Treball Final de Grau
GRAU DE
MATEMÀTIQUES
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

APROXIMACIÓ DE LA TEORIA DE GRAFS ALS MODELS DE XARXES ECONÒMIQUES

Eugeni Blas i Anglada

Director....: **Dr.Antoni Benseny Ardiaca**
Realitzat a: **Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. UB**
Barcelona, a 21 juny de 2013

INDEX

1. PRÒLEG

1.1. Abstract

Economic networks are present in the substrate of our social and economic lives. They are important in determining which products we buy, which languages we speak, how we vote, how much education we obtain, and our likelihood of succeeding professionally. They play a central role in the transmission of information about job opportunities and are critical to the trade of many goods and services. The countless ways in which network structures affect our well-being make it critical to understand how social network structures impact behavior, which network structures are likely to emerge in a society, and why we organize ourselves as we do.

Despite, as we have seen before, economic networks play an important role in a wide range of economic phenomena, standard economic theory rarely considers them explicitly in its analysis. However, in the last years, a major innovation in economic theory has been the use of methods stemming from graph theory to describe and study relations between economic agents in networks. This recent development has lead to a fast increase in theoretical research on economic networks. In this tutorial, we introduce the reader to some basic concepts used in a wide range of models of economic networks.

The purpose of this paper is to give an approach to models of economic networks using the points of view mathematical and economical, and explain how these models works in the economic world. Specifically, from mathematics we use the graph theory, and from economy the game theory and the economic network theory. First, let us establish the conceptual framework that mathematics and economics provide to study the games on economic networks. Secondly, we are going to study and analyze, using modeling tools, the properties of games on innovation networks that are an illustrative example of the models that the economic network theory studies. Finally we are going to summarize the results of this modeling and explain some aspects of how economic networks operate in the economy.

Keywords: Economic network theory, innovation network, game on a network

1.2. Preliminars

1.2.1. La teoria econòmica i la importància de les xarxes econòmiques

Les xarxes econòmiques formen part de les realitats social i econòmica. Són fonamentals en els mercats de béns i serveis ja que poden condicionar la forma d'intercanvi i, per exemple en el mercat de treball, juguen un paper central en la transmissió de la informació en la recerca de llocs de treball. Les xarxes econòmiques són també importants a l'hora de determinar quins productes comprem, quins idiomes parlem, com votem, quanta educació obtenim i la nostra probabilitat de triomfar professionalment. Les incomptables maneres en què les xarxes econòmiques afecten el nostre benestar les fan fonamentals a l'hora d'entendre com l'estructura social condiciona el comportament, quines estructures probablement apareixeran en una societat i la forma en què ens organitzem nosaltres mateixos (es pot veure [8], p.3).

Malgrat l'important paper que, com s'ha dit, les xarxes juguen en molts fenòmens econòmics, la teoria econòmica clàssica rarament ha considerat explícitament les xarxes econòmiques en l'anàlisi econòmica. No obstant, en els darrers anys, s'ha començat a produir una innovació en la teoria econòmica a base d'usar mètodes derivats de la teoria de grafs i de la teoria de jocs per descriure i estudiar les relacions entre els agents econòmics en xarxes creant-se de fet una nova disciplina que s'ha anomenat com teoria de les xarxes econòmiques (es pot consultar [10], p.23).

Tal i com es comenta a [5] (p.2), una font molt productiva d'investigació, i alhora un exemple il·lustratiu, és el joc teòric que s'emmarca sota la rúbrica de "difusió de la innovació" . Imaginem per exemple, la població d'usuaris de telèfons mòbils, cadascun dels quals ha de triar entre subscriure un contracte amb el proveïdor *pla il·limitat de missatges* i un *contracte amb un pla de pagament* *per cada missatge*. Ara, ens fixem en un usuari qualsevol, o agent, que adopta el pla de pagament per missatge. Si molts dels seus amics adopten el pla il·limitat, aleshores aquest usuari pot rebre molts missatges dels seus amics, potser sense voler-ho, i incórrer en una elevada despesa deguda a aquests missatges. Al contrari, si aquest usuari adopta el pla il·limitat i els seus amics el pla de pagament per missatge, aleshores aquest usuari possiblement rebrà pocs missatges i, si hagúes triat l'altre pla, hauria pagat menys. Aquest escenari, tècnicament un joc estratègic, requereix que cada individu pensi no només ens els costos propis sinó també en la estructura de la xarxa social i en les eleccions que els amics facin. Un model d'aquest tipus servirà per il·lustrar el cas concret d'un model de xarxa econòmica i l'analitzarem amb cert detall.

Per últim, s'ha de destacar l'estat actual incipient de la teoria de xarxes econòmiques. Això es fa palés tant en la metodologia dels treballs d'investigació com en la falta de consolidació de l'aparell conceptual. En el cas de la metodologia, es veu que s'estan explorant nous camins d'investigació i la majoria dels articles utilitzen principalment eines de simulació deixant de banda l'anàlisi funcional degut moltes vegades a la complexitat en el comportament dels jocs. En el cas de l'aparell conceptual es veu que la notació i les definicions formals varien molt, i, fins i tot, que algunes vegades la notació és molt fosca. Per això una part de l'esforç d'aquest treball s'ha dedicat a donar una corpus teòric coherent i, sempre que ha estat possible, utilitzar eines analítiques.

1.2.2. Estructura del treball

L'objectiu principal del treball és fer una aproximació als models de xarxes econòmiques, mitjançant un doble enfocament: d'una banda, matemàtic i, de l'altra, econòmic. Això reflecteix el fet que la teoria de xarxes econòmiques és una disciplina a la frontera entre les Matemàtiques i la Economia. Històricament, aquesta interdependència entre la Economia i les Matemàtiques s'ha manifestat en el fet que a mida que la Teoria Econòmica ha avançat, s'ha formalitzant a base de matematitzar els seus continguts.

El treball es divideix en 7 capítols:

- El primer capítol que n'és el pròleg del treball.
- El segon capítol és fa la introducció del treball amb es objectius del treball i la motivació d'aquest.
- El tercer capítol es de caire teòric. Es centra en desenvolupar el marc conceptual, on s'estableixen els fonaments teòrics del treball. El model de xarxa econòmica es formalitza establint un joc en una xarxa, basada en un graf, que evoluciona. S'estudien aquests models atenent a la seva doble dinàmica: una dinàmica continua o temporal i un dinàmica discreta o estructural. La dinàmica continua correspon a l'evolució temporal d'una xarxa concreta portan al que s'anoma els estats estacionaris o quasiequilibris. La dinàmica discreta correspon a l'evolució estructural, de caire estratègic, de la xarxa. Atenent a aquesta doble dinàmica, es parla de coevolució d'una xarxa econòmica.
- El quart capítol és la part central del treball. S'hi realitza l'estudi analític i numèric per d'un model d'un joc en xarxa d'innovació amb costos quadràtics que serveix per il·lustrar la teoria desenvolupada en el segon capítol. Es distingirà el cas d'un xarxa basada en un graf no dirigit, i el de la basada en un graf dirigit.
- El cinquè dóna la modelització dels jocs en xarxa. Es comenta el progrma QINLab, que és l'eina de simulació. Es realitzen una sèrie de simulacions i a partir d'aquestes s'elaboren hipotesis que permeten sintetitza en una sèrie de principis el comportament del model.
- El sisè capítol tracta de donar una interpretació econòmica dels resultats. Malgrat l'aparell matemàtic del model, la teoria econòmica ens aporta una altra mirada que ens permet comprendre millor el funcionament pràctic dels jocs en xarxa. En el cas triat es tracta d'un mercat d'intercanvi de coneixement (es pot ampliar la informació a [11]).

- El setè i darrer capítol és l'epíleg i fa la síntesi del treball, amb les conclusions finals i un donant una pinzellada de prospectiva de indicant alguns posibles temes de recerca futura.

2. INTRODUCCIÓ

2.1. Definició dels objectius i motivació del problema

2.1.1. Objectius: preguntes inicials

El treball te per objectiu donar una aproximacíó als models de xarxes economiques i es planteja contestar a les següents preguntes inicials que són alhora la idea motivadora:

- Quin és el comportament d'una xarxa econòmica que la fa peculiar?
- Podem donar algun resultat teòrico-pràctic que sintetitzi aquest comportament ?
- En quines condicions existeix l'equilibri?

2.1.2. Motivació del problema

El la realitat econòmica es donen situacions en les que el model estàndard de la teoria econòmica neoclàssica, dominant en la major part del segle XX, no arriba a explicar. Es pot pensar, per exemple, en el cas de dues persones que tenen la mateixa formació i capacitat, però una d'elles troba treball abans i el seu nivell de retribució és superior a l'altra. Aquí la teoria econòmica neoclàssica no aconsegueix explicar el fet observat. El problema rau en que el model estàndard està limitat a l'establir una sèrie de simplificacions metodològiques suposant que els agents econòmics actuen aïlladament. Per superar aquestes limitacions cal establir un altre paradigma teòric en que es contempli la importància de les relacions socials en la Economia. Aquest paradigma el donen els jocs en xarxes econòmiques i fa que sigui l'objecte d'estudi d'aquest treball.

2.2. Les xarxes econòmiques

2.2.1. Per què xarxes en Economia? Les limitacions del model estàndard de la teoria econòmica neoclàssica

Tal i com es parla a [9], el comportament agregat d'una economia no pot ser investigat en termes del comportament aïllat individual, tal i com es fa normalment a la teoria econòmica. D'una banda, les empreses interactuen amb altres empreses. D'altra banda, hi ha diferents maneres en què les empreses interactuen i elles poden aprendre i adaptar el seu comportament, buscant millorar el benefici. Així es pot veure l'economia de les empreses com una xarxa envoltant o xarxa econòmica.

Veient l'economia com una xarxa envoltant és diferent de com la representa el model estàndard neoclàssic. En aquest model, s'assumeix que els anònims i autònoms agents individuals prenen decisions independentment i només interactuen a través del preu, sobre el qual no poden influir de cap manera. És la situació d'un mercat en competència perfecta. No obstant, la competència esdevé imperfecta quan els agents tenen un mínim poder de mercat, llavors poden anticipar les conseqüències de les seves accions i anticipar les accions dels altres: és l'anomenat comportament estratègic. Per superar aquesta deficiència, la Teoria de Jocs ha intentat integrar la interacció estratègica de les empreses en el marc de l'equilibri general, però encara queden dues qüestions sense respondre:

- *La racionalitat limitada*: S'assumeix que el comportament de l'agent és completament optimitzador i considera totes les accions, tant les accions pròpies com les dels altres agents. Això porta a considerar agents amb una extremadament sofisticada capacitat per processar informació. La qüestió és que aquesta habilitat de processar enormes quantitats d'informació en temps curts no es troba en un context realista. Avanços en establir aquest supòsit més afeblit, es refereixen com a "racionalitat limitada".

- *Coordinació d'activitats i Equilibri General*: La segona qüestió, tracta del problema de la coordinació de les activitats no dirigides en el model estàndard d'equilibri de l'economia: assumir que cada agent pugui interactuar i negociar amb cada altre agent esdevé poc realista en grans sistemes. Cal especificar el marc en què els agents individuals prenen les decisions en funció del preu i així limitar l'entorn en què operen i la raó. Una manera òbvia es veure l'economia com una xarxa on els agents interactuen amb els seus veïns. En cas de la innovació tecnològica, els veïns haurien de ser empreses similars en una indústria similar, però aquestes empreses estaran aleshores connectades, bé com clients o bé com proveïdors, amb empreses d'altres indústries. A través d'aquestes connexions les innovacions es difondran a través de la xarxa.

Una manera de superar aquestes limitacions la dóna la relativament recent teoria de xarxes econòmiques. Aquesta teoria analitza un nou paradigma que dóna el model de xarxes econòmiques. En aquest model, els agents econòmics adquireixen un paper diferent del que representen en el de la teoria econòmica neoclàssica, en destacar l'estructura de les relacions entre ells, que adopta la forma de xarxa. D'aquesta manera els agents aprenen i adapten el seu comportament i això aporta, al seu torn, una evolució de l'estructura de la xarxa que es retroalimenta en els incentius dels agents per formar o eliminar els enllaços entre ells.

