



Desenvolupament de microgeneradors inercials electromagnètics en tecnologia de micro sistemes per a la recuperació d'energia mecànica residual de l'ambient

Núria Fondevilla Sala

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tdx.cat) i a través del Dipòsit Digital de la UB (diposit.ub.edu) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX ni al Dipòsit Digital de la UB. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX o al Dipòsit Digital de la UB (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tdx.cat) y a través del Repositorio Digital de la UB (diposit.ub.edu) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR o al Repositorio Digital de la UB. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR o al Repositorio Digital de la UB (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tdx.cat) service and by the UB Digital Repository (diposit.ub.edu) has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized nor its spreading and availability from a site foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository is not authorized (framing). Those rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.



UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Física

Departament d'Electrònica

DESENVOLUPAMENT DE
MICROGENERADORS INERCIALS ELECTROMAGNÈTICS
EN TECNOLOGIA DE MICROSISTEMES PER A LA RECUPERACIÓ
D'ENERGIA MECÀNICA RESIDUAL DE L'AMBIENT

Núria Fondevilla Sala

Director tesis:

Dr.Christophe Serre

Barcelona, Maig 2012

DISCUSSIÓ DELS RESULTATS

V.1. Introducció

En el capítol anterior s'ha descrit la fabricació d'un dispositiu generador electromagnètic ressonant. Aquest dispositiu, construït de manera modular, està format per un ressonador mecànic i un transductor electromagnètic, realitzat amb una bobina de Cu micromecanitzada.

El ressonador s'ha fabricat amb un imant de NdFeB amb un volum total de $7 \times 7 \times 6 \text{mm}^3$ i una membrana de Kapton de $127 \mu\text{m}$ de gruix i amb diferents mides possibles 11×11 , 13×13 i $15 \times 15 \text{mm}^2$ enganxada entre dos marcs de PCB.

Quant al transductor electromagnètic, consta d'una bobina micromecanitzada amb Cu electrodepositat de $15 \mu\text{m}$ de gruix. El disseny del radi interior és compatible amb la mida de l'imant. S'ha deixat 0.5mm d'espai en cada dimensió, que correspon a unes $250 \mu\text{m}$ de marge en cada costat, per evitar una col·lisió.

Amb una bobina planar de 52 espires de Cu electrodepositat de $15 \mu\text{m}$ de gruix i una amplada de pista de $15 \mu\text{m}$ i $10 \mu\text{m}$ de separació, el dispositiu ha permès generar una tensió de sortida, V_o , d'uns 180mV , i una potència de sortida, P_L , de l'ordre dels $50 \mu\text{W}$ per a una amplitud d'excitació de $5 \mu\text{m}$.

V.2. Optimització segons el "roadmap"

Per tal d'optimitzar la bobina de Cu del dispositiu ressonador s'ha simulat la tensió de sortida, V_o , en funció del número d'espires, (Fig.V.2) i la potència de sortida, P_{Lopt} , calculada amb la resistència de càrrega òptima, R_{Lopt} , en funció del número d'espires, per les diferents distàncies entre els eixos de les pistes, (Fig.V.3).

La microbobina de Cu simulada té un gruix de $15 \mu\text{m}$. El seu radi intern, r_i , és de 4.24mm i el seu radi extern, r_e , depèn dels paràmetres de les espires:

$$r_e = r_i + n^{\circ} esp \cdot d_{esp} \quad (V.1)$$

essent $n^{\circ} esp$, el número d'espires de la bobina i d_{esp} , les distàncies entre els eixos de les microespires de Cu. Aquestes distàncies són de 12 , 20 , 35 i $50 \mu\text{m}$ i els hi corresponen unes separacions entre les pistes de 6 , 10 , 15 i $20 \mu\text{m}$ respectivament, és a dir, les amplades són similars a les separacions entre pistes. Els paràmetres de les microespires simulades s'han representat esquemàticament en la Fig.V.1.

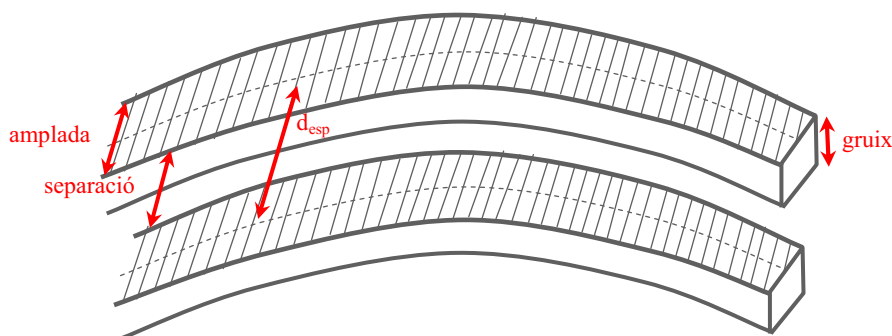


Fig.V.1 Representació esquemàtica de les microespires de la bobina de Cu.

Per realitzar els càlculs, s'ha considerat un esmoreïment paràsit de 0.001 i les condicions corresponents a una freqüència de ressonància, f_{res} , de 120Hz i una amplitud d'excitació, Y_o , de $4.4 \mu\text{m}$ que segons l'anàlisi realitzat per Roundy [1], són les estàndards de vibracions de baix nivell que apareixen normalment en ambients domèstics i d'oficines.

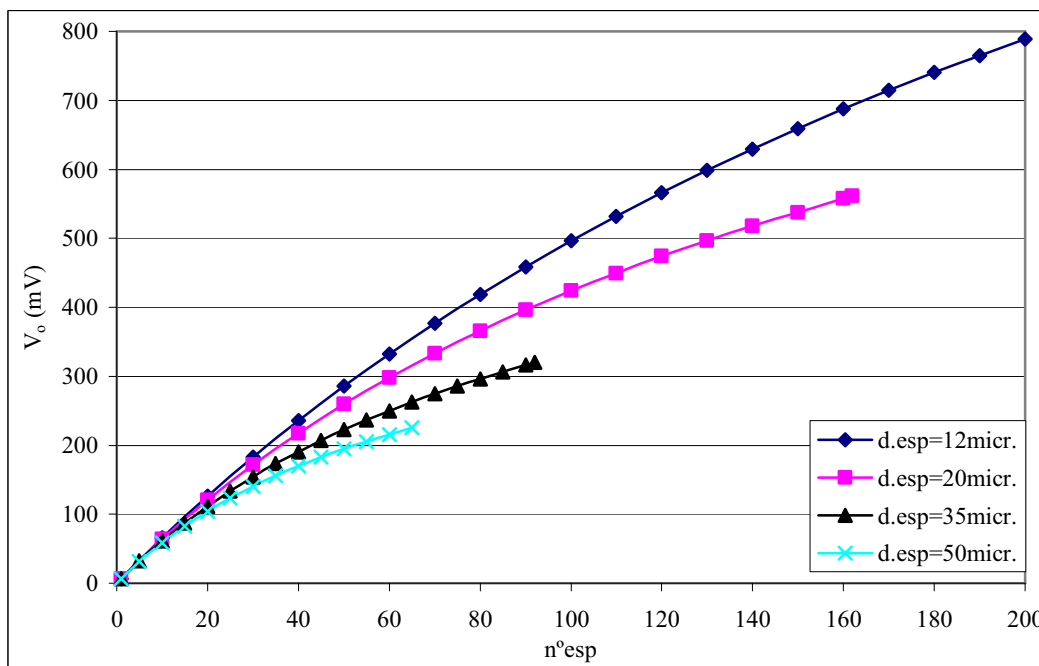


Fig.V.2 Tensió de sortida V_o , simulada en funció del número d'espores, $n^{\circ}esp$, per a diferents distàncies entre els eixos de les espores, d_{esp} .

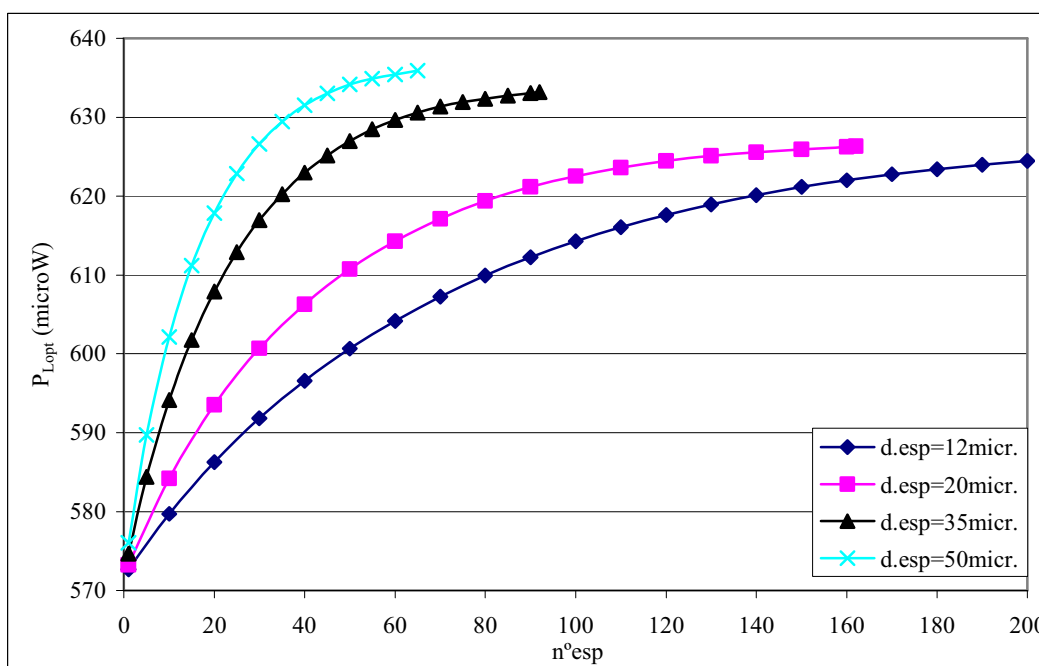


Fig.V.3 Potència de sortida òptima, P_{Lopt} , simulada en funció del número d'espores, $n^{\circ}esp$, per a diferents distàncies entre els eixos de les espores, d_{esp} .

En aquestes gràfiques s'observa una minimització de la tensió de sortida, V_o , en augmentar la distància entre els eixos de les espores, d_{esp} , tot mantenint el mateix nombre d'espores. Aquest allunyament de les espores de l'imant, per l'augment del radi de la bobina, és el causant d'una disminució de la variació de flux i de la tensió generada.

En canvi, la potència de sortida, P_{Lopt} , es maximitzarà si augmenta la distància entre els eixos de les espores. En aquest cas, la disminució de la tensió es veurà compensada per una forta disminució de la resistència, associada a una major amplada de pista, augmentant la potència generada.

V.3. Discussió dels resultats

En primer lloc, cal tenir present la problemàtica de la miniaturització explicada anteriorment en el capítol II. La principal conseqüència de l'escalabilitat cap a mides més petites és la reducció de la densitat de potència [2, 3]. Mentre que els generadors inercials vibracionals d'escala macromètrica assoleixen les condicions d'esmoreïment òptim quan l'electromagnètic iguala al paràsit, en el cas dels microdispositius l'esmoreïment electromagnètic és molt menor degut a una reducció en l'acoblament electromagnètic.

En aquest apartat es comparen els resultats de tensió i potència obtinguts experimentalment amb el prototip fabricat en el capítol anterior, amb els que apareixen en la literatura. Després, s'analitzen els problemes de no linealitat i de reproductibilitat del dispositiu i, finalment, s'estudien possibles millores i optimitzacions a aplicar al ressonador en un futur.

V.3.1. Situació del prototip construït respecte l'estat de l'art

Es realitza un estudi de l'escalat de potències teòric dels generadors oscil·lators de la literatura per comparar-ho amb els resultats experimentals obtinguts amb el prototip.

Refs.	Generator Volume (cm ³)	Vibration Frequency (Hz)	Vibration Amplitude ^a (μm _{pk})	Vibration Acceleration ^a (g _{pk})	No-load Voltage (V _{rms})	Max. Power (W)	Power Density (W/cm ³)	Normalized Power Density (W/cm ³ ·g ²)
U. Sheffield [14]	0.025	4400	0.5	39	--	3 x 10 ⁻⁷	1.2 x 10 ⁻⁵	7.9 x 10 ⁻⁹
MIT [4]	23.5	2	2 x 10 ⁴	0.3	--	4 x 10 ⁻⁴	1.7 x 10 ⁻⁵	1.6 x 10 ⁻⁴
Yamaguchi U. [5]	123	2	~10 ⁴	~0.2	3 (peak)	1.87 x 10 ⁻²	1.5 x 10 ⁻⁴	5.9 x 10 ⁻³
U. Tokyo [6, 7]	500	6	2.75 x 10 ³	0.4	--	9.5 x 10 ⁻²	1.9 x 10 ⁻⁴	1.2 x 10 ⁻³
Chinese U. Hong Kong [13]	1	110	200	9.7	2.2 (peak)	8.3 x 10 ⁻⁴	8.3 x 10 ⁻⁴	8.8 x 10 ⁻⁶
U. Southampton [8]	0.24	322	25	10	0.013	5.3 x 10 ⁻⁴	2.2 x 10 ⁻³	2.1 x 10 ⁻⁵
U. Southampton [9]	0.84	322	13	5.4	0.009	3.7 x 10 ⁻⁵	4.4 x 10 ⁻⁵	1.5 x 10 ⁻⁶
U. Southampton [9]	3.15	--	--	--	--	1.57 x 10 ⁻⁴	5.0 x 10 ⁻⁵	--
Canon/U. Warwick [10]	~2.0*	700	0.64	1.3	3.2 x 10 ⁻⁴	4 x 10 ⁻¹⁰	2.0 x 10 ⁻¹⁰	1.3 x 10 ⁻¹⁰
U. Michigan [11]	~2.3*	1	--	--	0.006 (peak)	4 x 10 ⁻⁶	1.7 x 10 ⁻⁶	--
Tyndall/U. Southampton [12]	0.1	1600	0.039	0.4	--	1 x 10 ⁻⁷	1.0 x 10 ⁻⁶	6.3 x 10 ⁻⁶
Tyndall/U. Southampton [12]	0.1	9500	0.0011	0.4	--	1.2 x 10 ⁻⁷	1.2 x 10 ⁻⁶	7.5 x 10 ⁻⁶
U. Southampton/Tyndall [15]	0.06	357	0.84	0.43	0.03 [†]	2.85 x 10 ⁻⁶	4.8 x 10 ⁻⁵	2.6 x 10 ⁻⁴
National Sun Yat-Sen Univ. [16]	0.45	60	--	--	0.04 (peak)	1 x 10 ⁻⁴	2.2 x 10 ⁻⁴	--
U. Barcelona	0.6	360	6.8	3.6	--	2 x 10 ⁻⁷	3.3 x 10 ⁻⁷	2.6 x 10 ⁻⁸
ETH [17]	30	--	--	--	--	3.5 x 10 ⁻⁵	1.2 x 10 ⁻⁶	--
Perpetuum [18]	130	100	3.5	0.14	--	3.5 x 10 ⁻³	2.7 x 10 ⁻⁵	1.4 x 10 ⁻³
Perpetuum [18]	130	100	35	1.4	15.6	4.0 x 10 ⁻²	3.1 x 10 ⁻⁴	1.6 x 10 ⁻⁴
Ferro Solutions [19]	75	21	56	0.1	--	9.3 x 10 ⁻³	1.2 x 10 ⁻⁴	1.2 x 10 ⁻²

^aValues shown in italics were calculated using the formula $a = y_0 (2\pi f)^2 / 9.8$ where a is the acceleration (in g's) and y_0 and f_r are the vibration amplitude and resonant frequency, respectively. *Volume of cantilever and magnet. [†]Scaled up linearly from reported value at 1 m/s²_{rms} acceleration.

Fig. V.4 Resum dels dispositius oscil·ladors [20].

La taula de la Fig. V.4 resumeix els dispositius comparant-los segons diferents mètriques. Es calcula el volum actiu magnètic del generador (format pel volum de l'imant més el de la bobina), la densitat de potència (W/cm³) i la densitat de potència normalitzada a l'acceleració (W/cm³·g²). Aquesta última dona una manera de comparar el funcionament relatiu de generadors de diferents mides operant a diferents condicions d'excitació. Es pot concloure que es poden assolir densitats de potència més grans, de 2mW/cm³, sempre que hi hagi una acceleració alta.

En primer lloc, els dispositius oscil·ladors es poden classificar segons l'escala: macro i micro. Els dispositius macro de grups del MIT [4], de les universitats del Japó [5], de Tokyo [6-7] i de Southampton [8-9] empen macrocomponents. Els seus volums típics són d'uns quants cm³ i els rangs de potències generades es troben entre els centenars de μW i els mW. En canvi, pel que fa als grups que treballen en integrar tecnologies de micro sistemes en els dispositius per millorar-ne la seva reproductibilitat i fiabilitat, es poden classificar segons si és la bobina la que es mou respecte l'imant fix o a la inversa.

D'una banda hi ha els microgeneradors amb una microbobina mòbil ubicada sobre uns microcantilevers que es mouen respecte l'imant. Aquest tipus de microgeneradors, amb una elevada complexitat tecnològica, són els desenvolupats per Mizuno [10] i els de la universitat de Southampton [11-12]. Per altra banda, els dispositius amb l'imant mòbil respecte la bobina es caracteritzen per tenir un disseny molt més simple, com els de les universitats de Hong Kong [13], Sheffield [14], de Southampton [15] i de Taiwan [16] i el del grup de ETH [17]. A partir de les densitats de potències normalitzades, s'ha arribat a la conclusió que les obtingudes per un imant permanent vibrant són superiors a les generades per les vibracions d'un cantilever, degut a una major massa inercial. Això mostra una preferència cap al segon disseny.

Per últim, cal destacar l'existència de dos dispositius comercials, el de Perpetuum [18] i el de Ferro Solutions [19] que utilitzen la potència generada per sistemes magnètics en ressonància. La raó de què aquests dispositius generin una potència molt elevada per a petites vibracions és que són a escala macro.

Cal tenir present que en les aplicacions pràctiques la freqüència del pic, relacionada amb l'acceleració de l'excitació, s'ha d'adequar a les vibracions de l'ambient.

Si l'acceleració de l'excitació, a_o , ve donada per:

$$a_o = Y_o(2\pi f)^2 = Y_o\omega_n^2 \quad (\text{V.2})$$

i la potència òptima de sortida, P_{Lopt} , deduïda en el capítol III, (III.34) és:

$$P_{Lopt} = \frac{m\omega_n^3 Y_o^2}{16\zeta_p} \left(\frac{\zeta_c}{\zeta_c + \zeta_p} \right) = \frac{ma_o^2}{16\zeta_p\omega_n} \left(\frac{\zeta_c}{\zeta_c + \zeta_p} \right) \quad (\text{V.3})$$

aleshores, al normalitzar la potència òptima a l'acceleració de la gravetat s'obté, $P_{Lopt\ norm}$:

$$P_{Lopt\ norm} = \frac{ma^2}{16\zeta_p\omega_n} \left(\frac{\zeta_c}{\zeta_c + \zeta_p} \right) \quad (\text{V.4})$$

essent $a \equiv \frac{a_o}{g}$, l'acceleració d'excitació normalitzada a la de la gravetat.

El dispositiu experimental, estudiat en el capítol anterior, amb un volum actiu d'uns 1.35cm^3 , considerant una freqüència de ressonància d'uns 344Hz, una amplitud de la vibració de $5.1\mu\text{m}$, i un esmorteïment paràsit de 0.008, obtingut a partir d'ajustos, genera una potència òptima de sortida, P_{Lopt} , de l'ordre dels $50\mu\text{W}$. Els resultats experimentals normalitzats corresponents són de:

$$a = 2.4$$

$$P_{Lopt\ norm} = 6.4\mu\text{W}/\text{cm}^3\text{g}^2$$

Per tant, la densitat de potència normalitzada, $P_{Lopt\ norm}$, es troba en el rang de l'esperada segons l'escalat teòric de tendència reportat per Arnold en [20].

La relació entre la densitat de potència i el volum no segueix una tendència clara, com mostra la gràfica de la Fig.V.5. En canvi quan, en la gràfica de la Fig.V.6, es representa la densitat de potència normalitzada a l'acceleració de la gravetat en funció del volum del generador, s'observa una tendència a l'alça amb la mida del dispositiu. En aquesta gràfica s'han dibuixat dues corbes corresponents a un escalat amb L^2 i un altre amb L^4 . En efecte, si s'assumeixen ζ_c , a_o i ω_n independents de la mida del dispositiu, L ; la massa $m \propto L^3$ i l'esmorteïment paràsit $\zeta_p \propto L^{-2}$, es poden deduir les dependències teòriques de la P_{Lopt} respecte L quan predomina:

- l'esmorteïment electromagnètic, ζ_c , sobre el mecànic, ζ_p :

$$P_{Lopt} \approx \frac{m\omega_n^3 Y_o^2}{16\zeta_p} \propto L^5 a_o^2 \rightarrow P_{Lopt} \propto L^2 \cdot Volum \cdot a_o^2 \quad (V.5)$$

- l'esmoreïment mecànic, ζ_p , sobre l'electromagnètic, ζ_c :

$$P_{Lopt} \approx \frac{m\omega_n^3 Y_o^2}{16\zeta_c^2} \zeta_c \propto L^7 a_o^2 \rightarrow P_{Lopt} \propto L^4 \cdot Volum \cdot a_o^2 \quad (V.6)$$

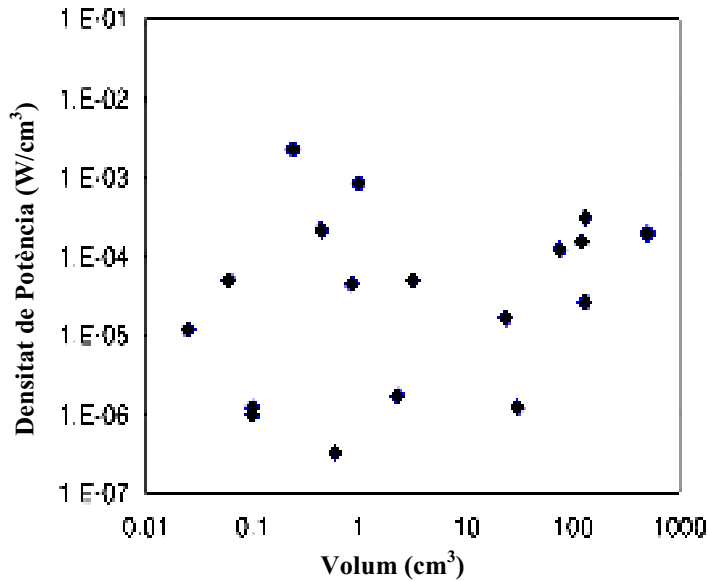


Fig.V.5 Resum dels generadors vibracionals segons la densitat de potència generada en funció de la mida

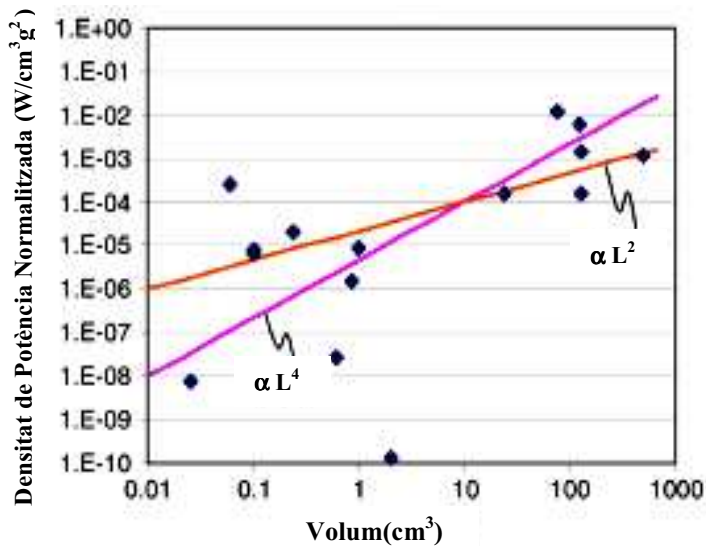


Fig.V.6 Resum dels generadors vibracionals segons la densitat de potència normalitzada generada ($W/cm^3 \cdot g^2$) en funció de la mida

Encara que els resultats experimentals de la literatura no reproduïen experimentalment amb exactitud cap de les dues corbes teòriques si que s'observa una certa relació amb el

predit teòricament. Malgrat tot, no se'n poden extraure conclusions sobre quin és el mecanisme d'esmoreïment dominant.

S'ha de tenir en compte que la majoria dels valors de densitat de potència elevats corresponen a ressonadors construïts amb bobines convencionals enlloc de les micromecanitzades compatibles amb la tecnologia del Si. No obstant, l'optimització dels processos de la fotolitografia de resina gruixuda permetria un augment del gruix de les bobines que implicaria un increment en la potència generada. D'aquesta manera, l'augment del gruix de les pistes fins al rang entre les 20 i 40 μm comportaria la generació de potències entre els centenars de μW i fins a més de 800mV de voltatge de sortida. Aquests nivells de tensió assolits serien compatibles amb els requeriments relacionats amb l'ús de circuits de rectificació estàndards per generar un senyal continu.

