓ són més petits que ΓΔ, ΔA, mentre que les seves altures són iguals][ja que és clar que la recta unida des del vèrtex del con recte fins al punt d'adhesió de la base és perpendicular a la recta que el toca]. El que els triangles AEΔ, ΔΓE són més grans que els triangles AEH, HEZ, ZEΓ, heus-ho aquí, doncs, l'àrea Θ. L'àrea Θ, doncs, o bé és més petita que els retalls AHBK, BZΓΛ, o bé no és més petita.



Heus aquí, en primer lloc, que no és més petita. Així, doncs, atès que són superfícies compostes, tant la de la piràmide sobre una base del trapezi HAΓZ i que té vèrtex, E, com la superfície cònica entre les rectes AEΓ, juntament amb el τοῦ ΑΕΓ τριγώνου, δῆλον, ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου μείζων ἐστὶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ ΑΒΓ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα· λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΕΓ. τῶν δὲ ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστιν τὸ Θ χωρίον· πολλῷ ἄρα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. ἀλλὰ τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΓΕΖ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ ἐστιν τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα· τὰ ἄρα ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας.

ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων. ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων λείψομέν τινα ἀπολείμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου. λελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ Ε. πάλιν δὴ φανερόν, ὅτι τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων ἔσται μείζονα [αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους καὶ τὸ ὕψος ἴσον]. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμὶς ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ ΑΜΝΞΟΓ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ε, χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα· λοιπὰ ἄρα τὰ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τρίγωνα μετὰ τῶν ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστιν τὸ Θ χωρίον, τῶν δὲ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα· πολλῷ ἄρα τὰ ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ χωρίου, τουτέστι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα, μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ εὐθειῶν.

⌈ια´⌉

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν.

ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, ἀπεναντίον δὲ ὁ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ segment ΑΒΓ, i tenen límit el mateix perímetre del triangle ΑΕΓ, és clar que la superfície de la piràmide, llevat del triangle ΑΕΓ, és més gran que la superfície cònica, juntament amb el segment ΑΒΓ. Estigui extret un segment comú ΑΒΓ. Per tant, els triangles restants ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ, juntament amb les restes circumdants ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ, és més gran que la superfície cònica entre les rectes ΑΕ, ΕΓ. Però l'àrea Θ no és més petita que les restes circumdants ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ. Per tant, els triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ, juntament amb Θ, seran, de molt, més grans que la superfície cònica entre les rectes ΑΕΓ. Tanmateix, els triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΓΕΖ, juntament amb Θ, són els triangles ΑΕΔ, ΔΕΓ. Per tant, els triangles ΑΕΔ, ΔΕΓ seran més grans que la superfície cònica esmentada.

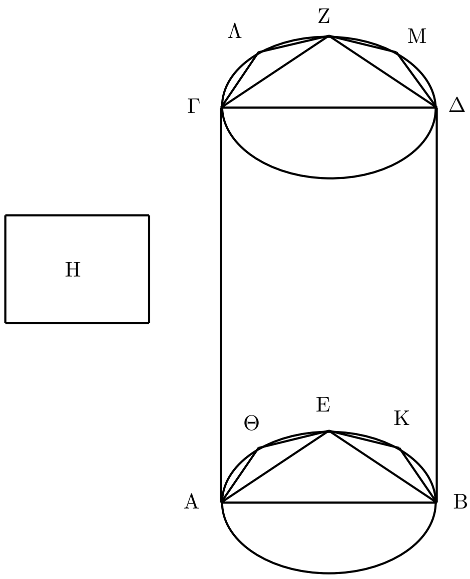
Heus aquí, doncs, que Θ és més petita que les restes circumdants. Circumscrivint, doncs, repetidament, polígons al voltant dels segments d'una manera semblant, tot tallant en dos les circumferències que resten al voltant i conduint unes rectes que les toquen deixarem certes restes externes que seran més petites que l'àrea Θ. N'hagin restat i heu-les aquí, ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ, que són més petites que l'àrea Θ, i estiguin unides fins a Ε. Al seu torn, doncs, és clar que els triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ seran més grans que els triangles ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ [ja que, tant les bases són més grans que les bases, com l'altura, igual]. Però, a més, al seu torn i d'una manera semblant, la piràmide, que té base el polígon ΑΜΝΞΟΓ, mentre que vèrtex Ε, llevat del triangle ΑΕΓ, té una superfície més gran que la superfície cònica entre les rectes ΑΕΓ, juntament amb el segment ΑΒΓ. Estigui extret un segment segment comú ΑΒΓ. Per tant, els triangles restants ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ, juntament amb les restes circumdants ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ, seran més grans que la superfície cònica entre les rectes ΑΕΓ. Tanmateix, l'àrea Θ és més gran que les restes circumdants esmentades, mentre que els triangles ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ fou provat que són més grans que els triangles ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ. Per tant, els triangles ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ, juntament amb l'àrea Θ, (és a dir, els triangles ΑΔΕ, ΔΕΓ), són, de molt, més grans que la superfície cònica entre les rectes ΑΕΓ.

⌈11⌉

Sempre que en la superfície d'un cilindre recte hi siguin dues rectes, la superfície del cilindre entre les rectes serà més gran que el paral·lelogram comprès tant per les rectes en la superfície del cilindre com per les que uneixen els seus límits.

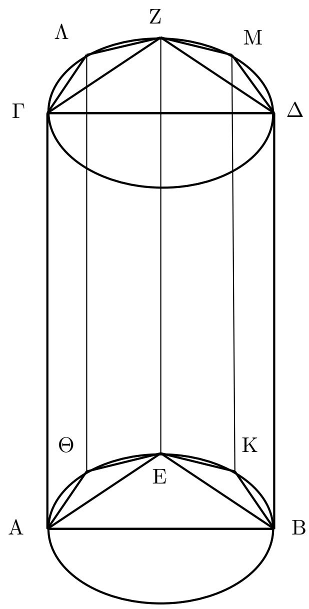
Heus aquí un cilindre recte base del qual és el cercle ΑΒ mentre que l'oposada ΓΔ, i estiguin unides ΑΓ, ΒΔ. Jo dic que la superfície cònica retallada per les rectes ΑΓ, ΒΔ és més gran que el paral·lelogram ΑΓΒΔ.

En efecte, estigui tallat en dos cadascun dels segments ΑΒ, ΓΔ, per uns punts Ε, ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. [καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ τῆς ΑΒ [διαμέτρου] μείζους εἰσίν, καί ἐστιν ἰσουψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν,] μείζονα οὖν ἐστιν τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου. ᾧ ἄρα μείζονά ἐστιν, ἔστω τό Η χωρίον. τὸ δὴ Η χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων ἢ οὐκ ἔλασσον.



ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ [τρίγωνα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ [ἐπίπεδα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαί εἰσιν, μείζων οὖν ἐστιν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΕΒ, ΓΖΔ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ τρίγωνα· λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ

Z, i estiguin unides AE, EB, ΓZ, ZΔ. [I, atès que les rectes AE, EB són més grans que [el diàmetre] AB i els paral·lelograms sobre aquestes són de la mateixa altura,] així, doncs, els paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la mateixa que el cilindre, són més grans que el paral·lelogram ABΔΓ.Heus aquí, per tant, l'àrea en què són més grans, H. L'àrea H, doncs, o bé és més petita que els segments plans AE, EB, ΓZ, ZΔ, o bé no és més petita.



Heus aquí, en primer lloc, que no és més petita. Atès que la superfície cilíndrica retallada per les rectes AΓ, BΔ, i els <segments> [triangles] AEB, ΓZΔ tenen límit el pla del paral·lelogram AΓBΔ, i tanmateix la superfície composta a partir dels paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB, mentre que altura, la mateixa que el cilindre, i uns <triangles> [plans] AEB, ΓZΔ tenen límit el pla del paral·lelogram ABΔΓ, i que una conté l'altra i que ambdues són còncaves sobre un mateix costat, així, doncs, la superfície cilíndrica retallada per les rectes AΓ, BΔ i els segments plans AEB, ΓZΔ, és més gran que la superfície composta a partir dels paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la mateixa que el cilindre, i els triangles AEB, ΓZΔ. Estiguin extrets uns triangles comuns AEB, ΓZΔ. Així, doncs, la superfície cilíndrica restant retallada per les rectes AΓ, BΔ, i els segments plans AE, EB, ΓZ, ZΔ, és més gran que la superfície composta a partir dels paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶν τῷ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ Η χωρίον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ [τῶν δὲ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἡμισύ τὰ ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ τρίγωνα]. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταλειφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Η χωρίου. καταλελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθυγράμμων, κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθύγραμμα· λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἔστιν τῷ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ Η χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ τμήματα τοῦ Η χωρίου ἐλάσσονα λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

mateixa que el cilindre. Però els paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la mateixa que el cilindre, són iguals al paral·lelogram ΑΓΒΔ i a l'àrea H. Per tant, la superfície cilíndrica restant retallada per les rectes ΑΓ, ΒΔ, és més gran que el paral·lelogram ΑΓΒΔ.

Tanmateix, doncs, heus aquí que l'àrea H és més petita que els segments plans AE, EB, ΓΖ, ΖΔ. Estiguin tallades en dos cada una de les circumferències AE, EB, ΓΖ, ΖΔ pels punts Θ, Κ, Λ, Μ, i estiguin unides ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ [i, per tant, els triangles ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ extreuen quelcom no més petit que la meitat dels segments plans AE, EB, ΓΖ, ΖΔ,]. Així, doncs, esdevenint-se això una i altra vegada, restaran a sota uns certs segments que seran més petits que l'àrea H. N'hagin restat a sota i heu-los aquí ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ.

D'una manera semblant, doncs, provarem que els paral·lelograms, bases dels quals són ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ mentre que altura, la mateixa que el cilindre, seran més grans que els paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la mateixa que el cilindre. Atès que la superfície cilíndrica retallada per les rectes ΑΓ, ΒΔ i els segments plans ΑΕΒ, ΓΖΔ tenen límit el pla del paral·lelogram ΑΓΒΔ i, tanmateix, una superfície composta a partir dels paral·lelograms, bases dels quals són ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ mentre que altura, la mateixa que el cilindre, i a partir de les figures rectilínies ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ, <té límit el pla del paral·lelogram ΑΒΔΓ, per tant, la superfície cilíndrica retallada per les rectes ΑΓ, ΒΔ i els segments plans ΑΕΒ, ΓΖΔ és més gran que una superfície composta a partir dels paral·lelograms, base dels quals és ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ mentre que altura, la mateixa que la del cilindre, i a partir de les figures rectilínies ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ>. Estigui extreta una figura rectilínia comuna ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ.Per tant, la superfície cilíndrica restant retallada per les rectes ΑΓ, ΒΔ, i els segments plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, són més grans que una superfície composta a partir dels paral·lelograms, bases dels quals són ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ mentre que altura, la mateixa que el cilindre. Però els paral·lelograms, bases dels quals són ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ mentre que altura, la mateixa que el cilindre, són més grans que els paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la mateixa que el cilindre. Per tant, la superfície cilíndrica retallada per les rectes ΑΓ, ΒΔ, i els segments plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, també són més grans que els paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la mateixa que el cilindre. Però els paral·lelograms, bases dels quals són AE, EB mentre que altura, la mateixa que el cilindre, són iguals a un paral·lelogram ΑΓΔΒ i a una àrea H. Per tant, les superfícies cilíndriques retallades per les rectes ΑΓ, ΒΔ i els segments plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ també són més grans que el paral·lelogram ΑΓΒΔ i l'àrea H. Per tant, un cop extrets uns segments ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, més petits que l'àrea H, la superfície cilíndrica restant retallada per les rectes ΑΓ, ΒΔ és més gran que el paral·lelogram ΑΓΒΔ.

⌈ιβʹ⌉

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσίν τινες ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, οἵ εἰσιν βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι καὶ συμπέσωσιν, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου.

ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ Α, Γ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου. δεικτέον, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

ἤχθω γὰρ ἡ ΕΖ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ σημείων ἤχθωσάν τινες εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου ἕως [τῆς ἐπιφανείας] τῆς ἑτέρας βάσεως· τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΓ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου [ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΗ, ΗΖ τῆς ΕΖ μείζους εἰσίν, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΑΕ, ΖΓ. ὅλαι ἄρα αἱ ΗΑ, ΗΓ μείζους εἰσὶν τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ]. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ Κ χωρίον. τοῦ δὴ Κ χωρίου τὸ ἥμισύ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ εὐθειῶν καὶ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ΒΘ, ΘΓ περιφερειῶν ἢ οὔ.

ἔστω πρότερον μεῖζον. τῆς δὴ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τοῦ ΑΕΖΓ τραπεζίου καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν ΑΓ. ἔστιν δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος· αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ, καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καί τινα μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε ΑΒΓ τμήματος καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῶν σχημάτων τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρη-

⌈12⌉

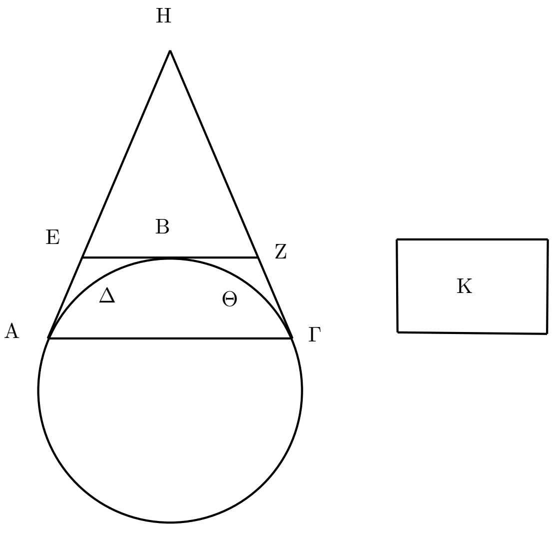
Sempre que en la superfície d'un cert cilindre recte hi siguin dues rectes, i dels límits de les rectes siguin traçades certes tangents dels cercles que són bases del cilindre, <tangents> què són en el pla d'aquests cercles, i hi concorrin, els paral·lelograms compresos per les tangents i pels costats del cilindre hauran de ser més grans que la superfície del cilindre entre les rectes que són en la superfície del cilindre.

Heus aquí la base d'un cert cilindre recte, el cercle ΑΒΓ, i heus aquí dues rectes en la seva superfície, límits de les quals són Α, Γ. I, des d'Α, Γ estiguin conduides unes tangents del cercle, <tangents> que són en el mateix pla, i hi estiguin concorrent per Η. I també, en l'altra base del cilindre, siguin considerades unes rectes tangents del cercle conduides des dels límits en la superfície. S'ha de provar que els paral·lelograms compresos per les tangents i pels costats del cilindre són més grans que la superfície del cilindre per la circumferència ΑΒΓ.

<En efecte, un cop tallada en dos la circumferència ΑΒΓ pel punt Β,> estigui conduïda una tangent ΕΖ i, des d'uns punts Ε, Ζ, estiguin conduides certes rectes paral·leles a l'eix del cilindre cap a [la superfície de] l'altra base. Els paral·lelograms compresos per ΑΗ, ΗΓ, i pel costat del cilindre són, doncs, més grans que els paral·lelograms compresos tant per ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ com pel costat del cilindre. [En efecte, atès que ΕΗ, ΗΖ són més grans que ΕΖ, estiguin juxtaposades unes rectes comunes ΑΕ, ΖΓ, per tant, la totalitat d'ΗΑ, ΗΓ és més gran que ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ]. Heus aquí, doncs, l'àrea en què és més gran, Κ. La meitat de l'àrea Κ, doncs, o bé és més gran que les figures compreses per les rectes ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ i per les circumferències ΑΔ, ΔΒ, ΒΘ, ΘΓ, o bé no.

Heu-la aquí, en primer lloc, més gran. El límit de la superfície composta a partir tant dels paral·lelograms per ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ, com del trapezi ΑΕΖΓ, com del seu oposat corresponent a l'altra base del cilindre és, doncs, el perímetre del paral·lelogram per ΑΓ. Però aquest mateix perímetre és també el límit de la superfície composta a partir de la superfície del cilindre per la circumferència ΑΒΓ i dels segments, tant ΑΒΓ com el seu oposat. Així, doncs, s'escau que les superfícies esmentades tenen el mateix límit, que és precisament en un pla, ambdues són còncaves sobre un mateix costat i una d'elles conté una part de l'altra mentre que tenen l'altra part comuna. Per tant, la continguda és més petita. Així, doncs, un cop extrets uns segments comuns, tant el segment ΑΒΓ com el seu oposat, la superfície del cilindre per la circumferència ΑΒΓ és més petita que la superfície composta a partir tant dels paral·lelograms per ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ, com de les figures μένων παραλληλογράμμων ἐπιφάνειαι μετὰ τῶν εἰρημένων σχημάτων ἐλάττους εἰσὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΗΓ [μετα γὰρ τοῦ Κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς]· δῆλον οὖν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΓΗ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν.

εἰ δὲ μή ἐστιν μεῖζον τὸ ἡμισύ τοῦ Κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ τμήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσους τοῦ Κ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσεται.

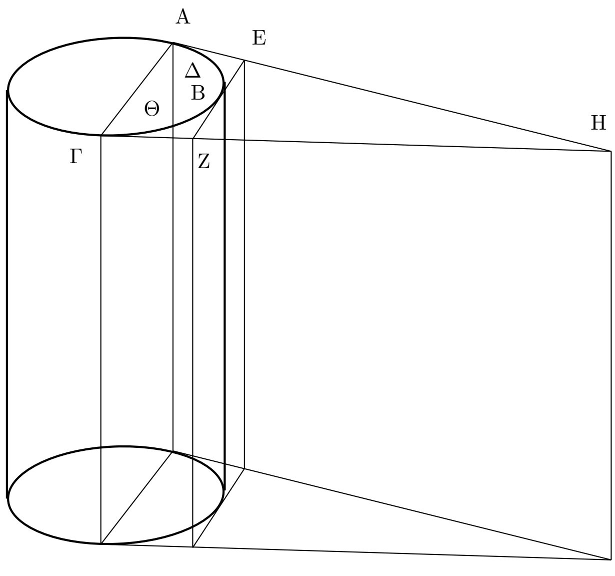


⌈φανερά⌉

Τούτων δὴ δεδειγμένων φανερὸν [ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων], ὅτι, ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας [ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων

AEB, BZΓ, com de les seves oposades. Però les superfícies dels paral·lelograms esmentats, juntament amb les figures esmentades, són més petites que les superfícies compostes a partir dels paral·lelograms per AH, HΓ [ja que, juntament amb K, que és més gran que les figures, eren iguals a aquells]. Així, doncs, és evident que els paral·lelograms compresos per AH, ΓH, i pels costats del cilindre són més grans que la superfície del cilindre per la circumferència ABΓ.

Però si la meitat de l'àrea K no és més gran que les figures esmentades, seran conduides rectes tangents del segment, de manera que les figures que resten al voltant resultin més petites que la meitat de K, i la resta serà provat de la mateixa manera que abans.



⌈resultats evidents (a partir de 9—12)⌉

Un cop provat això, doncs, és clar [sobre <la base> del que hem esmentat abans] que sempre que una piràmide sigui inscrita a un con isòsceles, la superfície de la piràmide, llevat de la base, serà més petita que la superfície cònica [ja que ἔλασσόν ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν· ὥστε καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως [κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ].

φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε, ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως [ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματός ἐστι τῆς καθ᾽ αὑτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

⌈ιγʹ⌉

Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ Α κύκλος, καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ Α κύκλου ἴση ἡ ΓΔ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΕΖ, ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν ΔΓ, ΕΖ ἡ Η, καὶ κείσθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ Η, ὁ Β· δεικτέον, ὅτι ὁ Β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶ ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ Β κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν Β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον καὶ ἐγγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα· ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὲ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον ἴση ἡ ΚΔ καὶ τῇ ΚΔ ἴση ἡ ΛΖ, τῆς δὲ ΓΔ ἡμίσεια ἔστω ἡ ΓΤ· ἔσται δὴ τὸ ΚΔΤ τρίγωνον ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν Α κύκλον [ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου [ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος]. κείσθω δὴ τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΕΡ·

cada un dels triangles que comprenen la piràmide és més petit que la superfície cònica entre els costats del triangle, de manera que la totalitat de la superfície de la piràmide, llevat de la base, és també més petita que la superfície del con, llevat de la base]. I que, sempre que una piràmide sigui circumscrita al voltant d'un con isòsceles, la superfície de la piràmide, llevat de la base, serà més gran que la superfície del con, llevat de la base, [d'acord amb el que ve immediatament després d'allò].

I, és clar, a partir del que s'ha demostrat, que, sempre que un prisma sigui inscrit a un cilindre recte, la superfície del prisma composta a partir dels paral·lelograms serà més petita que la superfície del cilindre, llevat de la base [ja que cada paral·lelogram del prisma és més petit que la superfície del cilindre corresponent], i que, sempre que un prisma sigui circumscrit al voltant d'un cilindre recte, la superfície del prisma composta a partir dels paral·lelograms serà més gran que la superfície del cilindre, llevat de la base.

⌈13⌉

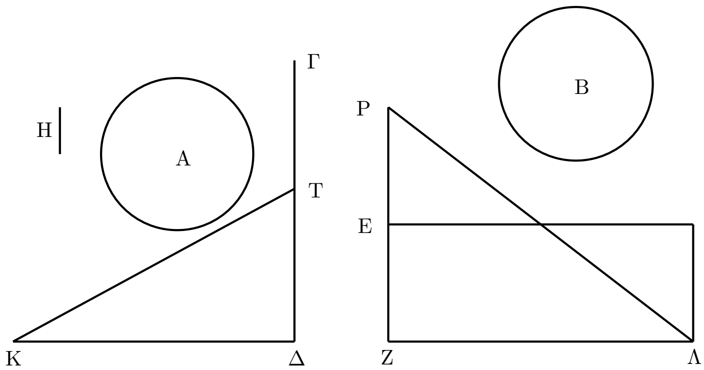
La superfície de tot cilindre recte, llevat de la base, és igual a un cercle el radi del qual té una raó mitjana del costat del cilindre i del diàmetre de la base del cilindre.

Heus aquí la base d'un cert cilindre recte, el cercle A. Heus aquí ΓΔ igual al diàmetre del cercle A, mentre que EZ igual al costat del cilindre. Tingui H una raó mitjana de ΔΓ, EZ. Estigui posat un cercle B el radi del qual és igual a H. S'ha de provar que el cercle B és igual a la superfície del cilindre, llevat de la base.

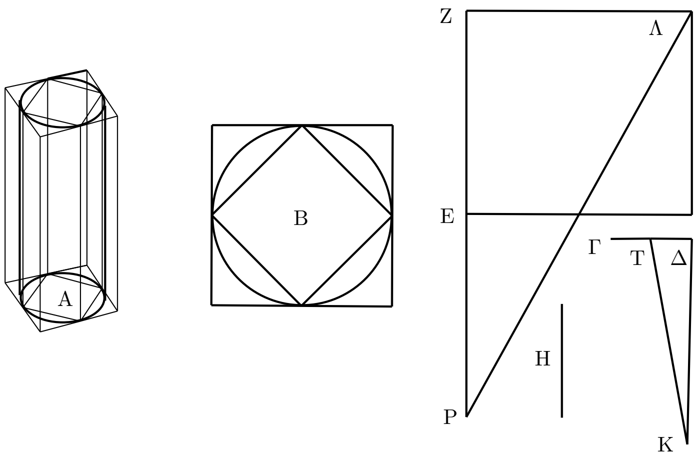
En efecte, si no és igual, o bé és més gran, o bé més petit. En primer lloc, heus aquí, si és possible, que és més petit. Havent-hi, doncs, dues magnituds desiguals, tant la superfície del cilindre com el cercle B, és possible inscriure al cercle B un polígon equilàter i circumscriure-n'hi un altre de manera que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que la que té la superfície del cilindre respecte del cercle B. Siguin considerats, doncs, el circumscrit i l'inscrit i al voltant del cercle A estigui circumscrita una figura rectilínia semblant al polígon circumscrit al voltant de B, i estigui aixecat des de la figura rectilínia un prisma; estarà, doncs, circumscrit al voltant del cilindre. Però heus aquí KΔ igual al perímetre de la figura rectilínia al voltant del cercle A i ΛZ igual a KΔ. I heus aquí una meitat de ΓΔ, ΓT. Serà, doncs, el triangle KΔT igual a la figura rectilínia circumscrita al voltant del cercle A [car té base igual al perímetre, mentre que altura igual al radi del cercle A], i el paral·lelogram EΛ igual a la superfície del prisma circumscrit al voltant del cilindre [car està comprès pel costat del cilindre i per ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΡΛ τρίγωνον τῷ ΕΛ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον [τὰ εὐθύγραμμα], ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει· ἕξει ἄρα τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον λόγον, ὃν ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει [αἱ γὰρ ΤΔ, Η ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἐκ τῶν κέντρων]. ἀλλ᾽ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει [ἡ γὰρ Η τῶν ΤΔ, ΡΖ μέση ἐστὶ ἀνάλογον διὰ τὸ καὶ τῶν ΓΔ, ΕΖ· πῶς δὲ τοῦτο;] [ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΓ, ἡ δὲ ΡΕ τῇ ΕΖ, διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς ΤΔ, καὶ ἡ ΡΖ τῆς ΡΕ·] [ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΔΤ, οὕτως ἡ ΡΖ πρὸς ΖΕ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Η· τῷ καὶ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΤΔ πρὸς Η, οὕτως ἡ Η πρὸς ΡΖ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ, τὸ ἀπὸ τῆς ΤΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η· ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον]· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΛΖ [ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΚΔ, ΛΖ]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ ΤΚΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΖΛ τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΛΡ τρίγωνον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ· ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν Α κύλινδρον περιγεγραμμένου τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Α κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον. καὶ ἐναλλάξ· ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου]. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ Β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

ἔστω δή, εἰ δυνατόν, μείζων. πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸν Β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν Α κύκλον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. καὶ πάλιν ἡ ΚΔ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου, καὶ ἡ ΖΛ ἴση αὐτῇ ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν ΚΤΔ τρίγωνον μεῖζον τοῦ la recta igual al perímetre de la base del prisma]. Estigui, doncs, posat EP igual a EZ. Per tant, el triangle ZPΛ és igual al paral·lelogram EΛ, de manera que també ho és a la superfície del prisma. I, atès que les figures rectilínies circumscrites al voltant dels cercles A, B són semblants, tindran precisament la mateixa raó [les figures rectilínies] que els radis, en potència, per tant, el triangle KTΔ respecte de la figura rectilínia al voltant del cercle B tindrà una raó que té TΔ respecte d'H, en potència [ja que TΔ, H són iguals als radis]. Tanmateix, la raó que té TΔ respecte d'H, en potència, aqueixa té TΔ respecte de PZ, en longitud [ja que H és, precisament, una mitjana proporcional de TΔ, PZ, pel fet que també <ho és> de ΓΔ, EZ. Però com és això? En efecte, atès que, d'una banda, ΔT és igual a TΓ mentre que PE a EZ, per tant, ΓΔ és el doble de TΔ, i PZ ho és de PE. Per tant, com ΔΓ respecte de ΔT, així és PZ respecte de ZE. Per tant, el rectangle comprès per ΓΔ, EZ també és igual al rectangle comprès per TΔ, PZ. Però el quadrat a partir d'H és igual al rectangle comprès per ΓΔ, EZ. El quadrat a partir d'H, per tant, és igual al rectangle comprès per TΔ, PZ. Per tant, com TΔ respecte d'H, així H respecte de PZ. Per tant, com TΔ respecte de PZ, és el quadrat a partir de TΔ respecte del quadrat a partir d'H, ja que, sempre que tres rectes siguin proporcionals, com la primera respecte de la tercera, així serà la forma a partir de la primera respecte de la forma a partir la segona, la que és semblant i aixecada d'una manera semblant.] Però la raó que té TΔ respecte de PZ en longitud, aqueixa té el triangle KTΔ respecte del PΛZ [car KΔ, ΛZ són precisament iguals]. Per tant, el triangle KTΔ respecte de la figura rectilínia circumscrita al voltant del cercle B té precisament la mateixa raó que el triangle TKΔ respecte del triangle PZΛ. Per tant, el triangle ZΛP és igual a la figura rectilínia circumscrita al voltant del cercle B, de manera que també la superfície del prisma circumscrit al voltant del cilindre A és igual a la figura rectilínia al voltant del cercle B. I, atès que la figura rectilínia al voltant del cercle B respecte de la inscrita en el cercle té una raó més petita que la que té la superfície del cilindre A respecte del cercle B, la superfície del prisma circumscrit al voltant del cilindre respecte de la figura rectilínia inscrita en el cercle B també tindrà una raó més petita que la superfície del cilindre respecte del cercle B. I per alternança, cosa que és precisament impossible [ja que ha estat provat que la superfície del prisma circumscrit al voltant del cilindre és més gran que la superfície del cilindre, mentre que la figura rectilínia inscrita en el cercle B és més petita que el cercle B]. No es dóna el cas, per tant, que el cercle B és més petit que la superfície del cilindre.

Heu-lo aquí, doncs, si és possible, més gran. Sigui considerada, doncs, al seu torn, una figura rectilínia inscrita al cercle B, i una altra de circumscrita, de manera que la circumscrita respecte de la inscrita té una raó més petita que el cercle B respecte de la superfície del cilindre. Estigui inscrit al cercle A un polígon semblant a l'inscrit al cercle B i estigui aixecat un prisma des del polígon inscrit en el cercle. Al seu torn, KΔ sigui igual al perímetre de la figura rectilínia inscrita en el cercle A, i que ZΛ sigui igual a aquesta <figura>. Serà, doncs, el triangle εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου [διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ, ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ [διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστιν βάσις τοῦ πρίσματος]· ὥστε καὶ τὸ ΡΛΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ ΚΤΔ, ΖΡΛ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΖΡ τρίγωνον. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΚΤΔ τριγώνου· ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΖΡΛ τριγώνου· ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου· ὅπερ ἀδύνατον [ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐναλλάξ, μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν Β κύκλον τοῦ Β κύκλου, μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ Β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.] [ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος]. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ Β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων· ἴσος ἄρα ἐστίν.



KTΔ més gran que la figura rectilínia inscrita en el cercle A [perquè té base el seu perímetre, mentre que altura més gran que una recta conduïda perpendicular des del centre fins a un costat del polígon], mentre que el paral·lelogram EΛ, igual a la superfície del prisma composta a partir dels paral·lelograms [perquè està compresa pel costat del cilindre i per la recta igual al perímetre de la figura rectilínia, que és base del prisma], de manera que el triangle PΛZ és també igual a la superfície del prisma. I, atès que les figures rectilínies inscrites en els cercles A, B són semblants, tenen la mateixa raó, l'una respecte de l'altra, que els seus radis, en potència, Però els triangles KTΔ, ZPΛ tenen també una raó, l'un respecte de l'altre, que tenen els radis dels cercles, en potència. Per tant, la figura rectilínia inscrita en el cercle A respecte de la figura rectilínia inscrita en el cercle B, i el triangle KTΔ respecte del triangle ΛZP, tenen la mateixa raó. Però la figura rectilínia inscrita en el cercle A és més petita que el triangle KTΔ. Per tant, la figura rectilínia inscrita en el cercle B és també més petita que el triangle ZPΛ, de manera que també és més petita que la superfície del prisma inscrit en el cilindre, cosa que és precisament impossible. [En efecte, atès que la figura rectilínia circumscrita al voltant del cercle B respecte de la inscrita té una raó més petita que el cercle B respecte de la superfície del cilindre (i per alternança), però la circumscrita al voltant del cercle B és més gran que el cercle B, per tant, la inscrita en el cercle B és més gran que la superfície del cilindre, de manera que també és més gran que la superfície del prisma]. Per tant, no es dóna el cas que el cercle B és més gran que la superfície del cilindre, però fou provat que tampoc més petit. Per tant, és igual.



⌜ιδʹ⌝

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν βάσις τοῦ κώνου.

ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ Γ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ Δ, τῶν δὲ Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε, ὁ δὲ Β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ Ε ἴσην· λέγω, ὅτι ὁ Β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ ὁ Β κύκλος, καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν Α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς Ε δύναμει, τουτέστιν ἡ Γ πρὸς Δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον [ἡ μὲν γὰρ Γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ Δ τῇ πλευρᾳ τοῦ κώνου· κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον· ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσον ἔσται τοῦ Β κύκλου]. οὐκ ἄρα ὁ Β κύκλος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

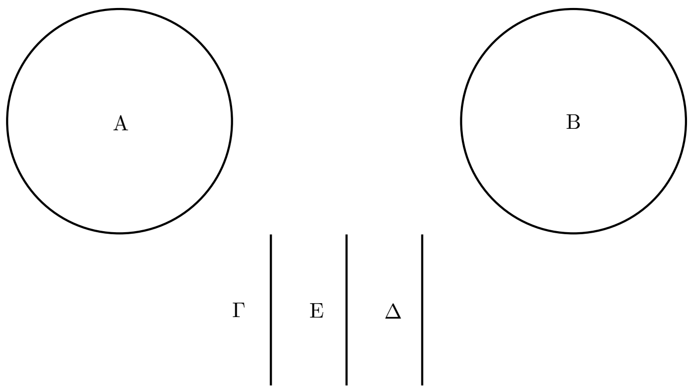
⌈14⌉

La superfície de tot con isòsceles, llevat de la base, és igual a un cercle el radi del qual té una raó mitjana del costat del con i del radi del cercle que és base del con.

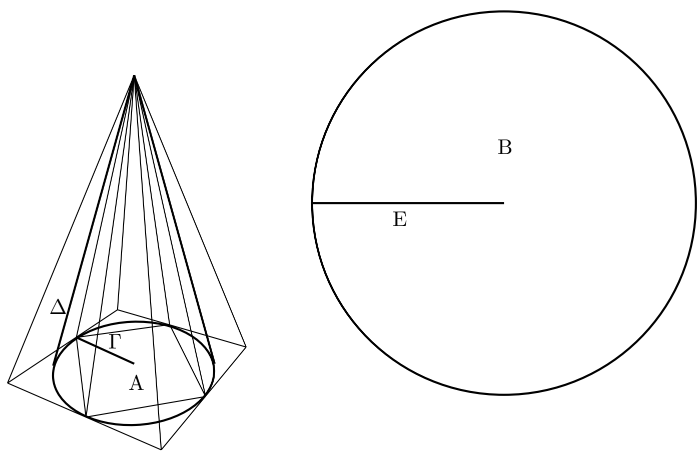
Heus aquí un con isòsceles base del qual el cercle A, i heus aquí el seu radi Γ i heus aquí Δ igual al costat del con, i E una mitjana proporcional de Γ, Δ. Tingui el cercle B radi igual a E. Jo dic que el cercle B és igual a la superfície del con, llevat de la base.

En efecte, si no és igual, o bé és més gran, o bé més petit. heu-lo aquí, en primer lloc, més petit. Hi ha, doncs, dues magnituds desiguals, tant la superfície del con com el cercle B, i és més gran la superfície del con. Per tant, és possible inscriure un polígon equilàter al cercle B i circumscriure-n'hi <un altre> de semblant a l'inscrit, de manera que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que la que té la superfície del con respecte del cercle B. Sigui considerat, doncs, un polígon circumscrit al voltant del cercle A semblant al circumscrit al voltant del cercle B i alci's una piràmide aixecada des del polígon circumscrit en el cercle A que tingui el mateix vèrtex que el con. Així, doncs, atès que els polígons circumscrits al voltant dels cercles A, B són semblants, tenen la mateixa raó, en potència,l'un respecte de l'altre, que els radis, l'un respecte de l'altre (és a dir, que Γ respecte d'E, en potència, és a dir, Γ respecte de Δ en longitud). Però la raó que té Γ respecte de Δ en longitud, aqueixa té el polígon circumscrit al voltant del cercle A respecte de la superfície de la piràmide circumscrita al voltant del con [ja que Γ és igual a la perpendicular des del centre fins a un costat del polígon, mentre que Δ igual al costat del con; però el perímetre del polígon és altura comuna per a la meitat de les superfícies]. Per tant, tenen la mateixa raó la figura rectilínia al voltant del cercle A respecte de la figura rectilínia al voltant del cercle B, i la mateixa figura rectilínia respecte de la superfície de la piràmide circumscrita al voltant del con, de manera que la superfície de la piràmide és igual a la figura rectilínia circumscrita al voltant del cercle B. Així, doncs, atès que la figura rectilínia circumscrita al voltant del cercle B respecte de la inscrita té una raó més petita que la superfície del con respecte del cercle B, la superfície de la piràmide circumscrita al voltant del con respecte de la figura rectilínia inscrita en el cercle B tindrà una raó més petita que la superfície del con respecte del cercle B, cosa que és precisament impossible [ja que ha estat provat que la superfície de la piràmide és més gran que la superfície del con, mentre que la figura rectilínia inscrita en el cercle B serà més petita que el cercle B.] No es dóna el cas, per tant, que el cercle B serà més petit que la superfície del con.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατόν ἐστιν, ἔστω μείζων. πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, καὶ εἰς τὸν Α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ᾽ αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ μήκει. ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον [ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου]. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τοῦ ἐν τῷ Β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. ὅπερ ἀδύνατον [τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου]. οὐκ ἄρα οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. ἴσος ἄρα.



Jo dic, doncs, que tampoc no és més gran. En efecte, si és possible, heu-lo aquí més gran. Sigui considerat, doncs, al seu torn, un polígon inscrit al cercle B, i un altre de circumscrit, de manera que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que la que té el cercle B respecte de la superfície del con. Sigui considerat un polígon inscrit al cercle A semblant a l'inscrit al cercle B, i estigui aixecada des d'aquest <polígon> una piràmide que tingui el mateix vèrtex que el con. Així, doncs, atès que són semblants els inscrits en els cercles A, B, tindran la mateixa raó, en potència, l'un respecte de l'altre, que els radis, l'un respecte de l'altre. Per tant, el polígon respecte del polígon i Γ respecte de Δ en longitud, tenen la mateixa raó. Però Γ respecte de Δ té una raó més gran que el polígon inscrit al cercle A respecte de la superfície de la piràmide inscrita al con [ja que el radi del cercle A respecte del costat del con té una raó més gran que una recta conduïda perpendicular des del centre fins a un costat del polígon respecte d'una recta conduïda perpendicular des del vèrtex del con fins al costat del polígon]. Per tant, el polígon inscrit en el cercle A respecte del polígon inscrit en el cercle B té una raó més gran que el mateix polígon respecte de la superfície de la piràmide. Per tant, la superfície de la piràmide és més gran que el polígon inscrit en B. Però el polígon circumscrit al voltant del cercle B respecte de l'inscrit té una raó més petita que el cercle B respecte de la superfície del con. Per tant, el polígon circumscrit en el cercle B respecte de la superfície de la piràmide inscrita en el con té, de molt, una raó més petita que el cercle B respecte de la superfície del con, cosa que és precisament impossible [ja que el polígon circumscrit és més gran que el cercle B, mentre que la superfície de la piràmide en el con és més petita que la superfície del con]. Tampoc no es dóna el cas, per tant, que el cercle és més gran que la superfície del con. Però fou provat que tampoc més petit. Per tant, igual.

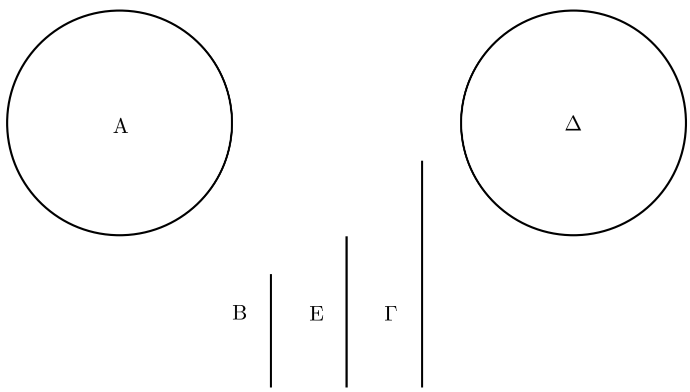


⌈ιε′⌉

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α ἴση ἡ Β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἡ Γ· δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Α κύκλον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Β.

εἰλήφθω γὰρ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ Δ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ Ε· ὁ Δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου [τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου]. ἐδείχθη δὲ ὁ Δ κύκλος πρὸς τὸν Α κύκλον λόγον ἔχων τὸν αὐτὸν τῷ τῆς Γ πρὸς Β μήκει [ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς Ε πρὸς Β δυνάμει διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων· εἰ γὰρ αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν αἱ Β, Ε]. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ Γ πρὸς Β μήκει.

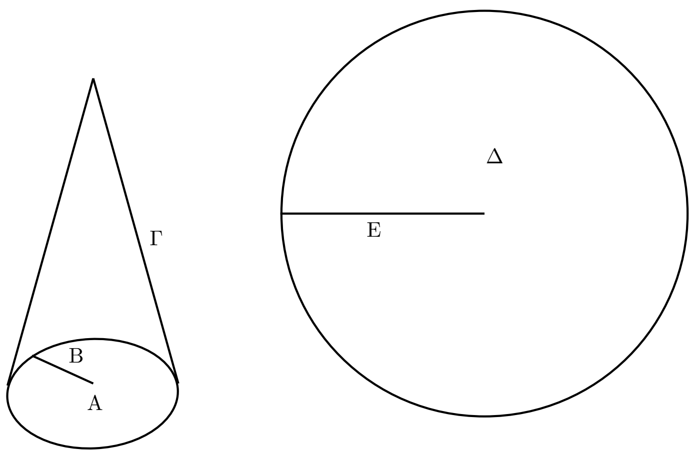


[15]

La superfície de tot con isòsceles respecte de la base té la mateixa raó que el costat del con respecte del radi de la base del con.

Heus aquí un con isòsceles, base del qual el cercle A, i heus aquí B igual al radi d'A, mentre que Γ al costat del con. S'ha de provar que la superfície del con respecte del cercle A, Γ respecte de B tenen la mateixa raó.

En efecte, estigui presa una mitjana proporcional de B, Γ, E, i estigui disposat un cercle Δ que té el radi igual a E. Per tant, el cercle Δ és igual a la superfície del con [ja que això fou provat abans d'això]. Però fou provat que el cercle Δ respecte del cercle A té la mateixa raó que Γ respecte de B en longitud [ja que cadascuna és la mateixa que E respecte de B, en potència, pel fet que els cercles són, l'un respecte de l'altre, com els quadrats a partir dels diàmetres, l'un respecte de l'altre però, d'una manera semblant, són també com els quadrats a partir dels radis dels cercles —ja que si els diàmetres, també la seva meitat (és a dir, els radis); però B, E són iguals als radis]. Així, doncs, és evident que la superfície del con respecte del cercle A té la mateixa raó que Γ respecte de B en longitud.

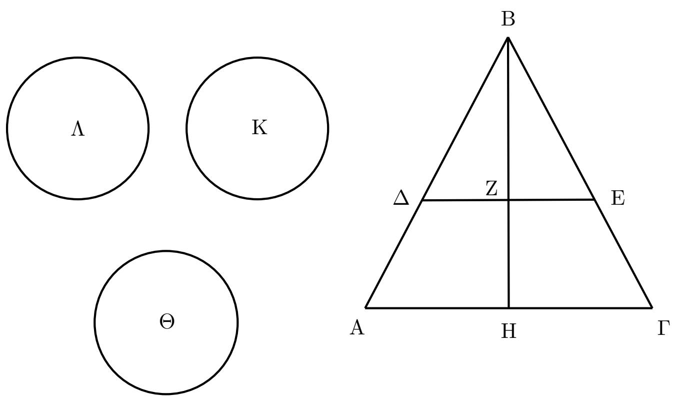


⌈ιϛ′⌉

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

ἔστω κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΔΕ, ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω ὁ ΒΗ, κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΗΑ, ἔστω δὲ κύκλος ὁ Θ· λέγω, ὅτι ὁ Θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ.

ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Λ, Κ, καὶ τοῦ μὲν Κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΔΖ, τοῦ δὲ Λ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΑΗ· ὁ μὲν ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου, ὁ δὲ Κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΖ τῇ ΑΗ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔ, ΔΖ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν Κ, Θ κύκλων. ὥστε καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς Κ, Θ κύκλοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν Λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΓ κώνου, ὁ δὲ Κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῷ Θ κύκλῳ.



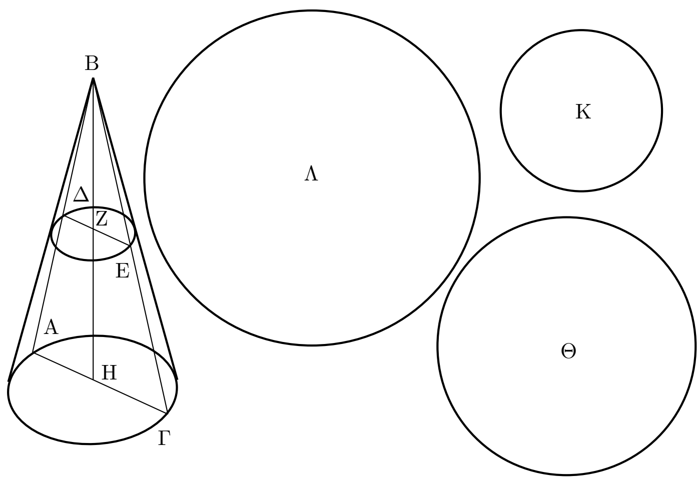
[Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΑΗ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΗ. τετμήσθω ἡ

⌈16⌉

Sempre que un con isòsceles sigui tallat amb un pla paral·lel a la base, a la superfície del con entre els plans paral·lels serà igual un cercle el radi del qual té una raó mitjana tant del costat del con entre els plans paral·lels com d'una recta igual a ambdós radis dels cercles en els plans paral·lels.

