MODALIDADES ALTERNATIVAS DE REASEGURO BASADAS EN LA ORDENACIÓN DE RIESGOS

Antonio Alegre Escolano y Fº Javier Sarrasí Vizcarra

Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial

Universidad de Barcelona

Resumen

En este trabajo se estudian tres modalidades de reaseguro basadas en el número de siniestros:

- *Reaseguro de los siniestros más grandes.* Modalidad por la cual el reasegurador se hace cargo de los siniestros más grandes.

- *Reaseguro de exceso del número de siniestros.* En este caso la compañía cedente retiene los siniestros más pequeños, cediendo el resto al reaseguro.

- *Reaseguro de exceso del número de siniestros, hasta un tope de siniestralidad.* En esta modalidad de reaseguro, la compañía cedente retiene los siniestros más pequeños pero condicionados a que su cuantía no exceda un determinado

pleno fijado por ella. De esta manera se consigue limitar la pérdida de la compañía cedente hasta un máximo conocido.

Esta última modalidad de reaseguro puede ser una buena alternativa al reaseguro Stop-loss ya que al igual que éste, elimina la probabilidad de ruina de la cedente.

El estudio de estas modalidades de reaseguro pasa por tratar previamente la problemática actuarial de la ordenación de riesgos.

Palabras clave: métodos de recurrencia, número de siniestros, los siniestros más grandes, distribución de los siniestros ordenados.

1. Introducción

En las modalidades de reaseguro que podríamos denominar clásicas, la distribución del riesgo se basa **en el capital asegurado**, es el caso de las modalidades de reaseguro proporcionales, o bien, en la **siniestralidad** de la compañía cedente cuando ésta supera un determinado límite previamente fijado por ella, es el caso de las modalidades de reaseguro no proporcionales.

En este trabajo presentamos formas alternativas de reaseguro, donde la distribución del riesgo se basa en el **número de siniestros** retenidos o cedidos. Las modalidades de reaseguro que estudiaremos son las siguientes:

- *Reaseguro de los siniestros más grandes.* En esta modalidad de reaseguro, el reasegurador se hace cargo de los "k" siniestros más grandes, independientemente de su cuantía.

- *Reaseguro de exceso del número de siniestros.* Modalidad de reaseguro por la cual la compañía cedente retiene los "k" siniestros más pequeños independientemente de su cuantía, cediendo el resto al reaseguro.

- *Reaseguro de exceso del número de siniestros, hasta un tope de siniestralidad.* Este contrato de reaseguro es una combinación del reaseguro excess-loss y el reaseguro de exceso del número de siniestros. Por tanto, en esta modalidad de reaseguro, la compañía cedente retiene los "k" siniestros más pequeños pero condicionados a que su cuantía no exceda un determinado pleno fijado por ella. De esta manera se consigue limitar la pérdida de la compañía cedente hasta un máximo conocido.

  Esta modalidad elimina el inconveniente que tiene el reaseguro excess-loss, ya que limita el número de siniestros que la compañía retiene, y por otro lado elimina también el inconveniente del reaseguro de exceso de número de siniestros, ya que estamos fijando un tope máximo de pérdida por siniestro.

Para poder abordar el estudio de éstas modalidades de reaseguro, tendremos que tratar previamente la problemática actuarial de la ordenación de riesgos.

2. Ordenación de riesgos

Nuestro objetivo es obtener la función de distribución de probabilidad del coste de los siniestros, cuando éstos están ordenados por el importe de su cuantía. Para ello partiremos del siguiente proceso de riesgo:

$$\left(N, X_1, X_2, \ldots, X_N\right)$$

donde:

$X_r \quad _{r=1,\ldots,N}$: es la variable aleatoria coste del r-ésimo siniestro. Estas variables aleatorias son entre si independientes y equidistribuidas.

N : es la variable número de siniestros.

Nosotros desarrollaremos el estudio de este apartado bajo los siguientes supuestos:

1. N es una variable cierta de cuantía *n*.
2. N es una variable aleatoria.

2.1. *N* es una variable cierta de cuantía *n*.

Bajo este supuesto partimos del siguiente proceso de riesgo:

$$\left(n, X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$$

donde $X_r \quad {}_{r=1,K,n}$: es la variable aleatoria coste del r-ésimo siniestro. Estas variables aleatorias son entre si independientes y equidistribuidas, con función de distribución del coste del siniestro conocida:

$$P\left[X_r \leq t\right] = F(t) \qquad {}_{r=1,2,\ldots,n}$$

Si ordenamos las variables aleatorias X_r en función de su cuantía, entonces podemos escribir:

$$X_{n:1} \leq X_{n:2} \leq \ldots \leq X_{n:i} \leq \ldots \leq X_{n:n}$$

siendo $X_{n:i}$ la variable aleatoria coste del i-ésimo siniestro más pequeño de los *n* siniestros dados.

Nuestro objetivo es obtener la función de distribución de las variables aleatorias ordenadas $P\left[X_{n:i} \leq t\right]$ a partir de la función de distribución $P\left[X_r \leq t\right] = F(t)$.