2.2.2. Exemples de Xarxes Econòmiques

Com es diu a [13] (p.10-19), hi ha dues grans aplicacions econòmiques del model de xarxes econòmiques: una, al funcionament dels mercats de treball, i l'altre, als processos de difusió tecnològica. A continuació, s'exposen 2 exemples d'aquests models que es troben en l'economia real:

- *Mercat Laboral*: Una àmplia gamma d'estudis empírics sobre els mercats de treball ha demostrat que una fracció significativa de tots les feines s'aconsegueix a través de xarxes socials. El paper de les xarxes socials informals en els mercats de treball ha estat posat de relleu, per primera vegada, per Granovetter al 1995. Ell va trobar que més del 50% de les ocupacions es troben a través de contactes personals. En un document posterior, Jackson i Calvo-Armengol [4], presenten un model de xarxa de treball informació de transmissió. El model reprodueix el fet empíric que la situació de l'ocupació dels individus que estan connectats, ja sigui directament o indirectament, està correlacionada amb el grau de connexió. Finalment, amb aquest model els autors van poden explicar les profundes desigualtats en els salaris i ocupació.

- *Difusió en Xarxa:* En Economia, el terme difusió sol estar relacionat amb la difusió d'una tecnologia a través d'una societat o indústria. Una nova tecnologia o una nova idea poden ser generats per un innovador i es adoptada posteriorment per altres. La literatura sobre la tecnologia de la difusió es centra en les explicacions alternatives del fet dominant: que l'ús de les noves tecnologies en el temps típicament segueix una corba en S. Molts models assumeixen que no hi ha restriccions sobre les interaccions entre els agents i el camí pel qual el coneixement pot fluir, però aquest supòsit és molt poc realista ja les empreses tenen els contactes limitats. En particular, si es difon coneixement a través de contactes socials o interrelacions personals, la difusió d'una tecnologia depèn críticament de l'estructura de la xarxa subjacent. Per tant, per a una comprensió adequada de la difusió d'innovacions és essencial usar models de xarxes econòmiques.

2.2.3. Els jocs en xarxes econòmiques i les seves eines d'anàlisi: la teoria de grafs, teoria de jocs i teoria de xarxes econòmiques

Formalment, l'objecte d'estudi d'aques treball són els jocs en xarxes econòmiques:

- Una *xarxa* és, explicat d'una manera directa, un graf que està caracteritzat amb unes variables de xarxa, associades als enllaços d'aquest, unes variables d'estat associades als vèrtex, i una dinàmica determinada per les equacions que depenen de les variables de xarxa i d'estat.

- Una *xarxa econòmica* és una xarxa en que les variables corresponen a models econòmics.
- Finalment un *joc sobre una xarxa econòmica* és un joc on uns jugadors intereactuen amb unes certes regles sobre una xarxa econòmica. D'aquesta manera els jugadors o agents corresponen als vèrtex del graf, i les relacions entre ells s'associen als enllaços.

En aquest treball per estudiar els jocs en xarxes econòmiques s'utilitzaran les eines d'anàlisi que proporcionen les disciplines següents:

- La *teoria de grafs* és la part de la Matemàtica Discreta que tracta de l'estudi dels grafs, en què es basa la modelització de les connexions d'una xarxa i que permet estudiar les seves propietats.
- La *teoria de jocs* és la part de la Microeconomia que estudia la presa de decisions estratègiques. Més formalment, tracta de l'estudi dels models matemàtics de conflicte i cooperació entre prenedors de decisions o agents suposats intel·ligents i racionals.
- La *teoria de xarxes econòmiques* és la part de la Microeconomia que estudia els models de xarxes socials que es troben en el mon econòmic.

2.3. Metodologia

En aquest treball s'utilitza la modelització com a eina metodològica fonamental. Per això un cop establert el marc conceptual econòmic, es construeix un model matemàtic que formalitza el joc en una xarxa econòmica. D'aquest, s'estudien analíticament els casos simples per treure unes primeres conlusions teòriques. A continuació, el model matemàtic es modelitza algoritmicament per tal d'elaborar un programa que permeti fer simulacions en un cert entorn controlat de laboratori. Es fan les simulacions que permeten descriure els diversos tipus de comportament en cada jugada realitzada per tal de poder explicar els diferents tipus d'evolució de la xarxa al cap d'una partida del joc.

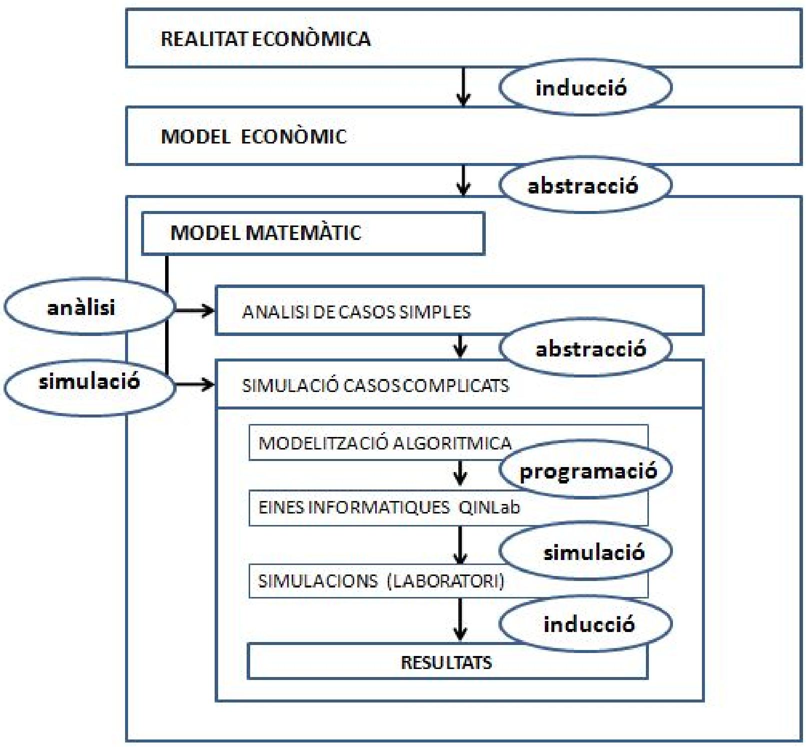

Fig.2.1. Procés de modelització

Per per realitzar la modelització s'ha utilitzat bàsicament dos tipus d'eines:

- *Eines d'analisi matemàtica i àlgebra lineal*
  - De les quals destaquem d'entre altres: la teoria espectral, i sistemes dinàmics continuus (solucions estacionaris i estabilitat).
- *Eines de càlcul numèric i simulació*
  - De les quals destaquem d'entre altres: el mètode de Newton-Raphson, el mètode de Runge-Kutta, el mètode de la potència, i el programa propi de simulació QINLab.

3. MARC TEÒRICO-CONCEPTUAL

Com hem vist prèviament, l'objecte d'estudi del treball són els jocs en xarxes econòmiques. Els diversos models en xarxes econòmiques es poden considerar essencialment com a jocs que es defineixen sobre xarxes que tenen per estructura fonamental els grafs. Per analitzar aquests models s'utilitzarà la doble visió que ve donada conjuntament per les Matemàtiques i l'Economia. De les Matemàtiques usarem la teoria de grafs i, de la Economia, la teoria de jocs i la teoria de xarxes econòmiques.

3.1. Teoria de grafs

La teoria de grafs modela la connexió de les xarxes mitjançant grafs, que són estructures formades per un conjunt de vèrtexs i un conjunt de relacions binàries entre vèrtexs que formen el conjunt d'enllaços. Aquest estructura ens permetrà modelitzar xarxes per tal d'estudiar-ne les propietats.

3.1.1. Definicions i nocions fonamentals de la teoria de grafs

Es donen a continuació una sèrie de definicions corresponents a la teoria de grafs (per ampliar la informació pot consultar-se [2] i [1]):

- Un *graf* G és un parell ordenat $G = (V, E)$ tal que $V(G)$ és el conjunt de vèrtexs i $E(G)$ és el conjunt d'enllaços. El conjunt $E(G)$ ve donat per una relació binària sobre $V(G)$ que anomenem relació d'adjacència: $\forall i, j \in V(G)$ i és *adjacent* a j sii $ij \in E(G)$. Si els enllaços estan orientats s'anomenen arcs i el graf, dirigit; si no, s'anomen arestes i el graf, no dirigit (simètric). Els dos vèrtexs i, jde cada enllaç $ij \in E(G)$ s'anomenen respectivament vèrtex inicial i final de l'enllaç.

- Un *camí* és una seqüència ordenada d'enllaços on el vèrtex final d'un enllaç és l'incial del següent, i.e. $\{ij, jk, kl, ...\}$. La distància entre dos vèrtexs $i, j \in V(G)$ $d(i, j)$ és el nombre d'enllaços que conté el camí més curt que va d'i a j. Un camí és simple si no repeteix enllaços. Un camí és elemental si no repeteix vèrtexs. Un circuit és un camí tancat que comença i acaba en un mateix vèrtex. Un cicle és un circuit que no repeteix dos enllaços que comencen en el mateix vértex. Un graf G és **connex** sii $\forall i, j \in V(G)$ $\exists$camí que comença en i i acaba en j.

- Per al cas de graf dirigit, es defineix el *grau exterior* g_i^+ d'un node i com el nombre d'arcs que tenen inici en i i el *grau interior* g_i^-d'un node i al nombe d'arcs que tenen final en i i s'anomena *grau* a la suma dels dos $g_i = g_i^- + g_i^+$. Per al cas de graf simètric, es parla només de *grau* g_id'un node i.

- Dos vértexs $i, j \in V(G)$ són *veïns* ó *adjacents* sii $\exists ij \in E(G)$. El *veïnatge* (de primer ordre) d'un node $i \in V(G)$ és $N_i = \{j \in V(G) : ij \in E(G)\}$. Així $g_i = |N_i|$.

3.1.2. Matrius associades a un graf

Entre d'altres podem definir les següents matrius associades a un graf:

- La *matriu d'adjacència* $A(G) = (a_{ij})_{(i,j)\in(nxn)}$ del graf G és la matriu nxn en què $a_{ij} = 1$ si $ij \in E(G)$, i $a_{ij} = 0$ en cas contrari. Observem que, per a grafs no dirigits, la matriu $A(G)$ és simètrica, i.e. $\forall i, j \in V(G)$ $a_{ij} = a_{ji}$.

- Un graf és *irreductible* quan la matriu $A(G)$ és irreductible, és a dir, quan $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall i, j$ $(A^k(G))_{ij} > 0$. Una matriu irreductible no es pot descompondre en blocs. Es pot veure que $A(G)$ irreductible$\Longleftrightarrow$ G és connectat ($\forall i, j \in V(G)$ $\exists ij \in E(G)$ o $\exists ji \in E(G)$).

- *Matriu de graus*: $D(G) = (d_{ij})_{(i,j)\in(nxn)}$, on $d_{ij} = g_i$si $i = j$, i $d_{ij} = 0$ en altre cas.

- *Matriu laplaciana*: $L(G) = D(G) - A(G) = (l_{ij})_{(i,j)\in(nxn)}$, on $l_{ij} = g_i$si $i = j$, $d_{ij} = -1$si $ij \in E(G)$, i $l_{ij} = 0$ en altre cas.

A més podem parlar de:

- *Valors propis d'un graf (eignevalues)*: Els valors propisλde la seva matriu d'adjacència $A(G)$, i..e. t.q. $A(G)x = \lambda x$ té solució amb $x \neq 0$. Si G és un graf connex aleshores $A(G)$ és irreductible amb elements no negatius i, pel teorema de Perron-Froebenius, $A(G)$ te un únic valor propi real més gran λ_{PF} i un vector propi associat $v > 0$ (veure [3], p.22), dit *valor propi de Perron-Froebenius*

3.1.2. Teoria de xarxes

Es distingeixen 2 tipus de xarxes:

- *Xarxes bilaterals* són les que tenen associat un graf no dirigit.
- *Xarxes unilaerals* són les que tenen associat un graf dirigit.