Heus aquí un con, el triangle per l'eix del qual igual a ΑΒΓ, estigui tallat amb un pla paral·lel a la base i faci una secció ΔΕ. Heus aquí l'eix del con ΒΗ i estigui disposat un cert cercle, el radi del qual és una mitjana proporcional tant d'ΑΔ com de ΔΖ, ΗΑ, conjuntament, i heu-lo aquí, un cercle Θ. Jo dic que el cercle Θ és igual a la superfície del con entre les rectes ΔΕ, ΑΓ.

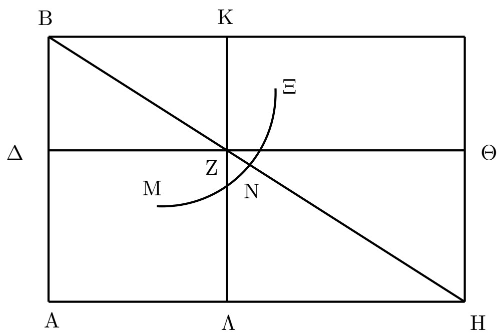
En efecte, estiguin disposats uns cercles Λ, Κ, i el radi del cercle Κ pugui el rectangle ΒΔΖ, mentre que el radi de Λ pugui el rectangle ΒΑΗ. Per tant, el cercle Λ és igual a la superfície del con ΑΒΓ, mentre que el cercle Κ és igual a la superfície del ΔΕΒ. I, atès que el rectangle comprès per ΒΑ, ΑΗ és igual tant al comprès per ΒΔ, ΔΖ com al comprès per ΑΔ i per ΔΖ, ΑΗ, conjuntament (pel fet que ΔΖ és paral·lela a ΑΗ), tanmateix, el radi del cercle Λ pot el rectangle ΑΒ, ΑΗ, mentre que el radi del cercle Κ pot el rectangleΒΔ, ΔΖ, i el radi de Θ pot el comprès per ΔΑ i per ΔΖ, ΑΗ, conjuntament, per tant, el quadrat a partir del radi del cercle Λ és igual als quadrats a partir dels radis dels cercles Κ, Θ, de manera que el cercle Λ també és igual als cercles Κ, Θ. Tanmateix, Λ és igual a la superfície del con ΒΑΓ, mentre que Κ a la superfície del con ΔΒΕ. Per tant, la superfície restant del con entre els plans paral·lels ΔΕ, ΑΓ és igual al cercle Θ.



[Heus aquí un paral·lelogram ΒΑΗ, i un diàmetre seu heu-lo aquí ΒΗ. Estigui

ΒΑ πλευρά, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἤχθω παράλληλος τῇ ΑΗ ἡ ΔΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΒΑ ἡ ΚΛ·] [λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ.]

[ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΒΑΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΒΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔΖ τὸ ΒΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ ὁ ΜΝΞ γνώμων. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΔΑΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ΚΗ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ΚΘ παραπλήρωμα τῷ ΔΛ παραπληρώματι, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ, ΔΖ τῷ ΔΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΗ, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΗ, ΔΖ].



⌈ΛΗΜΜΑΤΑ⌉

⌈1⌉Οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσιν· καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν.

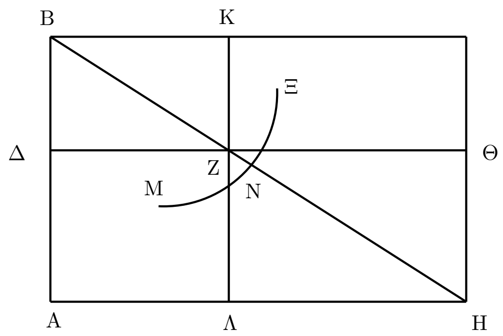
ενυμ2Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν, ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

⌈3⌉Τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις.

⌈4⌉Καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσίν.

tallat un costat BA, com s'escaigui, per Δ, i estigui conduïda per Δ una paral·lela a AH, ΔΘ, i per Z una paral·lela a BA, KΛ. Jo dic que el rectangle BAH és igual tant al rectangle BΔZ com al rectangle per ΔA i per ΔZ, AH, conjuntament.

En efecte, atès que la totalitat del rectangle BAH és el <quadrat> BH, mentre que el rectangle BΔZ és el BZ, i el rectangle per ΔA i per ΔZ, AH, conjuntament, és el gnòmon MNΞ, ja que el rectangle ΔAH és igual al <quadrat>KH, pel fet que el complement KΘ és igual al complement ΔΛ, mentre que el rectangle comprès per ΔA, ΔZ és igual al <quadrat> ΔΛ, per tant, la totalitat del quadrat BH, que és precisament el rectangle BAH, és igual tant al rectangle BΔZ com al gnòmon MNΞ, que és igual al rectangle per ΔA i per AH, ΔZ, conjuntament.]



⌈Alguns resultats coneguts⌉

⌈1⌉Els cons que tenen igual altura tenen la mateixa raó que les seves bases, i els cons que tenen bases iguals, tenen la mateixa raó que les seves altures.

⌈2⌉Sempre que sigui tallat un cilindre amb un pla paral·lel a la base, com el cilindre respecte del cilindre, serà l'eix respecte de l'eix.

⌈3⌉I els cons que tenen les mateixes bases que els cilindres, estan en la mateixa raó que els cilindres.

⌈4⌉Les bases dels cons iguals són inversament proporcionals a les altures i, si les bases són inversament proporcionals a les altures, els cons són iguals.

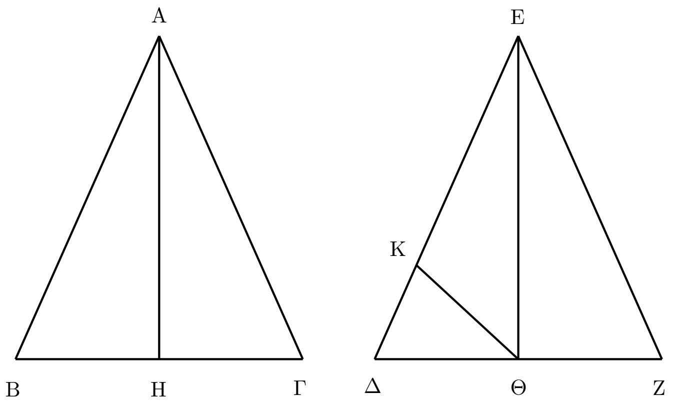
⌈5⌉Καὶ οἱ κῶνοι, ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν τοῖς ἄξοσιν [τουτέστιν τοῖς ὕψεσι], πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶν τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀπεδείχθη.

⌈ιζ′⌉

Ἐὰν ὦσιν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾗ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾗ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι.

ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ τοῦ ΑΒΓ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ, τὸ δὲ ὕψος τὸ ΑΗ ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ Θ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν ΔΕ, καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ ΚΘ· λέγω, ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι.



ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ ΑΒΓ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ [τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον], ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΒΑΓ βάσις πρὸς τὴν τοῦ ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ [ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἡ ΔΕ τουτέστι πρὸς ΔΘ. ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΚ. ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα]. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΒΑΓ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓ. τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ἐστὶν

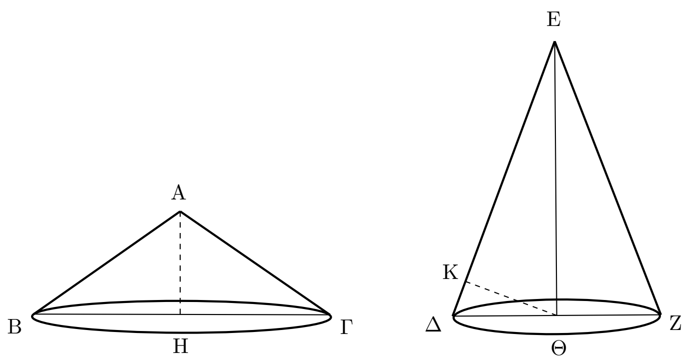
⌈5⌉I els cons en els quals els diàmetres de les bases tenen la mateixa raó que els eixos [és a dir, que les altures], els uns respecte dels altres són en raó triple que els diàmetres de les bases.

Tot això fou demostrat pels que ens van precedir.

⌈17⌉

Sempre que hi hagi dos cons isòsceles i la superfície d'un dels cons sigui igual a la base de l'altre, i una recta conduïda perpendicular des del centre de la base fins al costat del con sigui igual a l'altura, els cons hauran de ser iguals.

Heus aquí dos cons isòsceles ΑΒΓ, ΔΕΖ, i la base d'ΑΒΓ sigui igual a la superfície de ΔΕΖ, mentre que l'altura ΑΗ sigui igual a una recta, ΚΘ, conduïda perpendicular des del centre de la base, Θ, fins a un costat del con, tal com fins a ΔΕ. Jo dic que els cons són iguals.

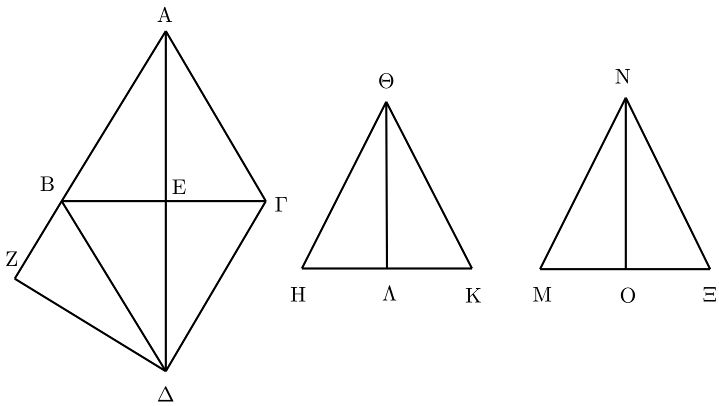


En efecte, atès que la base d'ΑΒΓ és igual a la superfície de ΔΕΖ [però les magnituds iguals respecte de la mateixa cosa tenen la mateixa raó], per tant, com la base de ΒΑΓ respecte de la base de ΔΕΖ, així la superfície de ΔΕΖ respecte de la base de ΔΕΖ. Tanmateix, com la superfície respecte de la pròpia base, així ΕΘ respecte de ΘΚ [ja que això fou provat: que la superfície de tot con isòsceles respecte de la base té la mateixa raó que el costat del con respecte del radi de la base (és a dir, ΔΕ respecte de ΔΘ). Però com ΕΔ respecte de ΘΕ, així ΔΘ respecte de ΘΚ, ja que els triangles són equiangulars]. Però ΘΚ és igual a ΑΗ. Per tant, com la base de ΒΑΓ respecte de la base de ΔΕΖ, així l'altura de ΔΕΖ respecte de ὁ ΒΑΓ τῷ ΔΕΖ κώνῳ.

[ιη′]

Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου.

ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΑΔ, ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ΗΘΚ τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἠγμένῃ, ἔστω δὲ ἡ ΔΖ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ ΘΗΚ κώνου ἔστω τὸ ΘΛ· ἴσον δή ἐστιν τὸ ΘΛ τῇ ΔΖ· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ.

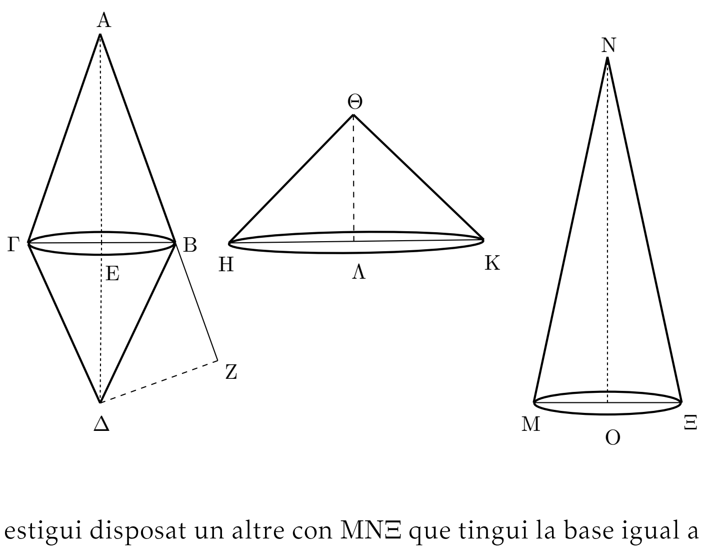


ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ ΜΝΞ τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΑΔ, καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ΝΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΟ τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΝΟ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, ὡς δὲ ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον [διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας]· ὡς ἄρα ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΜΝΞ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ ἴση l'altura d'ΑΒΓ. Per tant, les bases d'ΑΒΓ, ΔΕΖ són inversament proporcionals a les altures. Per tant, ΒΑΓ és igual al con ΔΕΖ.

[18]

A tot rombe compost a partir de cons isòsceles és igual un con que té base igual a la superfície d'un con dels que comprenen el rombe, mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des del vèrtex de l'altre con fins a un costat del con.

Heus aquí un rombe compost a partir de cons isòsceles ΑΒΓΔ, base del qual un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΓ, mentre que altura, ΑΔ. Estigui disposat un cert altre con ΗΘΚ que té base igual a la superfície del con ΑΒΓ i l'altura, igual a una recta conduïda perpendicular des del punt Δ fins a ΑΒ o fins a una recta en la mateixa <direcció>. heu-la aquí, ΔΖ i l'altura del con ΘΗΚ heu-la aquí, ΘΛ. ΘΛ, doncs, és igual a ΔΖ. Jo dic que el con és igual al rombe.



En efecte, estigui disposat un altre con ΜΝΞ que tingui la base igual a la base del con ΑΒΓ, mentre que l'altura igual a ΑΔ. Heus aquí, també, ΝΟ, la seva altura. Així, doncs, atès que ΝΟ és igual a ΑΔ, per tant, com ΝΟ respecte de ΔΕ, així és ΑΔ respecte de ΔΕ. Tanmateix, com ΑΔ respecte de ΔΕ, així el rombe ΑΒΓΔ respecte del con ΒΓΔ, mentre que com ΝΟ respecte de ΔΕ, així el con ΜΝΞ respecte del con ΒΓΔ [pel fet que les seves bases són iguals]. Per tant, com el con ΜΝΞ respecte del con ΒΓΔ, així el rombe ΑΒΓΔ respecte del con ΒΓΔ. Per tant, ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΗΘΚ, ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ [ἡ γὰρ βάσις τοῦ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ]. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΝΟ [ὑπέκειτο γὰρ], ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΘΛ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΝΟ ὕψος πρὸς τὸ ΘΛ. τῶν ΗΘΚ, ΜΝΞ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ ὁ ΜΝΞ ἴσος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ. καὶ ὁ ΗΘΚ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ.

⌈ιθ′⌉

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμενῃ.

ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ ΑΒΓ καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΔΕ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΔΕ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Ζ· ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ ΒΔΖΕ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ ΚΘΛ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, τὸ δὲ ὕψος, ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ τῆς ΖΗ, ἔστω ἴσον τῇ ΖΗ. λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ ΒΔΖΕ ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ ΘΚΛ κῶνος.

ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, ὥστε τὴν μὲν τοῦ ΜΝΞ βάσιν ἴσην εἶναι τοῦ ΑΒΓ κώνου τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓ κώνῳ. ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι], τὴν δὲ τοῦ ΟΠΡ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου, ὕψος δὲ τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο καὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΒΔΖΕ ῥόμβῳ τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη]. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΔΒΕ ἐπιφανείας καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, ἀλλ᾽ ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ κώνου, ἡ δὲ τοῦ ΔΒΕ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ βάσει τοῦ ΟΠΡ, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν

MNΞ és igual al rombe ABΓΔ. I, atès que la superfície d'ABΓ és igual a la base d'HΘK, per tant, com la superfície d'ABΓ respecte de la seva pròpia base, així la base d'HΘK respecte de la base de MNΞ [ja que la base d'ABΓ és igual a la base de MNΞ]. Però com la superfície d'ABΓ respecte de la seva pròpia base, així AB respecte de BE (és a dir, AΔ respecte de ΔZ) [ja que són triangles semblants]. Per tant, com la base d'HΘK respecte de la base de MNΞ, així AΔ respecte de ΔZ. Però AΔ és igual a NO [ja que se suposava], mentre que ΔZ igual a ΘΛ. Per tant, com la base d'HΘK respecte de la base de MNΞ, així l'altura NO respecte de ΘΛ. Per tant, les bases dels cons HΘK, MNΞ són inversament proporcionals a les altures. Per tant, els cons són iguals. I fou provat que MNΞ és igual al rombe ABΓΔ. Per tant, el con HΘK també és igual al rombe ABΓΔ.

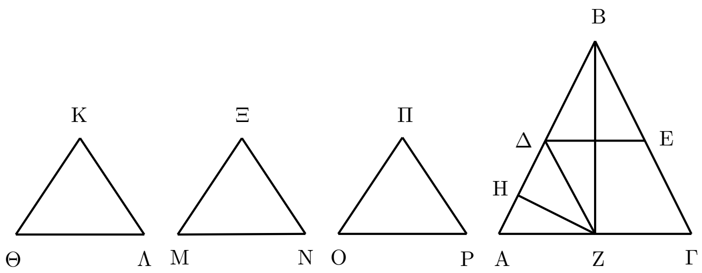
⌈19⌉

Sempre que sigui tallat un con isòsceles amb un pla paral·lel a la base, i des del cercle resultant sigui aixecat un con que tingui vèrtex el centre de la base, i sigui extret el rombe resultant de la totalitat del con, a la resta circumdant haurà de ser igual un con que té base igual a la superfície del con entre els plans paral·lels, mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des del centre de la base fins a un costat del con.

Heus aquí un con isòsceles ABΓ, i estigui tallat amb un pla paral·lel a la base i faci una secció ΔE. El centre de la base heu-lo aquí Z. Des d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΔE estigui aixecat un con que té vèrtex Z. Hi haurà, doncs, un rombe BΔZE compost a partir de cons isòsceles. Estigui disposat, doncs, un cert con KΘΛ la base del qual heu-la aquí igual a la superfície entre els plans ΔE, AΓ, mentre que (un cop conduïda una recta, ZH, perpendicular des d'un punt Z fins a AB) l'altura heu-la aquí igual a ZH. Jo dic que, sempre que sigui considerat el rombe BΔZE extret del con ABΓ, el con ΘKΛ haurà de ser igual a la resta circumdant.

En efecte, estiguin disposats dos cons, MNΞ, OΠP, de manera que la base de MNΞ sigui igual a la superfície del con ABΓ mentre que l'altura igual a ZH [per això, doncs, el con MNΞ és igual al con ABΓ, ja que sempre que hi hagi dos cons isòsceles, la superfície d'un con sigui igual a la base de l'altre i, a més, la recta conduïda perpendicular des del centre de la base fins al costat del con, igual a l'altura, els cons hauran de ser iguals], i la base del con OΠP sigui igual a la superfície del con ΔBE i l'altura, a ZH [per això, doncs, el con OΠP també és igual al rombe BΔZE, ja que això ja fou demostrat abans]. Però atès que la superfície del con ABΓ ha estat compost a partir tant de la superfície del ΔBE com de la superfície entre els plans ΔE, AΓ, tanmateix, la superfície del con ABΓ

ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα τοῦ ΜΝΞ βάσις ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΘΚΛ, ΟΠΡ. καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ ΜΝΞ κῶνος τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κώνῳ, ὁ δὲ ΠΟΡ τῷ ΒΔΕΖ ῥόμβῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚΛ κῶνος τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.

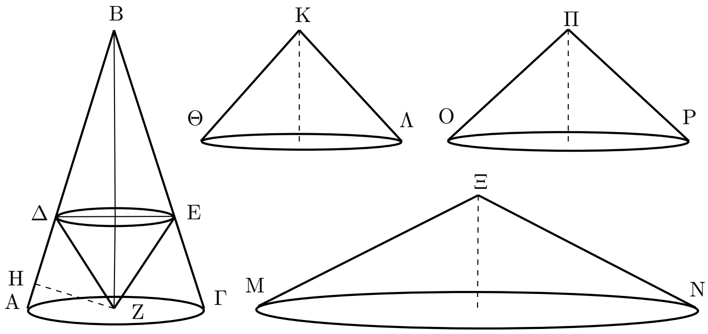


⌜κ′⌝

Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.

ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΕΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ Δ σημεῖον. ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ ΕΒΔΖ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ τοῦ ὅλου ῥόμβου, ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ ΘΚΛ τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΕΖ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν ΒΑ ἢ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ· λέγω, ὅτι ὁ ΘΚΛ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημενῳ περιλείμματι.

ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ ΜΝΞ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα ἴσος és igual a la base del con ΜΝΞ, mentre que la superfície del ΔΒΕ és igual a la base de l'ΟΠΡ i la superfície entre els plans ΔΕ, ΑΓ és igual a la base del ΘΚΛ, per tant, la base del ΜΝΞ és igual a les bases dels ΘΚΛ, ΟΠΡ. I els cons estan sota la mateixa altura. Per tant, el con ΜΝΞ també és igual als cons ΘΚΛ, ΟΠΡ. Tantmateix, el con ΜΝΞés igual al con ΑΒΓ mentre que el ΠΟΡ, al rombe ΒΔΕΖ. Per tant, el con restant ΘΚΛ és igual al residu circumdant.

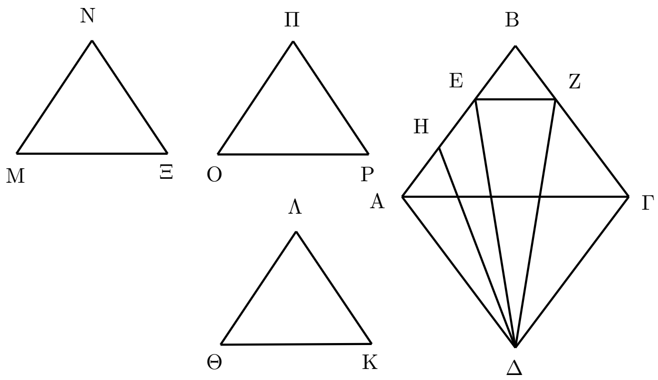


⌈20⌉

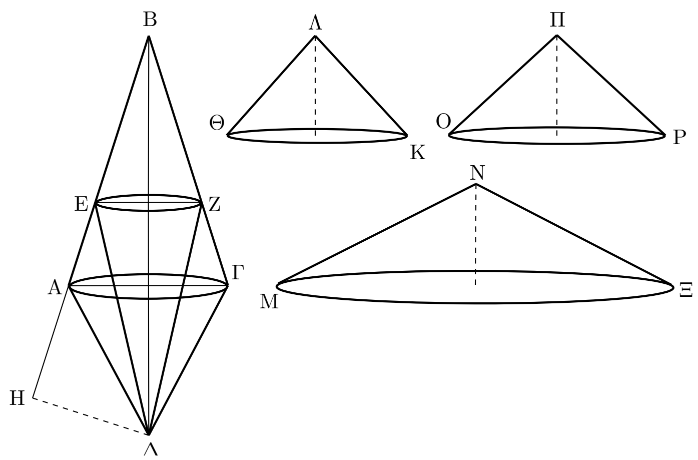
Sempre que un con d'un rombe compost a partir de cons isòsceles sigui tallat amb un pla paral·lel a la base i, des del cercle resultant, s'aixequi un con que té vèrtex el mateix que l'altre con, i de la totalitat del rombe extraiem el rombe resultant, a la resta circumdant haurà de ser igual el con que té base igual a la superfície del con entre els plans paral·lels mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des del vèrtex de l'altre con fins al costat del con.

Heus aquí un rombe compost a partir de cons isòsceles, ΑΒΓΔ. Estigui tallat un con amb un pla paral·lel a la base i faci una secció ΕΖ. Des d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΕΖ estigui aixecat un con que té el vèrtex, el punt Δ. N'haurà resultat, doncs, el rombe ΕΒΔΖ. Sigui considerat extret de la totalitat del rombe. Estigui disposat un cert con ΘΚΛ, que té la base igual a la superfície entre els plans ΑΓ, ΕΖ mentre que l'altura igual a una recta conduïda perpendicular des del punt Δ fins a ΒΑ o fins a una recta en la mateixa <direcció>. Jo dic que el con ΘΚΛ és igual a la resta circumdant esmentada.

En efecte, estiguin disposats dos cons ΜΝΞ, ΟΠΡ i la base del con ΜΝΞ sigui igual a la superfície de l'ΑΒΓ mentre que l'altura, igual a ΔΗ [pel que fou provat ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ], τοῦ δὲ ΟΠΡ κώνου ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΕΒΖ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ]. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ κώνου σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΕΒΖ καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ, ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ, ἡ δὲ τοῦ ΕΒΖ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΟΡΠ κώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ ΜΝΞ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΟΠΡ, ΘΚΛ. καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ, ὁ δὲ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ ΘΚΛ ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.



abans, doncs, el con ΜΝΞ és igual al rombe ΑΒΓΔ], i la base del con ΟΠΡ sigui igual a la superfície del con ΕΒΖ mentre que l’altura igual a ΔΗ [d’una manera semblant, doncs, el con ΟΠΡ és igual al rombe ΕΒΔΖ]. Però atès que, d’una manera semblant, la superfície del con ΑΒΓ ha estat compost a partir tant de la d’ΕΒΖ com de la superfície entre els plans ΕΖ, ΑΓ, tanmateix, la superfície del con ΑΒΓ és igual a la base del ΜΝΞ mentre que la superfície del con ΕΒΖ és igual a la base del con ΟΡΠ i la superfície entre els plans ΕΖ, ΑΓ és igual a la base del ΘΚΛ, per tant, la base del ΜΝΞ és igual a les bases dels ΟΠΡ, ΘΚΛ. I els cons estan sota la mateixa altura. Per tant, el con ΜΝΞ és també igual als cons ΘΚΛ, ΟΠΡ. Però el con ΜΝΞ és igual al rombe ΑΒΓΔ mentre que el con ΟΠΡ, al rombe ΕΒΔΖ. Per tant, el con restant ΘΚΛ és igual a la resta circumdant restant.

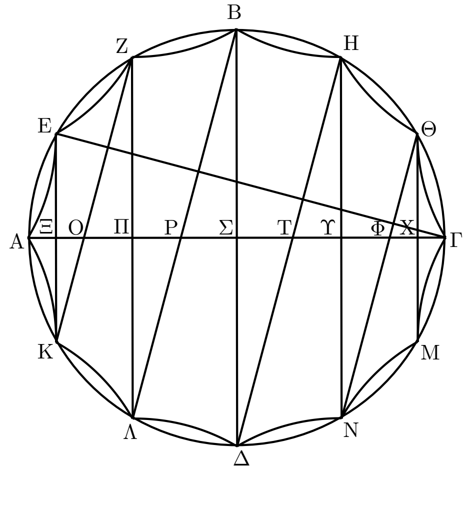


⌈κα′⌉

Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾳ ὁποιᾳοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾳ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ. δῆλον δή, ὅτι παράλληλοί εἰσιν τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ. λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΑ.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ΖΚ τῇ ΕΑ, ἡ δὲ ΒΛ τῇ ΖΚ, καὶ ἔτι ἡ μὲν ΔΗ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΘΝ τῇ ΔΗ, καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΘΝ [καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ ΕΑ, ΚΖ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΚ, ΑΟ]. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, ὁ ΚΞ πρὸς ΞΟ. ὡς δ᾿ ἡ ΚΞ πρὸς ΞΟ, ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ὡς δὲ ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, ὡς δὲ ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, οὕτως ἡ ΒΣ πρὸς ΣΡ, καὶ ἔτι, ὡς ἡ μὲν ΒΣ πρὸς ΣΡ, ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ὡς δὲ ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ἡ ΗΥ πρὸς ΥΤ, καὶ ἔτι, ὡς ἡ μὲν ΗΥ πρὸς ΥΤ, ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ὡς δὲ ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, καὶ ἔτι, ὡς μὲν ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΧ πρὸς ΧΓ [καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστίν, ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]. ὡς ἄρα ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ. ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, οὕτω πᾶσαι αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον.

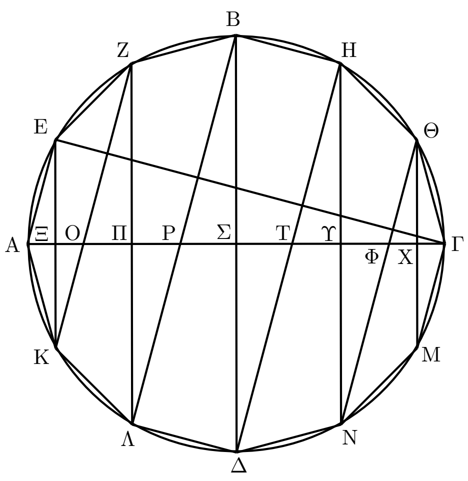


⌈21⌉

Sempre que a un cercle hi sigui inscrit un polígon tant d'un nombre parell de costats com equilàter, i estiguin aconduides rectes unint els costats del polígon de manera que aquestes siguin paral·leles a una recta qualsevulla de les que s'estenen sota dos costats del polígon, totes les rectes d'unió respecte del diàmetre del cercle tindran aqueixa raó que té la recta estesa sota la meitat dels costats menys un, respecte del costat del polígon.

Heus aquí un cercle ΑΒΓΔ i en aquest cercle estigui inscrit un polígon ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, i estiguin unides ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ. És evident, doncs, que són paral·leles a una recta estesa sota dos costats del polígon. Així, doncs, jo dic, que totes les rectes esmentades respecte del diàmetre del cercle, ΑΓ, tenen la mateixa raó que ΓΕ respecte d'ΕΑ.

En efecte, estiguin unides ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ. Per tant, ΖΚ és paral·lela a ΕΑ mentre queΒΛ a ΖΚ i, a més, ΔΗ a ΒΛ mentre que ΘΝ a ΔΗ, i ΓΜ a ΘΝ, [i atès que ΕΑ, ΚΖ són dues paral·leles, i que dues rectes ΕΚ, ΑΟ estan aconduides]. Per tant, com ΕΞ respecte de ΞΑ, ΚΞ és respecte de ΞΟ. Però com ΚΞ respecte de ΞΟ, ΖΠ respecte de ΠΟ, i com ΖΠ respecte de ΠΟ, ΛΠ respecte de ΠΡ, i com ΛΠ respecte de ΠΡ, ΒΣ respecte de ΣΡ. A més, com ΒΣ respecte de ΣΡ, ΔΣ respecte de ΣΤ, mentre que com ΔΣ respecte de ΣΤ, ΗΥ respecte d'ΥΤ. A més, com ΗΥ respecte d'ΥΤ, ΝΥ respecte d'ΥΦ. mentre que, com ΝΥ respecte d'ΥΦ, ΘΧ respecte de ΧΦ. A més, com ΘΧ respecte de ΧΦ, ΜΧ respecte de ΧΓ [i, per tant, tots són respecte de tots són com una de les raons respecte d'una]. Per tant, com ΕΞ respecte de ΞΑ, així ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ respecte del diàmetre ΑΓ. Però com ΕΞ respecte de ΞΑ, així és ΓΕ respecte d'ΕΑ. Per tant, com ΓΕ respecte d'ΕΑ, així també serà tot ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ respecte del diàmetre ΑΓ.

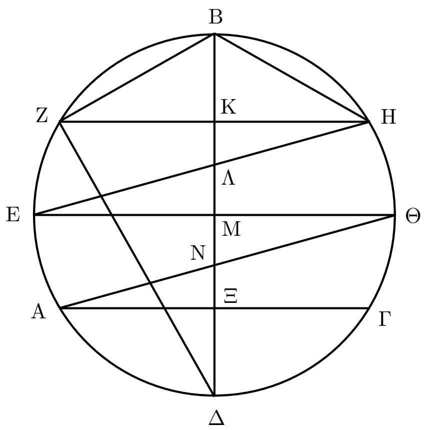


⌈κβʹ⌉

Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος αἱ τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς βάσεως πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν.

εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΕΘ, αἵ εἰσιν παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ.

πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΑΘ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν τῇ ΒΖ· διὰ δὴ ταὐτά ἐστιν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΚΒ, ἥ τε ΗΚ πρὸς ΚΛ καὶ ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ καὶ ἡ ΜΘ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ ΞΑ πρὸς ΞΝ [καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]· ὡς ἄρα αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ. ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΞΒ.

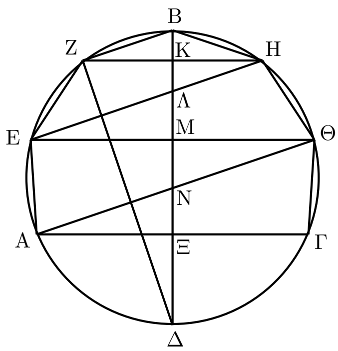


[22]

Sempre que a un segment de cercle sigui inscrit un polígon que tingui els costats iguals, llevat de la base, i en nombre parell, i siguin conduides rectes paral·leles a la base del segment unint els costats del polígon, totes les rectes conduides i la meitat de la base respecte de l'altura del segment tindran la mateixa raó que una recta unida des del diàmetre del cercle fins al costat del polígon respecte del costat del polígon.

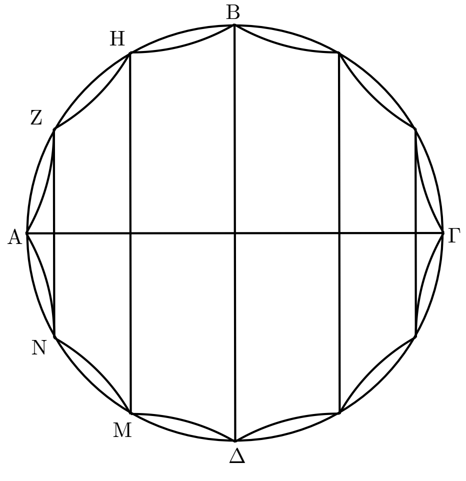
En efecte, a un cercle ΑΒΓΔ estigui aconduïda una certa recta ΑΓ, i sobre ΑΓ estigui inscrit un polígon al segment ΑΒΓ, tant amb un nombre parell de costats com tenint els costats iguals, llevat de la base ΑΓ. Estiguin unides ΖΗ, ΕΘ, les quals són paral·leles a la base del segment. Jo dic que, com ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ respecte de ΒΞ, així és ΔΖ respecte de ΖΒ.

En efecte, al seu torn i d'una manera semblant, estiguin unides ΗΕ, ΑΘ. Per tant, són paral·leles a ΒΖ. Però pels mateixos <arguments>, doncs, com ΚΖ respecte de ΚΒ, és ΗΚ respecte de ΚΛ, i tant ΕΜ respecte de ΜΛ com ΜΘ respecte de ΜΝ com ΞΑ respecte de ΞΝ [i, per tant, com tot respecte de tot, una de les raons respecte d'una]. Per tant, com ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ respecte de ΒΞ, així ΖΚ respecte de ΚΒ. Però com ΖΚ respecte de ΚΒ, així ΔΖ respecte de ΖΒ. Per tant, com ΔΖ respecte de ΖΒ, així ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ respecte de ΞΒ.



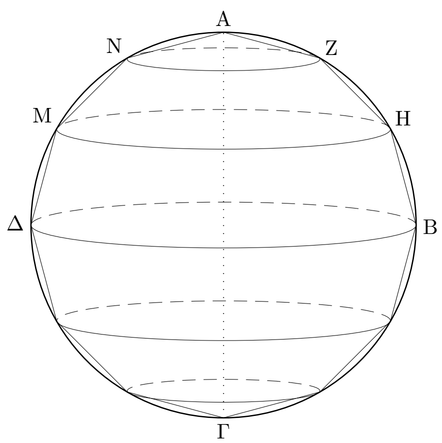
⌈κγ′⌉

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, αἱ δὲ ΑΓ, ΔΒ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου περιενεχθῇ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον, ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Α, Γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν ΒΔ οὖσαι. αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται, αἱ μὲν ΑΖ, ΑΝ κατ᾽ ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, αἱ δὲ ΖΗ, ΜΝ κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΜΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΖΗ, ΜΝ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΑΓ, αἱ δὲ ΒΗ, ΜΔ πλευραὶ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΒΗ, ΔΜ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΓΑ· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται πάλιν ὁμοίων ταύταις. ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον τῶν προειρημένων, οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



⌈23⌉

Heus aquí en una esfera un cercle màxim ΑΒΓΔ i hi estigui inscrit un polígon equilàter. El nombre dels seus costats sigui mesurable pel nombre quatre, i heus aquí uns diàmetres ΑΓ, ΔΒ. Sempre que, mantenint-se fix el diàmetre ΑΓ, el cercle ΑΒΓΔ que té el polígon sigui, doncs, transportat al seu voltant, és evident que la seva circumferència serà transportada per la superfície de l'esfera, mentre que els angles del polígon, llevat dels <angles> vers els punts Α, Γ, seran transportats per les circumferències d'uns cercles descrits en la superfície de l'esfera ortogonals respecte del cercle ΑΒΓΔ. I seran diàmetres seus les rectes que uneixen els angles del polígon i que són paral·leles a ΒΔ. I els costats del polígon seran transportats per certs cons: ΑΖ, ΑΝ per la superfície d'un con, base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΖΝ mentre que vèrtex el punt Α; mentre que ΖΗ, ΜΝ seran portades per una certa superfície cònica, base de la qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΜΗ mentre que vèrtex el punt pel qual coincideixen, tant l'una amb l'altra com amb ΑΓ, unes rectes allargades, ΖΗ, ΜΝ. I els costats ΒΗ, ΜΔ seran portats per una superfície cònica base de la qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΔ, ortogonal respecte del cercle ΑΒΓΔ, mentre que vèrtex, el punt pel qual coincideixen, tant l'una amb l'altra com amb ΑΓ, unes rectes allargades, ΒΗ, ΔΜ. Però, d'una manera semblant, els costats en l'altre semicercle també seran portats al seu torn per unes superfícies còniques semblants a aqueixes. Serà inscrita, doncs, en l'esfera una certa figura compresa per les superfícies còniques abans esmentades, la superfície de la qual serà més petita que la superfície de l'esfera.

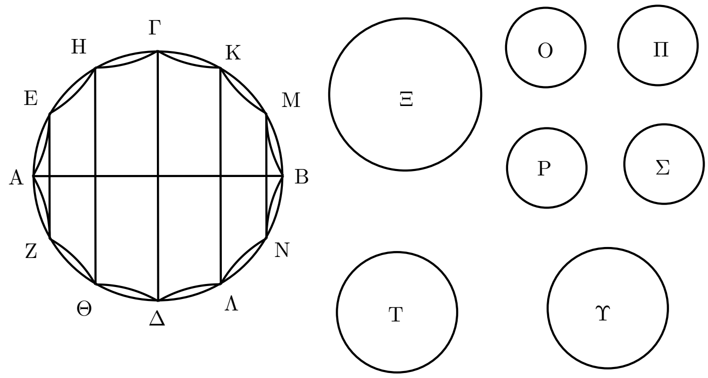


διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶν τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας. καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

⌈κδʹ⌉

Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου παραλλήλοις οὔσαις τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφὲν σχῆμα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ, κύκλος δέ τις ἐκκείσθω ὁ Ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. λέγω, ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος.

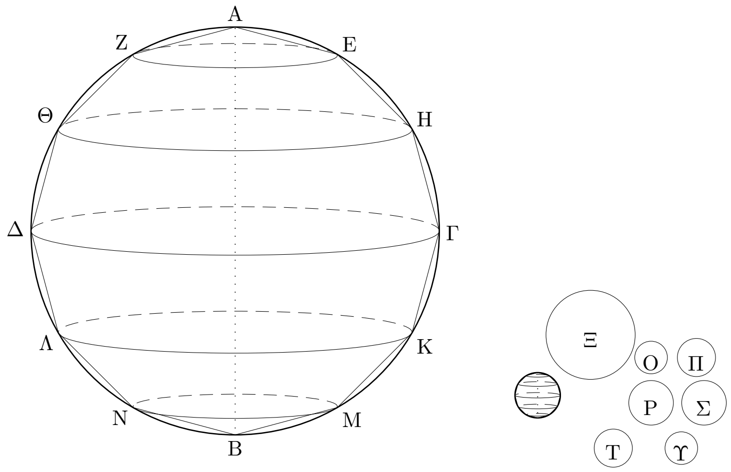


En efecte, un cop dividida l'esfera pel pla per BΔ ortogonal respecte del cercle ABΓΔ, la superfície d'un hemisferi i la superfície de la figura inscrita en aquest <hemisferi> tenen els mateixos límits en un pla, ja que el límit d'ambdues superfícies és la circumferència d'un cercle al voltant d'un diàmetre BΔ, ortogonal respecte del cercle ABΓΔ. I són ambdues còncaves sobre un mateix costat, i una d'elles és continguda per l'altra superfície i per la superfície plana que té els seus mateixos límits. Però d'una manera semblant, la superfície de la figura en l'altre hemisferi també és més petita que la superfície de l'hemisferi. Així, doncs, la totalitat de la superfície de la figura en l'esfera també és més petita que la superfície de l'esfera.

⌈24⌉

La superfície de la figura inscrita a l'esfera és igual a un cercle el radi del qual pot el rectangle comprès tant pel costat de la figura com per la recta igual a totes les rectes que uneixen els costats del polígon i que són paral·leles a una recta estesa sota dos costats del polígon.

Heus aquí en una esfera un cercle màxim ABΓΔ i estigui-hi inscrit un polígon equilàter els costats del qual són mesurables pel nombre quatre i, a partir d'aquest polígon inscrit, sigui considerada una certa figura inscrita a l'esfera i estiguin unides EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN, que són paral·leles a una recta estesa sota dos costats. Estigui disposat un cert cercle Ξ el radi del qual pugui el rectangle comprès per AE i per la recta igual a EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN. Jo dic que aqueix cercle és igual a la superfície de la figura inscrita a l'esfera.



ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, καὶ τοῦ μὲν Ο ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Π δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΕΖ, ΗΘ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΗΘ, ΓΔ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Σ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΓΔ, ΚΛ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Τ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΚΛ, ΜΝ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Υ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΝ. διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν Ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΕΖ κώνου, ὁ δὲ Π τῇ ἐπιφανειᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΗΘ, ὁ δὲ Ρ τῇ μεταξὺ τῶν ΗΘ, ΓΔ, ὁ δὲ Σ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΓ, ΚΛ, καὶ ἔτι ὁ μὲν Τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανεία τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΚΛ, ΜΝ, ὁ δὲ Υ τῇ τοῦ ΜΒΝ κωνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστίν· οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶν τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερόν, ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῆς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΑΕ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὰς ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ Ξ ἴσος ἐστὶ τοῖς Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοις. οἱ δὲ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ καὶ ὁ Ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

⌜ κε′ ⌝

Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασια τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον [ἀρτιόγωνον] ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου αἱ ΕΙ, ΘΜ καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ, ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ Ρ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ. διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ

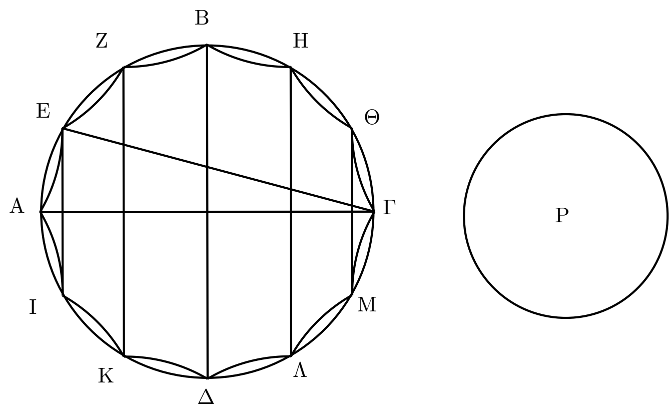
En efecte, estiguin disposats uns cercles O, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ i el radi de l'O pugui el rectangle comprès tant per EA com per la meitat d'EZ, el radi del Π pugui el comprès tant per EA com per la meitat d'EZ, ΗΘ, el radi del Ρ pugui el comprès per EA i per la meitat d'ΗΘ, ΓΔ, el radi del Σ pugui el comprès tant per EA com per la meitat de ΓΔ, ΚΛ, el radi del Τ pugui el comprès tant per AE com per la meitat de ΚΛ, MN, el radi del Υ pugui el comprès tant per AE com per la meitat de MN. Per això, doncs, el cercle O és igual a la superfície del con AEZ, mentre que Π a la superfície del con entre els plans EZ, ΗΘ, Ρ a la superfície entre els plans ΗΘ, ΓΔ, Σ a la superfície entre els plans ΔΓ, ΚΛ i, a més, Τ és igual a la superfície del con entre els plans ΚΛ, MN, mentre que Υ a la superfície del con MBN. Per tant, tots els cercles són iguals a la superfície de la figura inscrita. I és clar que els radis dels cercles O, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ poden el rectangle comprès tant per AE com per dues vegades les meitats d'EZ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN (EZ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN són la totalitat). Per tant, els radis dels cercles O, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ poden el rectangle comprès tant per AE com per tots els EZ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN. Tanmateix, el radi del cercle Ξ també pot el rectangle per AE i pel compost a partir de tots els EZ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN. Per tant, el radi del cercle Ξ pot, els radis dels cercles O, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ . I, per tant, el cercle Ξ és igual als cercles O, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ. Però fou demostrat abans que els cercles O, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ són iguals a la superfície esmentada de la figura i, per tant, el cercle Ξ serà igual a la superfície de la figura.

⌈25⌉

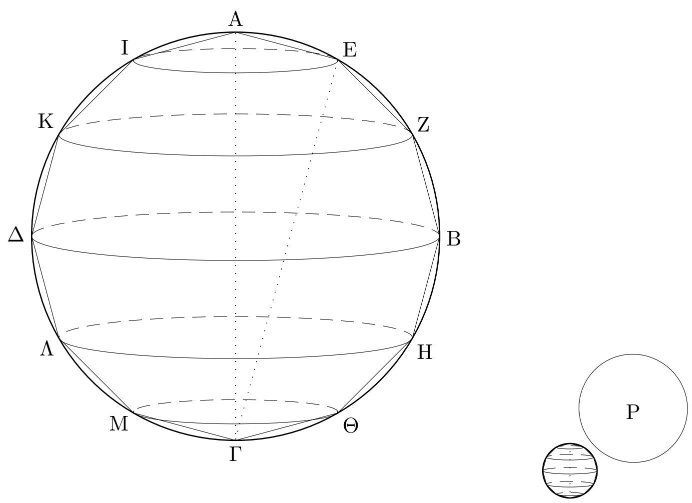
La superfície de la figura inscrita a l'esfera compresa per les superfícies còniques és més petita que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera.

