PROGRAMA

DE

CÁLCULOS

REDACTADO POR

Don Lauro Clariana Ricart

Catedrático de la expresada asignatura en la Universidad de Barcelona

BARCELONA

Tipografía de la Casa P. de Caridad

1893.

PROGRAMA

DE

CÁLCULOS

REDACTADO POR

Don Lauro Clariana Ricart

CATEDRÁTICO DE LA EXPRESADA ASIGNATURA EN LA UNIVERSIDAD DE BARCELONA

BARCELONA

TIPOGRAFÍA DE LA CASA P. DE CARIDAD

1893.

INTRODUCCIÓN

Cuestión difícil es pretender formular un programa de Cálculos, cuando la matemática superior ha tomado tales proporciones que impide seguir su raudo y elevado vuelo; arrojo temerario fuera creer posible en los límites reducidos de un curso, el poder formar un cuadro completo de las diferentes ramas de una ciencia tan vasta; empero censurable sería también que por negligencia ú otro motivo cualquiera, no se procurara adelantar algo por el camino de la perfección: Por esto creemos que ha llegado el momento de excluir de dichos programas todo lo que debe suponerse sabido, en beneficio de alguno de esos pensamientos sublimes que nos legaron los sabios de nuestros tiempos modernos.

Afortunadamente tenemos Catedráticos de Análisis que se ocupan ya de la cantidad en sus diferentes categorías, permitiéndoles esta circunstancia estudiar de un modo completo las teorías relativas á las series y derivadas, dejando así el terreno expedito para las asignaturas subsiguientes. En este concepto quedan suprimidas dichas teorías en nuestro programa, amen de las aplicaciones analíticas y algunas geométricas, que pertenecen al análisis ó á la geometría analítica, pues aleccionados por la experiencia hemos llegado á comprender que el cálculo integral, de suyo muy importante, sólo con estas modificaciones puede tomar nuevos vuelos, traspasando los reducidos límites que hasta hoy se le han concedido en la enseñanza de España.

Nuestro atrevimiento al formular el presente programa no acusa más que el deseo noble de que otros, con más alientos, sigan por esos nuevos derroteros, á fin de que la ciencia matemática en nuestro país, sea respetada de propios y extraños.

La primera parte del programa, que se halla acomodada al primer tomo de nuestra obra de Cálculos, subdivídese en: Prolegómenos, Cálculo diferencial, Cálculo integral, Cálculo de las variaciones y Cálculo de las diferencias.

En los Prolegómenos encuéntranse las tres categorías de cantidad, como elementos verdaderos y únicos de la matemática; y á este punto debemos advertir que eliminamos por completo el infinito matemático, seguros de que con ello logramos que desaparezca para siempre la nota más discordante de la verdadera ciencia de la cantidad.

En el Cálculo diferencial síguese la marcha ordinaria de un curso elemental, salvo las supresiones consignadas anteriormente, así como la introducción del elemento poderoso de la determinante funcional, junto con el estudio de la derivada de una función compleja, que da origen á la función monógena.

En el Cálculo integral estúdianse las integrales de más uso, sin que dejen de figurar otras más complicadas, que no por ser menos frecuentes son menos interesantes; así, por ejemplo, al tratar de la rectificación de un arco de elipse, dáse á conocer el origen de las integrales elípticas en sus tres especies.

Por fin, nada particular encierra lo referente á las variaciones y diferencias, aparte de algunos problemas relativos á las variaciones, que luego se aplican á la Geodesia y Física matemática.

A esta primera parte del programa sigue el Complemento de la obra de Cálculos, que designamos bajo el nombre de «Teorías modernas de la matemática.»

Empieza esta segunda parte por la geometría aplicada al análisis bajo un punto de vista general, esto es, su aplicación á lo indefinidamente pequeño, y de ello resulta, por modo sorprendente, que la geometría ordinaria no es más que un caso particular de otras que se desarrollan entre los mundos indefinidamente grandes y pequeños. A esto sigue el estudio de las coordenadas curvilíneas, conforme á Lamé, Gauss y Aoust, que consideramos de gran importancia, por sus aplicaciones á la curvatura de superficies, radios de curvatura, etc.

Y después de varias cuestiones más ó menos importantes, terminamos, por fin, nuestras consideraciones geométricas al tratar de la resolución aproximada y gráfica de las integrales, siendo el primer estudio de suyo muy recomendable, puesto que el círculo de integrales conocidas es harto reducido.

La integración de ecuaciones diferenciales en general, forma continuación á las investigaciones geométricas anteriores, y de esta suerte al procurar una simplificación del teorema de Abel, desarróllase fácilmente toda la goniometría elíptica.

A esto sigue luego el hermoso pensamiento de Cauchy respecto á la integral curvilínea; y con sus funciones monodromas, meromorfas, politropas y holomorfas, prepárase el terreno para recabar los puntos críticos y los períodos de una función en general.

Por otra parte, indispensable era decir algo de esos esfuerzos hercúleos realizados por los matemáticos más distinguidos, con el objeto de resolver las integrales múltiples, y en este concepto nos ocupamos también de ellas, dando á conocer los métodos de Dirichlet, Schlolmilch, Liouville, Poisson y Catalan; empero para completar el cuadro, hemos creído del caso no pasar en olvido tampoco las integrales de Fourrier, que tan buenos servicios prestan en varias cuestiones de Física matemática.

Por último, cierra nuestra segunda parte una ligera hojeada á las principales funciones que se separan de las ordinarias; dando á conocer no sólo los números de Bernoulli y los polinomios de Legendre generalizados, sino también las funciones de Jacobi, de las cuales se deducen fácilmente las elípticas λ, μ y ν, que cual tres columnas resistentes sostienen todo el peso de la matemática moderna.

L. CLARIANA.

PRIMERA PARTE

PROLEGÓMENOS

PREGUNTA 1.ª—Variable en general.—Diferentes conceptos de variable.—Función.—Su clasificación.—Función dependiente de variable compleja.—Consideraciones geométricas aplicadas á la variable compleja.

2.—Razón por cociente entre dos variables.—Estudio de la cantidad en su mayor grado de generalidad.—Razón por cociente entre dos cantidades indefinidamente pequeñas ó indefinidamente grandes.—División en órdenes de la cantidad conforme á sus tres categorías.—Consideraciones geométricas.—Fórmulas típicas.—Procedimientos distintos que pueden seguirse para la determinación del orden de una cantidad.

3.—Determinación del orden de una suma, de un producto, de un cociente y de una potencia de varias cantidades comprendidas en una misma ó diferentes categorías. —Orden definitivo de una cantidad, cuando ésta no se refiere al orden fundamental.

4.—Estudio de las cantidades que difieren entre sí indefinidamente poco.—Consecuencias.—Orden de la razón $\frac{a}{b}$, cuando en vez de a y b, se sustituyen otras cantidades que difieren de las primeras indefinidamente poco.—Probar que el orden de una suma, cuyos sumandos tienen el mismo signo, no altera, si se reemplazan todos ó parte de los sumandos por otros que difieran indefinidamente poco de los primeros.—Observaciones notables de este último principio.—Fundamentos del Cálculo Diferencial é Integral.

5.—Métodos de los indivisibles, de los coeficientes indeterminados de Descartes, de las primeras y últimas razones, de los límites y de Newton.—Observaciones acerca de las cantidades que se desvanecen.—Teoría relativa á la derivada de Lagrange.—Método importante de Leibnitz.—Consideraciones filosóficas y comparativas de los métodos precedentes.

6.—Determinación numérica de las cantidades como límites de variables, según el procedimiento de los griegos.—Valor numérico de una cantidad como resultado de una suma compuesta de un número indefinido de cantidades indefinidamente pequeñas.—Valor numérico de una cantidad como resultado de la razón por cociente de dos cantidades variables que se resuelven en una cualquiera de las tres categorías correspondientes á la cantidad.