V.3.2. Dificultats trobades

Malgrat la bona densitat de potència obtinguda, s'han observat efectes de no linealitat en la ressonància del dispositiu. El comportament metastable del ressonador implica la necessitat de treballar en condicions de freqüència d'excitació creixent per maximitzar la potència obtinguda. A més a més, a nivell de disseny del dispositiu, s'haurà de tenir en compte la dependència de la freqüència del pic en funció de l'amplitud d'excitació.

Per altra banda, també hi ha problemes de reproductibilitat en la fabricació de les bobines degut a l'alta probabilitat de defectes, quan es treballa amb resines gruixudes, perquè s'està en condicions límit: amb bobines gruixudes i a la vegada amb amplades i separacions entre pistes molt petites.

En ser el procés de fabricació de les bobines additiu, un sol defecte en la fotolitografia provoca un tall en una pista i, per tant, és un defecte destructiu per la bobina sencera. En tractar-se d'una fotolitografia amb una relació d'aspecte propera a 1, la probabilitat de defectes augmenta considerablement degut a les dificultats en il·luminar uniformement el fons. Una il·luminació incorrecte provocaria que, després del revelat, quedessin restes de resina no degradades en les pistes on no s'hi dipositarà el Cu. Una solució és trobar un equilibri entre el temps d'il·luminació i el de revelat, per evitar restes de resines sense afectar la resolució lateral de les pistes. A més a més, existeix un problema electroquímic per poder dipositar el Cu quan les parets laterals són profundes. Això és degut a una major dificultat de l'electròlit per a reaccionar i n'augmenta les possibilitats de formació de bombolles. En el lloc on apareix una bombolla no es diposita el Cu.

V.3.3. Optimitzacions i millores futures

Una forma de millorar-ho podria ser utilitzant un procés subtractiu. A l'electrodipòsit d'una capa de Cu se li realitzaria un gravat per alliberar les pistes de les bobines amb una màscara fotolitogràfica. D'aquesta manera, un defecte en el gravat només produiria el curtcircuit de dues espines, enlloc d'un tall en la pista que seria destructiu. No obstant, un procés de gravat químic com l'emprat en la fabricació de les bobines d'alumini és un tipus d'atac isotròpic. Un atac amb la mateixa velocitat en totes direccions només es pot utilitzar en bobines primes, entre 1 i 2 μm , com la d'Al. En el cas de capes gruixudes, el sobreatac lateral seria massa important.

Una millor solució podria ser la utilització d'un procés d'ablació per làser. Es tracta d'un procés subtractiu, similar a l'anterior, però emprant un atac anisotròpic adequat per a treballar amb gruixos de resina de 50 μm . Malgrat poder resoldre les limitacions que presenta la fabricació de les microbobines, no s'ha pogut realitzar degut a què no és una tecnologia disponible en les nostres instal·lacions.

Altres millores a realitzar per a l'optimització del ressonador serien:

- Disminuir les pèrdues mecàniques emprant nous materials que no siguin ni polímers ni magnètics, com podria ser el Cu.
- Fer l'encapsulat al buit.
- Emprar noves geometries, com ara suspensions en forma de braços i forats en membranes, sense que es vegi afectada la integritat física. Això requeriria un estudi mecànic detallat. A més, s'hauria de tenir en compte si l'existència de forats o membranes

en forma de braç podria provocar canvis en el comportament elàstic de la membrana en el buit.

- Utilitzar tecnologies de fabricació d'imants amb capes primes. Això seria necessari per poder aconseguir una integració total però el problema seria que en ser capes primes, que no superen les 100µm, el volum magnètic es reduiria considerablement i la potència obtinguda seria de l'ordre dels nanowatts.

V.4. Efectes no lineals, histèresi

Per poder entendre la deformació no lineal que presenta la membrana polimèrica del generador en entrar en ressonància, s'han d'estudiar els mecanismes que intervenen en l'elasticitat dels materials.

V.4.1. Introducció

La majoria dels materials presenten una certa ordenació dels seus àtoms i molècules. En aplicar una força externa a un sistema, la deformació resultant és deguda al desplaçament dels àtoms de les seves posicions d'equilibri. En aquesta situació, es diu que l'objecte està sotmès a un esforç.

Segons el comportament de l'objecte, un cop retirada la força aplicada, es pot conèixer en quin dels dos règims de deformació es trobava :

Deformació elàstica:

Deformació on hi ha una recuperació completa de la configuració no deformada un cop es retiren les forces aplicades. Únicament depèn de la magnitud de la tensió aplicada.

Deformació inelàstica:

La deformació inelàstica o plàstica és irreversible i permanent, essent el resultat de mecanismes de lliscat o dislocacions a escala atòmica. Només té lloc a intensitats de tensió per sobre un valor llindar, conegut com a límit elàstic.

Les dues components de la força que actua sobre un cos, *Fig.V.7*, són la força normal i la tangencial.

La força normal, F_n , aplicada a l'àrea de la secció transversal, A , produeix un estrès, també anomenat esforç o tensió, σ [21]:

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad (V.7)$$



Fig.V.7 Representació esquemàtica del comportament d'un objecte a l'aplicació d'una força

La deformació o *strain*, \mathcal{E} , és la variació relativa de la longitud produïda per la força aplicada per unitat d'àrea:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta l}{l} \quad (V.8)$$

Per a petits valors de la deformació, hi ha una proporcionalitat entre l'esforç i la deformació. El pendent de la regió lineal de la gràfica esforç-deformació de la *Fig.V.8*, s'anomena el mòdul de Young, E , i és una constant de proporcionalitat elàstica.

$$E = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \quad (V.9)$$

Substituint (V.9) i (V.8) en (V.7) s'obté:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{V.10})$$

La llei de Hooke ens diu que la força aplicada, F , és proporcional al canvi de longitud Δl .

$$F = K \Delta l \quad (\text{V.11})$$

on K és la rigidesa (o constant de la molla). Per tant de l'equació (V.10) es dedueix que la constant elàstica és:

$$K = \frac{EA}{l} \quad (\text{V.12})$$

Com s'ha explicat en el capítol III, el coeficient de Poisson és una constant elàstica que proporciona una relació entre la deformació lateral i la deformació longitudinal en aplicar un esforç longitudinal a un cos elàstic.

V.4.2. Propietats elàstiques típiques d'un sòlid sota estrès

En la Fig. V.8 es mostra la representació gràfica de la deformació en funció de la tensió per a una barra sòlida [22]. Fins el punt A de la gràfica, la tensió és proporcional a la deformació i segueix la Llei de Hooke. El punt B és el límit elàstic del material, fins aquí l'objecte recupera les seves dimensions originals quan se li deixa d'aplicar la força, per tant, aquesta deformació se la denomina elàstica.

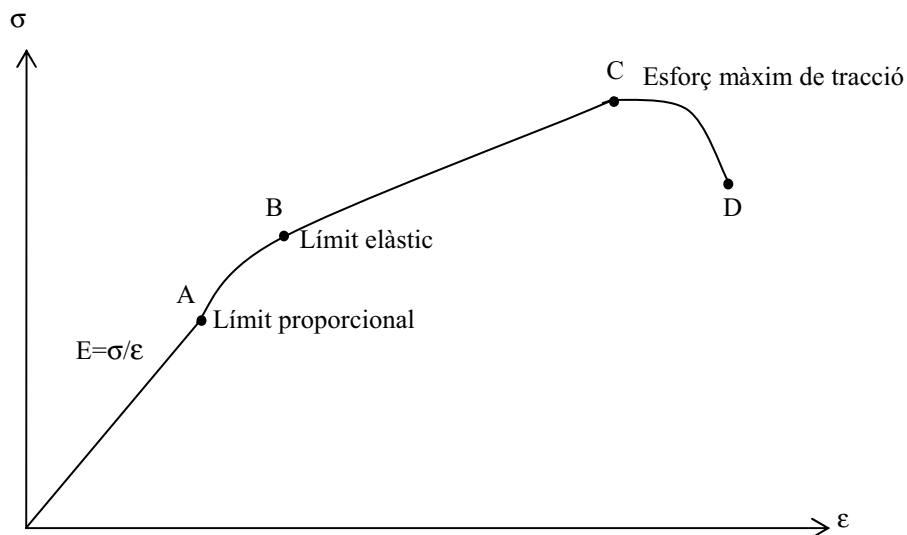


Fig.V. 8 Estrès, σ , en funció de la deformació, ϵ .

Si la força es continua augmentant (des del punt B fins al C), la deformació creixerà molt ràpidament. En aquesta regió, l'objecte ja no recuperarà totalment les seves dimensions originals en deixar d'aplicar-li la força, sinó que presentarà una deformació permanent. Més enllà del punt C se segueix produint una deformació addicional, encara que la força aplicada es redueixi. En el punt D, es produeix la fractura del material. Entre els punts B i D, el material experimenta una deformació plàstica.

Els materials són fràgils quan els punts C i D estan molt pròxims, mentre que si pel contrari es troben distants es tractarà d'un material dúctil.

A continuació s'analitzen dues formes d'elasticitat [23], [24] i [25] :

Estirament "Stretching": Es caracteritza per un mòdul d'estirament de "Stretching module", κ . Aquest tipus d'elasticitat, caracteritzada per la seva no linealitat, es deguda a l'estirament dels enllaços individuals entre àtoms. Tots els materials, a més a més dels polímers, presenten aquest fenomen, Fig.V.9.

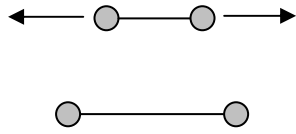


Fig.V. 9 Representació esquemàtica del comportament elàstic tipus “stretching”

Elasticitat dels polímers “Bending module”:

Moviment caracteritzat per un “bending module” o mòdul de flexió, τ . Aquest tipus d’elasticitat, específica dels polímers, mostra un comportament lineal. Els polímers pel fet de ser macromolècules presenten un grau de llibertat que permet una rotació dels enllaços. Aquest fet produeix un estirament de la molècula gràcies al canvi en els angles dels enllaços entre els diferents àtoms, sense haver-hi una modificació en la longitud dels enllaços, Fig.V.10.

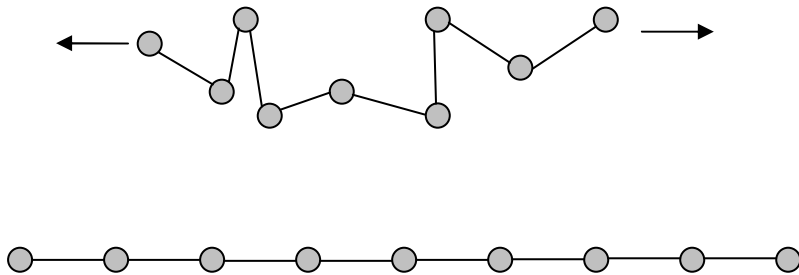


Fig.V.10 Representació esquemàtica del comportament elàstic tipus “bending”

La presència d’aquests dos modes d’elasticitat pot donar lloc a una rigidificació de la membrana anomenada “Spring stiffening”. Aquesta rigidificació està caracteritzada pel mòdul de “Spring stiffening”, λ . Es produeix un fenomen d’augment aparent de la rigidesa o disminució de la flexibilitat de la membrana polimèrica. Se’l relaciona amb el “stretching” i el “bending” amb aquesta equació:

$$\lambda = \frac{\kappa T}{2\tau} \tag{V.13}$$

L’estudi del comportament elàstic dinàmic de la membrana del prototip requereix conèixer en quin règim de deformació es troba quan està en condicions de ressonància. Per això es calcula quin és el valor màxim de la deformació, \mathcal{E} , que pot assolir la membrana de Kapton corresponent al cas de màxima deformació, Fig.V.11:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\sqrt{\Delta z^2 + x^2} - x}{x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{x}\right)^2 + 1} - 1 \tag{V.14}$$

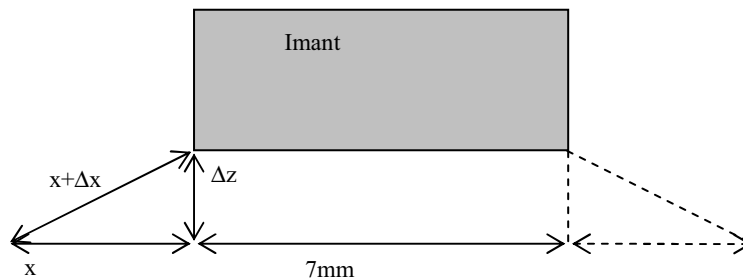


Fig.V.11 Representació esquemàtica de la membrana del dispositiu en ressonància

Si es considera un valor de desplaçament màxim de l'imant, $\Delta z_{max} = 0.5\text{mm}$, que correspondria a un valor molt gran respecte al què es podria aconseguir experimentalment, i una membrana de $13 \times 13\text{mm}^2$ amb la corresponent longitud de membrana lliure per cada costat de $x=3\text{mm}$, la deformació associada valdrà $\epsilon = 1.4 \cdot 10^{-2} = 1.4\%$. Si el material de la membrana és el Kapton, el seu mòdul de Young val $E=2500\text{MPa}$, i l'esforç té un valor de $\sigma = 35\text{MPa}$.

Aquests valors, segons la gràfica tensió-deformació del Kapton de la Fig.V.12, corresponen a un règim elàstic.

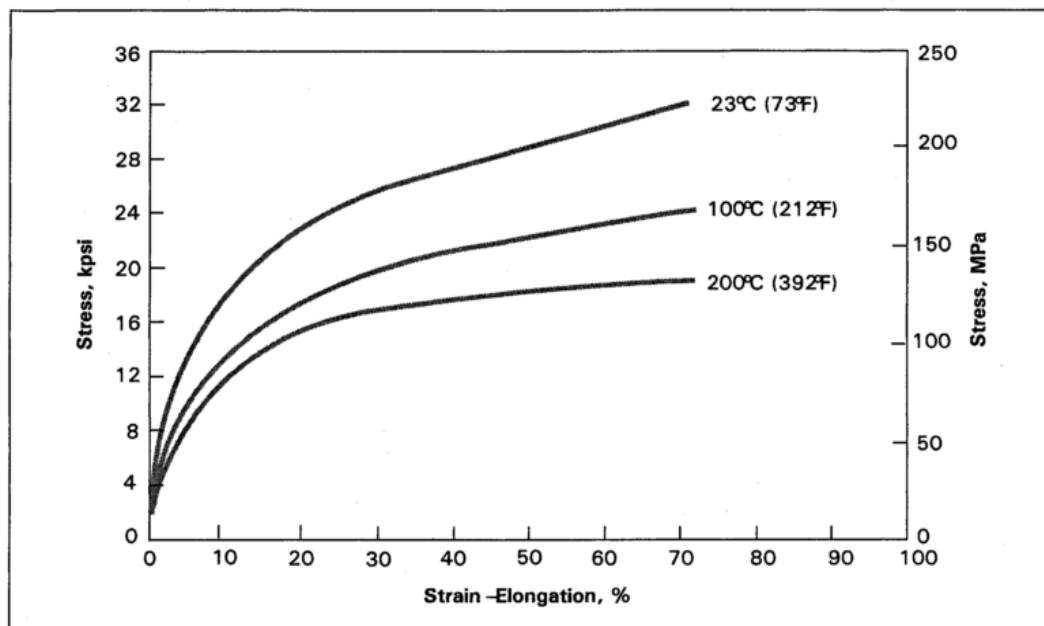


Fig.V.12 Corbes d'esforç en funció de la deformació per una membrana de Kapton de tipus HN de $25\mu\text{m}$ segons dades del fabricant.

V.4.3. Mecanismes de deformació dels polímers

Els polímers són un grup de materials formats per molècules amb enllaços covalents que es poden classificar en:

Elastòmers: Polímers amb un mòdul de Young baix, de l'ordre dels MPa. La seva deformació és deguda a un estirament de les macromolècules i es pot calcular el seu valor emprant la teoria estadística [26].

Termoplàstics: Aquests materials es divideixen en polímers vítrics i cristalls simples polimèrics.

- **Polímers vítrics:** El seu mòdul de Young típic és de l'ordre dels GPa, la seva deformació és difícil de modelitzar teòricament, perquè és una combinació de l'elasticitat dels polímers, l'estirament dels enllaços covalents i la força de Van der Waals (força secundària i dèbil dels enllaços covalents) que s'oposa al desplaçament de molècules adjacents.

- **Cristalls simples polimèrics:** Aquests polímers presenten unes característiques elàstiques molt anisòtropes. Per una banda el mòdul de Young paral·lel a la direcció de la cadena és de l'ordre dels 100GPa, similar al dels metalls. Aquest involucra l'estirament dels forts enllaços covalents i el canvi dels angles dels enllaços o si la molècula és helicoidal la deformació de l'hèlix.

En canvi, en la direcció perpendicular als eixos de les cadenes, el mòdul de Young és molt més baix, de l'ordre dels GPa. A la deformació, només s'hi oposen les forces de Van der Waals o dels enllaços d'hidrogen.

Termostables: Aquests materials polimèrics són rígids, amb un moviment de la cadena molt restringit.

El Kapton, amb un mòdul de Young de 2.5GPa, pertany al grup dels polímers vítrics. Per tant, la modelització n'és únicament una primera aproximació. La modelització es realitza a partir dels mecanismes de deformació que intervenen en aplicar una força al polímer:

El mètode de Treloar [26] relaciona el mòdul de Young d'un material polimèric (com ara el Kapton) amb la deformació causada en aplicar-hi una força. Aquest mètode involucra una sèrie de càlculs simples suposant una deformació causada només per l'elasticitat dels polímers i per l'estirament dels enllaços al llarg de l'estructura de la molècula.

El model de cadena polimèrica utilitzat en el càlcul és el representat esquemàticament en la Fig.V.13. Aquesta cadena es tracta com si hi haguessin n barres de longitud l , capaces de ser estirades segons la seva longitud sense doblegar-se i unides mitjançant uns ressorts de torsió.

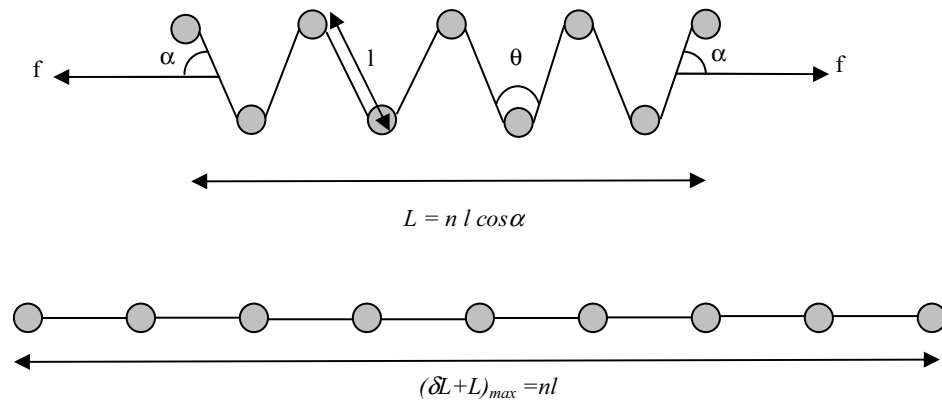


Fig.V.13 Model d'una cadena polimèrica sota deformació

Els angles dels enllaços presenten un valor inicial de θ i l'angle entre la força aplicada i els enllaços és inicialment α . Per tant, la longitud original de la cadena polimèrica és:

$$L = n l \cos \alpha \quad (\text{V.15})$$

i el canvi de longitud, δL , en la cadena deformada és:

$$\delta L = n \delta(l \cos \alpha) = n(\cos \alpha \delta l - l \sin \alpha \delta \alpha) \quad (\text{V.16})$$

La deformació de la longitud d'una barra, δl , s'expressa en funció de la força aplicada, f . A partir de l'estirament de l'enllaç, "stretching", es determina δl com:

$$\delta l = \frac{f \cos \alpha}{k_l} \quad (\text{V.17})$$

essent k_l , la constant de proporcionalitat entre la força sobre l'enllaç i l'increment de longitud degut al "stretching". El seu valor pot ser determinat mitjançant espectroscòpia d'infrarojos o Raman [27].

Per altra banda, la deformació de l'angle dels enllaços, $\delta \theta$, es pot expressar com:

$$\delta \theta = \frac{f l \sin \alpha}{2k_\theta} \quad (\text{V.18})$$

on k_θ , és la constant que relaciona la força necessària per causar una deformació, $\delta \theta$, de l'angle de l'enllaç.

Considerant la relació geomètrica $\delta \alpha = -\frac{\delta \theta}{2}$ i substituint δl i $\delta \theta$, en l'equació (V.16) s'obté:

$$\frac{\delta L}{f} = n \left[\frac{\cos^2 \alpha}{k_l} - \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4k_\theta} \right] \quad (V.19)$$

Per tant, el mòdul de Young es podrà expressar com:

$$E = \frac{f L}{A \delta L} = \frac{l \cos \alpha}{A \left[\frac{\cos^2 \alpha}{k_l} - \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4k_\theta} \right]} = \frac{l \sin \frac{\theta}{2}}{A \left[\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{k_l} + \frac{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4k_\theta} \right]} \quad (V.20)$$

essent A , l'àrea de la secció de la cadena.

Aquesta equació és una primera aproximació al valor del mòdul de Young trobat a partir de l'estructura cristal·lina del material. Els paràmetres que determinen l'estructura són A , l , θ i les constants de força mesurades espectroscòpicament k_l i k_θ .

V.4.4. Discussió sobre el comportament no lineal del ressonador

La caracterització dels prototips fabricats ha permès observar la presència dels efectes no lineals. Aquestes no linealitats comporten l'aparició d'un fenomen d'histèresi que influeix fortament en la sortida del microgenerador. La causa d'aquests efectes està relacionada amb les característiques de la membrana polimèrica i determina una dependència addicional de la freqüència de vibració amb l'amplitud d'excitació.

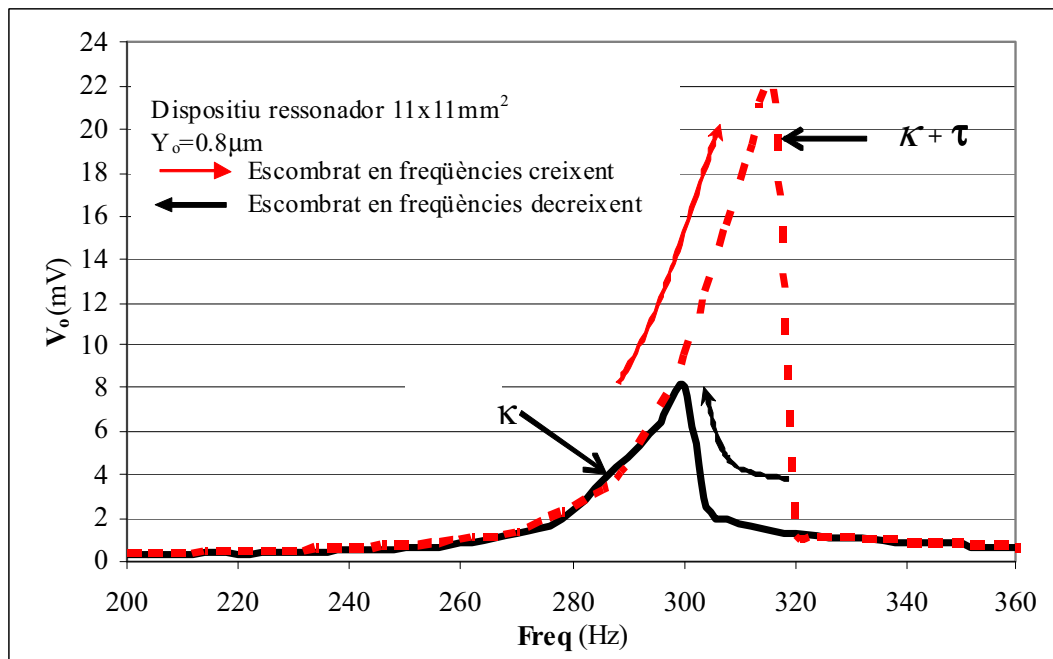


Fig.V.14 Voltatge de sortida, V_o , en funció de la freqüència per un dispositiu amb una membrana de kapton mesurada sota un escombrat en freqüències creixent (línia puntejada) i un altre decreixent (línia contínua).

L'existència d'aquests fenòmens d'histèresi d'una membrana polimèrica, relacionats amb la presència d'efectes no lineals, es poden observar en la gràfica de la Fig.V.14, on es representa el voltatge de sortida, V_o , en funció de la freqüència de ressonància d'un dispositiu format per una membrana resonadora de Kapton de 11x11mm² a la que se li aplica una amplitud d'excitació de $Y_o=0.8\mu\text{m}$ [28]. Les corbes dibuixades en la gràfica corresponen als valors obtinguts amb un escombrat creixent (línia puntejada) i un altre de decreixent en freqüència (línia contínua). En aquest últim cas, corresponent a un mode lineal, hi ha poca amplitud de moviment de la membrana perquè no s'ha aconseguit excitar la flexió dels enllaços. En canvi, en el mode no lineal hi ha una elevada amplitud

de moviment degut a l'excitació del mode d'elasticitat addicional del polímer, relacionada amb la flexió de les seves molècules [29]. Això produeix una modificació de la freqüència de ressonància i de l'amplitud en augmentar l'amplitud d'excitació. S'ha observat que aquest increment de la freqüència de ressonància i de l'amplitud no és lineal sinó que es satura. En augmentar la freqüència i amplitud del dispositiu electromagnètic, l'estrès al que es sotmet la membrana també augmentarà, incrementant l'histèresi. L'acumulació d'estrès causarà una modificació artificial en els paràmetres elàstics de la membrana, provocant la pèrdua del seu comportament lineal. Aquesta modificació es produeix fins a arribar a un cert límit a partir del qual l'elasticitat decreix bruscament. La deformació de la membrana del ressonador deguda a l'estrès dependrà, no només de la mida, sinó de la superfície lliure.