3.1.2.1. Variables d'una xarxa: variables de xarxa i variables d'estat

Una *xarxa* és un graf amb unes variables associades i unes equacions que modelen la seva evolució. Les variables associades als enllaços s'anomen *variables de xarxa*. Les variables corresponents als vèrtexs s' anomen *variables d'estat*.

3.1.2.2. Dinàmiques de les variables a les xarxes

3.1.2.2.1. Dinàmica continua de les variables d'estat

Les equacions associades permeten definir la dinàmica de la xarxa. Així formalment una xarxa és $X = (G; V_x, V_e, F)$ on G és el graf associat a la xarxa, V_x és el conjunt de variables de xarxa, V_e és el conjunt de variables d'estat, i $F = F(V_x; V_e; t)$ les equacions de dinàmica temporal amb el temps t. Aquesta dinàmica de la xarxa l'anomenen *dinàmica contínua* o *temporal*. La dinàmica continua pot portar a la xarxa a un estat d'equilibri o estacionari que anomenem *quasiequilibri* V_e^*amb $X(G; V; F) \overset{F(V,t),t\to\infty}{\longmapsto} V_e^*$ tal que $dV_e^*/dt = 0$ o equivalentment $V_e^* = V_e^*[X(G; V_x, V_e; , F)]$.

3.1.2.2.1. Dinàmica discreta de les variables de xarxa

Les variables de xarxa V_x també poden ser alterades, anomenant aquesta dinàmica de la xarxa l'anomenen *dinàmica discreta o estructural.*

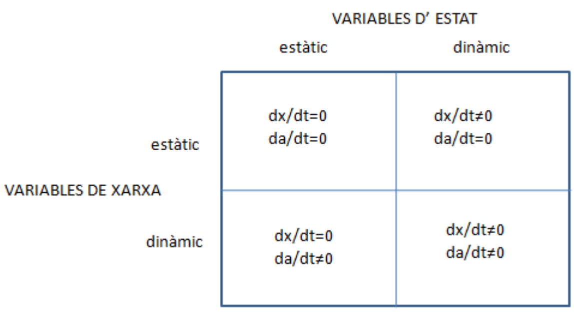

Fig.3.1. Dinàmiques de les variables en una xarxa

3.1.2.3. Coevolució en les xarxes

Una xarxa pot evolucionar de 2 maneres:

- *Dinàmica contínua*: Correspon a l'evolució temporal de les variables associades, i que ja hem vist que eventualment porta a un estat estacionari de la xarxa o quasiequibri.
- *Dinàmica discreta*: Correspon a l'evoluació estructural de la xarxa. Modificant la seva estructura, alterant les variables de xarxa, es produeix, eventualment un nou estat estacionari o quasiequilibri. En alguns casos es pot arribar a una situació d'equilibri absolut, en què cap modificació estructural produeix nous estats estacionaris o quasiequilibris.

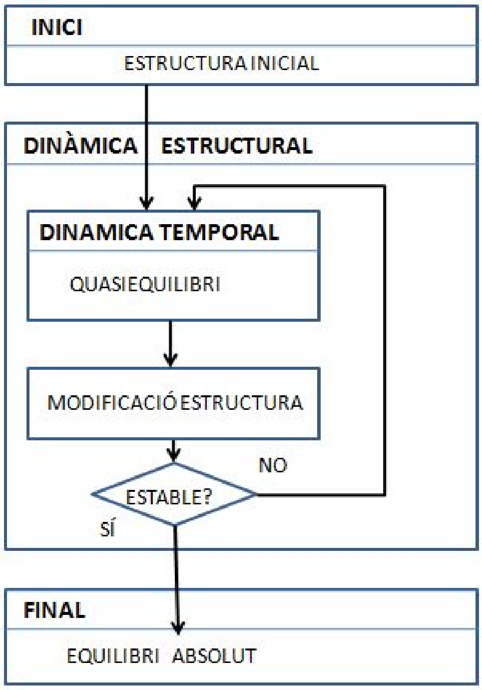

Fig.3.2. Coevolució d'una xarxa

3.2. Teoria de jocs

3.2.1. Introducció

"La Teoria de Jocs tracta de les activitats dels qui han de prendre decisions i són conscients que les accions preses els afecten mútuament. La Teoria de Jocs no es útil quan es prenen decisions que ignoren les reaccions dels altres o les tracten com forces impersonals del mercat" (es pot veure [12], p.23).

La millor manera d'entendre quines situacions es poden modelar com a jocs i quines no es pensar en algun exemple:

- *Sí podem modelitzar com un joc*: Pensem com els membres de la OPEP trien la seva producció anual. Per simplificar reduirem l'exemple a 2 països: Aràbia Saudí que és dominant en el mercat, i Kuwait que fa de seguidor. Aràbia Saudí sap que el volum de la producció petrolera de Kuwait es fonamenta en la pròpia estimació kuwaití de la producció saudí, i que la producció dels dos països influeix en el preu mundial. Aixi l'Aràbia Saudí decideix la seva producció que li maximitzarà els seus guanys sabent que Kuwait actuarà en conseqüència tal i com havia previst. Clarament les decisions de tots els jugadors són preses tenint en compte les consequüències de les propis accions com les dels demés, i per tant podem dir que la OPEP es pot modelitzar com un joc.

- *No podem modelitzar com un joc*: Analtizem com la United Fruit Company contractava treballadors a Hondures a la dècada dels trenta del segle passat. La United Fruit Company fixava un salari baix sabent que cada treballador pren la seva decisió sense tenir en compte el seu efecte sobre la companyia al no tenir individualment cap poder de negociar al tractar-se de treballadors no sindicats. Aquesta situació no pot modelitzar-se com un joc, ja que uns dels jugadors, els treballadors, prenen les seves decisions sense tenir en compte les de la resta.

3.2.2. Descripció formal d'un joc

Els elements essencials d'un joc són: els jugadors, les accions, la informació, les estratègies, els pagaments, els resultats i els equilibris. Al conjunt dels jugadors, les accions i els resultats es denominen col·lectivament les regles del joc. Veiem les definicions següents (pot consultar-se [12] p.24-31):

- Els *jugadors* són els individus i , $i = 1...n$ que prenen les decisions. L'objectiu de cada jugador és augmentar al màxim la seva utilitat mitjançant l'elecció de les seves accions.
- Es diu *naturalesa* a un pseudojugador que pren accions aleatòries en moments específics del joc amb unes probabilitats especificades.
- Una *acció o moviment* d'un jugador i, representada per a_i, és una elecció que pot fer. Cada jugador pot fer un conjunt d'accions A_i. Un perfil d'acció són les accions de cada un dels jugadors en un pas determinat del joc $A = (a_i)_{i=1...n,}$, $a_i \epsilon A_i$.
- La *estratègia* s_i d'un jugador és la regla que utilitza el jugador per triar en cada instant del joc, donat el seu conjunt d'informació. El conjunt d'estratègia $S_i = (s_i)$ del jugador i és el conjunt d'estratègies que té a la seva disposició. Un perfil d'estratègia $s = (s_1, ..., s_n)$ és un conjunt ordenat per a cada un dels jugadors que participen en el joc. L'espai d'estratègies és el conjunt de totes les estratègies factibles en un joc $S_{joc} = U_{i=1...n} S_i$.
- La *funció de guanys* de cada jugador $u_i(s_1, ..., s_n)$ correspon a la utilitat rebuda pel jugador atenent al seu perfil d'estratègia, i és de la forma:

  u_i:$S_0 x ... x S_N \longrightarrow \mathbb{R}$

  $(s_0, ..., s_N) \longmapsto u_i(s_1, ..., s_n)$
- El *resultat d'un joc* és el conjunt d'elements interessants que, en modelar el joc, s'escullen dels valors de les accions, dels pagaments i altres variables després d'acabar el joc. L'equilibri és un perfil d'estratègia $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ corresponent a una tàctica que és la millor per a cada un dels jugadors que participen en el joc.
- La *millor resposta* d'un jugador i a les estratègies $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1} s_i, ..., s_n)$ escollides pels altres jugadors és la estratègia s_i^* que li dona el guany més gran (maximitza u_i), i.e. $\forall s_i^{'} \neq s_i^*$ $u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i^*, s_{-i})$.
- L'*estratègia dominant* s_i^* és dominant quan és estrictament la millor resposta d'un jugador i a qualsevol estratègia escollida pels altres jugadors, en el sentit que sigui quina sigui l'estratègia triada pels altres, la seva utilitat és més alta amb s_i^*. Matemàticament: $\forall s_i^{'} \neq s_i^*$ $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i^{'}, s_{-i})$. Les estratègies inferiors d'i a'anomenen estratègies dominades.
- Les *regles d'un joc* serien el conjunt de propietats formals que defineixen com és el joc i com poden d'actuar els jugadors.
- S'entén per *realització o partida* d'un joc, definit per les seves regles, qualsevol de les seves posades en práctica. Així cada cop que els jugadors jugen al joc, estan fent una realització d'aquest. Cada intervenció de cada jugador s'anomena *jugada.*

3.2.3. Jocs en forma normal i equilibri de Nash

3.2.2.1. Definició de jocs en forma normal i equilibri de Nash

En la representació en forma normal d'un joc especifica (veure [6], p.2), es donen els jugadors, les estratègies disponibles per cada jugador i el guany de cada jugador en cada combinació possible d'estratègies. Els jugadors trien les seves estratègies de forma simultània, encara que això no significa que els jugadors actuin de forma simultània. Així tenim:

- La *representació en forma normal d'un joc* amb n jugadors especifica els espais d'estratègies dels jugadors $S_1, ..., S_n$i les seves funcions de guanys $u_i, ..., u_n$, definides en aquests espais, respectivament. Denotarem aquest joc amb $J = \{S_1, ..., S_n; u_i, ..., u_n\}$.
- En el joc en forma normal $G = \{S_1, ..., S_n; u_i, ..., u_n\}$, les estratègies $S^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ formen un *equilibri de Nash* si, per a cada jugador i, s_i^* és la resposta que maximitza la utilitat del jugador i (o almenys una d'elles) en variar les estratègies dels altres $n-1$ jugadors, $S_{-i}^* = (s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$:
  $\forall i = 1, ..., n \ \forall s_i \in S_i \ u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \geqslant u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$
- Això equival a dir que $\forall i = 1, ..., n$ s_i^* és solució de
  $max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$

J.F. Nash va demostrar al 1950 que existeix almenys un equilibri de Nash en qualsevol joc finit (això és, amb un nombre finit de jugadors i amb conjunts d'estratègies finits).

3.2.2.2. Exemple de joc en forma normal i equilibri de Nash: el dilema del presoner

Per entendre millor la definició anterior, es dona un exemple clàssic en la teoria de jocs que és l'anomenat *dilema del presoner*. En aquest joc 2 sospitosos són detinguts i acusats d'un delicte. Si un dels sospitosos confesa, per l'altre seria millor confesar, i anar 6 mesos a la presó, enlloc de callar-se i passar 9 mesos a la presó. De la mateixa manera, si un dels sospitosos calla, per l'altre seria millor confesar, i així quedaria en llibertat immediatament, enlloc de callar-se i anar a la presó 1 mes. Així, el joc queda en forma normal:

- $u(s1.calla, s2.calla) = (-1, -1)$
- $u(s1.calla, s2.confesa) = (0, -9)$
- $u(s1.confesa, s1.calla) = (-9, 0)$
- $u(s1.confesa, s1.confesa) = (-6, -6)$

		SOSPITÓS 1	
		calla	confesa
SOSPITÓS 2	calla	(-1,-1)	(-9,0)
	confesa	(-1,-1)	(-1,-1)

Fig.3.3. Dilema del presoner en forma normal

En aquest joc l'equilibri de Nash es dona quan el 2 sospitosos confesen:

$S^* = (s_1^*, s_2^*) = (s1.confesa, s2.confesa)$, amb $u(s_1^*, s_2^*) = (-6, -6)$

3.3. Teoria de xarxes econòmiques: jocs en xarxes economiques

3.3.1. Introducció

Des d'un punt de vista aplicat, la teoria de xarxes econòmiques tracta d'analitzar i estudiar els efectes de la estructura de les relacions sobre el comportament dels agents econòmics i sobre l'utilitat obtinguda. Més formalment, la teoria de xarxes econòmiques analitza models de *jocs en xarxes econòmiques*. En aquest tipus de jocs, hi ha dos blocs bàsics:

- La xarxa que estableix l'estrutura de les relacions entre els jugadors en associar a un graf variables econòmiques de xarxa, variables d'estat pels jugadors o agents, i unes equacions que estableixen la dinàmica temporal de la xarxa.
- Les regles que poden realitzar els jugadors o agents i que determinen la dinàmica estructiral de la xarxa.