CALCULO DIFERENCIAL

7.—Procedimiento general para determinar la razón por cociente del incremento de una función á su variable independiente.—Estudio general de la derivada.—Consideraciones filosóficas acerca de las funciones continuas cuya derivada se resuelve en la tercera categoría de la cantidad.—Incremento y diferencial de una función ordinaria.—Incremento y diferencial de la variable independiente.—Coeficiente diferencial.—Consideraciones geométricas.

8.—Diferenciación de una función compuesta en el supuesto de que no haya más que una variable independiente. —Diferenciación de una función compuesta, suponiendo que hayan varias variables independientes.—Fórmulas generales.—Probar que si dos cantidades p y q dependen de x é y, siendo dichas cantidades una función de la otra, las derivadas respectivas son proporcionales. —Importancia del teorema recíproco.

9.—Funciones hiperbólicas directas é inversas.—Preliminares acerca de los desarrollos en serie de las funciones: e^z, $cos.z$ y $sen.z$, para cuando z sea una cantidad compleja.—Estudio de la expresión $e^{\pm z\sqrt{-1}}$.—Funciones hiperbólicas directas.—Paralelo entre las funciones circulares y las hiperbólicas directas.—Funciones hiperbólicas inversas.

10.—Diferenciación de las funciones hiperbólicas directas. —Referencia á las funciones circulares.—Diferenciación de las funciones hiperbólicas inversas.—Aplicar diferentes procedimientos para la obtención de las fórmulas anteriores.

11.—Aplicación del cálculo diferencial á las determinantes en forma de matriz.—Caso en que los elementos de la matriz dependan de una sola variable, siendo ó no todos los elementos funciones de la misma.—Caso en que los elementos de la matriz sean funciones de dos ó más variables independientes.

12.—Derivadas y diferenciales de diferentes órdenes correspondientes á una función ordinaria.—Consecuencias para una función trascendente.—Investigaciones importantes para descubrir ciertas leyes en el desarrollo de sus derivaciones.—Ejemplos.

13.—Fórmula de Leibnitz para la determinación de la derivada ó diferencial de un orden cualquiera correspondiente á un producto de funciones ordinarias.—Demostrar que el desarrollo es general.—Aplicar el mismo principio á la división de funciones.—Determinación de las leyes á que se sujetan ciertos desarrollos.—Ejemplos.

14.—Derivadas sucesivas de algunas funciones para el valor particular de $x = o$.—Importancia de la fórmula de Leibnitz para la resolución de este problema.—Determinación directa de las dos primeras derivadas —Estudiar los valores resultantes de *arc sen.x* y *arc tg.x*, según el grado de su derivación sea par ó impar.

15.—Diferenciación de funciones sin resolver.—Diferenciación de una función ordinaria sin resolver.—Diferenciación de dos funciones sin resolver compuestas cada una de tres variables, siendo dos de ellas funciones de la tercera.—Estudio en el caso de haber n ecuaciones con $n+1$ variables.—Nuevos casos más generales que pueden presentarse.

16.—Derivadas parciales de funciones compuestas de dos ó más variables independientes.—Principio fundamental de dichas derivadas.—Diferenciales de órdenes superiores al primero de funciones compuestas en el caso más general.—Leyes generales que se observan en sus desarrollos.— Diferentes notaciones adoptadas.— Estudio para el caso en que algunas variables independientes se transformen en dependientes.

17.—Diferenciales de diversas órdenes de funciones sin resolver.—Ley de los desarrollos según las funciones sean más ó menos complicadas.—Eliminación de constantes.—Procedimiento general.—Aplicación á las cónicas.

18.—Eliminación de funciones arbitrarias.—Procedimiento general.—Consecuencias.—Aplicar el anterior procedimiento á las superficies regladas de plano director y á las superficies desarrollables.

19.—Cambio de variables.—Estudiar el cambio de variables en la función siguiente:

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

Cambio de la variable independiente.—Cambio de la función y de la variable independiente.—Ejemplos.

20.—Del cambio de variables.—Funciones de la forma:

$$V = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ldots\right).$$

Cambio de las variables independientes.—Cambio de todas las variables.—Ejemplos.

21.—Determinantes funcionales.—Consideraciones generales.—Forma de la determinante U.—Forma de la determinante de Jacobi, expresada por J.—Consecuencias.—

Determinante H.—Relaciones notables entre las determinantes J y H.

22.—Diferencial de una función dependiente de variable compleja.—Condiciones para que la función imaginaria

$$\varphi(z) = u + vi,$$

admita una derivada. — Función monógena.—Consecuencias importantes para dos funciones que tengan derivadas iguales.

23.—Fórmula de Lagrange para el desarrollo de una función cualquiera de z, según una serie ordenada de potencias enteras y positivas de x, siendo $z = a + x\varphi(z)$.—Ley que se desarrolla en las derivadas consecutivas de la serie.—Casos particulares que pueden originarse de la fórmula general de Lagrange.—Ejemplos.

24—Diferencial del área correspondiente á una curva plana.—Diferencial de un arco de curva plana.—Fórmulas generales correspondientes á la tangente, subtangente, normal y subnormal de curvas planas referidas á ejes polares.—Diferencial de un arco ó área correspondiente á una curva plana, referida á los mismos ejes polares. —Aplicación á la familia de las espirales.

25.—Contacto de curvas planas.—Línea osculatriz.—Círculo osculador.—Curvatura de curvas planas.—Curvatura media.—Curvatura de una curva en un punto dado.—Círculo de curvatura.—Relación entre el círculo de curvatura y el osculador.

26—Determinar el sentido de la curvatura de una curva plana cerca de un punto dado.—Diferentes formas del radio de curvatura.—Estudiar el caso en que el arco represente la variable independiente ó que la función no se halle resuelta.—Expresión del radio de curvatura en ejes polares.

27.—Aplicación del radio de curvatura á las cónicas.—Fórmula común.—Radio de curvatura en la circunferencia, cicloide y espiral logarítmica.

28.—Evolutas y evolventes en las curvas planas.—Propiedades notables de las mismas.—Fórmulas fundamentales.—Determinación de las evolutas en algunas curvas conocidas.

29.—Estudio de las involutas y envolventes planas.—Procedimiento general para determinar la envolvente de varias involutas correspondientes á una misma función. —Consideraciones acerca de las tangentes comunes.—Aplicaciones á varios ejemplos.

30.—Puntos singulares en las curvas planas.—Puntos singulares á que da origen, una misma rama de curva.—Puntos singulares que resultan del encuentro de varias ramas.—Estudiar el caso en que la ecuación se presente bajo forma implícita.

31.—Líneas alabeadas.—Funciones que la determinan.—Ecuaciones de la tangente y del plano normal en un punto de una línea alabeada.—Diferencial de un arco referido á ejes coordenados, cartesianos ó polares.

32.—Plano osculador.—Conceptos diferentes que pueden conducir al conocimiento de la expresión de dicho plano.—Ecuación correspondiente.—Movimiento circulatorio á que obedecen las cantidades que entran en dicha ecuación.—Aplicación á la hélice.

33.—Superficies curvas.—Ecuación del plano tangente.—Plano tangente en un punto del elipsoide.—Ecuación de la normal.—Angulos de la normal con los ejes coordenados.—Superficie envolvente de otra móvil.

34.—Curvatura de las líneas en el espacio.—Expresión del primer radio de curvatura.—Círculo osculador.—Centro de dicho círculo.—Normal principal.—Cosenos de los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

35.—Angulo de flexión ó de segunda curvatura.—Cosenos de los ángulos que forma una recta perpendicular al plano osculador con los ejes coordenados.—Fórmula del radio de curvatura de segunda especie.

36.—Determinar en la hélice, el primero y segundo radio de curvatura.—Diferenciales de los cosenos correspondientes á los ángulos que con los ejes coordenados forman la tangente, la normal principal y la bi-normal referentes á un punto de una línea alabeada.—Importancia de las fórmulas que expresan las diferenciales de los cosenos correspondientes á los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

37.—Determinar la expresión de la superficie polar de una línea cualquiera.—Sistema de ecuaciones indispensable para poder deducir la superficie polar de una línea.—Aplicación á la hélice.

