PROGRAMA

DE

ELEMENTOS DE CÁLCULO INFINITESIMAL

REDACTADO POR

Don Lauro Clariana Ricart

CATEDRÁTICO DE LA EXPRESADA ASIGNATURA EN LA UNIVERSIDAD
DE BARCELONA

BARCELONA

IMPRENTA DE LA CASA PROVINCIAL DE CARIDAD
CALLE DE MONTEALEGRE, NÚMERO 5
1902

PROGRAMA

DE

ELEMENTOS DE CÁLCULO INFINITESIMAL

REDACTADO POR

Don Lauro Clariana Ricart

CATEDRÁTICO DE LA EXPRESADA ASIGNATURA EN LA UNIVERSIDAD
DE BARCELONA

BARCELONA

IMPRENTA DE LA CASA PROVINCIAL DE CARIDAD
CALLE DE MONTEALEGRE, NÚMERO 5
1902

PROGRAMA

DE

ELEMENTOS DE CÁLCULO INFINITESIMAL

PROLEGÓMENOS

NÚMERO 1

Variable en general.—Diferentes conceptos de variable.—Función.—Su clasificación.—Función dependiente de variable compleja.—Consideraciones geométricas aplicadas á la variable compleja.

NÚMERO 2

Razón por cociente entre dos variables.—Estudio de la cantidad en su mayor grado de generalidad.—Razón por cociente entre dos cantidades indefinidamente pequeñas ó indefinidamente grandes.—División en órdenes de la cantidad conforme á sus tres categorías.—Consideraciones geométricas.—Fórmulas típicas.—Procedimientos distintos que pueden seguirse para la determinación del orden de una cantidad.

NÚMERO 3

Determinación del orden de una suma, de un producto, de un cociente y de una potencia de varias cantidades comprendidas en una misma ó diferentes categorías.—Orden definitivo de una cantidad, cuando ésta no se refiere al orden fundamental.

NÚMERO 4

Estudio de las cantidades que difieren entre sí indefinidamente poco.—Consecuencias.—Orden de la razón $\frac{a}{b}$, cuando en vez de a y b, se sustituyan otras cantidades que difieran de las primeras indefinidamente poco.—Probar que el orden de una suma, cuyos sumandos tienen el mismo signo, no altera, si se reemplazan todos ó parte de los sumandos por otros que difieran indefinidamente poco de los primeros.—Observaciones notables de este último principio.—Fundamentos del Cálculo Diferencial é Integral.

NÚMERO 5

Métodos de los indivisibles, de los coeficientes indeterminados de Descartes, de las primeras y últimas razones, de los límites y de Newton.—Observaciones acerca de las cantidades que se desvanecen.—Teoría relativa á la derivada de Lagrange.—Método importante de Leibnitz.—Consideraciones filosóficas y comparativas de los métodos precedentes.

NÚMERO 6

Determinación numérica de las cantidades como límites de variables, según el procedimiento de los griegos.—Valor numérico de una cantidad como resultado de una suma compuesta de un número indefinido de cantidades indefinidamente pequeñas.—Valor numérico de una cantidad como resultado de la razón por cociente de dos cantidades variables que se resuelven en una cualquiera de las tres categorías correspondientes á la cantidad.

CÁLCULO DIFERENCIAL

NÚMERO 7

Procedimiento general para determinar la razón por cociente del incremento de una función á su variable independiente.—Estudio general de la derivada.—Consideraciones filosóficas acerca de las funciones continuas cuya derivada se resuelve en la tercera categoría de la cantidad.—Incremento y diferencial de una función ordinaria.—Incremento y diferencial de la variable independiente.—Coeficiente diferencial.—Consideraciones geométricas.

NÚMERO 8

Diferenciación de una función compuesta en el supuesto de que no haya más que una variable independiente.—Diferenciación de una función compuesta, suponiendo que hayan varias variables independientes.—Fórmulas generales.—Probar que si dos cantidades p y q dependen de x é y, siendos dichas cantidades una función de la otra, las derivadas respectivas son proporcionales.—Importancia del teorema recíproco.

NÚMERO 9

Funciones hiperbólicas directas é inversas.—Preliminares acerca de los desarrollos en serie de las funciones: e^z, $cos.z$ y $sen.z$, para cuando z sea una cantidad compleja.—Estudio de la expresión $e^{\pm z\sqrt{-1}}$.—Funciones hiperbólicas directas.—Paralelo entre las funciones circulares y las hiperbólicas directas.—Funciones hiperbólicas inversas.