L'estudi del jocs en xarxa porta a analitzar i respondre a les preguntes següents (pot veures [7], capítol 3):

- Quin són els efectes de la ubicació a la xarxa sobre el comportament individual i el benestar? Per exemple, fer que els individus estiguin millor connectats produeix utilitats més grans que si ho estan més pobrament?
- Com responen el comportament individual i la utilitat a canvis en els enllaços de la xarxa?
- Hi ha xarxes millors que altres per l'assoliment de resultats socialment desitjables, i si és així, es pot caracteritzar les característiques de les xarxes econòmiques desitjables?

3.3.2. Coevolució de jocs en xarxes econòmiques

Un joc en xarxa és un joc és un tipus de jocs en xarxa (veure [5], p.4-6 i [10], p.34-36). Es formalment un joc que està definit sobre una xarxa $J_X = (R, \chi_N)$, del qual es compon de:

- El *conjunt de les xarxes* χ_N. Una xarxa $X = (G; V_x, V_e, F)$ ve definida per l'estructura de graf G on es defineixen, las variables V, tant de xarxa V_x com les d'estat V_e, i per un conjunt d'equacions $F = F(V) = F(V_x; V_e; t; P)$ que depen d'uns certs paràmetres P i que estableixen la *dinàmica contínua o temporal* , del joc. Aquesta dinàmica es poden portar a *estats estacionaris* o *quasiequilibris* $V_e^* = V_e^*[X(G; V_x, V_e; , F)]$. Quan estam en un mateix joc podem simplicar la notació i escriure $V_e^*[X(G)] \stackrel{!}{==} V_e^*[X(G; V_x, V_e; , F)]$.
- Les *regles del joc* R que defeneixen la manera en que els agents poden jugar i que determinen la *dinàmica discreta o estructural* $V_e^*[X(G)] \longmapsto V_e^*[X(G')]$, generada al variar $G \longmapsto G'$. Aquesta dinàmica pot portar a un *equilibri absolut del joc* $V_e^*[X(G^*)]$, en el que el joc finalitza al no poder evolucionar de cap manera.

Les 2 dinàmiques combinades formen el que s'anomena la coevolució del joc en xarxa.

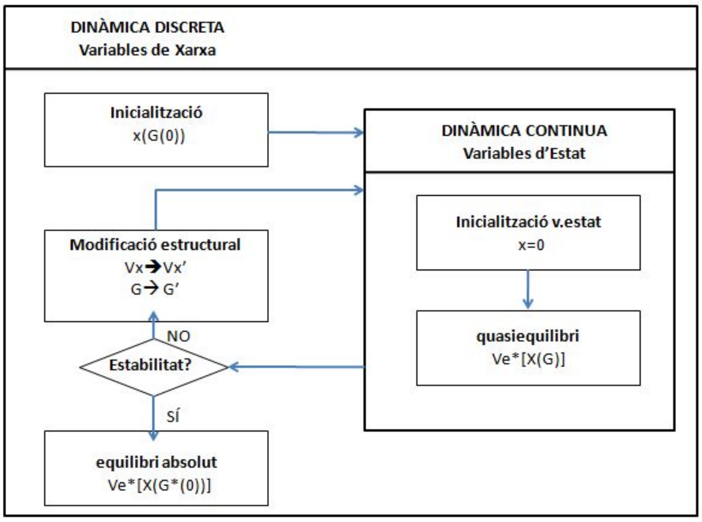

Fig.3.4. Dinàmica coevolutiva

4. ESTUDI ANALÍTIC DELS JOCS EN XARXES D'INNOVACIÓ AMB COSTOS QUADRÀTICS

L'estudi anàlitic dels jocs en xarxes d'innovació amb costos quadràtics es fara en dos nivells:

- Estudi analític de les xarxes d'innovació amb costos quadràtics.
- Estudi analític dels jocs en les xarxes d'innovació amb costos quadràtics.

4.1. Estudi analític de les xarxes d'innovació amb costos quadràtics

4.1.1. Definició de la xarxa d'innovació amb costos quadràtics

La xarxa d'innovació és un exemple de xarxa econòmica que havíem definit a l'apartat anterior 1.1.2.2). En aquest cas, la xarxa queda definida formalment per $X = (G; V_x, V_e, F)$:

- El graf $G = (V(G), E(G))$ que dóna l'estructura de connexions entre els vèrtexs de la xarxa, que s'anomenen *agents*.
- Les *variables de xarxa* V_x queden, en aquest cas, reduïdes a la matriu d'adjacència $V_x = A(G) = (a_{ij})_{i,j=0...(N-1)}$, que representa els enllaços entre agents.
- Les *variables d'estat* V_e corresponen a les *utilitats dels agents* $V_e = (x_i)_{i=0...(N-1)}$, on x_i és la utilitat de l'agent i. Per tal que les utilitats tinguin sentit econòmic es considerarà que $\forall i = 0...(N-1)\ x_i \geq 0$.
- L'*evolució* o *dinàmica temporal* es regeix per un sistema d'equacions diferencials ordinàries, corresponents al camp vectorial $F = (F_i)_{i=0...(N-1)}$:

  - $\forall i = 0, ..., (N-1)\ \dot{x_i} = F_i(x_0, ..., x_N; A; b, c, d)$

  que tinguin en compte els efectes següents:

  - $D_i := dx_i$, despesa de manteniment del propi agent, on d és el coeficient de despesa o cost d'automanteniment,
  - $B_i := b \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j$, benefici que obté un agent de la xarxa dels seus veïns, on b és el coeficient de benefici obtingut d'un veí.
  - $C_i := c(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) x_i^2 = c g_i^+ x_i^2$, cost de manteniment dels enllaços amb als veïns, on c és el coefcient de cost de mantenir un enllaç cap a un veï.

  Així $\dot{x_i} = -D_i + B_i - C_i$ o $\dot{x_i} = -dx_i + b \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j - c g_i^+ x_i^2$.

L'evolució temporal de la xarxa queda doncs determinada pels paràmetres $P = \{b, c, d\}$ i s'escriu més simplificadament com $X \overset{!}{=} X[G; P]$.

4.1.2. Solució estacionària o d'equilibri de les equacions dinàmiques

Es coneix que les solucions del sistema dinàmic que surten d'utilitats no negatives, es mantenen no negatives i finites al llarg del temps.

Proposició: Les solucions $(x_i(t))_{i=0...(N-1)}$ del sistema dinàmic $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $\dot{x_i} = -dx_i + b\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j - cg_i^+ x_i^2$ amb $x_i(0) \geqslant 0$, cumpleixen $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $0 \leqslant x_i < \infty$ (es pot veure en detall la demostració a [11], p. 224-226). **Demostració:**

- (1) $x_i(t) \geq 0$ $\forall i = 0, ..., N$: Per al límit inferior $x_i \geq 0$, observem que aleshors $b\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j \geq 0$ i que $g_i^+ \leq N-1$:
  - $\forall i = 0, ..., N$: $\dot{x_i} = -dx_i + b\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j - cg_i^+ x_i^2 \Longrightarrow \dot{x_i} \geq -dx_i - cg_i^+ x_i^2 \Longrightarrow \dot{x_i} \geq -dx_i - c(N-1)x_i^2$
  - El límit inferior és la solució de la equació: $\dot{x_i} = -dx - c(N-1)x^2$. La solució d'aquesta equació pot ser trobada solucionant la corresponent equació mitjançant el canvi de variables $z := 1/x$. Així obtenim la solució $x(t) = (de^{da})/(e^{dt} - c(N-1)e^{da})$, amb la constant apropiada $a = (1/d)ln[x(0)/(d + (N-1)c]$.Aleshores començant amb valors inicials $x(0) \geq 0$ aquest limit inferior es no negatiu i tendeix cap a zero, i.e. $lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, i concluem que $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $x_i \geq 0$.
- (2) $x_i < \infty$ $\forall i = 0, ..., N$: Observem que els jugadors o vèrtex $i \in V(G)$ poden ser dividits en 2 grups: d'una banda els que no tenen cap aresta o arc de sortida o $V_f = \{i \in V(G) : g_i^+ = 0\}$i d'altre banda $V_s = \{i \in V(G) : g_i^+ > 0\}$.
  - Ara pensem en un vèrtex $i \in V_s$, les seves equacions no d'equilibri no depenen del valors x_j amb $j \in V_f$, i per tant podem considerar l'equació d'equilibri general d'aquest vèrtex: $\dot{x_i} = -dx_i + b\sum_{j\in Vs} a_{ji}x_j - cg_i^+ x_i^2$. Podem agafar la cota superior de: $\dot{x_i} \leq -dx_i + b\sum_{j\in Vs} x_j - cx_i^2$. Aquesta cota superior te una solució estacionaria donada per $dx_i + cx_i^2 = b\sum_{j\in Vs} x_j$. Aquesta és una equació simètrica i per tant vorem que per tot x_i es dóna $x_i = x$. Ara assumim que hi hagi $i \neq k$ tals que $dx_i + cx_i^2 \neq dx_k + cx_k^2$ però això implicaria que $b\sum_{j\in Vs} x_j \neq b\sum_{j\in Vs} x_j$ que és una contradicció. Per tant totes les solucions són iguals i prenem $x_i = x = (bn-d)/c$ $\forall i = 0, ..., (N-1)$. Així hem vist que hi ha un límit superior amb un punt fix per als vèrtexs de V_s , és a dir que $x_i(t) < \infty$ $\forall i = 0, ..., (N-1)$.
  - Ara pensem en un vèrtex $i \in V_f$, aquest segueix la dinàmica donada per $\dot{x_i} = -dx_i + b\sum_{j\in Vf} a_{ji}x_j$. Hem vist que els vèrtex de V_s estan actotats per una certa constant de tal manera que existeix $K \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{j\in Vs} x_j \leq K$. Aleshores tenim que $\dot{x_i} \leq -dx_i + K$. Tenim una cota superior del x_i $i \in V_f$ donada per $x_i(t) \leq x(0)e^{-dt} + K/d$ amb $lim_{t\to\infty} x_i(t) = K/d$.
- (3) Finalment hem vist que per tots els vèrtex (tan els de V_s com els de V_f) es cumpleix que $0 \leqslant x_i < \infty$ $\forall i \in V(G)$ q.e.d.

Les solucions estacionàries corresponen a aquelles que són constants en el temps i, per tant, el camp vectorial s'hi anul·la. És a dir, solucions constants $x^* = (x_0^*, ..., x_{N-1}^*)$ tals que $F(x^*) = 0$ i que s'anomenen *equilibris*. En el cas de les xarxes d'innovació:

$-dx_i + b\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j - cg_i^+ x_i^2 = 0$ $\forall i = 0, ..., (N-1)$.

S'observa l'existència d'equilibris amb totes les utilitats nul·les, que es diuen *equilibris nuls*. Són d'interès aquelles xarxes d'innovació que tenen equilibris amb alguna utilitat positiva, que es diuen *equilibris positius*.

