

# RENTAS Y SEGUROS PRIVADOS DE DEPENDENCIA: UN COMPLEMENTO A LAS PRESTACIONES PÚBLICAS DE DEPENDENCIA

A. Alegre<sup>1</sup>, M.A. Pons<sup>2</sup>, F.J. Sarrasí<sup>3</sup>, J. Varea<sup>4</sup>

## RESUMEN

La ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las Personas en Situación de Dependencia del 14 de diciembre del 2006 permitirá desarrollar en España un modelo de atención a la dependencia de carácter mixto, en el que el sector público garantizará, mediante el copago, unas coberturas básicas y el sector privado podrá mejorar y complementar las prestaciones ofrecidas por el sector público.

En este trabajo nos centraremos en el tratamiento actuarial de la prestación privada de dependencia, la cual se puede percibir en forma de renta o de seguro. El objetivo de una renta de dependencia podría ser ayudar a financiar, periódicamente, el coste que supone para el asegurado la situación de dependencia, mientras que el seguro de dependencia estaría más enfocado a financiar la adquisición, o adecuación, de una determinada infraestructura como consecuencia de la falta de autonomía.

Calcularemos la prima única y la provisión matemática de una renta y de un seguro de dependencia contratado por una persona autónoma, basándonos en un modelo de dependencia con los tres grados de dependencia, que son los que se contemplan en la Ley, y supondremos

---

<sup>1</sup> Universidad de Barcelona. Avd. Diagonal 690, Barcelona (08034) e-mail: [aalegre@ub.edu](mailto:aalegre@ub.edu)

<sup>2</sup> Universidad de Barcelona. Avd. Diagonal 690, Barcelona (08034) e-mail: [mapons@ub.edu](mailto:mapons@ub.edu)

<sup>3</sup> Universidad de Barcelona. Avd. Diagonal 690, Barcelona (08034) e-mail: [sarrasi@ub.edu](mailto:sarrasi@ub.edu)

<sup>4</sup> Universidad de Barcelona. Avd. Diagonal 690, Barcelona (08034) e-mail: [xvarea@ub.edu](mailto:xvarea@ub.edu)

que la cuantía de la renta y del seguro es variable según el grado de dependencia que alcance el asegurado.

Para realizar las aplicaciones numéricas utilizaremos distribuciones de mortalidad y tasas de prevalencia que pueden ser adecuadas para la población española y que han surgido de un análisis preliminar.

**PALABRAS CLAVE:** Autónomo, dependencia, grados de dependencia, renta, seguro, prima, provisión matemática.

## **ABSTRACT**

The draft bill on the Promotion of Personal Autonomy and Dependent Care foresees a mixed model of dependent care for Spain.

This study focuses on the actuarial treatment of private dependent care provision, which may be received in the form of an allowance or an insurance policy. We calculate the single premium and the mathematical provision of an allowance and a dependency insurance policy taken out by a self-employed person in a care model with the three levels of dependency, and we assume that the quantity of the allowance and the insurance policy varies according to the level of dependency of the insured person.

To perform the numerical applications we use distributions of mortality and rates of prevalence which were obtained in a preliminary analysis and appear to be valid for the Spanish population.

**KEY WORDS:** Self-employed, level of dependency, allowance, insurance, premium, mathematical provision

## **1. INTRODUCCIÓN**

Tal y como recoge la exposición de motivos de la ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las Personas en Situación de Dependencia del 14 de diciembre del 2006, la población mayor española ha experimentado, en los últimos 40 años, un crecimiento muy considerable. El número de personas mayores de 65 años se ha duplicado en este periodo, pasando de 3,3 millones de personas en 1.970 (un 9,7 por ciento de la población total) a más de 6,6 millones en 2.000 (16,6 por ciento de la población total).

Esta situación se ha visto agravada con el proceso de cuadratura que está sufriendo la parte superior de la pirámide poblacional, fenómeno que se conoce como "envejecimiento del envejecimiento" o, lo que es lo mismo, el incremento que experimenta el colectivo de población de 80 y más años, muy superior al del grupo de 65 y más años en su conjunto. Como consecuencia de este proceso de envejecimiento interno de la población mayor, el grupo constituido por las personas de 80 y más años se ha duplicado en sólo veinte años.

No obstante, el incremento de la esperanza de vida no viene siempre acompañado de una mejora de la calidad de vida: más de un tercio de las personas mayores de 65 años tiene alguna discapacidad, mientras que entre las menores de 65 años la proporción de personas con discapacidad no llega al 5%.

Lo que a priori parece un logro de la sociedad, gracias a los avances médicos, económicos y sociales, en realidad se ha convertido en un problema social, que se ha puesto de manifiesto justo cuando se han consolidado una serie de cambios socioeconómicos que han arraigado con gran intensidad en los países desarrollados.

Tradicionalmente, han sido las familias las que han asumido el cuidado de las personas dependientes, a través de lo que ha dado en llamarse "apoyo informal". Esa función ha recaído y recae, casi en exclusiva, en las mujeres del núcleo familiar, y, dentro de éstas, en las mujeres de mediana edad, sobre todo en el grupo formado por las que tienen entre 45 y 69 años.

Este incremento cuantitativo de la demanda ante situaciones de dependencia coincide en el tiempo con cambios importantes en el modelo de familia y con la incorporación progresiva de la mujer al mercado de trabajo, fenómenos ambos que están haciendo disminuir sensiblemente la capacidad de prestación de los cuidados familiares.

El contexto descrito ha hecho que los poderes públicos se planteen, como en otros países de nuestro entorno (Francia, Alemania...), ampliar la cobertura de los servicios sociales, a situaciones que hasta el momento quedaban cubiertas por el entorno familiar próximo de los ciudadanos.

