UNIVERSIDAD CENTRAL

PROGRAMA

DE

ANÁLISIS MATEMÁTICO

POR

JOSÉ MARÍA VILLAFAÑE Y VIÑALS

Catedrático de la asignatura en la Universidad Central

SEGUNDO CURSO

Precio **UNA** peseta

AÑO ACADÉMICO DE 1900 Á 1901

UNIVERSIDAD CENTRAL

PROGRAMA

DE

ANÁLISIS MATEMÁTICO

POR

JOSÉ MARÍA VILLAFAÑE Y VIÑALS

Catedrático de la asignatura en la Universidad Central

SEGUNDO CURSO

AÑO ACADÉMICO DE 1900 Á 1901

Establecimiento tipográfico de la Casa P. de Caridad.—BARCELONA.

PROGRAMA

DE

ANÁLISIS MATEMÁTICO

SEGUNDO CURSO

1.—Funciones en general: sus diversas clases: su notación: sus divisiones. ¿Qué es Análisis matemático?

2.—Representación geométrica de las funciones de dos y de tres variables. *Ejemplo.*

3.—Forma general de toda función algébrica con una variable. Demostrar que

1.° El cociente de dos funciones algébricas no puede tener más que un solo valor, así como un solo resto al ser inexacta la división.

2.° Si la función algébrica $f(x)$ entera en x se anula por cualquier valor de x, todos sus coeficientes son iguales á cero.

3.° Relaciones entre los coeficientes de las mismas potencias de x de dos funciones algébricas enteras en x, que se conservan constantemente iguales para los mismos valores de x.

4.° Condición para que dos funciones algébricas $f(x)$,

$\varphi(x)$ enteras en x sean idénticas, y para que su cociente sea independiente de x.

4.—Ley del cociente y forma del resto de la división por $x - a$ de la función algébrica $f(x)$ entera en x, y condición de su divisibilidad. Regla para hallar dicho cociente y el resto, así como el valor de $f(a)$. Aplicación de esta ley á la división de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$.

Ejemplo. Hallar el cociente y resto de $3x^4 - 5x^3 + 4x - 9$ dividido por $x - 2$, y el valor de $3x^4 - 5x^3 + 4x - 9$ al poner 2 en vez de x.

5.—Descomposición de la función algébrica $f(x)$ entera en x y de m grado en factores de la forma $x - a$, y demostrar que

Si la función algébrica $f(x)$ entera y de m grado en x se anula por más de m valores de x, es igual al producto de m factores de la forma $x - a$ y de otro factor independiente de x é igual á cero.

Función producto de los factores binomios de la forma $x \pm a$.

6.—Fórmula del binomio de Newton. Resultado que se obtiene al sustituir $x + h$ en lugar de x en la función algébrica $f(x)$ entera en x. Derivadas sucesivas de esta función y sus notaciones. Fórmula ó ley de Taylor.

Ejemplo. Hallar las derivadas sucesivas de

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 9x + 20.$$

7.—Nociones generales sobre las imaginarias: su representación geométrica: argumento, módulo y norma de una imaginaria. Formas compleja, trigonométrica y módulo-argumental de las imaginarias. Operaciones con las imaginarias puestas bajo la forma trigonométrica. Propiedades de los módulos.

8.—Imaginarias bajo la forma módulo-argumental. Pasar de esta forma á la compleja y á la trigonométrica, y al contrario. Operaciones con las imaginarias puestas bajo la forma módulo-argumental.

Ejemplo I. Hallar el valor de

$$\pm\sqrt{\sqrt{-1}} \quad \text{y de} \quad \pm\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

Ejemplo II.—Pasar la compleja $-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ á la forma módulo-argumental y á la trigonométrica, y de la módulo-argumental $1_{\frac{5\pi}{6}}$ á la compleja equivalente.

9.—Definición del límite de toda cantidad variable. Demostrar que

El límite de toda cantidad menor que cualquiera otra dada es cero.

Interpretación del *símbolo* $\frac{a}{0}$. Incrementos Δx y dx.