NÚMERO 10

Diferenciación de las funciones hiperbólicas directas.—Referencia á las funciones circulares.—Diferenciación de las funciones hiperbólicas inversas.—Aplicar diferentes procedimientos para la obtención de las fórmulas anteriores.

NÚMERO 11

Aplicación del cálculo diferencial á las determinantes en forma de matriz.—Caso en que los elementos de la matriz dependan de una sola variable, siendo ó no todos los elementos funciones de la misma.—Caso en que los elementos de la matriz sean funciones de dos ó más variables independientes.

NÚMERO 12

Derivadas y diferenciales de diferentes órdenes correspondientes á una función ordinaria.—Consecuencias para una función trascendente.—Investigaciones importantes para descubrir ciertas leyes en el desarrollo de sus derivaciones.

NUMERO 13

Fórmula de Leibnitz para la determinación de la derivada ó diferencial de un orden cualquiera correspondiente á un producto de funciones ordinarias.—Demostrar que el desarrollo es general.—Aplicar el mismo principio á la división de funciones.—Determinación de las leyes á que se sujetan ciertos desarrollos.

NÚMERO 14

Derivadas sucesivas de algunas funciones para el valor particular de $x = o$.—Importancia de la fórmula de Leibnitz para la resolución de este problema.—Determinación directa de las dos primeras derivadas.—Estudiar los valores resultantes de *ar.csen.x* y *arc.tg.x*, según el grado de su derivación sea par ó impar.

NÚMERO **15**

Diferenciación de funciones sin resolver.—Diferenciación de una función ordinaria sin resolver.—Diferenciación de dos funciones sin resolver compuestas cada una de tres variables, siendo dos de ellas funciones de la tercera.—Estudio en el caso de haber n ecuaciones con $n+1$ variables.—Nuevos casos más generales que pueden presentarse.

NÚMERO **16**

Derivadas parciales de funciones compuestas de dos ó más variables independientes.—Principio fundamental de dichas derivadas.—Diferenciales de órdenes superiores al primero de funciones compuestas en el caso más general.—Leyes generales que se observan en sus desarrollos.—Diferentes notaciones adoptadas.—Estudio para el caso en que algunas variables independientes se transformen en dependientes.

NÚMERO **17**

Diferenciales de diversas órdenes de funciones sin resolver.—Ley de los desarrollos según las funciones sean más ó menos complicadas.—Eliminación de constantes.—Procedimiento general.—Aplicación á las cónicas.

NÚMERO **18**

Eliminación de funciones arbitrarias.—Procedimiento general.—Consecuencias.—Aplicar el anterior procedimiento á las superficies regladas de plano director y á las superficies desarrollables.

NÚMERO 19

Cambio de variables.—Estudiar el cambio de variables en la función siguiente:

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\right).$$

Cambio de la variable independiente.—Cambio de la función y de la variable independiente.

NUMERO 20

Del cambio de variables.—Funciones de la forma:

$$V = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ldots\ldots\right).$$

Cambio de las variables independientes.—Cambio de todas las variables.

NÚMERO 21

Determinantes funcionales.—Consideraciones generales.—Forma de la determinante U.—Forma de la determinante de Jacobi, expresada por J.—Consecuencias.—Determinante H.—Relaciones notables entre las determinantes J y H.

NÚMERO 22

Diferencial de una función dependiente de variable compleja.—Condiciones para que la función imaginaria

$$\varphi(z) = u + vi,$$

admita una derivada.—Función monógena.—Consecuencias importantes para dos funciones que tengan derivadas iguales.

NÚMERO 23

Fórmula de Lagrange para el desarrollo de una función cualquiera de z, según una serie ordenada de potencias enteras y positivas de x, siendo $z = a + x\,\varphi\,(z)$.—Ley que se desarrolla en las derivadas consecutivas de la serie.—Casos particulares que pueden originarse de la fórmula general de Lagrange.

NÚMERO 24

Diferencial del área correspondiente á una curva plana.—Diferencial de un arco de curva plana —Fórmulas generales correspondientes á la tangente, subtangente, normal y subnormal de curvas planas referidas á ejes polares.—Diferencial de un arco ó área correspondiente á una curva plana, referida á los mismos ejes polares.—Aplicación á la familia de las espirales.