38.—Esfera osculatriz.—Expresión del radio de dicha esfera osculatriz.—Evolutas en las líneas alabeadas.—Consideraciones notables acerca de las normales principales trazadas en los diferentes puntos de una línea alabeada.—Ecuaciones que determinan las evolutas de una línea dada.

39.—Teoría de la curvatura en las superficies.—Curvatura de una línea cualquiera trazada sobre una superficie.—Radios de curvatura correspondientes á una sección oblicua ó normal.—Teorema de Meusnier.

40.—Secciones principales en un punto de una superficie.—Teorema de Euler.—Probar que la suma de las curvaturas de dos secciones normales perpendiculares entre sí, es constante é igual á la suma de las curvaturas máxima y mínima en el punto considerado de la superficie.—Importancia de los puntos umbilicales.—Ecuaciones que determinan dichos puntos.

41.—Cálculo de los radios de curvatura principales en un punto dado cualquiera de una superficie.—Ecuación que determina la dirección de las secciones principales en un punto dado cualquiera de una superficie.—Relación de las fórmulas finales con las que se refieren á las líneas de curvatura que pasan por el punto considerado de la superficie.

42.—Definición de línea indicatriz.—Estudio y consecuencias importantes de dicha línea.—Líneas de curvatura situadas sobre una superficie.—Lugar geométrico de las normales á dichas líneas.—Superficie, como lugar geométrico, de los centros de curvatura de las precitadas líneas.

43.—Superficies cilíndricas, cónicas y de revolución.—Ecuaciones entre derivadas parciales de las superficies antedichas.—Consideraciones generales acerca de las superficies designadas bajo el nombre de conoides, desarrollables y regladas.—Ecuaciones entre derivadas parciales de las precitadas superficies.

CÁLCULO INTEGRAL

44.—Nociones preliminares acerca del cálculo integral.—Relación entre el cálculo diferencial é integral.—Integral de una suma de diferenciales.—Integración inmediata.—Ejemplos.

45.—Integración por partes.—Fin que se propone dicha integración.—Modo de disponer los datos para poder aplicar el principio de la integración por partes.—Integración por sustitución.—Observaciones acerca de los límites de la integral.—Reglas prácticas que pueden tenerse en cuenta para alcanzar las integrales por sustitución.—Ejemplos.

46.—Procedimientos generales para la integración de funciones fraccionarias racionales.—Integración en cada uno de los cuatro casos que pueden presentarse.—Estudiar el caso más general de expresión fraccionaria racional.—Aplicaciones.

47.—Integración de funciones irracionales.—Caso en que los radicales contengan cantidades monomias.—Integración de funciones de la forma $F(x, \sqrt{a+bx\pm x^2})$.—Integración de funciones especiales que pueden reducirse fácilmente á la forma racional.

48.—Determinar las funciones que corresponden á las integrales que á continuación se expresan:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}, \quad \int \frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{Bx+Cx^2}}.$$

49.—Integración de las diferenciales binomias.—Casos generales de integración.—Deducir la fórmula siguiente:

$$\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$$

como función correspondiente á $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

50.—Deducir la segunda fórmula correspondiente á las binomias:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Deducir la tercera:

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} -$$

$$-\frac{b(m-np-n-1)}{a(m-1)}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

Deducir la cuarta:

$$\int x^m(a+bx^n)^{-p}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} +$$

$$+\frac{-m-n+np-1}{an(p-1)}\int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx.$$

51.—Aplicación de las integrales binomias:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} -$$

$$-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(-m+1)} -$$

$$-\frac{b(m-np-n-1)}{a(m-1)}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx,$$

á las expresiones siguientes:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^{-m} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

Deducir sus diferentes desarrollos según m sea par ó impar. — Integral correspondiente al péndulo circular:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

52.—Integración de funciones trascendentes. — Estudio de las siguientes integrales:

$$\int F(l.x) \frac{dx}{x}, \quad \int F(sen.\, x) \cos.\, x\, dx,$$

$$\int F(arc.\, sen.\, x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int F(sen.\, x, \cos.\, x)\, dx$$

$$\int F(sen.\, x, sen.\, 2x\ldots\ldots \cos.\, x, \cos.\, 2x\ldots\ldots) dx.$$

Hallar el desarrollo de la integral:

$\int P z^n dx$, siendo P una función algebraica, y z, una trascendente.

53.—Determinar las integrales que á continuación se expresan:

$$\int e^{ax} \cos.bx\, dx, \quad \int e^{ax} sen.bx dx; \quad \int sen.^m x \cos.^n x\, dx.$$

Consideraciones acerca de las últimas integrales:

$$\int dx, \quad \int \cos.x\, dx, \quad \int sen.x\, dx \quad \text{y} \quad \int sen.x \cos.x\, dx.$$

54.—Deducir de la fórmula general:

$$\int sen.^m x \cos.^n x dx = \frac{sen.^{m+1} x \cos.^{n+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sen.^m x \cos.^{n-2} x\, dx$$

el desarrollo que corresponde á $\int \frac{sen.^m x}{\cos.^n x} dx$, en el supuesto de que n, sea negativa.

Deducir de la fórmula general

$$\int sen.^m x \cos.^n x\, dx = -\frac{sen.^{m-1} x \cos.^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int sen.^{m-2} x \cos.^n x\, dx,$$

el desarrollo correspondiente á $\int \frac{\cos.^n x}{\text{sen.}^m x} dx$, considerando m negativa.

Deducción de las últimas integrales:

$$\int \frac{dx}{\text{sen. } x \cos. x}, \quad \int \frac{dx}{\text{sen. } x}, \quad \int \frac{\text{sen. } x}{\cos. x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\cos. x} \quad \text{y} \quad \int \frac{\cos. x}{\text{sen. } x} dx.$$

55.—Deducir de la fórmula general

$$\int \text{sen.}^m x \cos.^n x \, dx = -\frac{\text{sen.}^{m-1} x \cos.^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \text{sen.}^{m-2} x \cos.^n x \, dx$$

la integral $\int \text{sen.}^m x \, dx$ en el supuesto de que $n = o$, y según m sea par ó impar.—Deducir de la expresión:

$$\int \text{sen.}^m x \cos.^n x \, dx = \frac{\text{sen.}^{m+1} x \cos.^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \text{sen.}^m x \cos.^{n-2} x \, dx,$$

la que corresponde á: $\int \cos.^n x \, dx$, bajo condiciones análogas á las del caso anterior.

Deducir de la fórmula:

$$\int \text{sen.}^m x \cos.^n x \, dx = -\frac{\cos.^{n+1} x \, \text{sen.}^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \text{sen.}^{m-2} x \cos.^{n+2} x \, dx,$$

la correspondiente á $\int tg.^m x \, dx$, en el supuesto de que sea $n = -m$.

Deducir de la fórmula:

$$\int \text{sen.}^m x \cos.^n x \, dx = -\frac{\cos.^{n-1} x \, \text{sen.}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \text{sen.}^{m+2} x \cos.^{n-2} x \, dx,$$

la inmediata $\int \cot.^m x \, dx$, siendo $m = -n$.

56.—Integración por medio de series.—Principios importantes que deben tenerse en cuenta en dichos desarrollos.—Procedimiento general. — Integración por series de las expresiones:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{1+x} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Valores aproximados de algunas integrales irreducibles á forma finita.—Aplicación á la integral elíptica de primera especie.

57.—Integración de funciones diferenciales compuestas de dos ó más variables independientes. — Condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de dichas funciones. — Estudiar el caso particular de una función compuesta de dos variables independientes.—Ejemplos.

58.—Integración de funciones diferenciales con tres variables independientes. — Condición de integrabilidad. — Determinar la expresión general correspondiente á la integral de dichas funciones diferenciales.—Ejemplos.