Para ello, fijado un valor de "t", definiremos unas variables $Z_r \quad {}_{r=1,2,\ldots,n}$ dicotómicas tales que:

$$Z_r = \begin{cases} 1 \ si \ X_r \leq t \ con \ P[Z_r = 1] = P[X_r \leq t] = p \\ 0 \ si \ X_r > t \ con \ P[Z_r = 0] = P[X_r > t] = 1 - p \end{cases}$$

por tanto $Z_r \sim B(1, p)$.

Al ser independientes las variables aleatorias X_r , también lo serán las variables aleatorias dicotómicas Z_r , en consecuencia:

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k \sim B(n, p)$$

A partir de aquí podremos calcular la probabilidad de que el coste del siniestro i-ésimo más pequeño sea menor que *t*, como la probabilidad de que haya como mínimo "i" siniestros de cuantías menores o iguales que *t* de los *n* siniestros dados:

$$P[X_{n:i} \leq t] = P\left[\sum_{k=1}^{n} Z_k \geq i\right] = \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Relacionando la distribución binomial con la distribución beta:

$$\beta\,(a, b; x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot \int_0^x y^{a-1} \cdot (1-y)^{b-1} \cdot dy$$

tenemos:

$$B(n,\, p;\, i) = \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} = \beta\,(i,\, n-i+1;\, p)$$

esta relación puede encontrarse en Heilmann, W-R (1988, p.52).

entonces:

$$P\left[X_{n:i} \le t\right] = \beta\,(i,\, n-i+1;\, p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\cdot\Gamma(n-i+1)} \cdot \int_0^p y^{i-1} \cdot (1-y)^{n-i} \cdot dy =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\cdot(n-1)!} \cdot \int_0^p y^{i-1} \cdot (1-y)^{n-i} \cdot dy = n \cdot \binom{n-1}{i-1} \cdot \int_0^{F(t)} y^{i-1} \cdot (1-y)^{n-i} \cdot dy$$

En particular si <u>$i = 1$</u>:

$$P\left[X_{n:1} \le t\right] = n \cdot \binom{n-1}{0} \cdot \int_0^{F(t)} (1-y)^{n-1} \cdot dy = 1 - (1 - F(t))^n$$

y si <u>$i = n$</u>:

$$P\left[X_{n:n} \le t\right] = n \cdot \binom{n-1}{n-1} \cdot \int_0^{F(t)} y^{n-1} \cdot dy = F(t)^n$$

Podemos observar que la variable aleatoria coste del siniestro deja de ser equidistribuida cuando consideramos el orden en cuanto a la cuantía del mismo.

2.2. N es una variable aleatoria.

En este caso el proceso de riesgo es:

$$\left(N, X_1, X_2, \ldots, X_N\right)$$

donde:

$X_r \quad {}_{r=1,\mathrm{K},N}$: es la variable aleatoria coste del r-ésimo siniestro, con función de distribución:

$$P\left[X_r \leq t\right] = F(t) \qquad {}_{r=1,2,\ldots,N}$$

N : es la variable aleatoria número de siniestros. Supondremos que conocemos la función de distribución de N y por tanto su función generatriz de momentos:

$$\varphi_N(\tau) = E\left[e^{\tau \cdot N}\right]$$

Al igual que en el caso anterior, ordenamos las variables aleatorias X_r en función de su cuantía:

$$X_{N:1} \leq X_{N:2} \leq \ldots \leq X_{N:i} \leq \ldots \leq X_{N:N}$$

A partir de aquí, nos plantearemos un doble objetivo:

1. Calcular $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$ $j = 0,1,\ldots,N-1$ donde $X_{N:N-j}$ es la variable aleatoria cuantía del siniestro (j + 1)-ésimo más grande, de esta manera, si j = 0, obtendremos la función de distribución de $X_{N:N}$ variable aleatoria cuantía del siniestro colocada en último lugar (siniestro más grande), si j = 1 obtendremos la función de distribución de $X_{N:N-1}$ variable aleatoria cuantía del siniestro colocada en penúltimo lugar (el segundo más grande), y así sucesivamente.

   Por tanto $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$ nos da la función de distribución de las distintas variables aleatorias ordenadas de menor a mayor comenzando por el final. Estamos considerando la *ordenación por detrás*.

2. Calcular $P\left[X_{N:j} \leq t\right]$ $j = 1,\ldots,N$ donde $X_{N:j}$ es la variable aleatoria cuantía del siniestro situado en el j-ésimo lugar, en este caso, si j = 1, obtendremos la función de distribución de $X_{N:1}$ variable aleatoria cuantía del siniestro colocada en primer lugar (siniestro más pequeño), si j = 2, obtendremos la función de distribución de $X_{N:2}$ variable aleatoria cuantía del siniestro colocada en segundo lugar, etc.