NÚMERO 25

Contacto de curvas planas.—Línea osculatriz.—Círculo osculador.— Curvatura de curvas planas.—Curvatura media.—Curvatura de una curva en un punto dado. - Círculo de curvatura.—Relaciones entre el círculo de curvatura y el osculador.

NÚMERO 26

Determinar el sentido de la curvatura de una curva plana cerca de un punto dado.—Diferentes formas del radio de curvatura.—Estudiar el caso en que el arco represente la variable independiente ó que la función no se halle resuelta.—Expresión del radio de curvatura en ejes polares.

NÚMERO 27

Aplicación del radio de curvatura á las cónicas.—Fórmula común.—Radio de curvatura en la circunferencia, cicloide y espiral logarítmica.

NÚMERO 28

Evolutas y evolventes en las curvas planas. — Propiedades notables de las mismas. — Fórmulas fundamentales. — Determinación de las evolutas en algunas curvas conocidas.

NÚMERO 29

Estudio de las involutas y envolventes planas.—Procedimiento general para determinar la envolvente de varias involutas correspondientes á una misma función.—Consideraciones acerca de las tangentes comunes.

NÚMERO 30

Puntos singulares en las curvas planas.—Puntos singulares á que da origen una misma rama de curva.—Puntos singulares que resultan del encuentro de varias ramas.—Estudiar el caso en que la ecuación se presente bajo forma implícita.

NÚMERO 31

Líneas alabeadas.—Funciones que la determinan.—Ecuaciones de la tangente y del plano normal en un punto de una línea alabeada.—Diferencial de un arco referido á ejes coordenados, cartesianos ó polares.

NÚMERO 32

Plano osculador.—Conceptos diferentes que pueden conducir al conocimiento de la expresión de dicho plano.—Ecuación correspondiente.—Movimiento circulatorio á que obedecen las cantidades que entran en dicha ecuación.—Aplicación á la hélice.

NÚMERO 33

Superficies curvas.—Ecuación del plano tangente.—Plano tangente en un punto del elipsoide.—Ecuaciones de la normal.—Angulos de la normal con los ejes coordenados.—Superficie envolvente de otra móvil.

NÚMERO 34

Curvatura de las líneas en el espacio.—Expresión del primer radio de curvatura.—Círculo osculador.—Centro de dicho círculo.—Normal principal.—Cosenos de los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

NÚMERO 35

Angulo de flexión ó de segunda curvatura.—Cosenos de los ángulos que forma una recta perpendicular al plano osculador con los ejes coordenados.—Fórmula del radio de curvatura de segunda especie.

NÚMERO 36

Determinar en la hélice el primero y segundo radio de curvatura —Diferenciales de los cosenos correspondientes á los ángulos que con los ejes coordenados forman la tangente, la normal principal y la bi-normal referentes á un punto de una línea alabeada.—Importancia de las fórmulas que expresan las diferenciales de los cosenos correspondientes á los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

NÚMERO 37

Determinar la expresión de la superficie polar de una línea cualquiera.—Sistema de ecuaciones indispensables para poder deducir la superficie polar de una línea.—Aplicación á la hélice.

NÚMERO 38

Esfera osculatriz.—Expresión del radio de dicha esfera osculatriz.—Evolutas de las líneas alabeadas.—Consideraciones notables acerca de las normales principales trazadas en los diferentes puntos de una línea alabeada.—Ecuaciones que determinan las evolutas de una línea dada.

NÚMERO 39

Teoría de la curvatura en las superficies.—Curvatura de una línea cualquiera trazada sobre una superficie.—Radios de curvatura correspondientes á una sección oblicua ó normal. —Teorema de Meusnier.

NÚMERO 40

Secciones principales en un punto de una superficie.—Teorema de Euler.—Probar que la suma de curvaturas de dos secciones normales perpendiculares entre sí, es constante é igual á la suma de las curvaturas máxima y mínima en el punto considerado de la superficie.—Importancia de los puntos umbilicales.—Ecuaciones que determinan dichos puntos.

NÚMERO 41

Cálculo de los radios de curvatura principales en un punto dado cualquiera de una superficie.—Ecuación que determina la dirección de las secciones principales en un punto dado cualquiera de una superficie.—Relación de las fórmulas finales con las que se refieren á las líneas de curvatura que pasan por el punto considerado de la superficie.