Aquest increment gradual en la freqüència de ressonància, amb un escombrat de freqüència creixent, determina la presència d'un comportament oscil·latori metastable, aconseguint un increment considerable en l'amplitud de vibració i per tant, en el voltatge de sortida i en la freqüència de ressonància en relació a l'obtingut sota condicions de freqüències decreixents o constants. Aquesta millora de la sortida deguda a l'histèresi en el mode no lineal està també relacionada amb una disminució aparent de l'esmoreïment paràsit en l'estructura ressonadora respecte a les condicions estacionàries.

Per altra banda, s'analitza la dependència de la sortida del generador amb l'amplitud d'excitació aplicada. Per a amplituds baixes, només hi ha "*stretching*" mentre que per les amplituds altes hi ha una combinació entre "*stretching*" i "*bending*". En aquestes amplituds elevades s'aprofita el rang d'elasticitat extensa característic dels polímers, "*bending*", el que suposa un canvi en les dimensions del material. No obstant, a mesura que es van alineant les molècules del polímer sembla que la membrana sigui més rígida, fet que provoca una saturació amb l'amplitud d'excitació. Aquest comportament no lineal d'elasticitat extra dels polímers limitat per l'estrès tensil, implica un efecte anomenat "*spring stiffening*" i un increment tant de la freqüència ressonant com de l'esmoreïment paràsit aparent, segons [29]. En principi, aquest tipus de fenòmens de no linealitat probablement apareixeran en tots els materials al arribar a una determinada excitació i generalment s'associen a l'existència d'una limitació intrínseca dels materials utilitzats per a la fabricació de membranes. Aquesta limitació és el "*spring stiffening*", o rigidificació, que redueix la potència de sortida perquè la massa no es pot moure tant com amb un "*spring lineal*". No obstant, una de les principals característiques del comportament d'aquests materials polimèrics és l'existència d'aquest rang estès d'elasticitat relacionat amb la disposició en forma de macromolècules. Per tant, la resposta vibracional de la cadena polimèrica pot ser una combinació dels modes de "*bending*" (deformació dels angles dels enllaços) i de "*stretching*" (estirament dels enllaços individuals), permetent una major resposta a les amplituds d'excitació altes respecte els altres materials augmentant l'histèresi de la sortida.

V.4.5. Modelització d'un moviment oscil·latori no lineal

La modelització del dispositiu es basa en el model d'un ressonador mecànic esmoreït, incloent un terme no lineal en la força restauradora [30]. La solució d'aquesta equació, basada en el procediment descrit en el capítol III [31], s'ha realitzat amb el programa MATHEMATICA. Reescrivint i resolent les equacions del moviment s'obté un model simple en el que es reproduïx el comportament d'histèresi del ressonador i la forma asimètrica de les mesures experimentals dels escombrats en freqüències creixents i decreixents.

V.4.5.a. Plantejament de l'equació diferencial de la modelització

El dispositiu ressonador es pot modelitzar com el moviment d'un pèndol. En l'esquema de la *Fig.V.15*, es mostra l'equivalència del moviment del pèndol amb el d'una molla. En aquest model, hi ha una massa, m , penjada de l'extrem d'una corda de longitud, l , que actua com una massa inercial. El moviment d'aquesta massa és oscil·latori, no esmoreït i es pot escriure com:

$$m\ddot{z} = F(z) \quad (\text{V.21})$$

essent z , la posició de la massa o imant respecte la posició d'equilibri i $F(z)$, la força recuperadora elàstica aplicada a l'imant.

Si l'esmoreïment és negligible l'equació diferencial que regeix les oscil·lacions lliures d'un pèndol es pot expressar com:

$$ml\ddot{z} + mg \sin z = 0 \quad (\text{V.22})$$

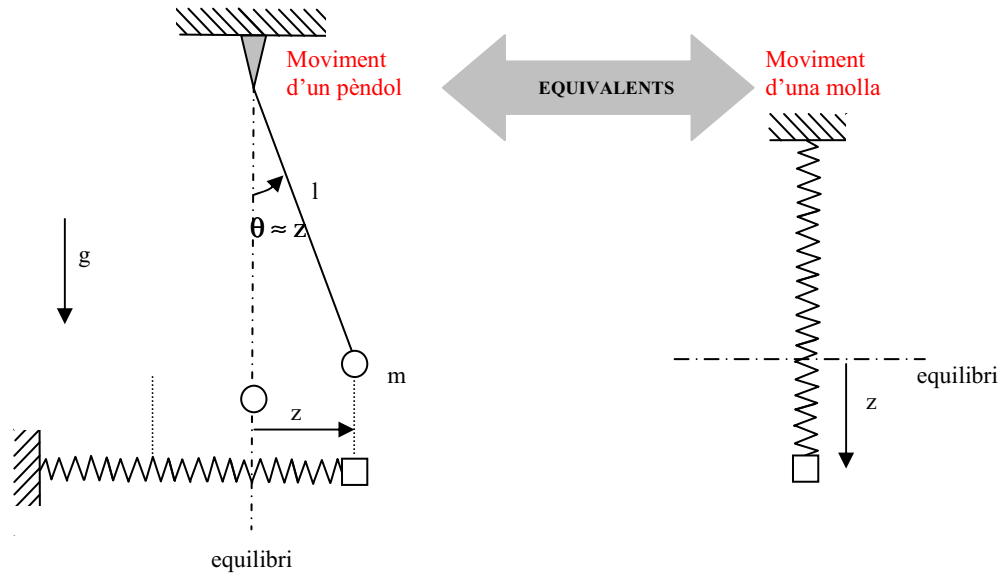


Fig.V.15 Esquema del moviment d'un pèndol i la seva equivalència amb el moviment d'una molla

Generalment, s'aproxima a un moviment lineal, utilitzant només el primer terme del desenvolupament en sèrie de Taylor, amb $\theta \approx z$.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \dots \approx z \quad (\text{V.23})$$

Per a valors petits de z , aquesta primera aproximació és prou bona i s'ha emprat en el capítol anterior per resoldre les equacions del moviment relatiu de l'imant respecte la bobina.

No obstant, si es vol buscar una explicació als fenòmens d'histèresi observats experimentalment s'han de resoldre les equacions del moviment de forma més exacte.

Es considera que la força elàstica aplicada en l'imant es pot expressar de forma general com:

$$F(z) = F(z_{eq}) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{z_{eq}} (z - z_{eq}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)_{z_{eq}} (z - z_{eq})^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} \right)_{z_{eq}} (z - z_{eq})^3 + \dots \quad (\text{V.24})$$

essent z_{eq} , la posició d'equilibri. Considerant, una força elàstica nul·la en la posició d'equilibri, $F(z_{eq}) = 0$, s'obté:

$$F(z) = k_1 (z - z_{eq}) + \frac{1}{2} k_2 (z - z_{eq})^2 + \frac{1}{6} k_3 (z - z_{eq})^3 + \dots \quad (\text{V.25})$$

on k_1, k_2, k_3, \dots són les diferents constants de proporcionalitat.

Si el sistema és simètric, significa que només es consideraran aquelles forces que portin a l'equilibri. Això voldrà dir que els termes de la força amb exponents parells no són

simètrics, perquè valdran el mateix tant per z com per $-z$. Per tant, restaran únicament els termes amb els exponents imparells:

$$F(z) = k_1(z - z_{eq}) + k_3(z - z_{eq})^3 + \dots \quad (\text{V.26})$$

L'aproximació fins a tercer ordre de la força elàstica, amb $k_1 = -k$ i $k_3 = -\mu_o$, s'escriu com:

$$F(z) = -kz - \mu_o z^3 \quad (\text{V.27})$$

on k és la constant de recuperació de la molla o l'equivalent constant del pèndol, $k = \frac{mg}{l}$,

i μ_o és la pertorbació de tercer ordre.

L'equació del moviment de l'imant amb aquesta força elàstica s'escriu com:

$$m\ddot{z} + kz + \mu_o z^3 = 0 \quad (\text{V.28})$$

En la modelització del moviment de l'imant, a més a més de la força elàstica, hi haurà també: l'esmoreïment paràsit, $F_p = D_p \dot{z}(t)$, l'esmoreïment electromagnètic, $F_g = D_g \dot{z}(t)$ i l'excitació externa $\ddot{y}(t)$. Aleshores l'equació diferencial del moviment de la massa respecte la bobina serà l'equació diferencial de Duffing [32]:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{\mu_o}{m}z^3(t) - \frac{(D_g + D_p)}{m}\dot{z}(t) - \ddot{z}(t) \quad (\text{V.29})$$

V.4.5.b. Resolució de l'equació diferencial

La resolució analítica de l'equació diferencial de Duffing (V.29), equació no lineal de segon ordre, requereix d'alguna aproximació, ja que no existeix cap solució analítica exacte.

Primerament, es considera una solució de l'equació diferencial periòdica del tipus $z(t) = z_o \sin(\omega t - \varphi)$. En segon lloc, en comptes d'escriure una excitació de la forma $\ddot{y}(t) = P \sin(\omega t)$, és preferible utilitzar una expressió més general:

$$\ddot{z}(t) + \omega_n^2 z(t) + \mu z^3(t) + 2\delta \dot{z}(t) = \ddot{y}(t) = P_1 \sin(\omega t) + P_2 \cos(\omega t) \quad (\text{V.30})$$

essent $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la freqüència natural sense pertorbar del dispositiu, $\mu \equiv \frac{\mu_o}{m}$, la

pertorbació a tercer ordre, $\delta = \zeta \omega_n = (\zeta_p + \zeta_g) \omega_n = \frac{(D_p + D_g)}{2m}$ l'esmoreïment total, amb

$P^2 = P_1^2 + P_2^2$ on $P = -Y_o \omega^2$ és l'excitació externa aplicada al dispositiu, $z(t) = z_o \sin(\omega t + \varphi)$ és la solució periòdica del moviment de l'imant, $\dot{z}(t) = z_o \omega \cos(\omega t + \varphi)$, $\ddot{z}(t) = -z_o \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ són les seves derivades i z_o és l'amplitud del desplaçament.

Substituint la solució en l'equació diferencial s'obté:

$$\omega_n^2 z_o \sin(\omega t) - \omega^2 z_o \sin(\omega t) + \mu z_o^3 \sin^3(\omega t) + 2\delta \omega z_o \cos(\omega t) = \ddot{y}(t) = P_1 \sin(\omega t) + P_2 \cos(\omega t) \quad (\text{V.31})$$

Per tal de resoldre-la de forma analítica, es busca una equivalència al terme $\sin^3(\omega t)$. En l'aproximació es negligeix el terme $\sin(3\omega t)$, Fig.V.16:

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)}{4} \approx \frac{3 \sin(\omega t)}{4} \quad (\text{V.32})$$

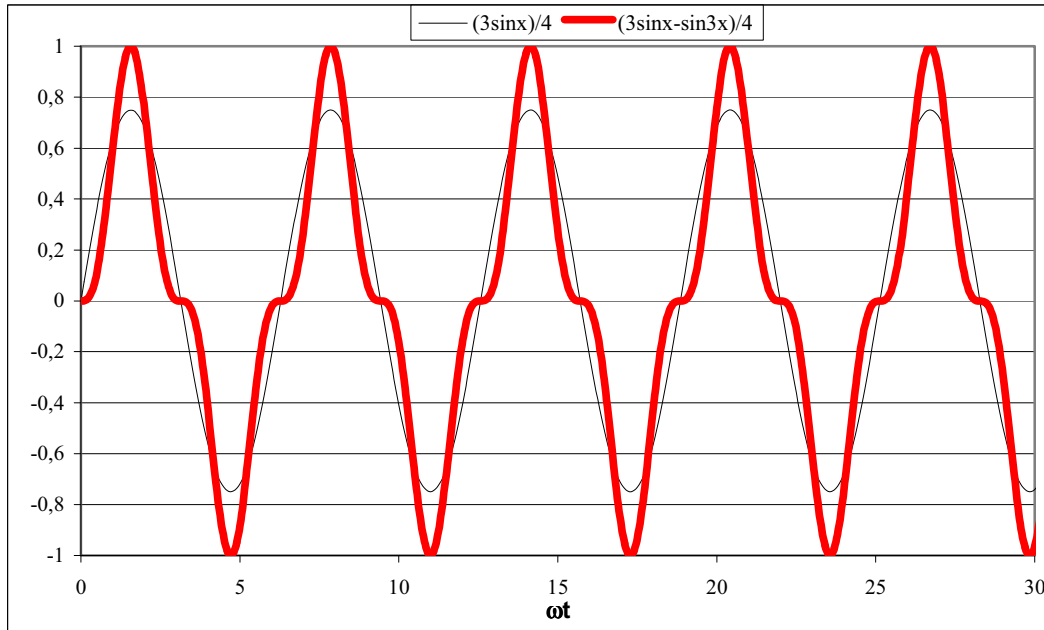


Fig.V.16 Representació gràfica de l'aproximació del $\sin^3(\omega t)$ pel $\frac{3 \sin(\omega t)}{4}$

A continuació, amb aquesta formulació que utilitza el procediment de balanç d'harmònics per igualar els coeficients dels termes *sin* per una banda i els dels *cos* per altra, s'obtenen dues equacions. El balanç d'harmònics és un mètode aproximat per estudiar sistemes oscil·latoris no lineals, descrits per equacions diferencials ordinàries no lineals, molt útil en moltes aplicacions [33]. L'essència del mètode és substituir les forces no lineals dels sistemes oscil·latoris per funcions lineals especialment construïdes. D'aquesta manera, la teoria d'equacions diferencials lineals pot ser emprada per trobar solucions aproximades dels sistemes no lineals.

Les equacions resultants són:

$$(\omega_n^2 - \omega^2)z_o + \frac{3}{4}\mu z_o^3 = P_1 \quad (\text{V.33})$$

$$2\delta z_o \omega = P_2 \quad (\text{V.34})$$

i substituint:

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 = \left\{ (\omega_n^2 - \omega^2)z_o + \frac{3}{4}\mu z_o^3 \right\}^2 + 4\delta^2 z_o^2 \omega^2 \quad (\text{V.35})$$

Aïllant $\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$,

$$\omega_c^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\frac{\delta^2}{\omega_n^2} + \frac{3}{4}\frac{\mu}{\omega_n^2}z_o^2 \pm \frac{1}{\omega_n^2} \sqrt{\frac{P^2}{z_o^2} + 4\delta^2 \left(\delta^2 - \omega_n^2 - \frac{3}{4}\mu z_o^2 \right)} \quad (\text{V.36})$$

essent ω_c la pulsació angular normalitzada a la pulsació natural del sistema.

El desfasament entre l'excitació i el moviment de l'imant, φ , es pot expressar com:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\delta z_o \omega}{(\omega_n^2 - \omega^2) z_o + \frac{3}{4} \mu z_o^3} \quad (\text{V.37})$$

Per representar $z_o(\omega)$ s'haurà de trobar les 6 solucions de l'equació:

$$\frac{9}{16} \mu^2 z_o^6 + \frac{3}{2} \mu (\omega_n^2 - \omega^2) z_o^4 + (\omega^4 - 2\omega^2 \omega_n^2 + 4\delta^2 \omega^2 + \omega_n^4) z_o^2 - Y_o^2 \omega^4 = 0 \quad (\text{V.38})$$

Es defineixen les següents variables per simplificar l'equació:

$$h_1 \equiv \omega^4 - 2\omega^2 \omega_n^2 + 4\delta^2 \omega^2 + \omega_n^4 \quad (\text{V.39a})$$

$$h_2 \equiv \frac{3}{4} \mu (\omega^2 - \omega_n^2) \quad (\text{V.39b})$$

$$h_3 \equiv \frac{9}{16} \mu^2 \quad (\text{V.39c})$$

Substituint les variables h_1 , h_2 i h_3 en l'equació, resulta:

$$h_3 z_o^6 + h_2 z_o^4 + h_1 z_o^2 - Y_o^2 z_o^4 = 0 \quad (\text{V.40})$$

En ser una equació de grau 6 respecte a z_o , primerament es busquen les tres solucions analítiques de l'equació respecte a z_o^2 . Després, es troben les 3 solucions de z_o amb arrel positiva i unes altres 3 d'arrel negativa, que es poden expressar de forma més compacta definint:

$$h_4 \equiv -2h_2^3 + 9h_1 h_2 h_3 \quad (\text{V.41a})$$

$$h_5 \equiv h_2^2 - 3h_1 h_3 \quad (\text{V.41b})$$

Les 6 solucions analítiques trobades, mitjançant el programa de càlcul MATHEMATICA, són:

$$z_{o \ 1,2} = \pm \sqrt{\frac{-2h_2 + 2h_5 (h_6)^{-1/3} + 2(h_6)^{1/3}}{6h_3}} \quad (\text{V.42a})$$

$$z_{o \ 3,4} = \pm \sqrt{\frac{-2h_2 - h_5 (1+i\sqrt{3})(h_6)^{-1/3} - (1-i\sqrt{3})(h_6)^{1/3}}{6h_3}} \quad (\text{V.42b})$$

$$z_{o \ 5,6} = \pm \sqrt{\frac{-2h_2 - h_5 (1-i\sqrt{3})(h_6)^{-1/3} - (1+i\sqrt{3})(h_6)^{1/3}}{6h_3}} \quad (\text{V.42c})$$

on h_6 es defineix com:

$$h_6 \equiv \frac{1}{2} \left(h_4 + 27h_3^2 \omega_4 y^2 + \sqrt{-4h_5^3 + (h_4 + 27h_3^2 \omega_4 y^2)^2} \right) \quad (\text{V.43})$$

En la Fig.V.17, s'ha representat esquemàticament la vibració d'excitació del ressonador $y(t) = Y_o \cos(\omega t + \varphi_o)$ i de la seva resposta $z(t) = z_o \cos(\omega t + \varphi_1)$ essent φ_o i φ_1 , les seves respectives fases.

No obstant, el realment important és únicament la diferència de fase φ , entre l'excitació y i la resposta z de l'imant. Aleshores, es considera que a temps $t=0$ la resposta té argument 0 i l'argument de l'excitació és la diferència entre fases: $\varphi = |\varphi_o - \varphi_1|$.

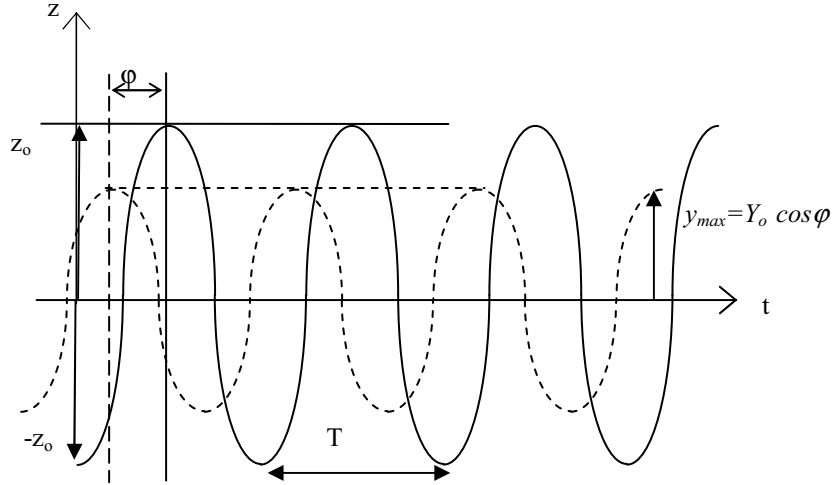


Fig.V.17 Representació de la diferència de fase entre la resposta de l'imant, z , i l'excitació, y , en funció del temps, t .

Per tant, l'excitació a $t = 0$ s'expressa com:

$$y = Y_o \cos(-\varphi) = Y_o \cos(\varphi) \quad (\text{V.44})$$

i el valor del desfasament φ en funció de cada una de les solucions de l'equació diferencial:

$$\varphi = \text{arctg} \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu z_o^2} \right) \quad (\text{V.45})$$

$$\varphi_{1,2} = \text{arctg} \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu \left(\frac{-2h_2 + 2h_5(h_6)^{-1/3} + 2(h_6)^{1/3}}{6h_3} \right)} \right) \quad (\text{V.46a})$$

$$\varphi_{3,4} = \text{arctg} \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 - \frac{1}{8}\mu \left(\frac{2h_2 + h_5(1+i\sqrt{3})(h_6)^{-1/3} + (1-i\sqrt{3})(h_6)^{1/3}}{h_3} \right)} \right) \quad (\text{V.46b})$$

$$\varphi_{5,6} = \text{arctg} \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 - \frac{1}{8}\mu \left(\frac{2h_2 + h_5(1-i\sqrt{3})(h_6)^{-1/3} + (1+i\sqrt{3})(h_6)^{1/3}}{h_3} \right)} \right) \quad (\text{V.46c})$$

V.4.5.c. Anàlisi dels resultats

Les sis solucions $z_{o,i}$ de les equacions del moviment corresponen a les amplituds del moviment de la resposta de l'imant. Per tant, únicament tindran un sentit físic les tres solucions matemàtiques amb l'arrel positiva, z_{o1} , z_{o3} , z_{o5} .

En la gràfica de la Fig.V.18 es representa la forma dels “mòduls” de z_{o1} , z_{o3} i z_{o5} en funció de ω_c^2 , que reproduïx el que seria un comportament d'histèresi.

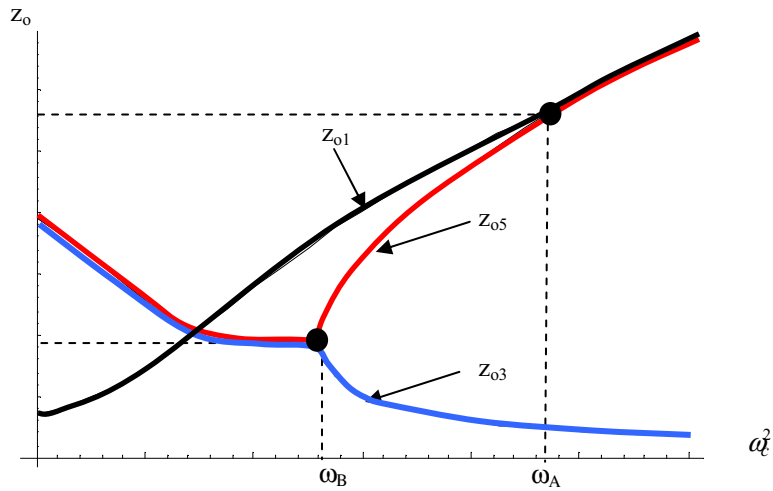


Fig.V.18 Representació gràfica dels mòduls de les 3 solucions de l'equació diferencial

No obstant, com que físicament les solucions corresponen a amplituds de moviment, s'estudia en quins rangs aquestes prenen valors reals i positius de les solucions i es comprova si corresponen als valors trobats experimentalment, Fig.V.19:

- La solució de l'equació (V.40), z_o , no té part complexa. Experimentalment, l'imant té una amplitud de vibració estable.
- La solució de l'equació (V.40), z_o , presenta una part complexa que val pràcticament 0. Per tant, per aproximació es pot considerar que l'amplitud és real. A nivell experimental, correspon a freqüències amb més d'una possible amplitud de vibració. Els que tenen més amplitud són inestables. Experimentalment només s'han pogut assolir aquestes amplituds “complexes” en els trams corresponents a z_{o1} i z_{o3} .
- La solució de l'equació (V.40), z_o , és complexa. No té sentit físic perquè aquesta solució representa l'amplitud de la resposta.