59.—Nociones generales acerca de las integrales definidas. —Determinación de las siguientes:

$$\int_i^1 x^m dx,\quad \int_a^b \frac{dx}{x},\quad \int_i^a \frac{dx}{a^2+x^2},\quad \int_i^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Determinación de las siguientes integrales definidas en el concepto de que m sea par ó impar:

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}} sen.^m x\, dx,\quad \int_i^{\frac{\pi}{2}} cos.^m x\, dx,\quad \int_i^{\frac{\pi}{4}} tg.^m x\, dx.$$

60.—Determinación de las integrales definidas siguientes:

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}} cos.^{2m} x\; sen.^{2n} x\, dx,\quad \int_i^{\frac{\pi}{2}} cos.^{2m} x\; sen.^{2n+1} x\, dx$$

$$\int_i^1 \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \int_i^1 \frac{x^{2m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fórmula de Wallis.

61.—Desarrollos de integrales definidas para cuando uno ó los dos límites de la integral pasen á la categoría de cantidades indefinidamente grandes. — Determinación de las integrales siguientes:

$$\int_i^I e^{-x}dx,\quad \int_i^I \frac{dx}{x},\quad \int_i^I cos\; x\, dx,\quad \int_i^I e^{ax}dx,$$

$$\int_i^I e^{-ax}dx,\quad \int_{-I}^{I} \frac{dx}{a^2+x^2},\quad \int_{-I}^{I} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2},\quad \int_i^I e^{-ax} cos.\; bx\, dx$$

$$\int_i^I \frac{y^{m-1}dy}{(1+y)^n} \text{ siendo } m<n, \text{ y } \int_i^I x^n e^{-x}dx.$$

62.—Determinar si la integral $\int_a^b F(x)\,dx$ tiene un valor finito y determinado cuando uno de sus límites se convierte en una cantidad indefinidamente grande. — Averiguar si la integral $\int_a^b F(x)\,dx$ tiene un valor finito y determinado cuando F (x), se transforma en una cantidad indefinidamente grande para el valor de la variable que corresponde á uno de los límites de la integral. —Caso en que la función F (x), resulte indefinidamente grande por un valor de la variable que esté comprendido entre los límites de dicha integral.

63.—Determinación de integrales definidas por medio de la diferenciación é integración bajo el signo integral.— Pasar de la integral $\int_a^b F(x)\,dx$ á la siguiente:

$$\int_a^b F(x, z)\,dx,$$

según los límites de dicha integral sean constantes ó dependientes de la variable.—Diferenciación é integración bajo el signo integral en general.— Aplicar los principios precedentes á las integrales que á continuación se expresan:

$$\int_i^I \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}}, \quad \int_i^I e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \text{ y } \int_i^I e^{-(a+b\sqrt{-1})x}\,dx,$$

á fin de obtener las nuevas siguientes:

$$\int_i^I \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n}\,\frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \int_i^I e^{-ax} x^{n-1}\,dx = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_i^I e^{-ax} x^{n-1} \operatorname{sen.} bx\,dx &= \frac{(n-1)! \operatorname{sen.} n\theta}{\rho^n} \\ \int_i^I e^{-ax} x^{n-1} \cos. bx\,dx &= \frac{(n-1)! \cos. n\theta}{\rho^n} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{siendo } a+b\sqrt{-1} = \\ &= \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen.}\theta) \end{aligned}$$

64.—Deducir de la integral conocida:

$$\int_i^I e^{-ax} \cos. bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

la expresión siguiente:

$$\int_{i}^{I} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-ax}}{x} \cos. bx\, dx = \frac{1}{2}\, l\, \frac{a^2+b^2}{\alpha^2+b^2}.$$

Deducir de la integral conocida:

$$\int_{i}^{I} e^{-ax} \operatorname{sen.} bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

la siguiente:

$$\int_{i}^{I} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-ax}}{x} \operatorname{sen.} bx\, dx = \operatorname{arc.} tg. \frac{b\,(a-\alpha)}{b^2+a\alpha}.$$

Determinar por procedimientos distintos la integral:

$$\int_{i}^{I} e^{-x^2}\, dx$$

Importancia de la cantidad compleja para la determinación de ciertas integrales.

65.—Integrales Eulerianas de primera y segunda especie. —Transformaciones de las mismas por sustitución.— Propiedades.—Importancia de la expresión

$$\mathrm{B}\,(p,\, q) = \frac{\Gamma\,(p)\,\Gamma\,(q)}{\Gamma\,(p+q)};$$

su demostración.—Determinación de la curva *Gamma.*

66.—Integrales múltiples en general.—Reducción de dichas integrales.— Métodc general.— Aplicaciones.— Método de Dirichlet con aplicación al volumen del elipsoide.

67.—Aplicaciones geométricas del cálculo integral.—Cuadratura de figuras planas.—Ejemplos de cuadratura de curvas referidas á coordenadas cartesianas y polares.

68.—Rectificación de curvas.—Sentido verdadero de dicha rectificación.—Aplicaciones á los ejemplos siguientes:

$$y^2 = 2px,\ a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,\ a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

—Consideraciones generales acerca del origen de las integrales elípticas. — Determinación de sus tres especies.

69.—Volumen de cuerpos de revolución.—Aplicaciones en el concepto de que las generatrices-generadoras de los diferentes cuerpos de revolución, vengan expresadas respectivamente por:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2); \quad (x-\alpha)^2 + (y-6)^2 = r^2; \quad y^2 = 2px,$$

y en el concepto de que dichas generatrices giren al rededor del eje x.

70.—Volumen de cuerpos terminados por superficies cualesquiera.—Fórmulas generales.—Procedimientos varios para la determinación de un volumen.—Aplicación al elipsoide.—Volumen de cuerpos referidos á coordenadas polares.

71.—Cuadratura de superficies curvas.—Fórmula general. —Observación notable acerca de los límites de la integral doble que corresponde á la fórmula general.—Aplicación á la esfera.—Cuadratura de superficies de revolución.—Aplicaciones.

72.—Integración de ecuaciones diferenciales.—Ecuaciones diferenciales ordinarias.—Ecuaciones entre derivadas parciales.—Ecuación entre diferenciales totales.—Probar que todo sistema de m ecuaciones diferenciales entre x y m funciones $y_1\ y_2 \ldots.\ y_m$, de la primera variable, puede transformarse en otro donde no figuren más que las derivadas de primer orden.—Forma normal de un sistema simultáneo de m ecuaciones de primer orden. —Procedimiento general para deducir de un sistema de m ecuaciones diferenciales, una ecuación diferencial en que no entre más que x y una de las funciones.—Aplicación de reglas análogas á la formación de una determinante para deducir el orden de la ecuación diferencial definitiva.—Condiciones á que deben satisfacer las integrales además de las que corresponden á las ecuaciones diferenciales respectivas.—Aplicación á la Mecánica respecto al movimiento de un punto en el espacio.

73.—Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias.—Consideraciones generales.—Probar que toda ecuación diferencial del orden m, admite una integral que encierra m constantes arbitrarias.—Integrales particulares. —Ordenes respectivos de las ecuaciones diferenciales y de las integrales.—Regla general para conocer si una integral con m constantes, se refiere á una ecuación diferencial de orden m.

74.—Integración de ecuaciones diferenciales de primer orden.—Separación de variables.—Casos en que es posible la integración.—Estudiar el caso en que la ecuación diferencial sea homogénea.—Caso en que faltando la homogeneidad, por alguna transformación, puede llevarse al primero.

75.—Ecuaciones diferenciales lineales.—Estudio de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$.

Fórmulas notables de Jaime Bernoulli aplicadas á la ecuación: $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^m$.

Justificar la ecuación de condición.—Aplicaciones.

76.—Estudio del factor que transforma en integrable el primer miembro de la ecuación diferencial $Mdx+Ndy=0$. —Determinar dicho factor para cuando la ecuación sea homogénea.—Problema de las trayectorías en general. —Trayectorías ortogonales.

77.—Ecuación diferencial de primer orden y de un grado cualquiera.—Consideraciones generales.—Caso en que la ecuación diferencial no contenga á las variables.—Ecuaciones diferenciales de M. Clairaut, dadas por las formas siguientes: $y = xF(p) + \varphi(p)$, $y = px + \varphi(p)$.