NÚMERO 42

Definicion de línea indicatriz.—Estudio y consecuencias importantes de dicha línea.—Líneas de curvatura situadas sobre una superficie.—Lugar geométrico de las normales á dichas líneas.—Superficie, como lugar geométrico, de los centros de curvatura de las precitadas líneas.

NÚMERO 43

Superficies cilíndricas, cónicas y de revolución.—Ecuaciones entre derivadas parciales de las superficies antedichas.—Consideraciones generales acerca de las superficies designadas bajo el nombre de conoides, desarrollables y regladas.—Ecuaciones entre derivadas parciales de las precitadas superficies.

NÚMERO 44

Expresión en forma de matriz de las líneas de curvatura de la superficie $f(x, y, z)=0$.—Líneas de curvatura en el elipsoide.—Líneas de curvatura en las superficies de revolución.—Líneas de máxima y mínima pendiente.

NÚMERO 45

Coordenadas curvilíneas.—Coordenadas curvilíneas en un plano.—Radio de curvatura de una curva cualquiera en un punto (λ, μ).—Coordenadas curvilíneas de un punto sobre una superficie curva.—Radio de curvatura de una sección normal en una superficie cualquiera, referido á coordenadas curvilíneas.

NÚMERO **46**

Sistema de coordenadas elípticas.—Determinación de las fórmulas

$$x = \frac{\lambda \mu \upsilon}{cb}, \quad y = \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \upsilon^2)(\lambda^2 - b^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \upsilon^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Deducir como caso particular las siguientes:

$$x = \frac{\rho \mu \upsilon}{b c}, \quad y = \rho \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \upsilon^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z = \rho \frac{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \upsilon^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

NÚMERO **47**

Estudio particular de las coordenadas curvilíneas de Lamé. —Parámetro de primera y segunda especie.—Desarrollo de los grupos de fórmulas de Lamé con sus clases respectivas. —Relaciones recíprocas.—Importancia de los grupos siguientes:

$$\frac{\partial \frac{1}{h^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}}{\partial \rho}$$

. . . .

NÚMERO 48

Teorema de M. Bouquet, acerca de la más corta distancia entre dos rectas sucesivas de un sistema continuo en el espacio.—Probar que cuando las rectas de la serie supuesta son tangentes á una misma curva en el espacio, se cumple la condición:

$$dadq - dbdp = 0.$$

Determinar la condición para que la curva anterior sea plana.

NÚMERO 49

Triángulos indefinidamente pequeños.—Triángulo cuyos tres ángulos tienden hacia α, β y γ, como cantidades finitas, y los tres lados a, b y c hacia los indefinidamente pequeños de un mismo orden.—Triángulo ABC, en que A tiende hacia un ángulo recto y los lados contiguos hacia los indefinidamente pequeños de primer orden.—Orden indefinitesimal de diversas líneas que pueden considerarse en un triángulo rectángulo que tenga un cateto y un ángulo adyacente indefinidamente pequeño.—Triángulo que tiene un lado indefinidamente pequeño respecto á su contiguo.—Triángulo que tiene dos ángulos indefinidamente pequeños de primer orden.—Triángulo que tiene un ángulo indefinidamente pequeño de primer orden, comprendido entre dos lados indefinidamente pequeños, también de primer orden.

NÚMERO 50

Orden indefinitesimal de líneas cuando entran en comparación unas con otras.—Consideraciones generales acerca de la curvatura de las líneas.—Diferencia de curvatura de las dos mitades de un arco indefinidamente pequeño de primer orden.—Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y su cuerda.—Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y la tangente trazada á una de las extremidades del arco y terminada en la ordenada trazada por la otra extremidad de dicho arco.—Diferencia de curvaturas extremas en un arco indefinidamente pequeño.—Expresión de la perpendicular trazada desde la extremidad de un arco indefinidamente pequeño á la tangente que pasa por el otro extremo.—Angulo formado por la cuerda de un arco indefinidamente pequeño de primer orden con la tangente que pasa por el punto medio de este arco.—Arco comprendido entre el punto medio de un arco indefinidamente pequeño de primer orden y el punto de contacto de la tangente paralela á la cuerda de este arco.—Angulos formados por las tangentes á las extremidades de un arco indefinidamente pequeño con la cuerda respectiva.—Diferencia entre las tangentes precitadas.

CÁLCULO INTEGRAL

NÚMERO 51

Nociones preliminares acerca del cálculo integral.—Relación entre el cálculo diferencial é integral.—Integral de una suma de diferenciales.—Integración inmediata.