Concepto de la continuidad: solución de continuidad ó discontinuidad.

10.—Condición esencial para que una cantidad sea límite de otra cantidad variable. Principios fundamentales en la teoría de los límites. Límites de los resultados operativos de las cantidades variables.

11.—Cantidades infinitesimales: su variabilidad y diversos órdenes. Principios fundamentales del método de los infinitamente pequeños.

12.—Resultados operativos de los infinitamente pequeños.

13.—Principios fundamentales en la continuidad de las funciones reales. Continuidad de los resultados operativos de las funciones continuas de una variable real.

14.—Continuidad de las funciones simples ó elementales, y de la algébrica, racional y entera de una variable real.

15.—Funciones imaginarias: su continuidad.

16.—Límites de las expresiones $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ y $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ al tender m hacia ∞, y de $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ y $\frac{(1+h)^m - 1}{h}$ al tender α y h hacia o.

17.—Caso en que x sea variable imaginaria en la expresión

$$\text{lím.}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x,$$

donde m tiende hacia ∞.

Consecuencias de las fórmulas

$$\text{lím}\left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, y),$$

y

$$\text{lím}\left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = e^{x + y\sqrt{-1}},$$

en que m tiende hacia ∞.

Fórmulas de Euler para $\cos x$, $\text{sen}\, x$ en función de $e^{\pm x\sqrt{-1}}$.

Coseno y seno hiperbólicos.

Generalización de la fórmula de *Moivre*. Realidad de $(1_x)^{\pm\sqrt{-1}}$.

18.—Logaritmos neperianos: su base ó el número e. Número E.

19.—Propiedad característica de la exponencial a^x. Función logarítmica considerada como inversa de la exponencial. Límites de $\frac{a^x}{x}$ al tender x hacia ∞, y de $\frac{\log_a x}{x}$, $x^{\frac{1}{x}}$, x^x.

20.—Logaritmos de las imaginarias. Sistemas logarítmicos de base E, de base $\sqrt{-1}$ y de bases negativas. Números η, η'.

21—Expresiones de las funciones circulares inversas en función de los logaritmos neperianos por medio de la exponencial de base e.

22.—Existencia del límite de la relación del incremento de toda función continua al incremento de la variable: influencia del signo del incremento de la variable en dicha relación. Derivadas de las funciones continuas. Procedimiento para hallarlas. Aplicarlo á la investigación de las derivadas de x^m, $\log_a x$, sen$x$, cos$x$.

23.—Demostrar que, en general, toda función continua tiene derivada. Corolarios.

Teorema de las funciones inversas. Hallar la derivada de $y =$ arc sen$x$.

24.—*Principios relativos á las derivadas.* Demostrar que

1.° Si la derivada es finita entre dos valores de la variable, la función es continua entre los mismos límites.

2.° Si una función es constante entre ciertos límites de los valores de la variable, la derivada es nula entre los mismos límites, y recíprocamente.

3.° Una función continua es creciente ó decreciente por los valores de la variable, según sea positiva ó negativa su derivada, y recíprocamente.

4.° De dos funciones continuas de una misma variable, ambas crecientes ó decrecientes, cuyas derivadas son desiguales, crecerá ó decrecerá con más rapidez la que tenga mayor derivada en valor absoluto, y recíprocamente.

5.° Si las derivadas de dos funciones continuas, crecientes ó decrecientes, son iguales, estas funciones crecerán ó decrecerán con la misma rapidez.

6.° Si son iguales las derivadas de dos funciones continuas, estas funciones son iguales, ó sólo difieren entre sí en una constante, y recíprocamente.

7.° Si en $F(x)$ y $f(x)$ la derivada $f'(x)$ se conserva constantemente positiva ó negativa en el intervalo de x_0 á $x_0 + h$, y la relación

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

es continua en dicho intervalo, se tiene

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)},$$

siendo $\theta \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$.

Ondulaciones de la curva de una función algébrica de m grado.

25.—Derivadas sucesivas de una función continua de una variable: su significación. Fórmula ó ley de Taylor.