78.—Soluciones singulares de una ecuación diferencial de primer orden.—Soluciones singulares deducidas de la integral general.—Significación de dicha integral.—Propiedad del factor integrable en esta clase de integrales.—Ejemplos.

79.—Integración de ecuaciones diferenciales de un orden superior al primero.—Reducción de la integral múltiple á otras simples.—Ecuación diferencial en que entran dos derivadas consecutivas de un orden cualquiera, ó que se diferencien en dos unidades.—Casos particulares de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse á un orden inferior.—Ejemplos.

80.—Integración de ecuaciones lineales de un orden cualquiera.—Caso en que el segundo miembro sea igual á cero.—Integración de la ecuación lineal completa.—Casos particulares que pueden ocurrir.

81.—Integración de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y sin término independiente de la variable.—Método de Euler.—Ecuación modular.—Estudiar los diferentes casos que pueden presentarse según sean las raíces desiguales, iguales ó imaginarias.—Ejemplos.

82.—Integración de ecuaciones diferenciales simultáneas. —Ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden entre tres variables.—Aplicación á las formas normales. —Casos particulares que pueden ocurrir.

83.—Integración de ecuaciones diferenciales por medio de series.—Empleo de la serie de Mac-Laurin y de Taylor. —Casos en que no puede aplicarse la serie de Mac-Laurin.—Dada una integral bajo forma de serie, deducir su ecuación diferencial correspondiente.

84.—Ecuaciones entre derivadas parciales.—Caso en que la ecuación diferencial se refiera á una sola variable. —Ejemplos.—Ecuaciones entre derivadas parciales de órdenes superiores al primero, bajo condiciones análogas á las del caso anterior.—Determinar la integral correspondiente á la ecuación siguiente:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = Q.$$

85.—Caso general de integración de una ecuación entre derivadas parciales de primer orden y primer grado, dependiente de tres ó cuatro variables.—Consecuencia para el estudio de ciertas superficies geométricas.—Integración de ecuaciones entre derivadas parciales de órdenes superiores al primero.

CÁLCULO DE LAS VARIACIONES

86.—Cálculo de las variaciones.—Consideraciones generales.—Principio fundamental de esta teoría.—Variación de una integral definida según los límites de dicha integral sean ó no fijos.—Máximo ó mínimo absoluto de una integral definida.—Ecuación indefinida.—Ecuación de los límites.—Máximo ó mínimo relativo.—Aplicación notable á las líneas geodésicas de una superficie.

CÁLCULO DE LAS DIFERENCIAS

87.—Consideraciones generales acerca del Cálculo de las diferencias.—Desarrollo de las expresiones $\Delta^n u$ y u_n.—Determinación de las diferencias sucesivas en funciones de diferente naturaleza.—Cálculo inverso de las diferencias.—Generalidades.—Relación con los principios fundamentales del Cálculo integral.—Integración de algunas funciones, según diferencias finitas.—Desarrollo de la expresión Σu en serie, conforme á los principios de Euler.—Integración por partes en las diferencias finitas.

SEGUNDA PARTE

COMPLEMENTO Á LOS ELEMENTOS DE CÁLCULOS

88.—Triángulos indefinidamente pequeños.—Triángulo cuyos tres ángulos tienden hacia α, β y γ, como cantidades finitas, y los tres lados a, b y c hacia los indefinidamente pequeños de un mismo orden.—Triángulo ABC, en que A tiende hacia un ángulo recto y los lados contiguos hacia los indefinidamente pequeños de primer orden.—Orden indefinitesimal de diversas líneas que pueden considerarse en un triángulo rectángulo que tenga un cateto y un ángulo adyacente indefinidamente pequeño.—Triángulo que tiene un lado indefinidamente pequeño respecto á su contiguo.—Triángulo que tiene dos ángulos indefinidamente pequeños de primer orden. —Triángulo que tiene un ángulo indefinidamente pequeño de primer orden, comprendido entre dos lados indefinidamente pequeños, también de primer orden.

89.—Orden indefinitesimal de líneas cuando entran en comparación unas con otras.—Consideraciones generales acerca de la curvatura de las líneas.—Diferencia de curvatura de las dos mitades de un arco indefinidamente pequeño de primer orden.—Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y su cuerda.—Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y la tangente trazada á una de las extremidades del arco y terminada en la ordenada trazada por la otra extremidad de dicho arco —Diferencia de curvaturas extremas en un arco indefinidamente pequeño.—Expresión de la perpendicular trazada desde la extremidad de un arco indefinidamente pequeño á la tangente que pasa por el otro extremo.—Angulo formado por la cuerda de un arco indefinidamente pequeño de primer orden con la tangente que pasa por el punto medio de este arco.—Arco comprendido entre el punto medio de un arco indefinidamente pequeño de primer orden y el punto de contacto de la tangente paralela á la cuerda de este arco.—Angulos formados por las tangentes á las extremidades de un arco indefinidamente pequeño con la cuerda respectiva.—Diferencia entre las tangentes precitadas.

90.—Expresión en forma de matriz de las líneas de curvatura de la superficie $f(x,y,z)=0$.—Líneas de curvatura en el elipsoide.—Líneas de curvatura en las superficies de revolución.—Líneas de máxima y mínima pendiente.

91.—Coordenadas curvilíneas.—Coordenadas curvilíneas en un plano.—Radio de curvatura de una curva cualquiera en un punto (λ, μ).—Coordenadas curvilíneas de un punto sobre una superficie curva.—Radio de curvatura de una sección normal en una superficie cualquiera, referido á coordenadas curvilíneas.

92.—Estudios particulares de Lamé y Gauss, sobre la teoría de coordenadas curvilíneas.—Importancia de los estudios de Aoust.—Determinación de un punto en el espacio por tres familias de superficies cualesquiera.—Casos particulares.—Triedros formados por las tangentes y normales.—Paralelepípedo de dimensiones indefinidamente pequeñas.—Fórmulas fundamentales.—Naturaleza de los parámetros diferenciales.—Ecuaciones importantes —Cálculo directo.—Sistema de revolución por medio de coordenadas planas:
Sistemas biangular, bicircular, esfera-cónico y polar de revolución. — Cálculo por transformación. — Sistemas coordenados respectivos.

93.—Sistema de coordenadas elípticas.—Determinación de las fórmulas

$$x = \frac{\varkappa \mu \upsilon}{c b}, \quad y = \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \upsilon^2)(\lambda^2 - b^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \upsilon^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Deducir como caso particular las siguientes:

$$x = \frac{\rho \mu \upsilon}{b c}, \quad y = \rho \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \upsilon^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z = \rho \frac{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \upsilon^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

94.—Estudio particular de las coordenadas curvilíneas de Lamé.—Parámetro de primera y segunda especie.—Desarrollo de los grupos de fórmulas de Lamé con sus clases respectivas.—Relaciones recíprocas.—Importancia de los grupos siguientes:

$$\frac{\partial \dfrac{1}{h^2} \dfrac{\partial \rho}{\partial x}}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \dfrac{1}{h_1^2} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial x}}{\partial \rho}$$

. . . .

95.—Teorema de M. Bouquet, acerca de la más corta distancia entre dos rectas sucesivas de un sistema continuo en el espacio.—Probar que cuando las rectas de la serie supuesta son tangentes á una misma curva en el espacio, se cumple la condición:

$$dadq - dbdp = 0.$$

Determinar la condición para que la curva anterior sea plana.

96.—Determinación de un polígono alabeado.—Diferentes puntos de vista para apreciar la posición y modo de ser de un polígono alabeado.—Ecuaciones elementales del polígono.—Caso reducido de dichas ecuaciones.—Construcción del polígono según las ecuaciones elementales.—Polígono esférico.—Rectificación del polígono alabeado.—Recta rectificante.— Polígono esférico rectificante.