NÚMERO 52

Integración por partes.—Fin que se propone dicha integración.—Modo de disponer los datos para poder aplicar el principio de la integración por partes.—Integración por sustitución.—Observaciones acerca de los límites de la integral.—Reglas prácticas que pueden tenerse en cuenta para alcanzar los integrales por sustitución.

NÚMERO 53

Procedimientos generales para la integración de funciones fraccionarias racionales.—Integración en cada uno de los cuatro casos que pueden presentarse.—Estudiar el caso más general de expresión fraccionaria racional.

NÚMERO 54

Integración de funciones irracionales.—Caso en que los radicales contengan cantidades monomias.—Integración de funciones de la forma $F(x, \sqrt{a+bx \pm x^2})$ —Integración de funciones especiales que pueden reducirse fácilmente á la forma racional.

NÚMERO 55

Determinar las funciones que corresponden á las integrales que á continuación se expresan:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}, \quad \int \frac{(\alpha x+6)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{Bx+Cx^2}}.$$

NÚMERO 56

Integración de las diferenciales binomias.—Casos generales de integración.—Deducir la fórmula siguiente:

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx =$$

$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.$$

NÚMERO 57

Deducir la segunda fórmula correspondiente á las binomias.

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Deducir la tercera:

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)} -$$

$$-\frac{b(m-np-n-1)}{a(m-1)}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

Deducir la cuarta:

$$\int x^m(a+bx^n)^{-p}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} +$$

$$+\frac{-m-n+np-1}{an(p-1)}\int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx.$$

NÚMERO **58**

Aplicación de las integrales binomias:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} -$$

$$-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(-m+1)} -$$

$$-\frac{b(m-np-n-1)}{a(m-1)}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx,$$

á las expresiones siguientes:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^{-m}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

Deducir sus diferentes desarrollos según m sea par ó impar.—Integral correspondiente al péndulo circular.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

NÚMERO **59**

Integración de funciones trascendentes.—Estudio de las siguientes integrales:

$$\int F(lx)\frac{dx}{x}, \qquad \int F(sen.x)\, cos.x dx,$$

$$\int F(arc.\, sen.\, x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int F(sen.x,\, cos.x)\, dx$$

$$\int F(sen.x,\, sen.2x \dots\, cos.x,\, cos.2x \dots)dx.$$

Hallar el desarrollo de la integral: $\int P\, z^n dx$, siendo P una función algebraica, y z, una trascendente.

NÚMERO **60**

Determinar las integrales que á continuación se expresan:

$$\int e^{ax} cos.bx\, dx, \quad \int e^{ax} sen.bx\, dx; \quad \int sen.^m x\, cos.^n x\, dx.$$

Consideraciones acerca de las últimas integrales:

$$\int dx, \quad \int cos.x\, dx. \quad \int sen.x\, dx \;\; \text{y} \;\; \int sen.x\, cos.x\, dx.$$

NÚMERO 61

Deducir de la fórmula general:

$$\int sen.^m xcos.^n xdx = \frac{sen.^{m+1} x cos.^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sen.^m xcos.^{n-2} xdx$$

el desarrollo que corresponde á $\int \frac{sen.^m x}{cos.^n x} dx$, en el supuesto de que n sea negativa.

Deducir de la fórmula general:

$$\int sen.^m xcos.^n xdx = -\frac{sen.^{m-1} x cos.^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int sen.^{m-2} xcos.^n xdx$$

el desarrollo correspondiente á $\int \frac{cos.^n x}{sen.^m x} dx$, considerando m negativa.

Deducción de las últimas integrales:

$$\int \frac{dx}{sen.x\, cos.x} \quad \int \frac{dx}{sen.x} \quad \int \frac{sen.x}{cos.x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{cos.x} \quad \text{y} \quad \int \frac{cos.x}{sen.x}$$

NÚMERO 62

Deducir de la fórmula general

$$\int sen.^m xcos.^n xdx = -\frac{sen.^{m-1} xcos.^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int sen.^{m-2} xcos.^n xdx$$

la integral $\int sen.^m x\, dx$ en el supuesto de que $n = o$, y según m sea par ó impar.—Deducir de la expresión:

$$\int sen.^m x cos.^n x dx = \frac{sen.^{m+1} x cos.^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sen.^m x cos.^{n-2} x dx$$

la que corresponde á: $\int cos.^n x\, dx$. bajo condiciones análogas á las del caso anterior.