Derivadas sucesivas de $y = x^m$, $y = \operatorname{sen} x$.

26.—Derivadas sucesivas del producto de dos funciones continuas de una variable. Fórmula de Leibnitz. Demostrar que

1.° Si $f_1(x)$ es el cociente exacto de dividir á $f(x)$ por $x - a$, se tiene

$$f'(a) = f_1(a).$$

2.° Si para un valor x_0 de x se anulan $F(x)$, $f(x)$ y sus $n-1$ primeras derivadas, conservándose continuas entre x_0 y x_0+h las relaciones de las derivadas sucesivas del mismo orden hasta las $n^{ésimas}$, se tiene

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)},$$

siendo $\theta \genfrac{}{}{0pt}{}{>0}{<1}$.

Caso en que sea

$$f(x)=(x-x_0)^n.$$

27.—Funciones primitivas. Demostrar su existencia. Función primitiva general. La de la función algébrica, racional y entera de una variable, y las de $\log_a x$ y $\cos x$.

28.—Hacer ver que

1.° La derivada de una función continua valora la relación de los incrementos infinitamente pequeños dy, dx de la función y de la variable.

2.° La diferencial de una función es igual á su derivada multiplicada por la diferencial de la variable.

Coeficiente ó relación diferencial de una función.

Procedimiento que debe seguirse para hallar la diferencial de cualquiera función.

Representación geométrica de la diferencial de una función continua de una variable y del infinitamente pequeño $\varepsilon \Delta x$.

29.—Diferencial de una constante y del producto de una constante por la variable.

Diferenciales de x^m, a^x, e^x.

30.—Diferenciales de $\log_a x$, lx, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

31.—Diferenciales de $\operatorname{tg} x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$.

32.—Diferenciales de las funciones circulares inversas arcsen$x$, arccos$x$, arctg$x$, arccot$x$.

33.—Diferenciales de arcsec$x$, arccosec$x$.

34.—Diferencial de la suma algébrica de diversas funciones continuas de una misma variable, y de la función algébrica, racional y entera de una variable, así como del producto de diversas funciones continuas de una misma variable. *Ejemplos*.

35.—Diferencial del cociente de dos funciones continuas de una misma variable, así como de una potencia y de una raíz de una función continua de una variable. *Ejemplos.*

36.—Diferencial de una función de funciones: coeficiente diferencial de una función de funciones. *Ejemplo:*

$$y = \log_a \mathrm{tg}^3(1 + x^2)^2.$$

37.—Diferenciación de las funciones de diversas variables, que no dependen de una misma variable. Definiciones y notaciones de las derivadas y diferenciales parciales. Incrementos simultáneos de las variables é incremento total de una función. Diferencial total.

Hallar las diferenciales parciales y la total de la función

$$y = f(x,z) = 3x^3 + 4x^2z - 7xz^2 + 5z^3 - 8.$$

38.—Diferenciación de las funciones compuestas y de las funciones implícitas.

Ejemplo I.—Hallar la diferencial de la función

$$y = u^v,$$

siendo u y v funciones continuas de x.

Ejemplo II.—Hallar la diferencial de la función implícita

$$f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 7y^2 + 2x = 0.$$

Teorema de Euler sobre las funciones homogéneas.

39.—Diferenciales sucesivas de las funciones continuas de una variable.

Ejemplos.—Hallar las diferenciales sucesivas de las funciones

$$y = x^m; \quad y = e^x; \quad y = \operatorname{sen} x.$$

Significación de las diferenciales sucesivas de diversos órdenes. Convexidad y concavidad de las curvas con relación al eje de abscisas, y su determinación por el signo del coeficiente diferencial del 2.° orden: puntos de inflexión.

40.—*Series.*—Definiciones: división de las series en convergentes, divergentes é indeterminadas. Ejemplos de sus tres clases.

De la definición de su convergencia se deduce inmediatamente que

$$S - S_n = \alpha,$$

siendo α un infinitamente pequeño, que se anula en el límite $n = \infty$. Demostrar que

1.° En toda serie convergente es

$$\lim u_n = 0$$

al crecer n hacia ∞.