97.—Estudio de las líneas alabeadas.—Ecuaciones elementales de dichas líneas.—Expresiones reducidas de dichas ecuaciones.—Característica plana.—Característica esférica.—Binormal.—Angulo de tercera curvatura.—Plano rectificante.—Paso de las ecuaciones elementales á las coordenadas de un punto.—Dificultades del análisis para la resolución de dicho problema.—Principio de las curvaturas inclinadas.—Expresión de la curvatura inclinada.—Triedro trirrectángulo como resultado del traslado angular de una recta.—Triedros conjugados.—Relación específica.—Importancia de los triedros diferenciales é integrales para obtener la ecuación llamada resolvente.—Probar que la ecuación resolvente debe corresponder á lo más á una ecuación diferencial de 5.° orden.—Clasificación de las líneas.

98.—Puntos singulares de M. Gilbert.—Consideraciones generales.—Estudiar las funciones siguientes:

$$Fx(,y) = y^2 + a^2 x^2 - x^4 = 0$$

$$Fx(,y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$$

$$F(x,y) = y^2 - x^3 = 0.$$

Demostrar que la Hessiana determina los puntos de inflexión de una curva del orden m, siendo el número de ellos en general: $i = 3m(m-2)$.

99.—Cálculo aproximado de las integrales definidas.—Fórmulas de Poncelet, Simpson y Euler..—Método de interpolación.—Método de Gauss.

100.—Procedimientos gráficos para medir un espacio superficial encerrado por una curva dada plana.—Planímetro de Amsler.—Determinación de la fórmula

$$S = (a^2 + 2ab\cos\theta + b^2)\,\pi.$$

Modificación de la fórmula general.—Casos particulares que pueden ocurrir.

101.—Integración gráfica.—Propiedades importantes.—Métodos generales de integración gráfica.—Determinación de la ordenada y abscisa media.—Importancia de dichas construcciones gráficas para la resolución de varios problemas pertenecientes á la mecánica.

102.—Consideraciones generales acerca de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.—Aplicación á los ejemplos siguientes:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = o$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = o$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = o.$$

103.—Determinar los desarrollos que á continuación se expresan:

$$sn\,(a+b) = \frac{sna\;cnb\;dnb + snb\;cna\;dna}{1-k^2\,sn^2\,a\,sn^2\,b}$$

$$cn\,(a+b) = \frac{cna\;cnb - sna\;snb\;dna\;dnb}{1-k^3\,sn^2\,a\,sn^2\,b}$$

$$dn\,(a+b) = \frac{dna\;dnb - k^2\,sna\;snb\;cnb\;cna}{1-k^2\,sn^2\,a\,sn^2\,b}.$$

Consecuencias.—Ecuaciones funcionales.—Determinar la naturaleza de las funciones que se sujetan á las condiciones siguientes:

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x+\omega) = \varphi(x)\\ \varphi(x+\overline{\omega}) = \varphi(x)\end{array}\right\}$$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

$$\psi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y) - \psi(x)\,\psi(y)\\ \psi(x+y) = \varphi(x)\,\psi(y) + \psi(x)\,\varphi(y)\end{array}\right\}$$

104.—Ecuaciones entre derivadas parciales. — Principios fundamentales.—Demostrar que cuando se conoce una integral completa de una ecuación entre derivadas parciales de primer orden, se puede siempre deducir una solución más general por el método de la variación de constantes.

Forma simple á la cual puede siempre referirse una ecuación entre derivadas parciales de primer orden.—Integración de una ecuación entre derivadas parciales cualesquiera de primer orden.—Perfeccionamiento llevado al método precedente.—Teoremas de Donkin y Poisson.

105. —Sistemas de ecuaciones diferenciales normales. — Principios fundamentales —Transformaciones llamadas infinitesimales. — Objeto importante de las transformaciones.

106.--Ecuaciones entre diferenciales totales. — Principios fundamentales. — Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.—Consecuencias.—Determinación de los coeficientes de una ecuación diferencial. — Sistemas adjuntos.—Valores recíprocos.—Demostrar que si $x_1, x_2 \ldots\ldots x_k$ son soluciones de:

$$\frac{d^n x}{d t^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n x = o$$

éstas serán independientes unas de otras si se verifica la condición siguiente:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \ldots\ldots\ldots & x_k \\ x_1^1 & x_2^1 \ldots\ldots\ldots & x_k^1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_1^{(k-1)} & x_2^{(k-1)} \ldots\ldots & x_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \gtrless o.$$

107.—Ecuaciones diferenciales lineales á coeficientes constantes. — Caso de contener la ecuación característica, raíces iguales.—Estudiar la ecuación lineal:

$$(\alpha t + 6)^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 (\alpha t + 6)^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n x = o.$$

Integración por series.—Sistemas de grupos.—Determinante característica. — Forma canónica de las sustituciones.

108.—Estudio de las conexas.—Conexas algebraicas y trascendentes. — Orden. — Clase. — Coincidencia. — Curvas notables como resultado de tres conexas.—Elemento de la conexa. — Interpretación de las formas simbólicas Γ y C.—Grado y clase de las curvas Γ y C. — Elemento conjugado al del primer elemento conexo. — Conexa idéntica.—Coincidencia principal.— Finitud de puntos y rectas. — Ecuación diferencial que define la familia de las curvas conexas de $f = o$, ya sean puntuales ó tangenciales. — Importancia de las conexas en la teoría de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

109.—Principios de Cauchy. — Función monodroma ó monotropa. — Función politropa. — Función sinécdoque ú holomorfa.—Función racional.—Polos.—Función meromorfa.—Estudio de la función $l.z$.—Consideraciones geométricas. — Puntos críticos. — Diferentes regiones del plano de la variable.—Camino elemental.—Líneas cortantes. — Reducción de un camino cualquiera á una combinación de caminos elementales.

110.—Estudio de una función algebraica u, definida por la ecuación:

$$0 = \mathrm{A}u^m + \mathrm{B}u^{m-1} + \ldots\ldots = \mathrm{F}(z, u).$$

Determinación de las diferentes ramas de curvas pertenecientes á la función anterior. — Puntos críticos.— Reducción de un camino cualquiera á caminos elementales.—Ley de permutación. — Clasificación de los puntos críticos.

111.—Integrales de funciones monodromas.—Probar que el cálculo numérico de la integral definida: $\int\limits_L f(z)\, dz$ puede referirse á las integrales de funciones de variable real.—Consecuencias de las integrales curvilíneas.

112.—Demostrar que la integral: $\int\limits_L f(z)\, dz$ no cambia de valor si sufre la línea de integración una deformación cualquiera, conservándose los extremos fijos, y con tal que dicha línea no pase por los puntos críticos de $f(z)$ — El valor de la integral: $\int\limits_k f(z)\, dz$, tomada á lo largo del contorno k, dentro del cual la función $f(z)$ permanece finita y monodroma, es igual á cero.—Si c y c' son dos contornos cerrados en el interior de k, y si además $f(z)$ permanece finita y monodroma en todo el intervalo comprendido entre k y c, c'; puede escribirse:

$\int_k = \int_c + \int_{c'}$, tomados los movimientos en el mismo sentido.—Consecuencias.

113.—Residuos de una función correspondientes á sus puntos críticos.—Determinación de sus valores en forma de serie, cuando los puntos críticos son polos —La integral $\int_c f(z)\,dz$, tomada según una circunferencia indefinidamente pequeña c, que tenga su centro en el punto dado a, tenderá hacia cero al mismo tiempo que el radio r de la circunferencia, cualquiera que sea la posición de z, con tal de satisfacerse la condición

$$lim.\ (z-a)\,f(z) = 0, \text{ para } z = a.$$

La integral $\int_k f(z)\,dz$, tomada según una circunferencia C, que tenga por centro el origen, tiende hacia cero cuando k, crece indefinidamente, si se cumple la condición: $lim.\ z\,f(z) = 0$, para $z = 0$.