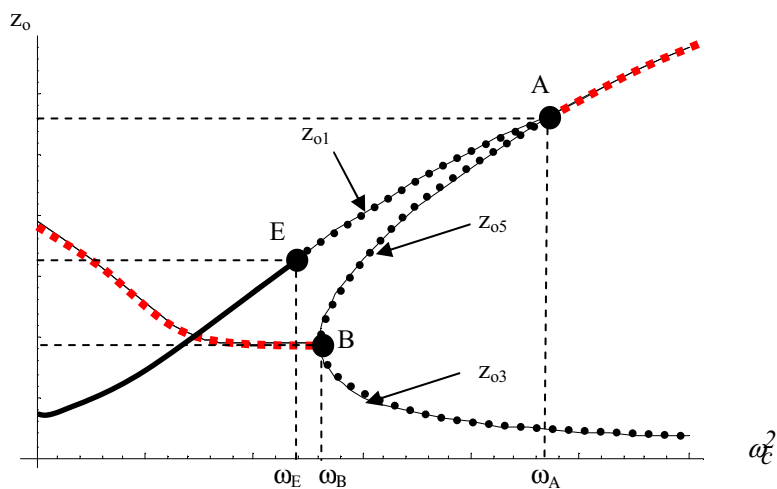


Fig.V.19 Representació gràfica de les 3 solucions de l'equació diferencial

A més a més, s'ha de tenir en compte que existeix una condició que anul·la el denominador i provoca una indeterminació en el mòdul de la solució:

$$h_4 + 27h_3^2 \omega_4 y^2 + \sqrt{-4h_5^3 + (h_4 + 27h_3^2 \omega_4 y^2)^2} = 0 \quad (\text{V.47})$$

Elevant-la al quadrat i simplificant:

$$4h_5^3 = 4(h_2^2 - 3h_1 h_3)^3 = 0 \quad (\text{V.48})$$

Substituint els valors h_1 , h_2 i h_3 i simplificant resulta:

$$\omega^4 - 2\omega^2(1 + 6\zeta_g^2 + 12\zeta_g \zeta_p + 6\zeta_p^2)\omega_n^2 + \omega_n^4 = 0 \quad (\text{V.49})$$

Per altra banda, es busquen les condicions que igualen els mòduls de les solucions de les equacions de moviment:

$$z_{o1} = z_{o5} \text{ en el punt A} \quad (\text{V.50})$$

$$z_{o3} = z_{o5} \text{ en el punt B} \quad (\text{V.51})$$

En igualar-les, s'observa que la condició a complir és la mateixa en ambdós casos. Aquesta condició és un producte de diferents factors cadascun dels quals està expressat en funció dels paràmetres dels quals depenen:

$$H(\mu, \omega) \cdot F(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g) \cdot G(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g, Y_o, \mu) / F(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g) = 0 \quad (\text{V.52})$$

Per tant, s'estudia quin d'aquests factors s'anul·la en el punt A i quin en el punt B:

- $H(\mu, \omega) \equiv \mu\omega \quad (\text{V.53})$

Aquest primer terme mai podrà ser 0 sempre i quan existeixi l'excitació.

- $F(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g) \equiv \omega^4 - 2\omega^2(1 + 6\zeta_g^2 + 12\zeta_g \zeta_p + 6\zeta_p^2)\omega_n^2 + \omega_n^4 \quad (\text{V.54})$

El factor F , apareix en el numerador i en el denominador. Per tant, igualar-lo a 0 implicaria una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. Aquesta condició és la trobada anteriorment, (V.49). En aquest cas, s'hauria de resoldre de nou l'equació (V.56), plantejada amb la condició que anul·la el factor F :

$$\omega^4 - 2\omega^2 \omega_n^2 + \omega_n^4 = 12\omega^2 \delta^2 \quad (\text{V.55})$$

$$\frac{9}{16}\mu^2 z_o^6 + \frac{3}{2}\mu(\omega_n^2 - \omega^2)z_o^4 + (\omega^4 - 2\omega^2 \omega_n^2 + 4\delta^2 \omega^2 + \omega_n^4)z_o^2 - Y_o^2 \omega^4 = 0 \quad (\text{V.56})$$

L'equació resultant és:

$$\frac{9}{16}\mu^2 z_o^6 + \frac{3}{2}\mu(\omega_n^2 - \omega^2)z_o^4 + \frac{4}{3}(\omega_n^2 - \omega^2)^2 z_o^2 - Y_o^2 \omega^4 = 0 \quad (\text{V.57})$$

Les solucions analítiques d'aquesta equació de 6è grau són:

$$z_{o1,2} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\left(4(\omega^2 - \omega_n^2) + \sqrt[3]{2\left(-2^5(\omega^2 - \omega_n^2)^3 + 81\mu\omega^2 y^2\right)}\right)}{\mu}} \quad (\text{V.58a})$$

$$z_{o3,4} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\left(8(\omega_n^2 - \omega^2) + (-1 - i^{1/3})\sqrt[3]{2\left(-2^5(\omega_n^2 - \omega^2)^3 + 81\mu\omega^2 y^2\right)}\right)}{\mu}} \quad (\text{V.58b})$$

$$z_{o,5,6} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2 \left(8(\omega_n^2 - \omega^2) + (1 + i^{1/3}) \sqrt[3]{2(-2^5(\omega_n^2 - \omega^2)^3 + 81\mu\omega^2 y^2)} \right)}{\mu}} \quad (\text{V.58c})$$

De la mateixa manera que en el cas anterior, s'han descartat les d'arrels negatives de les solucions matemàtiques perquè z_o representa l'amplitud del moviment de l'imant. En la gràfica de la *Fig. V.20*, es mostren els mòduls d'aquestes solucions. No obstant, l'amplitud del moviment de l'imant en funció de la freqüència trobada experimentalment únicament reproduirà les regions en què la solució és real i positiva.

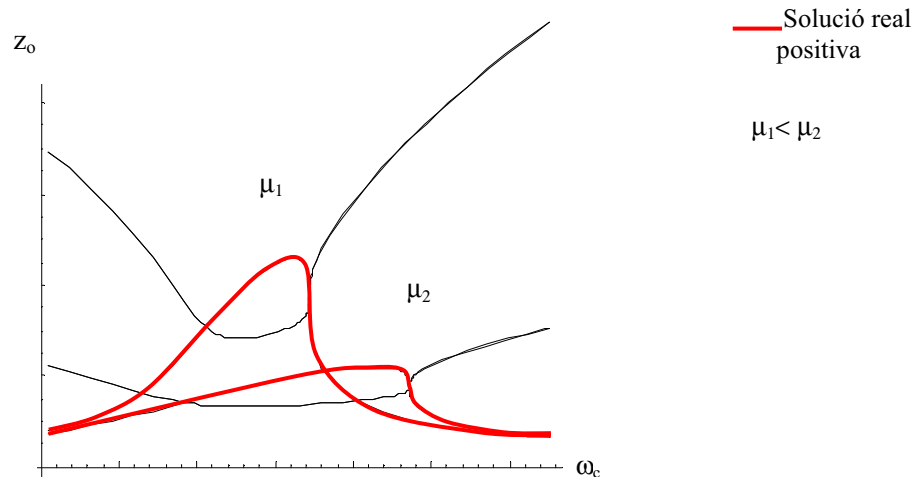


Fig.V.20 Representació gràfica de les solucions, z, de la nova equació diferencial segons el valor de la pertorbació, μ .

Les mesures realitzades als prototips mostren que, per a una pertorbació important, es produeix un desplaçament del pic de ressonància cap a freqüències més altes quan l'escombrat és creixent en freqüència respecte a un de decreixent. En aquest cas, en no reproduir els resultats teòrics el comportament d'histèresi trobat experimentalment, es pot concloure que aquest no és el factor que s'haurà d'anul·lar.

▪ $G(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g, Y_o, \mu)$

Per tant, per exclusió aquest ha de ser el factor que s'anul·la pels dos punts. Aquesta condició es pot expressar, en aïllar μ , com dues possibles solucions analítiques, en funció de si el terme d'arrel es troba sumant o restant.

- En el **punt A** s'anul·la $G(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g, Y_o, \mu)$ per $\omega = \omega_A$. Com que la pertorbació en els punts A i B no varia i, d'altra banda, $\omega_A > \omega_B$, implica que els sumands de la solució en el punt A siguin més grans que en el B. L'única manera d'igualar-ho és escollint la solució amb el terme de l'arrel restant:

$$\mu(\zeta_p, \zeta_g, \omega_n, \omega_A, Y_o) = \frac{\delta}{(9\omega_A^2 Y_o)^2} \left((\omega_A^2 - \omega_n^2)^3 + 36\omega_A^2 \omega_n^2 (\omega_A^2 - \omega_n^2) (\zeta_p + \zeta_g)^2 - (\omega_A^4 - 2\omega_A^2 (1 + 6(\zeta_p + \zeta_g)^2) \omega_n^2 + \omega_n^4)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (\text{V.59})$$

- En el **punt B** també s'anul·la $G(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g, Y_o, \mu)$ per $\omega = \omega_B$. De les dues solucions de μ s'escull la que presenta el terme de l'arrel sumant. D'aquesta manera es pot forçar que la pertorbació sigui la mateixa que la del punt A.

$$\mu(\zeta_p, \zeta_g, \omega_n, \omega_b, Y_o) = \frac{8}{(9\omega_b^2 Y_o)^2} \left((\omega_b^2 - \omega_n^2)^3 + 36\omega_b^2 \omega_n^2 (\omega_b^2 - \omega_n^2) (\zeta_p + \zeta_g)^2 + (\omega_b^4 - 2\omega_b^2 (1 + 6(\zeta_p + \zeta_g)^2) \omega_n^2 + \omega_n^4)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (\text{V.60})$$

Es considera que la pertorbació μ és una constant lligada al material i a les dimensions de la membrana i, per tant, el seu valor hauria de ser independent de la freqüència i de l'amplitud d'excitació del dispositiu.

Per altra banda, l'esmoreïment electromagnètic és una característica intrínseca de la bobina i dependrà de:

$$\zeta_g = \frac{D_g}{2m\omega_n} = \frac{l}{2m(R_c + R_L)\omega_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (\text{V.61})$$

essent ω_n , la freqüència natural del dispositiu sense pertorbar, R_c , la resistència de la bobina i R_L , la resistència de càrrega que, per maximitzar la potència generada experimentalment s'escull amb un valor aproximadament igual a R_c independentment de l'excitació. En el cas de microbobines, en ser la R_L molt pròxima a R_c [34], l'esmoreïment paràsit predomina per sobre l'electromagnètic: $\zeta_g \ll \zeta_p$

Substituint els valors de μ i de ζ_g , en les tres solucions positives de la potència, $P(\omega)$, resultants de la resolució de l'equació diferencial del moviment de l'imant, podrem ajustar el valor de ζ_p , per a cada excitació. L'esmoreïment paràsit dependrà de l'amplitud d'excitació del dispositiu, però no de la freqüència de treball ω .

V.4.5.d. Influència de la pertorbació de tercer ordre en la histèresi de la resposta

Es vol comprovar com a partir de les solucions obtingudes en la modelització, en les que s'ha inclòs un terme no lineal en la força restauradora, es pot reproduir la forma asimètrica de les mesures experimentals, tant per a un escombrat en freqüència creixent com decreixent.

En la gràfica de la Fig.V.21, s'analitza el comportament de les solucions de l'equació diferencial per a diferents pertorbacions de 3^{er} ordre. S'observa com en augmentar els valors de la pertorbació augmenta la histèresi de la resposta, començant amb una resposta totalment simètrica per a valors baixos de μ . Per tant, es pot concloure que la introducció d'aquest terme pertorbatiu de 3^{er} ordre dóna una bona modelització al fenomen experimental d'histèresi.

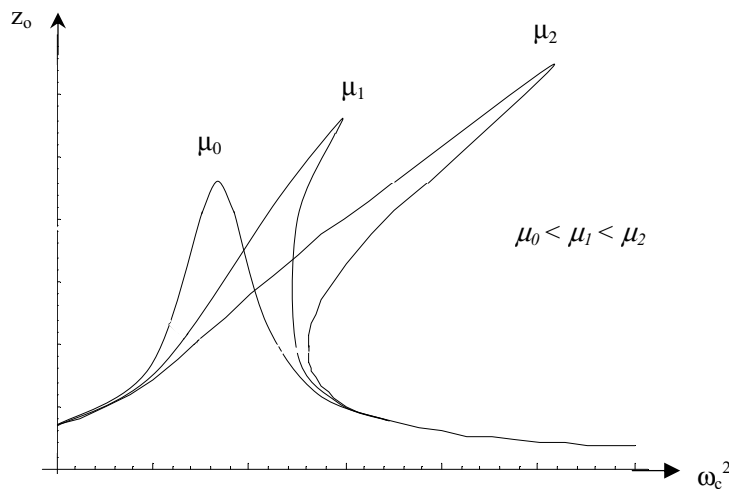


Fig.V.21 Representació de les solucions de l'equació diferencial, z_o , en funció de la freqüència normalitzada per diferents valors de la pertorbació μ

V.4.5.e. Estudi de l'estabilitat de les solucions

Es fa un estudi sobre l'estabilitat de les diferents solucions de l'equació diferencial del moviment de l'imant. En la Fig.V.22, s'observa com un increment gradual de la freqüència d'excitació determina la presència d'un comportament metastable de l'oscil·lador. Això permetrà un increment significatiu en l'amplitud de vibració i, per tant, en l'amplitud del voltatge en relació amb l'assolit per un escombrat en freqüències decreixent. Com a contrapartida, aquest increment en l'amplitud de la vibració degut als efectes no lineals de la membrana polimèrica, està associat a una inestabilitat. Per qualsevol canvi en la forma d'augmentar l'excitació entre B_2 i A_2 , es pot passar dels valors d'amplituds de vibració corresponents a un escombrat creixent als d'un de decreixent, (corba entre A_1 i B_1). A més a més, per un escombrat en freqüències creixent quan s'arriba al punt A_2 , es produeix un salt cap a A_1 . Anàlogament, si l'escombrat en freqüències és en sentit decreixent, en arribar al punt B_1 es produeix un salt cap a B_2 .

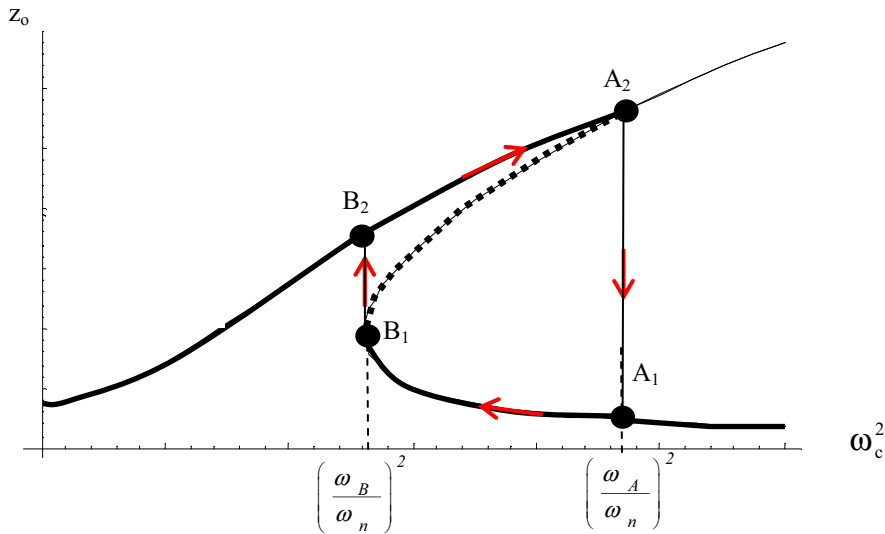


Fig.V.22 Representació gràfica del fenomen del salt per les oscil·lacions forçades

Segons [23], les regions inestables estan caracteritzades per tenir punts de contorn on la corba de ressonància presenta una tangent vertical. Aquests punts es poden trobar fàcilment derivant la relació (V.35) respecte z_o i igualant-la a 0.

$$\frac{\partial \omega}{\partial z_o} = 0 \quad (V.62)$$

$$\left((\omega_n^2 - \omega^2) z_o + \frac{3}{4} \mu z_o^3 \right) \left(\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{9}{4} \mu z_o^2 \right) + 4\delta^2 \omega^2 = 0 \quad (V.63)$$

Per al cas sense esmorteïment, $\delta = 0$, les dues solucions $z_o(\omega)$, representades per una línia blava $\left(\frac{\delta}{\omega_n} = 0 \right)$ en la Fig.V.23, són:

$$\omega_c^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\omega_n^2} z_o^2 \quad \rightarrow \quad z_{o1} = \frac{2\omega_n}{\sqrt{3\mu}} \sqrt{\omega_c^2 - 1} \quad (V.64a)$$

$$\omega_c^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 + \frac{9}{4} \frac{\mu}{\omega_n^2} z_o^2 \quad \rightarrow \quad z_{o3} = \frac{2\omega_n}{3\sqrt{\mu}} \sqrt{\omega_c^2 - 1} \quad (V.64b)$$

Els valors de les amplituds z_{o1} i z_{o3} han de ser reals i positives, és a dir $\omega_c \geq 1$. Això implica que aquestes tangents verticals de les corbes de ressonància sempre presentaran valors de freqüència superior a la de ressonància sense pertorbar, ω_n .

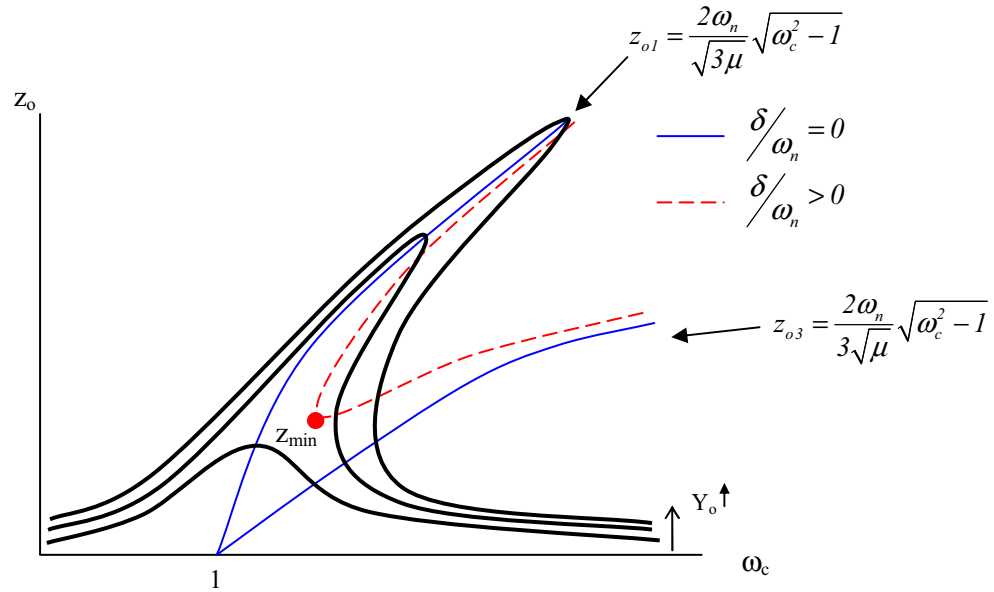


Fig.V.23 Representació esquemàtica de les tangents verticals de les corbes de ressonància.

En canvi, per a cada un dels valors petits d'esmoreïment, δ , la solució $z_o(\omega)$ seria una corba propera a les solucions anteriors i estaria representada per una línia vermella ($\delta/\omega_n > 0$).

Cada una d'aquestes corbes mostra un valor relatiu mínim, z_{min} s'observa que per a un valor d'excitació, Y_o , suficientment petit les corbes de ressonància no tenen cap tangent vertical i per tant, tampoc cap regió d'inestabilitat. És a dir, corresponen a vibracions amb poca o sense perturbació.

Finalment, es veu com aquests resultats impliquen una dependència de la freqüència de ressonància del dispositiu amb l'amplitud d'excitació provinent de la relació que es compleix en el punt de ressonància, en el que el factor $G(\omega, \omega_n, \zeta_p, \zeta_g, Y_o, \mu)$ s'igualava a 0, mostrada en la gràfica de la Fig.V.24.

$$Y_o = \frac{2\sqrt{2}}{9\omega_B^2} \sqrt{\frac{1}{\mu} \left((\omega_B^2 - \omega_n^2)^3 + 36\omega_B^2\omega_n^2 (\omega_B^2 - \omega_n^2) (\zeta_p + \zeta_g)^2 + (\omega_B^4 - 2\omega_B^2 (1 + 6(\zeta_p + \zeta_g)^2) \omega_n^2 + \omega_n^4)^{\frac{3}{2}} \right)} \quad (V.65)$$

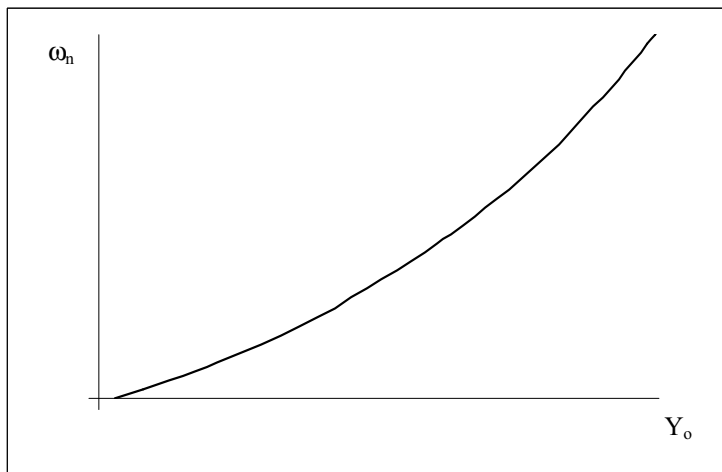


Fig.V.24 Freqüència de ressonància del dispositiu, ω , en funció de l'amplitud de l'excitació, Y_o .

V.4.5.f. Càlcul de la potència generada

S'ha calculat la potència generada en funció de la freqüència per a diferents amplituds d'excitació, de la mateixa manera que en el capítol anterior. L'objectiu és poder comparar els valors de la potència teòrica amb els valors mesurats experimentalment realitzant un escombrat en freqüència per a cada una de les amplituds d'excitació.

L'energia dissipada per cicle en el transductor electromecànic és la integral de la força d'esmoreïment electromagnètic sobre la distància recorreguda en un cicle:

$$E = 2 \int_{-z_o}^{z_o} F_g dz \quad (V.66)$$

Els límits d'integració s'estableixen amb l'ajuda de la representació de la *Fig.V.17*. En multiplicar l'energia dissipada per la freqüència s'obté la potència generada, P :

$$P = \frac{2}{T} \int_{-z}^z F_g dz = \frac{2}{T} \int_{-z}^z D_g |\dot{z}| dz = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} D_g |\dot{z}^2| dt = \frac{4}{T} m \omega_n \zeta_g \int_0^{\frac{T}{2}} |\dot{z}^2| dt \quad (V.67)$$

essent $T = \frac{2\pi}{\omega}$, el període de la vibració.

Es troba el valor de $(\dot{z}(t))^2$ a partir de la solució $z(t)$, expressada en forma polar:

$$z(t) = z_o e^{i \omega t} \quad (V.68)$$

$$\dot{z}(t) = i \omega z_o e^{i \omega t} \quad (V.69)$$

$$(\dot{z}(t))^2 = -\omega^2 z_o^2 e^{i 2 \omega t} \quad (V.70)$$

on el mòdul és:

$$|(\dot{z}(t))^2| = \omega^2 z_o^2 \quad (V.71)$$

Substituint l'equació (V.71) en la (V.67) i integrant es troba l'expressió analítica de la potència generada, P :

$$P = \frac{4}{T} m \omega_n \zeta_g \int_0^{\frac{T}{2}} |\dot{z}^2| dt = \frac{4}{T} \omega^2 m \omega_n \zeta_g |z|^2 \left[t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{4}{T} \omega^2 m \omega_n \zeta_g |z|^2 \frac{\pi}{\omega} = \frac{4\pi m}{T} \omega \omega_n \zeta_g z_o^2 \quad (V.72)$$

Ajustant els paràmetres d'aquesta expressió de la potència teòrica podem reproduir els resultats trobats experimentalment pel dispositiu format per una membrana de kapton de $15 \times 15 \text{mm}^2$, amb un gruix de 127micres, i un imant de NdFeB de $7 \times 7 \times 6 \text{mm}^3$.

La massa de l'imat, m , val 2.205g, l'esmoreïment electromagnètic, ζ_g es troba amb l'equació (V.61) escollint el valor de la pulsació natural del dispositiu sense pertorbar de $\omega_n = 1420 \text{rad/s}$ val $8.36 \cdot 10^{-5}$. Per altra banda, s'ha de tenir present la dependència de la freqüència de ressonància del dispositiu amb l'excitació, segons l'equació (V.65) que es mostra en la gràfica de la *Fig.V.24*.

Per tant, en les gràfiques de les *Fig.V.25* i *Fig.V.26* es mostren com els valors de potència teòrics s'ajusten als experimentals escollint adequadament els paràmetres μ (independent de l'amplitud d'excitació) i ζ_p en funció de l'excitació per una excitació creixent en freqüència amb unes amplituds de $2.6 \mu\text{m}$ i $5 \mu\text{m}$ respectivament.

En aquestes gràfiques s'aprecia que la qualitat dels ajustos, obtinguts amb les simulacions, permet reproduir la forma de la potència per a diferents excitacions, incloent els fenòmens de salts entre $A_2 \rightarrow A_1$ i $B_1 \rightarrow B_2$ previstos pel model.