Esta condición, aunque necesaria, no es suficiente para la convergencia de la serie. Hacerlo ver en la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots$$

2.° Si la serie convergente tiene sus términos positivos,

$$\lim n u_n = 0$$

al tender n hacia ∞.

3.° La serie de términos constantes ó crecientes no es convergente.

4.° Teorema general sobre la convergencia de las series (Cauchy).

41.—Una serie de términos reales y positivos es convergente:

1.° Cuando S_n conserva un valor finito por más que n crezca indefinidamente.

2.° Cuando, á partir de un cierto término, resulta una serie parcial convergente.

3.° Cuando sus términos son respectivamente menores que los correspondientes de otra serie convergente de términos positivos, y, por tanto,

4.° Toda serie, cuyos términos positivos son respectivamente menores que los de una progresión geométrica decreciente é ilimitada, es convergente, y será divergente al ser sus términos mayores que los de una progresión geométrica creciente é ilimitada.

5.° Si

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots$$

es una serie convergente, también lo será con límite aS

$$au_1 + au_2 + au_3 + \ldots\ldots + au_n + au_{n+1} + \ldots\ldots,$$

así como

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots\ldots + a_n u_n + a_{n+1} u_{n+1} + \ldots\ldots,$$

siendo a, a_1, a_2, a_3, ... números positivos que no crezcan más allá de todo límite.

42.—Si en las series

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots,$$

$$(2) \qquad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots\ldots$$

se tiene constantemente

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

la convergencia de la (1) entraña la convergencia de la (2), y si

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

la divergencia de la (1) entraña la divergencia de la (2).

Convergencia ó divergencia de las series deducidas de la relación de un término al anterior. Caso en que el límite de de esta relación es igual á 1.

En las series

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots,$$

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots\cdots u_n x^n + \cdots.$$

se tiene

$$\text{lím} \frac{u_n x^n}{u_{n-1} x^{n-1}} = x \,\text{lím} \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

43.—Convergencia ó divergencia de las series deducidas del límite $\sqrt[n]{u_n}$. Caso en que este límite es igual á 1.

En las series

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots,$$

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots\cdots u_n x^n + \cdots\cdots$$

se tiene

$$\text{lím} \sqrt[n]{u_n x^n} = x \,\text{lím} \sqrt[n]{u_n}.$$

En una misma serie es

$$\text{lím} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{lím} \sqrt[n]{u_n}.$$

Naturaleza de la serie deducida de la relación

$$\frac{\log_a \frac{1}{u_n}}{\log_a n}.$$

¿Cuál es la naturaleza de la serie, cuando constantemente se tiene

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \gtrless 1,$$

al ser $\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1$?

Teorema de Duhamel en el caso en que $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ pueda reducirse á la forma $\frac{1}{1+\alpha}$. Ejemplos en que pueda aplicarse este teorema para determinar la naturaleza de la serie.

44.—Convergencia en las series de términos reales y alternativamente positivos y negativos. Serie absoluta ó incondicionalmente convergente, y serie sencillamente convergente, semiconvergente ó condicionalmente convergente.

45.—Convergencia en las series ordenadas por las potencias enteras y crecientes de una variable. Relaciones entre los límites de convergencia y de continuidad de dichas series. *Ejemplos.*

Caso en que en estas series se tiene

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

46.—Series imaginarias: su convergencia.

47.—Convergencia en las series ordenadas por las potencias de sus variables imaginarias: convergencia uniforme: círculo de convergencia.

48.—Nociones sobre los productos de infinitos factores: su convergencia.

49.—Desarrollo de las funciones en series: por la división; por el binomio de Newton; por coeficientes indeterminados.

Principio fundamental del método de los coeficientes indeterminados: sus consecuencias.

50.— Hacer ver que no siempre puede aplicarse el método de coeficientes indeterminados para desarrollar una función en serie. Desarrollo por la fórmula de Taylor, por la de Mac-Laurin, por la de Bernoulli.