4.1.3. Estat de la xarxa en equilibri

L'estudi de l'estabilitat de les solucions del sistema d'equacions diferencials escapa de l'abast d'aquest treball, tot i que les simulacions realitzades apunten a què les solucions que parteixen d'utilitats no negatives tendeixen a equilibris positius , si existeixen, i a l'equilibri nul, en cas que no existeixin. També, es té l'evidència que els equilibris positius són únics quan existeixen. S'estendrà com a estat de la xarxa, el d'equilibri, ja sigui positiu o nul, i les utilitats de la mateixa també s'entendran com a les utilitats en l'estat d'equilibri dinàmic: $x^*(X[G;P])$.

4.1.4. Estudi de les condicions d'existència d'equilibris positius

Es vol analitzar en quines condicions es tenen equilibris x^* positius. Per això, es farà una reducció del problema, usant utilitats reduïdes i un únic paràmetre, i es tractarà de decidir per a quins valors permesos de paràmetre existeixen equilibris positius i s'intentarà fer-ne el càlcul en la mesura que sigui possible.

4.1.4.1. Reducció del problema

Per tal de reduir el problema de resolució de les equacions d'equilibri, s'introdueixen:

- *Utilitats reduïdes* $u_i := (c/b)x_i \; \forall i = 0, ..., (N-1)$
- *Paràmetre de despesa/benefici* $\delta := d/b$.

I obtenim:
$\dot{u_i} = -\delta u_i + \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j - g_i^+ u_i^2$.

Les equacions generals d'equilibri es transformen en les *equacions reduïdes d'equilibri* següents:
$-\delta u_i + \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j - g_i^+ u_i^2 = 0$ per $\forall i = 0, ..., (N-1)$
D'aquesta manera, el problema queda formulat en funció d'un únic paràmetre δ. Les utilitats en equilibri depenen ja només d'aquest paràmetre i s'escriuen així

$u^* \stackrel{!}{=} u^*[\delta]$

4.1.4.2. Estudi de les funcions d'utilitat reduïda $u^*[\delta]$

Primer, es vol veure per a quins valors de $\delta > 0$, es tenen utilitats positves.

- Definim ara $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $u_i := \alpha_i u_0$ i, per tant, $\alpha_0 = 1$.
- En consequència, les equacions reduïdes d'equilibri queden:

  $-\delta\alpha_i + \sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j - g_i^+ \alpha_i^2 u_0 = 0 \; \forall i = 0, ..., N$
- D'una equació qualsevol i-èssima obtenim:

  $u_0^* = (\sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j - \delta\alpha_i)/(g_i^+\alpha_i^2)$,
  i de l'equació 0-èssima:
  $u_0^* = (\sum_{j=1}^n a_{j0}\alpha_j - \delta)/(g_0^+)$.
  Igualant les 2 equacions, es pot aïllar δ :
  $\delta = [(g_i^+\alpha_i^2)(\sum_{j=1}^n a_{j0}\alpha_j) - (g_0^+)(\sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j)]/[(g_i^+\alpha_i^2) - (g_0^+\alpha_i)]$

4.1.4.2.1. Les funcions d'utilitat reduïda $u^*[\delta]$ són decreixents

Ara veiem que $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $u_i^*[\delta]$ és decreixent en δ, és a dir que $du_i^*/d\delta \leq 0$:

- Considerem la solució estacionària $u^*[\delta]$ del sistema d'equacions en les utilitats reduïdes

  $\dot{u_i} = -\delta u_i[\delta] + \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j[\delta] - g_i^+ u_i^2[\delta] = 0$;
- Ara fem una "petita" variació positiva de la variable δ i passem a $\delta + \Delta\delta$, el camp vectorial en $u^*[\delta]$ serà

  $\dot{u_i} = -(\delta + \Delta\delta)u_i[\delta] + \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j[\delta] - g_i^+ u_i^2[\delta] = -\Delta\delta u_i[\delta] \leq 0$.

Per tant, portarà a un equilibri amb utilitats $u_i^*[\delta]$ menors. És a dir, les utilitats són funcions decreixents en δ, i ho seran estrictament si són més grans que 0.

4.1.4.2.2. Valor de les funcions d'utilitat reduïda en $\delta = 0$

Ara, donat i :

- Si es consideren les expressions anteriors
  - $\forall\delta\ u_0^*[\delta] = (\sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j - \delta\alpha_i)/(g_i^+\alpha_i^2)$, i
  - $\forall\delta\ u_0^*[\delta] = (\sum_{j=1}^n a_{j0}\alpha_j - \delta)/(g_0^+)$
- per a $\delta = 0$, s'obté:

  $(\sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j)/(g_i^+\alpha_i^2) = (\sum_{j=1}^n a_{j0}\alpha_j)/(g_0^+)$,
  $(g_0^+)(\sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j) = (g_i^+\alpha_i^2)(\sum_{j=1}^n a_{j0}\alpha_j)$.
- S'observa que, si el graf és no dirigit, la condició anterior té la solució $\forall i = 0...(N-1)\ \alpha_i = 1$, ja que la condició es redueix a $(g_0^+)(g_i^-) = (g_i^+)(g_0^-)$, que és trivialment certa per a grafs no dirigits.

Finalment, es conclou que:

- Per al cas especial de graf no dirigit $\forall i = 0...(N-1) u_i^*[0] = 1$.
- Per al cas més general de graf dirigit tindrem diversos valors de $u_i^*[0] > 0$, que, en general, seran diferents.

4.1.4.2.3. Les funcions d'utilitat reduïda en δ_G (δ^{max})

Les utilitats que són inicialment més grans que 0 i depenen contínuament de δ s'aniran reduint.

Es considera, de nou, que $\forall i = 0, ..., (N-1)\ u_i[\delta] = \alpha_i[\delta]u_0[\delta]$, i l'existència un valor δ^{max} en què $u_0[\delta^{max}] = 0$.

S'observa que:

$\forall i = 0, ..., (N-1)\ -\delta^{max}\alpha_i[\delta^{max}] + \sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j[\delta^{max}] - g_i^+\alpha_i^2[\delta^{max}]u_0[\delta^{max}] = 0$

i, com que $u_0[\delta^{max}] = 0$, obtenim

$\forall i = 0, ..., (N-1)\ \sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j[\delta^{max}] - \delta^{max}\alpha_i[\delta^{max}] = 0.$

Escrivint aquest darrer conjunt d'equacions matricialment $(A(G)^t - \delta^{max}Id)\alpha[\delta^{max}] = 0$, es té un problema de valors propis en la matriu $A(G)^t$. Es pot veure que aquesta matriu és irreductible quan el graf G és connex i, per tant, es pot aplicar el teorema de Perron-Fröbenius que assegura que existeix un valor propi dominant positiu de $A(G)^t$, $\lambda_{PF}(A(G)^t)$, amb un vector propi amb elements no negatius $\alpha[\lambda_{PF}(A(G)^t)] = 0$: $(A(G^t - \lambda_{PF}(A(G)^t)Id)\alpha[\lambda_{PF}(A(G)^t)] = 0$. Aquest valor propi s'anomena valor propi de Perron-Fröbenius i compleix les condicions demanades per a δ^{max}: $\delta^{max} = \lambda_{PF}(A(G)^t)$.

Notació: Com que δ^{max} depen del graf G de la xarxa de fet tenim que $\delta^{max} = \delta^{max}[X[G; P]]$. Per simplificar la notació en aquest paràmatre màxim del graf, l'anomenarem paràmetre del graf G, δ_G, és a dir $\delta_G \overset{!}{:=} \delta^{max}[X[G; P]]$. Observem que realment el paràmetre depen d'un graf en una xarxa donada.

4.1.4.2.4. Sumari sobre les funcions d'utilitat reduïda $u[\delta]$

- S'ha reduït l'espai de parametres de $(b, c, d) \in \mathbb{R}^+ x\mathbb{R}^+ x\mathbb{R}^+$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. Això dóna la possibilitat de fer na mirada diferent del problema. En lloc de pensar en una xarxa concreta determinada per uns paràmetres $X[G; \delta^c]$; és a dir, a una δ^cconcreta, podem pensar en una família uniparàmetrica de xarxes $X[G; \delta]$.

- S'ha subsituit les funcions d'utilitat inicials $x[b, c, d]$ per les funcions d'utilitat reduïda $u[\delta] = (c/b)x[b, c, d]$. Les dues funcions tenent un comportament equivalent, i per tant, l'estudi fet anteriorment per δ és directament aplicable a x.

De tots els punts anteriors, es dedueix que l'interval en què les funcions d'utilitat són positives és $[0, \delta_G)$, on $\delta_G = \lambda_{PF}(A(G)^t)$.

- Per a grafs no dirigits, les funcions d'utilitat són inicialment coincidents, $u_i^*[0] = 1$, són decreixents en l'interval $[0, \delta_G)$ i s'anul·len a $\delta = \delta_G$.

- Per a grafs dirigit, les funcions d'utilitat inicialment poden tenir diversos valors de $u_i^*[0] > 0$ que, en general, seran diferents, són decreixents en l'interval $[0, \delta_G)$ i s'anul·len a $\delta = \delta_G$.

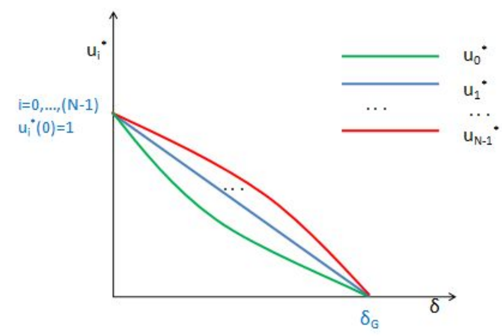

Fig.4.1. Graf no dirigit G: Fus $(u_i^*)_{i=0,\ldots,(N-1)}$

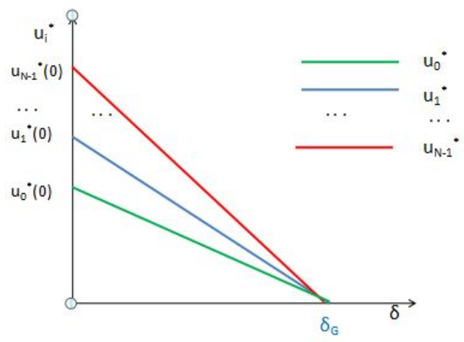

Fig.4.2. Graf dirigit G: Funcions $(u_i^*)_{i=0,\ldots,(N-1)}$

És conegut que, en afegir un element positiu a una matriu positiva, el seu valor propi de Perron-Fröbenius augmenta. Per tant,, $\lambda_{PF}(A(G)^t) < \lambda_{PF}(A(G + ij)^t)$ i així l'interval d'equilibris positius també augmenta. Es vorà que aquesta propietat es compleix en els exemples a continuació.

4.1.5. Exemples de càlcul del paràmetre del graf δ_G en una xarxa d'innovació amb costos quadràtics

4.1.5.1. Xarxa bilateral: graf no dirigit

En el cas que la xarxa bilateral, és a dir el cas en que la xarxa estigui definida sobre un graf no dirigit G, sabem que $A(G)^t = A(G)$, i les equacions reduïdes d'equilibri queden com $-\delta u_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j - g_i u_i^2 = 0 \; \forall i = 0, ..., N$, ja que $g_i^+ = g_i$. En aquest context de graf no dirigit, veiem a continuació alguns exemples de càlcul del paràmetre de graf δ_G.