A pesar de que el texto constitucional, en sus artículos 49 y 50, se refiere a la atención a discapacitados y personas mayores y a un sistema de servicios sociales promovido por los poderes públicos para el bienestar de los ciudadanos, los elementos fundamentales de ese modelo se centraban, para todo ciudadano, en la protección sanitaria y en la seguridad social. El desarrollo social de nuestro país, desde entonces, ha venido a situar a un nivel de importancia comparable al anterior la necesidad de la atención a las situaciones de dependencia.

Esta necesidad ha sido atendida hasta hoy, en el ámbito de su competencia, por las administraciones autonómicas y locales de nuestro país. Por otra parte, el sistema de Seguridad Social ha venido asumiendo algunos elementos de atención a las situaciones de dependencia: gran invalidez, complementos de ayuda a tercera persona en la pensión no contributiva de invalidez y de la prestación familiar por hijo a cargo con discapacidad, asimismo, las prestaciones de servicios sociales en materia de reeducación y rehabilitación de personas con discapacidad y de asistencia a las personas mayores.

La necesidad de garantizar a los ciudadanos y a las propias Comunidades Autónomas, un marco estable de recursos y servicios para la atención a la dependencia y su progresiva importancia lleva ahora al Estado a intervenir en este ámbito con la regulación contenida en esta Ley, que la configura como una nueva modalidad de protección social que amplía y complementa la acción protectora del Estado y del Sistema de la Seguridad Social.

La Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las Personas en Situación de Dependencia garantiza unos derechos básicos que se fundamentan en los principios de universalidad, equidad e igualdad, y en la participación, integración y normalización de la atención a las personas en situación de dependencia, desarrollando un sistema de atención integral.

En el artículo 2 se define *Dependencia* como el estado de carácter permanente en que se encuentran las personas que, por razones ligadas a la falta o a la pérdida de autonomía física, intelectual o sensorial, precisan de la atención de otra u otras personas o ayudas importantes para realizar actividades básicas de la vida diaria.

Además en el artículo 26 se definen los 3 grados de dependencia que contemplará el Sistema:

- a) Grado I. Dependencia moderada: Cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria, al menos una vez al día.
- b) Grado II. Dependencia severa: Cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria dos o tres veces al día, pero no requiere la presencia permanente de un cuidador.
- c) Grado III. Gran dependencia: Cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria varias veces al día y, por su pérdida total de autonomía mental o física, necesita la presencia indispensable y continua de otra persona.

Cada uno de los grados de dependencia establecidos en el apartado anterior se clasificará en dos niveles, en función de la autonomía de las personas y de la intensidad del cuidado que requiera.

El grado o nivel de dependencia será revisable por mejoría o empeoramiento de la situación de dependencia y además por error de diagnóstico o en la aplicación del correspondiente baremo.

Según la ley, las prestaciones por dependencia podrán tener la naturaleza de servicios, de prestaciones económicas y de ayudas para

la financiación de necesidades específicas e irán destinadas, por una parte, a la promoción de la autonomía personal y, por otra, a atender las necesidades de las personas con dificultades para la realización de las actividades básicas de la vida diaria. No obstante, la prioridad en el acceso a los servicios y la cuantía de las prestaciones vendrá determinada por el grado de dependencia y por la capacidad económica del solicitante.

Para concluir esta introducción, en la que pretendemos poner de manifiesto los principales elementos que la Ley fija, y que creemos son claves para establecer las hipótesis básicas del modelo que utilizaremos para desarrollar seguros privados de dependencia, transcribimos literalmente los dos primeros puntos del artículo 33, en el que se establece el copago, en función de los niveles de renta. Este sistema de pago es el que da vía libre a la aparición, en un futuro inmediato, de seguros privados de dependencia que garanticen las cuantías que no cubrirá el sistema público y que por tanto recaerán sobre los afectados.

*Artículo 33. La participación de los beneficiarios en el coste de las prestaciones.*

*1. Los beneficiarios de las prestaciones de dependencia participarán en la financiación de las mismas, según el tipo y coste del servicio y su capacidad económica.*

*2. La capacidad económica del beneficiario se tendrá también en cuenta en la determinación de la cuantía de las prestaciones económicas.*

## **2. RENTAS Y SEGUROS PRIVADOS DE DEPENDENCIA**

La Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las Personas en Situación de Dependencia permitirá desarrollar en España, como ya ha sucedido en otros países de nuestro entorno, como por ejemplo Francia, un modelo de atención a la dependencia de carácter mixto, en el que el sector público garantizará, mediante el

copago, unas coberturas básicas y el sector privado podrá complementar y mejorar dichas prestaciones.

Una manera que pueden tener los particulares de financiar el copago, esto es, su participación en el coste de las prestaciones de dependencia, puede ser a través de los seguros privados de dependencia. Estos seguros privados pueden responder también a la necesidad que pueden tener determinados sectores de la población, con un cierto nivel de renta, de no sólo financiar el copago sino también de ampliar y mejorar las coberturas básicas que ofrecerá el sector público. La prestación privada de dependencia se podría percibir de forma periódica, mientras la persona es dependiente, o bien, de una sola vez cuando se convierte en dependiente. En el primer caso estaríamos hablando de rentas de dependencia y en el segundo caso, de seguros de dependencia.

La finalidad de la renta de dependencia podría ser ayudar a financiar periódicamente en el tiempo, el coste que supone para el asegurado la situación de dependencia, mientras que el seguro de dependencia estaría más enfocado a financiar la adquisición o adecuación de una determinada infraestructura como consecuencia de la falta de autonomía. Por ejemplo, en el momento que una persona se hace dependiente, el importe del seguro permitiría cubrir las obras de adaptación de la vivienda a la nueva situación.