Aplicar las fórmulas de Taylor y de Mac-Laurin al desarrollo de una función cualquiera.

51.—Generalización de la fórmula de Taylor para el desarrollo de cualquiera función de una variable: su término complementario en su forma general: forma de Lagrange y de Cauchy. Error que se comete al tomar S_n por valor de la serie. Fórmula general de Mac-Laurin.

52.—Generalización de la fórmula del binomio ó serie del binomio.

53.—Desarrollo en serie de las funciones circulares directas: series de Newton. Cálculo de los senos y cosenos de un arco.

54.—Desarrollo en serie de las funciones circulares inversas: serie de Leibnitz. Cálculo del número π por la fórmula de Euler. Retorno de series ó sus inversas.

55.—Número e su incomensurabilidad: su desarrollo en una serie convergente: su cálculo y error que se comete al tomar S_n por el valor de e. Desarrollo en serie de los números E, η, η'.

56.—Desarrollo en serie de la exponencial a^x. El desarrollo de e^x da la serie de Euler

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

y deducir de esta y de las series de Newton

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \dots$$

las notables fórmulas de Euler

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Cosenos y senos hiperbólicos.

57.—Desarrollo en serie de la función logarítmica lx por la fórmula de Taylor, y de $l(1 + x)$ por la de Mac-Laurin. Serie de Mercator. Serie logarítmica de Euler, y de ella sacar la fórmula

$$l(m+1) - lm = 2\left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5} + \dots\right),$$

aplicándola al cálculo de los logaritmos neperianos: pase de éstos á otros de bases distintas y, en particular, á los vulgares. Error que se comete al tomar S_n por el valor de $l(m+1)$.

58.—Máximos y mínimos de las funciones de una variable. Procedimiento para hallarlos. *Ejemplo:*

$$f(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x.$$

59 —Interpretación de los símbolos $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\sqrt[0]{1}$, $\sqrt[\infty]{0}$, $\sqrt[\infty]{\infty}$. *Ejemplos:*

Hallar el verdadero valor de

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{5x^4 - 36x^3 + 105x^2 - 148x + 84}{6x^5 - 15x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 24x - 8}$$

para $x = 2$, y de

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x + \cos x}{x - \operatorname{sen} x}$$

para $x = \infty$.

TEORÍA GENERAL DE ECUACIONES

60 —Variabilidad y representación geométrica de las funciones

$$y = Ax^m; \quad y = \frac{Ax^m}{Bx^n},$$

deduciendo sus consecuencias, así como de

$$y = a^x; \quad y = \log_a x; \quad y = \operatorname{sen} x; \quad y = \operatorname{tg} x.$$

61.—Clasificación de las ecuaciones. Diferencia entre la resolución algébrica, numérica y trascendente de las ecuaciones. Concepto sobre la teoría general de ecuaciones. Demostrar que

1.° Si

$$f(z) = A_1 z^m + A_2 z^{m-1} + \ldots\ldots + A_m z$$

se anula para $z = 0$, siempre habrá una cantidad positiva r tal, que para valores de z de módz $\begin{matrix} > 0 \\ < r \end{matrix}$ dé un módulo de z constantemente menor que cualquiera cantidad dada R.

2.° Si en

$$f(z) = A_{m-n} z^n + A_{m-n-1} z^{n+1} + \ldots\ldots + A_1 z^m$$

ordenada por potencias crecientes de z se hace

$$f(z) = A_{m-n} z^n (1 + \varepsilon),$$

siempre habrá una cantidad positiva r tal, que para valores de z de $\text{mód}z \begin{smallmatrix}>0\\<r\end{smallmatrix}$ dé el módulo de ε constantemente menor que cualquiera cantidad positiva R.

3.° Si en

$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} z + A_m$$

se hace

$$f(z) = A_0 z^m (1 + \varepsilon),$$

siempre habrá una cantidad positiva r tal, que para valores de z de $\text{mód}z > r$, el módulo de ε sea constantemente menor que cualquiera cantidad positiva R.

4.° El módulo de

$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} z + A_m$$

se hace ∞ al mismo tiempo que el módulo de z.