Deducir de la fórmula:

$$\int sen.^m x cos.^n x dx = -\frac{cos.^{n+1} x sen.^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int sen.^{m-2} x cos.^{n-2} x dx,$$

la correspondiente á $\int tg.^m x\, dx$, en el supuesto de que sea $n = -m$.

Deducir de la fórmula:

$$\int sen.^m x cos.^n x dx = \frac{cos.^{n-1} x sen.^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int sen.^{m+2} x cos.^{n-2} x dx,$$

la inmediata $\int cot.^m x\, dx$, siendo $m = -n$.

NÚMERO **63**

Integración por medio de series.—Principios importantes que deben tenerse en cuenta en dichos desarrollos.—Procedimiento general.—Integración por series de las expresiones:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{1+x}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Valores aproximados de algunas integrales irreducibles á forma finita.—Aplicación á la integral elíptica de primera especie.

NÚMERO **64**

Integración de funciones diferenciales compuestas de dos ó más variables independientes.—Condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de dichas funciones.—Estudiar el caso particular de una función compuesta de dos variables independientes.

NÚMERO 65

Integración de funciones diferenciales con tres variables independientes.—Condición de integrabilidad.—Determinar la expresión general correspondiente á la integral de dichas funciones diferenciales.

NÚMERO 66

Nociones generales acerca de las integrales definidas.—Determinación de las siguientes:

$$\int_0^1 x^m dx\,,\qquad \int_a^b \frac{dx}{x}\,,\qquad \int_0^1 \frac{dx}{a^2+x^2}\,,\qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Determinación de las siguientes integrales definidas en el concepto de que m sea par ó impar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen.^m x dx\,,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos.^m x dx\,,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg.^m x\, dx\,.$$

NÚMERO 67

Determinación de las integrales definidas siguientes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos.^{2m} x\, sen.^{2n} x dx\,,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos.^{m2} x\, sen.^{2n+1} x dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2m} dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{x^{2m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Fórmula de Wallis.

NÚMERO 68

Desarrollos de integrales definidas para cuando uno ó los dos límites de la integral pasen á la categoría de cantidades indefinidamente grandes.—Determinación de las integrales siguientes:

$$\int_i^{\mathrm{I}} e^{-x} dx. \quad \int_i^{\mathrm{I}} \frac{dx}{x} \quad \int_i^{\mathrm{I}} \cos.\, x\, dx, \quad \int_i^{\mathrm{I}} e^{a^x} dx,$$

$$\int_i^{\mathrm{I}} e^{-ax} dx, \quad \int_{-I}^{\mathrm{I}} \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad \int_{-I}^{\mathrm{I}} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}, \quad \int_i^{\mathrm{I}} e^{-ax} \cos.\, bx\, dx$$

$$\int_i^{\mathrm{I}} \frac{y^{m-1} dy}{(1+y)^n} \quad \text{siendo } m < n, \quad \text{y} \quad \int_i^{\mathrm{I}} x^n e^{-x} dx.$$

NÚMERO 69

Determinar si la integral $\int_a^b \mathrm{F}(x)\, dx$ tiene un valor finito y determinado cuando uno de sus límites se convierte en una cantidad indefinidamente grande.—Averiguar si la integral $\int_a^b \mathrm{F}(x)\, dx$ tiene un valor finito y determinado cuando $\mathrm{F}(x)$, se transforma en una cantidad indefinidamente grande para el valor de la variable que corresponde á uno de los límites de la integral.—Caso en que la función $\mathrm{F}(x)$, resulte indefinidamente grande por un valor de la variable que esté comprendido entre los límites de dicha integral.

NÚMERO 70

Determinación de integrales definidas por medio de la diferenciación é integración bajo el signo integral.—Pasar de la integral $\int_a^b F(x)\, dx$ á la siguiente:

$$\int_a^b F(x,z)\, dx,$$

según los límites de dicha integral sean costantes ó dependientes de la variable.—Diferenciación é integración bajo el signo integral en general.—Aplicar los principios precedentes á las integrales que á continuación se expresan:

$$\int_i^I \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}}, \quad \int_i^I e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

$$\int_i^I e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}}$$

á fin de obtener las nuevas siguientes:

$$\int_i^I \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n} \frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \int_i^I e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_i^I e^{-ax} x^{n-1} sen.bx dx &= \frac{(n-1)!\ sen.n\theta}{\rho^n} \\ \int_i^I e^{-ax} x^{n-1} cos.bx\, dx &= \frac{(n-1)!\ cos.n\theta}{\rho^n} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{siendo } a+b\sqrt{-1} = \\ &= \rho(cos.\theta + \sqrt{-1}\, sen.\theta) \end{aligned}$$