   En este caso $P\left[X_{N:j} \leq t\right]$ nos da la función de distribución de las distintas variables aleatorias ordenadas de menor a mayor, teniendo en cuenta la *ordenación por delante.*

2.2.1. Obtención de la función de distribución del coste de siniestro teniendo en cuenta la ordenación por detrás.

Siguiendo a Heilmann, W-R. (1988, p.234 y ss.), obtendremos la función de distribución del coste del siniestro a partir de las sucesivas derivadas de la transformada $g_N(s)$ $(s > 0)$ de la función generatriz de momentos de N, donde:

$$g_N(s) = E[s^N] = E[e^{N \cdot \ln s}] = \varphi_N(\ln s) = \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] \cdot s^n =$$

$$= P[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n] \cdot s^n$$

siendo la derivada "j + 1":

$$g_N^{j+1)}(s) = \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot n \cdot (n-1) \ldots (n-j) \cdot s^{n-(j+1)}$$

Aplicando el teorema de probabilidad total a la función de distribución:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] \cdot P\left[X_{n:n-j} \leq t\right]$$

al ser $\forall j \geq n \quad X_{n:n-j} = 0$ entonces $P\left[X_{n:n-j} \leq t\right] = 1$, por tanto:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot P\left[X_{n:n-j} \leq t\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} P[N=n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N=n] \cdot n \cdot \binom{n-1}{n-(j+1)} \cdot \int_0^{F(t)} x^{n-j-1} \cdot (1-x)^j \cdot dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} P[N=n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N=n] \cdot n \cdot \binom{n-1}{j} \cdot \int_0^{F(t)} x^{n-j-1} \cdot (1-x)^j \cdot dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} P[N=n] + \frac{1}{j!} \cdot \int_0^{F(t)} (1-x)^j \cdot \left[\sum_{n=j+1}^{\infty} P[N=n] \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \cdot (n-j) \cdot x^{n-(j+1)} \right] \cdot dx = \sum_{n=0}^{j} P[N=n] + \frac{1}{j!} \cdot \int_0^{F(t)} (1-x)^j \cdot g_N^{j+1)}(x) \cdot dx$$

A partir de la expresión general podemos obtener una expresión operativa sencilla de la función de distribución del coste del siniestro cuando $j = 0$, o sea, para el siniestro más grande de entre los que ocurran:

$$P[X_{N:N} \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n] \cdot P[X_{n:n} \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n] \cdot (F(t))^n =$$
$$= g_N(F(t))$$

El conocimiento de la función de distribución de probabilidad $P[X_{N:N-j} \leq t]$ nos permitirá conocer cualquier momento de la variable aleatoria $X_{N:N-j}$.

A título de ejemplo, obtendremos la expresión de $E\left[X_{N:N-j}\right]$ para el siguiente caso[3]:

Sea el proceso de riesgo $\left(N, X_1, X_2, \ldots, X_N\right)$, donde:

$$X_r \sim U(0,1)$$

$$N \sim P[N=n] = \frac{1}{(e-1)\cdot n!} \qquad n = 1,2,\ldots$$

siendo por tanto, la función de distribución del coste del siniestro:

$$P\left[X_r \leq t\right] = F(t) = t \qquad t \in [0,1]$$

y la función generatriz $g_N(s)$ del número de siniestros:

$$g_N(s) = E\left[s^N\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^N}{(e-1)\cdot n!} = \frac{e^s - 1}{e-1}$$

donde:

$$g'_N(s) = g''_N(s) = \ldots = g_N^{n)}(s) = \frac{e^s}{e-1}$$

---

[3] Ejemplo utilizado por Heilmann, W-R. (1988, p.237 y 238.)

La expresión de la esperanza la obtendremos de dos maneras alternativas:

1. De forma recurrente mediante la determinación de la función de distribución $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$ expresándola en función de $P\left[X_{N:N-(j-1)} \leq t\right]$.
2. A través de la esperanza $E\left[X_{n:n-j}\right]$.

1) Expresión recurrente

Este método consiste en obtener una recurrencia que nos permita calcular la función de distribución $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$, para posteriormente calcular la recurrencia en la función generatriz de momentos. La ventaja de este planteamiento es que a partir de la expresión recurrente de la función generatriz de momentos, podremos obtener la expresión recurrente de cualquier momento. Nosotros nos limitaremos a obtener la recurrencia en las esperanzas.

Teniendo en cuenta que en nuestro caso:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{(e-1)\cdot n!} + \frac{1}{j!} \cdot \int_0^t (1-x)^j \cdot \frac{e^x}{e-1} \cdot dx$$

y

$$P\left[X_{N:N-(j-1)} \leq t\right] = \sum_{n=1}^{j-1} \frac{1}{(e-1)\cdot n!} + \frac{1}{(j-1)!} \cdot \int_0^t (1-x)^{j-1} \cdot \frac{e^x}{e-1} \cdot dx$$

obtenemos la recurrencia de la función de distribución de probabilidad:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = P\left[X_{N:N-(j-1)} \leq t\right] + \frac{(1-t)\cdot e^t}{j!\cdot(e-1)}$$