114.—Demostrar la igualdad siguiente:

$$\int_k \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

en el supuesto de que $f(z)$ sea una función continua y monodroma en el interior del contorno k, y estar a en su interior.—Consecuencias. — Aplicaciones al teorema de Taylor.—Teorema de Laurent.—Grado de multiplicidad de los ceros y polos de la función $f(z)$ —Si la función $f(z)$ no tiene sino polos en el interior del contorno cerrado k, debe resultar:

$$\frac{\pi}{2\pi\sqrt{-1}} \int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \text{M} - \text{N},$$

siendo M el número de ceros, y N el de polos de $f(z)$, situados en el interior del contorno, y contados según su grado de multiplicidad.— Notable aplicación del principio anterior al número de raíces de una función algebraica racional y entera.

115.—Deducir la expresión que corresponde á:

$$\int_i^{\text{I}} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx, \text{ siendo } m<n.$$

Estudio de la integral $\int_i^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$, siendo $a < 1$.—Integrales de Fresnel. — Sistema de M. Briot para alcanzar el valor definitivo de: $\int_i^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$, siendo $n < 1$.

116.—Potencial. — Ley de Newton. — Componentes de la atracción según los tres ejes coordenados. — Caso de haber varios puntos atrayentes. — Probar que las componentes de la atracción son las derivadas parciales con relación á a, b y c del potencial expresado por la fórmula: $U = \int \frac{\mu\,dV}{r}$.

Demostrar que: $\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = 0.$

Fijar las condiciones á que deben sujetarse las cantidades de debajo el signo integral del potencial, para poder admitir la conclusión precedente.—Potencial de una superficie.

117.—Integrales múltiples.—Aplicación de la fórmula

$$\xi = \int\int \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right]}\, sen^2\theta\, r\, d\theta d\psi$$

al elipsoide.

Consecuencia muy notable de M. Chasles.—Aplicación de la fórmula $V = \frac{1}{3}\int\int r^3\, sen\theta\, d\theta d\psi$ al elipsoide.

118.—Aplicar las coordenadas elípticas á integrales generales correspondientes á la superficie y volumen de un cuerpo.—Célebres fórmulas de Lamé.

119.—Procedimientos generales de integración correspondientes á integrales múltiples.—Métodos de Dirichlet, Schlomilch y Liouville.

120.—Procedimientos generales de integración correspondientes á integrales múltiples.—Fórmula de Poisson.—Método de Catalán.—Fórmulas de Liouville y Schlomilch.

121.—Teorema de Green.—Generalidades.—Determinar la expresión.

$$I = \mathbf{S}\, U \frac{dV}{dN}\, d\sigma - K.$$

en el concepto de que se tenga

$$I = \int\!\!\int\!\!\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx dy dz \quad \text{y}$$

$$K = \int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx dy dz. —$$

Generalización del teorema de Green.

122.—Fórmulas correspondientes á las integrales de ecuaciones entre derivadas parciales.—Desarrollo de las funciones en serie trigonométrica.—Fórmula de Lagrange.—Determinación de los coeficientes de la serie. —Ventaja de conocer si la serie es convergente para el desarrollo de $F(x)$.—Determinar las fórmulas siguientes:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sum sen.mx \int_0^{\pi} F(\alpha)\, sen.m\alpha d\alpha$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\alpha) d\alpha + \frac{2}{\pi} \sum cos.mx \int_0^{\pi} F(\alpha) cos.m\alpha d\alpha$$

Deducciones importantes de estas fórmulas para alcanzar la fórmula de Fourrier

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{i}^{I} \int_{-I}^{I} F(\alpha)\, cos\; p\,(x-\alpha)\, d\alpha dp.$$

Hacer extensivo este desarrollo á funciones de dos ó tres variables.

123.—Integración de ecuaciones entre derivadas parciales lineales y á coeficientes constantes de un orden cualquiera.—Ecuación de condición: $z = Ae^{\alpha x + 6y}$.—Ecuación característica.—Solución la más general.—Reducción para cuando los valores 6 y α sean lineales.—Aplicación del procedimiento anterior á la ecuación·

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

108.—Estudio de las conexas.—Conexas algebraicas y trascendentes. — Orden. — Clase. — Coincidencia. — Curvas notables como resultado de tres conexas.—Elemento de la conexa. — Interpretación de las formas simbólicas Γ y C.—Grado y clase de las curvas Γ y C. — Elemento conjugado al del primer elemento conexo. — Conexa idéntica.—Coincidencia principal.— Finitud de puntos y rectas. — Ecuación diferencial que define la familia de las curvas conexas de $f = o$, ya sean puntuales ó tangenciales. — Importancia de las conexas en la teoría de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

109.—Principios de Cauchy. — Función monodroma ó monotropa. — Función politropa. — Función sinécdoque ú holomorfa.—Función racional.—Polos.—Función meromorfa.—Estudio de la función $l. z$.—Consideraciones geométricas. — Puntos críticos. — Diferentes regiones del plano de la variable.—Camino elemental.—Líneas cortantes. — Reducción de un camino cualquiera á una combinación de caminos elementales.

110.—Estudio de una función algebraica u, definida por la ecuación:

$$0 = Au^m + Bu^{m-1} + \ldots\ldots = F(z, u).$$

Determinación de las diferentes ramas de curvas pertenecientes á la función anterior. — Puntos críticos.— Reducción de un camino cualquiera á caminos elementales.—Ley de permutación. — Clasificación de los puntos críticos.

111.—Integrales de funciones monodromas.—Probar que el cálculo numérico de la integral definida: $\int_L f(z)\, dz$ puede referirse á las integrales de funciones de variable real.—Consecuencias de las integrales curvilíneas.

112.—Demostrar que la integral: $\int_L f(z)\, dz$ no cambia de valor si sufre la línea de integración una deformación cualquiera, conservándose los extremos fijos, y con tal que dicha línea no pase por los puntos críticos de $f(z)$ — El valor de la integral: $\int_k f(z)\, dz$, tomada á lo largo del contorno k, dentro del cual la función $f(z)$ permanece finita y monodroma, es igual á cero.—Si c y c' son dos contornos cerrados en el interior de k, y si además $f(z)$ permanece finita y monodroma en todo el intervalo comprendido entre k y c, c'; puede escribirse:

$\int_k = \int_c + \int_{c'}$, tomados los movimientos en el mismo sentido.—Consecuencias.

113.—Residuos de una función correspondientes á sus puntos críticos.—Determinación de sus valores en forma de serie, cuando los puntos críticos son polos —La integral $\int_c f(z)\,dz$, tomada según una circunferencia indefinidamente pequeña c, que tenga su centro en el punto dado a, tenderá hacia cero al mismo tiempo que el radio r de la circunferencia, cualquiera que sea la posición de z, con tal de satisfacerse la condición

$$lim.\ (z-a)\,f(z) = 0, \text{ para } z = a.$$

La integral $\int_k f(z)\,dz$, tomada según una circunferencia C, que tenga por centro el origen, tiende hacia cero cuando k, crece indefinidamente, si se cumple la condición: $lim.\ z f(z) = 0$, para $z = 0$.

114.—Demostrar la igualdad siguiente:

$$\int_k \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi\, i\, f(a)$$

en el supuesto de que $f(z)$ sea una función continua y monodroma en el interior del contorno k, y estar a en su interior.—Consecuencias. — Aplicaciones al teorema de Taylor.—Teorema de Laurent.—Grado de multiplicidad de los ceros y polos de la función $f(z)$ —Si la función $f(z)$ no tiene sino polos en el interior del contorno cerrado k, debe resultar:

$$\frac{\pi}{2\pi\sqrt{-1}} \int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \text{M} - \text{N},$$

siendo M el número de ceros, y N el de polos de $f(z)$, situados en el interior del contorno, y contados según su grado de multiplicidad.— Notable aplicación del principio anterior al número de raíces de una función algebraica racional y entera.

115.—Deducir la expresión que corresponde á:

$$\int_i^{\mathrm{I}} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx, \text{ siendo } m < n.$$

Estudio de la integral $\int_i^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$, siendo $a < 1$.—Integrales de Fresnel. — Sistema de M. Briot para alcanzar el valor definitivo de: $\int_i^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$, siendo $n < 1$.