Heus aquí un cercle màxim en una esfera, ΑΒΓΔ, i estigui-hi inscrit un polígon [amb un nombre parell d'angles] equilàter els costats del qual són mesurables pel nombre quatre, i a partir d'aquest <polígon> sigui considerada una superfície compresa per les superfícies còniques. Jo dic que la superfície de la inscrita és més petita que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera.

En efecte, estiguin unides les rectes esteses sota dos costats del polígon, EI, ΘΜ, i les paral·leles a aqueixes ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ. Estigui disposat un cert cercle Ρ el radi del qual pot el rectangle comprès per EA i per la recta igual a totes les rectes EI, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ. Pel que fou provat abans, doncs, el cercle és igual a la superfície ἐδείχθη, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις καὶ τῆς ΕΑ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΓΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ [ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ Ρ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ δύο ἄρα τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου διάμετροι μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ Ρ κύκλου, καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τουτέστι τῆς ΑΓ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ πρὸς τὸν Ρ κύκλον. τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ μείζους εἰσὶν τοῦ Ρ κύκλου]· ὁ ἄρα κύκλος ὁ Ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ δὲ Ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.



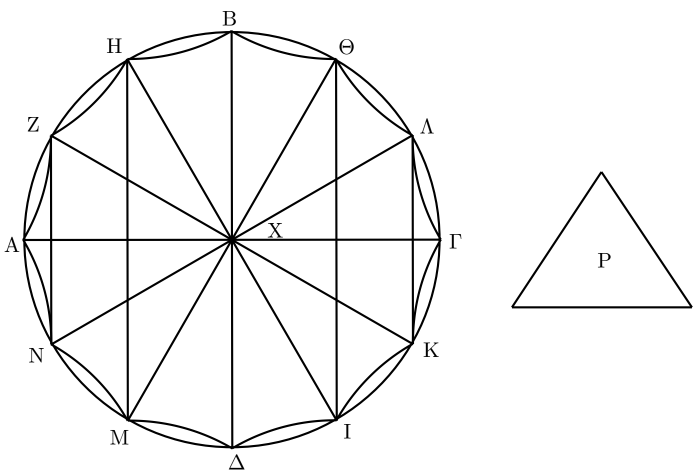
de la figura esmentada. I, atès que fou provat que, com la recta igual a totes les rectes EI, ZK, BΔ, HΛ, ΘM respecte del diàmetre del cercle AΓ, així és ΓE respecte d'EA, per tant, el rectangle comprès per la recta igual a totes les rectes esmentades i per EA (és a dir, el quadrat a partir del radi del cercle P), és igual al rectangle comprès per AΓ, ΓE. Tanmateix, el rectangle AΓ, ΓE també és més petit que el quadrat a partir de AΓ. Per tant, el quadrat a partir del radi de P és més petit que el quadrat a partir d'AΓ. [Per tant, el radi del cercle P és més petit que AΓ, de manera que el diàmetre del cercle P és més petit que el doble del diàmetre del cercle ABΓΔ i, per tant, dos diàmetres del cercle ABΓΔ són més grans que el diàmetre del cercle P, i quatre vegades el quadrat a partir del diàmetre del cercle ABΓΔ (és a dir, AΓ) és més gran que el quadrat a partir del diàmetre del cercle P. Però, com quatre vegades el quadrat a partir d'AΓ respecte del quadrat a partir del diàmetre del cercle P, així quatre cercles ABΓΔ respecte del cercle P. Per tant, quatre cercles ABΓΔ són més grans que el cercle P]. Per tant, el cercle P és més petit que el quàdruple del cercle màxim. Però fou provat que el cercle P és igual a l'esmentada superfície de la figura. Per tant, la superfície de la figura és més petita que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera.



⌈κϛʹ⌉

Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶν κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.

ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον, ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ Ρ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. δεικτέον, ὅτι ὁ κῶνος ὁ Ρ ἴσος ἐστὶν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι.

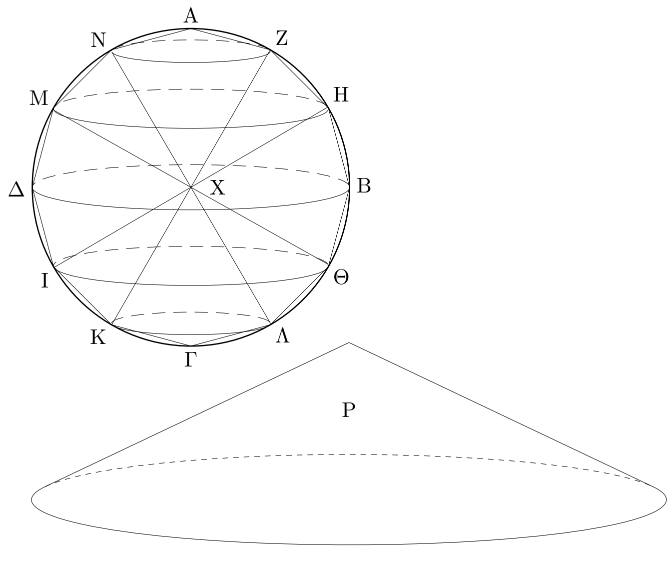


ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΖΝ, ΗΜ, ΘΙ, ΛΚ κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἔκ τε τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Χ σημεῖον· ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΝΑΖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου

[26]

A la figura inscrita en l’esfera compresa per les superfícies còniques és igual un con que té base el cercle igual a la superfície de la figura inscrita en l’esfera, mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des del centre de l’esfera fins a un costat del polígon.

Heus aquí l’esfera i un cercle màxim en aquesta <esfera>, ΑΒΓΔ i la resta el mateix que abans. Heus aquí un con recte Ρ que té base la superfície de la figura inscrita en l’esfera, mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des del centre de l’esfera fins a un costat del polígon. S’ha de provar que el con Ρ és igual a la figura inscrita en l’esfera.



En efecte, a partir dels cercles, uns diàmetres dels quals són ΖΝ, ΗΜ, ΘΙ, ΛΚ, estiguin aixecats uns cons que tenen vèrtex el centre de l’esfera. Hi haurà, doncs, un rombe sòlid <compost> tant a partir del con, base del qual és un cercle al voltant de ΖΝ mentre que vèrtex el punt Α, com del con, base del qual és el mateix cercle mentre que vèrtex el punt Χ. <Aquest rombe> és igual al con que té base la superfície del ΝΑΖ mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΝ, ΗΜ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τοῦ τε ΖΝΧ καὶ τοῦ ΗΜΧ ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΜΗ, ΖΝ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΜΗΧ κώνου καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἴσον τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΒΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ ΧΚΓΛ καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρήθησαν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ἴσον ἐστὶν πᾶσιν τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶν τῷ Ρ κώνῳ, ἐπειδὴ ὁ Ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων, βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶν τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

⌈κζʹ⌉

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

ἔστω γὰρ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ Ρ, ὁ δὲ κῶνος ὁ Ξ ἔστω βάσιν ἔχων ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἀγομενῃ ἐπὶ τὴν ΑΖ, ἐδείχθη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου, ἔσται ἄρα ἡ τοῦ Ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ Ξ κώνου· ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ Ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ Ξ κώνου· ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ Ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον, ὡς καὶ αὐτὸς ὁ Ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ Ξ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ Ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι· τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ Ξ κώνου.

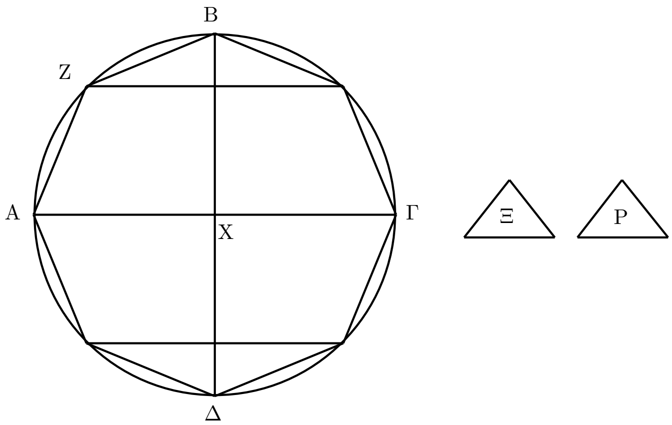
des de X. I, al seu torn, allò que ha restat al voltant del rombe comprès tant per la superfície del con entre els plans paral·lels per ZN, HM com per les superfícies dels cons tant del ZNX com del HMX, també és igual al con que té base igual a la superfície del con entre els plans paral·lels per MH, ZN mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des de X fins a ZH, ja que això ha estat provat. I, a més, allò que ha restat al voltant del con comprès tant per la superfície del con entre els plans paral·lels per HM, BΔ, com per la superfície del con MHX com pun cercle al voltant d'un diàmetre BΔ, també <és> igual al con que té base una <superfície> igual a la superfície del con entre els plans per HM, BΔ, mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des de X fins a BH. I, d'una manera semblant, en l'altre hemisferi, tant el rombe XKΓΛ com les restes circumdants dels cons també seran iguals a tants cons (i tals) com els que han estat esmentats abans. Així, doncs, és evident que la totalitat de la figura inscrita en l'esfera també és igual a tots els cons esmentats. Però els cons són iguals al con P, car el con P té altura igual a cada una de les altures dels cons esmentats, mentre que base igual a totes les seves bases. Així, doncs, és evident que la inscrita en l'esfera és igual al con disposat.

[27]

La figura inscrita en l'esfera compresa per les superfícies còniques és més petita que el quàdruple del con que té base igual al cercle màxim dels cercles en l'esfera mentre que altura igual al radi de l'esfera.

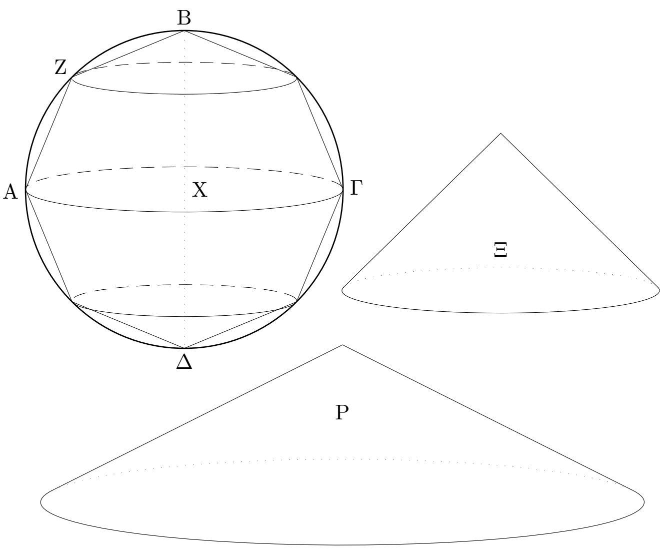
En efecte, heus aquí un con, P, que resulta igual a la figura inscrita en l'esfera, que té la base igual a la superfície de la figura inscrita mentre que l'altura, igual a una recta conduïda perpendicular des del centre del cercle fins a un costat del polígon inscrit. I heus aquí el con Ξ que té base igual al cercle ABΓΔ i altura el radi del cercle ABΓΔ.

Així, doncs, atès que el con P té base igual a la superfície de la figura inscrita en l'esfera, i altura igual a una recta conduïda perpendicular des de X fins a AZ, i que fou provat que la superfície de la figura inscrita és més petita que el quàdruple del cercle màxim en l'esfera, per tant, serà la base del con P més petita que el quàdruple de la base del con Ξ. Però també és l'altura del P més petita que l'altura del con Ξ. Així, doncs, atès que el con P té la base més petita que el quàdruple de la base del Ξ mentre que l'altura, més petita que l'altura, és evident que el mateix con P també és més petit que el quàdruple del con Ξ. Tanmateix, el con P també és igual a la figura inscrita. Per tant, la figura inscrita és més petita que el quàdruple del con Ξ.



⌈κη′⌉

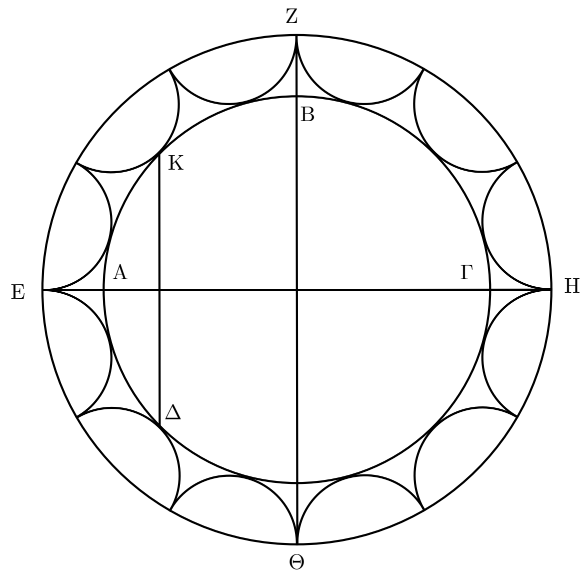
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, περὶ δὲ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ ΑΒΓΔ. μενούσης δὴ τῆς ΕΗ περιενεχθήτω τὸ ΕΖΗΘ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος· δῆλον οὖν, ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ΕΖΗΘ κατ᾿ ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται, αἱ δὲ ἁφαί, καθ᾿ ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράφουσιν κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Ε, Η σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρώτου· ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον.



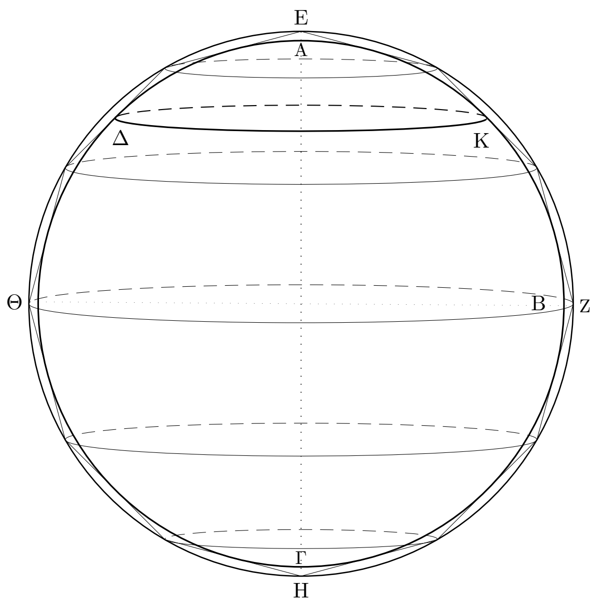
⌈28⌉

Heus aquí un cercle màxim en una esfera ΑΒΓΔ. Estigui circumscrit al voltant del cercle ΑΒΓΔ un polígon tant equilàter com equiangular, i el nombre dels seus costats sigui mesurable pel nombre quatre. I que un cercle contingui, havent-lo circumscrit, el polígon circumscrit al voltant del cercle, resultant <un cercle> al voltant del mateix centre que ΑΒΓΔ. Mantenint-se, doncs, fixa ΕΗ, sigui transportat al seu voltant el pla ΕΖΗΘ, en el qual hi ha el polígon i el cercle. Així, doncs, és evident que la superfície del cercle ΑΒΓΔ serà portada per la superfície de l'esfera, mentre que la circumferència d'ΕΖΗΘ serà portada per una altra superfície d'una esfera que tingui el mateix centre que la més petita. Els punts de contacte pels quals els costats són tangents, descriuen cercles ortogonals respecte del cercle ΑΒΓΔ en l'esfera més petita, i els angles del polígon, llevat dels angles vers els punts Ε, Η, seran portats, en la superfície de l'esfera més gran, per circumferències de cercles descrits ortogonals respecte del cercle ΕΖΗΘ. I els costats del polígon seran portats per superfícies còniques, tot just com sobre les d'abans. Així, doncs, la figura compresa per les superfícies còniques estarà circumscrita al voltant de l'esfera més petita, mentre que inscrita en la més gran.

ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ἡ ΚΔ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ τῶν Κ, Δ σημείων ὄντων, καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου. διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερόν, ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ· ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιπέδων πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης· ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.



Que la superfície de la figura circumscrita és més gran que la superfície de l'esfera, serà provat així: en efecte, heus aquí un diàmetre d'un cert cercle dels de l'esfera més petita ΚΔ, essent Κ, Δ els punts pels quals els costats del polígon circumscrit contacten amb el cercle ΑΒΓΔ. Un cop, doncs, dividida l'esfera pel pla per ΚΔ, ortogonal respecte del cercle ΑΒΓΔ, la superfície de la figura circumscrita al voltant de l'esfera serà també dividida pel pla. I és clar que tenen els mateixos límits en un pla, la superfície continguda del segment de l'esfera és més petita que la superfície de la figura circumscrita al seu voltant. Però, d'una manera semblant, la superfície del segment de l'esfera restant també és més petita que la superfície de la figura circumscrita al seu voltant. Així, doncs, és evident que la totalitat de la superfície de l'esfera també és més petita que la superfície de la figura circumscrita al seu voltant.



⌈κθ′⌉

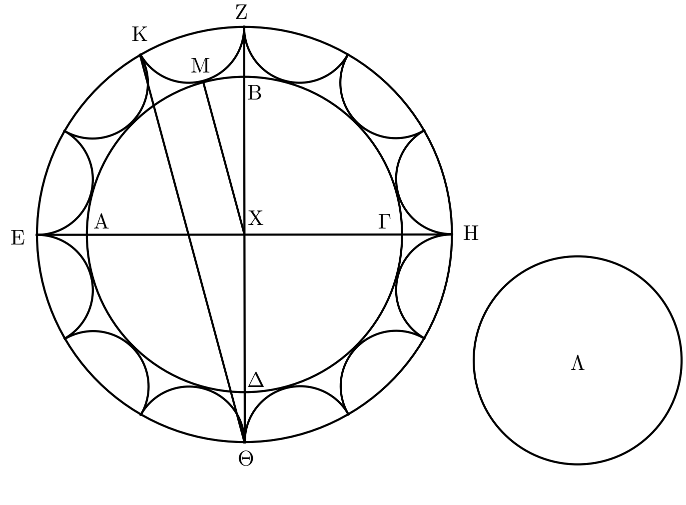
Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν.

τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν· τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν. δῆλον οὖν ἐστι τὸ προειρημένον.

⌈λ′⌉

Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις, καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν.



⌈29⌉

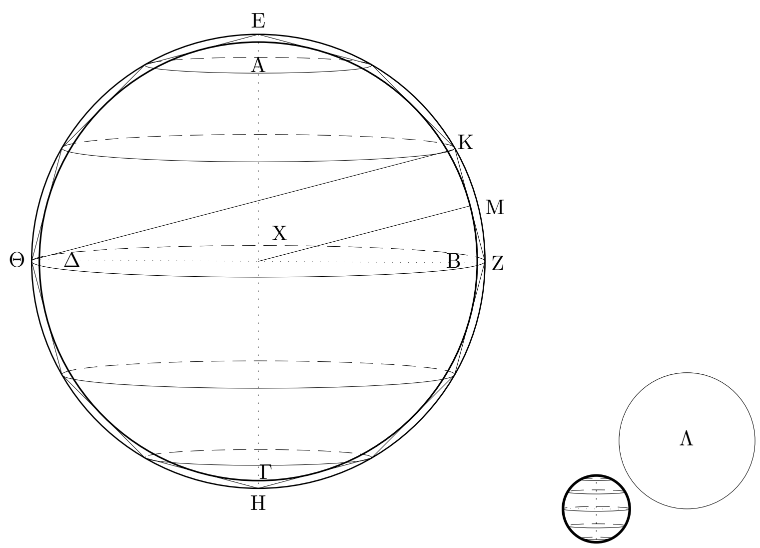
A la superfície de la figura circumscrita al voltant de l'esfera és igual un cercle, el radi del qual pot igual a un rectangle comprès tant per un costat del polígon com per la recta igual a totes les que uneixen els angles del polígon i que són paral·leles a certes rectes de les esteses sota dos costats del polígon.

En efecte, la figura circumscrita al voltant de l'esfera més petita està inscrita a l'esfera més gran. Però ha estat provat que a la superfície de la figura inscrita en l'esfera compresa per les superfícies còniques és igual el cercle el radi del qual pot el rectangle comprès per un costat del polígon i per la recta igual a totes les que uneixen els angles del polígon que són paral·leles a certes rectes de les que s'estenen sota dos costats del polígon. Així, doncs, és evident el que hem esmentat abans.

⌈30⌉

La superfície de la figura circumscrita al voltant de l'esfera és més gran que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera.

En efecte, heus aquí tant l'esfera com el cercle com la resta, els mateixos que els que han estat proposats abans. Que sigui el cercle Λ igual a la superfície de la <figura> que ha estat proposada, circumscrita al voltant de l'esfera més petita.



ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ. ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρας τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΖΘΚ· ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΖΘΚ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου τῆς ΘΚ. ἡ δὲ ΘΚ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου [διπλασία γάρ ἐστιν τῆς ΧΣ οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου]· δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ Λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

⌈λα′⌉

Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ. τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν.

⌈ΠΟΡΙΣΜΑ⌉

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον [τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστιν] τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, μεῖζον ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ

Així, doncs, atès que en el cercle EZHΘ ha estat inscrit un polígon equilàter i equiangular, les rectes que uneixen els costats del polígon i són paral·leles a ZΘ respecte de ZΘ, tenen la mateixa raó que ΘK respecte de KZ. Per tant, la figura compresa tant per un costat del polígon com per la recta igual a totes les que uneixen els angles del polígon, és igual al rectangle comprès per ZΘK, de manera que el radi del cercle Λ pot igual al rectangle ZΘK. Però ΘK és igual al diàmetre del cercle ABΓΔ [ja que és el doble de XΣ, que és radi del cercle ABΓΔ]. Així, doncs, és evident que el cercle Λ (és a dir, la superfície de la figura circumscrita al voltant de l'esfera més petita) és més gran que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera.

⌈31⌉

A la figura circumscrita al voltant de l'esfera més petita és igual un con que té base el cercle igual a la superfície de la figura mentre que altura igual al radi de l'esfera.

En efecte, la figura circumscrita al voltant de l'esfera més petita ha estat inscrita en l'esfera més gran. Però a la figura inscrita compresa per la superfície cònica ha estat provat igual un con que té base el cercle igual a la superfície de la figura mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des del centre de l'esfera fins a un costat del polígon. I aquesta mateixa és igual al radi de l'esfera més petita. És evident, doncs, el que s'ha proposat.

⌈Porisma⌉

Arran d'això és clar que la figura circumscrita al voltant de l'esfera més petita és més gran que el quàdruple d'un con que té base el cercle màxim dels cercles en l'esfera mentre que altura el radi de l'esfera. En efecte, car a la figura és igual un con que té base igual a la seva superfície mentre que altura igual [a una recta conduïda perpendicular des del centre de l'esfera fins a un costat del polígon, és a dir,] al radi de l'esfera més petita, però és la superfície de la figura circumscrita al voltant de l'esfera més gran que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera, per tant, serà la figura circumscrita al voltant de l'esfera més gran que el quàdruple del con que té base el cercle màxim mentre que altura el radi de κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ὁ ἴσος αὐτῷ μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου κώνου [βάσιν τε γὰρ μείζονα ἢ τετραπλασίαν ἔχει καὶ ὕψος ἴσον].

⌈λβʹ⌉

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένοις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα [τὸ περιγεγραμμένον] πρὸς τὸ σχῆμα τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ἔτι δὲ αἱ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν, αἱ δὲ ΕΗ, ΖΘ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς ΑΓ, ΒΔ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΖΒΔΘ παράλληλοι. μενούσης δὴ τῆς ΕΗ διαμέτρου καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον· δεικτέον οὖν, ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ, τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

ἔστω γὰρ ὁ μὲν Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ν ἴσος τῇ ἐπιφανειᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου. δύναται ἄρα τοῦ μὲν Μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΛ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν τὸ ὑπὸ τῆς ΑΚ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν [τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων, ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. ἀλλὰ καί, ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Μ, Ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει. ὥστε καὶ αἱ τῶν Μ, Ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσιν τῶν διαμέτρων, οἵτινες ἴσοι εἰσὶν ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου l'esfera, car el con igual a aquesta figura resulta també més gran que el quàdruple del con esmentat [ja que té tant base més gran que el quàdruple com altura igual].

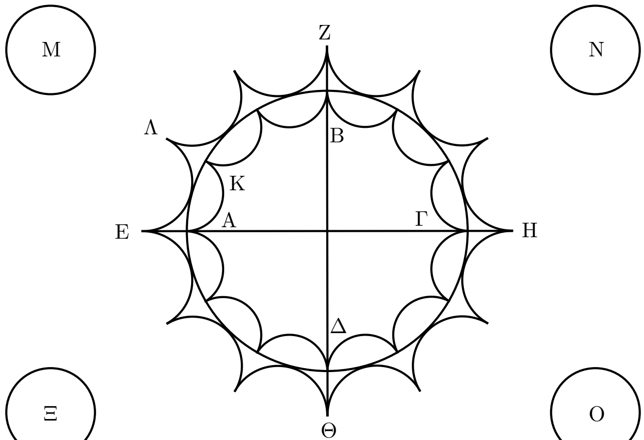
⌈32⌉

Sempre que en una esfera hi sigui una figura inscrita i una altra de circumscrita <compreses> per polígons semblants, de la mateixa forma que les construides abans, la superfície de la figura circumscrita respecte de la superfície de la figura inscrita tindrà una raó duple que el costat del polígon circumscrit al voltant del cercle màxim respecte del costat del polígon inscrit en el mateix cercle, i la mateixa figura [circumscrita] respecte de la figura té una raó triple de la mateixa raó.

Heus aquí en l'esfera un cercle, ΑΒΓΔ. Hi estigui inscrit un polígon equilàter i el nombre dels seus costats sigui mesurable pel nombre quatre. N'estigui circumscrit un altre al voltant d'un cercle semblant a l'inscrit. A més, els costats del polígon circumscrit siguin tangents del cercle per la meitat de les circumferències retallades pels costats del polígon inscrit. Heus aquí, ΕΗ, ΖΘ, uns diàmetres ortogonal l'un a l'altre del cercle que conté el polígon circumscrit, posats d'una manera semblant als diàmetres ΑΓ, ΒΔ. Siguin considerades unes rectes que uneixen angles oposats del polígon que resulten paral·leles tant les unes a les altres com a ΖΒΔΘ. Mantenint-se, doncs, fix el diàmetre ΕΗ i un cop transportats al seu voltant els perímetres dels polígons al voltant de la circumferència del cercle, hi haurà una figura inscrita en l'esfera mentre que una de circumscrita. Així, doncs, s'ha de provar que la superfície de la figura circumscrita respecte de la superfície de la inscrita té una raó duple que ΕΛ respecte d'ΑΚ, mentre que la figura circumscrita respecte de la inscrita té una raó triple de la mateixa raó.

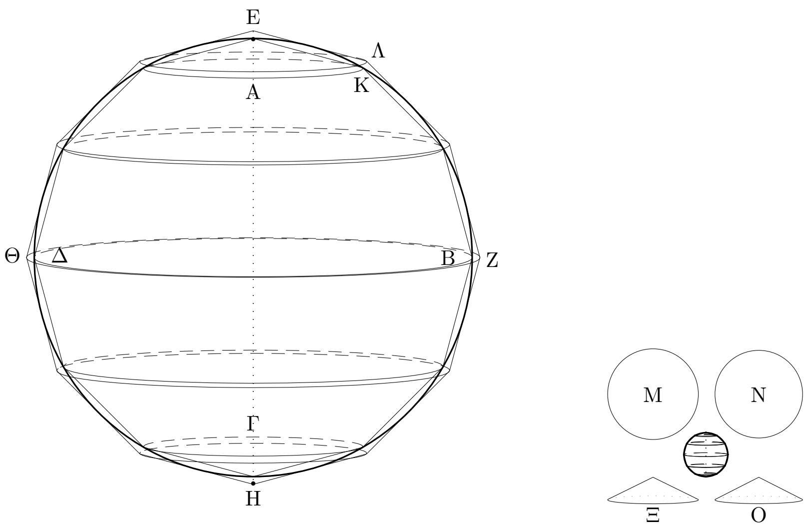
En efecte, heus aquí un cercle Μ igual a la superfície de la circumscrita al voltant de l'esfera, mentre que Ν igual a la superfície de la inscrita. Per tant, el radi de Μ pot el rectangle comprès per ΕΛ i per una recta igual a totes les que uneixen els angles del polígon circumscrit, mentre que el radi de Ν pot el comprès per ΑΚ i per una recta igual a totes les que uneixen els angles. Atès que els polígons són semblants, també haurien de ser semblants les àrees compreses per les esmentades línies [és a dir, per les que <uneixen els> angles o els costats dels polígons, de manera que una respecte de l'altra tinguin la mateixa raó que tenen els costats dels polígons, en potència. Tanmateix, la raó que tenen les <àrees> compreses per les esmentades línies, aqueixa també la tenen els radis dels cercles Μ, Ν, l'un respecte de l'altre, en potència, de manera que els diàmetres de Μ, Ν també tenen la mateixa raó que els costats dels polígons. Però els cercles, qualssevol que καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου]. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ.

εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ Ο, Ξ, καὶ ἔστω ὁ μὲν Ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν Ξ κύκλον ἴσον τῷ Μ, ὁ δὲ Ο βάσιν ἔχων τὸν Ο κύκλον ἴσον τῷ Ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν Ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ Ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἠγμένην· ἴσος ἄρα ὁ μὲν Ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ [δέδεικται οὖν ταῦτα]. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΕΛ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἀγομένην. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ο κώνου, ὃν ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ· τῶν ἄρα Ξ, Ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον [ὅμοιοι ἄρα εἰσίν], καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἕξει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ.



siguin iguals a les superfícies del circumscrit i de l'inscrit, tenen, l'un respecte de l'altre, una raó duple dels diàmetres]. Així, doncs, és evident que la superfície de la figura circumscrita al voltant de l'esfera respecte de la superfície de la figura inscrita a l'esfera té una raó duple que EΛ respecte d'AK.

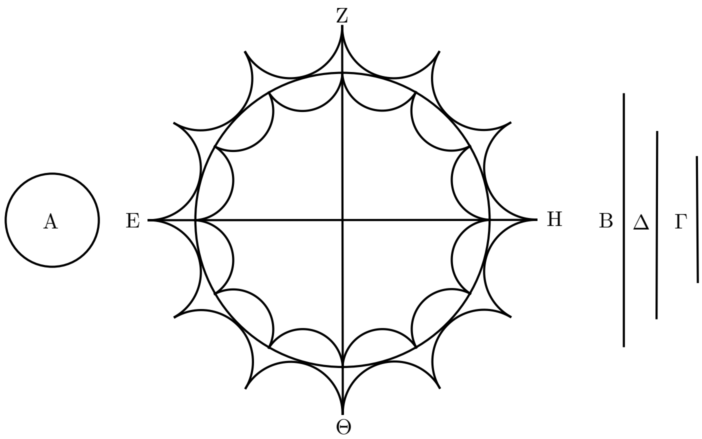
Estiguin presos, doncs, dos cons O, Ξ, i heus aquí, d'una banda, el con Ξ, que té base igual a M, el cercle Ξ, mentre que, d'altra banda, O, que té base igual a N, el cercle O; però altura el con Ξ té el radi de l'esfera, mentre que el con O té una recta conduïda perpendicular des del centre fins a AK. Per tant, el con Ξ és igual a la figura circumscrita al voltant de l'esfera, mentre que l'O, a la inscrita [així, doncs, això ha estat provat]. I, atès que els polígons són semblants, EΛ respecte d'AK té la mateixa raó que el radi de l'esfera respecte de la recta conduïda perpendicular des del centre de l'esfera fins a AK. Per tant, l'altura del con Ξ respecte de l'altura del con O té la mateixa raó que EΛ respecte d'AK. Però el diàmetre del cercle M també respecte del diàmetre del cercle N té una raó que també té EΛ respecte d'AK. Per tant, els diàmetres de les bases dels cons Ξ, O tenen la mateixa raó que les altures [són, per tant, semblants], i per això, el con Ξ respecte del con O tindrà una raó triple que el diàmetre del cercle M respecte del diàmetre del cercle N. Així, doncs, és evident que la figura circumscrita respecte de la inscrita també tindrà una raó triple que EΛ respecte d'AK.



⌜λγ′⌝

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ Α. λέγω, ὅτι ὁ Α ἴσος ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

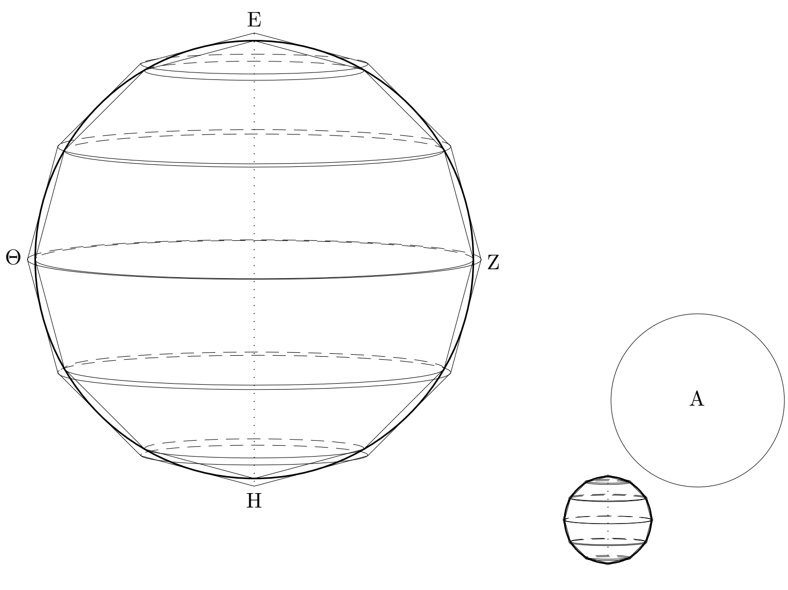


εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ὁ Α κύκλος. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ Β, Γ, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ Δ, νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Β πρὸς Δ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς Β πρὸς Δ διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς Β πρὸς τὴν Γ, τῆς δὲ πλευρας τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν

[33]

La superfície de tota esfera és el quàdruple del cercle màxim dels seus cercles.

En efecte, heus aquí una certa esfera, i heus aquí el quàdruple del cercle màxim A . Jo dic que A és igual a la superfície de l'esfera.



En efecte, si no, o bé és més gran, o bé més petita. heu-la aquí, en primer lloc, més gran, la superfície de l'esfera que el cercle. Hi ha, doncs, dues magnituds desiguals, tant la superfície de l'esfera com el cercle A. És possible, per tant, prendre dues rectes desiguals, de manera que la més gran respecte de la més petita tingui una raó més petita que la que té la superfície de l'esfera respecte del cercle. Estiguin preses B, Γ, i heus aquí, Δ, una mitjana proporcional de B, Γ. Sigui considerada l'esfera tallada amb un pla pel centre pel cercle EZHΘ, i sigui considerat un polígon inscrit al cercle i un de circumscrit, de manera que el circumscrit sigui semblant al polígon inscrit i el costat del circumscrit tingui una raó més petita que la que té B respecte de Δ [per tant, la raó doble és més petita que la raó doble, i la de B respecte de Γ és doble de la de B respecte de Δ, mentre que la de la superfície del sòlid circumscrit respecte de la superfície de l'inscrit ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Α κύκλον. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ Α κύκλου ἐλάσσων ἐστί [δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ τετραπλασία, τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ Α κύκλος]. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ Β, Γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς Β πρὸς Δ [καὶ τὰ διπλάσια ἄρα]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β πρὸς Γ. ἡ δὲ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ὅπερ ἄτοπον· ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου, ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ Α κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ Α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

⌈λδ′⌉

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

ἔστω γὰρ σφαῖρά τις καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ τετραπλασία. ἔστω δὲ ὁ Ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος· δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ Κ, Η, αἱ δὲ Ι, Θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν τὴν Κ τῆς Ι καὶ τὴν Ι τῆς Θ καὶ τὴν Θ τῆς Η, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρότερον, ἡ δὲ τοῦ és doble del costat del polígon circumscrit respecte del costat de l'inscrit]. Per tant, la superfície de la figura circumscrita al voltant de l'esfera respecte de la superfície de la figura inscrita té una raó més petita que la superfície de l'esfera respecte del cercle A, cosa que és precisament absurda, ja que la superfície de la circumscrita és més gran que la superfície de l'esfera, mentre que la superfície de la figura inscrita és més petita que el cercle A, [ja que ha estat provada la superfície de la inscrita més petita que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera, i el cercle A és quàdruple del cercle màxim]. No es dóna el cas, per tant, que la superfície de l'esfera és més gran que el cercle A.

Jo dic, doncs, que tampoc no és més petita. En efecte, si és possible, heus-ho aquí. D'una manera semblant, estiguin trobades unes rectes B, Γ de manera que B respecte de Γ tingui una raó més petita que la que té el cercle A respecte de la superfície de l'esfera, i Δ una mitjana proporcional de B, Γ. Al seu torn, n'hi estigui inscrit un i n'hi estigui circumscrit un altre, de manera que el <costat> del circumscrit tingui una raó més petita que la de B respecte de Δ [i, per tant, les raons dobles]. Per tant, la superfície de la circumscrita respecte de la superfície de la inscrita té una raó més petita que B respecte de Γ. Però B respecte de Γ té una raó més petita que el cercle A respecte de la superfície de l'esfera, cosa que és precisament absurda, ja que la superfície de la circumscrita és més gran que el cercle A, mentre que la de la inscrita és més petita que la superfície de l'esfera.

Tampoc no es dóna el cas, per tant, que la superfície de l'esfera és més petita que el cercle A. Però fou provat que tampoc més gran. Per tant, la superfície de l'esfera és igual al cercle A, és a dir, al quàdruple del cercle màxim.

⌈34⌉

Tota esfera és el quàdruple d'un con que té base igual al cercle màxim dels cercles en l'esfera mentre que altura el radi de l'esfera.

En efecte, heus aquí una certa esfera i, en aquesta <esfera>, un cercle màxim ΑΒΓΔ. Així, doncs, si l'esfera no és el quàdruple del con esmentat, heu-la aquí, si és possible, més gran que el quàdruple. Heus aquí el con Ξ que té base el quàdruple del cercle ΑΒΓΔ, mentre que altura igual al radi de l'esfera. Així, doncs, l'esfera és més gran que el con Ξ. Hi haurà, doncs, dues magnituds desiguals, l'esfera i el con. Així, doncs, és possible prendre dues rectes desiguals, de manera que la més gran respecte de la més petita tingui una raó més petita que la que té l'esfera respecte del con Ξ. Així, doncs, heus aquí K, H, i I, Θ preses de manera que les unes a les altres les superin en una <quantitat> igual, K a I, I a Θ i Θ a H. I sigui considerat també un polígon inscrit al cercle ΑΒΓΔ, el nombre περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται σχήματα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς τὴν Ι. ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τριπλασίονα τοῦ Κ πρὸς Ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ Κ πρὸς Η μείζονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι [τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων]· πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Η. ἡ δὲ Κ πρὸς Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον. καὶ ἐναλλάξ. ὅπερ ἀδύνατον. τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ Ξ κώνου [διότι ὁ μὲν Ξ κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου ἢ τετραπλάσιον]. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου.

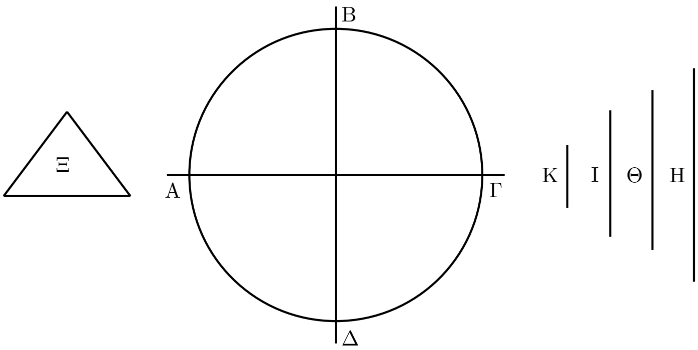
ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἢ τετραπλασία· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ Κ, Η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν Κ μείζονα εἶναι τῆς Η καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτὴν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, καὶ αἱ Θ, Ι ἐκκείσθωσαν, καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον. ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι. ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ἡ Κ πρὸς τὴν Η. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν. ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ Ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων. τετραπλασία ἄρα.

de costats del qual sigui mesurable pel nombre quatre, i un altre de circumscrit, semblant a l'inscrit, tot just com en les anteriors proposicions, i el costat del polígon circumscrit respecte del de l'inscrit tingui una raó més petita que la que té K respecte d'I, i heus aquí uns diàmetres ortogonal l'un a l'altre, ΑΓ, ΒΔ. Així, doncs, si mantenint-se fix el diàmetre ΑΓ, hi es transportat al seu voltant el pla en el qual hi ha el polígon, hi hauria unes figures, una d'inscrita en l'esfera mentre que l'altra de circumscrita; la circumscrita respecte de la inscrita tindrà una raó triple que el costat del circumscrit respecte del de l'inscrit al cercle ΑΒΓΔ. Però el costat respecte del costat té una raó més petita que K respecte de I, de manera que la figura circumscrita té una raó més petita que la triple de K respecte de I. Però K respecte de H també té una raó més gran que el triple de la que té K respecte de I [ja que això és clar pels lemes]. Per tant, la circumscrita respecte de la inscrita té, de molt, una raó més petita que la que té K respecte de H. Però K respecte de H té una raó més petita que l'esfera respecte del con Ξ. I per alternança, cosa que és impossible, ja que la figura circumscrita és més gran que l'esfera, i la inscrita és més petita que el con Ξ [pel fet que el con Ξ és el quàdruple del con que té base igual al cercle ΑΒΓΔ, mentre que altura igual al radi de l'esfera, mentre que la figura inscrita és més petita que el quàdruple del con esmentat]. No es dóna el cas, per tant, que l'esfera és més gran que el quàdruple del con esmentat.

Heus aquí, si és possible, que és més petita que el quàdruple, de manera que l'esfera sigui més petita que el con Ξ. Estiguin preses, doncs, les rectes K, H de manera que K sigui més gran que H, i tingui una raó més petita respecte d'aquesta recta que la que té el con Ξ respecte de l'esfera. I estiguin disposats Θ, I, just com abans, i sigui considerat un polígon inscrit al cercle ΑΒΓΔ i un altre de circumscrit, de manera que el costat del circumscrit respecte del costat de l'inscrit tingui una raó més petita que K respecte d'I i la resta construït de la mateixa forma que abans. Per tant, la figura sòlida circumscrita respecte de la inscrita també tindrà una raó triple que el costat del circumscrit al voltant del cercle ΑΒΓΔ respecte de l'inscrit. Però el costat respecte del costat té una raó més petita que K respecte de I. Així, doncs, la figura circumscrita respecte de la inscrita tindrà una raó més petita que el triple de la que té K respecte de I. Però K respecte d'H té una raó més gran que el triple de la que té K respecte de I, de manera que la figura circumscrita respecte de la inscrita té una raó més petita que K respecte d'H. Però K respecte d'H té una raó més petita que el con Ξ respecte de l'esfera, cosa que és precisament impossible, ja que la figura inscrita és més petita que l'esfera, mentre que la circumscrita és més gran que el con Ξ. Tampoc no es dóna el cas, per tant, que l'esfera és més petita que el quàdruple del con que té base igual al cercle ΑΒΓΔ i altura una recta igual al radi de l'esfera. Però fou provat que tampoc no és més gran. Per tant, és el quàdruple.

⌈ΠΟΡΙΣΜΑ⌉

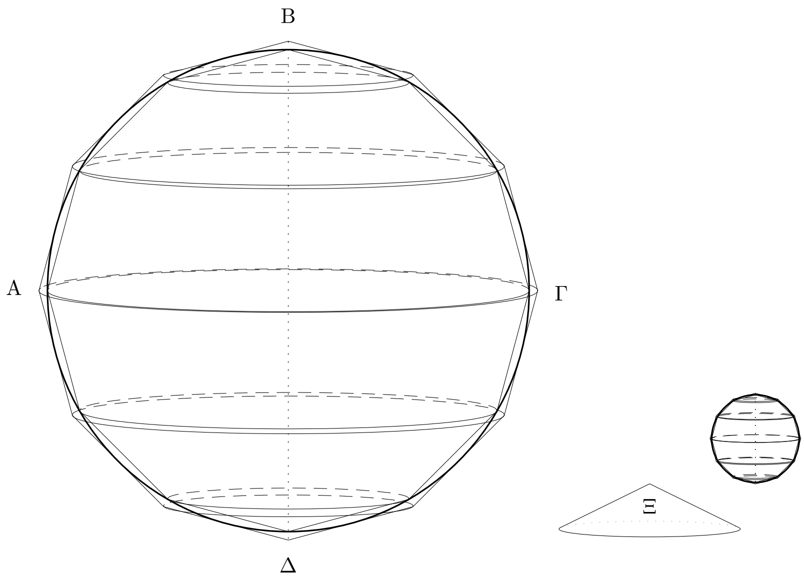
Προδεδειγμένων δὲ τούτων φανερόν, ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα· δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως [δῆλον, ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογον ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως], ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως, τουτέστι τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

⌈Porisma⌉

Un cop provat això abans, és clar que tot cilindre que té base el cercle màxim dels cercles en l'esfera, mentre que altura igual al diàmetre de l'esfera, és una hemiòlia de l'esfera i, la seva superfície, juntament amb les bases, una hemiòlia de la superfície de l'esfera.