Vamos a proponer una renta y un seguro privados de dependencia como una posible alternativa de financiación de las prestaciones a cargo de los beneficiarios, y vamos a utilizar un modelo de dependencia con múltiples estados, concretamente con los tres estados o grados de dependencia, que son los que se contemplan en la Ley.

Supondremos que los tres grados de dependencia considerados en la Ley se corresponden con los tres estados de dependencia que ya fueron definidos en la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (1999), llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística Español, que son: dependencia moderada, dependencia severa y dependencia total o gran dependencia, como se la denomina en la Ley.

Si consideramos que el riesgo de dependencia se encuentra en patologías de carácter crónico, la dependencia se puede considerar como un estado irreversible en el que la persona dependiente ni puede volver a ser autónoma ni puede pasar a un grado de menor dependencia. Este es el supuesto que nosotros asumiremos. Esta consideración nos permite definir el siguiente esquema de posibles transiciones:

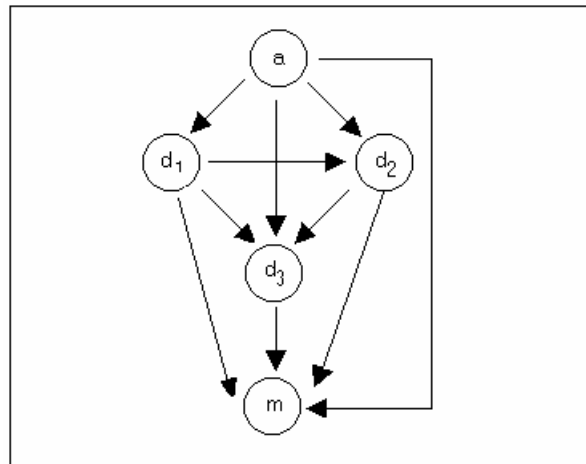


Figura I. Esquema de transiciones del modelo de dependencia con tres estados o grados

donde:

- $a \rightarrow$  Autónomo.
- $d_1 \rightarrow$  Dependiente moderado.
- $d_2 \rightarrow$  Dependiente severo.
- $d_3 \rightarrow$  Gran dependiente.
- $m \rightarrow$  Muerto o fallecido.

La renta y el seguro privado de dependencia que vamos a definir, supondremos que lo contrata una persona autónoma de edad  $x$  y calcularemos el importe de la prima única pura a pagar por el asegurado así como la cuantía que debe provisionar la compañía



aseguradora según el estado en que se encuentre el asegurado en un determinado momento, esto es, determinaremos la provisión matemática. Vamos a asumir que tanto la renta como el seguro son pagaderos por vencido, es decir, al final del periodo a partir del que el asegurado adquiere la condición de dependiente.

Para facilitar la nomenclatura vamos a considerar que la variable temporal viene dada en años, aunque podría generalizarse a cualquier otra periodicidad. Por tanto, todos los elementos que aparecerán serán anuales.

Supondremos que la cuantía de la renta y del seguro es variable según el grado de dependencia que alcance el asegurado, y consideraremos tres posibles niveles de cuantía:

- Cuando el asegurado pase a dependiente moderado cobrará, periódicamente o de una sola vez,  $c_1$ .
- Cuando el asegurado pase a dependiente severo cobrará, periódicamente o de una sola vez,  $c_2$ .
- Cuando el asegurado pase a gran dependiente cobrará, periódicamente o de una sola vez,  $c_3$ .

Cuanto mayor sea el grado de dependencia padecido por el asegurado mayores prestaciones por dependencia precisará y el importe de la participación en el coste de las mismas aumentará, siempre dependiendo de su capacidad económica. Ello nos lleva a considerar que  $c_1 < c_2 < c_3$ . Para simplificar el análisis consideraremos que las cuantías son constantes, aunque se podría generalizar para cualquier tipo de variabilidad.

Para poder obtener el importe de la prima única a pagar por el asegurado, tanto en la renta como en el seguro, un paso previo consiste en cuantificar las probabilidades de transición entre los estados, probabilidades que aparecen contempladas en la siguiente

matriz de transición, en la que se detallan las probabilidades de transición entre las edades  $x$  y  $x+1$ :

	$a$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$m$
$a$	$p_x^{aa}$	$p_x^{ad_1}$	$p_x^{ad_2}$	$p_x^{ad_3}$	$p_x^{am}$
$d_1$	0	$p_x^{d_1d_1}$	$p_x^{d_1d_2}$	$p_x^{d_1d_3}$	$p_x^{d_1m}$
$d_2$	0	0	$p_x^{d_2d_2}$	$p_x^{d_2d_3}$	$p_x^{d_2m}$
$d_3$	0	0	0	$p_x^{d_3d_3}$	$p_x^{d_3m}$
$m$	0	0	0	0	1

Tabla I. Matriz de transición  $M_x$

donde  $p_x^{ij}$  es la probabilidad de que una persona de edad  $x$  pase del estado  $i$  al estado  $j$  en el transcurso de un año, siendo  $i, j =$  autónomo, dependiente moderado, dependiente severo, gran dependiente o muerto.

Para cuantificar las probabilidades de transición vamos a utilizar el método actuarial propuesto por Pittacco, E.(1995) que permite obtener dichas probabilidades a partir de la ley de supervivencia de la población general,  $l_x$ , y de las tasas de prevalencia,  $\lambda_x$ . Una vez obtenidas las probabilidades de transición entre los distintos estados, aplicando el modelo Markoviano de transiciones y bajo la hipótesis de estacionariedad, vamos a calcular las probabilidades de transición temporales, que son las que en realidad necesitamos para calcular las primas, aplicando la ecuación de Chapman-Kolmogorov.