Derivando la expresión anterior obtenemos la recurrencia en la función de densidad:

$$f_{X_{N:N-j}}(x) = f_{X_{N:N-(j-1)}}(x) + \frac{e^x \cdot (1-x)^{j-1} \cdot \left[(1-x)-j\right]}{j!\cdot(e-1)}$$

Integrando obtenemos la expresión de recurrencia de la función generatriz:

$$\varphi_{X_{N:N-j}}(t) = \int_0^1 \left(f_{X_{N:N-(j-1)}}(x) + \frac{e^x \cdot (1-x)^{j-1} \cdot \left[(1-x)-j\right]}{j!\cdot(e-1)} \right) \cdot e^{t\cdot x} \cdot dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{j} P[N=n]$$

teniendo en cuenta que:

$$\varphi_{X_{N:N-(j-1)}}(t) = \int_0^1 f_{X_{N:N-(j-1)}}(x) \cdot e^{t\cdot x} \cdot dx + \sum_{n=1}^{j-1} P[N=n]$$

entonces:

$$\varphi_{X_{N:N-j}}(t) = \varphi_{X_{N:N-(j-1)}}(t) + P[N = j] + \int_0^1 \frac{e^x \cdot (1-x)^{j-1} \cdot [(1-x)-j]}{j! \cdot (e-1)} \cdot e^{t \cdot x} \cdot dx$$

simplificando, llegamos a la siguiente expresión de la recurrencia de la función generatriz:

$$\varphi_{X_{N:N-j}}(t) = \varphi_{X_{N:N-(j-1)}}(t) + \frac{t}{(e-1)\cdot(t+1)} \cdot \left[\frac{1}{j!} - \frac{1}{(j-1)!} \cdot \int_0^1 (1-x)^{j-1} \cdot e^{(t+1)x} \cdot dx\right.$$

por último, derivando la función generatriz y haciendo $t = 0$ obtenemos la siguiente expresión que nos da la recurrencia de la esperanza:

$$E\left[X_{N:N-j}\right] = E\left[X_{N:N-(j-1)}\right] + \frac{1}{e-1} \cdot \left[\frac{1}{j!} - \frac{1}{(j-1)!} \cdot \int_0^1 (1-x)^{j-1} \cdot e^x \cdot dx\right]$$

Esta fórmula nos permite obtener la esperanza de cualquier variable tan solo conociendo la $E[X_{N:N}]$ [4], por ejemplo:

si $j = 1$:

$$E[X_{N:N-1}] = E[X_{N:N}] + \frac{2-e}{e-1} = \frac{3-e}{e-1}$$

[4] Puede calcularse fácilmente a partir de la función de distribución de probabilidad $P[X_{N:N} \le t]$ siendo $E[X_{N:N}] = \frac{1}{e-1}$

si $j = 2$:

$$E\left[X_{N:N-2}\right] = E\left[X_{N:N-1}\right] + \frac{1}{e-1}\cdot\left[\frac{1}{2} - [e-2]\right] =$$

$$= E\left[X_{N:N}\right] + \frac{2-e}{e-1} + \frac{1}{e-1}\cdot\left[\frac{1}{2} - [e-2]\right] = \frac{5.5-2e}{e-1}$$

2) A través de la esperanza $E\left[X_{n:n-j}\right]$

Este método alternativo al anterior consiste en calcular directamente $E\left[X_{N:N-j}\right]$ a partir de:

$$E\left[X_{N:N-j}\right] = \sum_{n=j+1}^{\infty} E\left[X_{n:n-j}\right]\cdot P[N=n] \qquad (1)$$

Podemos observar que el sumatorio empieza por $j + 1$, debido a que como mínimo han de haber $j + 1$ siniestros para calcular el coste esperado de $E\left[X_{n:n-j}\right]$. El cálculo de $E\left[X_{n:n-j}\right]$ podemos obtenerlo mediante:

$$E\left[X_{n:n-j}\right] = \int_0^{\infty}\left(1 - P\left[X_{n:n-j} \le t\right]\right)\cdot dt$$

siendo[5] :

$$P\left[X_{n:n-j} \leq t\right] = n \cdot \binom{n-1}{n-j-1} \cdot \int_0^{F(t)} y^{n-j-1} \cdot (1-y)^j \cdot dy$$

Teniendo en cuenta que en nuestro ejemplo:

$$F(t) = t$$

y

$$P[N = n] = \frac{1}{(e-1) \cdot n!}$$

llegamos a la siguiente expresión de la esperanza de $X_{n:n-j}$:

$$E\left[X_{n:n-j}\right] = 1 - \frac{j+1}{n+1}$$

por último, sustituyendo en (1) y simplificando:

$$E\left[X_{N:N-j}\right] = \frac{1}{e-1} \cdot \left[\frac{1}{(j+1)!} - j \cdot \left[e - \sum_{h=0}^{j+1} \frac{1}{h!}\right]\right] \qquad (2)$$

[5] La expresión de $P\left[X_{n:n-j} \leq t\right]$ se obtiene sustituyendo $i = n - j$ en la expresión ya estudiada de $P\left[X_{n:i} \leq t\right]$