NÚMERO 71

Deducir de la integral conocida:

$$\int_i^I e^{-ax} cos.bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

la expresión siguiente:

$$\int_{i}^{I} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-ax}}{x} \cos. bx\, dx = \frac{1}{2} \cdot l \frac{a^2 + b^2}{\alpha^2 + b^2}.$$

Deducir de la integral conocida:

$$\int_{i}^{I} e^{-ax} sen. bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

la siguiente:

$$\int_{i}^{I} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-ax}}{x} sen.\ bx\, dx = arc.\ tg. \frac{b(a - \alpha)}{b^2 + a\alpha}$$

Determinar por procedimientos distintos la integral:

$$\int_{i}^{I} e^{-x^2} dx$$

Importancia de la cantidad compleja para la determinación de ciertas integrales.

NÚMERO 72

Integrales Eulerianas de primera y segunda especie.— Transformaciones de las mismas por sustitución.—Propiedades.—Importancia de la expresión

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

su demostración.—Determinación de la curva *Gamma*

NÚMERO 73

Integrales múltiples en general.—Reducción de dichas integrales.—Método general.—Aplicaciones.—Método de Dirichlet con aplicación al volumen de elipsoide.

NÚMERO 74

Aplicaciones geométricas del cálculo integral.—Cuadratura de figuras planas.—Ejemplos de cuadratura de curvas referidas á coordenadas cartesianas y polares.

NÚMERO 75

Rectificación de curvas.—Sentido verdadero de dicha rectificación.—Aplicaciones á los ejemplos siguientes:

$$y^2 = 2px, \; a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \; a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2.$$

—Consideraciones generales acerca del origen de las integrales elípticas.—Determinación de sus tres especies.

NÚMERO 76

Volumen de cuerpos de revolución.—Aplicaciones en el concepto de que las generatrices-generadoras de los diferentes cuerpos de revolución, vengan expresadas respectivamentes por:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)\,; \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2\,; \qquad y^2 = 2px,$$

y en el concepto de que dichas generatrices giren alrededor del eje x.

NÚMERO 77

Volumen de cuerpos terminados por superficies cualesquiera.—Fórmulas generales.—Procedimientos varios para la determinación de un volumen.—Aplicación al elipsoide.—Volumen de cuerpos referidos á coordenadas polares.

NÚMERO 78

Cuadratura de superficies curvas.—Fórmula general.—Observación notable acerca de los límites de la integral doble que corresponde á la fórmula general.—Aplicación á la esfera.—Cuadratura de superficies de revolución.

NÚMERO 79

Integración de ecuaciones diferenciales.—Ecuaciones diferenciales ordinarias.—Ecuaciones entre derivadas parciales.—Ecuación entre diferenciales totales.—Probar que todo sistema de *m* ecuaciones diferenciales entre x y *m* funciones $y_1 y_2 \ldots y_m$, de la primera variable, puede transformarse en otro donde no figuren más que las derivadas de primer orden.—Forma normal de un sistema simultáneo de *m* ecuaciones de primer orden.—Procedimiento general para deducir de un sistema de *m* ecuaciones diferenciales, una ecuación diferencial en que no entre más que x y una de las funciones.—Aplicación de reglas análogas á la formación de una determinante para deducir el orden de la ecuación diferencial definitiva.—Condiciones á que deben satisfacer las integrales además de las que corresponden á las ecuaciones diferenciales respectivas.—Aplicación á la Mecánica respecto al movimiento de un punto en el espacio.

NÚMERO 80

Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias.—Consideraciones generales.—Probar que toda ecuación diferencial del orden *m*, admite una integral que encierra *m* constantes arbitrarias.—Integrales particulares.—Ordenes respectivos de las ecuaciones diferenciales y de las integrales.—Regla general para conocer si una integral con *m* constantes, se refiere á una ecuación diferencial del orden *m*.

NÚMERO 81

Integración de ecuaciones diferenciales de primer orden.—Separación de variables.—Casos en que es posible la integración.—Estudiar el caso en que la ecuación diferencial sea homogénea.—Caso en que faltando la homogeneidad, por alguna transformación, puede llevarse al primero.