5.° Toda función $f(z)$ de z es continua.

6.° Si la función $f(z)$ es imaginaria, y se le da la forma

$$f(z) = P + Q\sqrt{-1},$$

y á su variable z la forma

$$z = r(\cos\omega + \sqrt{-1}\,\text{sen}\omega),$$

al variar el módulo y argumento simultáneamente ó separadamente por continuidad, según una ley determinada, no puede cambiar de signo P ni Q sin anularse.

62. —Si dos números reales α, β sustituídos en vez de x en la función continua $f(x)$ dan resultados de signos contrarios, la ecuación

$$f(x) = 0$$

tiene, á lo menos, una raíz real comprendida entre α y β y, en general, un número impar de raíces reales, y recíprocamente. Corolarios.

Caso en que la ecuación sea de grado impar, y en que, siendo de grado par, el término independiente sea negativo, así como al ser imaginarias todas sus raíces.

63.—*Teorema d'Alembert-Cauchy, fundamental en la teoría general de ecuaciones.* Toda ecuación algébrica, racional y entera, de coeficientes reales ó imaginarios, tiene, á lo menos, una raíz real ó imaginaria de la forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

64.—Consecuencias del teorema d'Alembert-Cauchy. En toda ecuación algébrica, racional y entera de m grado, reducida á la forma

$$f(x) = 0,$$

se verifica que

1.° El primer miembro en su forma ordinaria es igual al producto de m factores binomios de primer grado.

2.° Tiene m raíces y sólo m.

3.° El primer miembro es el producto de dichos m factores, que se forman restando de x cada una de sus m raíces.

4.° Si tiene la raíz imaginaria $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, también la satisface la conjugada $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, así como si es de coeficientes racionales, al tener la raíz $a + \sqrt{b}$ ha de satisfacerse también por otra de la forma $a - \sqrt{b}$.

5.° El primer miembro, si los coeficientes son reales, es igual al producto de tantos factores de primer grado como raíces reales tiene, y de tantos factores reales de segundo grado como pares de raíces imaginarias la satisfacen.

6.° La unidad tiene m raíces.

65.—Teorema de Cauchy sobre el número de raíces comprendidas en un contorno. Teorema de Gauss.

66.—Relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación algébrica, ó *teorema de Cardiano-Vieta.* Funciones simétricas de las raíces de una ecuación algébrica. Orden y peso de una ecuación simétrica.

67.—Funciones simétricas de diversos órdenes. Ecuación de los cuadrados de las diferencias de las raíces de una ecuación algébrica. Funciones racionales de las raíces de una ecuación algébrica. Aplicaciones.

68.—Raíces comunes á dos ecuaciones. Condiciones para su existencia, fundándose en la teoría del máximo común divisor. Forma general de la ecuación algébrica de m grado con dos incógnitas.

69.—Condición de compatibilidad de n ecuaciones con $n-1$ incógnitas, por funciones simétricas. Eliminante ó resultante de un sistema de ecuaciones.

70.—Condición de compatibilidad de n ecuaciones con $n-1$ incógnitas por determinantes. Resultante ó eliminante de Cauchy.

71.—Cálculo de las raíces comunes á dos ecuaciones con una incógnita por medio de la resultante de Cauchy.

72.—Métodos de eliminación de M. Sylvester, y el de Euler.

73.—Métodos de eliminación de Bezout y de Cauchy. Método de Cayley.

74.—Resolución de un sistema de dos ecuaciones de m y n grado con dos incógnitas. Ecuación final: su grado. Resolver el sistema

$$3y^2 + 4xy + 3x^2 - 9y - 15x = 0,$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 10x = 0.$$

Hallar las raíces imaginarias de la ecuación

$$z^4 - z + 1 = 0.$$

75.—Resolución por determinante de la ecuación de tercer grado de la forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Fórmula de Cardan. Reducida ó resolvente de dicha ecuación.