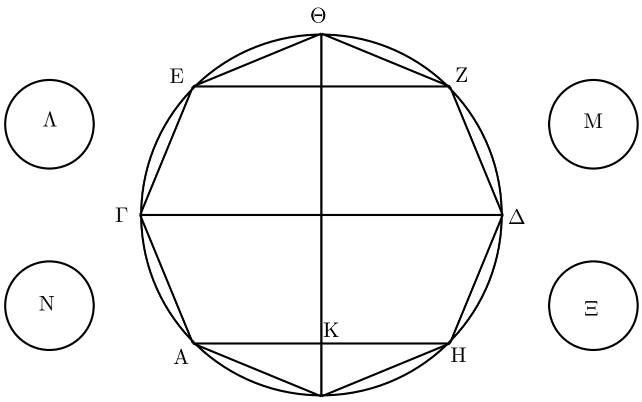


En efecte, el cilindre abans esmentat és el sèxtuple del con que té base la mateixa, mentre que altura igual al radi, mentre que ha estat provat que l'esfera és el quàdruple del mateix con. Així, doncs, és evident que el cilindre és una hemiòlia de l'esfera. Al seu torn, atès que la superfície del cilindre, llevat de les bases, ha estat provat igual al cercle el radi del qual és una mitjana proporcional del costat del cilindre i del diàmetre de la base, però el costat del cilindre esmentat al voltant de l'esfera és igual al diàmetre de la base [és evident que la seva mitjana proporcional resulta igual al diàmetre de la base], i el cercle que té el radi igual al diàmetre de la base és el quàdruple de la base (és a dir, del cercle màxim dels cercles en l'esfera), per tant, la superfície del cilindre, llevat de les bases, serà el quàdruple del cercle màxim. Per tant, serà la totalitat de la superfície del cilindre, juntament amb les bases, el sèxtuple del cercle màxim. Però també és la superfície de l'esfera el quàdruple del cercle màxim. Per tant, la totalitat de la superfície del cilindre és una hemiòlia de la superfície de l'esfera.

⌈λε′⌉

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως.

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΗ κύκλος [ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτό, οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν], καὶ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΗΘ καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ ΑΓΕΘΖΔΗ χωρὶς τῆς ΑΗ πλευρᾶς, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΑΓ πλευρᾶς καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ΕΖ, ΓΔ καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς ΑΚ· δεικτέον, ὅτι ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ.

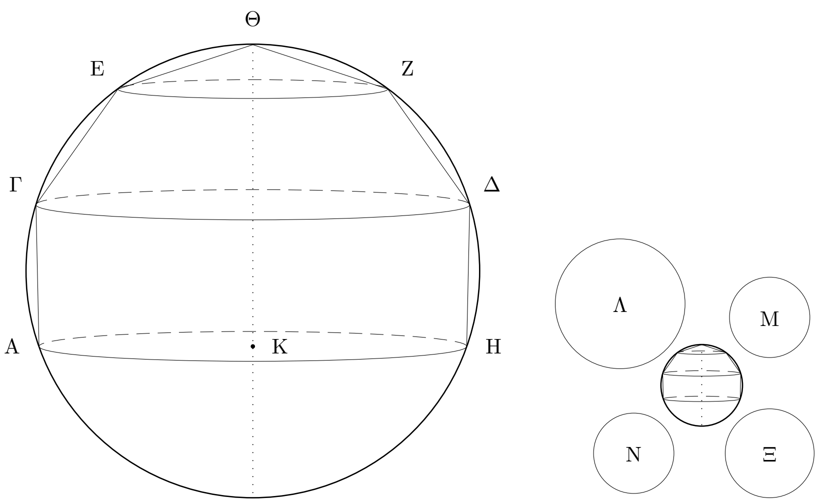


εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΘ πλευρᾶς καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ· γίνεται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΓ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ΕΖ, ΓΔ. ἔσται οὖν οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΕΖ, ΓΔ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ Ξ εἰλήφθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν ΓΔ, ΑΗ· καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΓΔ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν

[35]

La superfície de la figura inscrita al segment de l’esfera és igual a un cercle, el radi del qual pot igual al rectangle comprès tant per un costat del polígon inscrit en el segment del cercle màxim com per una recta igual a totes les paral·leles a la base del segment amb la meitat de la base del segment.

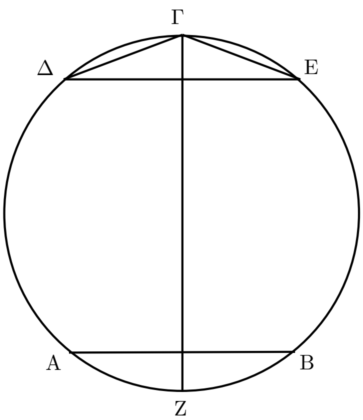
Heus aquí una esfera i, en aquesta <esfera>, un segment base del qual és un cercle al voltant d’AH [hi estigui inscrita una figura tal com esmentem, compresa per la superfície cònica], un cercle màxim AHΘ i un polígon d’un nombre parell de costats, llevat del costat AH, ΑΓΕΘΖΔΗ. Estigui pres el cercle Λ, el radi del qual pot igual al rectangle comprès tant pel costat ΑΓ i per totes les rectes EZ, ΓΔ com, a més, per la meitat de la base (és a dir, AK). S’ha de provar que el cercle és igual a la superfície de la figura.



En efecte, estigui pres un cercle M el radi del qual pot el rectangle comprès tant pel costat EΘ com per la meitat d’EZ. El cercle M resulta, doncs, igual a la superfície del con base del qual és un cercle al voltant d’EZ mentre que vèrtex, el punt Θ. Estigui pres també un altre cercle N el radi del qual pot igual al rectangle comprès tant per EΓ com per la meitat d’EZ, ΓΔ, conjuntament. Així, doncs, aqueix cercle serà igual a la superfície del con entre els plans paral·lels per EZ, ΓΔ. I, d’una manera semblant, estigui pres un altre cercle, Ξ, el radi del qual pot el rectangle comprès tant per ΑΓ com per la meitat de ΓΔ, AH, conjuntament. I, així, doncs, aquest mateix és igual a la superfície cònica entre els plans paral·lels per AH, ΓΔ. Així, doncs, tots els cercles seran iguals a la totalitat de la superfície ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΓΔ καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ ΑΚ. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ. ὁ ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς Μ, Ν, Ξ κύκλοις ὥστε και τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

⌈λϛ′⌉

Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΖ τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΒ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον, ἐὰν μενούσης τῆς ΓΖ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν Δ, Ε, Α, Β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονταὶ, ὧν διάμετροι αἱ ΔΕ, ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον βάσιν μὲν ἔχον κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, κορυφὴν δὲ τὸ Γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος·

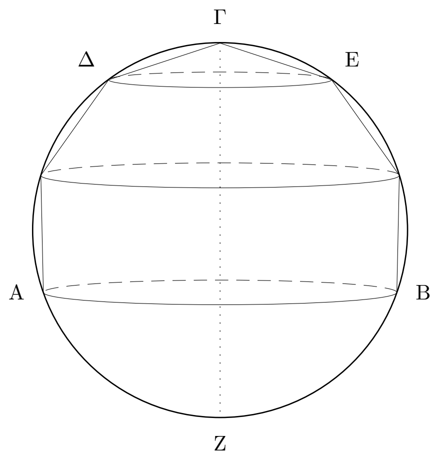


τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραί εἰσιν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας.

de la figura. I els seus radis podran igual als rectangles compresos per un costat ΑΓ, i per una recta igual a ΕΖ, ΓΔ i a la meitat de la base, ΑΚ. Però el radi del cercle Λ també podia igual a la mateixa àrea. Per tant, el cercle Λ serà igual als cercles Μ, Ν, Ξ, de manera que també a la superfície de la figura inscrita.

[36]

Estigui tallada una esfera amb un pla, no pel centre, i en aquesta <esfera> un cercle màxim ΑΕΖ, tallant ortogonal el pla que talla. Estigui inscrit al segment ΑΒΓ un polígon tant equilàter com d'un nombre parell de costats, llevat de la base ΑΒ. D'una manera semblant, doncs, a les <proposicions> d'abans, sempre que, mantenint-se fixa ΓΖ, la figura sigui transportada al seu voltant, els angles Δ, Ε, Α, Β seran portats per uns cercles, els diàmetres dels quals són ΔΕ, ΑΒ, mentre que els costats del segment, per una superfície cònica. La figura sòlida resultant (que té base un cercle el diàmetre del qual és ΑΒ mentre que vèrtex Γ) estarà compresa per superfícies còniques. D'una manera semblant a les d'abans, doncs, tindrà la superfície més petita que la superfície del segment contingut,



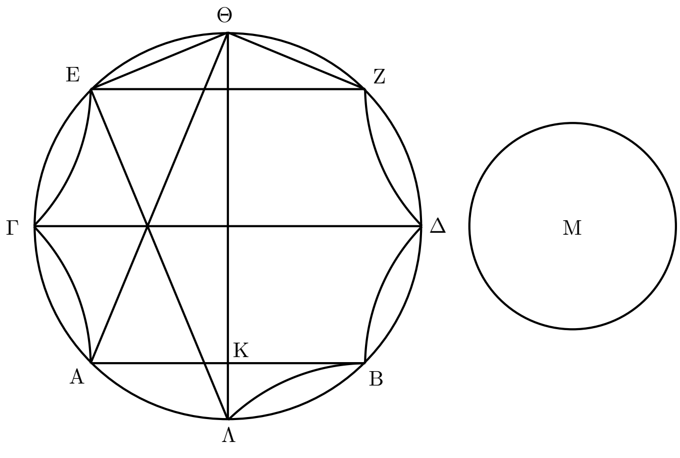
En efecte, el límit d'aquests (tant del segment com de la figura) en un pla és el mateix (la circumferència del cercle un diàmetre del qual és ΑΒ), i ambdues superfícies són còncaves sobre un mateix costat, i una està continguda per l'altra.

⌜λζ′⌝

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΕΖ, καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ [καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα, καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον], καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς ΘΛ, ἐπεζευγμένων δὲ τῶν ΛΕ, ΘΑ, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΑΘ. δεικτέον, ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας.

ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ περιεχομένῳ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ [καὶ γὰρ τοῦ ΛΘ, ΚΘ]. φανερὸν οὖν, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ· δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος.

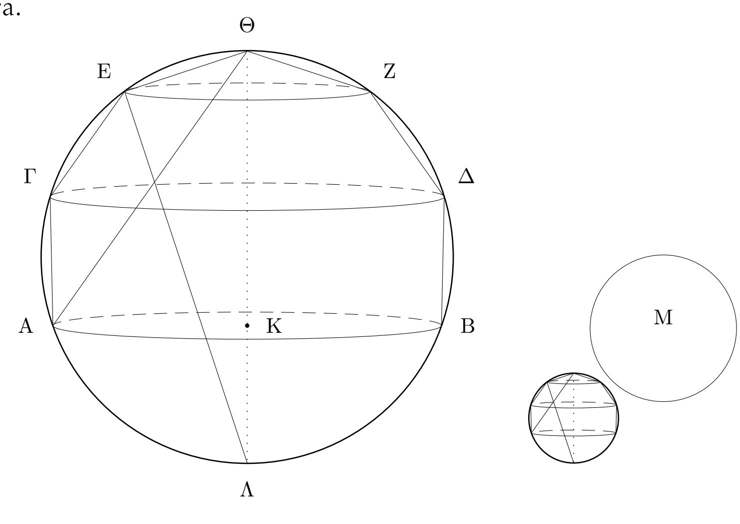


⌈37⌉

La superfície de la figura inscrita en el segment d’esfera és més petita que el cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la circumferència del cercle que és base del segment.

Heus aquí una esfera i, en aquesta <esfera>, un cercle màxim ABEZ, i heus aquí un segment en l’esfera base del qual és el <cercle> al voltant d’un diàmetre AB [i hi estigui inscrit la figura esmentada, i en el segment del cercle, un polígon], i la resta el mateix, essent el diàmetre de l’esfera ΘΛ mentre que unint ΛE, ΘA. Heus aquí un cercle M el radi del qual sigui igual a AΘ. S’ha de provar que el cercle M és més gran que la superfície de la figura.

En efecte, la superfície de la figura ha estat provada igual a un cercle el radi del qual pot igual al rectangle comprès tant per EΘ com per EZ, ΓΔ, KA. Però el rectangle comprès per EΘ i per EZ, ΓΔ, KA ha estat provat igual al comprès per EΛ, KΘ. Però el rectangle comprès per EΛ, KΘ és més petit que el quadrat a partir d’AΘ [ja que també ho és més que el rectangle ΛΘ, KΘ]. Així, doncs, és clar que el radi del cercle que és igual a la superfície de la figura, és més petit que el radi de M. Per tant, és evident que el cercle M és més gran que la superfície de la figura.



⌜λη′⌝

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῶν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.

ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς ΑΓ ὁμοίως τοῖς πρότερον, καὶ μενούσης τῆς ΒΑ περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον, καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ Κ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· δεικτέον, ὅτι ὁ Κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ ΑΕΓ.

ἀναγεγράφθωσαν δὴ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς ΘΗ, ΔΖ κορυφὴν ἔχοντες τὸ Ε σημεῖον· οὐκοῦν ὁ μὲν ΗΒΘΕ ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΗΒΘ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΗΒ ἀγομένῃ καθέτῳ, τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΖΕΔ, ΗΕΘ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΑΕΓ, ΖΕΔ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΑ καθέτῳ ἠγμένῃ· οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι μετὰ τοῦ ΑΕΓ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσιν τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τὰς δὲ βάσεις ἴσας τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΖΗΒΘΔΓ σχήματος. ἔχει δὲ καὶ ὁ Κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ καὶ ὁ Κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ.

⌈38⌉

La figura inscrita en el segment comprès per les superfícies còniques amb el con que té la mateixa base que la figura mentre que vèrtex el centre de l'esfera, és igual al con que té base igual a la superfície de la figura, i altura igual a una recta conduïda perpendicular des del centre de l'esfera fins a un costat dels del polígon.

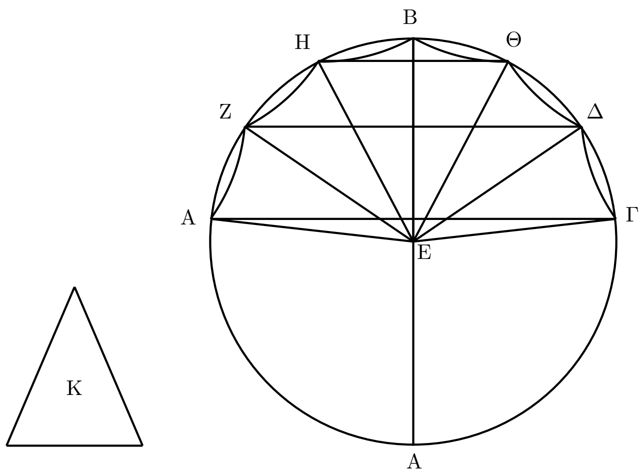
En efecte, heus aquí una esfera i, en aquesta <esfera>, un cercle màxim, un segment ΑΒΓ més petit que un semicercle i el centre Ε. Estigui inscrit al segment ΑΒΓ un polígon d'un nombre parell de costats, llevat d'ΑΓ, d'una manera semblant a les d'abans. Mantenint-se fixa ΒΑ, l'esfera, transportada al seu voltant, faci una certa figura compresa per superfícies còniques, i des d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΑΓ estigui aixecat un con que té vèrtex el centre. Estigui pres un con Κ que té base igual a la superfície de la figura mentre que altura igual a una recta conduïda perpendicular des del centre Ε fins a un costat del polígon. S'ha de provar que el con Κ és igual a la figura compresa amb el con ΑΕΓ.

Estiguin també aixecats, doncs, uns cons des dels cercles al voltant d'un diàmetres ΘΗ, ΔΖ, que tenen vèrtex el punt Ε. En conseqüència, el rombe sòlid ΗΒΘΕ és igual al con la base del qual és igual a la superfície del con ΗΒΘ mentre que l'altura, a una recta conduïda perpendicular des d'Ε fins a ΗΒ, mentre que la resta circumdant compresa per la superfície entre els plans paral·lels per ΗΘ, ΖΔ i per les superfícies còniques ΖΕΔ, ΗΕΘ, és igual a un con,la base del qual és igual a la superfície entre els plans paral·lels per ΗΘ, ΖΔ mentre que altura, a una recta conduïda perpendicular des d'Ε fins a ΖΗ. Al seu torn, la resta circumdant compresa per la superfície entre els plans paral·lels per ΖΔ, ΑΓ i per les superfícies còniques ΑΕΓ, ΖΕΔ, és igual un con, la base del qual és igual a la superfície entre els plans paral·lels per ΖΔ, ΑΓ mentre que altura, a una recta conduïda perpendicular des d'Ε fins a ΖΑ. Així, dons, els cons esmentats seran iguals a la figura amb el con. I tenen altura igual a una recta conduïda perpendicular des d'Ε fins a un costat del polígon, mentre que les bases iguals a la superfície de la figura ΑΖΗΒΘΔΓ. Però el con Κ també té la mateixa altura i base igual a la superfície de la figura. Per tant, el con és igual als cons esmentats. Però fou provat que els cons esmentats són iguals a la figura i al con ΑΕΓ. Per tant, el con Κ també és igual tant a la figura com al con ΑΕΓ.

⌈ΠΟΡΙΣΜΑ⌉

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ.

ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τοῦ τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ [δέδεικται γὰρ τοῦτο] καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.



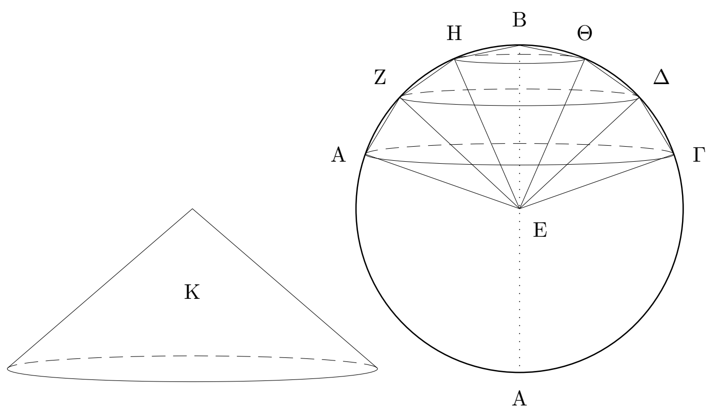
⌈λθ′⌉

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου, ὃ ἀποτέμνει ἡ ΑΒ, καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Β ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ περὶ τὸν γεννηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος. ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΕΚ περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας, καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους

⌈Porisma⌉

Arran d'això és clar, doncs, que el con que té base el cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la circumferència del cercle que és base del segment, mentre que altura igual al radi de l'esfera, és més gran que la figura inscrita amb el con.

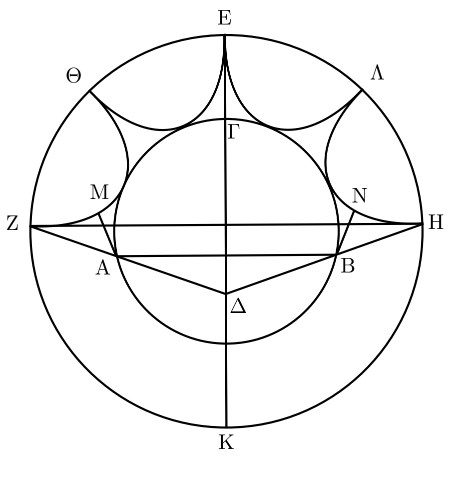
En efecte, el con esmentat abans és més gran que el con igual a la figura amb el con que té base la base del segment mentre que el vèrtex vers el centre (és a dir, <és més gran> que el que té la base igual a la superfície de la figura, mentre que altura igual a la recta conduïda perpendicular des del centre fins a un costat del polígon), ja que tant la base és més gran que la base [ja que això fou provat] com l'altura, que l'altura.



⌈39⌉

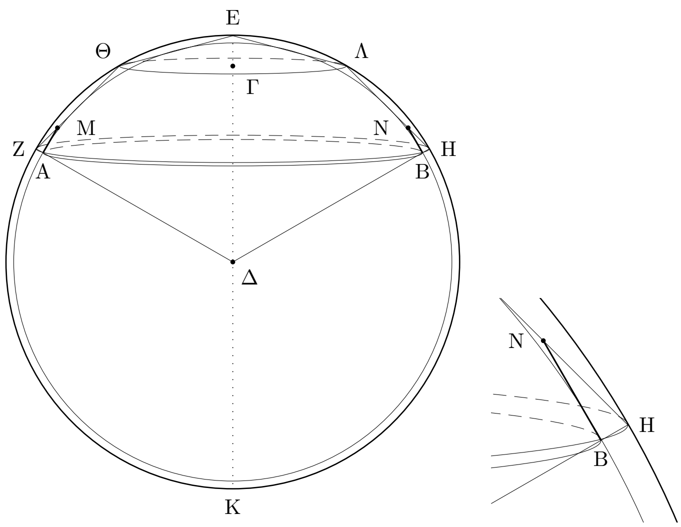
Heus aquí una esfera, en aquesta <esfera> un cercle màxim ΑΒΓ i estigui tallat <un segment> més petit que un semicercle, el que retalla ΑΒ. Heus aquí el centre Δ. Des del centre Δ fins a Α, Β estiguin unides ΑΔ, ΔΒ, i estigui circumscrit un polígon al voltant del sector resultant, i un cercle al voltant d'aquest polígon. Tindrà, doncs, el mateix centre que el cercle ΑΒΓ. Sempre, doncs, que mantenint-se fixa ΕΚ, el polígon transportat al seu voltant de bell nou es restableixi a la γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσιν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὖσαι παράλληλοι τῇ ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα, καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καὶ ἔσται τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΖΗ κύκλος. ἡ δὴ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΒ κύκλος.

ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΜ, ΒΝ. κατὰ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ΑΜΘΕ<Λ>ΝΒ μείζονα ἕξει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος [πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ τὸ αὐτὸ ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλον, καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος]. ἀλλ᾽ ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ΖΜ, ΗΝ ἐπιφάνεια κώνου μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν ΜΑ, ΝΒ. ἡ μὲν γὰρ ΖΜ τῆς ΜΑ μείζων ἐστί [ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει], ἡ δὲ ΝΗ τῆς ΝΒ, ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων γίνεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας [ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασιν]. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.



mateixa posició, el cercle circumscrit serà portat per la superfície d'una esfera, i els angles del polígon descriuran cercles, els diàmetres dels quals uneixen els angles del polígon que són paral·lels a AB. I els punts pels quals els costats del polígon contacten amb el cercle més petit, descriuen cercles en l'esfera més petita, diàmetres dels quals seran les rectes que uneixen els punts de contacte que són paral·leles a AB. I els costats seran portats per superfícies còniques, i la figura circumscrita base de la qual és un cercle al voltant de ZH, estarà compresa per les superfícies còniques. La superfície de l'esmentada figura, doncs, és més gran que la superfície del segment més petit, base del qual és un cercle al voltant d'AB.

En efecte, estiguin conduides unes rectes que el toquen AM, BN. Per tant, seran portades per superfícies còniques, i la figura resultant compresa pel polígon AMΘEΛNB tindrà més gran la superfície que el segment de l'esfera base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre AB [ja que tenen el mateix límit en un pla, un cercle al voltant d'un diàmetre AB, i el segment es contingut per la figura]. Tanmateix, la superfície del con que ha resultat compresa per ZM, HN és més gran que la que ha resultat compresa per MA, NB, ja que ZM és més gran que MA [ja que s'estén per l'ortogonal], mentre que NH és més gran que NB. Però quan això sigui així, la superfície resulta més gran que la superfície [ja que això ha estat provat en els lemes]. Així, doncs, és evident que la superfície de la figura circumscrita també és més gran que la superfície del segment de l'esfera més petita.



⌈ΠΟΡΙΣΜΑ⌉

Καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου [τὸ γὰρ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γεγραμμένον σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας] [τοῦτο δὲ δῆλον διὰ τὸ προγεγραμμένον].

⌈μʹ⌉

Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ᾽ αὐτῆς ὁ ΑΒΓΔ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ ΛΚΖ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω, καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΚΛ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΘ καὶ ΖΗ [ὃ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο γὰρ προδέδεικται]. τοῦ ἄρα Ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΜΘ, ΗΖ περιεχομένῳ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΗΖ μείζων ἐστὶ τῆς ΔΞ [ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΚΖ, ἔσται παράλληλος τῇ ΔΑ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ παράλληλος, καὶ κοινὴ ἡ ΖΕ. ὅμοιον ἄρα τὸ ΖΚΗ τρίγωνον τῷ ΔΑΞ τριγώνῳ. καί ἐστιν μείζων ἡ ΖΚ τῆς ΑΔ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΔΞ], ἴση δὲ ἡ ΜΘ τῇ διαμέτρῳ τῇ ΓΔ [ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΟ,] [ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΜΟ τῇ ΟΖ, ἡ δὲ ΘΕ τῇ ΕΖ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΟ τῇ ΜΘ.] [διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῆς ΕΟ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ διπλασία ἐστὶν τῆς ΕΟ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῇ ΓΔ], τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΞ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ ΚΖΛ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ ὁ γὰρ Ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.

⌈Porisma⌉

També és clar que la superfície de la figura circumscrita al voltant del sector és igual al cercle el radi del qual pot el rectangle comprès tant per un costat del polígon com per totes les rectes que uneixen els angles del polígon i, a més, per la meitat de la base del polígon esmentat [ja que la figura descrita pel polígon està inscrita al segment de l'esfera més gran] [però això és evident pel que ha estat mencionat abans].

⌈40⌉

La superfície de la figura circumscrita al sector és més gran que un cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la circumferència del cercle que és base del sector.

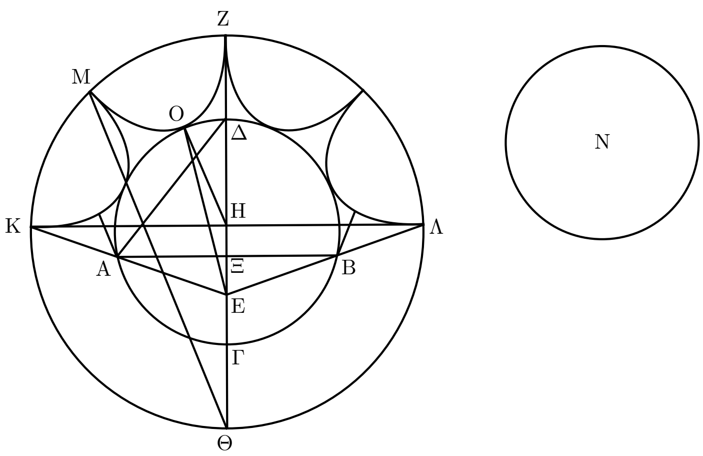
En efecte, heus aquí una esfera, sobre seu un cercle màxim ΑΒΓΔ, i el centre Ε. Estigui circumscrit al voltant del sector un polígon ΛΚΖ, al voltant d'aquest mateix hi estigui circumscrit un cercle, i heus aquí que ens n'ha resultat una figura tot just com abans. Heus aquí un cercle Ν el radi del qual pot igual al rectangle comprès tant per un costat del polígon com per totes les rectes que uneixen <els angles>, amb la meitat de ΚΛ. Tanmateix, l'àrea esmentada és igual al rectangle comprès per ΜΘ, ΖΗ [que és, doncs, altura del segment de l'esfera més gran, ja que això ha estat provat abans]. Per tant, el radi del cercle Ν pot igual al rectangle comprès per ΜΘ, ΗΖ. Tanmateix, ΗΖ és més gran que ΔΞ [que és altura del segment més petit, ja que sempre que unim ΚΖ, serà paral·lela a ΔΑ. Però també ΑΒ és paral·lela a ΚΛ, i ΖΕ comuna. Per tant, el triangle ΖΚΗ és semblant al triangle ΔΑΞ i ΖΚ és més gran que ΑΔ. Per tant, ΖΗ també és més gran que ΔΞ], mentre que ΜΘ igual al diàmetre ΓΔ [ja que sempre que siguin unides ΕΟ,] [atès que ΜΟ és igual a ΟΖ, mentre que ΘΕ a ΕΖ, per tant, ΕΟ és paral·lela a ΜΘ. Per tant, ΜΘ és el doble d'ΕΟ. Tanmateix, també ΓΔ és el doble d'ΕΟ. Per tant, ΜΘ és igual a ΓΔ]. Però el rectangle comprès per ΓΔ, ΔΞ és igual al quadrat a partir d'ΑΔ. Per tant, la superfície de la figura ΚΖΛ és més gran que el cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la circumferència d'un cercle al voltant d'un diàmetre, ΑΒ, que és base del segment. Per tant, el cercle Ν és igual a la superfície de la figura circumscrita al voltant del sector.

⌈ΠΟΡΙΣΜΑ α′⌉

Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ [ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα τῷ τομεῖ ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό. δῆλον οὖν τὸ λεγόμενον ἐστιν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου].

⌈ΠΟΡΙΣΜΑ β′⌉

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.

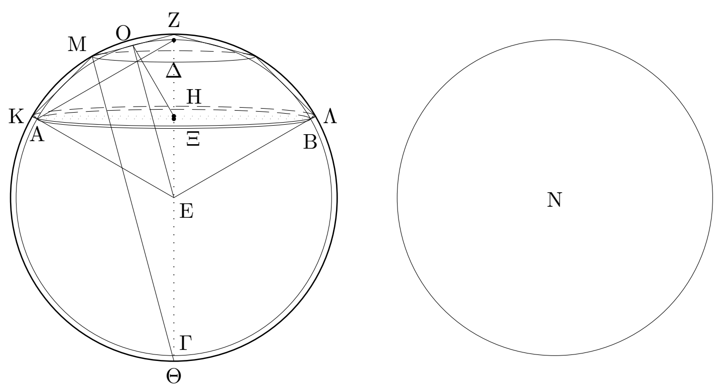


⌈Porisma 1⌉

La figura circumscrita al voltant del sector amb el con base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΚΛ, i vèrtex el centre, també resulta, doncs, igual a un con base del qual és igual a la superfície de la figura mentre que altura, a una recta conduïda perpendicular des del centre sobre el costat [que, doncs, és igual al radi de l'esfera, ja que la figura circumscrita al sector està inscrita en el segment de l'esfera més gran, el centre de la qual és el mateix. Així, doncs, és evident que el que s'ha dit és així arran d'allò mencionat abans.]

⌈Porisma 2⌉

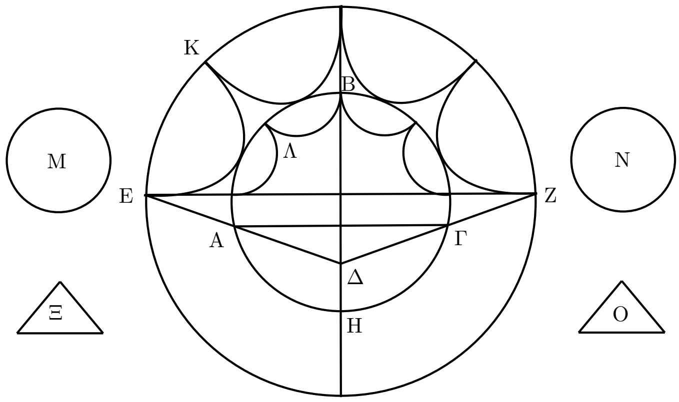
I, arran d'això, és clar que la figura circumscrita amb el con és més gran que un con que té base el cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment de l'esfera més petita fins a la circumferència del cercle que és base del segment, mentre que altura, igual al radi. En efecte, el con igual a la figura amb el con tindrà la base més gran que el cercle esmentat mentre que l'altura, igual al radi de l'esfera més petita.



⌈μα′⌉

Ἔστω πάλιν σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς, καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ΗΒ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. δεικτέον, ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ.

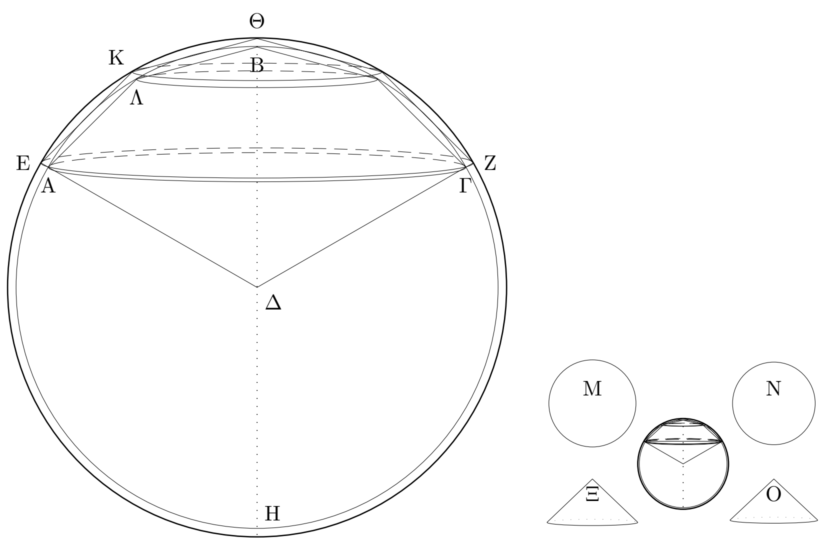
ἔστω γὰρ ὁ Μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ. ἔσται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ Ν κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΓ. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ πλευρᾶς [καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν Ν κύκλον]. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ [τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον].



⌈41⌉

Heus aquí, al seu torn, una esfera i, en aquesta <esfera>, un cercle màxim, un segment més petit que un semicercle ΑΒΓ, i el centre Δ. Al sector ΑΒΓ hi estigui inscrit un polígon d'un nombre parell d'angles, hi estigui circumscrit un <polígon> semblant a aqueix, i els costats siguin paral·lels als costats. Un cercle estigui circumscrit al voltant del polígon circumscrit. D'una manera semblant a les d'abans, mantenint-se fixa ΗΒ, els cercles, mentre són transportats al seu voltant, facin unes figures compreses per superfícies còniques. S'ha de provar que la superfície de la figura circumscrita respecte de la superfície de la figura inscrita, té una raó duple que el costat del polígon circumscrit respecte del costat del polígon inscrit, i la figura, juntament amb el con, té una raó triple d'aquesta mateixa <raó>.

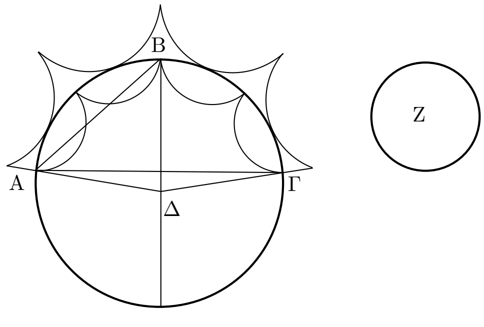
En efecte, heus aquí el cercle Μ el radi del qual pot igual al rectangle comprès tant per un costat del polígon circumscrit com per totes les rectes que uneixen els angles i, a més, la meitat d'ΕΖ. Serà, doncs, el cercle Μ igual a la superfície de la figura circumscrita. Estigui pres, doncs, també el cercle Ν el radi del qual pot igual al rectangle comprès tant per un costat del polígon inscrit com per totes les rectes que uneixen els angles amb la meitat d'ΑΓ. Serà, doncs, aqueix <cercle> també igual a la superfície de la figura inscrita. Tanmateix, les àrees esmentades són, l'una respecte de l'altra, com el quadrat a partir del costat ΕΚ respecte del quadrat a partir del costat ΑΛ [per tant, com el polígon respecte del polígon, també el cercle Μ respecte del cercle Ν]. Així, doncs, és clar que la superfície de la figura circumscrita respecte de la superfície de la figura inscrita també té una raó duple que ΕΚ respecte d'ΑΛ [i la mateixa que també té el polígon].



ἔστω πάλιν κῶνος ὁ Ξ βάσιν μὲν ἔχων τῷ Μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἴσος δὴ οὗτος ἐστιν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ Ο βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ Ν, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην· ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ κέντρον. ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ [ἐπεί] ἐστιν, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου [τοῦ Δ] ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην, ἐδείχθη δέ, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου [καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον]. ἔσται ἄρα, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ο, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ο κώνου [ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι]. ὁ Ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ.

⌜μβ´⌝

Παντὸς τμήματος σφαίρας ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας.

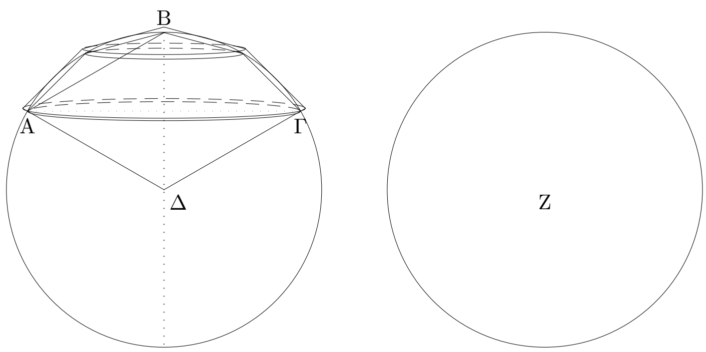


ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμι-

Heus aquí, al seu torn, un con Ξ que té base igual a M mentre que altura el radi de l'esfera més petita. Aqueix con, doncs, és igual a la figura circumscrita amb el con base del qual és un cercle al voltant d'EZ, i vèrtex Δ. I heus aquí un altre con O que té base igual a N mentre que altura una recta conduïda perpendicular des de Δ fins a ΑΛ. També serà, doncs, aqueix <cercle> igual a la figura inscrita amb el con base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΑΓ, i vèrtex el centre Δ, ja que tot això ja ha estat mencionat abans. I [atès que], com EK respecte del radi de l'esfera més petita, així és ΑΛ respecte d'una recta conduïda perpendicular des del centre [Δ] fins a ΑΛ, però fou provat que, com EK respecte d'ΑΛ, així el radi del cercle M respecte del radi del cercle N [i el diàmetre respecte del diàmetre], per tant, com el diàmetre del cercle que és base de Ξ respecte del diàmetre del cercle que és base d'O, així serà l'altura del con Ξ respecte de l'altura del con O [per tant, els cons són semblants]. Per tant, el con Ξ respecte del con O té una raó triple que el diàmetre respecte del diàmetre. Així, doncs, és clar que també la figura circumscrita amb el con respecte de la inscrita amb el con té una raó triple que EK respecte d'ΑΛ.

[42]

La superfície de tot segment d'esfera més petit que un hemisferi és igual a un cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la circumferència del cercle que és base del segment de l'esfera.



Heus aquí una esfera i, en aquesta <esfera>, un cercle màxim ΑΒΓ i, en aquesta σφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΓ κύκλος πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Ζ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ. δεῖ δὴ δεῖξαι, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος ἴση ἐστὶ τῷ Ζ κύκλῳ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ Δ κέντρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος καὶ τοῦ Ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Ζ κύκλον, περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου, ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔσται, ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον· ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν Ζ κύκλον, μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος· καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ Ζ κύκλου· ὅπερ ἀδύνατον· δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου.

ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανειας, καὶ περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα, καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὡς οὐδὲ ἐλάσσων. ἴση ἄρα.

⌈μγ′⌉

Καὶ ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τῷ κατὰ τὴν ΑΔ, καὶ τὸ ΑΒΔ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου, καὶ διάμετρος ἡ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἔστω ὁ μὲν Ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, ὁ δὲ Ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΓ, ὁ δὲ Η κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ· καὶ ὁ

<esfera>, un segment més petit que un hemisferi base del qual és un cercle al voltant d'ΑΓ, ortogonal al cercle ΑΒΓ. Estigui pres un cercle Ζ el radi del qual és igual a ΑΒ. Cal provar, doncs, que la superfície del segment ΑΒΓ és igual al cercle Ζ.

En efecte, si no, heu-la aquí més gran, la superfície que el cercle Ζ. Estigui pres el centre Δ, i estiguin allargades unes rectes unides des de Δ fins a Α, Γ. Havent-hi dues magnituds desiguals, tant la superfície del segment com el cercle Ζ, estigui inscrit al sector ΑΒΓ un polígon equilàter i d'un nombre parell de costats, i n'hi hem circumscrit un altre de semblant a aqueix, de manera que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que la superfície del segment de l'esfera respecte del cercle Ζ. Però, un cop transportat un cercle al voltant, també com abans, hi haurà dues figures compreses per superfícies còniques, de les quals, una circumscrita mentre que l'altra, inscrita, i la superfície de la figura circumscrita respecte de la inscrita serà com el polígon circumscrit respecte de l'inscrit, ja que cadascuna de les raons és doble de la que té el costat del polígon circumscrit respecte del costat de l'inscrit. Tanmateix, el polígon circumscrit respecte de l'inscrit té una raó més petita que la superfície del segment esmentat respecte del cercle Ζ. Però la superfície de la figura circumscrita és més gran que la superfície del segment. La superfície de la figura inscrita, per tant, també és més gran que el cercle Ζ, cosa que és precisament impossible, ja que ha estat provat que la superfície esmentada de la figura és més petita que un cercle tal.

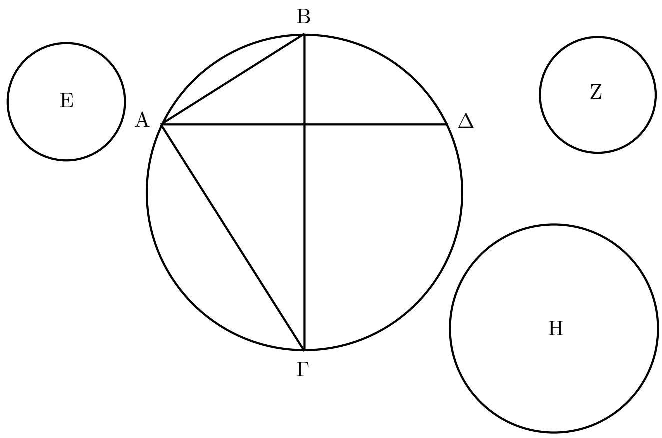
Heus aquí, al seu torn, el cercle més gran que la superfície. Hi estiguin circumscrit i inscrit polígons semblants, i que el circumscrit respecte de l'inscrit tingui una raó més petita que la que té el cercle respecte de la superfície del segment. No es dóna el cas, per tant, que la superfície és més gran que el cercle Ζ. Però fou provat que tampoc més petita. Per tant, igual.

⌈43⌉

I sempre que un segment sigui més gran que un hemisferi, d'una manera semblant, la superfície d'aquest <segment> és igual a un cercle el radi del qual haurà de ser igual a una recta conduïda des del vèrtex fins a la circumferència del cercle que és base del segment.

En efecte, heus aquí una esfera i en aquesta <esfera> un cercle màxim, i sigui considerada tallada amb un pla ortogonal per ΑΔ. ΑΒΔ sigui més petit que un hemisferi i un diàmetre ΒΓ ortogonal a ΑΔ. Estiguin unides ΒΑ, ΑΓ des de Β, Γ fins a Α. Heus aquí el cercle Ε el radi del qual és igual a ΑΒ, mentre que el cercle Ζ el radi del qual és igual a ΑΓ, i el cercle Η el radi del qual és igual a ΒΓ. Per

Η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς Ε, Ζ. ὁ δὲ Η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανειᾳ τῆς σφαίρας [ἐπειδήπερ ἑκατέρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλου], ὁ δὲ Ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΔ τμήματος [δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου]. λοιπὸς ἄρα ὁ Ζ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ ΑΓΔ τμήματος ἐπιφανειᾳ, ὃ δή ἐστι μεῖζον ἡμισφαιρίου.

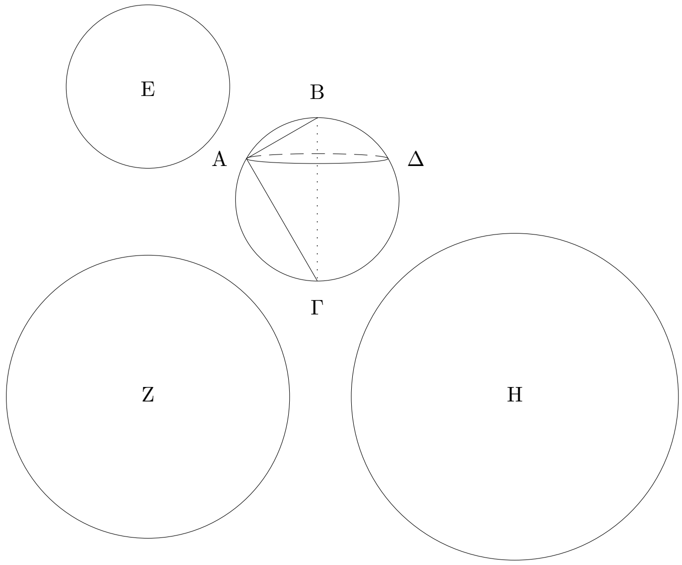


⌜μδ′⌝

Παντὶ τομεῖ σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔ καὶ κέντρον τὸ Γ καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν ΑΒΔ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ΒΓ· δεικτέον, ὅτι ὁ τομεὺς ὁ ΑΒΓΔ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου, καὶ κείσθω ὁ Θ κῶνος, οἷον εἴρηται. δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ Θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ Δ, Ε, μείζων δὲ ἡ Δ τῆς Ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ Δ πρὸς Ε ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον, καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ Ζ, Η, ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ Δ τῆς Ζ καὶ ἡ Ζ τῆς Η καὶ ἡ Η τῆς Ε, καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω tant, el cercle H també és igual als dos cercles E, Z. Però el cercle H és igual a la totalitat de la superfície de l'esfera [car cadascuna és precisament el quàdruple d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΓ], i el cercle E és igual a la superfície del segment ΑΒΔ [ja que això ha estat provat sobre el segment més petit que un hemisferi]. Per tant, el cercle restant, Z, és igual a la superfície del segment ΑΓΔ, que és més gran, doncs, que un hemisferi.