NÚMERO 82

Ecuaciones diferenciales lineales.—Estudio de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$.

Fórmulas notables de Jaime Bernoulli aplicadas á la ecuación: $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^m$.

Justificar la ecuación de condición.

NÚMERO 83

Estudio del factor que transforma en integrable el primer miembro de la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$.—Determinar dicho factor para cuando la ecuación sea homogénea. —Problema de las trayectorias en general.—Trayectorias ortogonales.

NÚMERO 84

Ecuación diferencial de primer orden y de un grado cualquiera.—Consideraciones generales.—Caso en que la ecuación diferencial no contenga á las variables.—Ecuaciones diferenciales de M. Clauiraut, dadas por las formas siguientes: $y = xF(p) + \varphi(p)$, $y = px + \varphi(p)$.

NÚMERO 85

Soluciones singulares de una ecuación diferencial de primer orden.—Soluciones singulares deducidas de la integral general.—Significación de dicha integral.—Propiedad del factor integrable en esta clase de integrales.

NÚMERO 86

Integración de ecuaciones diferenciales de un orden superior al primero.—Reducción de la integral múltiple á otras simples.—Ecuación diferencial en que entran dos derivadas consecutivas de un orden cualquiera, ó que se diferencien de dos unidades.—Casos particulares de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse á un orden inferior.

NÚMERO 87

Integración de ecuaciones lineales de un orden cualquiera.—Caso en que el segundo miembro sea igual á cero.—Integración de la ecuación lineal completa.—Casos particulares que pueden ocurrir.

NÚMERO 88

Integración de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y sin término independiente de la variable.—Método de Euler.—Ecuación modular.—Estudiar los diferentes casos que pueden presentarse según sean las raíces desiguales, iguales ó imaginarias.

NÚMERO 89

Integración de ecuaciones diferenciales simultáneas.—Ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden entre tres variables.—Aplicación á las formas normales.—Casos particulares que pueden ocurrir.

NÚMERO 90

Integración de ecuaciones diferenciales por medio de series.—Empleo de la serie de Mac-Laurin y de Taylor.—Casos en que no puede aplicarse la serie de Mac-Laurin.—Dada una integral bajo forma de serie, deducir su ecuación diferencial correspondiente.

NÚMERO 91

Ecuaciones entre derivadas parciales.—Caso en que la ecuación diferencial se refiera á una sola variable.—Ecuaciones entre derivadas parciales de órdenes superiores al primero, bajo condiciones análogas á las del caso anterior.—Determinar la integral correspondiente á la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P \frac{\partial z}{\partial x} = Q.$$

Caso general de integración de una ecuación entre derivadas parciales de primer orden y primer grado, dependiente de tres ó cuatro variables.—Consecuencia para el estudio de ciertas superficies geométricas.—Integración de ecuaciones entre derivadas parciales de órdenes superiores al primero.

NÚMERO 92

Cálculo de las variaciones.—Consideraciones generales.—Principio fundamental de esta teoría.—Variación de una integral definida según los límites de dicha integral sean ó no fijos.—Máximo ó mínimo absoluto de una integral definida.—Ecuación indefinida.—Ecuación de los límites.—Máximo ó mínimo relativo.—Aplicación notable á las líneas geodésicas de una superficie.

NÚMERO 93

Ecuaciones á las derivadas parciales de primer orden.—Importancia de la función V $(x, y, z, a, b) = 0$.—Integrales completas, singular y general según Lagrange.—Integrales para cuando $q = f(x, y, z, p)$ siendo p dependiente de una constante arbitraria.—Casos particulares:

$$f(y, p, q) = 0 \quad p = a \quad f(x, p) = f_1(y, q) = a$$

NÚMERO 94

Estudio de Lagrange acerca de las ecuaciones á las derivadas parciales de primer orden.—Importancia de la serie de igualdades siguientes:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}$$

Transformación para cuando la ecuación no contiene á la variable z.

NÚMERO 95

Cálculo aproximado de las integrales definidas.—Fórmulas de Poncelet, Simpson y Euler.—Método de interpolación.—Método de Gauss.

NÚMERO 96

Integración gráfica.—Propiedades importantes.—Métodos generales de integración gráfica.—Determinación de la ordenada y abscisa media.—Importancia de dichas construcciones gráficas para la resolución de varios problemas pertenecientes á la Mecánica.

FIN