## 2.1. RENTA DE DEPENDENCIA PARA UN AUTÓNOMO

Como ya se ha comentado, una renta consiste en percibir la prestación de dependencia de forma periódica, desde que el asegurado se hace

dependiente hasta su fallecimiento. El producto que aquí presentamos sólo puede ser contratado por una persona autónoma de edad  $x$ , es decir, que no está en situación de dependencia. La cuantía de la renta se cobrará al final de cada año, a partir del año en que el asegurado se convierta en dependiente y hasta su fallecimiento, y su importe dependerá del grado de dependencia que el asegurado vaya alcanzando, de modo que percibirá anualmente la cuantía  $c_1$  mientras sea dependiente moderado,  $c_2$  mientras sea dependiente severo y  $c_3$  mientras sea gran dependiente.

La prima única,  $\Pi$ , que deberá pagar el asegurado para contratar esta renta de dependencia, no es más que el valor actual actuarial de las prestaciones periódicas que percibirá el asegurado de edad  $x$  si se convierte en dependiente. En su formulación intervienen las probabilidades de transición de autónomo a dependiente, ponderadas por las diferentes cuantías que puede percibir el asegurado en función del grado de dependencia que vaya alcanzando.

El importe de la prima única,  $\Pi$ , se calcula del siguiente modo:

$$\Pi = \sum_{t=1}^{\omega-x} (c_1 \cdot {}_t p_x^{ad_1} + c_2 \cdot {}_t p_x^{ad_2} + c_3 \cdot {}_t p_x^{ad_3}) \cdot v^t$$

También resulta interesante determinar la provisión matemática de la renta de dependencia, esto es, la cuantía que anualmente tendrá que provisionar la compañía de seguros mientras la operación esté vigente para garantizar la solvencia dinámica de la operación.

La provisión matemática no es más que es el valor actual actuarial de las prestaciones futuras a percibir por el asegurado, de manera que su importe, en el momento en que la persona asegurada sobrevive con edad  $y > x$ , depende del estado en el que se encuentre en esa edad. Vamos a simbolizarla por  $R_y^i$ , siendo  $i$  el estado en que se encuentra el asegurado a la edad  $y$ . De modo que si a la edad  $y$  el asegurado es:

- Autónomo, la expresión que nos permitirá determinar la provisión matemática,  $R_y^a$ , será:

$$R_y^a = a_y^{ad} = \sum_{t=1}^{\omega-y} (c_1 \cdot {}_t p_y^{ad_1} + c_2 \cdot {}_t p_y^{ad_2} + c_3 \cdot {}_t p_y^{ad_3}) \cdot v^t$$

- Dependiente moderado, la expresión que nos permitirá determinar la provisión matemática,  $R_y^{d_1}$ , será:

$$R_y^{d_1} = \sum_{t=1}^{\omega-y} (c_1 \cdot {}_t p_y^{d_1 d_1} + c_2 \cdot {}_t p_y^{d_1 d_2} + c_3 \cdot {}_t p_y^{d_1 d_3}) \cdot v^t$$

- Dependiente severo, la expresión que nos permitirá determinar la provisión matemática,  $R_y^{d_2}$ , será:

$$R_y^{d_2} = \sum_{t=1}^{\omega-y} (c_2 \cdot {}_t p_y^{d_2 d_2} + c_3 \cdot {}_t p_y^{d_2 d_3}) \cdot v^t$$

- Gran dependiente, la expresión que nos permitirá determinar la provisión matemática,  $R_y^{d_3}$ , será:

$$R_y^{d_3} = c_3 \cdot \sum_{t=1}^{\omega-y} v^t \cdot {}_t p_y^{d_3 d_3}$$

## 2.2. SEGURO DE DEPENDENCIA PARA UN AUTÓNOMO

El producto que presentamos en este apartado, al igual que en el caso de la renta, sólo puede ser contratado por una persona autónoma de edad  $x$  y la cuantía se pagará al final del año en que el asegurado se hace dependiente o agrava su situación de dependencia. Su importe dependerá del grado de dependencia, de tal forma que si el asegurado autónomo alcanza el grado de dependencia moderada cobrará una cuantía  $c_1$ , si alcanza el grado de dependencia severa cobrará una

cuantía  $c_2$ , y por último, si alcanza el grado de gran dependencia cobrará una cuantía  $c_3$ ; verificándose que  $c_3 > c_2 > c_1$ , esto es, cobrará una cuantía mayor cuanto mayor sea el grado de dependencia alcanzado. Estas cuantías las percibirá de una sola vez si pasa de autónomo a dependiente, o bien, de forma escalonada si el asegurado agrava su situación de dependencia. Esto es:

$$\Delta_1 = c_2 - c_1$$
$$\Delta_2 = c_3 - c_2$$

donde:

- $\Delta_1$  es la cuantía adicional que va a cobrar el asegurado que, siendo ya dependiente moderado y habiendo cobrado en su momento la cuantía  $c_1$ , se convierte en dependiente severo.
- $\Delta_2$  es la cuantía adicional que va a cobrar el asegurado que, siendo ya dependiente severo, se convierte en gran dependiente.
- $\Delta_1 + \Delta_2$  es la cuantía adicional que percibirá el asegurado si pasa de dependiente moderado a gran dependiente.

La prima única,  $\Pi$ , que deberá pagar el asegurado para contratar este seguro de dependencia es el valor actual actuarial de las prestaciones que percibirá si se hace dependiente. En este caso, la prima se obtiene como resultado de la suma de tres seguros:

- $A_x^{ad_1}$ : Seguro de cuantía  $c_1$  que se paga a la persona que ha contratado el seguro cuando se convierte en dependiente moderado.
- $A_x^{ad_2}$ : Seguro de cuantía variable, que consiste en pagar la cuantía  $c_2$  cuando la persona que ha contratado el seguro, que era autónoma, pasa a ser directamente dependiente severo, o bien, pagar  $\Delta_1$  cuando la persona que ha contratado el seguro, que en un determinado momento se había convertido en dependiente moderado, agrava su

situación de dependencia y pasa a ser considerada dependiente severo.