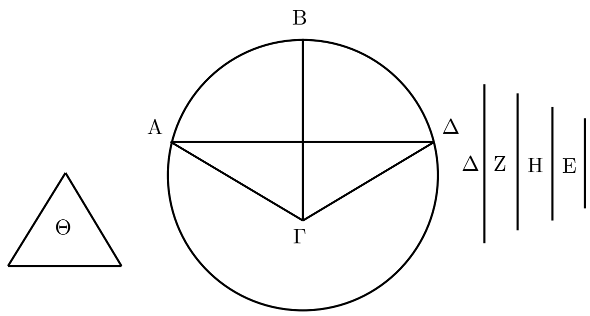


⌈44⌉

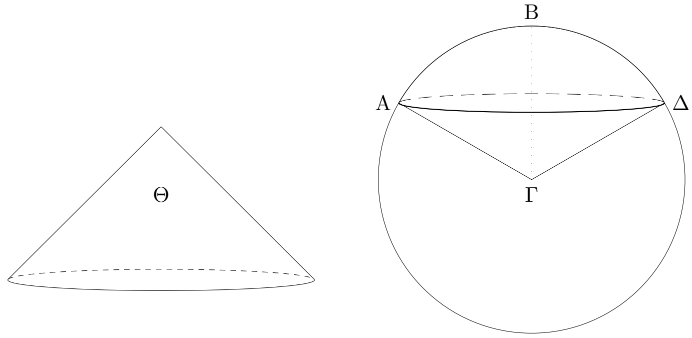
A tot sector d'esfera és igual un con que té base igual a la superfície del segment de l'esfera pel sector, mentre que altura igual al radi de l'esfera.

Heus aquí una esfera, en aquesta <esfera> un cercle màxim ΑΒΔ i centre Γ, i un con que té base el cercle igual a la superfície per la circumferència ΑΒΔ, mentre que altura igual a ΒΓ. S'ha de provar que el sector ΑΒΓΔ és igual al con esmentat.

En efecte, si no, heu-lo aquí més gran, el sector que el con. Estigui posat el con Θ tal com s'ha dit. Havent-hi, doncs, dues magnituds desiguals, el sector i el con Θ, estiguin trobades dues línies Δ, E, més gran Δ que E, i Δ respecte d'E tingui una raó més petita que el sector respecte del con. Estiguin preses dues línies Z, H, de tal manera que en la mateixa <quantitat>, Δ superi Z, Z superi H, πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, ὅπως ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ Γ σημεῖον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ζ. ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει ἢ τριπλάσιον τὸ εἰρημένον στερεόν σχῆμα τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ. ἡ δὲ Δ πρὸς Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε. ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον καὶ τὸ περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἐναλλάξ μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ μεῖζόν ἐστι τοῦ Θ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου [τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὗτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ Θ. βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας]. οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ Θ κώνου.



i H superi E. Al voltant del sector pla del cercle hi estigui circumscrit un polígon equilàter i d'un nombre parell d'angles, i n'hi estigui inscrit un de semblant a aqueix, de tal manera que el costat del circumscrit tingui una raó més petita respecte del de l'inscrit que la que té Δ respecte de Z. I, d'una manera semblant a les <proposicions> d'abans, un cop transportat un cercle al voltant, heus aquí que ens n'ha resultat dues figures compreses per superfícies còniques. Per tant, la circumscrita amb el con que té vèrtex el punt Γ, respecte de la inscrita amb el con, té una raó triple que la que té el costat del polígon circumscrit respecte del costat de l'inscrit. Tanmateix, el del circumscrit té una raó més petita que Δ respecte de Z. Per tant, la figura sòlida esmentada tindrà una raó més petita que el triple de la raó de Δ respecte de Z. Però Δ respecte d'E té una raó més gran que el triple de la raó de Δ respecte de Z. Per tant, la figura sòlida circumscrita al sector respecte de la figura inscrita té una raó més petita que la que té Δ respecte d'E. Però Δ respecte d'E té una raó més petita que el sector sòlid respecte del con Θ, i la figura circumscrita al sector respecte de la inscrita. Per alternança, la figura sòlida circumscrita és més gran que el segment i, per tant, la figura inscrita en el sector és més gran que el con Θ, cosa que és precisament impossible, ja que ha estat provat en <les proposicions> de més amunt que és més petit que un tal con [és a dir, el que té base un cercle el radi del qual és igual a una recta unida des del vèrtex del segment fins a la circumferència del cercle que és base del segment, mentre que altura el radi de l'esfera. Però aqueix és el con esmentat Θ, ja que té base un cercle igual a la superfície del segment (és a dir, al cercle esmentat) i altura igual al radi de l'esfera]. Per tant, no es dóna el cas que el sector sòlid és més gran que el con Θ.



ἔστω δὴ πάλιν ὁ Θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε μείζων αὐτῆς οὖσα ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα, καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ Ζ, Η, ὥστε εἶναι τὰς ὑπεροχάς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ [καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα]. ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα [ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον]. μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος· μείζων ἄρα ὁ Θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον [δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα]· ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ Θ κώνῳ.

Heus aquí, doncs, al seu torn, el con Θ més gran que el sector sòlid. Al seu torn, d'una manera semblant, Δ respecte d'E (essent més gran que aquesta <darrera>) tingui, doncs, una raó més petita que la que té el con respecte del sector. D'una manera semblant, estiguin preses Z, H de manera que els excessos siguin els mateixos, i el costat d'un polígon d'un nombre parell de costats circumscrit al voltant del sector pla, respecte del de l'inscrit tingui una raó més petita que la que té Δ respecte de Z [i heus aquí que ens n'ha resultat les figures sòlides al voltant del sector pla]. Així, doncs, d'una manera semblant, provarem que la figura sòlida circumscrita al voltant del sector respecte de la inscrita té una raó més petita que la que té Δ respecte d'E, i que la que té el con Θ respecte del sector [de manera que el sector respecte del con també té una raó més petita que el sòlid inscrit en el segment respecte del circumscrit]. Però el sector és més gran que la figura inscrita a aquest <con>. Per tant, el con Θ és més gran que la figura circumscrita, cosa que és precisament impossible [ja que ha estat provat això: que un tal con és més petit que la figura circumscrita al voltant del sector]. Per tant, el sector és igual al con Θ.

Liber secundus

⌈χαίρειν⌉

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν.

Πρότερον μὲν ἐπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι. συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέστειλα σοι τὰς ἀποδείξεις, ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ διότι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ, καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι, ὅσα δὲ δι᾽ ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι.

⌈Salutació⌉

Arquimedes a Dositeu, salut

Em vas encomanar, anteriorment, que redactés les demostracions dels problemes, els enunciats dels quals jo mateix vaig enviar a Conó. I succeeix que la major part d'aquestes són redactades mitjançant aquests teoremes, les demostracions dels quals ja et vaig enviar anteriorment: que la superfície de tota esfera és el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera; que a la superfície de tot segment d'esfera és igual un cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la circumferència de la base; que el cilindre de tota esfera que té base el cercle màxim dels cercles en l'esfera mentre que altura igual al diàmetre de l'esfera, tant ell mateix és una hemiòlia de la magnitud de l'esfera com la seva superfície, una hemiòlia de la superfície de l'esfera; i tot sector sòlid és igual a un con que té base el cercle igual a la superfície del segment de l'esfera en el sector mentre que altura igual al radi de l'esfera. Així, doncs, tots i cadascun dels teoremes i dels problemes descrits amb l'ajut d'aquests teoremes te'ls he enviat redactats en aquest mateix llibre, mentre que tots els trobats amb l'ajut d'alguna altra teoria, tant els teoremes i els problemes sobre espirals com sobre els conoides, procuraré enviar-te'ls ràpid.

⌈0⌉

Τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων τόδε. σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστιν δὲ τοῦτο φανερὸν δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων. τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστὶ καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

⌈α′⌉

Τὸ δεύτερον ἦν· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην.

ἔστω διδόμενος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α καὶ τῷ Α ἴση ἡ Β σφαῖρα, καὶ κείσθω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ ΓΖΔ, τῆς δὲ Β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΗΘ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΚΛ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς Β σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ [τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ὡς ἄρα ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΗΘ [ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, καὶ ὁ Κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ] ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστω τῷ ἀπὸ ΗΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΜΝ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΜΝ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, τουτέστιν ἡ ΗΘ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΜΝ καὶ ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΕΖ. καί ἐστιν δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΕΖ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΗΘ, ΜΝ. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΜΝ.

συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α· δεῖ δὴ τῷ Α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν.

ἔστω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ ΗΘ, ΜΝ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΗΘ, τὴν ΗΘ πρὸς τὴν ΜΝ καὶ τὴν ΜΝ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΗΘ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΚΛ ἴσος τῇ ΗΘ διαμέτρῳ. λέγω δή, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ.

⌈0⌉

I el primer problema era aquest: donada una esfera, trobar una àrea plana igual a la superfície de l'esfera. Però això és clar, provat a partir dels teoremes esmentats abans, ja que el quàdruple del cercle màxim dels cercles en l'esfera és tant una àrea plana com igual a la superfície de l'esfera.

⌈1⌉

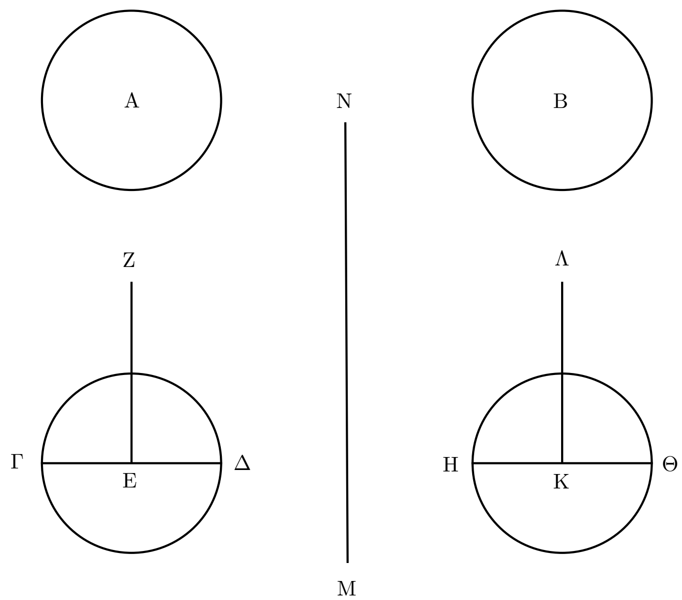
El segon era: donat un con o un cilindre, trobar una esfera igual al con o al cilindre.

Heus aquí un con o un cilindre A donat, i igual a A, l'esfera B. Estigui posat un cilindre ΓZΔ una hemiòlia del con o del cilindre A, i un cilindre una hemiòlia de l'esfera B base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre HΘ, i eix KΛ igual al diàmetre de l'esfera B. Per tant, el cilindre E és igual al cilindre K [i les bases dels cilindres iguals són inversament proporcionals a les altures]. Per tant, com el cercle E respecte del cercle K (és a dir, com el quadrat a partir de ΓΔ respecte del quadrat a partir d'HΘ), així KΛ respecte d'EZ. Però KΛ és igual a HΘ [ja que el cilindre una hemiòlia de l'esfera té l'eix igual al diàmetre de l'esfera, i K és un cercle màxim dels cercles en l'esfera]. Per tant, com el quadrat a partir de ΓΔ respecte del quadrat a partir d'HΘ, així HΘ respecte d'EZ. Heus aquí el rectangle comprès per ΓΔ, MN, igual al quadrat a partir d'HΘ. Per tant, com ΓΔ respecte de MN, així el quadrat a partir de ΓΔ respecte del quadrat a partir d'HΘ (és a dir, HΘ respecte d'EZ) i, per alternança, com ΓΔ respecte d'HΘ, així HΘ respecte de MN, i MN respecte d'EZ. I cadascuna de les dues rectes ΓΔ, EZ està donada. Per tant, donades dues rectes ΓΔ, EZ, dues mitjanes proporcionals són HΘ, MN. Per tant, cadascuna de les dues rectes HΘ, MN està donada.

El problema, doncs, el compondrem així: heus aquí, doncs, un con o un cilindre donat A. Cal, doncs, trobar un esfera igual al con o al cilindre A.

Heus aquí un cilindre una hemiòlia del con o del cilindre A. base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΓΔ, i eix EZ. Estiguin preses dues mitjanes proporcionals de ΓΔ, EZ, HΘ, MN, de manera que, com ΓΔ respecte d'HΘ, sigui HΘ respecte de MN, i MN respecte d'EZ. I sigui considerat un cilindre base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre HΘ, i eix KΛ és igual al diàmetre HΘ.

καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΗΘ, ἡ ΜΝ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἴση ἡ ΗΘ τῇ ΚΛ [ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΜΝ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, οὕτως ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον], ὡς ἄρα ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΕΖ [τῶν ἄρα Ε, Κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἴσος ἄρα ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ Κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ ΗΘ, ἡμιόλιός ἐστιν. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα, ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ΗΘ, τουτέστιν ἡ Β, ἴση ἐστὶ τῷ Α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

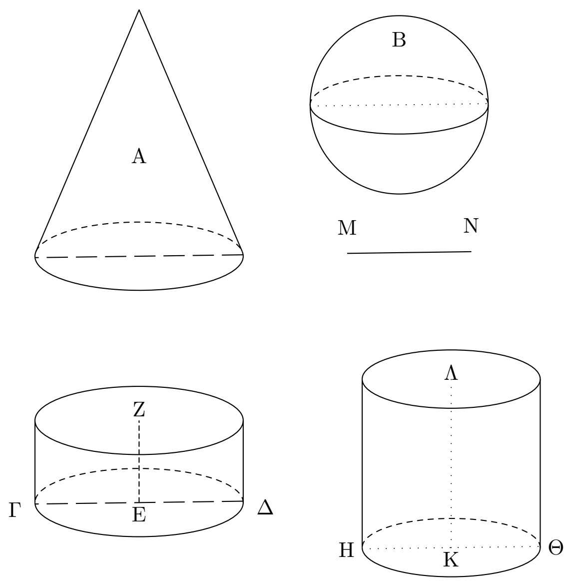


⌈β′⌉

Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμ-

Jo dic, doncs, que el cilindre E és igual al cilindre K.

I, atès que, com ΓΔ respecte d'ΗΘ, és MN respecte d'EZ i, per alternança, també ΗΘ igual a ΚΛ [per tant, com ΓΔ respecte de MN (és a dir, com el quadrat a partir de ΓΔ respecte del quadrat a partir d'ΗΘ), així el cercle E respecte del cercle K], per tant, com el cercle E respecte del cercle K, així ΚΛ respecte d'EZ [per tant, les bases dels cilindres E, K són inversament proporcionals a les altures]. Per tant, el cilindre E és igual al cilindre K. Però el cilindre K és una hemiòlia de l'esfera un diàmetre de la qual és ΗΘ. I, per tant, l'esfera el diàmetre de la qual és igual a ΗΘ (és a dir, B) és igual al con o al cilindre A.



[2]

A tot segment d'esfera és igual un con que té base la mateixa que el segment mentre que altura una recta que respecte de l'altura del segment té la mateixa raó φότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα τῷ διὰ τῆς ΒΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΓΕ, καὶ πάλιν πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΓ, ΓΕ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κορυφὰς ἔχοντες τὰ Κ, Δ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΔΖ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΒΚΖ τῷ κατὰ τὸ Α σημεῖον.

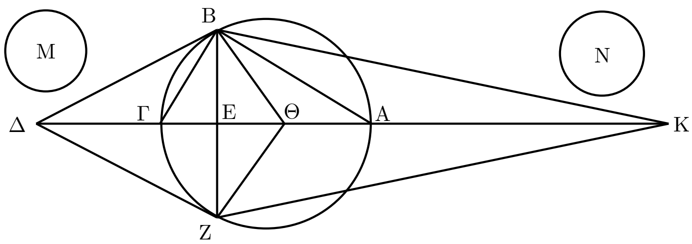
ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΘ, ΘΖ, καὶ νοείσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἔστω κῶνος ὁ Μ βάσιν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΓΖ τμήματος τῆς σφαίρας, τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔσται δὴ ὁ Μ κῶνος ἴσος τῷ ΒΓΘΖ στερεῷ τομεῖ· [τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ]. ἐπεὶ δέ ἐστιν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς ΑΕ, διελόντι ἔσται, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, τουτέστιν ἡ ΓΘ πρὸς ΑΕ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ ἐστιν, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΘΔ πρὸς ΘΓ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ· ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς ΓΘ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΓΒ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου, ἡ δὲ ΒΕ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλου· ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ, ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον. καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΓ τῷ ἄξονι τοῦ Μ κώνου. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ Μ κώνου, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον· ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν Μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ [τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως.] [ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Μ κώνου, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΘ·] [ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ᾽ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ, ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ]. ἀλλ᾽ ὁ Μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΓΖΘ στερεῷ τομεῖ. καὶ ὁ ΒΓΖΘ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ, λοιπὸς ἄρα ὁ ΒΔΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΖΓ τμήματι τῆς σφαίρας.

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ ΒΚΖ κῶνος ἴσος τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΓΕ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, διελόντι ἄρα, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΘΑ καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ. ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ Ν ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΒ. ἴσος ἄρα ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΖ τμήματος. καὶ que, tant el radi de l'esfera com l'altura de la resta del segment, conjuntament, respecte de l'altura de la resta del segment.

Heus aquí una esfera en la qual hi ha un cercle màxim un diàmetre del qual és ΑΓ. Estigui tallada l'esfera amb un pla per ΒΖ, ortogonal a ΑΓ. Heus aquí el centre Θ. I com ΘΑ, ΑΕ, conjuntament, respecte d'ΑΕ, així estigui feta ΔΕ respecte de ΓΕ. I, al seu torn, com ΘΓ, ΓΕ, conjuntament, respecte de ΓΕ, així estigui feta ΚΕ respecte d'ΕΑ. Estiguin aixecats uns cons des d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ, que tenen vèrtexs els punts Κ, Δ. Jo dic que el con ΒΔΖ és igual al segment de l'esfera per Γ, mentre que ΒΚΖ, al segment pel punt Α.

En efecte, estiguin unides ΒΘ, ΘΖ, i sigui considerat un con que té base un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ mentre que vèrtex el punt Θ. Heus aquí un con Μ que té base un cercle igual a la superfície del segment de l'esfera ΒΓΖ (és a dir, el radi del qual és igual a ΒΓ), i altura igual al radi de l'esfera. Serà, doncs, el con Μ igual al sector sòlid ΒΓΘΖ [ja que això ha estat provat en el llibre primer.] Però, atès que, com ΔΕ respecte d'ΕΓ, així és ΘΑ, ΑΕ, conjuntament, respecte d'ΑΕ, per divisió, com ΓΔ respecte de ΓΕ, així serà ΘΑ respecte d'ΑΕ (és a dir, ΓΘ respecte d'ΑΕ) i, per alternança, com ΔΓ respecte de ΓΘ, així és ΓΕ respecte d'ΕΑ i, per composició, com ΘΔ respecte de ΘΓ, ΓΑ respecte d'ΑΕ (és a dir, el quadrat a partir de ΓΒ respecte del quadrat a partir de ΒΕ), per tant, com ΔΘ respecte de ΓΘ, el quadrat a partir de ΓΒ respecte del quadrat a partir de ΒΕ. Però ΓΒ és igual al radi del cercle Μ, i ΒΕ és radi d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ. Per tant, com ΔΘ respecte de ΘΓ, el cercle Μ respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ, i ΘΓ és igual a l'eix del con Μ. Per tant, com ΔΘ respecte de l'eix del con Μ, així el cercle Μ respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ. Per tant, el con que té base el cercle Μ i mentre que altura el radi de l'esfera, és igual al rombe sòlid ΒΔΖΘ [ja que això ha estat provat en els lemes del primer llibre. O així: atès que, com ΔΘ respecte de l'altura del con Μ, així és el cercle Μ respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ, per tant, el con Μ és igual al con base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ mentre que altura, ΔΘ, ja que les seves bases són inversament proporcionals a les altures. Tanmateix, el con que té base un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ mentre que altura ΔΘ, és igual al rombe sòlid ΒΔΖΘ]. Tanmateix, el con Μ és igual al sector sòlid ΒΓΖΘ. Per tant, el sector sòlid ΒΓΖΘ és igual al rombe sòlid ΒΔΖΘ. Extreient el con comú base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre ΒΖ mentre que altura, ΕΘ, per tant, el con restant ΒΔΖ és igual al segment de l'esfera ΒΖΓ.

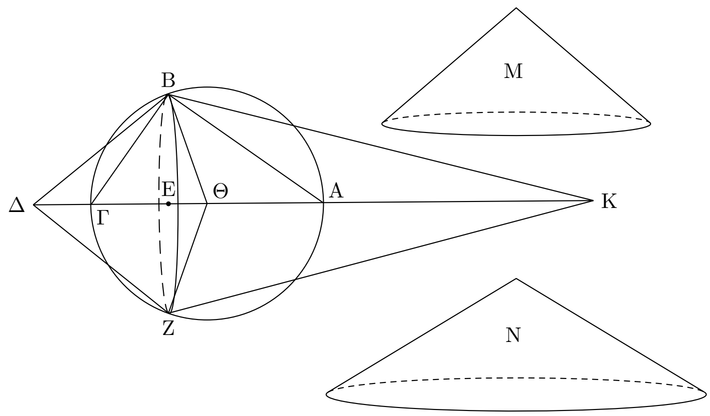
I, d'una manera semblant, també serà provat el con ΒΚΖ igual al segment de l'esfera ΒΑΖ. En efecte, atès que, com ΘΓΕ, conjuntament, respecte de ΓΕ, així és ΚΕ respecte d'ΕΑ, per tant, per divisió, com ΚΑ respecte d'ΑΕ, així ΘΓ respecte de ΓΕ. Però ΘΓ és igual a ΘΑ i, per tant, per alternança, com ΚΑ respecte d'ΑΘ, així és ΑΕ respecte d'ΕΓ. De manera que també, per composició, com ΚΘ respecte de ΘΑ, ΑΓ respecte de ΓΕ (és a dir, el quadrat a partir de ΒΑ respecte del quadrat νοείσθω [ὁ] κῶνος ὁ Ν ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ ΒΘΖΑ στερεῷ τομεῖ. [τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται]. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλου, τουτέστιν ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ἴση δὲ ἡ ΑΘ τῷ ὕψει τοῦ Ν κώνου, ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου, οὕτως ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος, τουτέστιν ὁ ΒΘΖΑ τομεύς, τῷ ΒΘΖΚ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ. ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΖ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶν τῷ ΒΖΚ κώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



⌈ΠΟΡΙΣΜΑ⌉

Καὶ φανερόν, ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, ὡς συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος.

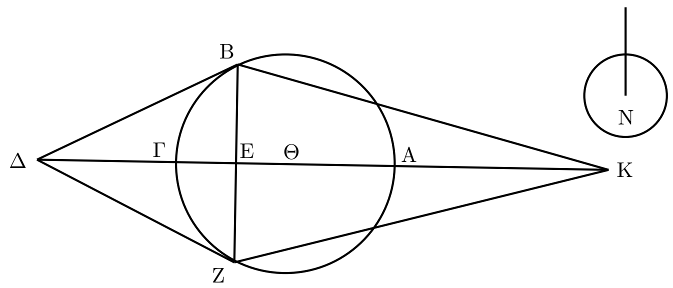
a partir de BE). Al seu torn, doncs, estigui posat un cercle N que tingui igual el radi a AB. Per tant, és igual a la superfície del segment BAZ. I sigui considerat [el] con N que tingui igual l'altura al radi de l'esfera. Per tant, és igual al sector sòlid BΘZA [ja que això ha estat provat en el primer llibre.] I, atès que fou provat que, com KΘ respecte de ΘA, així el quadrat a partir d'AB respecte del quadrat a partir de BE (és a dir, el quadrat a partir del radi del cercle N respecte del quadrat a partir del radi d'un cercle al voltant d'un diàmetre BZ, és a dir, el cercle N respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre BZ), però AΘ és igual a l'altura del con N, per tant, com KΘ respecte de l'altura del con N, així el con N respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre BZ. Per tant, el con N (és a dir, el sector BΘZA) és igual a la figura BΘZK. Hi estigui juxtaposat un con comú base del qual és un cercle al voltant de BZ mentre que altura, EΘ. Per tant, la totalitat del segment de l'esfera ABZ és igual al con BZK, cosa que precisament calia provar.



⌈Porisma⌉

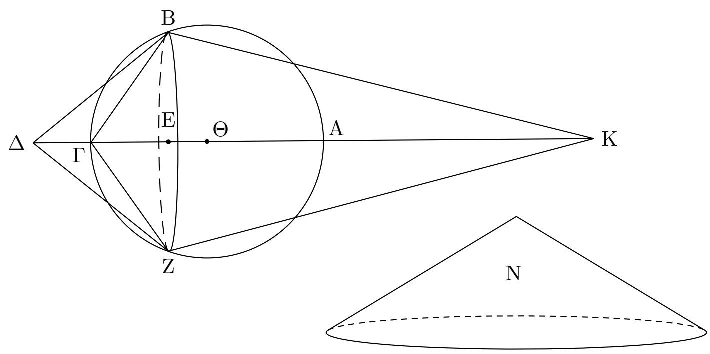
I és clar que, en general, un segment d'esfera respecte d'un con que té base la mateixa que el segment mentre que altura igual, resulta com tant el radi de l'esfera com la perpendicular del segment restant, conjuntament, respecte de la perpenὡς γὰρ ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ὁ ΔΖΒ κῶνος, τουτέστι τὸ ΒΓΖ τμῆμα, πρὸς τὸν ΒΓΖ κῶνον.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὅτι καὶ ὁ ΚΒΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας.



ἔστω γὰρ ὁ Ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων [τὴν] ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ [ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστι τετραπλάσιος, ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ]. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς ΑΕ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, συναμφότερος ἡ ΘΓΕ πρὸς ΓΕ, διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΓΘ, τουτέστι πρὸς ΘΑ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ. καὶ συνθέντι ἴση δὲ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ὅλη ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ ἐστιν, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΔΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΘΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΘΚ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΓΔ, ἐναλλάξ· ὡς δὲ ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, ἐδείχθη ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΘΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΚΘΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΚΔ, ΑΘ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΔ, ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς ΑΘ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΓ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ dicular del segment restant, ja que, com ΔE respecte d'EΓ, així el con ΔZB (és a dir, el segment BΓZ) respecte del con BΓZ.

Suposant el mateix, <jo dic> que també el con KBZ és igual al segment de l'esfera BAZ.



En efecte, heus aquí el con N, que té base igual a la superfície de l'esfera mentre que altura el radi de l'esfera. Per tant, el con és igual a l'esfera [ja que ha estat provat que l'esfera és el quàdruple del con que té base el cercle màxim mentre que altura el radi. Tanmateix, clarament el con N és també el quàdruple d'aquest mateix <con>, atès que la base ho és de la base i la superfície de l'esfera ho és del cercle màxim dels seus cercles]. I, atès que, com ΘA, AE, conjuntament, respecte d'AE, és ΔE respecte d'EΓ, per divisió i per alternança, com ΘΓ respecte de ΓΔ, AE respecte d'EΓ. Al seu torn, atès que, com KE respecte d'EA, és ΘΓE, conjuntament, respecte de ΓE, per divisió i per alternança, com KA respecte de ΓΘ (és a dir, respecte de ΘA), així AE respecte d'EΓ (és a dir, ΘΓ respecte de ΓΔ). I per composició; però AΘ és igual a ΘΓ. Per tant, com KΘ respecte de ΘΓ, ΘΔ respecte de ΔΓ, també és la totalitat de KΔ respecte de ΔΘ, com ΔΘ respecte de ΔΓ (és a dir, com KΘ respecte de ΘA). Per tant, el rectangle ΔK, ΘA és igual al comprès per ΔΘK. Al seu torn, atès que, com KΘ respecte de ΘΓ, és ΘΔ respecte de ΓΔ, per alternança. Però com ΘΓ respecte de ΓΔ, fou provat AE respecte d'EΓ. Per tant, com KΘ respecte de ΘΔ, AE respecte d'EΓ. I, per tant, com el quadrat a partir de KΔ respecte del rectangle KΘΔ, el quadrat a partir τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τουτέστιν ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, τῷ ΒΔΖΚ στερεῷ ῥόμβῳ [ἢ οὕτως· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΚ· ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ᾽ οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΚΖΔ στερεῷ ῥόμβῳ· καὶ ὁ Ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, ἴση ἐστὶ τῷ ΒΖΚΔ στερεῷ ῥόμβῳ]. ὧν ὁ ΒΔΖ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ ΒΓΖ τμήματι τῆς σφαίρας· λοιπὸς ἄρα ὁ ΒΚΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας.

⌈γ′⌉

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ ΑΔΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν, καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ ΑΔΒΕ κύκλῳ τομὴν τὴν ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΔ.

ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος, ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΔ, τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΔΒ, ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ δοθείς· ὥστε δοθέν ἐστι τὸ Γ σημεῖον. καί ἐστι τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ ἐπίπεδον.

συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔΕ καὶ διάμετρος ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Ζ πρὸς Η, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΓ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὴν Ζ πρὸς Η, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ Θ, Κ, ὁ μὲν Θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΔ, ὁ δὲ Κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ ΔΒ. ἔστιν ἄρα ὁ μὲν Θ κύκλος ἴσος τῇ d'AΓ respecte del comprès per AEΓ. Però el comprès per KΘΔ fou provat igual al KΔ, AΘ. Per tant, com el quadrat a partir de KΔ respecte del rectangle comprès per KΔ, AΘ (és a dir, KΔ respecte d'AΘ), el quadrat a partir d'AΓ respecte del rectangle AEΓ (és a dir, respecte del quadrat a partir d'EB). I AΓ és igual al radi del cercle N. Per tant, com el quadrat a partir del radi del cercle N respecte del quadrat a partir de BE (és a dir, el cercle N respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre BZ), així KΔ respecte d'AΘ (és a dir, KΔ respecte de l'altura del con N). Per tant, el con N (és a dir, l'esfera) és igual al rombe sòlid BΔZK. [o així: per tant, com el cercle N respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre BZ, així és ΔK respecte de l'altura del con N. Per tant, el con N és igual al con base del qual és un cercle al voltant d'un diàmetre BZ i altura, ΔK, ja que les seves bases són inversament proporcionals a les altures. Tanmateix, aqueix con és igual al rombe sòlid BKZΔ. Per tant, el con N (és a dir, l'esfera) és igual al rombe sòlid BZKΔ]. D'aquests, el con BΔZ fou provat igual al segment de l'esfera BΓZ. Per tant, el con restant BKZ és igual al segment de l'esfera BAZ.

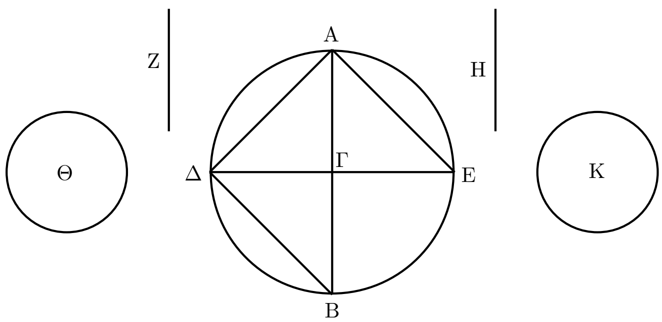
⌈3⌉

El tercer problema era aquest: tallar una esfera donada amb un pla de tal manera que les superfícies dels segments, l'una respecte de l'altra, tinguin la mateixa raó que la donada.

Heus aquí que n'ha resultat, i heus aquí un cercle màxim de l'esfera AΔBE i un diàmetre seu AB. Estigui allargat un pla ortogonal respecte d'AB, el pla en el cercle AΔBE faci una secció ΔE i estiguin unides AΔ, BΔ.

Així, doncs, atès que hi ha una raó de la superfície del segment ΔAE respecte de la superfície del segment ΔBE, tanmateix, a la superfície del segment ΔAE és igual un cercle el radi del qual és igual a AΔ, però a la superfície del segment ΔBE és igual un cercle el radi del qual és igual a ΔB i, com els cercles esmentats, l'un respecte de l'altre, així el quadrat a partir d'AΔ respecte del quadrat a partir de ΔB (és a dir, AΓ respecte de ΓB), per tant, una raó d'AΓ respecte de ΓB està donada, de manera que el punt Γ està donat. I ΔE és ortogonal a AB. Per tant, el pla per ΔE també <donat> en posició.

Serà sintetitzat, doncs, així: heus aquí una esfera un cercle màxim de la qual ABΔE, i un diàmetre AB. Heus aquí una raó donada, la de Z respecte d'H i estigui tallada AB per Γ de manera que, com AΓ respecte de BΓ, així sigui Z respecte d'H. Estigui tallada l'esfera amb un pla per Γ ortogonal a la recta AB i heus aquí la secció comuna ΔE. Estiguin unides AΔ, ΔB, i estiguin disposats dos cercles Θ, K, tenint Θ el radi igual a AΔ, mentre que tenint K el radi igual a ΔB. És, ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος, ὁ δὲ Κ τοῦ ΔΒΕ τμήματος· τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ καὶ κάθετος ἡ ΓΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, τουτέστιν ἡ Ζ πρὸς Η, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τουτέστιν ὁ Θ κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος τῆς σφαίρας.

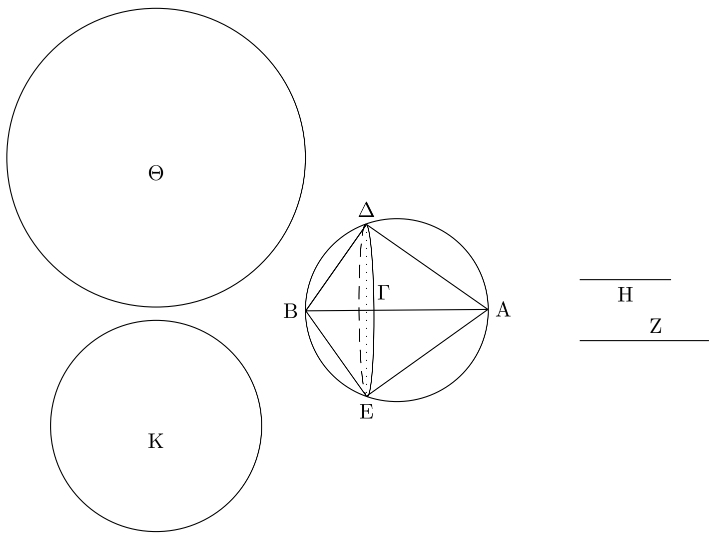


⌈δʹ⌉

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ ΑΒΓΔ. δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα.

τετμήσθω διὰ τῆς ΑΓ ἐπιπέδῳ. λόγος ἄρα τοῦ ΑΔΓ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ καὶ διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ per tant, el cercle Θ igual a la superfície del segment ΔAE, mentre que el K, a la superfície del segment ΔBE, ja que això ha estat provat abans en el primer llibre. I, atès que l'angle AΔB és ortogonal i ΓΔ, una perpendicular, com AΓ respecte de ΓB (és a dir, Z respecte d'H) és el quadrat a partir d'AΔ respecte del quadrat a partir de ΔB (és a dir, el quadrat a partir del radi del cercle Θ respecte del quadrat a partir del radi del cercle K; és a dir, el cercle Θ respecte del cercle K; és a dir, la superfície del segment ΔAE respecte de la superfície del segment de l'esfera ΔBE).



[4]

Tallar una esfera donada de manera que els segments de l'esfera, l'un respecte de l'altre, tinguin la mateixa raó que la donada.

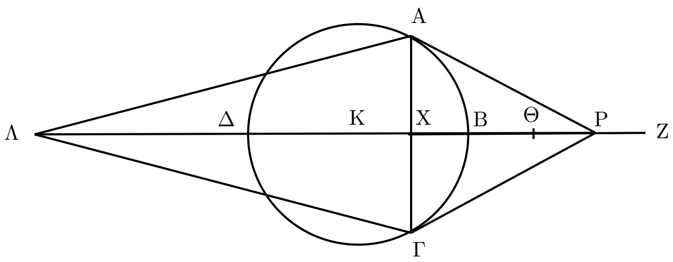
Heus aquí una esfera donada ABΓΔ. Cal tallar-la, doncs, amb un pla, de manera que els segments de l'esfera, l'un respecte de l'altre, tinguin una raó donada.

Estigui tallada amb un pla per AΓ. Per tant, una raó del segment de l'esfera AΔΓ respecte del segment de l'esfera ABΓ està donada. Estigui tallada l'esfera pel centre, i heus aquí la secció, un cercle màxim ABΓΔ, el centre K, i un diàmetre πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΚΔΧ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΡΧ πρὸς ΧΒ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν ΑΛΓ κῶνος τῷ ΑΔΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΑΡΓ τῷ ΑΒΓ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΛΓ κώνου πρὸς τὸν ΑΡΓ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ [ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλον]. λόγος ἄρα καὶ τῆς ΛΧ πρὸς ΧΡ δοθείς. καὶ διὰ ταὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΚΔ, ἡ ΚΒ πρὸς ΒΡ καὶ ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΡΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΚΔ πρὸς ΛΔ, συνθέντι, ὡς ἡ ΡΚ πρὸς ΚΒ, τουτέστι πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ὅλην τὴν ΚΛ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ. ὡς ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΚ, οὕτως ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ, ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΧ [καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ]. [πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΧ πρὸς ΔΧ, συναμφότερος ἡ ΚΒ, ΒΧ πρὸς ΒΧ, διελόντι, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΧ]. καὶ κείσθω τῇ ΚΒ ἴση ἡ ΒΖ· ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ Ρ πεσεῖται, δῆλον [καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΧ· ὥστε καί, ὡς ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ]. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς ΔΛ πρὸς ΛΧ δοθείς, καὶ τῆς ΡΛ ἄρα πρὸς ΛΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, ὡς δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ, ὁ ἄρα τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. πεποιήσθω δέ, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΧ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ· λόγος δὲ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΒ πρὸς ΖΘ δοθείς· δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΘ. καὶ ὁ τῆς ΒΖ ἄρα λόγος πρὸς ΖΘ συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. ἀλλ᾽ ὁ ΒΖ πρὸς ΖΘ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ καὶ τοῦ τῆς ΖΧ πρὸς ΖΘ [κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ]· λοιπὸν ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τουτέστι δοθέν, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, οὕτως ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς δοθέν. καί ἐστιν δοθεῖσα ἡ ΖΔ εὐθεῖα. εὐθεῖαν ἄρα δοθεῖσαν τὴν ΔΖ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς δοθεῖσαν [τὴν ΖΘ], οὕτως τὸ δοθὲν [τὸ ἀπὸ ΒΔ] πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ.

τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν, προστιθεμένων δὲ τῶν προβλη-

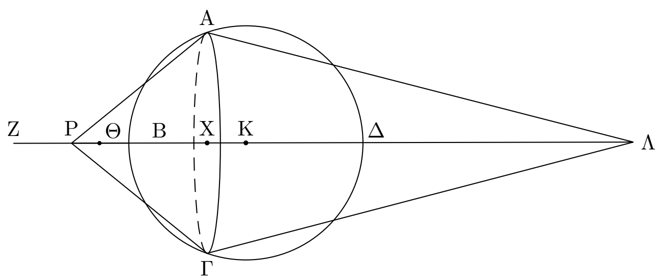
ΔB. I com KΔX, conjuntament, respecte de ΔX, així estigui feta PX respecte de XB, mentre que, com KBX, conjuntament, respecte de BX, així ΛX respecte de XΔ. Estiguin unides AΛ, ΛΓ, AP, PΓ. Per tant, el con AΛΓ és igual al segment de l'esfera AΔΓ, mentre que el con APΓ, al segment ABΓ. Per tant, una raó del con AΛΓ respecte del con APΓ també està donada. Però, com el con respecte del con, així ΛX respecte de XP [atès que tenen precisament la mateixa base: un cercle al voltant d'un diàmetre AΓ]. Per tant, una raó de ΛX respecte de XP també està donada. I pels mateixos <arguments> que abans, per la construcció, com ΛΔ respecte de KΔ, KB respecte de BP i ΔX respecte de XB. I, atès que, com PB respecte de BK, és KΔ respecte de ΛΔ, per composició, com PK respecte de KB (és a dir, respecte de KΔ), així KΛ respecte de ΛΔ. Per tant, la totalitat de PΛ respecte de la totalitat de KΛ és com KΛ respecte de ΛΔ. Per tant, el rectangle comprès per PΛΔ és igual al quadrat a partir de ΛK. Per tant, com PΛ respecte de ΛΔ, el quadrat a partir de KΛ respecte del quadrat a partir de ΛΔ. I, atès que, com ΛΔ respecte de ΔK, així és ΔX respecte de XB, per inversió i per composició, com KΛ respecte de ΛΔ, així serà BΔ respecte de ΔX [i, per tant, com el quadrat a partir de KΛ respecte del quadrat a partir de ΛΔ, així el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX. Al seu torn, atès que, com ΛX respecte de ΔX, és KB, BX, conjuntament, respecte de BX, per divisió, com ΛΔ respecte de ΔX, així KB respecte de BX]. Estigui posat BZ igual a KB (ja que és evident que caurà més enllà de P) [i, com ΛΔ respecte de ΔX, així serà ZB respecte de BX, de manera que, com ΔΛ respecte de ΛX, també BZ respecte de ZX]. Però, atès que una raó de ΔΛ respecte de ΛX està donada, també, per tant, una raó PΛ respecte de ΛX està donada. Així, doncs, atès que la raó de PΛ respecte de ΛX s'ha conjuntat a partir de la raó que té PΛ respecte de ΛΔ, i ΔΛ respecte de ΛX, tanmateix, com PΛ respecte de ΛΔ, el quadrat a partir de ΔB respecte del quadrat a partir de ΔX, mentre que, com ΔΛ respecte de ΛX, així BZ respecte de ZX, per tant, una raó de PΛ respecte de ΛX s'ha conjuntat tant a partir de la raó que té el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX, com de BZ respecte de ZX. Però com PΛ respecte de ΛX, estigui feta BZ respecte de ZΘ. Però una raó de PΛ respecte de ΛX està donada. Per tant, una raó de ZB respecte de ZΘ també està donada. Però BZ està donada, ja que és igual al radi. Per tant, ZΘ també està donada. Per tant, la raó de BZ respecte de ZΘ s'ha conjuntat tant a partir de la raó que té el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX com de BZ respecte de ZX. Tanmateix, la raó BZ respecte de ZΘ s'ha conjuntat tant a partir de la raó de BZ respecte de ZX com a partir de la raó de ZX respecte de ZΘ [estigui extreta una raó comuna, la de BZ respecte de ZX]. Per tant, la resta és: com el quadrat a partir de BΔ (és a dir, una magnitud donada) respecte del quadrat a partir de ΔX, així XZ respecte de ZΘ (és a dir, respecte d'una magnitud donada). I la recta ZΔ està donada. Per tant, cal tallar una recta donada ΔZ per X i, com XZ respecte de [la recta ZΘ] donada, així fer el [quadrat a partir de BΔ] donat respecte del quadrat a partir de ΔX.

Això, dit així, d'una manera simple, té una condició, mentre que juxtaposant les μάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων [τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ μείζονα τῆς ΖΘ τὴν ΖΒ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν] οὐκ ἔχει διορισμόν. καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΔ, ΒΖ καὶ διπλασίας οὔσης τῆς ΒΔ τῆς ΒΖ καὶ σημείου ἐπὶ τῆς ΒΖ τοῦ Θ τεμεῖν τὴν ΔΒ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, τὴν ΧΖ πρὸς ΖΘ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.



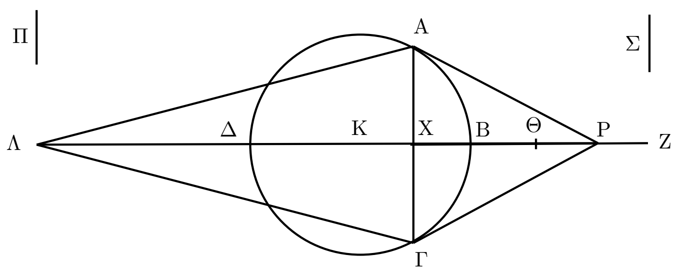
συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Π πρὸς Σ μείζονος πρὸς ἐλάσσονα, καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τομὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, καὶ τῇ ΚΒ ἴση κείσθω ἡ ΒΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ κατὰ τὸ Θ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΘΖ πρὸς ΘΒ, τὴν Π πρὸς Σ, καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Χ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς ΘΖ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ διὰ τοῦ Χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τεμεῖ τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι, ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν Π πρὸς Σ.

πεποιήσθω γάρ, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΔΧ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΚΔΧ πρὸς ΧΔ, ἡ ΡΧ πρὸς ΧΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ· ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευήν, ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ, καὶ ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΧ· ὥστε καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ ἐστιν ἴσον [ἔστιν, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ], ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, τουτέστιν ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΚΒ τῇ ΒΖ, ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΖΧ πρὸς ΧΒ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΧΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΧΛ πρὸς ΛΔ. ὥστε καί, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, consideracions que s'han fet paleses aquí [és a dir, tant que ΔB sigui el doble de BZ com que ZB més gran que ZΘ, per l'anàlisi] no té cap condició. I el problema serà d'aquest tipus: donades dues rectes BΔ, BZ, essent BΔ doble de BZ i el punt Θ sobre BZ, tallar ΔB per X i, com el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX, fer XZ respecte de ZΘ. Cadascun d'aqueixos problemes serà analitzat i sintetitzat al final.