Alternativamente, también puede calcularse esta esperanza directamente a partir de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $X_{N:N-j}$:

$$E\left[X_{N:N-j}\right]=\int_0^{\infty}\left(1-P\left[X_{N:N-j}\leq t\right]\right)\cdot dt$$

Podemos observar como la expresión (2), coincide con la obtenida anteriormente de forma recurrente, así:

si $j = 0$:

$$E\left[X_{N:N}\right]=\frac{1}{e-1}$$

si $j = 1$:

$$E\left[X_{N:N-1}\right]=\frac{3-e}{e-1}$$

si $j = 2$:

$$E\left[X_{N:N-2}\right]=\frac{5.5-2e}{e-1}$$

Si nos fijamos en los valores esperados de los siniestros ordenados, observamos como disminuye el valor esperado del coste del siniestro conforme vamos considerando siniestros más pequeños, así en nuestro caso el coste del siniestro más grande es en términos de esperanzas $E\left[X_{N:N}\right]=0.5819$, sin embargo si consideramos el coste del segundo siniestro más grande, su valor disminuye considerablemente $E[X_{N:N-1}] = 0.1639$, lo mismo sucede si tenemos en cuenta el coste del tercer siniestro más grande $E[X_{N:N-2}] = 0.0369$. Esta disminución en los valores se debe a dos causas:

1. Cuanto mayor es la variable aleatoria coste del siniestro mayor es su valor esperado. En nuestro caso debemos de tener presente:

$$\ldots \leq X_{N:N-2} \leq X_{N:N-1} \leq X_{N:N}$$

2. El efecto que tiene sobre la esperanza del coste del siniestro, la probabilidad del número de siniestros. En nuestro caso la probabilidad de que se de un número de siniestros cada vez más elevado es mucho más pequeña, en consecuencia si consideramos la esperanza del último $E[X_{N:N}]$ sólo es necesario que haya como mínimo uno para que éste exista, sin embargo si consideramos la esperanza del penúltimo $E[X_{N:N-1}]$ como mínimo han de haber dos siniestros para que uno de ellos sea el penúltimo, siendo la probabilidad de que haya dos siniestros considerablemente más pequeña que la de que haya uno[6].

---

[6] Puede comprobarse que $P[N = 1] = \frac{1}{(e-1)} = 0.581976$ y $P[N = 2] = \frac{1}{(e-1)\cdot 2} = 0.290988$

Por último podemos señalar que si hubiésemos contemplado la variable aleatoria coste del siniestro sin proceder a su ordenación, ésta hubiese sido equidistribuida y su valor esperado $E[X]=0.5$.

2.2.2. Obtención de la función de distribución del coste de siniestro teniendo en cuenta la ordenación por delante.

En este caso, obtendremos la función de distribución del coste del siniestro $P\left[X_{N:j} \leq t\right] \quad j=1,2,\ldots,N$ siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado anterior.

Aplicando el teorema de la probabilidad total a la función de distribución:

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right]=\sum_{n=0}^{\infty} P[N=n] \cdot P\left[X_{n:j} \leq t\right]$$

al ser $\forall n<j \quad X_{n:j}=0$ entonces $P\left[X_{n:j} \leq t\right]=1$, por tanto:

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right]=\sum_{n=0}^{j-1} P[N=n]+\sum_{n=j}^{\infty} P[N=n] \cdot P\left[X_{n:j} \leq t\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{j-1} P[N=n]+\sum_{n=j}^{\infty} P[N=n] \cdot n \cdot\binom{n-1}{j-1} \cdot \int_{0}^{F(t)} x^{j-1} \cdot(1-x)^{n-j} \cdot dx=$$

$$\left.\cdot(1-x)^{n-j}\right] \cdot dx=\sum_{n=0}^{j-1} P[N=n]+\frac{1}{(j-1)!} \cdot \int_{0}^{F(t)} x^{j-1} \cdot g_{N}^{j)}(1-x) \cdot dx$$

A partir de la expresión general podemos obtener una expresión operativa sencilla de la función de distribución del coste del siniestro cuando $j = 1$:

$$P\left[X_{N:1} \leq t\right] = P[N=0] + \int_0^{F(t)} g'_N(1-x) \cdot dx = P[N=0] + 1 - g_N(1-F(t))$$

Si aplicamos la expresión general al ejemplo del apartado anterior, podemos obtener por el mismo razonamiento, la siguiente expresión de recurrencia de las esperanzas:

$$E\left[X_{N:j+1}\right] = E\left[X_{N:j}\right] + \frac{1}{e-1} \cdot \left[\frac{-2}{j!} + \frac{1}{(j-1)!} \cdot \int_0^1 e^{1-x} \cdot x^{j-1} \cdot dx\right]$$

Esta expresión nos permite calcular cualquier valor esperado, conociendo el valor esperado del siniestro más pequeño $E[X_{N:1}]$[7].