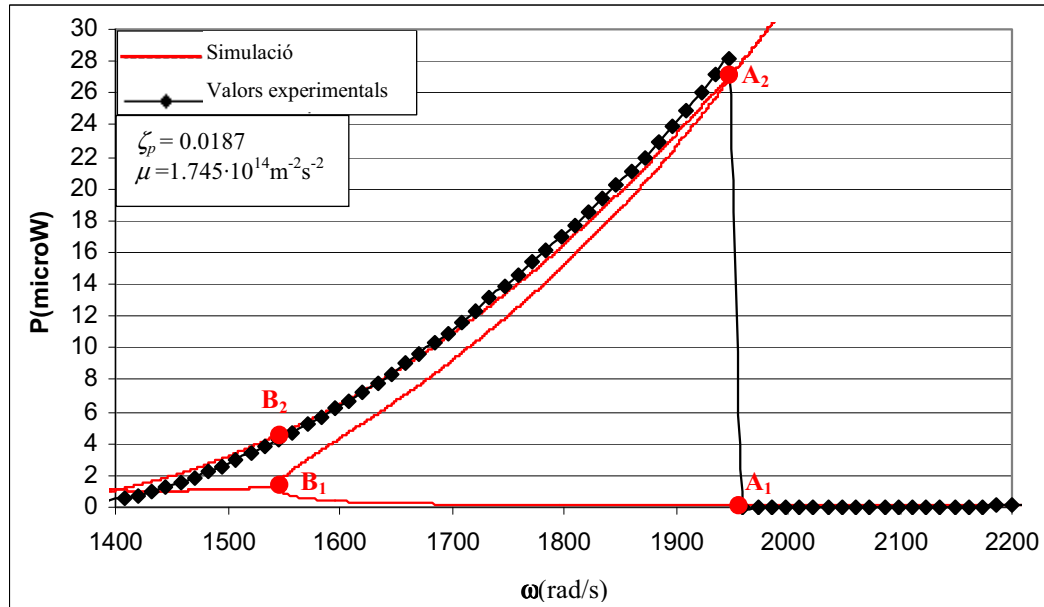


Fig.V.25 Potència generada, P , en funció de la freqüència d'excitació, ω pel cas d'un dispositiu format per una membrana de $15 \times 15 \text{mm}^2$ amb una amplitud d'excitació de $Y_0 = 2.6$ micres

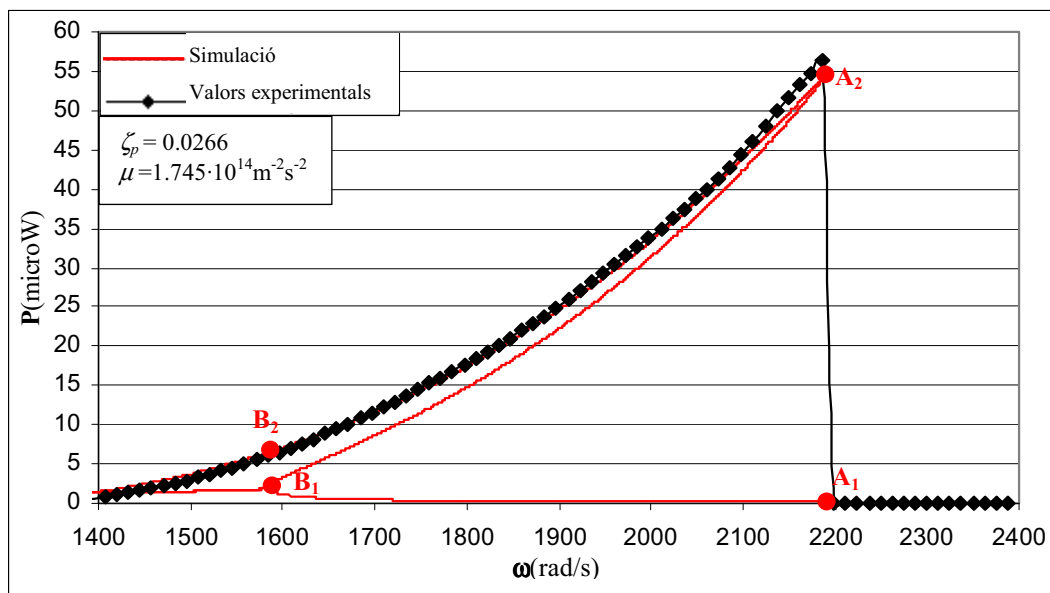


Fig.V.26 Potència generada, P , en funció de la freqüència d'excitació, ω pel cas d'un dispositiu format per una membrana de $15 \times 15 \text{mm}^2$ amb una amplitud d'excitació de $Y_0 = 5$ micres.

Els valors dels paràmetres emprats en la simulació es resumeixen en la Taula.V.1:

m (g)	ω_n (rad/s)	ω_A (rad/s)	ω_B (rad/s)	Y_0 (μm)	ζ_p	ζ_g	μ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)
2.205	1420.5	1696	1458	2.546	0.0187	$8.36 \cdot 10^{-5}$	$1.745 \cdot 10^{14}$
2.205	1420.0	2186	1470	5.091	0.0266	$8.36 \cdot 10^{-5}$	$1.710 \cdot 10^{14}$

Taula.V.1 Dades experimentals i ajustos dels paràmetres dels esmorteïments paràsit i electromagnètic, ζ_p i ζ_g respectivament, i del terme pertorbatiu, μ , per una membrana ressonant de $15 \times 15 \text{mm}^2$.

Tot i que els valors de ω_n , ζ_g i μ són independents de l'excitació, s'observa que en augmentar l'excitació apareix un desplaçament de la freqüència de ressonància com a conseqüència de l'existència de la pertorbació.

Per altra banda, els valors de potència obtinguts amb un escombrat decreixent no s'ajusten del tot als valors experimentals degut a que les aproximacions realitzades per poder resoldre analíticament l'equació diferencial no són del tot exactes en la regió propera al punt B₁.

Abans d'introduir el terme pertorbatiu en el model desenvolupat en el capítol III [31], l'ajust dels valors teòrics de potències generades als valors mesurats per dispositius amb membranes de Kapton de diferents mides i 127 μ m de gruix permet deduir com varien els valors dels esmorteïments paràsits, ζ_p , com es veu en la gràfica de la Fig.V.27.

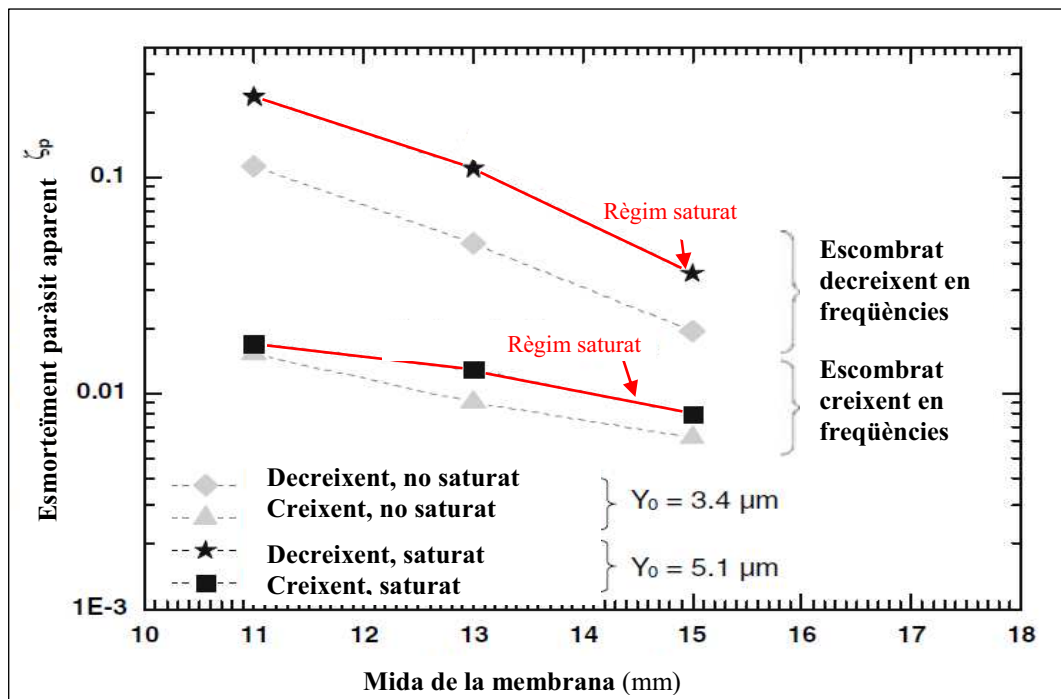


Fig.V.27 Esmorteïment paràsit en funció de les dimensions laterals del ressonador per diferents amplituds d'excitació aplicades, Y_0 , 3.4 i 5 μ m (règims no saturats i saturats respectivament), calculat a partir del model sense el terme pertorbatiu.

Els ζ_p obtinguts són els esmorteïments paràsits aparents i depenen de l'amplitud d'excitació aplicada. Amb un escombrat creixent en freqüències el mode metastable obtingut correspon a un esmorteïment paràsit aparent inferior a l'escombrat decreixent, aconseguint una amplitud de la resposta més elevada. Per a una amplitud d'excitació elevada, a partir de les dades de les Fig.III.62 i 63, la saturació observada experimentalment en la sortida del generador està correlacionada amb un nou increment d'aquest esmorteïment paràsit i en limita el seu rendiment. A més a més, aquesta gràfica indica que en disminuir l'àrea lliure de membrana augmenta l'esmorteïment paràsit aparent. Aquests efectes són més importants en el cas d'un escombrat en freqüències decreixent [35].

En canvi, emprant el model amb el terme pertorbatiu, els ajustos dels resultats experimentals dels generadors amb diferents mides de membranes ressonadores permeten trobar uns valors dels esmorteïments paràsits independents dels tipus d'escombrat.

A partir de les mesures obtingudes experimentalment per a cada mida de la membrana, es troben els valors de ω_A i ω_B per a cada amplitud d'excitació, Y_o . Introduint aquests valors experimentals a l'expressió teòrica de la potència de l'equació (V.72) s'obtenen els valors dels paràmetres que intervenen en l'equació, resumits en les taules *Taula.V.2*, *Taula.V.3* i *Taula.V.4*.

Dades experimentals					Paràmetres ajustats			
Y_o (μm)	ω_A (rad/s)	ω_B (rad/s)	P_{LoptA} (μW)	P_{LoptB} (μW)	ω_n (rad/s)	ζ_p	ζ_g	μ (m^2s^{-2})
1.697	2488	1960	8.5	0.4	1880	0.0204	$6.31 \cdot 10^{-5}$	$11.75 \cdot 10^{14}$
2.546	2915	1985	24.2	0.7	1880	0.0263	$6.31 \cdot 10^{-5}$	$11.76 \cdot 10^{14}$
3.394	2991	2011	28.9	1.1	1880	0.0344	$6.31 \cdot 10^{-5}$	$11.75 \cdot 10^{14}$
4.243	2941	2011	26.8	1.4	1880	0.0424	$6.31 \cdot 10^{-5}$	$11.75 \cdot 10^{14}$
5.091	2488	2011	29.1	1.7	1880	0.052	$6.31 \cdot 10^{-5}$	$11.75 \cdot 10^{14}$

Taula.V.2 Dades experimentals i ajustos dels paràmetres dels esmorteïments paràsit i electromagnètic, ζ_p i ζ_g respectivament, i del terme pertorbatiu, μ , per una membrana ressonant de $11 \times 11 \text{mm}^2$.

Dades experimentals					Paràmetres ajustats			
Y_o (μm)	ω_A (rad/s)	ω_B (rad/s)	P_{LoptA} (μW)	P_{LoptB} (μW)	ω_n (rad/s)	ζ_p	ζ_g	μ (m^2s^{-2})
1.697	1835	1558	2.6	0.2	1480	0.0182	$8.04 \cdot 10^{-5}$	$4.757 \cdot 10^{14}$
2.546	1935	1608	4.7	0.4	1480	0.0251	$8.04 \cdot 10^{-5}$	$4.757 \cdot 10^{14}$
3.394	2388	1634	25.9	0.65	1480	0.0276	$8.04 \cdot 10^{-5}$	$4.757 \cdot 10^{14}$
4.243	2488	1634	35.5	0.8	1480	0.0337	$8.04 \cdot 10^{-5}$	$4.757 \cdot 10^{14}$
5.091	2538	1659	42.2	1.2	1480	0.04	$8.04 \cdot 10^{-5}$	$4.757 \cdot 10^{14}$

Taula.V.3 Dades experimentals i ajustos dels paràmetres dels esmorteïments paràsit i electromagnètic, ζ_p i ζ_g respectivament, i del terme pertorbatiu, μ , per una membrana ressonant de $13 \times 13 \text{mm}^2$.

Dades experimentals					Paràmetres ajustats			
Y_o (μm)	ω_A (rad/s)	ω_B (rad/s)	P_{LoptA} (μW)	P_{LoptB} (μW)	ω_n (rad/s)	ζ_p	ζ_g	μ (m^2s^{-2})
1.697	1571	1445	4.4	0.7	1420	0.0168	$8.36 \cdot 10^{-5}$	$1.713 \cdot 10^{14}$
2.546	1696	1458	10.2	1.2	1420	0.0187	$8.36 \cdot 10^{-5}$	$1.745 \cdot 10^{14}$
3.394	1948	1445	28.0	1.4	1420	0.0199	$8.36 \cdot 10^{-5}$	$1.743 \cdot 10^{14}$
4.243	2111	1458	43.8	1.75	1420	0.023	$8.36 \cdot 10^{-5}$	$1.741 \cdot 10^{14}$
5.091	2186	1470	56.4	2.1	1420	0.0266	$8.36 \cdot 10^{-5}$	$1.710 \cdot 10^{14}$

Taula.V.4 Dades experimentals i ajustos dels paràmetres dels esmorteïments paràsit i electromagnètic, ζ_p i ζ_g respectivament, i del terme pertorbatiu, μ , per una membrana ressonant de $15 \times 15 \text{mm}^2$.

Els valors dels esmorteïments paràsits en funció de l'amplitud d'excitació per a les diferents mides del ressonador es representen en la gràfica de la *Fig.V.28*. Malgrat ser independents del tipus d'escombrat, augmenten en disminuir l'àrea de membrana lliure i en augmentar l'amplitud de l'excitació aplicada al dispositiu.

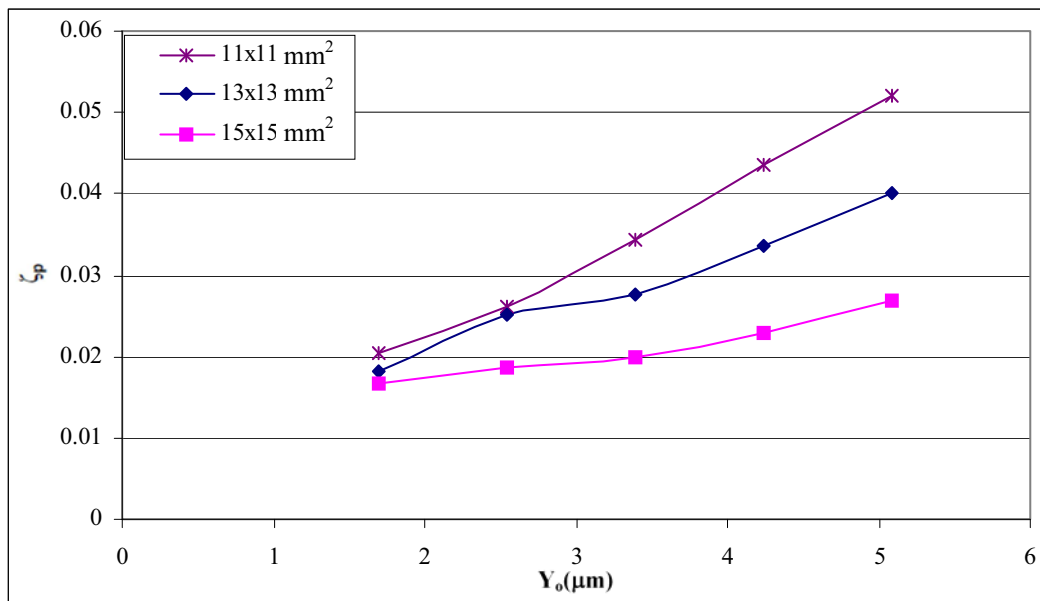


Fig.V.28 Esmorteïment paràsit, ζ_p , en funció de l'amplitud d'excitació, Y_o , per les diferents mides de membranes, calculat a partir dels ajustos amb el model amb el terme pertorbatiu.

En aquestes taules també veiem que a diferència de l'esmoreïment paràsit, l'electromagnètic presenta poca variació amb la mida de la membrana i amb l'excitació. Únicament depèn de les característiques del transductor electromagnètic i de l'imant. En aquest primer joc de dispositius, realitzats amb imants de NdFeB de $7 \times 7 \times 6 \text{ mm}^3$ i una bobina micromecanitzada de Cu, l'esmoreïment electromagnètic, ζ_g , li correspondrà un valor entre els $6.31 \cdot 10^{-5}$ i els $8.36 \cdot 10^{-5}$ depenent de la freqüència natural del ressonador com mostra l'equació (V.61).

Pel que fa referència als ajustos del valor pertorbatiu d'aquest model, mostrats en la gràfica de la Fig.V.29, s'observa un comportament decreixent no lineal de la pertorbació, μ , del moviment de l'imant amb la mida de la membrana.

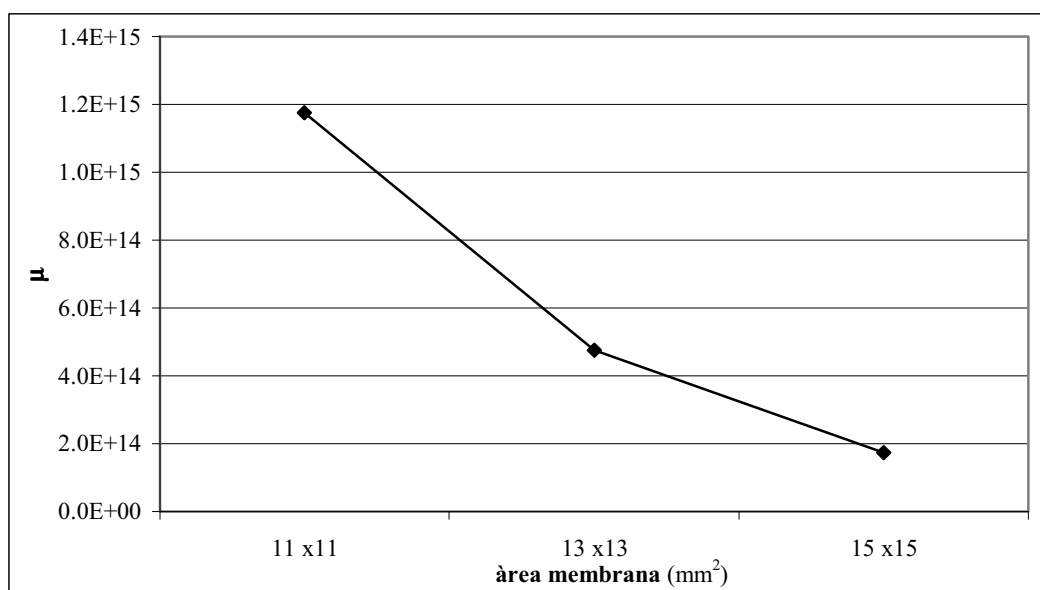


Fig.V.29 Pertorbació, μ , en funció de la mida de les membranes.

Per tant, com es dedueix dels ajustos, la pertorbació, relacionada amb la naturalesa polimèrica de la membrana, és independent de l'excitació.

V.4.5.g. Conclusions

En aquest apartat, s'ha resolt de forma analítica l'equació diferencial (tipus Duffing) del model ressonador esmorteït amb una aproximació de la força elàstica fins a tercer ordre. La representació dels mòduls de les solucions, considerant la seva fase en cada punt, permet conèixer la variació de l'amplitud de les vibracions amb la freqüència de ressonància i la seva estabilitat. A partir de la relació a complir en el punt de màxima ressonància es dedueix la influència del terme pertorbatiu en l'augment de freqüència de la ressonància i amb l'amplitud d'excitació.

A més a més, els ajustos de la potència generada experimentalment permeten conèixer els valors del terme pertorbatiu i dels coeficients dels esmorteïments electromagnètic i paràsit. S'ha trobat que l'esmorteïment paràsit en l'estat metastable correspon a un rang d'esmorteïment paràsit més petit que el estat estable. A més a més augmenta amb l'amplitud de l'excitació però disminueix en augmentar la mida de la membrana. En canvi, la pertorbació únicament depèn de la mida de la membrana i l'esmorteïment electromagnètic depèn de la freqüència natural del ressonador.

V.4.6. Estudi de la dependència de la no linealitat amb els paràmetres físics del ressonador

Un dels objectius per millorar l'eficiència del ressonador vibracional seria poder controlar les posicions dels punts A_2 i B_1 de la gràfica de la Fig.V.22, on s'hi representen les tres solucions de l'equació diferencial. Es voldria desplaçar el punt B_1 fins arribar a la posició del A_2 . Per aconseguir-ho, és necessari conèixer la dependència del valor d'aquest component pertorbatiu μ , relacionat amb l'elasticitat addicional de la membrana polimèrica, amb els paràmetres físics de la membrana del ressonador.

V.4.6.a. Dues dimensions: corda elàstica

Es vol trobar una primera aproximació de la dependència del terme de no linealitat, μ , amb els paràmetres físics del ressonador. Una manera de simplificar-ho, consisteix en estudiar el cas d'una corda en 2D, enlloc de la membrana ressonant en 3D. Pel cas de vibracions lliures, es busca l'equació de moviment d'un element d'una corda lligada en els extrems [36], (Fig.V.30):

$$\frac{\partial}{\partial x}(T \sin \theta) = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (\text{V.73})$$

essent T la tensió aplicada, θ l'angle que forma la corda respecte l'eix z i ρ la densitat lineal.

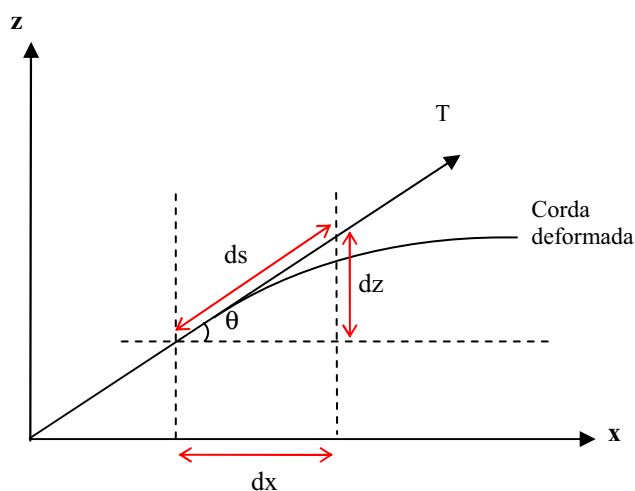


Fig.V.30 Segment d'una corda vibrant, en que tant la posició d'equilibri com la posició deformada estan en el mateix pla.

Per a vibracions petites hi ha una proporcionalitat entre la deformació, Δl , de la corda de longitud l i la força que la provoca, F_{2D} (lleï de Hooke) (equació V.11):

$$F_{2D} = EA \left(\frac{\Delta l}{l} \right) \quad (\text{V.74})$$

Aleshores la tensió es pot expressar com:

$$T = T_o + EA \left(\frac{ds - dx}{dx} \right) = T_o + EA \left(\frac{ds}{dx} - 1 \right) = T_o + EA \left(\frac{\sqrt{\partial z^2 + \partial x^2}}{\partial x} - 1 \right) = T_o + EA \left(\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (\text{V.75})$$

on T_o és la tensió de la corda en repòs, A és l'àrea de la secció, dx és la longitud de l'element diferencial de la corda en repòs i ds és la longitud de l'element diferencial de la corda deformada .

Si $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \ll 1$ es pot realitzar l'aproximació de Taylor:

$$T \approx T_o + EA \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) = T_o + \frac{AE}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{V.76})$$

Substituint (V.76) en (V.73) s'obté:

$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(T_o + \frac{1}{2} AE \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) \sin \theta \right) \quad (\text{V.77})$$

$$\sin \theta = \frac{\partial z}{\partial s} \approx \frac{\partial z}{\partial x} \text{ per } \partial z \approx \partial x \quad (\text{V.78})$$

L'equació que resulta és:

$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_o \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{3}{2} AE \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (\text{V.79})$$

L'equació del moviment (V.79) és la d'una corda tractada com una ona. Si únicament es vol conèixer el desplaçament d'un punt determinat de la corda, s'assumeix que la solució de l'equació és de la forma $z = \sin \frac{n\pi x}{l} f(t)$, essent l , la longitud total de la corda. Les seves derivades són:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} f(t) \quad (\text{V.80})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} f(t) \quad (\text{V.81})$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sin \frac{n\pi x}{l} f'(t) \quad (\text{V.82})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sin \frac{n\pi x}{l} f''(t) \quad (\text{V.83})$$

Si es substitueixen en l'equació diferencial (V.79) per a vibracions lliures, s'obté:

$$\rho \sin \frac{n\pi x}{l} f''(t) + T_o \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) f(t) + \frac{3}{2} AE \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) [f(t)]^3 = 0 \quad (\text{V.84})$$

Es simplifica dividint per $\rho \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$:

$$f''(t) + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{T_o}{\rho} f(t) + \frac{3}{2} \frac{AE}{\rho} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) [f(t)]^3 = 0 \quad (\text{V.85})$$

Per poder resoldre analíticament l'equació diferencial resultant (V.85) es començarà buscant la solució centrada en el mode fonamental, $n=1$, després el terme, $\cos^2 \frac{n\pi x}{l}$ se simplifica substituint-lo pel seu valor mig $\frac{1}{2}$. Finalment, es considera el $\sin \frac{n\pi x}{l} = 1$, que correspon al valor màxim pres en el punt de màxim desplaçament de la corda de longitud l : $x = \frac{l}{2}$. L'equació resultant incloent-hi totes aquestes aproximacions, serà:

$$\ddot{z} + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{T_o}{\rho} z + \frac{3\pi^4}{4l^4} \frac{AE}{\rho} z^3 = 0 \quad (\text{V.86})$$

Per tant, el terme pertorbatiu correspondrà a:

$$\mu \equiv \frac{3}{4} \frac{\pi^4}{l^4} \frac{AE}{\rho} = \frac{3}{4} \frac{\pi^4}{l^4} \frac{E}{\rho_{vol}} \quad (\text{V.87})$$

essent, ρ_{vol} la densitat per unitat de volum i E el mòdul de Young.