El problema, doncs, el serà sintetitzat així: heus aquí una raó donada, la de Π respecte de Σ (més gran respecte de més petita). Estigui donada una certa esfera, i estigui tallada amb un pla pel centre i heus aquí una secció, el cercle ΑΒΓΔ, un diàmetre heu-lo aquí BΔ, i el centre K. Estigui posada BZ igual a KB i estigui tallada BZ per Θ, de manera que, com ΘZ respecte de ΘB, sigui Π respecte de Σ i, a més, estigui tallada BΔ per X, de manera que, com XZ respecte de ΘZ, sigui el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX. Estigui allargat el pla per X ortogonal respecte de BΔ. Jo dic que aqueix pla talla l'esfera de manera que, com el segment més gran respecte del més petit, sigui Π respecte de Σ.

En efecte, com KBX, conjuntament, respecte de BX, així estigui feta ΛX respecte de ΔX, mentre que, com KΔX, conjuntament, respecte de XΔ, PX respecte de XB. I estiguin unides ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ. Tal com vam provar en l'anàlisi, per la construcció, el rectangle ΡΛΔ serà, doncs, igual al quadrat a partir de ΛK i, com KΛ respecte de ΛΔ, BΔ respecte de ΔX, de manera que, com el quadrat a partir de KΛ respecte del quadrat a partir de ΛΔ, també el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX. I, atès que el rectangle comprès per ΡΛΔ és igual al quadrat a partir de ΛK [com ΡΛ respecte de ΛΔ, és el quadrat a partir de ΛK respecte del quadrat a partir de ΛΔ], per tant, com ΡΛ respecte de ΛΔ, també serà el quadrat a partir de BΔ respecte del quadrat a partir de ΔX (és a dir, XZ respecte de ZΘ). I, atès que, com KBX, conjuntament, respecte de BX, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ. ὡς δὲ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ Π πρὸς Σ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ, τουτέστιν ὁ ΑΓΛ κῶνος πρὸς τὸν ΑΡΓ κῶνον, τουτέστι τὸ ΑΔΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας, οὕτως ἡ Π πρὸς Σ.

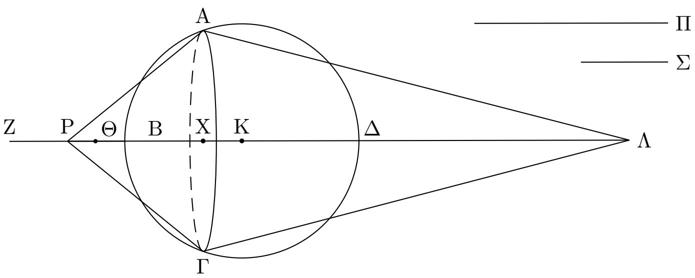


⌈ε′⌉

Τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

ἔστω τὰ δύο δοθέντα τμήματα σφαίρας τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τοῦ δὲ ΕΖΗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ Η σημεῖον. δεῖ δὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται τῷ μὲν ΑΒΓ τμήματι ἴσον, τῷ δὲ ΕΖΗ ὅμοιον.

εὑρήσθω καὶ ἔστω τὸ ΘΚΛ, καὶ ἔστω αὐτοῦ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον· ἔστωσαν δὴ καὶ κύκλοι ἐν ταῖς σφαίραις οἱ ΑΝΒΓ, ΘΞΚΛ, ΕΟΖΗ, διάμετροι δὲ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν τῶν τμημάτων αἱ ΓΝ, així és ΛΧ respecte de ΧΔ, i ΚΒ és igual a ΒΖ, per tant, com ΖΧ respecte de ΧΒ, així també serà ΛΧ respecte de ΧΔ. Per conversió, com ΧΖ respecte de ΖΒ, així ΧΛ respecte de ΛΔ, de manera que, com ΛΔ respecte de ΛΧ, així també ΒΖ respecte de ΖΧ. I, atès que, com ΡΛ respecte de ΛΔ, així és ΧΖ respecte de ΖΘ, però com ΔΛ respecte de ΛΧ, així ΒΖ respecte de ΖΧ, per igualtat en la proporció pertorbada, com ΡΛ respecte de ΛΧ, així també ΒΖ respecte de ΖΘ. I, per tant, com ΛΧ respecte de ΧΡ, així ΖΘ respecte de ΘΒ. Però com ΖΘ respecte de ΘΒ, així Π respecte de Σ. Per tant, com ΛΧ respecte de ΧΡ (és a dir, el con ΑΓΛ respecte del con ΑΡΓ; és a dir, el segment de l'esfera ΑΔΓ respecte del segment de l'esfera ΑΒΓ), així també Π respecte de Σ.



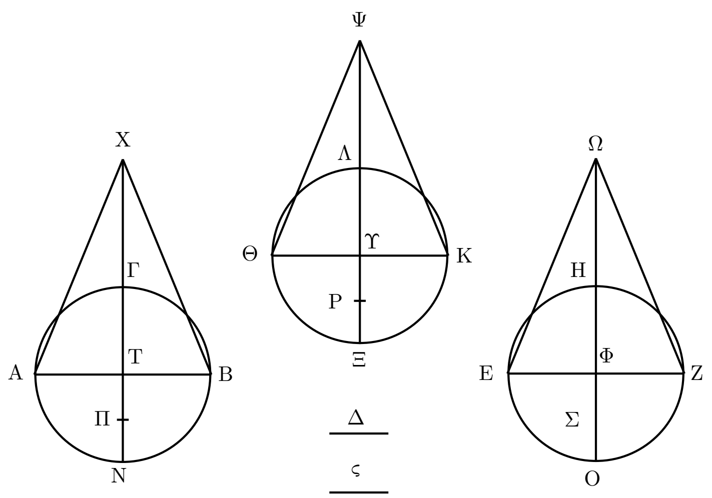
[5]

Erigir <un segment d'esfera> semblant a un segment d'esfera donat i, ell mateix, igual a un altre segment donat.

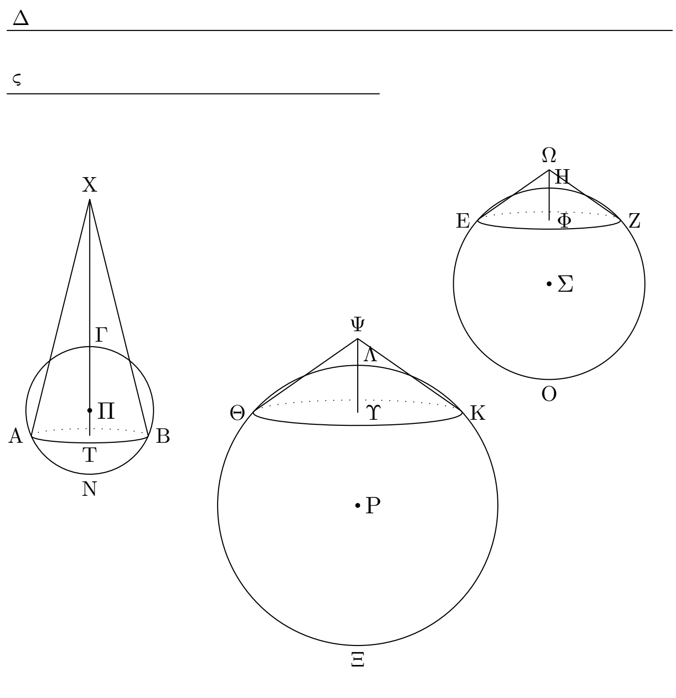
Heus aquí dos segments d'esfera donats ΑΒΓ, ΕΖΗ, i heus aquí la base del segment ΑΒΓ, un cercle al voltant d'un diàmetre ΑΒ i el vèrtex, el punt Γ, mentre que la base d'ΕΖΗ, un cercle al voltant d'un diàmetre ΕΖ i el vèrtex, el punt Η. Cal, doncs, trobar un segment d'esfera que serà igual al segment ΑΒΓ, mentre que semblant a l'ΕΖΗ.

Estigui trobat i heu-lo aquí, ΑΚΛ. Heus aquí la seva base, un cercle al voltant d'un diàmetre ΘΚ, mentre que vèrtex, el punt Λ. Heus aquí, doncs, també, uns cercles en les esferes, ΑΝΒΓ, ΘΞΚΛ, ΕΟΖΗ, i els seus diàmetres ΓΝ, ΛΞ, ΗΟ or-

ΛΞ, ΗΟ, καὶ ἔστω κέντρα τὰ Π, Ρ, Σ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΠΝ, ΝΤ πρὸς τὴν ΝΤ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς ΤΓ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΡΞ, ΞΥ πρὸς ΞΥ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΥΛ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΣΟ, ΟΦ πρὸς ΟΦ, οὕτως ἡ ΩΦ πρὸς ΦΗ, καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΘΚ, ΕΖ κύκλοι, κορυφαὶ δὲ τὰ Χ, Ψ, Ω σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν ΑΒΧ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΨΘΚ τῷ ΘΚΛ, ὁ δὲ ΕΩΖ τῷ ΕΗΖ τοῦτο γὰρ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ ΘΚΛ τμήματι, ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΑΧΒ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ [τῶν δὲ ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΖΗ τμῆμα τῷ ΘΚΛ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ΕΖΩ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ [τοῦτο γὰρ δειχθήσεται].

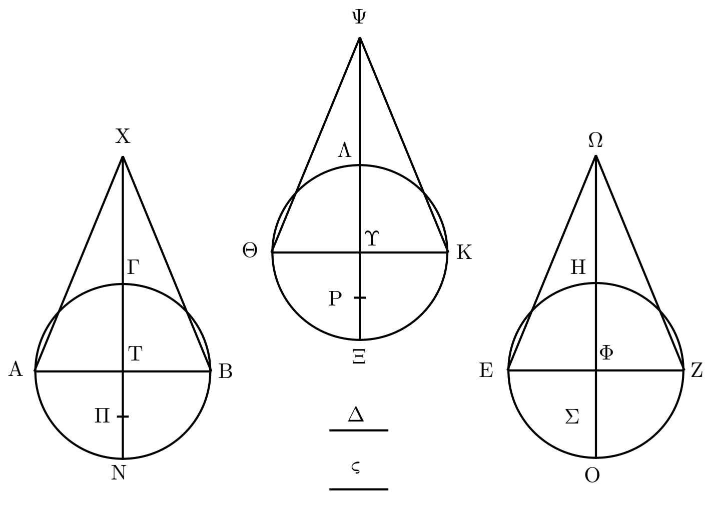


ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΘΚ. λόγος δὲ τῆς ΩΦ πρὸς τὴν togonals a les bases dels segments. I heus aquí els centres Π, Ρ, Σ. I, com ΠΝ, ΝΤ, conjuntament, respecte de ΝΤ, així estigui feta ΧΤ respecte de ΤΓ mentre que, com ΡΞ, ΞΥ, conjuntament, respecte de ΞΥ, així ΨΥ respecte d’ΥΛ i, com ΣΟ, ΟΦ, conjuntament, respecte d’ΟΦ, així ΩΦ respecte de ΦΗ. Siguin considerats uns cons, bases dels quals són els cercles al voltant d’uns diàmetres ΑΒ, ΘΚ, ΕΖ, mentre que vèrtexs els punts Χ, Ψ, Ω. Serà, doncs, el con ΑΒΧ igual al segment de l’esfera ΑΒΓ, mentre que ΨΘΚ al ΘΚΛ, i ΕΩΖ al ΕΗΖ, ja que això ha estat provat. I, atès que el segment de l’esfera ΑΒΓ és igual al segment ΘΚΛ, per tant, el con ΑΧΒ també és igual al con ΨΘΚ [però les bases dels cons iguals són inversament proporcionals a les altures]. Per tant, com un cercle al voltant d’un diàmetre ΑΒ respecte d’un cercle al voltant d’un diàmetre ΘΚ, així és ΨΥ respecte de ΧΤ. Però, com el cercle respecte del cercle, el quadrat a partir d’ΑΒ respecte del quadrat a partir de ΘΚ. Per tant, com el quadrat a partir d’ΑΒ respecte del quadrat a partir de a ΘΚ, així ΨΥ respecte de ΧΤ. I, atès que el segment ΕΖΗ és semblant al segment ΘΚΛ, per tant, també el con ΕΖΩ és semblant al con ΨΘΚ [ja que això serà provat].

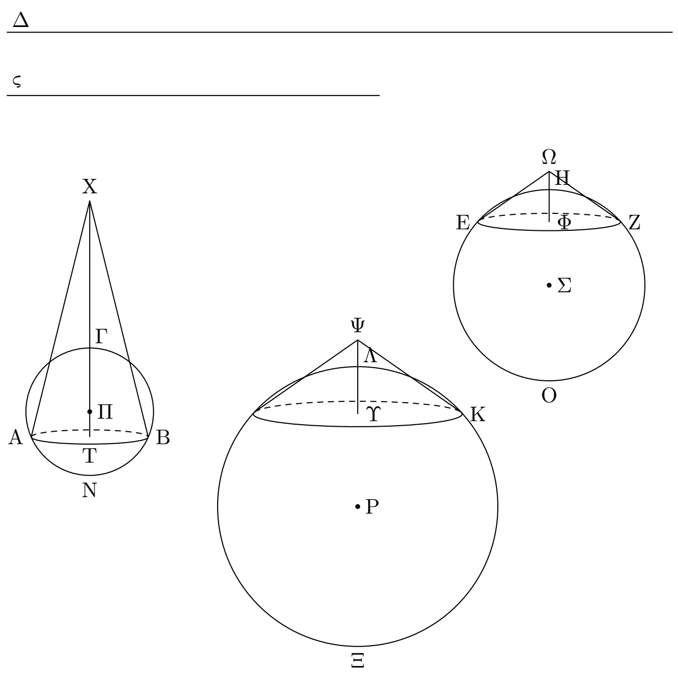


Per tant, com ΩΦ respecte d’ΕΖ, així és ΨΥ respecte de ΘΚ. Però una raó de ΩΦ

ΕΖ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΨΥ πρὸς τὴν ΘΚ δοθείς. ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΧΤ πρὸς Δ· καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΧΤ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς Δ, κείσθω τῷ ἀπὸ ΘΚ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΒ, ϛ· ἔσται ἄρα καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ϛ. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς Δ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ϛ πρὸς Δ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ϛ [διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΘΚ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ϛ]· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ϛ καὶ ἡ ϛ πρὸς Δ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν ΑΒ, Δ δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΘΚ, ϛ.



συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω, ᾧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ὅμοιον, τὸ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ ΑΒΓΝ, ΕΗΖΟ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΝ, ΗΟ καὶ κέντρα τὰ Π, Σ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΠΝ, ΝΤ πρὸς ΝΤ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς ΤΓ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ respecte d'EZ està donada. Per tant, la raó de ΨΥ respecte de ΘK també està donada. Aquesta mateixa sigui la raó de XT respecte de Δ. I XT està donada. Per tant, també està donada Δ. I, atès que, com ΨΥ respecte de XT (és a dir, el quadrat a partir d'AB respecte del quadrat a partir de ΘK), així és ΘK respecte de Δ, estigui posat un rectangle comprès per AB, ς, igual al quadrat a partir de ΘK. Per tant, com el quadrat a partir d'AB respecte del quadrat a partir de ΘK, així serà també AB respecte de ς. Però fou provat també que, com el quadrat a partir d'AB respecte del quadrat a partir de ΘK, així ΘK respecte de Δ. I, per alternança, com AB respecte de ΘK, així ς respecte de Δ. Però com AB respecte de ΘK, així ΘK respecte de ς [pel fet que el quadrat a partir de ΘK és igual al rectangle comprès per AB, ς]. Per tant, com AB respecte de ΘK, així ΘK respecte de ς, i ς respecte de Δ. Per tant, donades dues magnituds AB, Δ, dues mitjanes proporcionals en proporció contínua són ΘK, ς.



El problema serà sintetitzat, doncs, així: heus aquí, ΑΒΓ, igual al qual cal erigir un segment, mentre que EZH, semblant al qual <cal conformar el segment>. Heus aquí uns cercles màxims de les esferes ΑΒΓΝ, ΕΗΖΟ, uns diàmetres seus ΓΝ, ΗΟ, i centres Π, Σ. I, com ΠΝ, ΝΤ, conjuntament, respecte de NT, així estigui

ΣΟΦ πρὸς ΟΦ, ἡ ΩΦ πρὸς ΦΗ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν ΧΑΒ κῶνος τῷ ΑΓΒ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΖΩΕ τῷ ΕΗΖ. πεποιήσθω, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς Δ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, Δ δύο μέσαι ἀνάλογον εἰλήφθωσαν αἱ ΘΚ, ς, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως τὴν ΚΘ πρὸς ς καὶ τὴν ς πρὸς Δ, καὶ ἐπὶ τῆς ΘΚ κύκλου τμῆμα ἐπεστάσθω τὸ ΘΚΛ ὅμοιον τῷ ΕΖΗ κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος, καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ ΛΞ, καὶ νοείσθω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΛΘΞΚ, κέντρον δὲ τὸ Ρ, καὶ διὰ τῆς ΘΚ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν ΛΞ. ἔσται δὴ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Λ ὅμοιον τῷ ΕΗΖ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια. λέγω δέ, ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΡΞ, ΞΥ πρὸς τὴν ΞΥ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΥΛ. ἴσος ἄρα ὁ ΨΘΚ κῶνος τῷ ΘΚΛ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΨΘΚ κῶνος τῷ ΖΩΕ κώνῳ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΧΤ πρὸς Δ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΘΚ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἄρα ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ, ἡ ΘΚ πρὸς Δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΚΘ, ς, Δ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, ἡ ΘΚ πρὸς Δ. ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς Δ, ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλον, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς τὴν ΧΤ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΑΒ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΚΛ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ ΑΓΒ ἴσον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ ΕΖΗ τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΘΚΛ.

⌈ ϛʹ ⌉

Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων εἴτε τῆς αὐτῆς εἴτε μὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ.

ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ κατὰ τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ περιφερείας, καὶ ἔστω, ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν, τὸ κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν, οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ κατὰ τὴν ΔΕΖ.

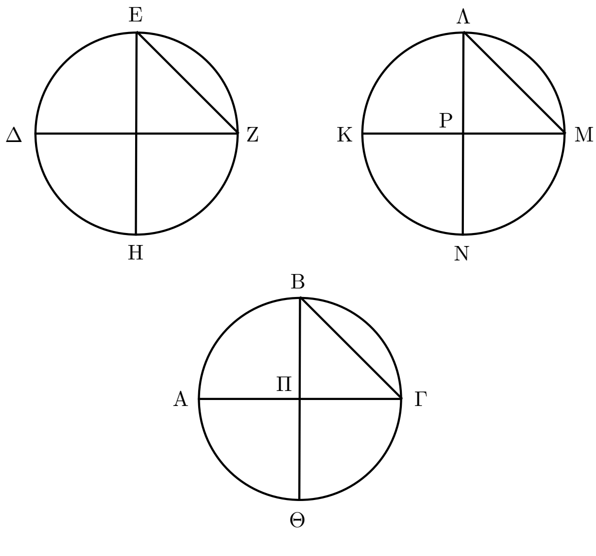
καὶ γεγενήσθω, καὶ ἔστω τὸ ΚΛΜ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ μὲν ΑΒΓ τμήματι ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις, καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ, ΕΖΗΔ μέγιστοι κύκλοι, ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων αἱ ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ εὐθεῖαι, διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν feta XT respecte de TΓ, mentre que com ΣΟΦ, conjuntament, respecte d'ΟΦ, ΩΦ respecte de ΦΗ. Per tant, el con ΧΑΒ és igual al segment de l'esfera ΑΓΒ, mentre que el ΖΩΕ al ΕΗΖ. Com ΩΦ respecte d'ΕΖ, així estigui feta XT respecte de Δ. I, donades dues rectes ΑΒ, Δ, estiguin preses dues mitjanes proporcionals ΘΚ, ς, de manera que, com ΑΒ respecte de ΘΚ, així sigui ΚΘ respecte de ς, i ς respecte de Δ. Sobre ΘΚ sigui sobreposat un segment de cercle semblant al segment de cercle ΕΖΗ. Estigui completat el cercle totalment i heus aquí un diàmetre seu ΛΞ. Sigui considerat una esfera, un cercle màxim de la qual és ΛΘΞΚ, i centre Ρ. Estigui allargat un pla per ΘΚ ortogonal respecte de ΛΞ. El segment de l'esfera sobre un mateix costat que Λ serà, doncs, semblant al segment de l'esfera ΕΗΖ, car els segments dels cercles també eren semblants. Però jo dic que també és igual al segment de l'esfera ΑΒΓ. Com ΡΞ, ΞΥ, conjuntament, respecte de ΞΥ, així estigui feta ΨΥ respecte d'ΥΛ. Per tant, el con ΨΘΚ és igual al segment de l'esfera ΘΚΛ, car el con ΨΘΚ també és semblant al con ΖΩΕ. Per tant, com ΩΦ respecte d'ΕΖ (és a dir, XT respecte de Δ), així és ΨΥ respecte de ΘΚ. Per tant, per alternança i per inversió, com ΨΥ respecte de XT, ΘΚ respecte de Δ. Car són proporcionals ΑΒ, ΚΘ, ς, Δ, com el quadrat a partir d'ΑΒ respecte del quadrat a partir de ΘΚ, és ΘΚ respecte de Δ. Però com ΘΚ respecte de Δ, ΨΥ respecte de XT. Per tant, com el quadrat a partir d'ΑΒ respecte del quadrat a partir de ΚΘ (és a dir, un cercle al voltant d'un diàmetre ΑΒ respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΘΚ), així també ΨΥ respecte de XT. Per tant, el con ΧΑΒ és igual al con ΨΘΚ, de manera que el segment de l'esfera ΑΒΓ també és igual al segment de l'esfera ΘΚΛ. Per tant, s'ha erigit ΘΚΛ igual al segment donat ΑΓΒ i, ell mateix, semblant a un altre segment donat, ΕΖΗ.

⌈6⌉

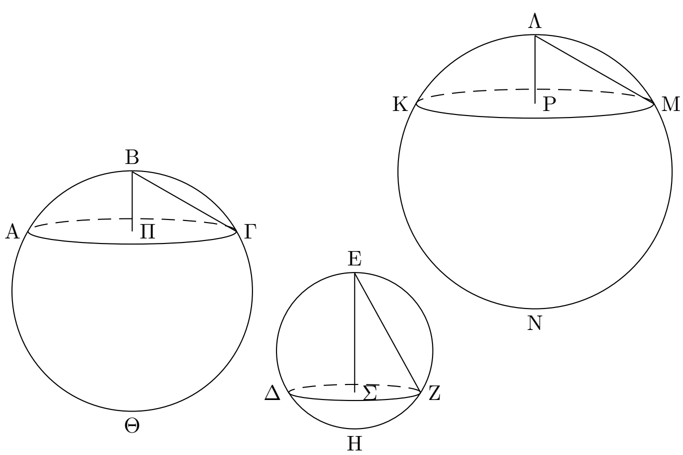
Donats dos segments d'esfera (bé de la mateixa, o bé no), trobar un segment d'esfera que serà similar a un dels donats, mentre que tindrà la superfície igual a la superfície de l'altre segment.

Heus aquí uns segments esfèrics donats per les superfícies ΑΒΓ, ΔΕΖ, i heus aquí, d'una banda, el segment per la superfície ΑΒΓ, semblant al qual cal trobar-ne un, mentre que, d'altra banda, el segment per ΔΕΖ, a la superfície del qual <cal> que tingui igual la superfície.

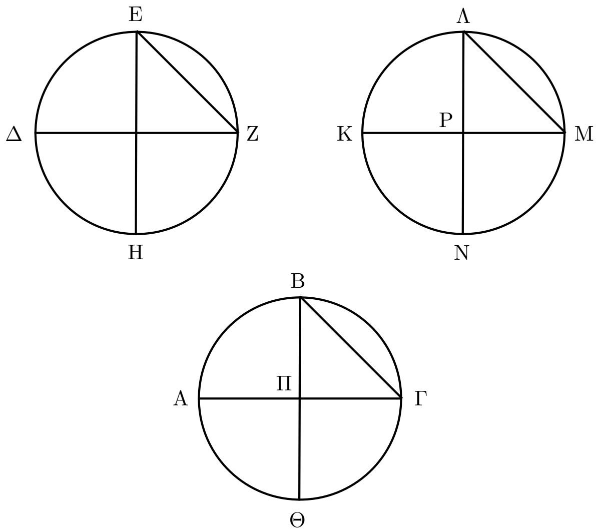
Heus aquí que ens n'ha resultat. Heus aquí el segment de l'esfera ΚΛΜ semblant al segment ΑΒΓ, mentre que tingui la superfície igual a la superfície del segment ΔΕΖ. Siguin considerats els centres de les esferes, estiguin allargats per ells plans ortogonals respecte de les bases dels segments, i heus aquí les seccions en les esferes, els cercles màxims ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ, ΕΖΗΔ, mentre que les seccions en les πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ ἔστωσαν αἱ ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ΚΛΜ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΕΖ [αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις]. ὥστε καὶ ἡ ΜΛ τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ τμήματι, ἔστιν, ὡς ἡ ΛΡ πρὸς ΡΝ, ἡ ΒΠ πρὸς ΠΘ· καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ. ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΒΠ πρὸς ΓΒ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]. ὡς ἄρα ἡ ΝΛ πρὸς ΛΜ, τουτέστι πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ. καὶ ἐναλλάξ· λόγος δὲ τῆς ΕΖ πρὸς ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΛΝ πρὸς ΒΘ δοθείς. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΝ· ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσα ἐστιν.



συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ μὲν ΑΒΓ, ᾧ δεῖ ὅμοιον, τὸ δὲ ΔΕΖ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως, καὶ πεποιήσθω, ὡς [μὲν] ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΛΝ, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ΛΝ κύκλος γεγράφθω, καὶ νοείσθω σφαῖρα, ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ ΛΚΝΜ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΛ κατὰ τὸ Ρ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΘΠ πρὸς ΠΒ, τὴν ΝΡ πρὸς ΡΛ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ bases dels segments, les rectes KM, ΑΓ, ΔΖ. Heus aquí uns diàmetres que són ortogonals a KM, ΑΓ, ΔΖ, ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ i estiguin unides ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ. I, atès que la superfície del segment de l'esfera ΚΛΜ és igual a la superfície del segment ΔΕΖ, per tant, el cercle el radi del qual és igual a ΛΜ, també és igual al cercle el radi del qual és igual a ΕΖ [ja que les superfícies dels segments esmentats foren provades iguals als cercles, els radis dels quals són iguals a unes rectes unides des dels vèrtexs dels segments fins a les bases], de manera que també ΜΛ és igual a ΕΖ. Però, atès que el segment ΚΛΜ és semblant al segment ΑΒΓ, com ΛΡ respecte de ΡΝ, és ΒΠ respecte de ΠΘ. Per inversió i per composició„ com ΝΛ respecte de ΛΡ, així ΘΒ respecte de ΒΠ. Tanmateix, com ΡΛ respecte de ΛΜ, així també ΒΠ respecte de ΓΒ [ja que els triangles són semblants]. Per tant, com ΝΛ respecte de ΛΜ (és a dir, respecte d'ΕΖ), així ΘΒ respecte de ΒΓ. I per alternança. Però una raó d'ΕΖ respecte de ΒΓ està donada, ja que cadascuna d'elles està donada. Per tant, una raó de ΛΝ respecte de ΒΘ també està donada. I ΒΘ està donada. Per tant, també està donada ΛΝ, de manera que també l'esfera està donada.



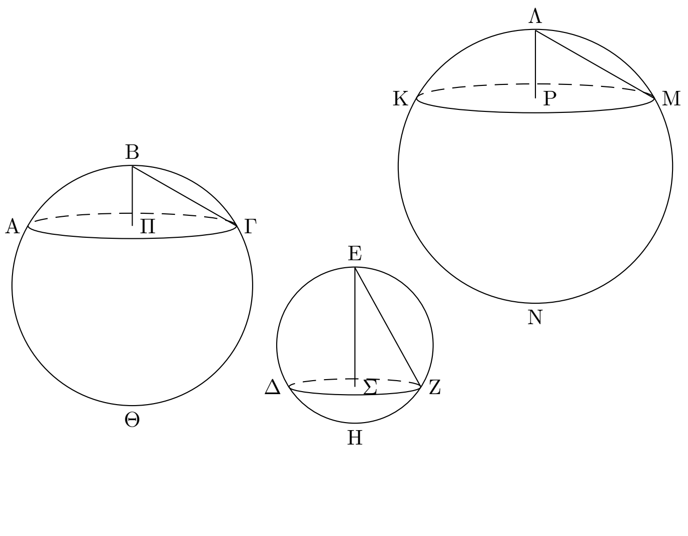
Serà sintetitzat, doncs, així: heus aquí dos segments d'esfera donats ΑΒΓ, ΔΕΖ; l'ΑΒΓ, al qual cal que sigui semblant, mentre que el ΔΕΖ, a la superfície del qual cal que tingui igual la superfície. Estigui construït el mateix que en l'anàlisi . Com ΒΓ respecte d'ΕΖ, així estigui feta ΒΘ respecte de ΛΝ i estigui descrit un cercle al voltant d'un diàmetre ΛΝ. Sigui considerada una esfera de la qual heus aquí un cercle màxim ΛΚΝΜ, i estigui tallada ΝΛ per Ρ, de manera que, com ΘΠ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν ΛΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜ· ὅμοια ἄρα ἐστὶν τὰ ἐπὶ τῶν ΚΜ, ΑΓ εὐθειῶν τῶν κύκλων τμήματα· ὥστε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστιν ὅμοια. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ· καὶ γὰρ τὰ κατὰ διαίρεσιν· ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΝΛ, ἡ ΒΓ πρὸς ΛΜ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΛΝ, ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΛΜ· ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΕΖ, ἴσος ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν ΕΖ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΚΛΜ τμήματος· [τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται·] ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΚΛΜ τμήματος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος τῆς σφαίρας, καί ἐστιν ὅμοιον τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ.



⌈ζʹ⌉

Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν.

respecte de ΠΒ, sigui ΝΡ respecte de ΡΛ. Estigui tallada la superfície per Ρ amb un pla ortogonal respecte de ΛΝ, i estigui unida ΛΜ. Per tant, els segments dels cercles sobre les rectes ΚΜ, ΑΓ són semblants, de manera que els segments de les esferes també són semblants. I, atès que, com ΘΒ respecte de ΒΠ, així és ΝΛ respecte de ΛΡ (ja que ho és per divisió), i tanmateix, com ΠΒ respecte de ΒΓ, així ΡΛ respecte de ΛΜ i, per tant, com ΘΒ respecte de ΝΛ, ΒΓ respecte de ΛΜ. Però com ΘΒ respecte de ΛΝ, també era ΒΓ respecte d'ΕΖ. Per tant, ΕΖ és igual a ΛΜ, de manera que el cercle el radi del qual és ΕΖ, també és igual al cercle el radi del qual és igual a ΛΜ. I el cercle que té el radi ΕΖ és igual a la superfície del segment ΔΕΖ, mentre que el cercle el radi del qual és igual a ΛΜ és igual a la superfície del segment ΚΛΜ [ja que això ha estat provat en el primer llibre.] I, per tant, la superfície del segment ΚΛΜ és igual a la superfície del segment de l'esfera ΔΕΖ, i el ΚΛΜ és semblant al ΑΒΓ.

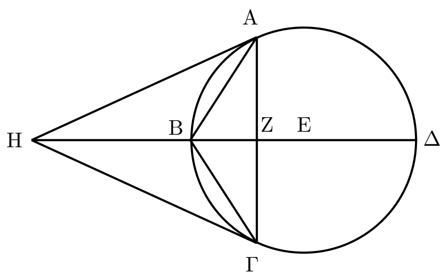


[7]

D'una esfera donada tallar un segment amb un pla, de manera que el segment respecte del con que té base la mateixa que el segment i altura igual, tingui una raó donada.

ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΔ. δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν τῷ διὰ τῆς ΑΓ, ὅπως τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

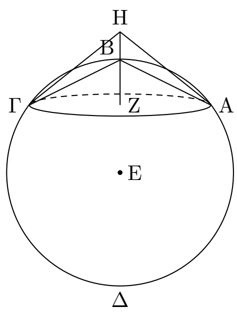
γεγονέτω, καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Ε, καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓΗ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗΓ κώνου πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον δοθείς. λόγος ἄρα τῆς ΗΖ πρὸς ΖΒ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ. λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΕΔΖ πρὸς ΔΖ δοθείς [ὥστε καὶ τῆς ΕΔ πρὸς ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΖ] ὥστε καὶ ἡ ΑΓ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ, καί ἐστιν συναμφότερος μὲν ἡ ΕΔΒ τρὶς ἡ ΕΔ, ἡ δὲ ΒΔ δὶς ἡ ΕΔ, συναμφότερος ἄρα ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καί ἐστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς ΕΔΖ πρὸς ΖΔ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι· δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι τοῦ, ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.



συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ΘΚ πρὸς ΚΛ μείζων τοῦ, ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δέ, ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ. καὶ ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ. διελόντι ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΒ. καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΖΓ, καὶ διὰ τῆς ΓΑ ἤχθω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ [ἀπὸ] ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ ΘΚ πρὸς ΚΛ.

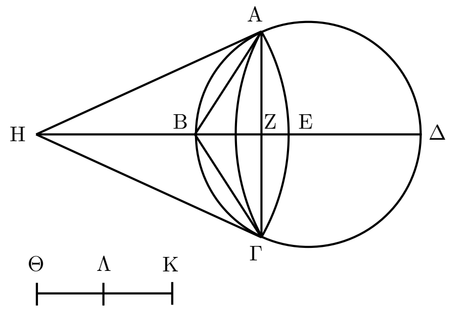
πεποιήσθω γάρ, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑΗ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ, Heus aquí una esfera donada, un cercle màxim de la qual ΑΒΓΔ, i un diàmetre seu ΒΔ. Cal tallar, doncs, l'esfera amb un pla per ΑΓ, de tal manera que el segment de l'esfera ΑΒΓ respecte del con ΑΒΓ tingui la mateixa raó que la donada.

Heus aquí que n'ha resultat. Heus aquí el centre de l'esfera Ε i, com ΕΔΖ, conjuntament, respecte de ΔΖ, així ΗΖ respecte de ΖΒ. Per tant, el con ΑΓΗ és igual al segment ΑΒΓ i, per tant, una raó del con ΑΗΓ respecte del con ΑΒΓ està donada. Per tant, una raó d'ΗΖ respecte de ΖΒ està donada. Però, com ΗΖ respecte de ΖΒ, ΕΔΖ, conjuntament, respecte de ΔΖ. Per tant, una raó d'ΕΔΖ, conjuntament, respecte de ΔΖ està donada [de manera que també d'ΕΔ respecte de ΔΖ. Per tant, també ΔΖ està donada], de manera que també ΑΓ. I, atès que ΕΔΖ, conjuntament, respecte de ΔΖ té una raó més gran que ΕΔΒ, conjuntament, respecte de ΔΒ i ΕΔΒ, conjuntament, és tres vegades ΕΔ, mentre que ΒΔ dues vegades ΕΔ, per tant, ΕΔΖ, conjuntament, respecte de ΔΖ té una raó més gran que la que té tres respecte de dos. I la raó d'ΕΔΖ, conjuntament, respecte de ΖΔ és la mateixa que la donada. Per tant, per a la síntesi, cal que la raó donada sigui més gran que la que té tres respecte de dos.



El problema serà composat, doncs, així: heus aquí una esfera donada, un cercle màxim de la qual ΑΒΓΔ, un diàmetre ΒΔ, el centre Ε i una raó donada, la de ΘΚ respecte de ΚΛ, més gran que la que té tres respecte de dos. Però, com tres respecte de dos, és ΕΔΒ, conjuntament, respecte de ΔΒ. Per tant, ΘΚ respecte de ΚΛ té una raó més gran que la que té ΕΔΒ, conjuntament, respecte de ΔΒ. Per tant, per divisió, ΘΛ respecte de ΛΚ té una raó més gran que ΕΔ respecte de ΔΒ. I, com ΘΛ respecte de ΛΚ, així estigui feta ΕΔ respecte de ΔΖ, i per Ζ estigui conduïda ΑΖΓ ortogonal a ΒΔ, i per ΓΑ estigui conduït un pla ortogonal respecte de ΒΔ. Jo dic que el segment de l'esfera ΑΒΓ respecte del con ΑΒΓ té la mateixa raó que ΘΚ respecte de ΚΛ.

En efecte, com ΕΔΖ, conjuntament, respecte de ΔΖ, així estigui feta ΗΖ respecte de ΖΒ. Per tant, el con ΓΑΗ és igual al segment de l'esfera ΑΒΓ. I, atès que, com οὕτως συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, τουτέστιν ὁ ΑΗΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον, ἴσος δὲ ὁ ΑΗΓ κῶνος [τῷ ΑΒΓ] τμήματι τῆς σφαίρας, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ.



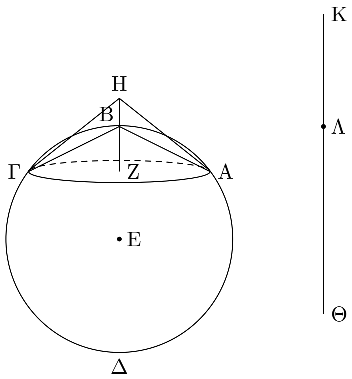
⌈η′⌉

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ διάμετρος ἡ ΒΔ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς ΑΓ ὀρθῷ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑΔ, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Ε, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, καὶ νοείσθωσαν κῶνοι βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ Θ, Η σημεῖα· ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν ΑΘΓ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΑΓΗ τῷ ΑΔΓ, καί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος·

ΘK respecte de KΛ, així és EΔZ, conjuntament, respecte de ΔZ (és a dir, HZ respecte de ZB; és a dir, el con AHΓ respecte del con ABΓ), però el con AHΓ és igual al segment de l'esfera [ABΓ], per tant, com el segment ABΓ respecte del con ABΓ, així ΘK respecte de KΛ.



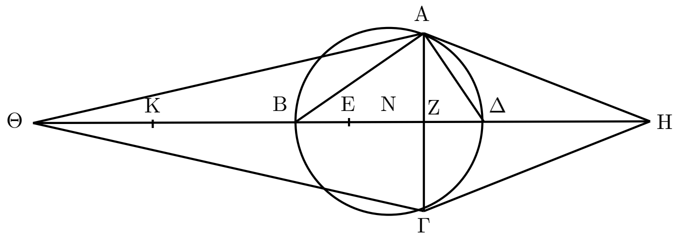
⌈8⌉

Sempre que una esfera sigui tallada amb un pla no pel centre, el segment més gran respecte del més petit tindrà una raó més petita que una raó doble de la que té la superfície del segment més gran respecte de la superfície del més petit, mentre que més petita que una raó hemiòlia.

Heus aquí una esfera i, en aquesta <esfera>, un cercle màxim ABΓΔ i un diàmetre BΔ. Estigui tallada amb un pla per AΓ ortogonal respecte del cercle ABΓΔ, i heulo aquí, <el> més gran, un segment d'esfera ABΓ. Jo dic que el segment ABΓ respecte de l'AΔΓ té una raó més petita que una raó duple que la superfície del segment més gran respecte de la superfície del segment més petit, mentre que més gran que una hemiòlia.

En efecte, estiguin unides les rectes BAΔ, i heus aquí el centre E. Com EΔZ, conjuntament, respecte de ΔZ, estigui feta ΘZ respecte de ZB, mentre que, com EBZ, conjuntament, respecte de BZ, així HZ respecte de ZΔ. Siguin considerats uns cons que tinguin base un cercle al voltant d'un diàmetre AΓ i vèrtexs, els punts Θ, H. El con AΘΓ serà, doncs, igual al segment de l'esfera ABΓ, mentre que l'AΓH, al AΔΓ. I com el quadrat a partir de BA respecte del quadrat a partir τοῦτο γὰρ προγέγραπται [δεικτέον, ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος]. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς [μὲν] συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ [ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΔ], ἔσται καί, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ [τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται]. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, ἔστω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΚ· δῆλον γάρ, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΘΒ τῆς ΒΕ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΔ· καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ. ὡς δὲ ἡ ΖΒ πρὸς ΖΔ, ἐδείχθη ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΚΒ. ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ἐδείχθη ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ· ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ [τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ] ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ [τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ]. ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ [ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ]. τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ· ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ· ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΕ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΚ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΝ τῷ ὑπὸ ΘΒΚ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ [καὶ τὸ ἀπὸ ΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ]. ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ΚΖ πρὸς ΖΗ [τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει]. καί ἐστιν, ὡς μὲν ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ κῶνον, τουτέστι τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ τμῆμα, ὡς δὲ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος· ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

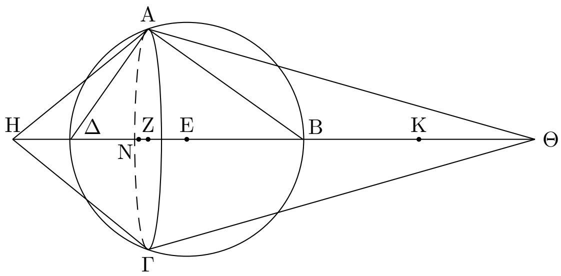
d'AΔ, així és la superfície del segment ABΓ respecte de la superfície del segment AΔΓ, ja que això ja ha estat mencionat abans. [S'ha de provar que el segment de l'esfera més gran respecte del més petit té una raó més petita que una raó doble que la superfície del segment més gran respecte de la superfície del segment més petit.] Jo dic que el con AΘΓ respecte de l'AHΓ (és a dir, ZΘ respecte de ZH), té una raó més petita que una raó doble de la que té el quadrat a partir de BA respecte del quadrat a partir d'AΔ (és a dir, BZ respecte de ZΔ). I, atès que, com EΔZ, conjuntament, respecte de ΔZ, així és ΘZ respecte de ZB [mentre que, com EBZ, conjuntament, respecte de BZ, així ZH respecte de ZΔ], com BZ respecte de ZΔ, també serà ΘB respecte de BE, ja que BE és igual a ΔE [ja que això ha estat demostrat completament en els resultats anteriors]. Al seu torn, atès que, com EBZ, conjuntament, respecte de BZ, és HZ respecte de ZΔ, heus aquí BK igual a BE (ja que és evident que ΘB és més gran que BE, atès que també BZ ho és més que ZΔ). I Com KZ respecte de ZB, serà HZ respecte de ZΔ. Però, com ZB respecte de ZΔ, fou demostrat ΘB respecte de BE; però BE és igual a KB. Per tant, com ΘB respecte de BK, així KZ respecte de ZH. I, atès que ΘZ respecte de ZK té una raó més petita que ΘB respecte de BK i, com ΘB respecte de BK fou demostrat KZ respecte de ZH, per tant, ΘZ respecte de ZK té una raó més petita que KZ respecte de ZH. Per tant, el rectangle comprès per ΘZH és més petit que el quadrat a partir de ZK. Per tant, el rectangle comprès per ΘZH respecte del quadrat a partir de ZH [és a dir, ZΘ respecte de ZH] té una raó més petita que la que té el quadrat a partir de KZ respecte del quadrat a partir de ZH [però el quadrat a partir de KZ respecte del quadrat a partir de ZH té una raó duple que KZ respecte de ZH]. Per tant, ΘZ respecte de ZH té una raó més petita que una raó duple de la que té KZ respecte de ZH [KZ respecte de ZH té una raó més petita que una raó duple de la que té BZ respecte de ZΔ]. Però això buscàvem. I, atès que BE és igual a EΔ, per tant, el rectangle comprès per BZΔ és més petit que el comprès per BEΔ. Per tant, ZB respecte de BE té una raó més petita que EΔ respecte de ΔZ (és a dir, ΘB respecte de BZ). Per tant, el quadrat a partir de ZB és més petit que el rectangle comprès per ΘBE (és a dir, que el rectangle comprès per ΘBK). Heus aquí el quadrat a partir de BN igual al rectangle comprès per ΘBK. Per tant, com ΘB respecte de BK, és el quadrat a partir de ΘN respecte del quadrat a partir de NK. Però el quadrat a partir de ΘZ respecte del quadrat a partir de ZK té una raó més gran que el quadrat a partir de ΘN respecte del quadrat a partir de NK [i el quadrat a partir de ΘZ, per tant, respecte del quadrat a partir de ZK té una raó més gran que ΘB respecte de BK (és a dir, ΘB respecte de BE; és a dir, KZ respecte de ZH)]. Per tant, ΘZ respecte de ZH té una raó més gran que una raó hemiòlia de la de KZ respecte de ZH [en efecte, això al final]. I, com ΘZ respecte de ZH, és el con AΘΓ respecte del con AHΓ (és a dir, el segment ABΓ respecte del segment AΔΓ), mentre que, com KZ respecte de ZH, BZ respecte de ZΔ (és a dir, el quadrat a partir de BA respecte del quadrat a partir d'AΔ; és a dir, la superfície del segment ABΓ respecte de la superfície del segment AΔΓ), de manera que el segment més gran respecte del més petit té



⌈ΑΛΛΩΣ⌉

Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ. λέγω, ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΔΑΒ πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος ὁ τοῦ κύκλου ἐστίν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΒ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΒΓ, τουτέστιν ὁ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΘΓ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΓΗ. ὁ δὴ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ [ἡ] βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ΒΑΔ τμήματος λόγος πρὸς τὸν ΒΑΔ κῶνον ὁ τῆς ΗΘ ἐστι πρὸς ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ ΒΓΔ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ΒΓΔ ὁ τῆς ΑΘ ἐστι πρὸς ΘΖ. ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ καὶ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘ, ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ ὁ τοῦ ὑπὸ una raó més petita que una raó duple de la que té la superfície del segment més gran respecte de la superfície del segment més petit, mentre que més gran que l’hemiòlia.