Alternativamente podemos también obtener la $E\left[X_{N:j}\right]$ a través de $E\left[X_{n:j}\right]$, mediante la expresión:

$$E\left[X_{N:j}\right] = \sum_{n=j}^{\infty} E\left[X_{n:j}\right] \cdot P[N=n]$$

teniendo en cuenta:

[7] En el caso que estamos considerando, $E\left[X_{N:1}\right] = \frac{e-2}{e-1}$

$$E\left[X_{n:j}\right]=\int_0^{\infty}\left(1-P\left[X_{n:j}\leq t\right]\right)\cdot dt=\frac{j}{n+1}$$

$$P[N=n]=\frac{1}{(e-1)\cdot n!}$$

entonces:

$$E\left[X_{N:j}\right]=j\cdot\left[1-\frac{1}{e-1}\cdot\sum_{h=1}^{j}\frac{1}{h!}\right]$$

expresión no recurrente que nos permite obtener $E\left[X_{N:j}\right]$.

También podemos obtenerlo directamente mediante:

$$E\left[X_{N:j}\right]=\int_0^{\infty}\left(1-P\left[X_{N:j}\leq t\right]\right)\cdot dt$$

A continuación calculamos el valor esperado del coste de los tres siniestros más pequeños:

$$E[X_{N:1}]=0.4180$$

$$E[X_{N:2}]=0.2540$$

$$E[X_{N:3}]=0.0901$$

Podemos comprobar como los valores son cada vez más pequeños a pesar de que el coste del siniestro es mayor. Esto es debido a que al ser la probabilidad de que se de un número de siniestros cada vez más elevado mucho más pequeña, compensa el mayor coste. En nuestro caso, por ejemplo $E[X_{N:2}] > E[X_{N:3}]$ debido a que la probabilidad de que haya tres siniestros es tan pequeña comparada con la de que haya dos siniestros que compensa en términos esperados el mayor coste.

Sin embargo, si considerásemos el valor esperado del coste del siniestro j-ésimo más pequeño, suponiendo que se dan como mínimo "j" siniestros, entonces el valor de la esperanza del coste sí que será creciente con su tamaño.

A continuación para ilustrar esta idea obtendremos la expresión de la esperanza condicionada a que se den como mínimo un determinado número de siniestros j. Esta esperanza condicionada podemos obtenerla a partir de:

$$E\left[X_{N:j}/N \geq i\right] = \sum_{n=j}^{\infty} E\left[X_{n:j}\right] \cdot P\left[X_{N:j}/N \geq j\right]$$

que particularizándola a nuestro ejemplo:

$$E\left[X_{N:j}/N \geq j\right] = \frac{j \cdot \left[1 - \frac{1}{e-1} \cdot \sum_{h=1}^{j} \frac{1}{h!}\right]}{1 - \frac{1}{e-1} \cdot \sum_{h=1}^{j-1} \frac{1}{h!}}$$

si ahora calculamos el valor esperado del coste de los tres siniestros más pequeños:

$$E[X_{N:1}/N \geq 1] = 0.4180$$

$$E[X_{N:2}/N \geq 2] = 0.6077$$

$$E[X_{N:3}/N \geq 3] = 0.7093$$

En este caso, los valores esperados son cada vez más grandes por ser mayor el coste del siniestro, ya que nos aseguramos que como mínimo el número de siniestros $N \geq j$.

También resulta de interés considerar la evolución de la esperanza matemática habiendo fijado exactamente el número de siniestros haciendo $N = j$, que en nuestro ejemplo:

$$E[X_{N:h}/N = j]_{j \geq h} = E[X_{j:h}] = \frac{h}{j+1}$$

así si:

$j = 1$ $\quad E[X_{1:1}] = \frac{1}{2}$

$j = 2$ $\quad E[X_{2:1}] = \frac{1}{3} \quad E[X_{2:2}] = \frac{2}{3}$

$j = 3$ $\quad E[X_{3:1}] = \frac{1}{4} \quad E[X_{3:2}] = \frac{2}{4} \quad E[X_{3:3}] = \frac{3}{4}$

Podemos observar como $E[X_{1:1}] = E(X) = \frac{1}{2}$.

3. Reaseguro de los siniestros más grandes

En esta modalidad de reaseguro, el reasegurador se hace cargo de los "k" siniestros más grandes, independientemente de su cuantía.

En este caso, la función de distribución del coste correspondiente al "j + 1" siniestro más grande cedido al reaseguro $F_j(t)^R$ viene dada por:

$$F_j(t)^R = P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] \qquad j = 0,1,\ldots,k-1$$

siendo la prima pura Π^R de reaseguro en términos de esperanzas:

$$\Pi^R = \sum_{j=0}^{k-1} E\left[X_{N:N-j}\right]$$

por tanto la prima de reaseguro viene dada por la suma del coste esperado de los "k" siniestros más grandes.