Per trobar els valors del terme pertorbatiu, μ , amb el model d'una corda 2D, es considera que el ressonador està fabricat amb una "membrana" de Kapton, amb un mòdul de Young, $E = 2.5 \cdot \text{GPa}$, una densitat, $\rho_{vol} = 1.42 \cdot \text{g/cm}^3$, una àrea de secció transversal, $A = 15 \cdot 0.127 \cdot \text{mm}^2$ i una longitud, $l = 15 \text{mm}$. Aquests valors de la pertorbació a segon ordre calculat segons el model 2D estan normalitzats a un valor simulat màxim arbitrari. Per altra banda, disposem dels valors d'aquesta pertorbació de segon ordre trobats en ajustar les potències teòriques del model pertorbat amb les trobades experimentalment amb els ressonadors 3D fabricats amb membranes de Kapton de diferents mides. Per poder-los comparar amb els anteriors es normalitzen a un valor màxim escollit arbitràriament corresponent al valor l experimental mínim de 11mm, μ_{norm} , i se'ls representen conjuntament, en funció de la longitud, l , en la gràfica de la Fig.V.31. En el cas de 2D, l correspondrà a la longitud de la corda i en el cas 3D serà igual a les longituds laterals de la membrana quadrada.

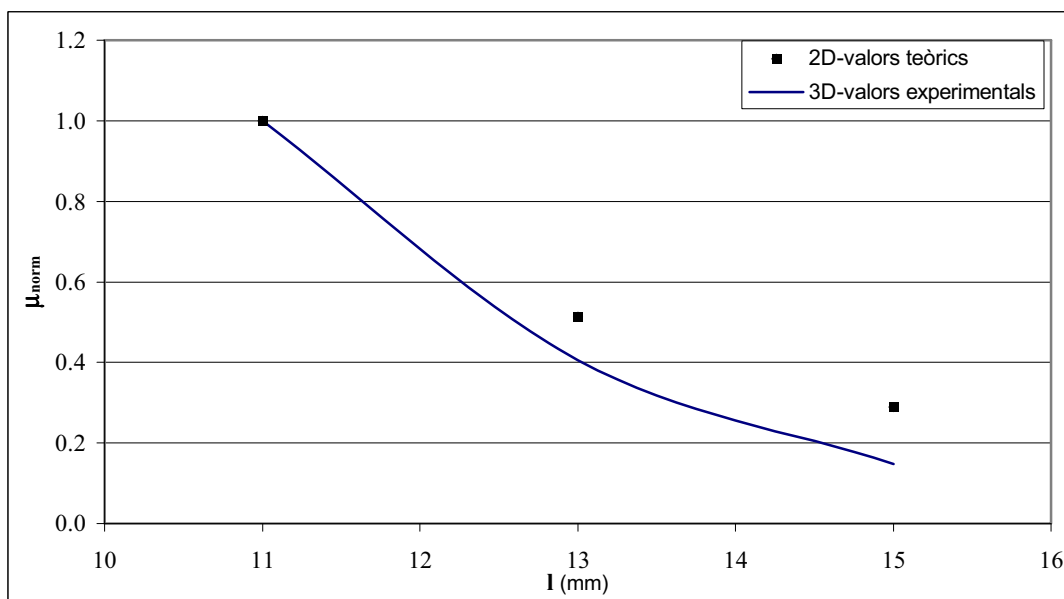


Fig.V.31 Dependència del valor normalitzat de la pertorbació, μ_{norm} en funció de la longitud del ressonador, l .

Malgrat les diferències entre aquest model d'una corda en 2D i el cas d'una membrana 3D, s'observa que la dependència teòrica de la pertorbació normalitzada al seu valor màxim, μ_{norm} , respecte la dimensió del ressonador presenta una tendència similar en els dos casos, com es mostra en la gràfica de la Fig.V.31.

V.4.6.b. Tres dimensions: membrana ressonant

En aquest apartat, es voldria trobar l'expressió analítica del terme pertorbatiu en funció dels paràmetres físics de la membrana ressonant en 3D.

Estudi dimensional

Per començar, partint de l'anàlisi del coeficient de no linealitat, μ , per al cas de la vibració de la corda de l'apartat anterior i mitjançant un anàlisi dimensional del problema en 2D, s'intentarà trobar una aproximació analítica al cas 3D d'una membrana.

Si es considera que el terme pertorbatiu de l'equació de moviment d'un element de la corda 2D és :

$$\mu \equiv \frac{3}{4} \left(\frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 \frac{E}{\rho} \quad (V.88)$$

en una primera aproximació de forma dimensional a 3D el terme pertorbatiu de l'equació de moviment d'un element de membrana se'l suposarà de la forma:

$$\mu \propto \left(\frac{l}{l^2} \right)^3 \frac{AE}{\rho} \quad (V.89)$$

D'aquí es pot deduir el comportament de la pertorbació amb la longitud de la membrana i comparar-lo amb els resultats experimentals. En la Fig.V.33, se'n mostra la normalització al valor arbitrari corresponent a la mida mínima de membrana de 11mm de costat mesurada experimentalment.

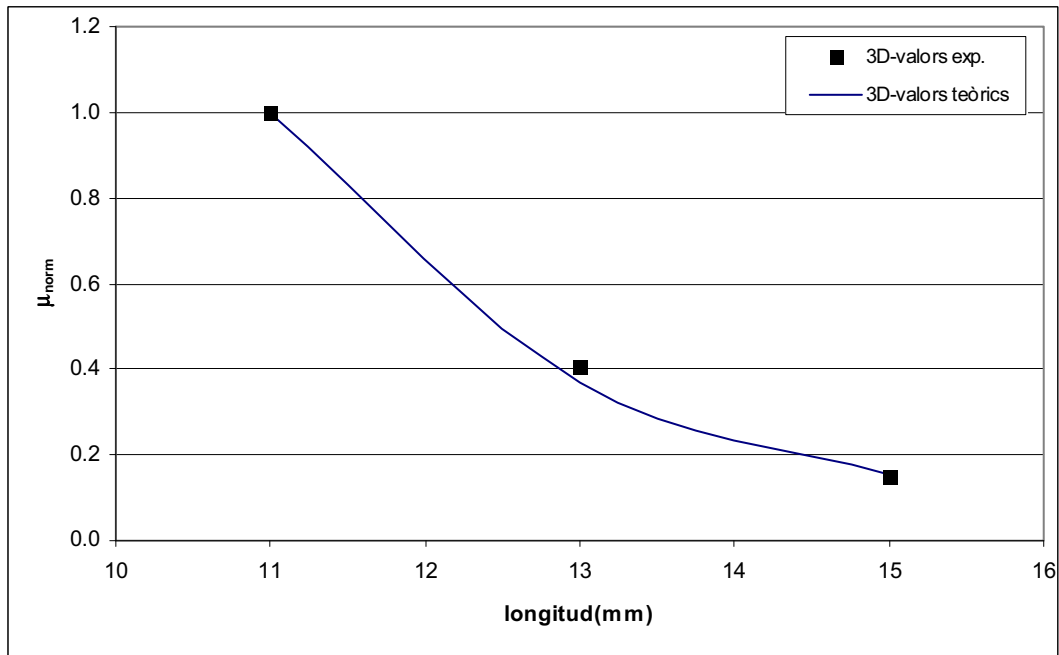


Fig.V.33 Dependència del valor normalitzat de la pertorbació, μ_{norm} en funció de la longitud

En aquesta gràfica es pot observar com la dependència de la pertorbació amb la mida de la membrana “deduïda” dimensionalment és similar al comportament obtingut amb les dades experimentals.

Si es suposa que el factor de proporcionalitat del terme pertorbatiu és el mateix que per al cas 2D una primera aproximació del seu valor serà:

$$\mu_{aproximat} \approx \frac{3}{4} \pi^6 \left(\frac{l}{l^2} \right)^3 \frac{AE}{\rho} \quad (V.90)$$

En la Fig.V.34, s’observa una bona coincidència entre els valors pertorbatius “deduïts” de forma dimensional amb els obtinguts experimentalment sense normalitzar.

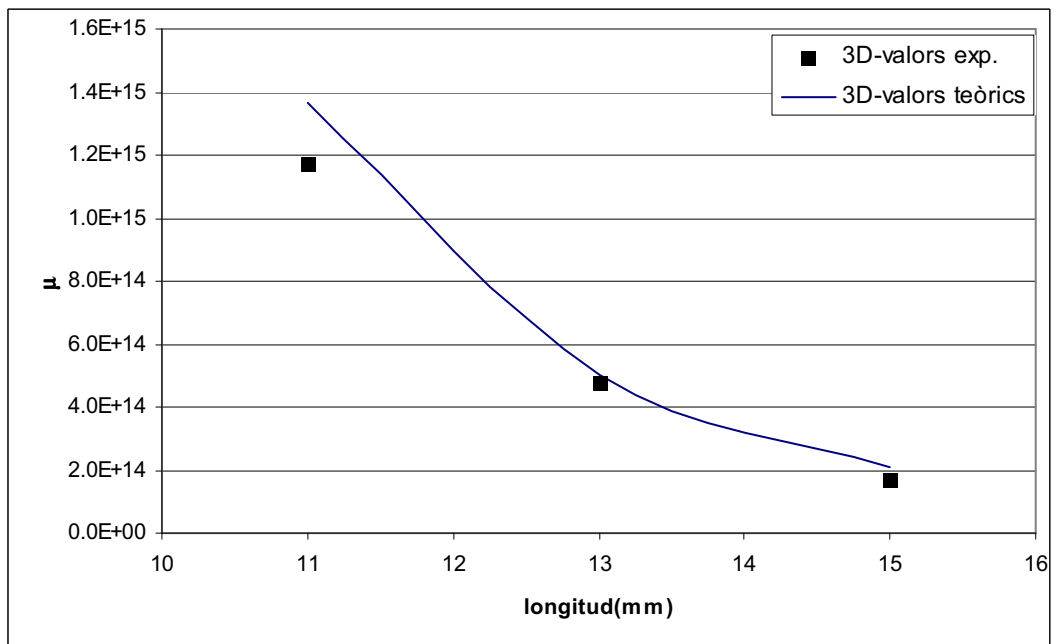


Fig.V.34 Dependència del valor de la pertorbació, μ en funció de la longitud

Per tant, gràcies als bons ajustos aconseguits amb aquesta primera aproximació per trobar la dependència de la pertorbació amb els paràmetres que caracteritzen la membrana ressonant, s'hauria iniciat un primer pas en l'optimització de la sortida del dispositiu. A nivell general, s'ha trobat que la pertorbació augmenta amb l'àrea de la secció transversal i amb l'ús de membranes amb mòdul de Young elevat. En canvi, disminueix amb la densitat i amb la mida de la membrana.

Resolució analítica per al cas d'una capa prima corbada

El següent pas seria relacionar de forma més exacte la pertorbació amb paràmetres com ara l'estrès, els mòduls de "bending" i de "stretching" i els efectes de "spring stiffening". Malgrat que una anàlisi exhaustiva pot ser el treball futur d'una altra tesi en enginyeria de materials, a continuació se'n farà un estudi preliminar. En el dibuix de la Fig.V.32, es representa la deformació en una membrana de 3D.

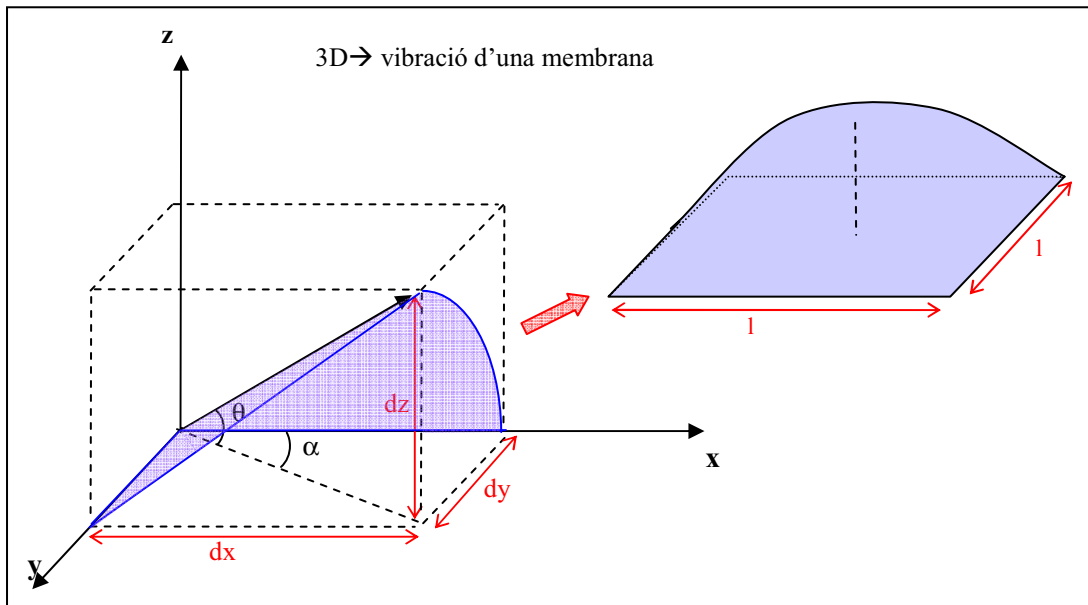


Fig.V.32 Representació gràfica d'una membrana vibrant, on cada punt de la membrana es troba definida per les coordenades x , y , z i els desplaçaments dx , dy , dz .

Per començar, s'hauria de trobar l'equació diferencial que modelitzaria les petites deformacions d'una membrana prima, caracteritzada per tenir un gruix molt menor que les seves dimensions en les altres dues direccions. El criteri de petita deformació és que sigui petita en comparació amb el gruix de la membrana. Segons la teoria de l'elasticitat [22], la forma més senzilla d'obtenir les equacions generals d'equilibri de les capes primes, és a partir del càlcul de la condició de mínima energia lliure d'una placa corbada.

El doblegat d'una placa produeix dilatacions i compressions en els diferents punts de l'interior segons estiguin situats en les cares convexa i la còncava respectivament, existint una superfície neutra en la meitat del seu gruix com es mostra en la Fig.V.35.

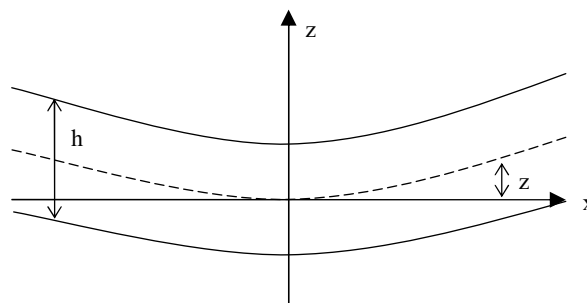


Fig.V.35 Representació esquemàtica de la secció longitudinal d'una membrana corbada.

Per a trobar l'equació del comportament de l'oscil·lació perpendicular al pla de la placa amb els costats fixes, es parteix de la condició de mínima energia de l'equació d'equilibri. En el cas d'una membrana doblegada per l'acció de forces externes, F_{ext} , segons [22], aquesta correspon a:

$$\partial F_{placa} - \int F_{ext} \partial z \, dx dy = 0 \quad (V.91)$$

On z és el desplaçament vertical dels punts de la superfície neutra de la placa en corbar-se. Els autors plantegen una equació de superfície de la següent forma:

$$\int \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 z - \frac{F_{ext}}{A} \right\} \partial z \, dx dy = 0 \quad (V.92)$$

essent $\Delta^2 = \nabla^2 \nabla^2$ l'operador diferencial biharmònic ($\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$), E el mòdul de Young, ν el coeficient de Poisson, i h el gruix de la membrana. En ser arbitrària la variació de ∂z d'aquesta integral, el coeficient ha de ser 0, per anular l'equació (V.92):

$$\frac{F_{ext}}{A} - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 z = 0 \quad (V.93)$$

El coeficient d'aquesta equació, $D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ s'anomena rigidesa a la flexió de la membrana.

Per altra banda, la força externa es pot escriure segons la forma clàssica de l'equació de Newton:

$$F_{ext} = -m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\rho_{volum} Ah \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (V.94)$$

on ρ_{volum} és la densitat volumètrica.

Substituint (V.94) en (V.93), els autors dedueixen l'equació diferencial per les oscil·lacions lliures:

$$\rho_{volum} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 z = 0 \quad (V.95)$$

No obstant, aquesta teoria de la flexió de capes primes només es pot aplicar quan les deformacions són suficientment petites, és a dir quan la flexió sigui $z \ll h$.

Resolució analítica per al cas d'una capa prima

En canvi, si es vol generalitzar la teoria per a flexions més grans s'haurà de considerar que aquesta anirà acompanyada d'una dilatació global. Per començar, es troba l'expressió de deformació que determinaria la dilatació d'una membrana, amb costats dx i dy , sotmesa simultàniament a una flexió i a una dilatació en el pla xy , Fig.V.36.

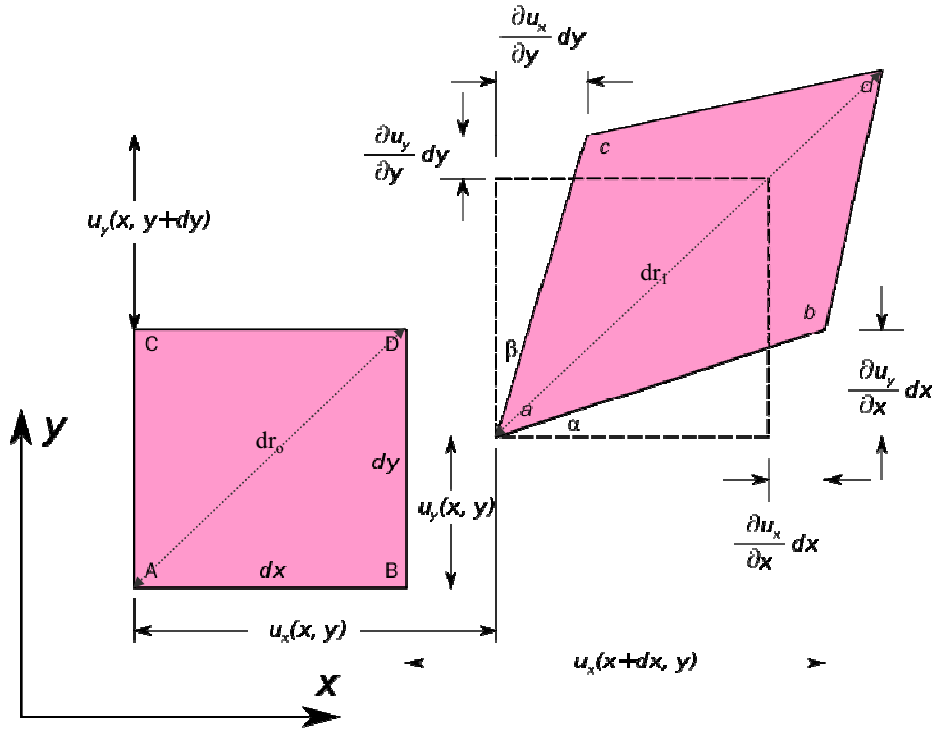


Fig.V.36 Representació esquemàtica de la deformació d'un element rectangular de membrana dx, dy [38].

L'element de longitud de la placa sense deformar, dr_o , s'expressa com:

$$dr_o^2 = dx^2 + dy^2 \quad (\text{V.96})$$

i es transforma després de la deformació en l'element de longitud dr_1 :

$$dr_1^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + du_x^2 + 2dxdu_x + du_y^2 + 2dydu_y + dz^2 \quad (\text{V.97})$$

on du_x , du_y i dz són les deformacions de les components u_x , u_y i z . El vector de desplaçament bidimensional \mathbf{u} es troba determinat per les components u_x i u_y . Les deformacions s'expressen:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \quad (\text{V.98a})$$

$$du_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy \quad (\text{V.98b})$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (\text{V.98c})$$

Substituint en (V.97) i negligint els termes d'ordre superior s'obté:

$$dr_1^2 \approx dr_o^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k \quad (\text{V.99})$$

on u_{ik} , és el tensor bidimensional de deformacions:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (\text{V.100})$$

Per al cas de plaques suficientment primes la deformació longitudinal es pot considerar uniforme en tot el gruix. El tensor de deformacions simètric es podrà expressar únicament

en funció de x i y (components del pla de la placa) i les condicions de contorn en ambdues cares s'expressen en relació amb l'estrés com:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{V.101})$$

A més, aquestes components també es podran considerar pràcticament nul·les en tot el gruix o volum de la placa. Per tant, les components no nul·les del tensor de tensions, expressades en termes del tensor de deformacions [22], s'escriuen com:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (u_{xx} + \nu u_{yy}) \quad (\text{V.102a})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (u_{yy} + \nu u_{xx}) \quad (\text{V.102b})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} u_{xy} \quad (\text{V.102c})$$

De manera anàloga al cas anterior, es minimitza l'energia lliure de la membrana per trobar l'equació d'equilibri. D'aquesta manera s'obté un sistema de dues equacions:

$$\rho_{\text{volum}} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 z - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sigma_{ik} \frac{\partial z}{\partial x_k} \right] = 0 \quad (\text{V.103})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{V.104})$$

Aquesta última es pot desenvolupar mitjançant les components del tensor de tensions (V.102a), (V.102b), (V.102c):

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + E \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) = 0 \quad (\text{V.105})$$

En aquest sistema de dues equacions (V.103) i (V.105) hi ha tres incògnites: u_x , u_y i z . La seva solució determinarà simultàniament la forma de la placa corbada i la dilatació com a resultat de la flexió. No obstant, si no es realitzen algunes aproximacions la resolució d'aquest sistema d'equacions s'haurà de realitzar de forma numèrica, dificultant la identificació de les dependències dels diferents paràmetres del ressonador del terme pertorbatiu.

Es comença escrivint l'equació d'equilibri (V.103), com:

$$\rho_{\text{volum}} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 z - \sigma_{ik} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (\text{V.106})$$

es desenvolupa el terme del tensor de tensions pel cas de deformacions de plaques primes:

$$\rho_{\text{volum}} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 z - \sigma_{xx} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \sigma_{yy} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\sigma_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{V.107})$$

i s'hi substitueixen els valors de les components del tensor de tensions (V.102a):

$$\rho_{\text{volum}} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 z - \frac{E}{1-\nu^2} (u_{xx} + \nu u_{yy}) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{E}{1-\nu^2} (u_{yy} + \nu u_{xx}) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{E}{1+\nu} u_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{V.108})$$

En desenvolupar l'operador diferencial Δ^2 l'equació diferencial resultant és:

$$\rho_{\text{volum}} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) - \frac{E}{1-\nu^2} (u_{xx} + \sigma u_{yy}) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{E}{1-\nu^2} (u_{yy} + \sigma u_{xx}) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{E}{1+\nu} u_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{V.109})$$

on les components u_{xx} , u_{yy} i u_{xy} segons (V.100) s'escriuen com:

$$u_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{V.110a})$$

$$u_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{V.110b})$$

$$u_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (\text{V.110c})$$

Es considera que la posició z de cada un dels punts de la membrana presenta una dependència amb les coordenades x , y i el temps t de la forma:

$$z = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \quad (\text{V.111})$$

i les seves derivades són:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \quad (\text{V.112})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{n\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \quad (\text{V.113})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \quad (\text{V.114})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \quad (\text{V.115})$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \quad (\text{V.116})$$

Per tal de trobar una aproximació analítica als termes $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ i $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ del tensor

bidimensional de deformacions, es representa esquemàticament com es deforma la membrana. La membrana presenta inicialment unes dimensions laterals de $l \times l$ i un gruix h . En la representació esquemàtica de la Fig.V.37, la longitud de membrana lliure d'imant en cada costat abans i després de la deformació valen l_0 i $l_0 + \Delta l_0$ respectivament.