⌈D’una altra manera⌉

Heus aquí una esfera, en la qual un cercle màxim ΑΒΓΔ, un diàmetre ΑΓ, i el centre Ε. Estigui tallada per ΒΔ amb un pla ortogonal respecte d’ΑΓ. Jo dic que el segment més gran ΔΑΒ, respecte del més petit ΒΓΔ, té una raó més petita que una raó doble de la que té la superfície del segment ΑΒΔ respecte de la superfície del segment ΒΓΔ, però més gran que l’hemiòlia.

En efecte, estiguin unides ΑΒ, ΒΓ. Però la raó de la superfície respecte de la superfície és la del cercle el radi del qual és ΑΒ, respecte del cercle el radi del qual és ΒΓ (és a dir, la d’ΑΘ respecte de ΘΓ). Estigui posada igual al radi del cercle cadascuna de les rectes ΑΖ, ΓΗ. La raó del segment ΒΑΔ respecte del ΒΓΔ, doncs, ha estat conjuntada a partir de: la que té el segment ΒΑΔ respecte del con base del qual és un cercle al voltant d’un diàmetre ΒΔ, i vèrtex el punt Α; i aquest mateix con respecte del con que té base la mateixa, mentre que vèrtex el punt Γ; i el con esmentat respecte del segment ΒΓΔ. Tanmateix, la raó del segment ΒΑΔ respecte del con ΒΑΔ és la d’ΗΘ respecte de ΘΓ, mentre que la del con respecte del con és la d’ΑΘ respecte de ΘΓ i la del con ΒΓΔ respecte del segment ΒΓΔ és la d’ΑΘ respecte de ΘΖ. Però la conjuntada a partir de la d’ΗΘ respecte de ΘΓ i d’ΑΘ respecte de ΘΓ és la raó del rectangle comprès per ΗΘΑ respecte del τῶν ΗΘ, ΘΑ ἐστιν ἐπὶ τὴν ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἐστι ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίου [τοῦ δὲ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ]. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΘΖ τῆς ΘΗ.

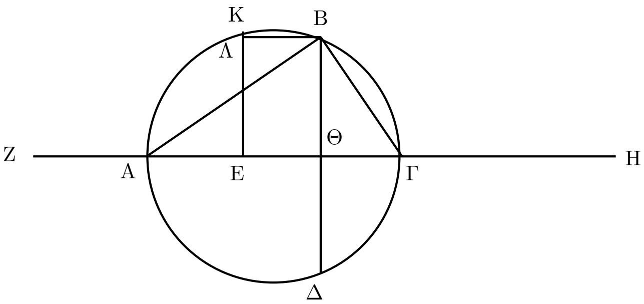
φημὶ δή, ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας λόγου. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ, τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον. φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον, τουτέστιν] ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον, τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΘΒ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστιν ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. φημὶ δή, ὅτι [ἄρα] τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, τουτέστι] τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΗΘ· ὃ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ [δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ].

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ ΒΛ· ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΘ, ΚΕ. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφότερον τὴν ΘΑ, ΚΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ· καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΗ τῆς ΓΘ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΕ τῆς ΕΛ ἴσης τῇ ΒΘ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ ΓΗ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν ΑΘ, ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΘΑ, τουτέστιν ἡ ΛΕ πρὸς ΘΑ, καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ΚΕ πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΘΑ πρὸς ΘΑ, καὶ διελόντι ἡ quadrat a partir de ΘΓ; i la del rectangle ΗΘ, ΘΑ respecte del quadrat a partir de ΘΓ, juntament amb la d'ΑΘ respecte de ΘΖ, és la del rectangle comprès per ΗΘ, ΘΑ sobre ΘΑ, respecte del quadrat a partir de ΘΓ sobre ΘΖ; i la del rectangle comprès per ΗΘΑ sobre ΘΑ és la del quadrat a partir de ΘΑ sobre ΘΗ. Per tant, <ocorre> que el quadrat a partir de ΘΑ sobre ΘΗ respecte del quadrat a partir de ΓΘ sobre ΘΖ té una raó més petita que la raó doble d'ΑΘ respecte de ΘΓ [però la raó duple de la d'ΑΘ respecte de ΘΓ és la raó del quadrat a partir d'ΑΘ respecte del quadrat a partir de ΘΓ]. Per tant, el quadrat a partir d'ΑΘ sobre ΘΗ respecte del quadrat a partir de ΘΓ sobre ΘΖ té una raó més petita que el quadrat a partir d'ΑΘ sobre ΘΗ respecte del quadrat a partir de ΓΘ sobre ΘΗ. Per tant, <ocorre> que el quadrat a partir de ΓΘ sobre ΖΘ és més gran que el quadrat a partir de ΓΘ sobre ΘΗ. Per tant, <ocorre> que ΘΖ és més gran que ΘΗ.

Jo afirmo, doncs, que el segment més gran respecte del més petit també té una raó més gran que una hemiòlia de la raó de la superfície. Tanmateix, fou provat que la raó dels segments és la mateixa que la que té el quadrat a partir d'ΑΘ sobre ΘΗ respecte de la del quadrat a partir de ΘΓ sobre ΘΖ, mentre que la del cub a partir d'ΑΒ respecte del cub a partir de ΒΓ és una hemiòlia de la raó de la superfície. Jo afirmo, doncs, que el quadrat a partir d'ΑΘ sobre ΘΗ respecte del quadrat a partir de ΓΘ sobre ΘΖ té una raó més gran que [el cub a partir d'ΑΒ respecte del cub a partir de ΒΓ, és a dir,] el cub a partir d'ΑΘ respecte del cub a partir de ΘΒ (és a dir, la raó del quadrat a partir d'ΑΘ respecte del quadrat a partir de ΒΘ i la raó d'ΑΘ respecte de ΘΒ). Però la raó del quadrat a partir d'ΑΘ respecte del quadrat a partir de ΘΒ, reprenent-la amb la d'ΑΘ respecte de ΘΒ és la del quadrat a partir d'ΑΘ respecte del rectangle comprès per ΓΘΒ. Però la del quadrat a partir d'ΑΘ respecte del rectangle comprès per ΒΘΓ és la del quadrat a partir d'ΑΘ sobre ΘΗ respecte del rectangle comprès per ΒΘΓ sobre ΘΗ. Afirmo, doncs, que [per tant] el quadrat a partir d'ΑΘ sobre ΘΗ respecte del quadrat a partir de ΓΘ sobre ΘΖ té una raó més gran que [el quadrat a partir d'ΑΘ respecte del rectangle ΒΘΓ, és a dir,] el quadrat a partir d'ΑΘ sobre ΘΗ respecte del rectangle ΒΘΓ sobre ΘΗ. Així, doncs, s'ha de provar que el quadrat a partir de ΘΓ sobre ΘΖ és més petit que el rectangle comprès per ΒΘΓ sobre ΗΘ. La qual cosa és el mateix que provar que el quadrat a partir de ΓΘ respecte del rectangle ΒΘΓ té una raó més petita que ΗΘ respecte de ΘΖ [per tant, cal provar que ΗΘ respecte de ΘΖ té una raó més gran que ΓΘ respecte de ΘΒ].

Estigui conduïda ΕΚ des d'Ε ortogonal a ΕΓ, i ΒΛ des de Β perpendicular sobre aquesta última. Ens cal provar el que encara resta, que ΗΘ respecte de ΘΖ té una raó més gran que ΓΘ respecte a ΘΒ. Però ΘΖ és igual a ΑΘ, ΚΕ, conjuntament. Per tant, cal demostrar que ΗΘ respecte de ΘΑ, ΚΕ, conjuntament, té una raó més gran que ΓΘ respecte de ΘΒ. Per tant, un cop extret ΓΘ de ΘΗ, i ΕΛ (igual a ΒΘ) de ΚΕ, també caldrà provar que la resta (ΓΗ) respecte de la resta (ΑΘ, ΚΛ), conjuntament, té una raó més gran que ΓΘ respecte de ΘΒ (és a dir, ΘΒ respecte de ΘΑ; és a dir, ΛΕ respecte de ΘΑ); i, per alternança, que ΚΕ respecte d'ΕΛ té

ΚΛ πρὸς ΛΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΛ πρὸς ΘΑ. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΕ τῆς ΘΑ.



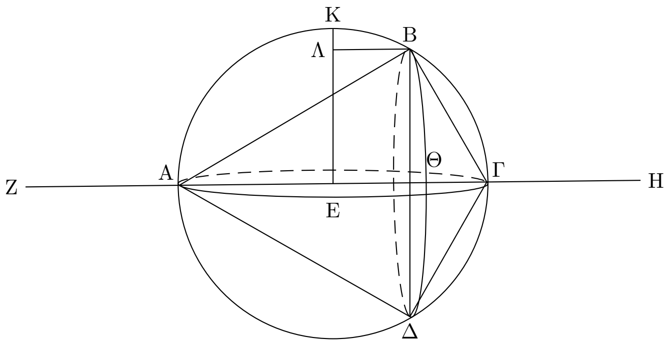
⌈ϑ′⌉

Τῶν τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, καὶ ἄλλη σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΕΖΗΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς ΑΓ, ΕΗ διαμέτρους, καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς ΔΒ, ΖΘ γραμμάς. ἔστιν δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ΖΕΘ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον [τῶν δὲ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τομῶν ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ ⊲ σημεῖον, μεῖζον ἡμισφαιρίου, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον ἡμισφαιρίου], ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι. λέγω οὖν, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ΖΕΘ περιφέρειαν ἡμισφαίριον τοῦ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τμήματος.

ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερόν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΕΖ εὐθείᾳ [δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ ΒΑΔ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ ⊲ σημεῖον]·

δῆλον δέ, ὅτι ἡ ΒΑ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς ΑΚ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ una raó més gran que ΚΛ, ΘΑ, conjuntament, respecte de ΘΑ; i, per divisió, ΚΛ respecte de ΛΕ té una raó més gran que ΚΛ respecte de ΘΑ, perquè ΛΕ és més petita que ΘΑ.



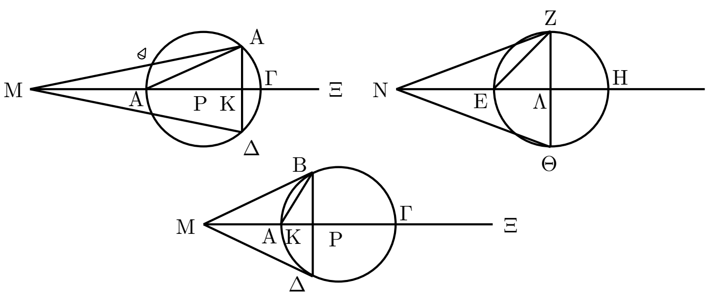
[9]

Dels segments esfèrics compresos amb igual superfície, és més gran l'hemisferi.

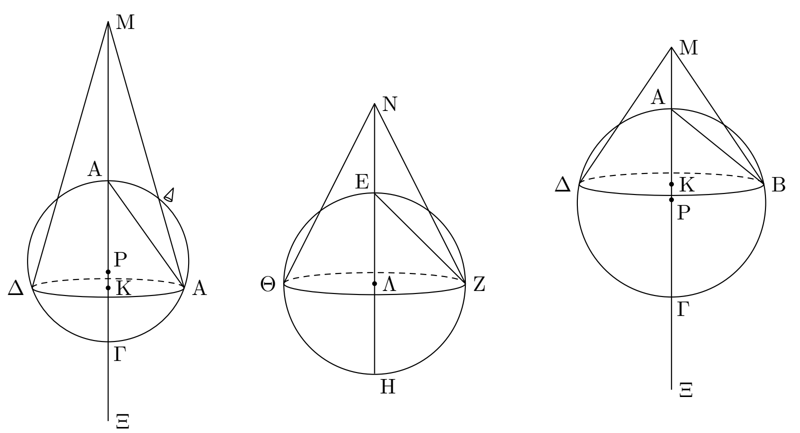
Heus aquí un cercle màxim en una esfera ΑΒΓΔ i un diàmetre seu ΑΓ, i una altra esfera un cercle màxim de la qual ΕΖΗΘ i un diàmetre seu ΕΗ. Estigui tallada amb un pla una esfera pel centre, mentre que l'altra no pel centre. Heus aquí els plans que tallen els diàmetres ΑΓ, ΕΗ ortogonals respecte <d'aquests diàmetres>, i estiguin tallats per les línies ΔΒ, ΖΘ. El segment de l'esfera per la circumferència ΖΕΘ, doncs, és un hemisferi [mentre que de les seccions per la circumferència ΒΑΔ, en la figura vora la qual hi ha el signe , és més gran que un hemisferi, mentre que en l'altra, més petit que un hemisferi], siguin iguals les superfícies dels segments esmentats. Així, doncs, jo dic que l'hemisferi per la circumferència ΖΕΘ és més gran que el segment per la circumferència ΒΑΔ.

En efecte, atès que són iguals les superfícies dels segments esmentats, és clar que ΒΑ és igual a la recta ΕΖ [ja que ha estat provat que la superfície de cada segment és igual al cercle el radi del qual és igual a una recta conduïda des del vèrtex del segment fins a la superfície del cercle que és base del segment i atès que en l'altra figura, vora la qual hi ha el signe , la circumferència ΒΑΔ és més gran que mig cercle].

Però és clar que ΒΑ és més petit que el duple d'ΑΚ, en potència, i més gran que el κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. ἔστω δὴ ἡ ΒΑ τῆς ΑΡ διπλασία δυνάμει. ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΔ κύκλου ἴση ἡ ΓΞ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΞ πρὸς τὴν ΓΚ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ Μ σημεῖον· ἴσος δή ἐστιν οὗτος τῷ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ΕΛ ἴση ἡ ΕΝ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΘΖ κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ Ν σημεῖον ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστι τῷ κατὰ τὴν ΘΕΖ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΡΓ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΚΓ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΡ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΓΞ· ἡμισύ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου [τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑΡ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ]. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΚΓ [ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΡ τοῦ ὑπὸ τῶν ΜΚΓ] ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς [τὴν] ΚΓ ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς [τὴν] ΑΡ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς [τὴν] ΓΚ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ· δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἡμισύ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΡ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΡ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ΛΝ. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἢ ἡ ΜΚ πρὸς [τὴν] ΝΛ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ, κορυφὴν δὲ τὸ Μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν ΕΖΘ περιφέρειαν μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν.



duple del radi, en potència. I heus aquí ΓΞ també igual al radi del cercle ABΔ, i la raó que té ΓΞ respecte de ΓK, aqueixa tingui MA respecte d'AK. Heus aquí un con a partir d'un cercle al voltant d'un diàmetre BΔ, que tingui vèrtex el punt M. Aqueix, doncs, és igual al segment de l'esfera per la circumferència BAΔ. Heus aquí EN igual a EΛ. I heus aquí un con a partir d'un cercle al voltant d'un diàmetre ΘZ que tingui vèrtex el punt N. Aqueix també és, doncs, igual a l'hemisferi per la circumferència ΘEZ. Però el rectangle comprès per APΓ és més gran que el comprès per AKΓ, pel fet que té el costat més petit més gran que el més petit de l'altre. I el quadrat a partir d'AP és igual al rectangle comprès per AK, ΓΞ, ja que és la meitat del quadrat a partir d'AB. Així, doncs, també són més grans el dos, conjuntament, que els dos, conjuntament, [per tant, el rectangle comprès per ΓAP és més gran que el comprès per ΞKA]. Però el rectangle comprès per MKΓ és igual al comprès per ΞKA [de manera que el comprès per ΓAP és més gran que el comprès per MKΓ] de manera que ΓA respecte de KΓ té una raó més gran que MK respecte d'AP. Però la raó que té AΓ respecte de ΓK, aqueixa té el quadrat a partir d'AB respecte del quadrat a partir de BK. Així, doncs, és clar que la meitat del quadrat a partir d'AB (que és igual al quadrat a partir d'AP) respecte del quadrat a partir de BK té una raó més gran que MK respecte del doble d'AP (que és igual a ΛN). Per tant, un cercle al voltant d'un diàmetre ZΘ respecte d'un cercle al voltant d'un diàmetre BΔ també té una raó més gran que MK respecte de NΛ, de manera que el con que té base un cercle al voltant d'un diàmetre ZΘ mentre que vèrtex el punt N, és més gran que el con que té base un cercle al voltant d'un diàmetre BΔ mentre que vèrtex el punt M. Així, doncs, és evident que també l'hemisferi per la circumferència EZΘ és més gran que el segment per la circumferència BAΔ.



Part II

Taules de lemes i formes

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona (1=1a s., 2=2a s., 3=3a s., 4=1a pl., 5=2a pl., 6=3a pl.), temps (pr=present, im=imperfet, fu=futur, ao=aorist, pe=perfet), mode (in=indicatiu, im=imperatiu, su=subjuntiu, op=optatiu, pa=participi) i diàtesi (a=activa, m=mitja, p=passiva).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
αγω	ἤχθω	3	pe	im	mp	7
αγω	ἤχθωσαν	6	pe	im	mp	5
αγω	ἤχθωσάν	6	pe	im	mp	1
αγω	ἀχθήσονται	6	fu	in	p	1
αγω	ἀχθείσης		ao	pa	p	2
αγω	ἀχθεῖσαι		ao	pa	p	1
αγω	ἠγμένη		pe	pa	mp	24
αγω	ἠγμένην		pe	pa	mp	2
αγω	ἠγμενη		pe	pa	mp	1
αγω	ἠγμέναι		pe	pa	mp	1
αγω	ἡγμένην		pe	pa	mp	1
αγω	ἀγομένη		pr	pa	mp	6
αγω	ἀγομένη		pr	pa	mp	3
αγω	ἀγομένην		pr	pa	mp	3
αγω	ἀγομενη		pr	pa	mp	1
αγω	ἀγομένης		pr	pa	mp	1
αγω	ἀγομένων		pr	pa	mp	1
αγω	ἀγάγωμεν	4	ao	su	a	1
αγω	ἀχθῶσιν	6	ao	su	p	4
αγω	ἀχθῶσίν	6	ao	su	p	1
αναγραφω	ἀναγεγράφθω	3	pe	im	mp	6
αναγραφω	ἀναγεγράφθωσαν	6	pe	im	mp	3
αναγραφω	ἀναγεγραμμένη		pe	pa	mp	1
αναγραφω	ἀναγεγραμμένον		pe	pa	mp	1
αναγραφω	ἀναγραφῇ	3	ao	su	p	2
αναλυω	ἀναλύσει	3	fu	in	a	1
αναλυω	ἀναλυθήσεταί	3	fu	in	mp	1
αναπληροω	ἀναπεπληρώσθω	3	pe	im	mp	1
αναστρεφω	ἀναστρέψαντι		ao	pa	a	1
ανιστημι	ἀνεστάτω	3	pe	im	a	1
αντιπασχω	ἀντιπεπόνθασιν	6	pe	in	a	8
αντιπασχω	ἀντιπεπόνθασι	6	pe	in	a	1
αποδεικνυμι	ἀπεδείχθησαν	6	ao	in	p	1
αποδεικνυμι	ἀπεδείχθη	3	ao	in	p	1
αποδεικνυμι	ἀποδεδειγμένων		pe	pa	mp	1
αποκαθιστημι	ἀποκατασταθῇ	3	ao	su	p	1
απολαμβανω	ἀπολαμβανομένης		pr	pa	mp	1
απολιμπανω	ἀπολειφθέντα		ao	pa	p	1
αποτεμνω	ἀποτέμνει	3	pr	in	a	1
αποτεμνω	ἀποτεμνομένη		pr	pa	mp	10
αποτεμνω	ἀποτεμνομένης		pr	pa	mp	1
αποτεμνω	ἀποτεμνομένων		pr	pa	mp	1
απτω	ἅπτονται	6	pr	in	mp	2
αφαιρεω	ἀφῃρήσθω	3	pe	im	mp	6
αφαιρεω	ἀφαιρεῖται	3	pr	in	mp	1
αφαιρεω	ἀφαιρεθείσης		ao	pa	p	1

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
αφαιρεω	ἀφαιρεθέντος		ao	pa	p	1
αφαιρεω	ἀφαιρεθέντων		ao	pa	p	1
αφαιρεω	ἀφαιρεθέντα		ao	pa	p	1
αφαιρεω	ἀφῃρημένος		pe	pa	mp	2
αφαιρεω	ἀφαιρεθῇ	3	ao	su	p	2
γιγνομαι	γεγονέτω	3	pe	im	a	2
γιγνομαι	γεγενήσθω	3	pe	im	mp	4
γιγνομαι	γενέσθαι		ao	in	m	1
γιγνομαι	γίνεται	3	pr	in	mp	6
γιγνομαι	γίγνεται	3	pr	in	mp	1
γιγνομαι	γίγνονται	6	pr	in	mp	1
γιγνομαι	γενόμενος		ao	pa	mp	2
γιγνομαι	γενομένου		ao	pa	mp	2
γιγνομαι	γενηθὲν		ao	pa	p	2
γιγνομαι	γεννηθέντα		ao	pa	p	1
γιγνομαι	γεγονὼς		pe	pa	a	1
γιγνομαι	γεγενημένη		pe	pa	mp	1
γιγνομαι	γεγενημένης		pe	pa	mp	1
γιγνομαι	γινόμενος		pr	pa	mp	2
γιγνομαι	γινομένου		pr	pa	mp	2
γιγνομαι	γένηται	3	ao	su	m	2
γραφω	γεγράφθω	3	pe	im	mp	1
γραφω	γράψουσιν	6	fu	in	a	1
γραφω	γράφουσιν	6	pr	in	a	2
γραφω	γεγραμμένων		pe	pa	mp	2
γραφω	γεγραμμένον		pe	pa	mp	1
δει	δεήσει	3	fu	in	a	1
δει	ἔδει	3	im	in	a	1
δει	δεῖ	3	pr	in	a	15
δεικνυμι	δεῖξαι		ao	in	a	6
δεικνυμι	ἐδείξαμεν	4	ao	in	a	1
δεικνυμι	ἐδείχθη	3	ao	in	p	23
δεικνυμι	ἐδείχθησαν	6	ao	in	p	2
δεικνυμι	δειχθῆναι		ao	in	p	1
δεικνυμι	δείξομεν	4	fu	in	a	3
δεικνυμι	δειχθήσεται	3	fu	in	p	4
δεικνυμι	δέδεικται	3	pe	in	mp	25
δεικνυμι	δείξαντα		ao	pa	a	1
δεικνυμι	δεδειγμένον		pe	pa	mp	1
δεικνυμι	δεδειγμένων		pe	pa	mp	1
δεικτεον	δεικτέον					13
διαγω	διήχθω	3	pe	im	mp	2
διαγω	διηγμέναι		pe	pa	mp	1
διαγω	διαχθῶσιν	6	ao	su	p	1
διαιρεω	διαιρεθήσεται	3	fu	in	p	1
διαιρεω	διελόντι		ao	pa	a	8
διαιρεω	διαιρεθείσης		ao	pa	p	1
διαιρεω	διῃρημένης		pe	pa	mp	1

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
διδωμι	δεδόσθω	3	pe	im	mp	2
διδωμι	δοθείς		ao	pa	p	15
διδωμι	δοθεῖσα		ao	pa	p	15
διδωμι	δοθέντι		ao	pa	p	8
διδωμι	δοθέντα		ao	pa	p	6
διδωμι	δοθεὶς		ao	pa	p	5
διδωμι	δοθεισῶν		ao	pa	p	4
διδωμι	δοθεῖσαν		ao	pa	p	4
διδωμι	δοθέντος		ao	pa	p	4
διδωμι	δοθέντων		ao	pa	p	4
διδωμι	δοθέν		ao	pa	p	3
διδωμι	δοθείσης		ao	pa	p	2
διδωμι	δοθεντων		ao	pa	p	1
διδωμι	δοθὲν		ao	pa	p	1
διδωμι	διδόμενον		pr	pa	mp	1
διδωμι	διδόμενος		pr	pa	mp	1
διδωμι	δοθῇ	3	ao	su	p	1
δυναμαι	δυνάσθω	3	pr	im	mp	9
δυναμαι	δυνήσονται	6	fu	in	mp	1
δυναμαι	ἐδύνατο	3	im	in	mp	1
δυναμαι	δύναται	3	pr	in	mp	22
δυναμαι	δύνανται	6	pr	in	mp	2
εγγραφω	ἐγγεγράφθω	3	pe	im	mp	20
εγγραφω	ἐγγράψαι		ao	in	a	8
εγγραφω	ἐγγέγραπται	3	pe	in	mp	3
εγγραφω	ἐγγραφὲν		ao	pa	p	9
εγγραφω	ἐγγραφέντος		ao	pa	p	5
εγγραφω	ἐγγεγραμμένον		pe	pa	mp	59
εγγραφω	ἐγγεγραμμένου		pe	pa	mp	50
εγγραφω	ἐγγεγραμμένῳ		pe	pa	mp	12
εγγραφω	ἐγγεγραμμένα		pe	pa	mp	2
εγγραφω	ἐγγεγραμμένης		pe	pa	mp	2
εγγραφω	ἐγγράφοντα		pr	pa	a	1
εγγραφω	ἐγγραφομένου		pr	pa	mp	6
εγγραφω	ἐγγραφομένῳ		pr	pa	mp	2
εγγραφω	ἐγγραφῇ	3	ao	su	p	6
ειναι	ἔστω	3	pr	im	a	154
ειναι	ἔστωσαν	6	pr	im	a	12
ειναι	ἔσται	3	fu	in	a	69
ειναι	ἔσονται	6	fu	in	a	7
ειναι	ἦν	3	im	in	a	5
ειναι	ἦσαν	6	im	in	a	1
ειναι	ἐστὶ	3	pr	in	a	172
ειναι	ἐστιν	3	pr	in	a	124
ειναι	ἐστὶν	3	pr	in	a	121
ειναι	ἐστι	3	pr	in	a	82
ειναι	ἔστιν	3	pr	in	a	28
ειναι	εἰσὶν	6	pr	in	a	26

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
ειναι	εἶναι		pr	in	a	22
ειναι	εἰσιν	6	pr	in	a	21
ειναι	ἐστίν	3	pr	in	a	13
ειναι	ἔστι	3	pr	in	a	5
ειναι	εἰσίν	6	pr	in	a	5
ειναι	ἐστί	3	pr	in	a	3
ειναι	εἰσι	6	pr	in	a	2
ειναι	εἰναι		pr	in	a	2
ειναι	εἰσὶ	6	pr	in	a	1
ειναι	εἴη	3	pr	op	a	1
ειναι	οὖσαι		pr	pa	a	10
ειναι	οὖσα		pr	pa	a	9
ειναι	ὄντων		pr	pa	a	4
ειναι	οὖσαις		pr	pa	a	3
ειναι	οὖσης		pr	pa	a	3
ειναι	ὄντα		pr	pa	a	2
ειναι	ὅντων		pr	pa	a	2
ειναι	οὖσαν		pr	pa	a	2
ειναι	ὢν		pr	pa	a	1
ειναι	ὄντος		pr	pa	a	1
ειναι	ᾖ	3	pr	su	a	6
ειναι	ὦσιν	6	pr	su	a	4
ειναι	ὦσι	6	pr	su	a	1
εκβαλλω	ἐκβεβλήσθω	3	pe	im	mp	4
εκβαλλω	ἐκβεβλήσθωσαν	6	pe	im	mp	2
εκβαλλω	ἐκβαλλόμεναι		pr	pa	mp	2
εκκειμαι	ἐκκείσθω	3	pr	im	mp	9
εκκειμαι	ἐκκείσθωσαν	6	pr	im	mp	6
εκκειμαι	ἐκκειμένῳ		pr	pa	mp	1
εμπιπτω	ἐμπεσούσης		ao	pa	p	1
εμπιπτω	ἐμπέσῃ	3	ao	su	p	1
επιζευγνυμι	ἐπεζεύχθωσαν	6	pe	im	mp	25
επιζευγνυμι	ἐπεζεύχθω	3	pe	im	mp	3
επιζευγνυμι	ἐπιζεύξωμεν	4	fu	in	a	1
επιζευγνυμι	ἐπιζευγνύουσιν	6	pr	in	a	1
επιζευγνυμι	ἐπιζευχθεισῶν		ao	pa	p	3
επιζευγνυμι	ἐπιζευχθεῖσαι		ao	pa	p	1
επιζευγνυμι	ἐπεζευγμένων		pe	pa	mp	1
επιζευγνυμι	ἐπιζευγνυούσαις		pr	pa	a	7
επιζευγνυμι	ἐπιζευγνύουσαι		pr	pa	a	6
επιζευγνυμι	ἐπιζευγνυουσῶν		pr	pa	a	5
επιζευγνυμι	ἐπιζευγνύμεναι		pr	pa	mp	3
επιζευγνυμι	ἐπιζευγνυμένη		pr	pa	mp	2
επιζευγνυμι	ἐπιζευγνυμένῃ		pr	pa	mp	1
επιζευγνυμι	ἐπιζευχθῇ	3	ao	su	p	1
επισυντιθημι	ἐπισυντιθέμενον		pr	pa	mp	1
επιτασσω	ἐπιταχθέν		ao	pa	p	1
επιφαυω	ἐπιφαυέτωσαν	6	pr	im	a	1

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
επιψαυω	ἐπιψαύουσιν	6	pr	in	a	1
επιψαυω	ἐπιψαύουσαι		pr	pa	a	5
επιψαυω	ἐπιψαυουσῶν		pr	pa	a	3
επιψαυω	ἐπιψαύουσα		pr	pa	a	1
ερω	ἐρρήθησαν	6	ao	in	p	1
ερω	εἴρηται	3	pe	in	mp	2
ερω	εἰρημένων		pe	pa	mp	12
ερω	εἰρημένου		pe	pa	mp	10
ερω	εἰρημένον		pe	pa	mp	7
ερω	εἰρημένῳ		pe	pa	mp	5
ερω	εἰρημένα		pe	pa	mp	4
ερω	εἰρημέναι		pe	pa	mp	3
ερω	εἰρημένοι		pe	pa	mp	3
ερω	εἰρημένῃ		pe	pa	mp	2
ερω	εἰρημένοις		pe	pa	mp	2
ερω	εἰρημένος		pe	pa	mp	2
ερω	εἰρημενῳ		pe	pa	mp	1
ερω	εἰρημέναις		pe	pa	mp	1
ερω	εἰρημένη		pe	pa	mp	1
ερω	εἰρημένην		pe	pa	mp	1
ερω	εἰρημένης		pe	pa	mp	1
ευρισκω	εὑρήσθωσαν	6	pe	im	mp	4
ευρισκω	εὑρήσθω	3	pe	im	mp	1
ευρισκω	εὑρεῖν		ao	in	a	9
ευρισκω	εὑρημέναι		pe	pa	mp	1
εφαπτω	ἐφαπτέσθω	3	pr	im	p	1
εφαπτω	ἐφαπτόμεναι		pr	pa	mp	2
εφαπτω	ἐφαπτομένην		pr	pa	mp	2
εφαπτω	ἐφαπτομένας		pr	pa	mp	1
εφαπτω	ἐφαπτομένη		pr	pa	mp	1
εφαπτω	ἐφαπτομένων		pr	pa	mp	1
εφιστημι	ἐπεστάσθω	3	pe	im	mp	1
εχω	ἐχέτω	3	pr	im	a	9
εχω	ἕξει	3	fu	in	a	16
εχω	ἔχει	3	pr	in	a	176
εχω	ἔχειν		pr	in	a	27
εχω	ἔχουσιν	6	pr	in	a	12
εχω	ἔχουσι	6	pr	in	a	7
εχω	ἔχων		pr	pa	a	47
εχω	ἔχοντος		pr	pa	a	12
εχω	ἔχοντι		pr	pa	a	11
εχω	ἔχοντες		pr	pa	a	7
εχω	ἔχουσα		pr	pa	a	7
εχω	ἔχον		pr	pa	a	6
εχω	ἔχοντα		pr	pa	a	3
εχω	ἐχούσης		pr	pa	a	3
εχω	ἔχουσαι		pr	pa	a	2
εχω	ἔχουσαν		pr	pa	a	1

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
εχω	ἔχωσιν	6	pr	su	a	1
εχω	ἔχῃ	3	pr	su	p	4
ζητεω	ἐζητοῦμεν	4	im	in	a	1
καταγω	κατήχθω	3	pe	im	mp	1
καταλειπω	καταλελείφθω	3	pe	im	mp	1
καταλειπω	καταλειφθήσεταί	3	fu	in	mp	1
κατεσκευαζω	κατεσκευάσθω	3	pe	im	mp	1
κατεσκευαζω	κατεσκευασμένοις		pe	pa	mp	1
κατεσκευαζω	κατεσκευασμένα		pr	pa	mp	1
κειμαι	κείσθω	3	pr	im	mp	13
κειμαι	κείμεναι		pr	pa	mp	1
λαμβανω	εἰλήφθω	3	pe	im	mp	10
λαμβανω	εἰλήφθωσαν	6	pe	im	mp	6
λαμβανω	λαβεῖν		ao	in	a	2
λαμβανω	λαμβάνω	1	pr	in	a	1
λαμβανω	ληφθείσης		ao	pa	p	1
λαμβανω	εἰλημμέναι		pe	pa	mp	1
λεγω	λέγω	1	pr	in	a	32
λεγω	λεγόμενον		pr	pa	mp	2
λειπω	λελείφθω	3	pe	im	mp	4
λειπω	λείψομέν	4	fu	in	a	2
λειπω	λείψομεν	4	fu	in	a	1
λειπω	λειφθήσεταί	3	fu	in	p	1
λειπω	λείπειν		pr	in	a	1
μανθανω	ἐμάθομεν	4	ao	in	a	1
μενω	μενούσης		pr	pa	a	8
μεταγω	μεταγαγεῖν		ao	in	a	1
μετρεω	μετρείσθω	3	pr	im	mp	4
μετρεω	μετρεῖ	3	pr	in	a	3
μετρεω	μετροῦνται	6	pr	in	mp	2
νοεω	νοείσθω	3	pr	im	mp	19
νοεω	νοείσθωσαν	6	pr	im	mp	4
νοεω	νοηθῇ	3	ao	su	p	1
παραδιδωμι	παραδέδοται	3	pe	in	mp	1
περιγραφω	περιγεγράφθω	3	pe	im	mp	16
περιγραφω	περιγράψαι		ao	in	a	10
περιγραφω	περιγραφὲν		ao	pa	p	12
περιγραφω	περιγραφέντος		ao	pa	p	2
περιγραφω	περιγεγραμμένου		pe	pa	mp	57
περιγραφω	περιγεγραμμένον		pe	pa	mp	56
περιγραφω	περιγεγραμμένῳ		pe	pa	mp	8
περιγραφω	περιγεγραμμένης		pe	pa	mp	3
περιγραφω	περιγεγραμμένα		pe	pa	mp	2
περιγραφω	περιγεγραμμένος		pe	pa	mp	2
περιγραφω	περιγράφοντες		pr	pa	a	1
περιγραφω	περιγραφομένου		pr	pa	mp	4
περιγραφω	περιγραφόμενον		pr	pa	mp	2
περιγραφω	περιγραφῇ	3	pr	su	p	4

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
περιεχω	περιέχεται	3	pr	in	mp	2
περιεχω	περιεχόντων		pr	pa	a	3
περιεχω	περιεχόμενον		pr	pa	mp	30
περιεχω	περιεχομένῳ		pr	pa	mp	15
περιεχω	περιεχόμενα		pr	pa	mp	10
περιεχω	περιεχομένου		pr	pa	mp	3
περιεχω	περιεχομένων		pr	pa	mp	3
περιεχω	περιεχομένη		pr	pa	mp	2
περιλαμβανω	περιλαμβανέτω	3	pr	im	a	1
περιλαμβανω	περιλαμβάνει	3	pr	in	a	2
περιλαμβανω	περιλαμβάνειν		pr	in	a	1
περιλαμβανω	περιλαμβάνεται	3	pr	in	mp	4
περιλαμβανω	περιληφθὲν		ao	pa	p	1
περιλαμβανω	περιλαμβάνοντος		pr	pa	a	2
περιλαμβανω	περιλαμβάνουσα		pr	pa	a	1
περιλαμβανω	περιλαμβανομένη		pr	pa	mp	2
περιλαμβανω	περιλαμβανομένης		pr	pa	mp	1
περιλειπω	περιλελειμμένον		pe	pa	mp	1
περιλειπω	περιλειπόμενα		pr	pa	mp	3
περιλειπω	περιλειπόμενον		pr	pa	mp	1
περιλειπω	περιλειπομένων		pr	pa	mp	1
περιφερω	περιενεχθήτω	3	ao	im	p	1
περιφερω	περιενεχθείη	3	ao	op	p	1
περιφερω	περιενεχθέντος		ao	pa	p	2
περιφερω	περιενεχθεισῶν		ao	pa	p	1
περιφερω	περιενεχθεῖσα		ao	pa	p	1
περιφερω	περιενεχθὲν		ao	pa	p	1
περιφερω	περιενεχθέντες		ao	pa	p	1
περιφερω	περιενεχθῇ	3	ao	su	p	2
πιπτω	πεσεῖται	3	fu	in	a	1
ποιεω	πεποιήσθω	3	pe	im	mp	13
ποιεω	ποιείτω	3	pr	im	a	5
ποιεω	ποιείτωσαν	6	pr	im	a	1
ποιεω	ποιεῖν		pr	in	a	3
ποιεω	ποιοῦντες		pr	pa	a	1
ποιεω	ποιοῦσαι		pr	pa	a	1
ποιεω	ποιούσας		pr	pa	a	1
πολλαπλασιαζω	πεπολλαπλασιάσθω	3	pe	im	mp	1
προαποδεικνυμι	προαπεδείχθη	3	ao	in	p	1
προγραφω	προγέγραπται	3	pe	in	mp	2
προγραφω	προγεγραμμένον		pe	pa	mp	1
προγραφω	προγεγραμμένου		pe	pa	mp	1
προδεικνυμι	προδέδεικται	3	pe	in	mp	2
προδεικνυμι	προδειχθὲν		ao	pa	p	1
προδεικνυμι	προδειχθέντα		ao	pa	p	1
προδεικνυμι	προδεδειγμένων		pe	pa	mp	1
προερω	προειρημένων		pe	pa	mp	3
προερω	προειρημένος		pe	pa	mp	2

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
προερω	προειρημένοις		pe	pa	mp	1
προερω	προειρημένον		pe	pa	mp	1
προκειμαι	προέκειτο	3	im	in	m	1
προκειμαι	προκειμένου		pe	pa	mp	2
προκειμαι	προκειμένοις		pe	pa	mp	1
προσβαλλω	προσβεβλήσθω	3	pe	im	mp	1
προσκειμαι	προσκείσθωσαν	6	pe	im	mp	2
προσκειμαι	προσκείσθω	3	pr	im	mp	1
προσλαμβανω	προσλαβὼν		ao	pa	a	1
προστιθημι	προστιθεμένων		pr	pa	mp	1
προτιθημι	προτεθέντος		ao	pa	p	1
προτιθημι	προτεθέν		ao	pa	p	1
συγκειμαι	σύγκειται	3	pr	in	a	2
συγκειμαι	συγκειμένης		pr	pa	mp	8
συγκειμαι	συγκειμένη		pr	pa	mp	4
συγκειμαι	συγκείμενος		pr	pa	mp	3
συγκειμαι	συγκειμένη		pr	pa	mp	1
συγκειμαι	συγκειμένῳ		pr	pa	mp	1
συγκειμαι	συγκειμένου		pr	pa	mp	1
συμβαλλω	συμβάλλουσιν	6	pr	in	a	2
συμπιπτω	συμπιπτέτωσαν	6	pr	im	a	1
συμπιπτω	συμπίπτουσαι		pr	pa	a	1
συμπιπτω	συμπέσωσιν	6	ao	su	a	1
συναποδεικνυμι	συναποδέδεικται	3	pe	in	mp	1
συναπτω	συνῆπται	3	pe	in	mp	5
συναπτω	συνημμένος		pe	pa	mp	1
συνιστημι	συνεστάτω	3	pe	im	a	1
συνιστημι	συστήσασθαι		ao	in	m	2
συνιστημι	συνέσταται	3	pe	in	mp	1
συντιθημι	συντεθήσεται	3	fu	in	p	7
συντιθημι	συνθέντι		ao	pa	p	7
ταρασσω	τεταραγμένη		pe	pa	mp	1
τεμνω	τμηθήτω	3	ao	im	p	1
τεμνω	τετμήσθω	3	pe	im	mp	22
τεμνω	τετμήσθωσαν	6	pe	im	mp	1
τεμνω	τεμεῖν		ao	in	a	7
τεμνω	τεμεῖ	3	fu	in	a	1
τεμνω	τμηθείσης		ao	pa	p	1
τεμνω	τετμημένη		pe	pa	mp	2
τεμνω	τέμνοντες		pr	pa	a	2
τεμνω	τέμνον		pr	pa	a	1
τεμνω	τέμνοντα		pr	pa	a	1
τεμνω	τέμνων		pr	pa	a	1
τεμνω	τεμνομένης		pr	pa	mp	1
τεμνω	τεμνομένων		pr	pa	mp	1
τεμνω	τέμωμεν	4	ao	su	a	1
τεμνω	τμηθῇ	3	ao	su	p	5
τιθημι	θέσει	3	fu	in	a	1

Continua a la pàgina següent

Taula 2.1: Lemes, formes i ocurrències dels verbs de *Sph. et Cyl.*, classificats per la persona, temps, mode i diàtesi (cont.).

LEMA	FORMA	PERS.	TEMPS	MODE	DIÀTESI	# OC.
τυγχανω	ἔτυχεν	3	ao	in	a	1
τυγχανω	τυγχάνουσιν	6	pr	in	a	1
υπαρχεω	ὑπαρχόντων		pr	pa	a	1
υπερεχω	ὑπερέξει	3	fu	in	a	1
υπερεχω	ὑπερέχει	3	pr	in	a	1
υπερεχω	ὑπερέχειν		pr	in	a	1
υπερεχω	ὑπερέχῃ	3	pr	su	p	1
υποκειμαι	ὑπέκειτο	3	im	in	a	1
υποκειμαι	ὑποκειμένων		pe	pa	mp	2
υποκειμαι	ὑποκείμενον		pe	pa	mp	1
υποκειμαι	ὑποκείμενος		pe	pa	mp	1
υποτεινω	ὑποτείνει	3	pr	in	a	1
υποτεινω	ὑποτεινούσῃ	3	pr	pa	a	3
υποτεινω	ὑποτεινουσῶν		pr	pa	a	3
υποτεινω	ὑποτείνουσα		pr	pa	a	1
υποτεινω	ὑποτείνουσαι		pr	pa	a	1
φερω	οἰσθήσονται	6	fu	in	p	7
φερω	οἰσθήσεται	3	fu	in	p	3
φερω	ἐνεχθήσονται	6	fu	in	p	2
φερω	ἐνεχθήσεται	3	fu	in	p	1
φερω	οἰσθήσοντὰι	6	fu	in	p	1
φημι	φημὶ	1	pr	in	a	3

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes.