- $A_x^{ad_3}$ : Seguro de cuantía también variable, que consiste en pagar la cuantía  $c_3$  cuando la persona que ha contratado el seguro pasa directamente a gran dependiente, o bien, pagar  $\Delta_2$  cuando la persona que ha contratado el seguro, que en un determinado momento se había convertido en dependiente severo, agrava su situación de dependencia y pasa a ser considerada gran dependiente, o bien, pagar  $\Delta_1 + \Delta_2$  cuando la persona que ha contratado el seguro, que en un determinado momento se había convertido en dependiente moderado, agrava su situación de dependencia y pasa a ser considerada gran dependiente.

El importe de la prima pura única,  $\Pi$ , es en este caso:

$$\Pi = A_x^{ad_1} + A_x^{ad_2} + A_x^{ad_3}$$

donde:

$$A_x^{ad_1} = c_1 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_x^{aa} \cdot p_{x+t}^{ad_1}$$

$$A_x^{ad_2} = c_2 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_x^{aa} \cdot p_{x+t}^{ad_2} + \Delta_1 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_x^{ad_1} \cdot p_{x+t}^{d_1 d_2}$$

$$A_x^{ad_3} = c_3 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_x^{aa} \cdot p_{x+t}^{ad_3} + \Delta_2 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_x^{ad_2} \cdot p_{x+t}^{d_2 d_3} + (\Delta_1 + \Delta_2) \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_x^{ad_1} \cdot p_{x+t}^{d_1 d_3}$$

Al igual que en la renta de dependencia, la provisión matemática correspondiente a este seguro en el momento en que la persona asegurada sobrevive con edad  $y > x$ , depende del estado en el que se

encuentre en esa edad. Vamos a simbolizarla de nuevo por  $R_y^i$ , siendo  $i$  el estado en que se encuentra el asegurado a la edad  $y$ . En este caso no tiene sentido calcularla, a diferencia de lo que sucedía en la renta de dependencia, cuando el asegurado a la edad  $y$  es gran dependiente, ya que una vez alcanzado este grado de dependencia, se satisface la prestación correspondiente y la operación se extingue. De modo que si a la edad  $y$  el asegurado es:

- Autónomo, la expresión que nos permitirá determinar la provisión matemática,  $R_y^a$ , será:

$$R_y^a = A_y^{ad_1} + A_y^{ad_2} + A_y^{ad_3}$$

- Dependiente moderado, la expresión que nos permitirá determinar la provisión matemática,  $R_y^{d_1}$ , será:

$$R_y^{d_1} = \Delta_1 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-y-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_y^{d_1 d_1} \cdot p_{y+t}^{d_1 d_2} + \Delta_2 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-y-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_y^{d_1 d_2} \cdot p_{y+t}^{d_2 d_3} + (\Delta_1 + \Delta_2) \cdot \sum_{t=0}^{\omega-y-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_y^{d_1 d_1} \cdot p_{y+t}^{d_1 d_3}$$

- Dependiente severo, la expresión que nos permitirá determinar la provisión matemática,  $R_y^{d_2}$ , será:

$$R_y^{d_2} = \Delta_2 \cdot \sum_{t=0}^{\omega-y-1} v^{t+1} \cdot {}_t p_y^{d_2 d_2} \cdot p_{y+t}^{d_2 d_3}$$

### 3. APLICACIÓN NUMÉRICA

Para poder cuantificar la prima única y la provisión matemática de la renta y del seguro de dependencia estudiados en el apartado anterior, vamos a utilizar como ley de supervivencia de la población general la dada por las tablas GKM-95, y las tasas de prevalencia las hemos

estimado a partir de una primera aproximación basada en los datos de la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (1999), llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística.

La tasa de prevalencia  $\lambda_x^{d_s}$  se define como la proporción de personas dependientes de grado  $d_s$  y de edad  $x$ , respecto a la población general de esa edad. Para estimar las tasas de prevalencia, para cada edad y grado de dependencia, hemos realizado un ajuste paramétrico basado en el método de los mínimos cuadrados sobre una función de ajuste Gompertz-Makeham GM (0,3):

$$\lambda_x^{d_s} = e^{a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2}$$

siendo,

$$s = 1, 2, 3 \quad ; \quad y = (x - \alpha) / \beta, \quad \text{para } \alpha = 52,5 \quad \text{y} \quad \beta = 46,5.$$

Los resultados del ajuste paramétrico son los que mostramos en la siguiente tabla:

	s=1	s=2	s=3
$a_0$	-4,033230691	-4,451945122	-5,312564466
$a_1$	3,690451386	5,514517028	6,373947115
$a_2$	-2,057027026	-3,094155265	-1,481258615

Tabla II. Resultados del ajuste paramétrico

Para calcular las 14 probabilidades que aparecen en la matriz de transición (Tabla I), además de las tasas de prevalencia, es necesario hacer hipótesis sobre la mortalidad de cada uno de los subcolectivos: autónomos, dependientes moderados, dependientes severos y gran dependientes, y sobre las transiciones entre los diferentes grados de dependencia.

La primera hipótesis que efectuamos es determinar las probabilidades de fallecimiento para los distintos colectivos de dependientes



recargando la probabilidad de fallecimiento,  $q_x$ , de la población general:

$$\begin{aligned} p_x^{d_1m} &= (1 + \delta^{d_1m}) \cdot q_x \\ p_x^{d_2m} &= (1 + \delta^{d_2m}) \cdot q_x \\ p_x^{d_3m} &= (1 + \delta^{d_3m}) \cdot q_x \end{aligned}$$

siendo  $\delta^{d_1m}$ ,  $\delta^{d_2m}$  y  $\delta^{d_3m}$  los recargos por fallecimiento asociados a los grados de dependencia  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  respectivamente, que vamos a considerar independientes de la edad, para simplificar el análisis.