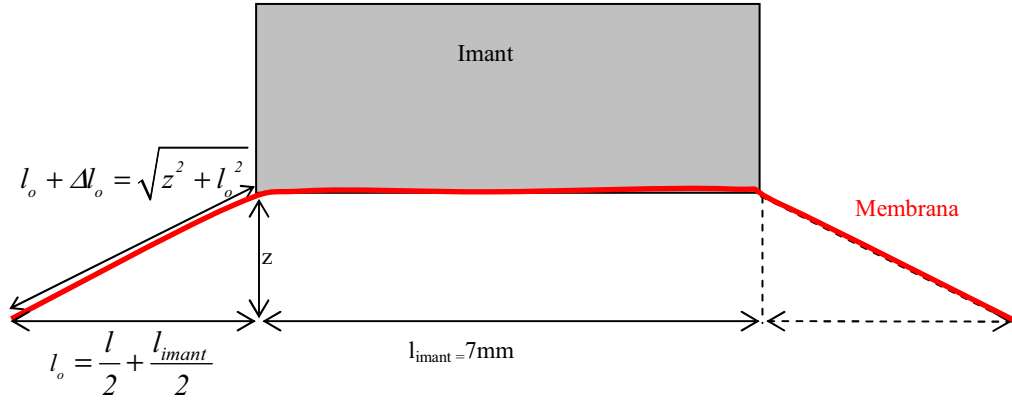


Fig.V.37 Representació esquemàtica de la membrana del dispositiu en ressonància

En una primera aproximació es considera que les següents derivades es poden igualar a:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\Delta l_o}{l_o} \quad (\text{V.117})$$

Es calcula per Pitàgores Δl_o :

$$\Delta l_o = \sqrt{z^2 + l_o^2} - l_o = l_o \left(\sqrt{\left(\frac{z}{l_o}\right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (\text{V.118})$$

i es normalitza a l_o obtenint:

$$\frac{\Delta l_o}{l_o} = \left(\sqrt{\left(\frac{z}{l_o}\right)^2 + 1} - 1 \right) \quad (\text{V.119})$$

Com que el desplaçament z és molt més petit que la longitud de la membrana lliure l_o es pot aplicar l'aproximació de Taylor $\sqrt{x_o + 1} \approx 1 + \frac{1}{2}x_o$ vàlida per a valors petits de x_o :

$$\frac{\Delta l_o}{l_o} = \frac{z^2}{2l_o^2} \quad (\text{V.120})$$

Per tant, els següents termes del tensor de deformacions es poden escriure com

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t)^2}{2l_o^2} \quad (\text{V.121})$$

Si es substitueix z i les seves derivades en les components del tensor bidimensional de deformacions (V.110a), (V.110b) i (V.110c) s'obtenen:

$$u_{xx} = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t)^2}{2l_o^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \right)^2 \quad (\text{V.122a})$$

$$u_{yy} = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t)^2}{2l_o^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t) \right)^2 \quad (\text{V.122a})$$

$$u_{xy} = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t)^2}{2l_o^2} + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) f(t)^2 \quad (\text{V.122a})$$

Substituint les components del tensor bidimensional de deformacions i de tensions, i les derivades de z en l'equació diferencial (V.109) s'obté:

$$\frac{1}{12l_o^2(1-\nu^2)} \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + 3En^2\pi^2 \left(\begin{array}{l} 4El_o^2n^4\pi^4 f(t) + \\ \left(l^2 + l^2\nu + 2l_o^2n^2\pi^2\nu - \right. \\ \left. - (l_o^2n^2\pi^2(1-\nu) + l^2(1+\nu)) \left(\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) + \cos\left(\frac{2n\pi y}{l}\right) \right) + \right. \\ \left. + (l^2\nu - l_o^2n^2\pi^2) \cos\left(\frac{2n\pi(x-y)}{l}\right) \right) + \\ \left. + (l^2 - l_o^2n^2\pi^2) \cos\left(\frac{2n\pi(x+y)}{l}\right) \right) f(t)^3 + \right. \\ \left. + 12l_o^2(1-\nu^2)\rho_{\text{volum}}f''(t) \right) = 0 \quad (\text{V.123})$$

Aïllant $f''(t)$:

$$\left(\begin{array}{l} \left(l^2 + l^2\nu + 2l_o^2n^2\pi^2\nu - \right. \\ \left. - (l_o^2n^2\pi^2(1-\nu) + l^2(1+\nu)) \left(\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) + \cos\left(\frac{2n\pi y}{l}\right) \right) + \right. \\ \left. + (l^2\nu - l_o^2n^2\pi^2) \cos\left(\frac{2n\pi(x-y)}{l}\right) + \right. \\ \left. + (l^2 - l_o^2n^2\pi^2) \cos\left(\frac{2n\pi(x+y)}{l}\right) \right) f(t)^3 \end{array} \right) \frac{En^2\pi^2}{12\rho_{\text{volum}}l_o^2(1-\nu^2)} = f''(t) \quad (\text{V.124})$$

S'estudia el comportament de l'equació diferencial al llarg de la diagonal de la membrana. En tractar-se d'una membrana quadrada hi ha simetria, per tant es suposa $x = y$:

$$f''(t) + \frac{En^4\pi^4h^2}{3\rho_{\text{volum}}l^4(1-\nu^2)} f(t) + \frac{En^2\pi^2}{2\rho_{\text{volum}}l_o^2(1-\nu^2)} \left(\nu - \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) \right) \left(l^2 + l_o^2n^2\pi^2 + (-l^2 + l_o^2n^2\pi^2) \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) \right) f(t)^3 = 0 \quad (\text{V.125})$$

Considerant que el valor promig de $\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)$ és 0 s'obté:

$$f''(t) + \frac{En^4\pi^4h^2}{3\rho_{\text{volum}}l^4(1-\nu^2)} f(t) + \frac{En^2\pi^2\nu}{2\rho_{\text{volum}}l_o^2(1-\nu^2)} (l^2 + l_o^2n^2\pi^2) f(t)^3 = 0 \quad (\text{V.126})$$

que també es pot expressar com:

$$f''(t) + \frac{En^4\pi^4h^2}{3\rho_{\text{volum}}l^4(1-\nu^2)} f(t) + \frac{En^2\pi^2\nu}{2\rho_{\text{volum}}l_o^2(1-\nu^2)} f(t)^3 + \frac{En^4\pi^4\nu}{2\rho_{\text{volum}}l^4(1-\nu^2)} f(t)^3 = 0 \quad (\text{V.127})$$

D'aquí es pot deduir que la constant elàstica de la membrana (sense imant) normalitzada a la seva massa val:

$$\frac{K}{m} = \omega_n^2 = \frac{n^4\pi^4El^2}{3\rho_{\text{volum}}l^4(1-\nu^2)} \quad (\text{V.128})$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2 \sqrt{Eh}}{\sqrt{3\rho_{volum}(1-\nu^2)}l^2} \quad (V.129)$$

D'aquí es pot deduir la dependència de la freqüència de ressonància, $Freq$, amb els diferents paràmetres de la membrana.

$$Freq = \frac{n^2 \pi \sqrt{Eh}}{2\sqrt{3\rho_{volum}(1-\nu^2)}l^2} \quad (V.130)$$

Es vol comprovar la coherència d'aquesta equació amb el comportament experimental. Mitjançant el programa de simulació per elements finits ANSYS, s'analitza la influència dels paràmetres del resonador sobre la freqüència del primer mode de ressonància.

En la gràfica de la Fig.V.38, s'ajusta analíticament la freqüència de ressonància normalitzada a la màxima simulada, $Freq_{norm}$, a una expressió potencial del quocient entre la dimensió lateral de la membrana i la dimensió lateral mínima escollida arbitràriament amb un valor de 8mm. Es considera com la mida de membrana mínima per posar un imant de $7 \times 7 \text{mm}^2$.

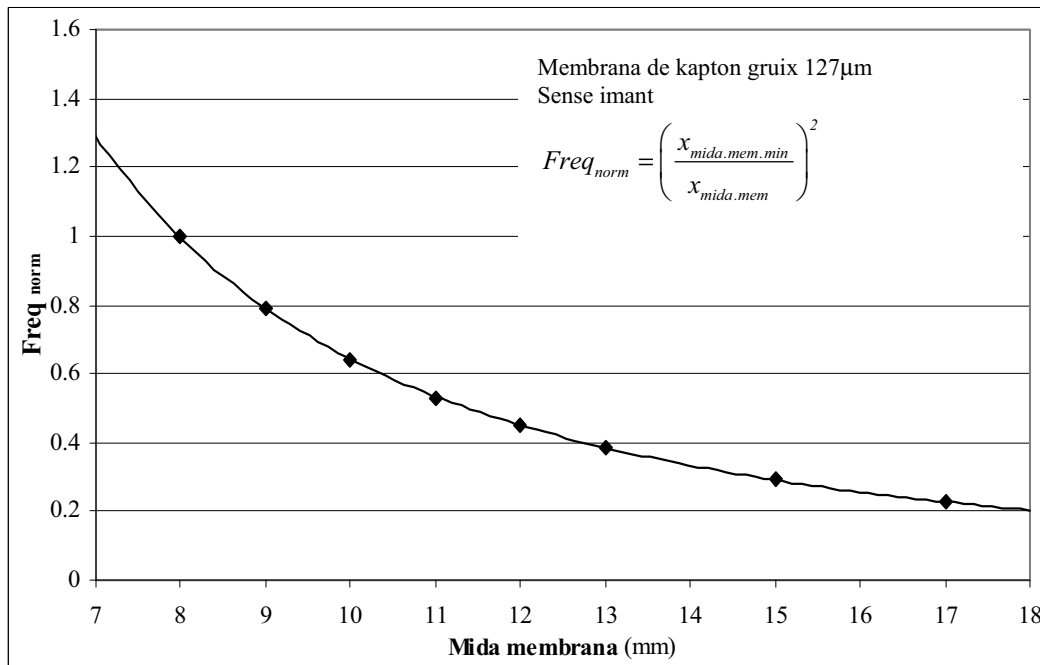


Fig.V.38 Simulacions de la freqüència de ressonància de la membrana normalitzada a la freqüència màxima, $Freq_{norm}$, en funció de la mida de la membrana, $x_{mida.mem}$

L'estudi del comportament de la freqüència de ressonància indica que disminueix en funció de la mida de la membrana amb una potència 2, que és la prevista per l'equació V.130.

De manera similar en la gràfica de la Fig.V.39 es representen el comportament de les freqüències de ressonàncies en funció de la mida de la membrana, l , per al cas d'una membrana de kapton quadrada de $127 \mu\text{m}$ de gruix. Es comparen els valors de freqüències calculades segons el model amb les obtingudes mitjançant simulacions ANSYS.

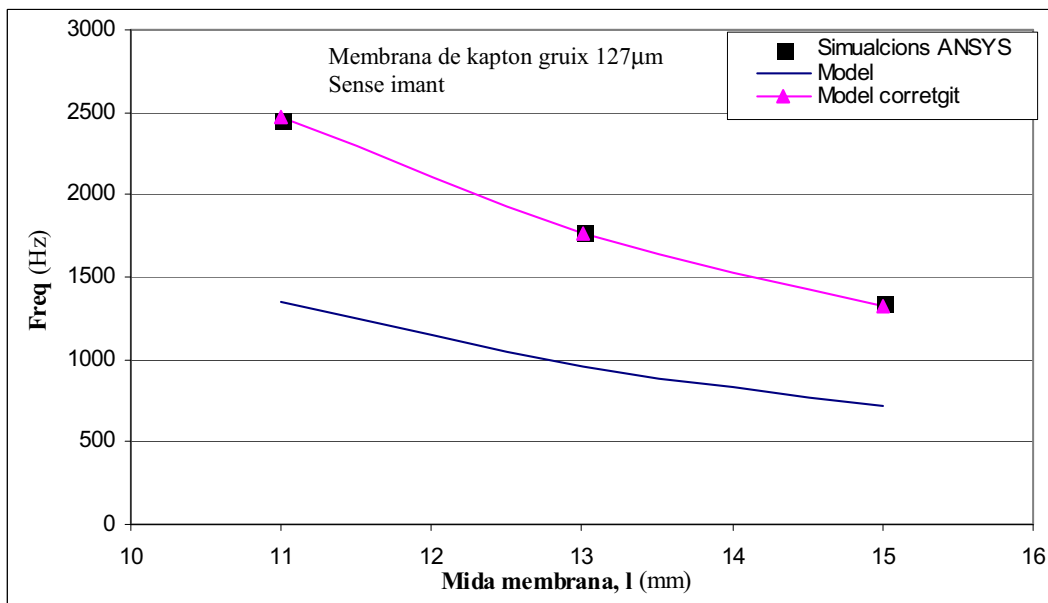


Fig.V.39 Freqüència de ressonància de la membrana amb l'imant en funció de la seva mida, l.

Malgrat que el comportament de la freqüència de ressonància amb els paràmetres analitzats és el mateix, no s'obtenen els mateixos valors de freqüències. Això és degut a que la forma de l'ona emprada per descriure el model és de tipus sinusoidal. No obstant, segons les simulacions ANSYS, Fig.V.40a), aquest comportament no és del tot exacte. Degut a què la forma de la membrana no correspon a la forma sinusoidal emprada en els càlculs, en una primera aproximació es podria considerar una longitud efectiva de membrana. Mitjançant els ajustos a les freqüències de ressonàncies els seus valors de longituds efectives prenen els valors de 8.1, 9.6 i 11.1mm per les mides de membrana de 11, 13 i 15mm respectivament.

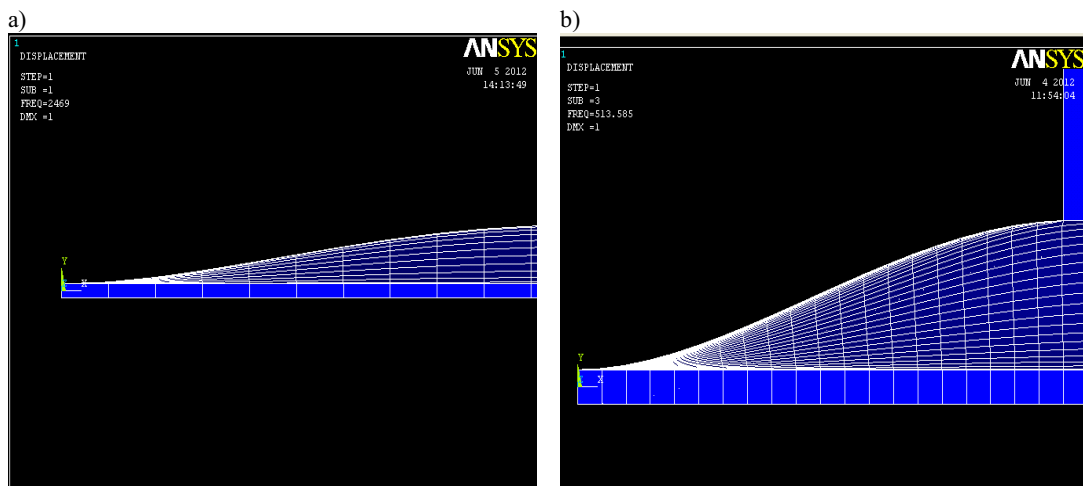


Fig.V.40 Secció transversal del primer mode de vibració d'una membrana a) sense imant b) amb imant.

En un treball posterior, per a un càlcul més exacte i d'una manera senzilla consistiria aproximar la forma de la membrana ajustant-li un polinomi de grau 3. No obstant, per a una millor aproximació es podria emprar una funció gaussiana o inclús una combinació de funcions còniques, amb una base hiperbòlica més una altra de base parabòlica.

En la gràfica següent, Fig.V.41, es mostra la influència del gruix de la membrana en funció de la *Freq*. Anàlogament al cas anterior, es troba que la dependència de la freqüència de ressonància normalitzada, $Freq_{norm}$, amb el gruix de la membrana, h ,

normalitzant l'ajust a un gruix màxim de $30\mu\text{m}$ escollit de forma arbitrària, h_{max} . Es tracta d'un comportament lineal igual que el previst per l'equació diferencial.

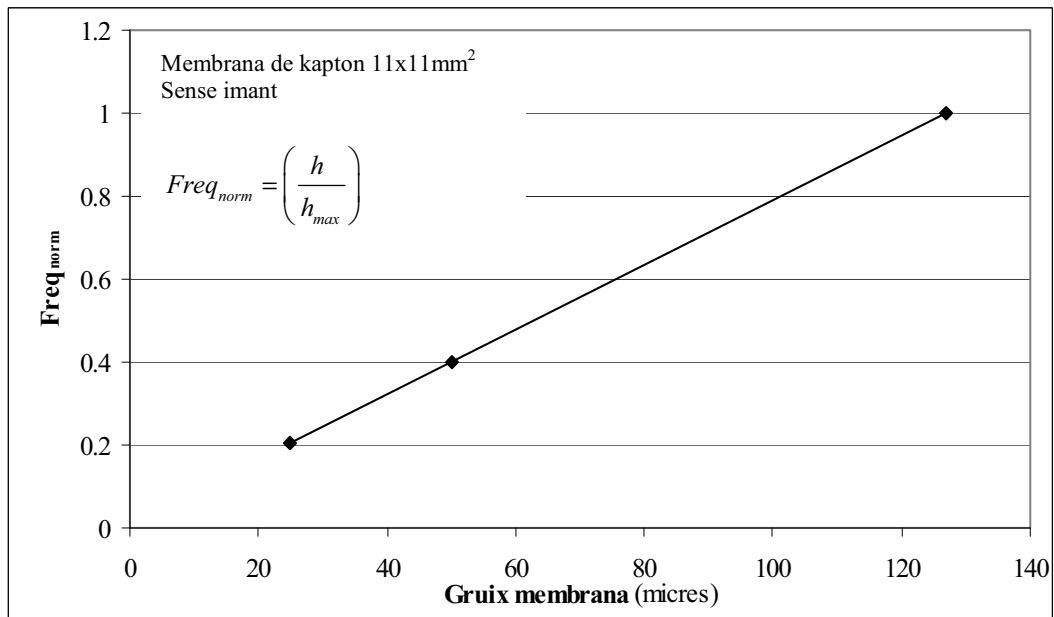


Fig.V.41 Simulacions de la freqüència de ressonància de la membrana normalitzada a la freqüència màxima, $Freq_{norm}$, en funció del gruix de la membrana, h .

Un altre paràmetre que intervé en la freqüència de ressonància és el mòdul de Young. Les simulacions de la Fig.V.42 han permès trobar un ajust de la $Freq_{norm}$ amb una expressió analítica del mòdul de Young normalitzat de forma arbitrària a 2.5GPa (corresponent al valor del Kapton). El seu comportament coincideix amb el de l'expressió teòrica.

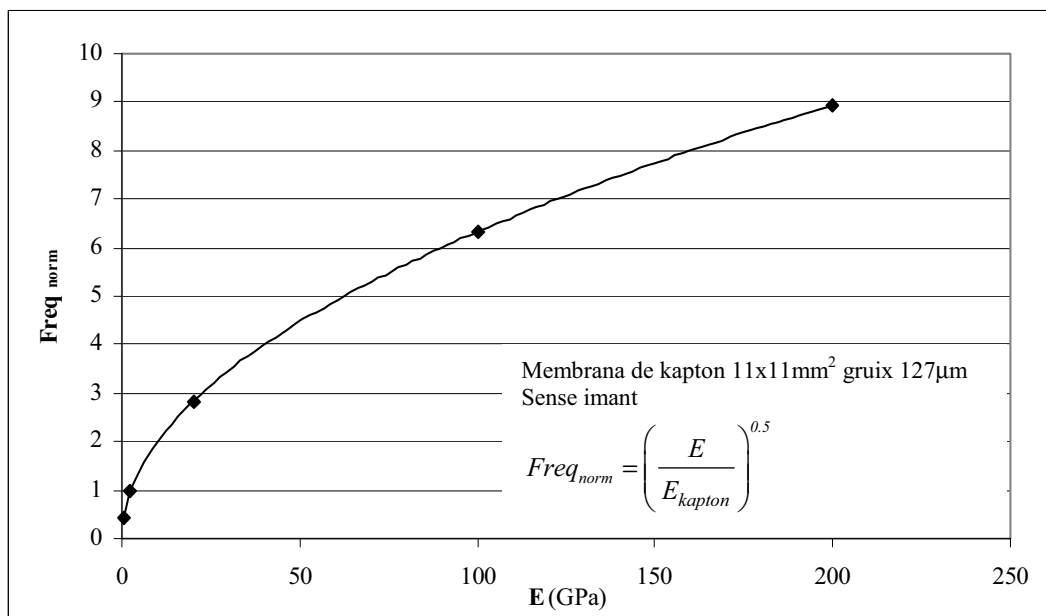


Fig.V.42 Simulacions de la freqüència de ressonància de la membrana normalitzada a la freqüència màxima, $Freq_{norm}$, en funció del mòdul de Young del material de la membrana.

Un altre dels paràmetres a modelitzar és la dependència de la freqüència de ressonància normalitzada amb la densitat de la membrana, ρ , en funció de la densitat del kapton $\rho_{kapton} = 1.42 \cdot 10^3 \text{Kg/m}^3$, Fig.V.43. Es comprova que el seu comportament és l'esperat pel desenvolupament teòric.

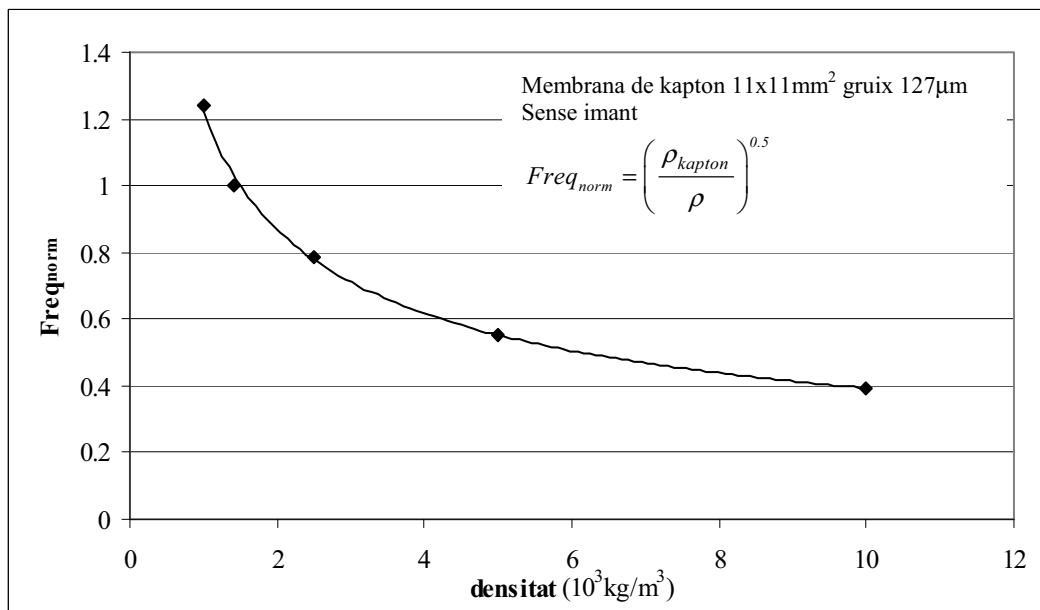


Fig.V.43 Simulacions ANSYS de la freqüència de ressonància de la membrana normalitzada a la freqüència màxima, $Freq_{norm}$, en funció de la densitat de la membrana.

Finalment, l'última dependència que cal analitzar serà la freqüència normalitzada amb el coeficient de Poisson referenciat al valor del Kapton $\nu_{kapton}=0.34$, Fig.V.44. L'estudi indica que també correspon al previst.

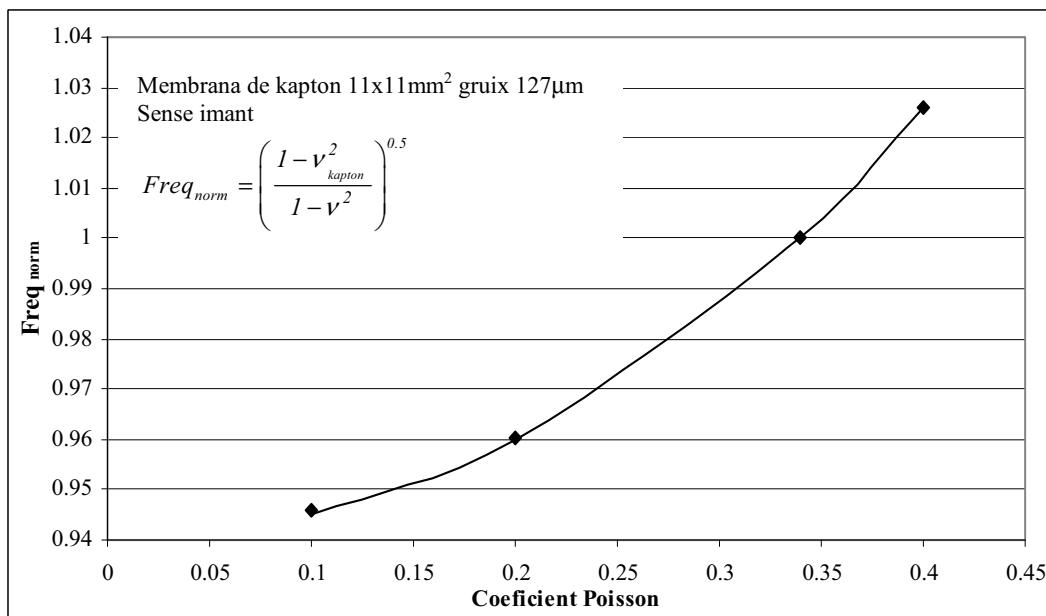


Fig.V.44 Simulacions ANSYS de la freqüència de ressonància de la membrana normalitzada a la freqüència màxima, $Freq_{norm}$, en funció del coeficient de Poisson, ν , de la membrana.