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# OC.)
		ADJECTIU		
indefinit	οποιοσουν	1	1	ὁποιᾳοῦν (1)
numeral	δυο	66	2	δυσὶ (1), δύο (65)
numeral	ενος	33	7	εἷς (1), μιὰς (1), μιᾳ (2), μιᾶς (8), μίαν (16), ἑνὶ (3), ἕνα (2)
numeral	τεσσαρες	2	1	τέσσαρες (2)
numeral	τρεις	1	1	τρεῖς (1)
numeral	δευτερος	2	2	δευτέρας (1), δεύτερον (1)
numeral	ημιολιος	16	4	ἡμιολία (2), ἡμιόλιον (6), ἡμιόλιος (4), ἡμιόλιός (4)
numeral	ημισυς	32	9	ἡμισείας (14), ἡμισείᾳ (4), ἡμισύ (5), ἡμίσεια (2), ἡμίσειαν (1), ἡμίσεων (2), ἡμίσεως (1), ἡμίση (2), ἡμίσους (1)
numeral	πρωτος	9	5	πρώτη (1), πρώτης (1), πρώτου (2), πρώτῳ (4), πρῶτον (1)
numeral	τεταρτος	1	1	τέταρτον (1)
pronominal	αμφοτερος	8	4	ἀμφοτέραις (1), ἀμφοτέρων (2), ἀμφότεραι (4), ἀμφότεραί (1)
pronominal	εκαστος	6	4	ἑκάστη (2), ἑκάστου (1), ἑκάστῳ (1), ἕκαστον (2)
pronominal	εκατερος	9	3	ἑκατέρα (6), ἑκάτερα (1), ἑκάτερος (2)
pronominal	ετερος	37	8	ἑτερος (1), ἑτέρα (7), ἑτέραν (1), ἑτέρας (4), ἑτέρου (12), ἑτέρᾳ (2), ἑτέρῳ (7), ἕτερος (3)
pronominal	πας	42	11	παντὶ (3), παντὸς (5), πασῶν (7), πάντα (6), πάντες (2), πάσαις (11), πάσης (1), πᾶς (1), πᾶσα (1), πᾶσαι (4), πᾶσιν (1)
pronominal	συναμφοτερος	61	5	συναμφοτέρου (12), συναμφοτέρων (1), συναμφοτέρῳ (1), συναμφότερον (6), συναμφότερος (41)
pronominal	τηλικουτος	4	3	τηλικούτοις (1), τηλικούτου (2), τηλικοῦτος (1)
qualificatiu	αδυνατος	9	1	ἀδύνατον (9)
qualificatiu	ανισος	22	4	ἀνίσους (5), ἀνίσων (9), ἄνισα (6), ἄνισοι (2)
qualificatiu	αρτιογωνιος	7	3	ἀρτιογωνίου (1), ἀρτιογώνιον (3), ἀρτιόγωνον (3)
qualificatiu	αρτιοπλευρος	4	2	ἀρτιόπλευρον (2), ἀρτιόπλευρόν (2)
qualificatiu	αρτιος	1	1	ἀρτίους (1)
qualificatiu	ατοπος	2	1	ἄτοπον (2)
qualificatiu	δηλος	26	1	δῆλον (26)
qualificatiu	διπλασιος	37	9	διπλασία (9), διπλασίαν (3), διπλασίας (1), διπλασίου (3), διπλάσια (1), διπλάσιον (9), διπλάσιος (3), διπλάσιόν (5), διπλάσιός (3)
qualificatiu	διπλασιων	15	2	διπλασίονα (12), διπλασίων (3)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
qualificatiu	δυνατος	22	2	δυνατὸν (7), δυνατόν (15)
qualificatiu	ελασσων	246	11	ἐλάσσονα (111), ἐλάσσονας (1), ἐλάσσονι (4), ἐλάσσονος (18), ἐλάσσους (1), ἐλάσσων (52), ἐλάττους (1), ἔλασσον (42), ἔλασσόν (11), ἔλαττον (4), ἔλαττόν (1)
qualificatiu	εξαπλασιος	2	2	ἑξαπλασία (1), ἑξαπλάσιός (1)
qualificatiu	επιπεδος	83	7	ἐπιπέδοις (1), ἐπιπέδου (5), ἐπιπέδων (19), ἐπιπέδῳ (32), ἐπίπεδα (9), ἐπίπεδον (16), ἐπίπεδόν (1)
qualificatiu	ευθυγραμμος	32	5	εὐθυγράμμου (5), εὐθυγράμμων (1), εὐθυγράμμῳ (4), εὐθύγραμμα (4), εὐθύγραμμον (18)
qualificatiu	ιδιας	3	1	ἰδίαν (3)
qualificatiu	ισογωνιος	2	2	ἰσογώνια (1), ἰσογώνιον (1)
qualificatiu	ισοπλευρος	20	5	ἰσοπλεύρου (3), ἰσόπλευρα (1), ἰσόπλευρον (13), ἰσόπλευρος (1), ἰσόπλευρόν (2)
qualificatiu	ισος	475	14	ἰσῳ (1), ἴσα (10), ἴσαι (11), ἴσας (6), ἴση (123), ἴσην (49), ἴσης (15), ἴσοι (12), ἴσον (116), ἴσος (125), ἴσου (2), ἴσων (3), ἴσῃ (1), ἴσῳ (1)
qualificatiu	ισοσκελης	26	8	ἰσοσκελεῖ (1), ἰσοσκελεῖς (3), ἰσοσκελοῦς (5), ἰσοσκελὴς (4), ἰσοσκελής (4), ἰσοσκελῆ (4), ἰσοσκελῶν (4), ἴσοσκελῶν (1)
qualificatiu	ισουψος	1	1	ἰσουψῆ (1)
qualificatiu	καθετος	50	8	καθέτου (2), καθέτων (1), καθέτῳ (25), κάθετοι (3), κάθετον (9), κάθετος (7), κάθετοί (2), κάθετός (1)
qualificatiu	κατεναντιος	1	1	κατεναντίον (1)
qualificatiu	κοιλος	5	2	κοῖλαι (4), κοῖλαί (1)
qualificatiu	κοινος	15	7	κοιναὶ (2), κοινοῦ (1), κοινὰ (3), κοινὴ (2), κοινὸν (4), κοινὸς (2), κοινῶν (1)
qualificatiu	κυλινδρικος	10	1	κυλινδρικὴ (10)
qualificatiu	κωνικος	42	4	κωνικὴ (5), κωνικῆς (15), κωνικῇ (1), κωνικῶν (21)
qualificatiu	λοιπος	24	7	λοιποῦ (5), λοιπὰ (3), λοιπὴ (8), λοιπὴν (1), λοιπὸν (1), λοιπὸς (5), λοιπῷ (1)
qualificatiu	μεγιστος	58	6	μεγίστου (20), μεγίστῳ (2), μέγιστοι (2), μέγιστον (5), μέγιστος (28), μέγιστός (1)
qualificatiu	μειζων	228	8	μείζονα (53), μείζονι (2), μείζονος (11), μείζονά (16), μείζους (8), μείζων (90), μεῖζον (32), μεῖζόν (16)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
qualificatiu	μεσος	18	5	μέσα (1), μέσαι (4), μέση (8), μέσης (1), μέσον (4)
qualificatiu	ολος	24	7	ὅλα (1), ὅλαι (3), ὅλη (10), ὅλην (1), ὅλον (4), ὅλου (3), ὅλῃ (2)
qualificatiu	ομοιος	50	9	ὁμοίου (2), ὁμοίων (2), ὅμοια (8), ὅμοιοι (2), ὅμοιον (26), ὅμοιος (1), ὅμοιά (6), ὅμοιόν (2), ὅμοιός (1)
qualificatiu	ορθος	48	13	ὀρθαὶ (1), ὀρθοὺς (1), ὀρθοῦ (10), ὀρθὰ (2), ὀρθὰς (15), ὀρθὴν (2), ὀρθή (1), ὀρθὸν (5), ὀρθὸς (2), ὀρθόν (1), ὀρθός (2), ὀρθῶν (2), ὀρθῷ (4)
qualificatiu	παραλληλος	42	8	παραλλήλοις (3), παραλλήλους (1), παραλλήλων (14), παραλλήλῳ (6), παράλληλοι (9), παράλληλον (1), παράλληλος (6), παράλληλοί (2)
qualificatiu	πολυγωνος	165	6	πολυγώνου (85), πολυγώνων (5), πολυγώνῳ (1), πολύγωνα (7), πολύγωνον (66), πολύγωνόν (1)
qualificatiu	πολυς	7	1	πολλῷ (7)
qualificatiu	στερεος	25	6	στερεοῦ (2), στερεὰ (1), στερεὸν (7), στερεὸς (5), στερεόν (1), στερεῷ (9)
qualificatiu	συνθετος	1	1	σύνθετοι (1)
qualificatiu	σφαιρικος	2	2	σφαιρικὰ (1), σφαιρικῶν (1)
qualificatiu	τετραγωνος	1	1	τετράγωνα (1)
qualificatiu	τετραπλασιος	40	7	τετραπλασια (1), τετραπλασία (20), τετραπλασίαν (3), τετραπλασίῳ (1), τετραπλάσιον (6), τετραπλάσιος (6), τετραπλάσιός (3)
qualificatiu	τριγωνος	104	6	τριγώνοις (1), τριγώνου (32), τριγώνων (13), τριγώνῳ (10), τρίγωνα (28), τρίγωνον (20)
qualificatiu	τριπλασιος	17	3	τριπλασίονα (11), τριπλασίονι (1), τριπλάσιον (5)
qualificatiu	τριτος	2	2	τρίτην (1), τρίτον (1)
qualificatiu	φανερος	22	2	φανερὸν (10), φανερόν (12)
verbal	δεικτεον	13	1	δεικτέον (13)
		ADVERBI		
numeral	δις	2	1	δὶς (2)
numeral	τετρακις	2	1	τετράκις (2)
numeral	τρις	5	2	τρὶς (1), τρία (4)
	αει	4	2	αἰεὶ (1), ἀεὶ (3)
	αλλως	1	1	ἄλλως (1)
	αναλογον	15	2	ἀνάλογον (10), ἀνάλογόν (5)
	αναπαλιν	4	2	ἀνάπαλιν (3), ἀνάπαλίν (1)
	ανω	1	1	ἄνω (1)
	απεναντιον	5	1	ἀπεναντίον (5)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	απλως	1	1	ἁπλῶς (1)
	διχα	13	1	δίχα (13)
	εκτος	1	1	ἐκτὸς (1)
	εμπροσθεν	1	1	ἔμπροσθεν (1)
	εναλλαξ	15	2	ἐναλλὰξ (2), ἐναλλάξ (13)
	ενθαδε	1	1	ἐνθάδε (1)
	εξης	1	1	ἑξῆς (1)
	επανω	1	1	ἐπάνω (1)
	ετι	16	1	ἔτι (16)
	καθολου	1	1	καθόλου (1)
	μαλλον	1	1	μᾶλλον (1)
	μη	14	2	μὴ (7), μή (7)
	ομοιως	32	1	ὁμοίως (32)
	ουκ	17	2	οὐκ (15), οὔ (2)
	ουτως	122	2	οὕτω (1), οὕτως (121)
	παλιν	26	1	πάλιν (26)
	προτερον	23	1	πρότερον (23)
	πως	1	1	πῶς (1)
	σαφης	1	1	σαφέστερον (1)
	συνεχες	2	1	συνεχὲς (2)
	τουτεστιν	82	3	τουτὲστιν (1), τουτέστι (34), τουτέστιν (47)
		ARTICLE		
	ο	6042	20	αἱ (159), οἱ (35), ταῖς (31), τοὺς (3), τοῖς (48), τοῦ (1132), τὰ (147), τὰς (56), τὴν (451), τὴς (1), τὸ (734), τὸν (239), τό (2), τῆς (603), τῇ (357), τῴ (3), τῶν (397), τῷ (320), ἥ (904), ὁ (420)
		NOM DE PERSONA		
	ευκλειδος	1	1	Εὐκλείδου (1)
		PARTÍCULA		
connexió	αρα	286	2	ἆρα (1), ἄρα (285)
connexió	γαρ	157	2	γὰρ (144), γάρ (13)
connexió	δε	496	3	δὲ (465), δέ (30), δ᾽ (1)
connexió	δη	113	2	δὴ (100), δή (13)
connexió	μεν	200	2	μὲν (193), μέν (7)
connexió	μην	1	1	μὴν (1)
connexió	ουκουν	1	1	οὐκοῦν (1)
connexió	ουν	64	2	οὖν (62), οῦν (2)
connexió	τοινυν	1	1	τοίνυν (1)
coordinació	αλλα	37	2	ἀλλὰ (20), ἀλλ᾽ (17)
coordinació	η	102	1	ἢ (102)
coordinació	ηπερ	58	1	ἤπερ (58)
coordinació	ητοι	7	1	ἤτοι (7)
coordinació	και	790	3	και (1), καὶ (754), καί (35)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
coordinació	ουδε	10	1	οὐδὲ (10)
coordinació	τε	81	1	τε (81)
subordinació	διοτι	4	1	διότι (4)
subordinació	εαν	33	2	ἂν (1), ἐὰν (32)
subordinació	ει	16	1	εἰ (16)
subordinació	ειτε	2	1	εἴτε (2)
subordinació	επει	77	2	ἐπεὶ (61), ἐπεί (16)
subordinació	επειδη	8	1	ἐπειδὴ (8)
subordinació	επειδηπερ	2	1	ἐπειδήπερ (2)
subordinació	επειπερ	2	1	ἐπείπερ (2)
subordinació	ινα	2	1	ἵνα (2)
subordinació	καθαπερ	3	1	καθάπερ (3)
subordinació	καθως	3	2	καθὼς (1), καθώς (2)
subordinació	οπως	6	1	ὅπως (6)
subordinació	οταν	1	1	ὅταν (1)
subordinació	οτι	113	1	ὅτι (113)
subordinació	ως	195	1	ὡς (195)
subordinació	ωστε	76	1	ὥστε (76)
		PREPOSICIÓ		
	απο	261	2	ἀπὸ (259), ἀπ᾽ (2)
	δια	50	2	διὰ (48), δι᾽ (2)
	εις	50	1	εἰς (50)
	εκ	179	3	ἐκ (165), ἐξ (5), ἔκ (9)
	εν	142	1	ἐν (142)
	επι	124	2	ἐπὶ (119), ἐπ᾽ (5)
	εως	1	1	ἕως (1)
	κατα	78	4	καθ᾽ (6), κατὰ (68), κατά (2), κατ᾽ (2)
	μετα	24	2	μετα (1), μετὰ (23)
	μεταξυ	50	1	μεταξὺ (50)
	παρα	6	2	παρὰ (4), παρά (2)
	περι	150	1	περὶ (150)
	προ	1	1	πρὸ (1)
	προς	850	1	πρὸς (850)
	συν	17	1	σὺν (17)
	υπο	206	3	ὑπὸ (176), ὑπό (29), ὑπ᾽ (1)
	χωρις	29	1	χωρὶς (29)
		PRONOM		
demostratiu	αυτος	217	21	αὐτοῖς (1), αὐτοῦ (26), αὐτὰ (18), αὐτὰς (2), αὐτάς (1), αὐτὴ (1), αὐτὴν (12), αὐτήν (5), αὐτὸ (33), αὐτὸν (40), αὐτὸς (7), αὐτό (2), αὐτόν (1), αὐτός (1), αὐτῆς (10), αὐτῇ (19), αὐτῶν (23), αὐτῷ (12), ταὐτὰ (1), ταὐτά (1), ταὐτόν (1)
demostratiu	εκεινος	1	1	ἐκείνῳ (1)
demostratiu	οδε	2	1	τόδε (2)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
demostratiu	ουτος	79	10	αὗτη (2), αὗται (1), οὗτος (9), ταύταις (2), ταῦτα (9), τούτου (6), τούτων (3), τούτῳ (3), τοῦτο (37), τοῦτον (7)
demostratiu	τοιουτος	1	1	τοιοῦτον (1)
demostratiu	τοσαυταπλασιος	1	1	τοσαυταπλάσιος (1)
demostratiu	τοσουτος	1	1	τοσούτοις (1)
indefinit	αλλος	27	6	ἄλλα (4), ἄλλη (1), ἄλλης (1), ἄλλο (16), ἄλλος (3), ἄλλῳ (2)
indefinit	τις	36	8	τι (5), τινα (6), τινες (2), τινος (1), τινων (1), τινὰ (2), τινὸς (5), τις (14)
personal	εγω	1	1	ἡμῖν (1)
reciproc	αλληλοι	28	6	ἀλλήλαις (9), ἀλλήλας (4), ἀλλήλοις (1), ἀλλήλους (4), ἀλλήλων (1), ἄλληλα (9)
reflexiu	εαυτου	2	2	αὑτὸ (1), ἑαυτῷ (1)
relatiu	οιος	3	1	οἷον (3)
relatiu	οσαπλασιος	1	1	ὁσαπλάσιόν (1)
relatiu	οσος	1	1	ὅσοι (1)
relatiu	οστις	2	2	οἵτινες (1), ἥτις (1)
relatiu	ος	263	17	αἳ (2), αἵ (2), οἵ (1), οὗ (92), ἃ (4), ἃς (1), ἣ (1), ἥ (11), ἧς (11), ὃν (1), ὃ (10), ὃν (63), ὅ (8), ὅς (16), ὧν (28), ᾗ (2), ᾧ (10)
relatiu	οσπερ	18	3	ἅπερ (1), ὅνπερ (2), ὅπερ (15)
		SUBSTANTIU		
	αναλογια	1	1	ἀναλογίᾳ (1)
	αναλυσις	3	3	ἀναλύσει (1), ἀναλύσεως (1), ἀνάλυσιν (1)
	αξων	13	5	ἄξονα (4), ἄξονι (1), ἄξονος (1), ἄξοσιν (1), ἄξων (6)
	απολειμμα	3	1	ἀπολείμματα (3)
	αποτμημα	1	1	ἀποτμημάτων (1)
	αφη	5	3	ἁφαί (1), ἁφὰς (3), ἁφῶν (1)
	βασις	282	10	βὰσει (1), βάσει (20), βάσεις (31), βάσεσι (2), βάσεσιν (5), βάσεων (7), βάσεως (49), βάσεών (1), βάσιν (92), βάσις (74)
	βιβλιος	3	2	βιβλίου (1), βιβλίῳ (2)
	γνωμων	2	2	γνώμονι (1), γνώμων (1)
	γραμμη	8	4	γραμμαὶ (3), γραμμάς (1), γραμμὴ (2), γραμμῶν (2)
	γωνια	23	4	γωνία (3), γωνίαι (4), γωνίαν (3), γωνίας (13)
	δειξις	1	1	δεῖξις (1)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	διαμετρος	134	8	διαμέτροις (1), διαμέτρου (13), διαμέτρους (3), διαμέτρων (3), διαμέτρῳ (10), διάμετροι (17), διάμετρον (62), διάμετρος (25)
	διαρεσις	1	1	διαίρεσιν (1)
	διορισμος	2	1	διορισμόν (2)
	δυναμις	14	2	δυνάμει (13), δύναμει (1)
	ειδος	2	1	εἶδος (2)
	επαφη	1	1	ἐπαφὴν (1)
	επιλοιπος	1	1	ἐπίλοιπον (1)
	επιταγμα	4	1	ἐπίταγμα (4)
	επιφανεια	404	10	ἐπιφανειας (1), ἐπιφανειᾳ (7), ἐπιφανειῶν (22), ἐπιφανεία (2), ἐπιφανείαις (1), ἐπιφανείας (82), ἐπιφανείᾳ (90), ἐπιφάνεια (150), ἐπιφάνειαι (9), ἐπιφάνειαν (40)
	ευθεια	64	6	εὐθειῶν (23), εὐθείας (7), εὐθείᾳ (7), εὐθεῖα (5), εὐθεῖαι (18), εὐθεῖαν (4)
	ημικυκλιος	4	2	ἡμικυκλίου (3), ἡμικυκλίῳ (1)
	ημισφαιρον	17	4	ἡμισφαιριῳ (1), ἡμισφαιρίου (10), ἡμισφαιρίῳ (2), ἡμισφαίριον (4)
	θεσις	1	1	θέσει (1)
	θεωρημα	1	1	θεωρημάτων (1)
	κατασκευη	2	2	κατασκευήν (1), κατασκευῆς (1)
	κεντρος	204	5	κέντρα (3), κέντρον (26), κέντρου (158), κέντρων (16), κέντρῳ (1)
	κορυφη	64	6	κορυφαὶ (1), κορυφὰς (2), κορυφὴ (17), κορυφὴν (26), κορυφῆς (17), κορυφῶν (1)
	κυβος	6	3	κύβον (3), κύβος (2), κύβου (1)
	κυκλος	542	8	κύκλοι (15), κύκλοις (7), κύκλον (130), κύκλος (176), κύκλου (151), κύκλους (6), κύκλων (16), κύκλῳ (41)
	κυλινδρος	99	6	κυλίνδροις (2), κυλίνδρου (50), κυλίνδρων (2), κυλίνδρῳ (20), κύλινδρον (8), κύλινδρος (17)
	κωνος	414	9	κωνου (1), κώνοις (5), κώνου (154), κώνων (13), κώνῳ (45), κώνῷ (2), κῶνοι (24), κῶνον (36), κῶνος (134)
	λημμα	5	5	λημμάτων (1), λήμμασι (1), λήμμασιν (1), λήμματι (1), λῆμμα (1)
	λογος	213	5	λόγον (174), λόγος (29), λόγου (5), λόγων (3), λόγῳ (2)
	μεγεθος	26	3	μεγεθῶν (9), μεγέθη (7), μέγεθος (10)
	μηκος	7	1	μήκει (7)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	παραλληλογραμμος	43	5	παραλληλογράμμου (10), παραλληλογράμμων (16), παραλληλογράμμῳ (3), παραλληλόγραμμα (10), παραλληλόγραμμον (4)
	παραπληρωμα	2	2	παραπληρώματι (1), παραπλήρωμα (1)
	περας	22	3	περάτων (3), πέρας (12), πέρατα (7)
	περιγραφη	1	1	περιγραφῆς (1)
	περιλειμμα	16	4	περιλειμμάτων (5), περιλείμματα (3), περιλείμματι (6), περίλειμμα (2)
	περιμετρος	25	5	περιμέτρου (3), περιμέτρων (1), περιμέτρῳ (11), περίμετρον (3), περίμετρος (7)
	περιφερεια	48	4	περιφερειῶν (6), περιφερείας (8), περιφέρεια (9), περιφέρειαν (25)
	πλευρα	138	15	πλευραν (1), πλευρας (2), πλευραὶ (13), πλευραί (3), πλευραῖς (2), πλευρᾷ (1), πλευρὰ (20), πλευρὰν (40), πλευρὰς (15), πλευρά (2), πλευράν (2), πλευρᾳ (2), πλευρᾶς (22), πλευρᾷ (2), πλευρῶν (11)
	πληθος	4	1	πλῆθος (4)
	πρισμα	18	3	πρίσμα (4), πρίσματος (13), πρίσματός (1)
	προβλημα	8	2	προβλημάτων (2), πρόβλημα (6)
	πυραμις	32	3	πυραμὶς (10), πυραμίδα (2), πυραμίδος (20)
	ρομβος	34	4	ῥόμβον (1), ῥόμβος (12), ῥόμβου (4), ῥόμβῳ (17)
	σημειον	40	5	σημείοις (2), σημείου (5), σημείων (2), σημεῖα (6), σημεῖον (25)
	στοιχεια	1	1	στοιχειώσει (1)
	συμπτωσις	1	1	συμπτώσεως (1)
	συνθεσις	1	1	σύνθεσιν (1)
	σφαιρα	269	8	σφαιρῶν (4), σφαίραις (2), σφαίρας (142), σφαίρᾳ (42), σφαῖρα (46), σφαῖραν (30), σφαῖρά (2), σφαῖρᾳν (1)
	σχῆμα	148	6	σχημάτων (5), σχήματα (6), σχήματι (20), σχήματος (73), σχῆμα (43), σχῆμά (1)
	τελος	2	1	τέλει (2)
	τετρας	6	1	τετράδος (6)
	τμημα	227	5	τμημάτων (21), τμήματα (23), τμήματι (35), τμήματος (98), τμῆμα (50)
	τομευς	49	5	τομεὺς (11), τομεύς (1), τομεῖ (9), τομέα (20), τομέως (8)
	τομη	9	4	τομαὶ (1), τομὴ (3), τομὴν (4), τομῶν (1)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	τραπεζιον	2	1	τραπεζίου (2)
	τροπος	2	1	τρόπον (2)
	υπεροχη	1	1	ὑπεροχάς (1)
	υψος	134	6	ὕψει (3), ὕψεσι (2), ὕψεσιν (10), ὕψη (2), ὕψος (114), ὕψους (3)
	χωριον	44	4	χωρία (2), χωρίον (18), χωρίου (19), χωρίῳ (5)
		VERB		
	αγω	67	20	ἀγομενη (1), ἀγομένη (3), ἀγομένην (3), ἀγομένης (1), ἀγομένων (1), ἀγομένῃ (6), ἀγάγωμεν (1), ἀχθείσης (2), ἀχθεῖσαι (1), ἀχθήσονται (1), ἀχθῶσιν (4), ἀχθῶσίν (1), ἠγμενη (1), ἠγμέναι (1), ἠγμένην (2), ἠγμένη (24), ἡγμένην (1), ἤχθω (7), ἤχθωσαν (5), ἤχθωσάν (1)
	αναγραφω	13	5	ἀναγεγραμμένη (1), ἀναγεγραμμένον (1), ἀναγεγράφθω (6), ἀναγεγράφθωσαν (3), ἀναγραφῇ (2)
	αναλυω	1	1	ἀναλυθήσεταί (1)
	αναπληροω	1	1	ἀναπεπληρώσθω (1)
	αναστρεφω	1	1	ἀναστρέψαντι (1)
	ανιστημι	1	1	ἀνεστάτω (1)
	αντιπασχω	9	2	ἀντιπεπόνθασι (1), ἀντιπεπόνθασιν (8)
	αποδεικνυμι	3	3	ἀπεδείχθη (1), ἀπεδείχθησαν (1), ἀποδεδειγμένων (1)
	αποκαθιστημι	1	1	ἀποκατασταθῇ (1)
	απολαμβανω	1	1	ἀπολαμβανομένης (1)
	απολιμπανω	1	1	ἀπολειφθέντα (1)
	αποτεμνω	13	4	ἀποτεμνομένη (10), ἀποτεμνομένης (1), ἀποτεμνομένων (1), ἀποτέμνει (1)
	απτω	2	1	ἅπτονται (2)
	αφαιρεω	15	8	ἀφαιρεθείσης (1), ἀφαιρεθέντα (1), ἀφαιρεθέντος (1), ἀφαιρεθέντων (1), ἀφαιρεθῇ (2), ἀφαιρεῖται (1), ἀφῃρημένος (2), ἀφῃρήσθω (6)
	γιγνομαι	31	16	γεγενημένη (1), γεγενημένης (1), γεγενήσθω (4), γεγονέτω (2), γεγονὼς (1), γενηθὲν (2), γεννηθέντα (1), γενομένου (2), γενέσθαι (1), γενόμενος (2), γινομένου (2), γινόμενος (2), γένηται (2), γίγνεται (1), γίγνονται (1), γίνεται (6)
	γραφω	7	5	γεγραμμένον (1), γεγραμμένων (2), γεγράφθω (1), γράφουσιν (2), γράψουσιν (1)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	δει	17	3	δεήσει (1), δεῖ (15), ἔδει (1)
	δεικνυμι	68	11	δεδειγμένον (1), δεδειγμένων (1), δειχθήσεται (4), δειχθῆναι (1), δείξαντα (1), δείξομεν (3), δεῖξαι (6), δέδεικται (25), ἐδείξαμεν (1), ἐδείχθη (23), ἐδείχθησαν (2)
	διαγω	4	3	διαχθῶσιν (1), διηγμέναι (1), διήχθω (2)
	διαιρεω	11	4	διαιρεθείσης (1), διαιρεθήσεται (1), διελόντι (8), διῃρημένης (1)
	διδωμι	77	17	δεδόσθω (2), διδόμενον (1), διδόμενος (1), δοθεισῶν (4), δοθεντων (1), δοθεὶς (5), δοθείς (15), δοθείσης (2), δοθεῖσα (15), δοθεῖσαν (4), δοθὲν (1), δοθέν (3), δοθέντα (6), δοθέντι (8), δοθέντος (4), δοθέντων (4), δοθῇ (1)
	δυναμαι	35	5	δυνάσθω (9), δυνήσονται (1), δύνανται (2), δύναται (22), ἐδύνατο (1)
	εγγραφω	185	14	ἐγγεγραμμένα (2), ἐγγεγραμμένης (2), ἐγγεγραμμένον (59), ἐγγεγραμμένου (50), ἐγγεγραμμένῳ (12), ἐγγεγράφθω (20), ἐγγραφομένου (6), ἐγγραφομένῳ (2), ἐγγραφὲν (9), ἐγγραφέντος (5), ἐγγραφῇ (6), ἐγγράφοντα (1), ἐγγράψαι (8), ἐγγέγραπται (3)
	ειμι	924	35	εἶναι (2), εἶσι (2), εἶσιν (21), εἶσὶ (1), εἶσὶν (26), εἶσίν (5), εἴη (1), εἶναι (22), οὖσαις (3), οὖσης (3), οὖσα (9), οὖσαι (10), οὖσαν (2), ἐστι (82), ἐστιν (124), ἐστὶ (172), ἐστὶν (121), ἐστί (3), ἐστίν (13), ἔσονται (7), ἔσται (69), ἔστι (5), ἔστιν (28), ἔστω (154), ἔστωσαν (12), ἦν (5), ἦσαν (1), ὄντα (2), ὄντος (1), ὄντων (4), ὄντων (2), ὢν (1), ὦσι (1), ὦσιν (4), ᾖ (6)
	εκβαλλω	8	3	ἐκβαλλόμεναι (2), ἐκβεβλήσθω (4), ἐκβεβλήσθωσαν (2)
	εκκειμαι	16	3	ἐκκειμένῳ (1), ἐκκείσθω (9), ἐκκείσθωσαν (6)
	εμπιπτω	2	2	ἐμπεσούσης (1), ἐμπέσῃ (1)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	επιζευγνυμι	60	14	ἐπεζευγμένων (1), ἐπεζεύχθω (3), ἐπεζεύχθωσαν (25), ἐπιζευγνυμένη (2), ἐπιζευγνυμένῃ (1), ἐπιζευγνυουσῶν (5), ἐπιζευγνυούσαις (7), ἐπιζευγνύμεναι (3), ἐπιζευγνύουσαι (6), ἐπιζευγνύουσιν (1), ἐπιζευχθεισῶν (3), ἐπιζευχθεῖσαι (1), ἐπιζευχθῇ (1), ἐπιζεύξωμεν (1)
	επισυντιθημι	1	1	ἐπισυντιθέμενον (1)
	επιτασσω	1	1	ἐπιταχθέν (1)
	επιψαυω	11	5	ἐπιψαυουσῶν (3), ἐπιψαυέτωσαν (1), ἐπιψαύουσα (1), ἐπιψαύουσαι (5), ἐπιψαύουσιν (1)
	ερω	58	17	εἰρημενῳ (1), εἰρημένα (4), εἰρημέναι (3), εἰρημέναις (1), εἰρημένη (1), εἰρημένην (1), εἰρημένης (1), εἰρημένοι (3), εἰρημένοις (2), εἰρημένον (7), εἰρημένος (2), εἰρημένου (10), εἰρημένων (12), εἰρημένῃ (2), εἰρημένῳ (5), εἴρηται (2), ἐρρήθησαν (1)
	ευρισκω	15	4	εὑρεῖν (9), εὑρημέναι (1), εὑρήσθω (1), εὑρήσθωσαν (4)
	εφαπτω	8	6	ἐφαπτομένας (1), ἐφαπτομένη (1), ἐφαπτομένην (2), ἐφαπτομένων (1), ἐφαπτέσθω (1), ἐφαπτόμεναι (2)
	εφιστημι	1	1	ἐπεστάσθω (1)
	εχω	351	18	ἐχούσης (3), ἐχέτω (9), ἔχει (176), ἔχειν (27), ἔχον (6), ἔχοντα (3), ἔχοντες (7), ἔχοντι (11), ἔχοντος (12), ἔχουσα (7), ἔχουσαι (2), ἔχουσαν (1), ἔχουσι (7), ἔχουσιν (12), ἔχων (47), ἔχωσιν (1), ἔχῃ (4), ἕξει (16)
	ζητεω	1	1	ἐζητοῦμεν (1)
	καταγω	1	1	κατήχθω (1)
	καταλειπω	2	2	καταλειφθήσεταί (1), καταλελείφθω (1)
	κατεσκευαζω	3	3	κατεσκευασμένα (1), κατεσκευασμένοις (1), κατεσκευάσθω (1)
	κειμαι	14	2	κείμεναι (1), κείσθω (13)
	λαμβανω	21	6	εἰλημμέναι (1), εἰλήφθω (10), εἰλήφθωσαν (6), λαβεῖν (2), λαμβάνω (1), ληφθείσης (1)
	λεγω	34	2	λεγόμενον (2), λέγω (32)
	λειπω	9	5	λειφθήσεταί (1), λελείφθω (4), λείπειν (1), λείψομεν (1), λείψομέν (2)
	μανθανω	1	1	ἐμάθομεν (1)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	μενω	8	1	μενούσης (8)
	μεταγω	1	1	μεταγαγεῖν (1)
	μετρεω	9	3	μετρείσθω (4), μετρεῖ (3), μετροῦνται (2)
	νοεω	24	3	νοείσθω (19), νοείσθωσαν (4), νοηθῇ (1)
	παραδιδωμι	1	1	παραδέδοται (1)
	περιγραφω	179	14	περιγεγραμμένα (2), περιγεγραμμένης (3), περιγεγραμμένον (56), περιγεγραμμένος (2), περιγεγραμμένου (57), περιγεγραμμένῳ (8), περιγεγράφθω (16), περιγραφομένου (4), περιγραφὲν (12), περιγραφέντος (2), περιγραφόμενον (2), περιγραφῇ (4), περιγράφοντες (1), περιγράψαι (10)
	περιεχω	68	8	περιεχομένη (2), περιεχομένου (3), περιεχομένων (3), περιεχομένῳ (15), περιεχόμενα (10), περιεχόμενον (30), περιεχόντων (3), περιέχεται (2)
	περιλαμβανω	15	9	περιλαμβανομένη (2), περιλαμβανομένης (1), περιλαμβανέτω (1), περιλαμβάνει (2), περιλαμβάνειν (1), περιλαμβάνεται (4), περιλαμβάνοντος (2), περιλαμβάνουσα (1), περιληφθὲν (1)
	περιλειπω	6	4	περιλειπομένων (1), περιλειπόμενα (3), περιλειπόμενον (1), περιλελειμμένον (1)
	περιφερω	10	8	περιενεχθεισῶν (1), περιενεχθείη (1), περιενεχθεῖσα (1), περιενεχθὲν (1), περιενεχθέντες (1), περιενεχθέντος (2), περιενεχθήτω (1), περιενεχθῇ (2)
	πιπτω	1	1	πεσεῖται (1)
	ποιεω	25	7	πεποιήσθω (13), ποιείτω (5), ποιείτωσαν (1), ποιεῖν (3), ποιούσας (1), ποιοῦντες (1), ποιοῦσαι (1)
	πολλαπλασιαζω	1	1	πεπολλαπλασιάσθω (1)
	προαποδεικνυμι	1	1	προαπεδείχθη (1)
	προγραφω	4	3	προγεγραμμένον (1), προγεγραμμένου (1), προγέγραπται (2)
	προδεικνυμι	5	4	προδεδειγμένων (1), προδειχθὲν (1), προδειχθέντα (1), προδέδεικται (2)
	προερω	7	4	προειρημένοις (1), προειρημένον (1), προειρημένος (2), προειρημένων (3)
	προκειμαι	4	3	προκειμένοις (1), προκειμένου (2), προέκειτο (1)
	προσβαλλω	1	1	προσβεβλήσθω (1)

Continua a la pàgina següent

Taula 2.2: Tots els lemes i les formes de *Sph. et Cyl.*, classificats segons la seva categoria gramatical. Nombre d'ocurrències i de formes, així com el nombre d'ocurrències de cadascuna de les formes (cont.).

TIPUS	LEMA	# O.	# F.	FORMA (# O.)
	προσκειμαι	3	2	προσκείσθω (1), προσκείσθωσαν (2)
	προσλαμβανω	1	1	προσλαβὼν (1)
	προστιθημι	1	1	προστιθεμένων (1)
	προτιθημι	2	2	προτεθέν (1), προτεθέντος (1)
	συγκειμαι	20	7	συγκειμένη (4), συγκειμένης (8), συγκειμένου (1), συγκειμένῃ (1), συγκειμένῳ (1), συγκείμενος (3), σύγκειται (2)
	συμβαλλω	2	1	συμβάλλουσιν (2)
	συμπιπτω	3	3	συμπιπτέτωσαν (1), συμπέσωσιν (1), συμπίπτουσαι (1)
	συναποδεικνυμι	1	1	συναποδέδεικται (1)
	συναπτω	6	2	συνῆπται (5), συνημμένος (1)
	συνιστημι	4	3	συστήσασθαι (2), συνεστάτω (1), συνέσταται (1)
	συντιθημι	14	2	συνθέντι (7), συντεθήσεται (7)
	ταρασσω	1	1	τεταραγμένη (1)
	τεμνω	48	15	τεμεῖ (1), τεμεῖν (7), τεμνομένης (1), τεμνομένων (1), τετμημένη (2), τετμήσθω (22), τετμήσθωσαν (1), τμηθείσης (1), τμηθήτω (1), τμηθῇ (5), τέμνον (1), τέμνοντα (1), τέμνοντες (2), τέμνων (1), τέμωμεν (1)
	τυγχανω	2	2	τυγχάνουσιν (1), ἔτυχεν (1)
	υπαρχεω	1	1	ὑπαρχόντων (1)
	υπερεχω	4	4	ὑπερέξει (1), ὑπερέχει (1), ὑπερέχειν (1), ὑπερέχῃ (1)
	υποκειμαι	5	4	ὑποκειμένων (2), ὑποκείμενον (1), ὑποκείμενος (1), ὑπέκειτο (1)
	υποτεινω	9	5	ὑποτεινουσῶν (3), ὑποτεινούσῃ (3), ὑποτείνει (1), ὑποτείνουσα (1), ὑποτείνουσαι (1)
	φερω	14	5	οἰσθήσεται (3), οἰσθήσονται (7), οἰσθήσονταὶ (1), ἐνεχθήσεται (1), ἐνεχθήσονται (2)
	φημι	3	1	φημὶ (3)

Taula 2.3: Tots els grups (formes) de lletres denotatives (3535 ocurrències i 413 formes).

FORMA (# OC.)
Α (67), ΑΒ (69), ΑΒΓ (100), ΑΒΓΔ (57), ΑΒΓΝ (1), ΑΒΔ (12), ΑΒΔΓ (2), ΑΒΔΕ (1), ΑΒΕΖ (1), ΑΒΖ (1), ΑΒΧ (1), ΑΓ (82), ΑΓΒ (2), ΑΓΒΔ (7), ΑΓΔ (1), ΑΓΔΒ (1), ΑΓΕΘΖΔΗ (1), ΑΓΗ (2), ΑΓΛ (1), ΑΔ (28), ΑΔΒ (13), ΑΔΒΕ (2), ΑΔΓ (23), ΑΔΕ (5), ΑΔΜ (2), ΑΕ (50), ΑΕΒ (9), ΑΕΓ (15), ΑΕΔ (5), ΑΕΖ (2), ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ (1), ΑΕΖΓ (1), ΑΕΗ (3), ΑΕΜ (3), ΑΖ (3), ΑΖΓ (1), ΑΖΗΒΘΔΓ (1), ΑΗ (22), ΑΗΒΚ (3), ΑΗΓ (5), ΑΗΕ (5), ΑΗΘ (1), ΑΘ (51), ΑΘΓ (3), ΑΘΕ (1), ΑΘΕΚΒ (2), ΑΚ (14), ΑΚΓ (1), ΑΛ (9), ΑΛΓ (2), ΑΜ (3), ΑΜΘΕ (1), ΑΜΚ (2), ΑΜΝΞΟΓ (1), ΑΝ (1), ΑΝΒΓ (1), ΑΞ (3), ΑΟ (1), ΑΡ (7), ΑΡΓ (4), ΑΧΒ (1), Α’ (1), Β (96), ΒΑ (13), ΒΑΓ (4), ΒΑΓΘ (1), ΒΑΔ (10), ΒΑΖ (4), ΒΑΗ (5), ΒΑΛ (1), ΒΓ (28), ΒΓΔ (11), ΒΓΖ (4), ΒΓΖΘ (2), ΒΓΘΖ (1), ΒΔ (55), ΒΔΑ (1), ΒΔΓ (7), ΒΔΕΖ (1), ΒΔΖ (7), ΒΔΖΕ (3), ΒΔΖΘ (3), ΒΔΖΚ (1), ΒΕ (16), ΒΕΔ (1), ΒΖ (51), ΒΖΓ (2), ΒΖΓΑ (1), ΒΖΓΛ (2), ΒΖΔ (1), ΒΖΚ (1), ΒΖΚΔ (1), ΒΗ (7), ΒΘ (8), ΒΘΓ (6), ΒΘΖΑ (2), ΒΘΖΚ (1), ΒΚ (9), ΒΚΖ (3), ΒΚΖΔ (1), ΒΛ (4), ΒΝ (2), ΒΞ (2), ΒΞΛ (2), ΒΠ (4), ΒΡ (1), ΒΣ (2), ΒΧ (7), Β’ (1), Γ (46), ΓΑ (11), ΓΑΗ (1), ΓΑΡ (2), ΓΒ (13), ΓΔ (52), ΓΕ (16), ΓΕΖ (1), ΓΖ (7), ΓΖΒ (1), ΓΖΔ (7), ΓΗ (6), ΓΗΝ (1), ΓΘ (16), ΓΘΒ (1), ΓΚ (2), ΓΛ (6), ΓΛΖ (1), ΓΛΖΜΔ (2), ΓΜ (1), ΓΝ (3), ΓΞ (3), ΓΤ (1), Δ (78), ΔΑ (8), ΔΑΒ (1), ΔΑΕ (4), ΔΑΗ (1), ΔΑΞ (1), ΔΒ (21), ΔΒΓ (2), ΔΒΕ (8), ΔΓ (10), ΔΓΕ (1), ΔΕ (28), ΔΕΒ (2), ΔΕΓ (5), ΔΕΖ (21), ΔΖ (40), ΔΖΒ (1), ΔΖΗ (1), ΔΗ (4), ΔΗΓ (2), ΔΘ (11), ΔΘΚ (1), ΔΚ (6), ΔΛ (11), ΔΜ (3), ΔΝ (1), ΔΞ (3), ΔΣ (2), ΔΤ (2), ΔΧ (19), Ε (56), ΕΑ (17), ΕΒ (22), ΕΒΔ (1), ΕΒΔΖ (3), ΕΒΖ (6), ΕΓ (13), ΕΔ (9), ΕΔΒ (6), ΕΔΖ (10), ΕΔΗ (2), ΕΖ (74), ΕΖΗ (10), ΕΖΗΔ (1), ΕΖΗΘ (6), ΕΖΘ (1), ΕΖΩ (1), ΕΗ (10), ΕΗΖ (5), ΕΗΖΟ (1), ΕΘ (10), ΕΙ (3), ΕΚ (21), ΕΚΒ (1), ΕΛ (15), ΕΜ (1), ΕΝ (1), ΕΞ (3), ΕΟ (4), ΕΟΖΗ (1), ΕΡ (1), ΕΩΖ (1), Ζ (36), ΖΑ (1), ΖΒ (18), ΖΒΔΘ (1), ΖΓ (11), ΖΔ (23), ΖΔΗ (1), ΖΕ (4), ΖΕΓ (7), ΖΕΔ (2), ΖΕΘ (2), ΖΗ (38), ΖΗΘ (1), ΖΘ (25), ΖΘΚ (2), ΖΚ (14), ΖΚΗ (1), ΖΛ (4), ΖΛΡ (1), ΖΜ (8), ΖΜΔ (1), ΖΝ (5), ΖΝΧ (1), ΖΠ (2), ΖΡΛ (3), ΖΧ (10), ΖΩΕ (2), Η (53), ΗΑ (5), ΗΑΓΖ (1), ΗΒ (4), ΗΒΖ (1), ΗΒΘ (1), ΗΒΘΕ (1), ΗΓ (4), ΗΓΟ (1), ΗΔ (2), ΗΕ (4), ΗΕΖ (8), ΗΕΘ (1), ΗΖ (17), ΗΘ (46), ΗΘΑ (2), ΗΘΚ (7), ΗΚ (1), ΗΛ (3), ΗΜ (4), ΗΜΧ (1), ΗΝ (4), ΗΝΠ (1), ΗΞ (3), ΗΟ (2), ΗΤ (2), Ηϒ (2), Θ (57), ΘΑ (25), ΘΒ (27), ΘΒΕ (1), ΘΒΚ (2), ΘΓ (27), ΘΓΕ (2), ΘΔ (4), ΘΕ (12), ΘΕΖ (1), ΘΖ (27), ΘΖΗ (2), ΘΗ (16), ΘΗΚ (1), ΘΙ (1), ΘΚ (47), ΘΚΛ (20), ΘΛ (7), ΘΜ (6), ΘΝ (5), ΘΞΚΛ (1), ΘΠ (1), ΘΧ (2), Ι (12), Κ (54), ΚΑ (5), ΚΒ (21), ΚΒΖ (1), ΚΒΧ (3), ΚΓ (1), ΚΔ (18), ΚΔΤ (1), ΚΔΧ (2), ΚΕ (7), ΚΖ (16), ΚΖΛ (1), ΚΗ (1), ΚΘ (17), ΚΘΔ (2), ΚΘΛ (1), ΚΛ (43), ΚΛΜ (6), ΚΛΜΝ (1), ΚΜ (4), ΚΝΒ (2), ΚΞ (2), ΚΤΔ (7), Λ (20), ΛΒ (1), ΛΓ (2), ΛΔ (21), ΛΕ (4), ΛΖ (8), ΛΖΡ (1), ΛΘ (2), ΛΘΞΚ (1), ΛΚ (10), ΛΚΖ (1), ΛΚΘ (2), ΛΚΜ (3), ΛΚΝΜ (1), ΛΜ (13), ΛΝ (8), ΛΞ (3), ΛΟΓ (2), ΛΠ (2), ΛΡ (3), ΛΧ (21), Μ (34), ΜΑ (3), ΜΒΝ (1), ΜΔ (7), ΜΕΝ (3), ΜΗ (2), ΜΗΧ (1), ΜΘ (7), ΜΚ (6), ΜΚΓ (2), ΜΛ (3), ΜΝ (23), ΜΝΞ (26), ΜΟ (1), ΜΧ (1), Ν (38), ΝΑΖ (1), ΝΒ (3), ΝΓ (5), ΝΕΞ (3), ΝΗ (1), ΝΗΓ (3), ΝΚ (2), ΝΛ (6), ΝΟ (6), ΝΡ (1), ΝΤ (4), Νϒ (2), Ξ (36), ΞΑ (4), ΞΒ (1), ΞΕΟ (3), ΞΚΑ (2), ΞΝ (1), ΞΝΟ (1), ΞΟ (3), Ξϒ (4), Ο (20), ΟΕΓ (3), ΟΖ (1), ΟΞΠ (1), ΟΠΡ (12), ΟΡΠ (1), ΟΦ (3), Π (15), ΠΒ (2), ΠΘ (1), ΠΝ (2), ΠΟ (5), ΠΟΡ (1), ΠΡ (2), Ρ (36), ΡΒ (1), ΡΓ (2), ΡΕ (2), ΡΖ (9), ΡΖΛ (1), ΡΚ (1), ΡΛ (16), ΡΛΔ (3), ΡΛΖ (2), ΡΝ (1), ΡΞ (2), ΡΧ (2), ϛ (12), Σ (15), ΣΟ (1), ΣΟΦ (1), ΣΡ (2), ΣΤ (2), Τ (9), ΤΓ (3), ΤΔ (12), ΤΗΓ (2), ΤΚΔ (1), ϒ (8), ϒΛ (2), ϒΤ (2), ϒΦ (2), ΦΗ (2), Χ (10), ΧΑΒ (2), ΧΒ (5), ΧΓ (1), ΧΔ (4), ΧΖ (7), ΧΚΓΛ (1), ΧΛ (1), ΧΡ (4), ΧΣ (1), ΧΤ (12), ΧΦ (2), Ψ (1), ΨΘΚ (6), Ψϒ (11), Ω (1), ΩΦ (6)