116.—Potencial. — Ley de Newton. — Componentes de la atracción según los tres ejes coordenados. — Caso de haber varios puntos atrayentes. — Probar que las componentes de la atracción son las derivadas parciales con relación á a, b y c del potencial expresado por la fórmula: $U = \int \frac{\mu\, dV}{r}$.

$$\text{Demostrar que: } \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = 0.$$

Fijar las condiciones á que deben sujetarse las cantidades de debajo el signo integral del potencial, para poder admitir la conclusión precedente.—Potencial de una superficie.

117.—Integrales múltiples.—Aplicación de la fórmula

$$\xi = \int\int \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right]}\, sen^2\theta\, r\, d\theta d\psi$$

al elipsoide.

Consecuencia muy notable de M. Chasles.—Aplicación de la fórmula $V = \frac{1}{3} \int\int r^3\, sen\theta\, d\theta d\psi$ al elipsoide.

118.—Aplicar las coordenadas elípticas á integrales generales correspondientes á la superficie y volumen de un cuerpo.—Célebres fórmulas de Lamé.

119.—Procedimientos generales de integración correspondientes á integrales múltiples.—Métodos de Dirichlet, Schlomilch y Liouville.

120.—Procedimientos generales de integración correspondientes á integrales múltiples.—Fórmula de Poisson.—Método de Catalán.—Fórmulas de Liouville y Schlomilch.

121.—Teorema de Green.—Generalidades.—Determinar la expresión.

$$I = \mathbf{S}\, U \frac{dV}{dN} d\sigma - K.$$

en el concepto de que se tenga

$$I = \int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dxdydz \quad \text{y}$$

$$K = \int\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dxdydz.—$$

Generalización del teorema de Green.

122.—Fórmulas correspondientes á las integrales de ecuaciones entre derivadas parciales.—Desarrollo de las funciones en serie trigonométrica.—Fórmula de Lagrange.—Determinación de los coeficientes de la serie. —Ventaja de conocer si la serie es convergente para el desarrollo de $F(x)$.—Determinar las fórmulas siguientes:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sum sen.mx \int_0^\pi F(\alpha)\, sen.m\alpha d\alpha$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\alpha) d\alpha + \frac{2}{\pi} \sum cos.mx \int_0^\pi F(\alpha) cos.m\alpha d\alpha$$

Deducciones importantes de estas fórmulas para alcanzar la fórmula de Fourrier

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}} \int_{-\mathrm{I}}^{\mathrm{I}} F(\alpha) \cos p\,(x - \alpha)\, d\alpha dp.$$

Hacer extensivo este desarrollo á funciones de dos ó tres variables.

123.—Integración de ecuaciones entre derivadas parciales lineales y á coeficientes constantes de un orden cualquiera.—Ecuación de condición: $z = Ae^{\alpha x + 6y}$.—Ecuación característica.—Solución la más general.—Reducción para cuando los valores 6 y α sean lineales.—Aplicación del procedimiento anterior á la ecuación·

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

que se refiere al problema de las cuerdas vibrantes.

124.—Integración de ecuaciones entre derivadas parciales por medio de las series.—Aplicar este procedimiento á la ecuación:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

que expresa la ley del movimiento del calor en una barra prismática.—Método de los coeficientes indeterminados aplicado á la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial z}{\partial y}.$$

125.—Integración de ecuaciones lineales entre derivadas parciales por medio de integrales definidas.—Aplicar este procedimiento á la ecuación:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Reducción de la integral doble.—Aplicar el mismo procedimiento á la igualdad

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

que se refiere á la propagación del calor en un medio homogéneo.

126.—Aplicación de las integrales definidas á la ecuación de las cuerdas vibrantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Transformación de las integrales dobles.—Estudio de la ecuación $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$, que se refiere á la propagación de las vibraciones transversales en una varilla elástica.—Reducción de una de las integrales dobles.

127.—Números de Bernoulli.—Estudio de la función:

$$u = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}.$$

Demostrar que esta función es par, y que es desarrollable en forma de serie.—Deducir la fórmula general

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1.2\cdots n}=\frac{A}{1.2\cdots(n+1)}+\frac{B_1}{1.2.1.2\cdots(n-1)}+$$
$$+\frac{B_2}{1.2.3.4.1.2\cdots(n-3)}+\cdots$$

Valores particulares de A, B_1, B_2...—Aplicación de los números de Bernoulli á la suma de potencias de números enteros.

128.—Estudio de la función $u=(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$.—Polinomios de Legendre. — Demostrar las fórmulas siguientes:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{1}{u^2}=ux,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(x-z)=z\frac{\partial u}{\partial z}$$

Determinar las relaciones siguientes, debidas á Bertrand y Christoffel:

$$(n+1)\,X_{n+1}-(2n+1)\,xX_n+(n-1)\,X_{n-1}+\frac{dX_n}{dx}-$$
$$-2x\frac{dX_{n-1}}{dx}+\frac{dX_{n-2}}{dx}=0;$$

$$n\,X_n=x\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx},\quad 2(n+1)\,X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}$$

Consecuencias.

129.—Fórmulas de Catalan, Bertrand y Liouville:

$$(n+1)\,X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-x\frac{dX_n}{dx}$$

$$X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-2x\frac{dX_n}{dx}+\frac{dX_{n-1}}{dx}$$

$$(n+1)\,X_{n+1}-(2n+1)\,xX_n+nX_{n-1}=0.$$

Consecuencias.—Valores determinados de X_0 X_1 X_2...X_n —Relación de estas funciones X, con los polinomios de Sturm.—Ley de los polinomios de Legendre.

130.—Formas de la función X_n.—Formas de Legendre y Rodrígues.—Método de Jacobi.—Polinomios de Legendre bajo forma de integral.

131.—Estudio de funciones análogas á las de Legendre.—

Derivadas de la función: $u=(1-3x^2z+3xz^2-z^3)^{-\frac{1}{3}}$.— Aplicación del teorema de Mac-Laurin.— Fórmula general de los polinomios Laureanos conforme á la función dada.

132.—Estudio de la función:

$$u=(1-4x^3z+6x^2z^2-4xz^3+z^4)^{-\frac{1}{4}}.$$

Desarrollo en serie de esta función.—Fórmula que sirve para deducir unos polinomios de otros.—Caso general de las funciones Laureanas.—Cuadro de grupos de polinomios unidos con los de Legendre.—Importancia de la generalización de los polinomios de Legendre para desarrollar en serie una función dada.

133.—Funciones isotropas.—Propiedad de los parámetros diferenciales de 1.ª y 2.ª especie de Lamé.—Funciones harmónicas.—Principio de Dirichlet.—Aplicación de los principios anteriores.—Funciones esféricas y de Laplace.—Relaciones con los polinomios X_n de Legendre.

134.—Estudio de la función $\Theta(z)$ de Jacobi.—Propiedades de dicha función. Demostrar la igualdad siguiente:

$$\Theta(z+2ma)=e^{-m(z+ma)}\,\Theta(z).$$

Importancia de la expresión:

$$z=(2m+1)\pi\sqrt{-1}+(2m'+1)a.$$

Estudio de las cuatro funciones θ.

135.—Consideraciones generales acerca de las cuatro funciones θ. Probar que las tres funciones θ_3, θ y θ_2 son pares y que θ_1 es impar, anulándose además ésta para $z=0$.—Transformaciones de las funciones θ.—Desarrollo de las veinte igualdades que se obtienen cuando se agrega á θ, las cantidades respectivas siguientes:

$$\frac{\omega}{2},\ \frac{\omega'}{2},\ \omega,\ \omega' \text{ y } \frac{\omega+\omega'}{2}.$$

136.—Estudio general de las tres funciones elípticas según las funciones θ.—Determinación de las constantes.—Estudio de las funciones λ, μ y υ, con la representación gráfica de los ceros é infinitos en cada uno de sus paralelógramos elementales respectivos.

FIN