La segunda hipótesis hace referencia a las probabilidades de transición entre los grados de dependencia, y vamos a obtenerlas recargando las probabilidades de transición que tienen los autónomos para pasar a cualquiera de los tres grados de dependencia:

$$\begin{aligned} p_x^{d_1d_2} &= (1 + \delta^{d_1d_2}) \cdot p_x^{ad_2} \\ p_x^{d_1d_3} &= (1 + \delta^{d_1d_3}) \cdot p_x^{ad_3} \\ p_x^{d_2d_3} &= (1 + \delta^{d_2d_3}) \cdot p_x^{ad_3} \end{aligned}$$

donde  $\delta^{d_1d_2}$ ,  $\delta^{d_1d_3}$  y  $\delta^{d_2d_3}$  son los recargos asociados a las distintas transiciones entre los grados de dependencia, que también vamos a considerar independientes de la edad.

Vamos a cuantificar la prima pura única correspondiente a la renta y al seguro de dependencia asumiendo cuatro hipótesis respecto al valor de los recargos de fallecimiento y de transición entre los grados de dependencia, con las siguientes características comunes:

- Edad del asegurado:  $x = 50$  años.
- Tipo de interés técnico:  $i = 0,03$ .
- $c_1 = 1.000$  €,  $c_2 = 2.000$  € y  $c_3 = 3.000$  €.

### **Hipótesis 1**

- Recargos de fallecimiento asociados a los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1^m} = 0 ; \delta^{d_2^m} = 0 ; \delta^{d_3^m} = 0 .$$

- Recargos asociados a las distintas transiciones entre los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1 d_2} = 0 ; \delta^{d_1 d_3} = 0 ; \delta^{d_2 d_3} = 0 .$$

Con esta hipótesis asumimos que las probabilidades de fallecimiento de los dependientes siguen la probabilidad de fallecimiento de la población general,  $q_x$ , y que las probabilidades de transición entre los grados de dependencia coinciden con las probabilidades de transición que tienen los autónomos para pasar a cualquiera de los tres grados de dependencia.

### **Hipótesis 2**

- Recargos de fallecimiento asociados a los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1^m} = 0,1 ; \delta^{d_2^m} = 0,15 ; \delta^{d_3^m} = 0,2 .$$

- Recargos asociados a las distintas transiciones entre los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1 d_2} = 0 ; \delta^{d_1 d_3} = 0 ; \delta^{d_2 d_3} = 0 .$$

A diferencia del caso anterior, las probabilidades de fallecimiento de los dependientes están recargadas respecto a la probabilidad de fallecimiento de la población general,  $q_x$ , siendo el valor del recargo directamente proporcional al grado de dependencia.

### **Hipótesis 3**

- Recargos de fallecimiento asociados a los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1^m} = 0 ; \delta^{d_2^m} = 0 ; \delta^{d_3^m} = 0 .$$

- Recargos asociados a las distintas transiciones entre los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1 d_2} = 0,05 ; \delta^{d_1 d_3} = 0,05 ; \delta^{d_2 d_3} = 0,05 .$$

En este caso, las probabilidades de fallecimiento de los dependientes siguen la probabilidad de fallecimiento de la población general,  $q_x$ , igual que en la Hipótesis 1, pero hemos recargado las probabilidades de transición entre los grados de dependencia respecto a las probabilidades de transición que tienen los autónomos para pasar a cualquiera de los tres grados de dependencia.

### **Hipótesis 4**

- Recargos de fallecimiento asociados a los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1^m} = 0,1 ; \delta^{d_2^m} = 0,15 ; \delta^{d_3^m} = 0,2 .$$

- Recargos asociados a las distintas transiciones entre los grados de dependencia:

$$\delta^{d_1 d_2} = 0,05 ; \delta^{d_1 d_3} = 0,05 ; \delta^{d_2 d_3} = 0,05 .$$

Por último, en esta hipótesis hemos recargado tanto las probabilidades de fallecimiento de los dependientes como las probabilidades de transición entre los grados de dependencia.

Los resultados que hemos obtenido en cuanto al importe de la prima pura única a pagar por el asegurado de edad  $x=50$  años, que contrata, o bien, una renta de dependencia, o bien, un seguro de dependencia,

como los descritos en el apartado anterior, son los que aparecen en la siguiente tabla:

Hipótesis	Renta de dependencia	Seguro de dependencia
1	$\Pi = 2.890,66$	$\Pi = A_{50}^{ad_1} + A_{50}^{ad_2} + A_{50}^{ad_3} = 311,72$
2	$\Pi = 2.906,36$	$\Pi = A_{50}^{ad_1} + A_{50}^{ad_2} + A_{50}^{ad_3} = 343,97$
3	$\Pi = 2.889,57$	$\Pi = A_{50}^{ad_1} + A_{50}^{ad_2} + A_{50}^{ad_3} = 311,65$
4	$\Pi = 2.905,33$	$\Pi = A_{50}^{ad_1} + A_{50}^{ad_2} + A_{50}^{ad_3} = 343,89$

Tabla III. Prima única para la renta y el seguro de dependencia

Las variaciones que se producen en las primas de las dos operaciones propuestas al variar los recargos  $\delta^{d_1m}, \delta^{d_2m}, \delta^{d_3m}$  y  $\delta^{d_1d_2}, \delta^{d_1d_3}, \delta^{d_2d_3}$  se deben a los cambios que estas variaciones producen en las probabilidades de la matriz de transición.