Totes aquestes simulacions han permès realitzar uns ajustos de diferents funcions analítiques de la dependència de les freqüències simulades dels ressonadors, $Freq$, en funció dels diferents paràmetres. L'expressió obtinguda que engloba el comportament és:

$$Freq \propto \left(\frac{x_{mida.mem.min}}{x_{mida.mem}} \right)^2 \left(\frac{h}{h_{max}} \right) \left(\frac{E}{E_{kapton}} \right)^{0.5} \left(\frac{\rho_{kapton}}{\rho} \right)^{0.5} \left(\frac{1-v_{kapton}^2}{1-v^2} \right)^{0.5} \quad (V.131)$$

Per tant, es pot concloure que el model proposat descriu correctament el comportament de la freqüència de ressonància sense imant.

Per altre banda, per a tenir en compte explícitament l'existència de l'imant com a massa inercial s'haurà d'introduir alguna modificació addicional en el plantejament de l'equació diferencial (V.127).

Com que l'imant, a diferència de la membrana, es comporta com un sòlid "indeformable" a les vibracions a les que està sotmès, i la seva posició z en un mode de vibració vertical es pot considerar constant amb les coordenades x , y es podria expressar únicament com a funció del temps. Per tant, en una primera aproximació l'equació diferencial es podria considerar com la d'una membrana amb una massa suma de la de la membrana més la de l'imant. Això implicarà una modificació en la densitat. La densitat es transforma en una densitat ponderada de la densitat de la membrana ρ_{mem} i de l'imant ρ_{imant} als valors dels volums respectius Vol_{mem} i Vol_{imant} que s'anomenarà ρ_{promig} .

$$f''(t) + \frac{n^4 \pi^4 E h^2}{3 \rho_{promig} l^4 (1-v^2)} f(t) + \left(\frac{n^2 \pi^2 E v}{2 \rho_{promig} l^2 l_o^2 (1-v^2)} + \frac{n^2 \pi^4 E v}{2 \rho_{promig} l^4 (1-v^2)} \right) [f(t)]^3 = 0 \quad (V.132)$$

$$\rho_{promig} = \left(\frac{Vol_{imant} \rho_{imant} + Vol_{mem} \rho_{mem}}{Vol_{imant} + Vol_{mem}} \right) \quad (V.133)$$

No obstant, aquesta és una primera aproximació i només s'esperen obtenir uns valors de freqüències de ressonància del mateix ordre que les calculades mitjançant ANSYS, Fig.V.45.

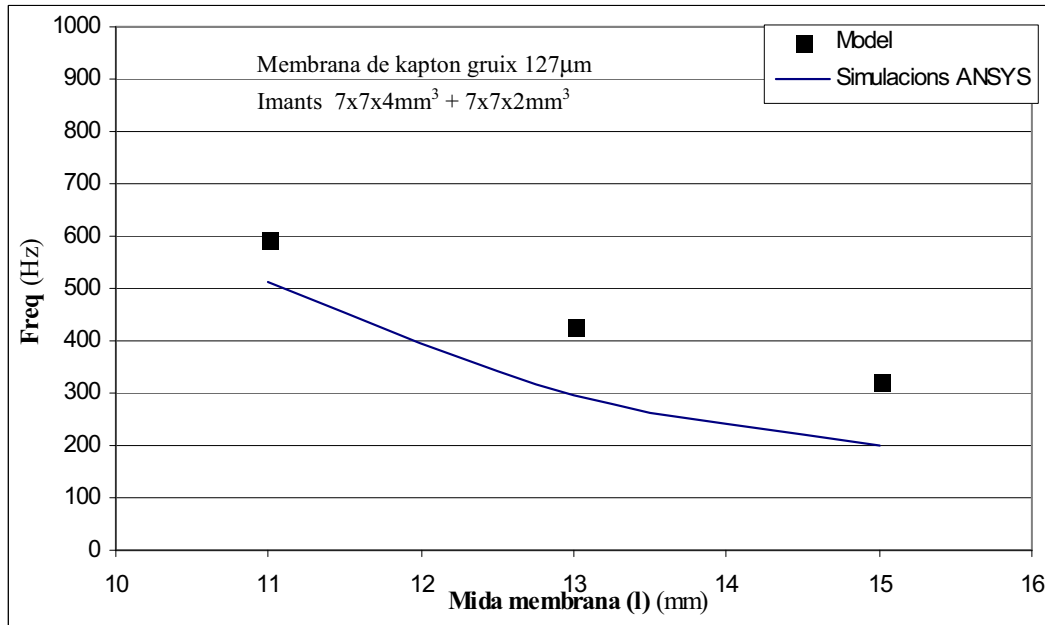


Fig.V.45 Freqüència de ressonància de la membrana amb l'imant en funció de la seva mida, l.

Dels ajustos realitzats en el capítol III de les simulacions ANSYS i el de la Fig.V.46 es troben les dependències de la freqüència de ressonància amb els diferents paràmetres del ressonador.

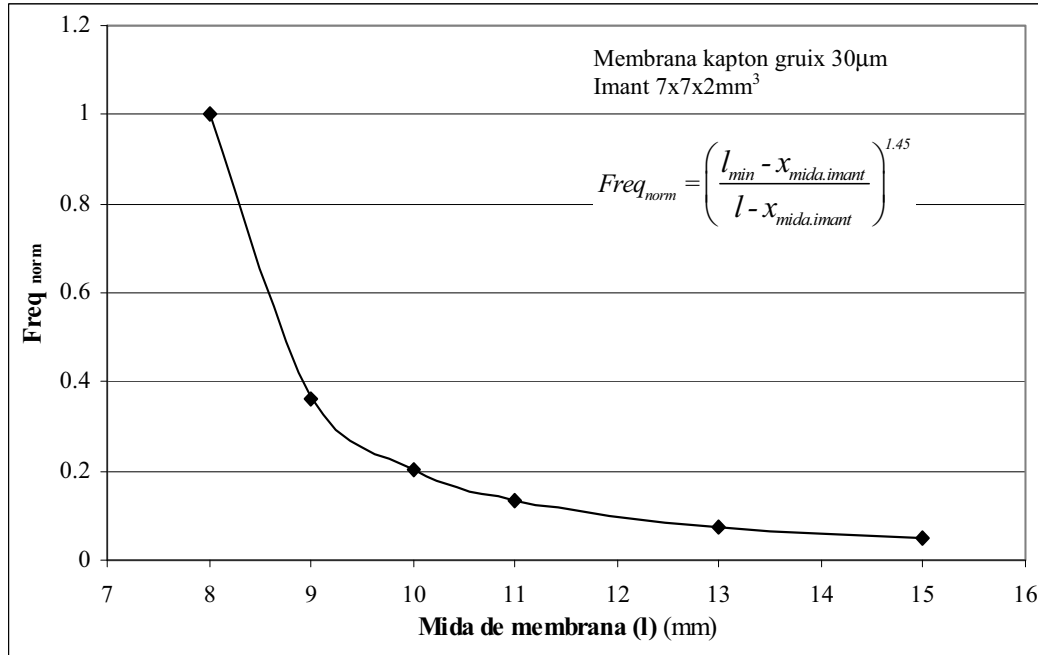


Fig.V.46 Freqüència de ressonància de la membrana normalitzada a la freqüència màxima, $Freq_{norm}$, en funció de les dimensions laterals, l .

Malgrat les aproximacions del model presenten comportaments amb tendències similars:

$$Freq \propto \left(\frac{l_{min} - x_{mida.imant}}{l - x_{mida.imant}} \right)^{1.45} \left(\frac{h}{h_{max}} \right)^{1.5} \left(\frac{E}{E_{kapton}} \right)^{0.5} \left(\frac{\rho_{kapton}}{\rho} \right)^{0.5} \quad (V.134)$$

No obstant, reproduir el comportament d'aquesta freqüència amb els paràmetres del ressonador requerirà de càlculs més laboriosos, igual que per al cas sense imant. La forma sinusoidal de l'equació, que indica la posició de cada un dels punts de la membrana, (V.111) s'allunya força del comportament trobat en les simulacions ANSYS (Fig.V.40b), seria més complexa. El plantejament i resolució de l'equació diferencial emprant una equació que descriu millor la forma de la membrana al vibrar podria ser l'objectiu d'un futur treball.

Per tant, el terme pertorbatiu trobat mitjançant aquesta equació diferencial correspon a una primera aproximació:

$$\mu_{aprox} \cong \frac{n^4 \pi^4 E \nu}{2 \rho_{promig} l^4 (1 - \nu^2)} + \frac{n^2 \pi^2 E \nu}{2 \rho_{promig} l^2 l_o^2 (1 - \nu^2)} \quad (V.135)$$

En les gràfiques Fig.V.47 i Fig.V.48 es representen els valors normalitzats als valors màxims i sense normalitzar, respectivament, del terme pertorbatiu tot comparant-los amb els resultats experimentals.

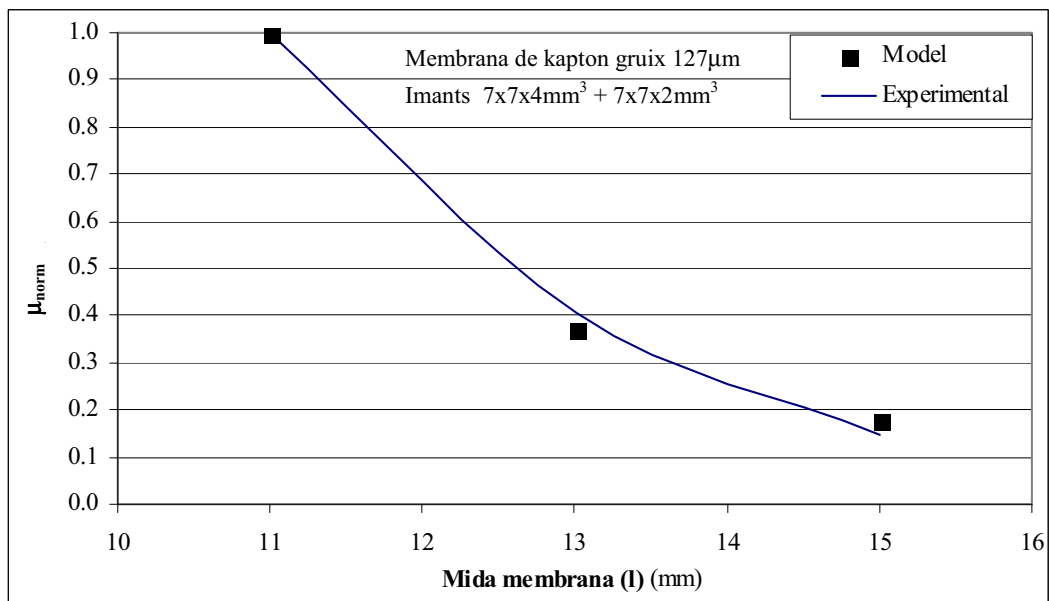


Fig.V.47 Pertorbació normalitzada, μ_{norm} en funció de la mida de la membrana.

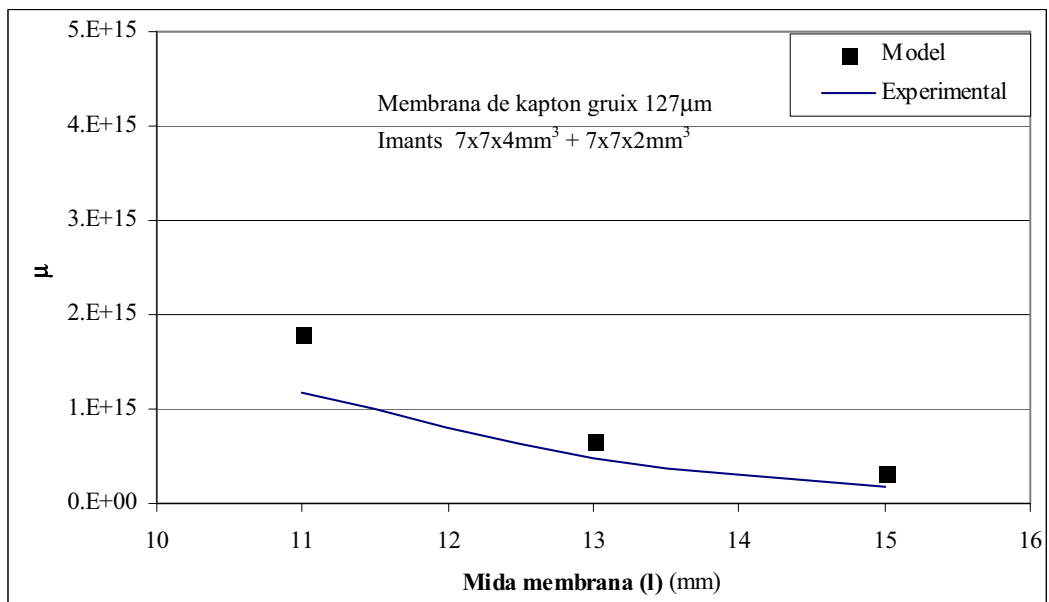


Fig.V.48 Pertorbació, μ , en funció de la mida de la membrana.

Cal tenir present que, a més a més de les aproximacions en la forma de la membrana vibrant i en la manera de calcular la influència de l'imant, en el terme de la pertorbació hi ha una imprecisió tecnològica en la determinació de la longitud de la membrana. Aquesta longitud efectiva no és la delimitada pel marc sinó que correspon a un valor més elevat.

Malgrat totes les aproximacions, els valors pertorbatius deduïts analíticament amb la teoria de l'elasticitat per a plaques fortament deformades són del mateix ordre de magnitud i presenten un comportament similar respecte la mida de la membrana, Fig.V.46.

L'objectiu per a una futura tesi en enginyeria de materials seria trobar de manera més exacta la forma d'aquesta equació diferencial. A partir d'aquí es podrà deduir la dependència del terme pertorbatiu amb diferents paràmetres, que es puguin relacionar amb els comportaments de "bending" i "stretching", per tal de controlar l'eficiència del ressonador. Això requerirà un millor ajust al comportament de la forma de la membrana

en vibració i també trobar de manera més precisa com influeix l'existència de l'imant en l'equació diferencial.

A més a més, també podria ser interessant la seva resolució analítica. En l'article de Leissa [37], s'ha estudiat el plantejament de l'equació diferencial de les vibracions en una membrana rectangular en funció de les condicions de contorn. No obstant, la majoria dels casos requeriran de solucions numèriques. Això és degut a l'elevada complexitat de les equacions diferencials que descriuen el moviment de l'imant.

V.7. Conclusions

En aquest capítol s'ha realitzat un "roadmap" per optimitzar a nivell de potència i de voltatge de sortida el disseny de la microbobina de Cu, en funció del nombre d'espines per a les diferents distàncies entre els eixos de les pistes. S'observa com, per a un mateix nombre d'espines, en augmentar la distància entre els eixos es disminueix el voltatge i la variació de flux generat, degut a l'allunyament de les espines. En canvi, aquesta disminució es compensarà amb una forta disminució de la resistència de la microbobina augmentant la potència generada.

Per comparar els resultats de potència obtinguts experimentalment amb el prototip, construït en el capítol anterior, respecte l'estat de l'art es normalitzen al volum actiu i a l'acceleració. Tot i presentar una potència de $50\mu\text{W}$ i una densitat de potència normalitzada de $3.1\mu\text{W}/\text{cm}^3\text{g}^2$ dins del rang de l'esperada, optimitzant la fotolitografia fins a obtenir un gruix de pista entre els 20 i $40\mu\text{m}$ es podria arribar als centenars de μW de potència. Per a millorar la reproductibilitat en la fabricació de les microbobines i evitar els problemes de la fotolitografia amb la resina gruixuda es podria utilitzar un procés subtractiu d'ablació per làser.

D'altra banda, aquests dispositius presenten un fort comportament no lineal relacionat amb els efectes de la rigidificació i els fenòmens d'histèresi de la membrana polimèrica. Per tal d'optimitzar-ne el ressonador mecànic es realitza un primer estudi sobre els mecanismes que intervenen en l'elasticitat dels materials. En el cas dels polímers, a més a més del "stretching", estirament dels enllaços dels àtoms, existeix el "bending" elasticitat característica dels polímers que permet l'estirament de les seves macromolècules i comporta l'existència d'un rang d'elasticitat extra, disminuint l'esmoreïment paràsit aparent i augmentant el voltatge generat. No obstant, la combinació d'aquests dos modes d'elasticitat pot donar lloc a la rigidificació de la membrana "spring stiffening" a mesura que es va produint l'alineament de totes les molècules, limitant les prestacions del dispositiu.

La modelització del ressonador mecànic esmoreït amb un terme no lineal pertorbatiu en la força elàstica restauradora ha permès reproduir el comportament d'histèresi del ressonador i la forma asimètrica dels escombrats de les mesures experimentals en freqüències creixents i decreixents.

Finalment, per tal de millorar l'eficiència del ressonador s'estudia com hauria de ser la relació analítica entre el terme pertorbatiu de tercer ordre amb els paràmetres físics del ressonador com l'esforç, la rigidesa, el mòdul de Young. Malgrat haver trobat una primera aproximació això podria ser l'objecte d'un estudi més exhaustiu, per a una futura tesi.

Per a trobar una equació diferencial del moviment del ressonador de manera més "exacte", es buscaria una millor modelització de la forma de la membrana i es tindria en compte els efectes de la longitud efectiva. L'objectiu consistiria en poder modificar la gràfica del comportament de ressonador per aprofitar les avantatges de l'elasticitat addicional en l'augment de la freqüència de ressonància i de l'amplitud, tot evitant els problemes d'instabilitat.

Bibliografia:

- [1].-S.Roundy, P.K.Wright, J.Rabaey, "A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes", *Computer Communications* 26, 1131-1144 (2003)
- [2].-P.D.Mitcheson, E.K.Reilly, T.Toh, P.K.Wright, E.M.Yeatman, "Performance limits of the three MEMS inertial energy generator transduction types", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Volume 17 Number 9 S211.
- [3].-S.P.Beeby, M.J.Tudor, R.N.Torah, S.Roberts, T.O'Donnell, and S.Roy, "Experimental comparison of macro and micro scale electromagnetic vibration powered generators", *J.Microsystem Technologies*, Jan, 2007.
- [4].-R.Amirtharajah and A.Chandrakasan, "Self-Powered Signal Processing Using Vibration-Based Power Generation", *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 33, No. 5, May 1998, pp. 687-695.
- [5].-K.Nakano, T.Saito, A.Nakayama and T.Kurose, "A portable generator using vibration due to human walking", *Tech. Dig. 2002 Int. Workshop Power MEMS (Power MEMS 2002)*, p.114, 2002.
- [6].-J.Okazaki, Y.Osaki, H.Hosaka, K.Sasaki, H.Yamakawa, and K.Itao, "Dynamic analysis and impedance control of automatic power generators using mechanical vibration", in *Tech. Dig. 2002 Int. Workshop Power MEMS (Power MEMS 2002)*, Tsukuba, Japan, Nov. 2002, pp. 110–113.
- [7].-K.Sasaki, Y.Osaki, J.Okazaki, H.Hosaka, and K.Itao, "Vibrationbased automatic power-generation system," *Microsyst. Technol.*, vol.11, no. 8–10, Aug. 2005.
- [8].-M.El-Hami, P.Glynne-Jones, N.M.White, M.Hill, S.Beeby, E.James, A.D.Brown, J.N.Ross, "Design and fabrication of a new vibration-based electromechanical power generator", *Sensors and Actuators A*, vol. 92, pp.335-42, Aug.2001.
- [9].-P.Glynne-Jones, M.J.Tudor, S.P.Beeby and N.M.White 2004 "An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems", *Sensors Actuators A* 110 344-49.
- [10].-M.Mizuno and D.G.Chetwynd, "Investigation of a resonance microgenerator", *J. Micromech. Microeng.*, vol. 13, no. 2, pp. 209–216, Mar. 2003.
- [11].-H.Kulah and K.Najafi, "An electromagnetic micro power generator for low-frequency environmental vibrations", in *Proc. 17th Int. Conf. MEMS (MEMS 2004)*, Maastricht, The Netherlands, Jan. 2004, pp.237–240.
- [12].-E.Koukharenko, S.P.Beeby, M. J.Tudor, N.M.White, T.O'Donnell, C.Saha, S.Kulkarni, and S.Roy, "Microelectromechanical systems vibration powered electromagnetic generator for wireless sensor applications", *Microsyst. Technol.*, vol. 12, no. 10–11, Sep. 2006.
- [13].-Neil N.H.Ching, H.Y.Wong, Wen J.Li, Philip H.W.Leong and Zhiyu Wen, "A laser-micromachined multi-modal resonating power transducer for wireless sensing systems", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 97-98, pp.685-690, 2002.
- [14].-C.Shearwood and R.B.Yates, "Development of an electromagnetic microgenerator", *Electron. Lett.*, vol. 33, no. 22, pp. 1883–1884, Oct.1997.
- [15].-S.P.Beeby, M.J.Tudor, R.N.Torah, S.Roberts, T.O'Donnell, and S.Roy, "Experimental comparison of macro and micro scale electromagnetic vibration powered generators", *Microsyst. Technol.*, vol. 13, no. 11–12, pp. 1647–1653, Jul. 2007.

- [16].-C.T.Pan, Y.M.Hwang, H.L.Hu, and H.C. Liu, "Fabrication and analysis of a magnetic self-power microgenerator", *J. Magn. Magn. Mater.*, vol. 304, no. 1, pp. e394–e396, Sep. 2006.
- [17].-T.von Büren and G.Tröster, "Design and optimization of a linear vibration-driven electromagnetic micro-power generator", *Sens. Actuators A*, vol. 135, p.765 , 2007.
- [18].-Perpetuum PMG17-100 Data Sheet [Online]. Available: <http://www.perpetuum.co.uk>
- [19].-Ferro Solutions Energy Harvester Data Sheet [Online]. Available: <http://www.ferrosi.com>
- [20].-D P.Arnold, "Review of microscale magnetic power generation", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no.11, pp. 3940-3951, Nov. 2007.
- [21].-J.W.Kane, M.M.Sternheim, "Física", Reverté, S.A. , 1991.
- [22].-Landau y Lifshitz "Teoría de la elasticidad" Editorial Reverté 1969.
- [23].-H.Yamakawa, "Modern Theory of Polymer Solutions" , Harper & Row, Publishers.
- [24].- Sergio R.Aragon, R.Pecora, "Dynamics of wormlike chains", *Macromolecules*, 1985, 18 (10), pp. 1868–1875.
- [25].-L.Golubovic, D.Moldovan, A.Peredera, "Flexible polymers and thin rods far from equilibrium: buckling dynamics", *Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluid Relat Interdiscip Topic* 61:1703–1715, (2000).
- [26].-R.J.Young and P.A.Lovell, "Introduction to Polymers", Chapman &Hall, 1981.
- [27].-A.Odajima and M.Maeda, *J. Polym. Sci. C.*, 15 (1966).
- [28].-N.Fondevilla, C.Serre, A.Pérez-Rodríguez, J.R.Morante, J.Montserrat and J.Esteve, "Design and fabrication of Si technology microgenerators for vibrational energy scavenging", *Proceedings 7th Spanish Conference on electronic Device*, Santiago de Compostela Spain (2009)
- [29].-C.B.Williams, C.Shearwood, M.A.Harradine, P.H.Mellor, T.S.Birch, R.B.Yates, "Development of an electromagnetic microgenerator", *IEE Proc. Circuits, Devices and Systems* 148, 337-342 (2001).
- [30].-P.Hagedorn, "Non-linear oscillations", Clarendon Press, Oxford, 1981.
- [31].-C.Serre, A.Pérez-Rodríguez, N.Fondevilla, J.R.Morante, J.Montserrat, J.Esteve, "Vibrational energy scavenging with Si technology electromagnetic inertial microgenerators", *Microsystem Technologies* (2007), vol.13, pp.1655–1661.
- [32].-D.W.Jordan and P. Smith, "Nonlinear ordinary differential equations", *Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series*, Clarendon Press, 1987.
- [33].-C.Hayashi, "Higher harmonic oscillations in nonlinear forced systems" *Col. Int. CNRS*, No. 148, 267285, Marseilles (1964).
- [34].-T.O'Donnell, C.Saha, S.P.Beeby, M.J.Tudor, "Scaling effects for electromagnetic vibrational power generators", *Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, Stresa - Italy, 26-28 April 2006.
- [35].-C.Serre, A.Pérez-Rodríguez, N.Fondevilla. E.Martincic, J.R.Morante, J.Montserrat, J.Esteve, "Linear and Non Linear Behaviour of Mechanical Resonators for Optimized Inertial Electromagnetic Microgenerators", *Microsyst.Technologies* (2009), vol.15, pp.1217-1223.
- [36].-E.W.Lee, "Non-linear forced vibration of a stretched string", *Br. J. Appl. Phy.*, Vol.8, pp. 411, 1957.

[37].-A.W.Leissa, “The free vibration of rectangular plates”, Journal of Sound and Vibration, 1973, 31: 257-293.

[38].- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:2D_geometric_strain.png