4.1.5.1.1. Graf Regular R_g

En aquest cas, tots els vèrtex són equivalents amb

$\forall i$: $\quad u_i = u$ i $g_i = g$

I per tant s'obté una única equació reduïda:

$-\delta u + g * u - g * u^2 = 0$

D'on obtenim les solucions d'equilibri (per $u \neq 0$):

$u^*[\delta] = (g - \delta)/g$

En imposar l'existència d'equilibri positiu, obtenim que

$\delta \in (0, g)$; és a dir que el paràmetre dels grafs R_g, $\delta_{Rg} = g$

4.1.5.1.2. Graf complet K_n

Com a cas particular de graf regular, és té K_n on $g = (n-1)$:

$u^*(\delta) = (n - 1 - \delta)/(n - 1)$

En imposar l'existència d'equilibri positiu, surt que

$\delta \in (0, n-1)$; és a dir, $\delta_{Kn} = n - 1$

4.1.5.1.3. Path-2: $P_2 \equiv K_2$

La matriu d'adjacència és $A(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ amb $\lambda_{PF} = 1$.
Les equacions d'equilibri reduïdes són:

$-\delta u_0 + u_1 - u_0^2 = 0$

$-\delta u_1 + u_0 - u_1^2 = 0$

D'on s'obtenen les funcions d'utilitat:

$u_0^*[\delta] = u_1^*[\delta] = 1 - \delta$.

En imposar l'existència d'equilibri positiu $u_i^*[\delta] > 0$, obtenim

$\delta \in (0, 1)$; és a dir,$\delta_{P2} = 1$ (on $\delta_{P2} = \lambda_{PF}(P2)$).

4.1.5.1.4. Path-3: P_3

La matriu d'adjacència és $A(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ amb $\lambda_{PF} = \sqrt{2}$.

Les equacions d'equilibri reduïdes són:

$-\delta u_0 + u_1 - u_0^2 = 0$

$-\delta u_1 + (u_0 + u_2) - 2u_1^2 = 0$

$-\delta u_2 + u_1 - u_2^2 = 0$

D'on s'obtenen les funcions d'utilitat:

$u_0^*[\delta] = u_2^*[\delta]$ i $u_1^*[\delta]$

En imposar l'existència de solució positiva no nul·la $u_i^*[\delta] > 0$, surt

$\delta \in (0, \sqrt{2})$; és a dir, $\delta_{P3} = \sqrt{2}$ (on $\delta_{P3} = \lambda_{PF}(P_3)$).

4.1.5.2. Xarxa unilateral: graf dirigit

En el cas de que le xarxa estigui definida sobre un graf dirigit G, sabem que en general $A(G) \neq {}^tA(G)$, i les equacions reduïdes d'equilibri queden com $-\delta u_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ji}u_j - g_i^+ u_i^2 = 0$ per $\forall i = 0, ..., N$. En aquest context de graf dirigit, veiem a continuació alguns exemples de càlcul del paràmetre de graf δ_G.

4.1.5.2.1. Path dirigt-2 afegint arc: $P_2 + 12$

Un cas interessant és un cami dirigit de P_2 al que li afegin un arc e_{12}.

La matriu d'adjacència és $A(P_2 + e_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ amb $\lambda_{PF} = 1$. Les equacions d'equilibri reduïdes són:

$-\delta u_0 + u_1 - u_0^2 = 0$

$-\delta u_1 + u_0 - 2u_1^2 = 0$

$-\delta u_2 + u_1 = 0$

D'on s'obtenen les funcions d'utilitat:

$u_0^*[\delta]$, $u_1^*[\delta]$ i $u_2^*[\delta]$

Observem que la funció $u_2^*[\delta] = (1/\delta)u_1^*[\delta]$ i que per tant

$lim_{\delta \to 0} u_2^*[G][\delta] = +\infty$

és a dir que $u_m^*[\delta]$ no està acotada a l'interval $\delta \in (0, \delta_{P2+e12})$.
En imposar l'existència de solució positiva no nul·la $u_i^*[\delta] > 0$, surt

$\delta \in (0, 1)$; és a dir, $\delta_{P2+e12} = 1$ (on $\delta_{P2+e12} = \lambda_{PF}(P_2 + e_{12})$).

4.1.5.2.2. Path dirigt-2 afegint $m-1$ arcs: $P_2 + e_{12} + ... + e_{(m-1)m}$

Ampliant el cas anterior considerem ara un cami dirigit, de longitud qualsevol al que li afegin $m-1$ arcs $e_{12} + ... + e_{(m-1)m}$, i obtenim $G = P_2 + e_{12} + ... + e_{(m-1)m}$
Les equacions d'equilibri reduïdes són:

$-\delta u_0 + u_1 - u_0^2 = 0$

$-\delta u_1 + u_0 - 2u_1^2 = 0$

$-\delta u_2 + u_1 - u_2^2 = 0$

...

$-\delta u_{m-1} + u_m - u_{m-1}^2 = 0$

$-\delta u_m + u_{m-1} = 0$

D'on s'obtenen les funcions d'utilitat:

$u_0^*[\delta]$, $u_1^*[\delta]$, ... i $u_m^*[\delta]$

Observem que la funció $u_m^*[\delta] = (1/\delta)u_{m-1}^*[\delta]$ i que per tant

$lim_{\delta\to 0} u_m^*[G][\delta] = +\infty$

és a dir que $u_m^*[\delta]$ no està acotada a l'interval $\delta \in (0, \delta_G)$.
En imposar l'existència de solució positiva no nul·la $u_i^*[\delta] > 0$, surt

$\delta \in (0,1)$; és a dir, $\delta_G = 1$ (on $\delta_G = \lambda_{PF}(G)$).

4.2. Estudi analític dels jocs en xarxes d'innovació amb costos quadràtics

4.2.1. Definició analítica d'un joc en xarxa d'innovació amb costos quadràtics

Un joc en xarxes d'innovació amb costos quadràtics $J_X = (R; \chi_N)$, consisteix en:

- Un *conjunt de xarxes d'innovació* χ_N amb $X = X[G; P] \in \chi_N$, com les descrites anteriorment, per a tots els grafs d'un mateix nombre de vèrtexs, sobre el qual es defineix el joc atenent al seus estats d'equilibri $x^* = x^*(X[G; P])$, un cop fixats els paràmetres. Es considera doncs el conjunt de tots els grafs de N vèrtexs com $\mathcal{H}_N := \{G : \#V(G) = N\}$ i el conjunt de *xarxes del joc* $\chi_N = (X[G; P])_{G\in\mathcal{H}_N}$.
- Les *regles del joc* R, defineixen com poden actuar els jugadors i condicionen la *dinàmica discreta* o *estructural* del joc en xarxes d'innovació. En cada jugada es parteix d'una xarxa d'innovació $X = X[G; P]$ i es passa a una altra $X^{'} = X(G'; P)$, atenent a les regles donades, en què només es modifica el graf de la xarxa.
- La finalització del joc es dóna quan s'arriba a un *equilibri absolut :*
  - El joc acaba quan seguint les regles R, ja no és possible passar a un nova xarxa $X^{'} \neq X$; és a dir, no és posible passar a un nou graf $G^{'} \neq G$.
  - El joc pot no acabar mai. Encara que el conjunt de grafs $\mathcal{H}_N$ sigui finit, i així es poden trobar realitzacions, o partides, que siguin periòdiques: $G \longmapsto G^{'} ... \longmapsto G...$

4.2.2. Regles del joc en xarxa d'innovació amb costos quadràtics: utility driven dynamics

Per a poder fer l'estudi analitic dels jocs en xarxa d'innovació amb costos quadràtics, farem servir les regles anomenades *utility driven dynamics*. Aquestes regles es caracteritzen en que les jugades permeses són aquelles en que la utilitat de l'agent o agents que decideixen sempre augmenten.

Hi ha 2 tipus de regles segons el tipus de xarxa:

- *Utility driven dynamics bilateral* per les xarxes bilaterals.
- *Utility driven dynamics unilateral* per les xarxes unilaterals.

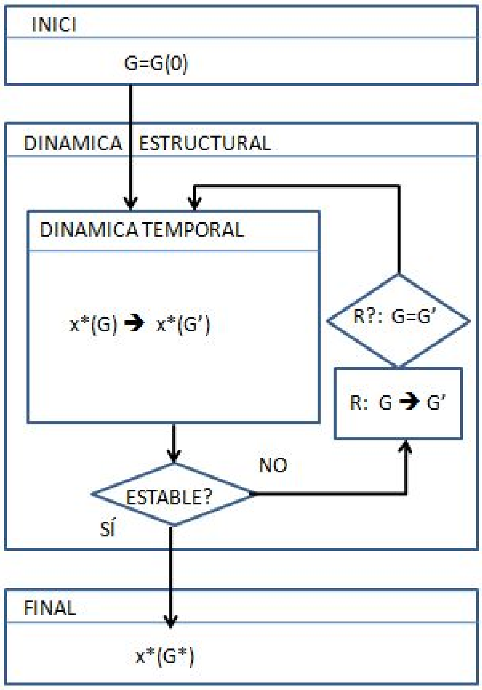

Fig.4.3. Doble dinàmica joc en xarxa

4.2.2.1. Regles del joc utility driven dynamics bilateral

Per a xarxes bilaterals, això és per xarxes sobre grafs no dirigits, les regles del joc R defineixen com han d'actuar els agents en el moment d'establir o eliminar relacions entre ells. Més concretament defineixen les condicions de creació o eliminació d'arestes en el graf. En aquest cas, les regles del joc queden formalment definides amb l'algorisme *ultimate driven dynamics bilateral* corresponent, que podem descriure en els passos següents:

(A) Inicialització: es tria un graf inicial $G = G(0)$ de N vèrtex.

(B) Bloc bucle

- (B.1) Es calcula l'equilibri $x^*(X[G;P])$. Abusant del llenguatge. s'escriu també més simplificadament $x^*[G] \stackrel{!}{=} x^*(X[G;P])$, atés que els paràmetres P són constants.
- (B.2) Dinàmica estructural (regla utility driven dynamics bilateral), que determina: $G' = G \pm ij$
  - (B.2.1) Crear aleatòriament arestes (random bilateral creation): $G' = G + ij$
    - (B.2.1.a) Seleccionar aleatoriàment un parell d'agents i, j tals que $ij \notin E(G)$
    - (B.2.1.b) Calcular les utilitats a l'equilibri $x^*[G]$ i $x^*[G + ij]$
    - (B.2.1.c) Si $x_i^*[G + ij] > x_i^*[G]$ i $x_j^*[G + ij] > x_j^*[G]$, crear aresta ij i considerar $G' = G + ij$
  - (B.2.2) Eliminació arestes (optimal bilateral deletion): $G' = G - ij$
    - (B.2.2.a) Seleccionar aleatòriament un agent i tal que $\exists ij \in E(G)$

- $*$ (B.2.2.b) Calcular les utilitats $\forall ij \in E(G)$ $x^*[G - ij]$
- $*$ (B.2.2.c) Si $Max_{j \in N_i^+}(x_i^*[G - ij]) > x_i^*[G]$, eliminar ij_{max} : $G' = G - ij_{max}$, on ij_{max}correspon al j on s'assoleix el màxim.

- (B.3) Comprovar estabilitat [veure concepte d'estabilitat a l'apartat següent 3.1.2.3.2)]:
  - (B.3.1) Si $x^*[G]$ és *estable* (veure apartat següent 3.2.3.2.) STOP: $x^*[G^*]$.
  - (B.3.2) Si $x^*[G]$ és *no estable* (veure apartat següent 3.2.3.2.) GOTO (B.1) amb $G = G'$.

Per més detalls pot consultarse [11], p.229-230.

4.2.2.2. Regles del joc utility driven dynamics unilateral

Per a xarxes unilaterals, això és per xarxes sobre grafs dirigits, les regles del joc R defineixen com han d'actuar els agents en el moment d'establir o eliminar relacions entre ells. Més concretament defineixen les condicions de creació o eliminació d'arcs en el graf. En aquest cas, les regles del joc queden formalment definides amb l'algorisme *ultimate driven dynamics unilateral* corresponent, que podem descriure en els passos següents:

(A) Inicialització: generem un graf incial $G = G(0)$ qualsevol de N vèrtex i de qualsevol nombre d'arestes.