Tanto en la renta como en el seguro de dependencia, un incremento en los recargos de fallecimiento de los dependientes,  $\delta^{d_1m}, \delta^{d_2m}, \delta^{d_3m}$ , hace aumentar las probabilidades de transición de autónomo a dependiente encareciendo como consecuencia la operación, es decir, la prima a pagar por el asegurado aumenta. Sin embargo, si aumentamos los recargos asociados a las distintas transiciones entre los grados de dependencia,  $\delta^{d_1d_2}, \delta^{d_1d_3}, \delta^{d_2d_3}$ , el importe de la prima en las dos operaciones disminuye ligeramente debido a la disminución que se produce en la probabilidad  $P_{50}^{ad_3}$ .

A continuación vamos a mostrar la evolución de la provisión matemática para la renta y el seguro de dependencia estudiados, bajo el supuesto de la Hipótesis 4:  $\delta^{d_1m} = 0,1$ ;  $\delta^{d_2m} = 0,15$ ;  $\delta^{d_3m} = 0,2$  y  $\delta^{d_1d_2} = 0,05$ ;  $\delta^{d_1d_3} = 0,05$ ;  $\delta^{d_2d_3} = 0,05$ .

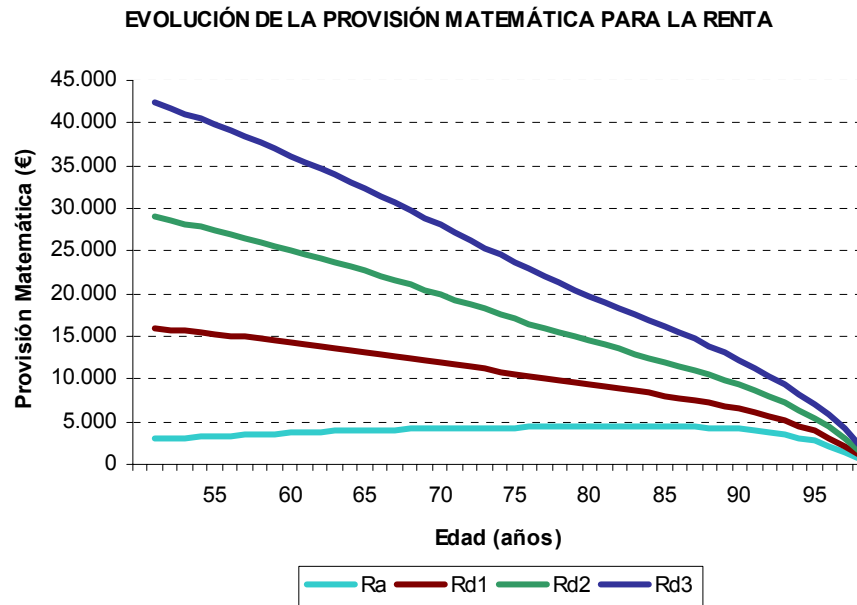


Gráfico 1. Evolución de la provisión matemática para la renta de dependencia

En el gráfico 1, en el que mostramos la evolución de la provisión matemática para el caso de la renta de dependencia, cabe diferenciar cuatro casos que se corresponden con los cuatro posibles estados en los que puede hallar el asegurado a la edad  $y$ . Como puede observarse la provisión matemática, para el caso que el asegurado sea ya dependiente a la edad  $y$ , es decreciente con la edad y el valor de la provisión matemática es mayor cuanto mayor es el grado de dependencia alcanzado. Por el contrario, si el asegurado permanece autónomo a la edad  $y$  la provisión matemática es creciente con la edad hasta alcanzar un máximo, que bajo esta hipótesis se obtiene a la edad de 84 años, para luego decrecer.

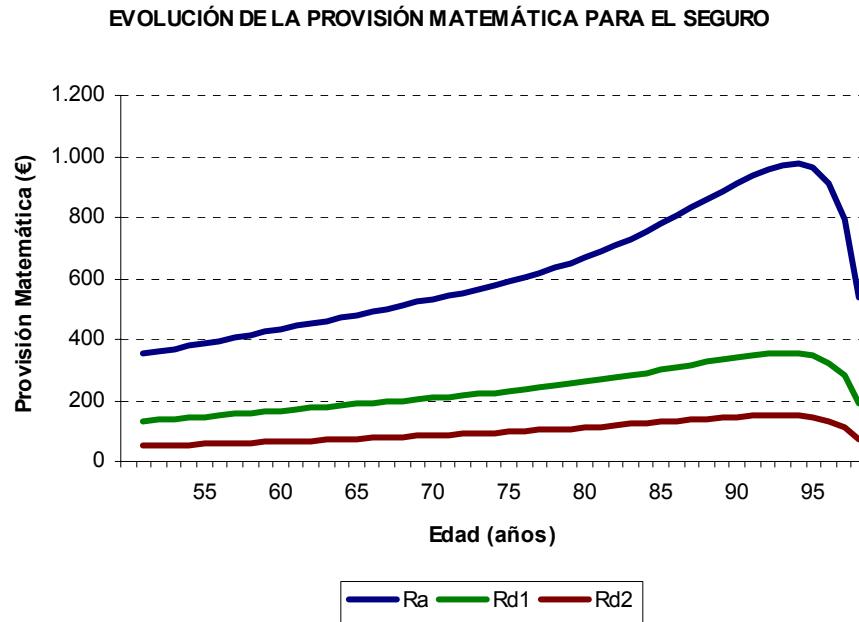


Gráfico 2. Evolución de la provisión matemática para el seguro de dependencia

En el gráfico 2, en el que mostramos la evolución de la provisión matemática para el caso del seguro de dependencia, debemos diferenciar sólo tres casos, que se corresponden con los tres posibles estados en los que tiene sentido calcular la provisión matemática. En los tres casos, la provisión matemática es creciente hasta llegar al máximo, que para la hipótesis que hemos asumido, se alcanza a la edad de 94 años si el asegurado es autónomo y a los 93 años si el asegurado es dependiente moderado o dependiente severo. Una vez llegado al máximo la provisión matemática decrece en los tres casos, y su valor es menor cuanto mayor es el grado de dependencia alcanzado por el asegurado.