La prima pura que tiene que cobrar la cedente Π^C por el resto de siniestros vendrá dada por la diferencia entre la prima pura total Π y la prima que satisface al reaseguro:

$$\Pi^C = \Pi - \Pi^R$$

donde $\Pi = E(N) \cdot E(X)$ siendo:

- $E(N)$: Número esperado de siniestros.
- $E(X)$: Coste esperado de los siniestros.

por tanto:

$$\Pi^C = E(N)\cdot E(X) - \sum_{j=0}^{k-1} E\left[X_{N:N-j}\right]$$

La **desventaja** que presenta esta modalidad es que el contrato de reaseguro se centra exclusivamente en el número de siniestros y no tiene en cuenta su cuantía, de tal forma que el reaseguramiento de los "k" siniestros más grandes no garantiza que el resto de siniestros que ha de cubrir la cedente sean asequibles a su capacidad financiera, es decir, no podemos limitar la pérdida de la cedente a un máximo conocido.

A continuación calculamos, para el ejemplo que hemos considerado, la prima que ha de satisfacerse al reasegurador Π^R y la prima que retiene la cedente Π^C si ésta quiere reasegurarse de los dos siniestros más grandes ($k = 2$), donde:

$$X_r \sim U(0,1)$$

$$N \sim P[N = n] = \frac{1}{(e-1)\cdot n!} \qquad n = 1,2,\ldots$$

En este caso, calculando los distintos valores esperados tenemos:

$$E(N) = 1.58 \qquad E(X) = 0.5$$

$$E\left[X_{N:1}\right] = 0.4180 \qquad E\left[X_{N:2}\right] = 0.2540$$

y como ya hemos calculado antes:

$$E[X_{N:N}] = 0.5819 \qquad E[X_{N:N-1}] = 0.1639$$

por tanto:

$$\Pi = E(N) \cdot E(X) = 0.79$$

$$\Pi^R = \sum_{j=0}^{1} E[X_{N:N-j}] = 0.7458$$

$$\Pi^C = \Pi - \Pi^R = 0.0442$$

En este caso al ser el número de siniestros esperado de 1.58, si la entidad reasegura los dos siniestros más grandes, el porcentaje de prima total que debe de satisfacer al reasegurador tendrá que ser elevado, en nuestro caso es del 94 %, ya que lo más probable es que siempre pague el reasegurador.

4. Reaseguro de exceso del número de siniestros

Modalidad de reaseguro por la cual la compañía cedente retiene los "k" siniestros más pequeños independientemente de su cuantía, cediendo el resto de siniestros al reaseguro.

Para esta modalidad de reaseguro, podemos conocer directamente la función de distribución del coste del "j"-ésimo siniestro más pequeño retenido por la cedente $F_j(t)^C$, que viene dada por:

$$F_j(t)^C = P\left[X_{N:j} \leq t\right] \qquad j = 1,2,\ldots,k$$

Por tanto, la prima pura que retiene la cedente por los "k" siniestros más pequeños en términos de esperanzas, viene dada por la suma del coste esperado de los "k" siniestros más pequeños.

$$\Pi^C = \sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right]$$

La prima pura que tiene que abonar la cedente al reaseguro Π^R viene dada por la diferencia entre la prima total Π y la prima que retiene la cedente Π^C:

$$\Pi^R = \Pi - \Pi^C$$

donde $\Pi = E(N) \cdot E(X)$ siendo:

- $E(N)$: Número esperado de siniestros.
- $E(X)$: Coste esperado de los siniestros.

por tanto:

$$\Pi^R = E(N)\cdot E(X) - \sum_{j=1}^{k} E\left[X_{N:j}\right]$$

La **desventaja** que presenta esta modalidad es que el contrato de reaseguro, al igual que en la modalidad anterior, se centra exclusivamente en el número de siniestros y no tiene en cuenta su cuantía, de tal forma que hacerse cargo de los "*k*" primeros siniestros más pequeños no garantiza un límite de pérdida máxima para la entidad.

A continuación calcularemos la prima que ha de satisfacerse al reasegurador Π^R y la prima que retendrá la cedente Π^C si ésta quiere hacerse cargo como máximo de los dos siniestros más pequeños (k = 2) y cede el resto al reaseguro, suponiendo también que:

$$X_r \sim U(0,1)$$

$$N \sim P[N=n] = \frac{1}{(e-1)\cdot n!} \qquad n = 1,2,\ldots$$

En este caso, calculando los distintos valores esperados tenemos:

$$E(N) = 1.58 \qquad E(X) = 0.5$$

$$E\left[X_{N:1}\right] = 0.4180 \qquad E\left[X_{N:2}\right] = 0.2540$$

por tanto:

$$\Pi = E(N) \cdot E(X) = 0.79$$

$$\Pi^C = \sum_{j=1}^{2} E\left[X_{N:j}\right] = 0.672$$

$$\Pi^R = \Pi - \Pi^C = 0.118$$

El porcentaje que supone la prima retenida por la cedente Π^C sobre la prima total Π es elevado, 85.06 %, debido a que el número de siniestros esperado es de 1.58.