(B) Bloc bucle

- (B.1) Es calcula l'equilibri $x^*(X[G; P])$. Abusant del llenguatge. s'escriu també més simplificadament $x^*[G] \overset{!}{=} x^*(X[G; P])$, atés que els paràmetres P són constants.
- (B.2) Dinàmica estructural (regla ultimate driven dynamics bilateral), que determina: $G' = G \pm ij$
  - (B.2.1) Creació aleatòria d'arcs (random bilateral creation): $G' = G + ij$
    - $*$ (B.2.1.a) Seleccionar aleatòriament un parell d'agents i, j tals que $ij \notin E(G)$
    - $*$ (B.2.1.b) Calcular les utilitats a l'equilibri $x^*[G]$ i $x^*[G + ij]$
    - $*$ (B.2.1.c) Si $x_i^*[G + ij] > x_i^*[G]$, crear arc ij i obtenim $G' = G + ij$
  - (B.2.2) Eliminació arestes (optimal bilateral deletion): $G' = G - ij$
    - $*$ (B.2.2.a) Seleccionar aleatòriament un agent i tal que $\exists j \in V(G)$ $\exists ij \in E(G)$
    - $*$ (B.2.2.b) Calcular les utilitats $\forall j \neq i \in V(G)$ $x^*[G - ij]$
    - $*$ (B.2.2.c) Si $Max_{j \in N_i^+}(x_i^*[G - ij]) > x_i^*[G]$ (*1), eliminar $ij_{max} : G' = G - ij_{max}$ [(*1) La condició es equilvalent a dir que $\exists j \in N_i^+$ $x_i^*[G - ij]x^* = Max_{j \in N_i^+}(x_i^*[G - ij]) > x_i^*[G]$, en triem un i l'anomenen ij_{max}].
- (B.3) Comprovar estabilitat [veure concepte d'estabilitat a l'apartat següent 3.1.2.3.2)]:
  - (B.3.1) Si $x^*[G]$ és *estable* (veure apartat següent 3.2.3.2.) STOP: $x^*[G^*]$.
  - (B.3.2) Si $x^*[G]$ és *no estable* (veure apartat següent 3.2.3.2.) GOTO (B.1) amb $G = G'$

Per més es detalls pot consultar [11], p.229-230.

4.2.3. Equilibri o estabilitat del joc en xarxa

El joc para si s'arriba a una situació d'*estabilitat (absoluta) de la xarxa.*

- *Estabilitat sobre xarxes bilaterals*: Un joc en xarxa bilateral té una *solució estable* sii $\forall ij$ $([x_i^*[G+ij] \leqq x_i^*[G] \vee [x_j^*[G+ij] \leqq x_j^*[G]) \wedge (x_i^*[G-ij] \leqq x_i^*[G])$. És a dir, quan cap aresta nova que millora la utilitat dels 2 agents connectats i, a més, cap agent pot treure cap aresta per tal de millorar la seva pròpia utilitat. En aquest cas, escriurem el graf estable per G i la seva utilitat per $x^*[G^*]$.

- *Estabilitat en xarxes unilaterals*: Un joc en xarxa unilateral té una *solució estable* sii $\forall ij$ $x_i^*[G+ij] \leqq x_i^*[G] \wedge [x_i^*[G-ij] \leqq x_i^*[G]$. És a dir, quan cap agent no pot afegir ni treure cap arc per tal de millorar la seva pròpia utilitat. En aquest cas escriurem $x^*[G^*]$.

Com ja ja s'ha observat els jocs poden no parar i tenir partides amb un nombre infinit de jugades. S'ha de pensar que el joc està definit amb un nombre finit d'agents N el nombre de jugades diferents possibles també es finit. Per això una partida amb infinites jugades pot presentar situacions periòdiques en que es repeteixen seqüencies de jugades $...x^*[G] \rightarrow x^*[G'] \rightarrow ... \rightarrow x^*[G]...$.

5. MODELITZACIO I SIMULACIÓ DE JOCS EN XARXES D'INNOVACIÓ AMB COSTOS QUADRÀTICS

5.1. Modelització

5.1.1. Procés de modelitzció

A partir del model matemàtic de joc en xarxa d'innovació en costos quadràtics, a l'anterior capítol s'han estudiat casos simples que s'han pugut tractar amb eines analítiques. En aquesta part del treball es vol anar més enllà i estudiar casos més complexos del model. Per això es necessiten eines de simulació. En primer lloc es fa una modelització a partir de la qual s'ha elaborat un programa que ha permès realitzar diverses simulacions.

5.1.2. El programa de simulació QINLab

El programa QINLab està fet en C++, utilitzant classes, en una programació orientada a objectes. Els objectes contenen les *estructures de dades* i contnene els *processos* o funcions que es poden fer sobre les mateixes.

5.1.2.1. Objectes

De forma resumida, s'indiquen les estructures i dades utilitzades:

- *Graf*
  - *Vèrtexs*
  - *Enllaços*
  - *Llistes d'adjecencies* o Llistes de veïns
- Xarxa
  - *Paràmetres*
  - *Camp vectorial* i *diferencial del camp vectorial*
  - *Quasiequilibris*
- Joc en xarxa
  - *Inicialització*: Es donen el graf inicial $G(0)$ i els parametres del joc b, c, d, encara que internament es treballa amb l'únic paràmetre del joc δ.
  - *Moviments* o jugades atenent a les regles

5.1.2.2. Processos

Analogmanent, de forma resumida, s'indiquen processos utilitzats:

- *Processos bàsics*
  - *Construcció del graf inicial*: A partir d'arxiu o generat al·leatoriament.
  - *Construcció d'una xarxa* a partir d'un graf i dels paràmetres
  - *Càlcul paràmetre del graf* δ_G: És el valor propi Perron-Fröbenius de la matriu d'adjacència transposada $(A(G))^T$ usant el mètode de la potència.

- *Càlcul de les funcions d'utilitat reduïda en equilibri* $u^*[\delta]$ a l'interval on es positiva (això és $\delta \in (0, \delta_G)$ mitjançant el mètode iteratiu de Newton.
- *Representació del graf* per pantalla amb el OpenGL i GLut.
- *Elaboració de les gràfiques de les funcions d'utilitat i de la diferencial del camp* amvalors propi: GLU

- *Processos de simulació*: La simulació una partida es pot fer de 2 maneres diferents. La primera es manual de manera dirigida i permet analitzar pas a a pas una partida. La segona es automàtica de manera al·leatoria i permet analitzar i va destinada a analitzar conjunts de partides (?estadístic).
  - *Simulació dirigida*: Cada jugada es fa manualment decidint en cada jugada quin o quins jugadors intervenen, i quina acció, afegir o eliminar aresta, es fa. Així es pot analitzar jugada a jugada i tot una partida. Quan ens centrem en una jugada concreta podem variar a voluntat el paràmetre del joc δ_{joc}.
  - *Simulació al·leatoria*: Primer cal fer la tria la *iniciatlització*, es a dir es tria un graf incial $G(0)$ i un parametre del joc δ_{joc} i es genera la xarxa $X(0) = X([(0), \delta_{joc}]$, i per tant s'obté un quasiequilibri inicial $x^*[G(0)]$. En segon terme es dispara el joc i es genera una partida de manera que en cada jugada, per poder simular la partida, es fa una tria al·leatoria d'un jugador i i quan cal, a més, es tria aleatoriament d'un enllaç ij. Formalment:
    - $\delta_{joc}, x * [G(0)] \xmapsto{J_X} x * [G*]$

5.2. Simulació de jocs en xarxes bilaterals d'innovació amb costos quadràtics

5.2.1. Regles del joc en xarxes bilaterals

Com ja hem vist a l'estudi anàlitic en cada jugada, un jugador i considera la realització d'una acció sobre el graf: considera o be afegir o be elminar una aresta.

El fet que el jugador pugui realitzar la jugada queda condicionada a que, després d'efectuar-se l'acció, la utilitat d'aquest ha d'augmentar, i a més en el cas d'afegir una aresta cal que la utilitat del jugador enllaçat també ha d'augmentar. Formalment per cada jugador i:

- Condició afegir aresta: $\exists j\ u^*_{i,j}(G) < u^*_{i,j}(G + ij)$
- Eliminar una aresta: $\exists j_{max} \in N_i^+(G)\ u_i^*(G) < u_i^*(G - ij_{max})$, amb
  - j_{max} tal que $u_i^*(G - ij_{max}) = Max_{j \in N_i^+}(u_i^*[G - ij])$

Cal tenir en compte que en el cas de la simulació automàtica cal introduir un factor al·leatori.

5.2.2. Simulació i elaboració d'hipòtesis i resultats

Quan fem diverses simulacions amb el programa QINLab amb l'opció de xarxa bilateral, veiem que, en tots els casos, està passant el mateix i, per tant, tenim l'evidència dels següents fets que es relacionen en els apartats següents.

5.2.2.1. Graf individual

En les observacions fetes es comprova primer que la xarxa té utilitat reduïda u_i^* positiva, en algun jugador, quan el paràmetre del joc és inferior al del graf. Formalment: si $\delta_{joc} \leqslant \delta_G$ aleshores $\exists i = 0, ..., (N-1)\ u_i^*[G][\delta_{joc}] > 0$.

5.2.2.2. Moviment o jugada

5.2.2.2.1. Observacions per simulacions de les jugades

En les simulacions fetes es veu que:

- Sempre l'unic moviment que es fa és el corresponent a afegir una aresta i mai el d'elminar-la.
  - Sempre $u^*[G][\delta_{joc}] \longmapsto u^*[G+ij][\delta_{joc}]$
- i també observem en les grafiques de les utilitats reduïdes:
  - sempre $\delta \in (0, \delta_{G+ij})$ $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $u^*[G][\delta] < u^*[G+ij][\delta_{joc}]$

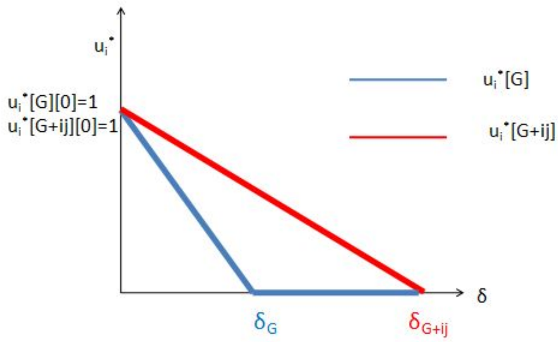

Fig.5.1. Jugada en xarxa bilateral de G a $G + ij$

5.2.2.2.2. Anàlisis de les observacions i resultats per les jugades

Analitzem aquest fet. En cada jugada les utilitats reduïdes es comporten d'una mateixa manera:

- El valor del paràmetre del graf augmenta si afegim arestes al graf:

  $\delta_G = \lambda_{PF}(G) < \lambda_{PF}(G + ij) = \delta_{G+ij}$

- La utilitat de cada vèrtex augmenta en afegir una aresta, i per tant es redueix en elimnar-la. Les funcions d'utilitats reduïdes creixen, en tot el recorregut en que són positives, al afegir arestes al graf:

  $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $\delta \in (0, \delta_{G+ij})$ $u_i^*[G][\delta] \leq u_i^*[G+ij][\delta]$

Ara podem fer un examen exhaustiu amb totes les situacions posibles per que a l'aplicar la regla es produiexi un nou graf: $G \mapsto G' \neq G$. depen fonamentalment del parametre del joc. De fet només hi ha 3 casos posibles:

- (1) $\delta_{joc} \leqslant \delta_G < \delta_{G'}$
  - En aquest cas sempre donarà la jugada $G \mapsto G' = G + ij$,
    - ja que $\exists i, j$ tal que $u_i^*[G'][\delta_{joc}] > u_i^*[G][\delta_{joc}] > 0$.
- (2) $\delta_G \leq \delta_{joc} < \delta_{G'}$:
  - En aquest cas sempre es produirà la jugada $G \mapsto G' = G + ij$,
    - ja que $\exists i, j$ tal que $u_i^*[G'][\delta_{joc}] > u_j^*[G'][\delta_{joc}] = 0$.
- (3)$\delta_G < \delta_{G'} \leq \delta_{joc}$
  - En aquest cas no es produirà cap jugada i el joc acaba
    - ja que $\forall i$ tal que $u_i^*[G'][\delta_{joc}] = u_i^*[G][\delta_{joc}] = 0$

5.2.3.3. Resultat fonamental per les jugades

En síntesi, *el joc en xarxa bilateral* només hi ha 2 possiblitats en una jugada:

- (1) Només pot jugarse $G \mapsto G' = G + ij$ si $\delta_{joc} \leqslant \delta_G < \delta_{G'}$ o $\delta_G \leq \delta_{joc} < \delta_{G'}$.
- (2) No es pot fer cap jugada$\delta_G < \delta_{G'} \leq \delta_{joc}$.