Cabe destacar que la evolución de la provisión matemática es independiente de la hipótesis que se asuma respecto a los recargos de fallecimiento  $\delta^{d_1m}, \delta^{d_2m}, \delta^{d_3m}$  y a los recargos de transiciones entre los grados de dependencia  $\delta^{d_1d_2}, \delta^{d_1d_3}, \delta^{d_2d_3}$ ; lo único que cambia son los valores de los máximos alcanzados por las distintas provisiones. Por ejemplo, en el caso del seguro de dependencia y con la hipótesis

3, el máximo se alcanza a la edad de 91 si el asegurado es dependiente moderado o severo, y a la edad de 92 años si es autónomo. En el caso de la renta de dependencia, bajo la misma hipótesis, el máximo para la provisión matemática de autónomo se alcanza a los 89 años.

#### **4. CONCLUSIONES**

La Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las Personas en Situación de Dependencia permitirá desarrollar en España, al igual que en otros países de nuestro entorno, un modelo de atención a la dependencia de carácter mixto. En este sentido hemos propuesto dos posibles productos de dependencia, una renta y un seguro privados de dependencia, que podrían comercializar el sector privado y que permitirían complementar y ampliar las prestaciones públicas de dependencia.

El modelo que hemos utilizado para desarrollar los dos productos propuestos, contempla los tres grados de dependencia que se prevén en la Ley, y basándonos en un proceso de Markov estacionario, hemos podido cuantificar las probabilidades de transición anuales entre los distintos estados, a partir de la ley de supervivencia de la población general y de las tasas de prevalencia, que hemos estimado a partir de una primera aproximación de los datos de la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (1999) llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística (INE). Además es necesario incorporar hipótesis adicionales en cuanto a los valores de los recargos por fallecimiento asociados a los grados de dependencia,  $\delta^{d_1m}$ ,  $\delta^{d_2m}$ ,  $\delta^{d_3m}$ , y respecto a los recargos asociados a las distintas transiciones entre grados de dependencia,  $\delta^{d_1d_2}$ ,  $\delta^{d_1d_3}$ ,  $\delta^{d_2d_3}$ .

Debido a la falta de información, hemos considerado a los recargos anteriores independientes de la edad y hemos asumido en la aplicación numérica cuatro hipótesis respecto a posibles valores que éstos pueden tomar. El siguiente paso sería considerar no sólo los recargos dependientes de la edad del asegurado, sino también, de otros factores

como pueden ser el sexo, y en el caso de los recargos por fallecimiento, el tipo de enfermedad o causa que ha originado la dependencia.

## **BIBLIOGRAFÍA**

**Alegre, A. [1990]:** *Valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez*. Publicacions Universitat de Barcelona. Barcelona.

**Alegre, A.; Ayuso, M; Guillen,; Monteverde,M ; Pociello [2005]:** Tasa de dependencia de la población española no institucionalizada y criterios de valoración de la severidad. *Revista Española de Salud Pública*. Vol 79 n.3 pp. 351-363.

**Alegre, A.; Pociello, E.; Pons, M.A.; Sarrasí, F. J.; Varea, J.; Vicente, A. [2002]:** Actuarial valuation of long term care annuities. *6<sup>th</sup> Insurance, Mathematics and Economics Congress*. Lisbon.

**Alegre, A.; E.; Pons, M.A.; Sarrasí, F. J.; Varea, J.; Pociello, E. [2004]:** Valoración de rentas de dependencia con tres estados. *VI Congreso Hispano Italiano de Matemática Financiera y Actuarial*. Cuenca, 2004.

**Alegre, A.; E.; Pons, M.A.; Sarrasí, F. J.; Varea, J.; Pociello, E. [2007]:** Modelo discreto de transiciones entre estados de dependencia. *Anales del IAE, Tercera época. Número 10*. pag 91-113.

**Amsler, M.H. [1968] :** Les chaînes de Markov des assurances vie, invalidité et maladie. *Transactions of the 18th International Congress of Actuaries*, Mónaco, vol. 5, pp. 731-746.

**Forfar, D.O.; McCutcheon, M.A.; Wilkie, A.D. [1988]:** On graduation by mathematical formula. *Journal of the institute of actuaries*, vol. 115, pp. 1-149.

**Haberman, S.; Pitacco, E. [1999]:** *Actuarial models for disability insurance*. Chapman and Hall. Londres.



**Hoem, J.M. [1969]:** Markov chain models in life insurance. *Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematiker IX*, núm. 2, pp. 91-107.

**ICEA [2005]:** *El seguro de dependencia. Guía para el desarrollo de productos de larga dependencia en España.*

**IMSERSO [2005]:** *Libro Blanco sobre la atención a las personas en situación de dependencia en España.*

**INE [2000]:** Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de salud de 1999. Madrid.

**INE [2001]:** Proyecciones de población. Madrid.

**Pitacco, E. [1995].** Modelli attuariali per le assicurazioni sulla salute. *CERAP*.

**Pociello, E.; Varea, J. [2004]:** El seguro de dependencia. Una visión general. *Cuadernos de la fundación MAPFRE*, núm. 81. Madrid.

**Vicente,A; Pociello, E; Varea, J [2004]:** Cobertura de la dependencia: una comparación internacional. *Actuarios n° 22* dossier pp .1-23

**Wolthuis, H. [1994]:** Life insurance Mathematics (The Markovian model). *CAIRE Education* series n. 2. University of Amsterdam. Bruselas.