76.—Raíces iguales ó múltiples de una ecuación algébrica. Teorema de Hudde. Sus consecuencias y, en especial, el siguiente:

Si una ecuación tiene raíces iguales, el primer miembro y su derivada tienen un máximo común divisor igual al producto de todos los factores binomios correspondientes á las raíces múltiples, disminuídos sus exponentes en una unidad.

Reducir una ecuación de raíces iguales á otras de raíces diferentes.

77.—Investigar por eliminantes la condición para que una ecuación tenga raíz doble. Cálculo de esta raíz.

78.—Transformación de ecuaciones: su objeto. Fórmula de transformación. Principio fundamental en la transformación de ecuaciones.

Transformar una ecuación algébrica en otra de raíces iguales, pero de signos contrarios; en otra, cuyas raíces sean las de la propuesta multiplicadas por k, y una de coeficientes fraccionarios en otra de coeficientes enteros.

79.—Transformar una ecuación algébrica en otra, cuyas raíces sean las de la propuesta disminuídas en una cantidad dada; en otra que carezca de uno de sus términos; en otra cuyas raíces sean potencias de las de la propuesta, y en otra de raíces recíprocas.

80.—Transformar una ecuación algébrica en otra, cuyas raíces estén ligadas con las de la propuesta por una relación lineal dada, y en otra en que sus raíces sean diferencias ó los cuadrados de las diferencias de las de la propuesta, tomadas dos á dos.

81.—Ecuaciones recíprocas: su reducción á otras de grado inferior.

82.—Teoremas sobre la delimitación del número de raíces de una ecuación.

Teorema de Descartes

83.—Teorema de Rolle ó de M. O. Bonnet, y de Budan-Fourier.

84.—Teorema de Sturm. Número de las raíces imaginarias de una ecuación.

85.—Determinación de los límites de las raíces de una ecuación numérica. Casos que se presentan.

Las principales reglas, que sirven para determinar un límite superior de las raíces positivas de una ecuación, son:

1.ª Del mayor coeficiente negativo.

2.ª De la raíz del mayor coeficiente negativo, ó método de Mac-Laurin.

3.ª De los grupos.

86.— 4.ª Regla de Newton para determinar un límite superior de las raíces positivas de una ecuación.

5.ª Regla de Brêt.

87.—Límite inferior de las raíces positivas de una ecuación. Límites superior é inferior de las raíces negativas de una ecuación.

88.—Determinación de las raíces enteras de una ecuación. Caracteres de exclusión por el método de Newton-Bezout.

Teorema de Peletarius sobre los caracteres de las raíces enteras, positivas y negativas de una ecuación.

Determinación de las raíces fraccionarias de una ecuación. Procedimiento para determinarlas. Hallar las raíces enteras de la ecuación.

$$f(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0,$$

y las fraccionarias de

$$f(x) = 4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0.$$

89.—Separación de las raíces reales de una ecuación por el método de las sustituciones sucesivas; por el teorema de Descartes; por el de Rolle y, en especial, por el teorema de Sturm. Método de Waring ó por la ecuación de los cuadrados de las diferencias.

90.—Aproximación de las raíces incomensurables de una ecuación. Sus principales métodos son:

1.° Por sustituciones intermedias ó método de los límites.

2.° Por el de Lagrange.

Aplicaciones de ambos métodos á la ecuación

$$x^3 + x - 20 = 0.$$

91.—Método de aproximación de Newton y de Horner. Aplicarcarlos á la ecuación

$$x^3 + x - 20.$$

92.—Cálculo de las raíces imaginarias de una ecuación. *Ejemplos.*

93.—Resolución de las ecuaciones binomias y trinomias. *Ejemplos.*

94.—Descomposición de fracciones racionales en fracciones parciales. *Ejemplos.*

95.—Resolución de la ecuación algébrica de tercer grado por el método de Hudde. Su discusión.

96.—Resolución de la ecuación algébrica de cuarto grado por el método de Euler indicado por Hudde. Su discusión.

97.—Ecuación algébrica de quinto grado y de grados superiores al quinto. Imposibilidad de su resolución general por los solos recursos algébricos.

98.—Ecuaciones trascendentes: su resolución. *Ejemplos*.