5. Reaseguro de exceso del número de siniestros, hasta un tope de siniestralidad

Es una modalidad de reaseguro por la cual, la compañía cedente retiene los "k" siniestros más pequeños pero condicionados a que su cuantía no exceda un determinado pleno fijado por ella (M). Se trata por tanto de una combinación del reaseguro excess-loss y del reaseguro de exceso del número de siniestros.

En este caso la función de distribución del coste del "j"-ésimo siniestro más pequeño retenido por la cedente estará truncada por el pleno de retención M:

$$F_j(t)^C = \begin{cases} P\left[X_{N:j} \le t\right] & t < M \\ 1 & t \ge M \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, k$$

El cálculo de la prima que retiene la cedente con respecto a la prima total Π^C en términos esperados es similar al de la modalidad anterior, con la única diferencia de que deberemos tener en cuenta en su cálculo la función de distribución truncada.

$$\Pi^C = \sum_{j=1}^{k} E^M\left[X_{N:j}\right]$$

donde $E^M\left[X_{N:j}\right]$ es el valor esperado acotado superiormente en *M* del coste del siniestro "*j*"-ésimo más pequeño. Su cálculo es sencillo mediante:

$$E^M\left[X_{N:j}\right] = \sum_{n=j}^{\infty} E^M\left[X_{n:j}\right] \cdot P[N = n]$$

siendo:

$$E^M\left[X_{n:j}\right] = \int_0^M \left(1 - P\left[X_{n:j} \le t\right]\right) \cdot dt$$

En este caso el límite superior de la integral está acotada por el pleno de retención de la cedente.

También puede calcularse $E^M\left[X_{N:j}\right]$ directamente a partir de:

$$E^M\left[X_{N:j}\right] = \int_0^M \left(1 - P\left[X_{N:j} \le t\right]\right) \cdot dt$$

Por último, la prima que tiene que abonar la cedente al reaseguro Π^R viene dada por la diferencia entre la prima total Π y la prima que retiene la cedente Π^C:

$$\Pi^R = \Pi - \Pi^C$$

siendo:

$$\Pi^R = E(N) \cdot E(X) - \sum_{j=1}^{k} E^M\left[X_{N:j}\right]$$

Las ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- Elimina el inconveniente que tiene el reaseguro excess-loss, en la medida que limita el número de siniestros que la compañía retiene. Ventaja que también presenta la modalidad anterior.

- Elimina el inconveniente del reaseguro de exceso de numero de siniestros, ya que estamos fijando un tope máximo de pérdida por siniestro, y por tanto podemos conocer a priori la siniestralidad máxima que la cedente puede tener. En este sentido esta modalidad de reaseguro puede eliminar totalmente la probabilidad de ruina de la cedente, siempre y cuando ésta, cubra con sus recursos la siniestralidad máxima conocida $M \cdot k$.

Al igual que en los dos casos anteriores calcularemos la prima que ha de satisfacerse al reasegurador Π^R y la prima que retendrá la cedente Π^C si la cedente quiere hacerse cargo como máximo de los dos siniestros más pequeños (k = 2) hasta un valor máximo M, cediendo el resto al reaseguro, suponiendo también:

$$X_r \sim U(0,1)$$

$$N \sim P[N = n] = \frac{1}{(e-1)\cdot n!} \qquad n = 1,2,\ldots$$

por tanto $0 \leq M \leq 1$. Sabemos que:

$$E(N) = 1.58 \qquad E(X) = 0.5$$

Los valores $E[X_{N:1}]$ y $E[X_{N:2}]$ pueden calcularse como ya hemos indicado antes mediante:

$$E^M\left[X_{N:j}\right] = \int_0^M \left(1 - P\left[X_{N:j} \leq t\right]\right)\cdot dt \qquad (3)$$

de donde puede obtenerse la siguiente recurrencia que se generaliza a la obtenida en el caso de $E\left[X_{N:j+1}\right]$:

$$E^M\left[X_{N:j+1}\right] = E^M\left[X_{N:j}\right] - \frac{M}{(e-1)\cdot j!} + \frac{1}{(e-1)\cdot j!}\cdot\int_0^M t^j \cdot e^{1-t}\cdot dt$$

Dando valores a j en la expresión (3) tenemos:

Para $j = 1$

$$E^{M}\left[X_{N:1}\right]=\frac{-M+e\cdot\left(1-e^{-M}\right)}{(e-1)}$$

Para $j = 2$

$$E^{M}\left[X_{N:2}\right]=\frac{2e-2M-e^{1-M}\cdot(M+2)}{(e-1)}$$

Suponiendo que $M = 0.5$ entonces:

$$E^{M}\left[X_{N:1}\right]=0.3314 \qquad E^{M}\left[X_{N:2}\right]=0.1831$$

por tanto:

$$\Pi = E(N)\cdot E(X) = 0.79$$

$$\Pi^{C}=\sum_{j=1}^{2}E^{M}\left[X_{N:j}\right]=0.5145$$

$$\Pi^{R}=\Pi-\Pi^{C}=0.2755$$

En este caso la pérdida máxima que puede tener la cedente es: $M \cdot k = 0.5 \cdot 2 = 1$.