5.2.2.3. Partida o realització del joc

5.2.2.3.1. Observacions per simulacions de les partides

Al fer diverses simulacions veiem que tant amb la simulació manual com amb l'automàtica una partida o no es mou del graf inicial $G(0)$, i acaba en aquest, o acabem en el graf complet K_N.

- $u^*[G(0)][\delta_{joc}] \longmapsto u^*[G^*][\delta_{joc}]$, amb $G^* = G(0)$
- $u^*[G(0)][\delta_{joc}] \longmapsto ... \longmapsto u^*[G^*][\delta_{joc}]$, amb $G^* = K_N$

5.2.2.3.2. Anàlisis de les observacions i resultats per les partides

Analitzant les partides i degut al que s'ha vist en el cas d'una jugada individual veiem que hi ha 3 situacions:

- (1) Comencem en un graf inicial amb utilitat nula, i tots els grafs que s'aconsegueixen afegint una aresta (o eliminant-la) tenen una utilitat nula; aleshores el joc para al graf inicial. Formament:
  - $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)}$ i $\forall i, j = 0, ..., (N-1)$ $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)+\mathrm{ij}}$
    - (en aquest cas tenim que $u^*[G(0)][\delta_{joc}] = 0$) i $\forall i, j = 0, ..., (N-1)$ $u^*[G+ij][\delta_{joc}] = 0$).
    - Aleshores $u^*[G(0)][\delta_{joc}] = 0 \longmapsto u^*[G^*][\delta_{joc}] = 0$, amb $G^* = G(0)$.
- (2) Comencem en un graf inicial amb utilitat nula, i algun graf que s'aconsegueix afegint una aresta te una utilitat positiva (no nula); aleshores el joc va continuant ja que sempre podem anar afegint arestes que incrementen la utilitat reduïda i que acaba al graf complet. Formament:
  - $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)}$ i $\exists i, j = 0, ..., (N-1)$ $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)+\mathrm{ij}}$
    - (en aquest cas tenim que $u^*[G(0)][\delta_{joc}] = 0$) i $\exists i, j = 0, ..., (N-1)$ $u^*[G+ij][\delta_{joc}] > 0$).
    - Aleshores $u^*[G(0)][\delta_{joc}] = 0 \longmapsto u^*[G^*][\delta_{joc}] > 0$, amb $G^* = K_N$.
- (3) Comencem en un graf inicial amb utilitat positiva (no nula); aleshores el joc va continuant ja que sempre podem anar afegint arestes que incrementen la utilitat reduïda i que acaba al graf complet. Formament:
  - $\delta_{G(0)} < \delta_{joc}$
    - (en aquest cas tenim que $u^*[G(0)][\delta_{joc}] > 0$).
    - Aleshores $u^*[G(0)][\delta_{joc}] = 0 \longmapsto u^*[G^*][\delta_{joc}] > 0$, amb $G^* = K_N$.

5.2.2.3.3. Resultat fonamental per les partides de jocs en xarxes bilaterals

En síntesi, *el joc en xarxa bilateral está determinat* i només hi ha 2 possiblitats:

- (A) El joc no te cap jugada i acaba a $u^*[G* = G(0)][\delta_{joc}] = 0$, si

  $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)}$ i $\forall i, j = 0, ..., (N-1)$ $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)+\mathrm{ij}}$
- (B) El joc acaba a $u^*[G* = K_N][\delta_{joc}]$ si:

  $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)}$ i $\exists i, j = 0, ..., (N-1)$ $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)+\mathrm{ij}}$ o $\delta_{G(0)} < \delta_{joc}$

5.3. Simulació de jocs en xarxes unilaterals d'innovació amb costos quadràtics

5.3.1. Regles del joc en xarxes unilaterals

Com ja hem vist a l'estudi anàlitic en cada jugada, un jugador i considera la realització d'una acció sobre el graf: considera o be afegir o be elminar una aresta.

El fet que el jugador pugui realitzar la jugada queda condicionada a que, després d'efectuar-se l'acció, la utilitat d'aquest ha d'augmentar. Formalment per cada jugador i:

- Condició afegir aresta: $\exists j \; u^*_{i,}(G) < u^*_i(G + ij)$
- Eliminar una aresta: $\exists j_{max} \in N^+_i(G) \; u^*_i(G) < u^*_i(G - ij_{max})$, amb
  - j_{max} tal que $u^*_i(G - ij_{max}) = Max_{j \in N^+_i}(u^*_i[G - ij])$

Cal tenir en compte que en el cas de la simulació automàtica cal introduir un factor al·leatori.

5.3.2. Simulació: hipòtesis

Quan fem diverses simulacions amb el programa QINLab amb l'opció de xarxa unilateral, veiem que, en tots els casos, està passant el mateix i, per tant, tenim l'evidència dels següents fets que es relacionen en els apartats següents.

5.3.2.1. Graf individual

En les observacions fetes es comprova primer que la xarxa té utilitat reduïda u^*_i positiva, en algun jugador, quan el paràmetre del joc és inferior al del graf. Formalment: si $\delta_{joc} \leqslant \delta_G$ aleshores $\exists i = 0, ..., (N-1) \; u^*_i[G][\delta_{joc}] > 0$.

En les observacions fetes també es comprova que en el de xarxa unilateral, a diferència del que passava en el cas de xarxa bilateral, la funció $u^*_i[G][\delta]$ pot estar no acotada ja que pot passar que

$lim_{\delta \to 0} \; u^*_i[G][\delta] = +\infty$

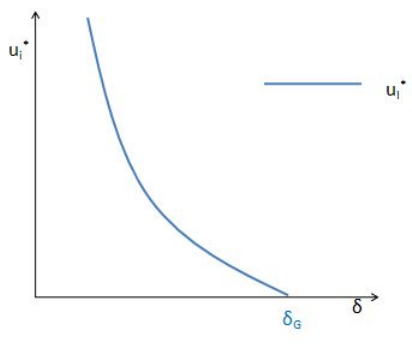

Fig.5.2. Funció $u^*_i[G]$ no acotada

5.3.2.2. Moviment o jugada

5.3.2.2.1. Observacions per simulacions de les jugades

En les simulacions fetes es veu que:

- En el moviment es donen les 2 possibilitats: de vegades el moviment correspon a afegir un arc, i de vegades el moviment correspon a elimnar un arc. Ara:

- O $u^*[G][\delta_{joc}] \longmapsto u^*[G+ij][\delta_{joc}]$ o
- $u^*[G][\delta_{joc}] \longmapsto u^*[G-ij][\delta_{joc}]$

- i també observem en les grafiques de les utilitats reduïdes es produeien 2 situacions:
  - No hi ha talls $\nexists \delta^{tall}_{G,G+ij}$

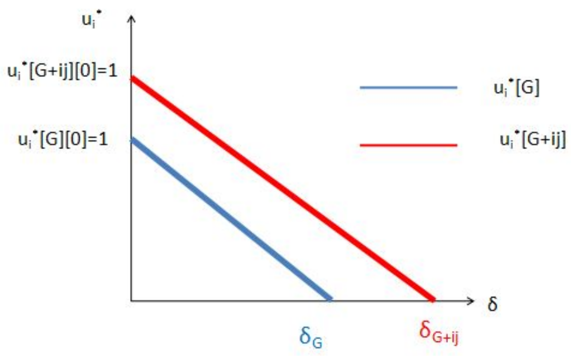

Fig.5.3. Jugada en xarxa unilateral de $G \mapsto G+ij$,i $\nexists \delta^{tall}_{G,G+ij}$

  - Hi ha talls $\exists \delta^{tall}_{G,G+ij}$

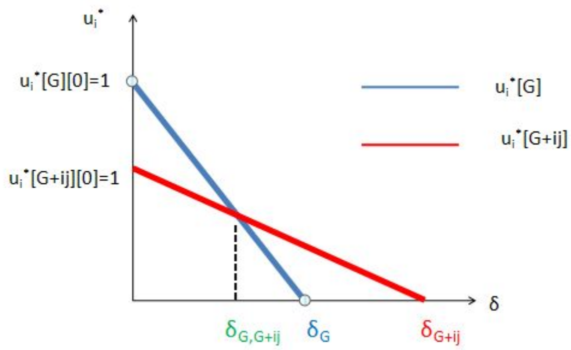

Fig.5.4. Jugada en xarxa unilateral de $G \rightleftharpoons G+ij$,i $\exists \delta^{tall}_{G,G+ij}$

5.3.2.2.2. Anàlisis de les observacions i resultats per les jugades

En el cas de joc en xarxa unilateral apareix una nova condició de tall:

- El valor màxim que fa que les utilitats reduïdes siguin positives aumenta si afegim arestes al graf:

  $\delta^G_{max} = \lambda_{PF}(G) \leq \lambda_{PF}(G+ij) = \delta^{G+ij}_{max}$

- La utilitat d'un vertex pot augmentar tant si al graf li afegim una aresta com si la eliminem. Observem que les funcions $u_i^*[G][\delta]$ i $u_i^*[G+ij][\delta]$ es tallen en algún punt, és a dir que:

  $\exists \delta^{G,G+ij}_{tall} \in (0, \delta^{G+ij}_{max})$ tal que $\forall i = 0, ..., (N-1)$ $u_i^*[G][\delta^{G,G+ij}_{tall}] = u_i^*[G+ij][\delta^{G,G+ij}_{tall}]$

El cas d'eliminar una aresta es equivalent.

En el cas de joc en xarxa unilateral les utilitats reduïdes es comporten de forma diversa. Ara en general pensem la regla $G^{'} = G \pm ij$. Per fer la anlisis només considerem el cas d'afegir una arc $G^{'} = G + ij$, considerant el cas d'eliminar un enllaç com el simètric d'aquest. Es tracta d'observar com coevoluciona el model. Sabem que en general $u_i^*[G][0] \neq u_i^*[G^{'}][0]$ i $\delta_G] < \delta_{G+ij}$. D'on deduïm que a més del cas vist per les xarxes unilaterals ara pot passar que $\exists \delta_{G,G+ij}^{tall} \in (\delta_G, \delta_{G+ij})$. Això fa que es donin 3 situacions adicionals a les 3 que hem vist pel cas de xarxes bilaterals:

- $\nexists \delta_{G,G+ij}^{tall}$
  - (1) $\delta_{joc} \leqslant \delta_G < \delta_{G'}$
    - En aquest cas sempre donarà la jugada $G \mapsto G^{'} = G + ij$,
      - ja que $\exists i, j$ tal que $u_i^*[G^{'}][\delta_{joc}] > u_i^*[G][\delta_{joc}] > 0$.
  - (2) $\delta_G \leq \delta_{joc} < \delta_{G'}$:
    - En aquest cas sempre es produirà la jugada $G \mapsto G^{'} = G + ij$,
      - ja que $\exists i, j$ tal que $u_i^*[G^{'}][\delta_{joc}] > u_j^*[G^{'}][\delta_{joc}] = 0$.
  - (3)$\delta_G < \delta_{G'} \leq \delta_{joc}$
    - En aquest cas no es produirà cap jugada i el joc acaba
      - ja que $\forall i$ tal que $u_i^*[G^{'}][\delta_{joc}] = u_i^*[G][\delta_{joc}] = 0$
- $\exists \delta_{G,G+ij}^{tall}$
  - (4) $\forall \delta \in (0, \delta_{tall}^{G,G+ij^{'}})$
    - La jugada permesa és de $G + ij \longmapsto G$
      - ja que $u_i^*[G][\delta] > u_i^*[G + ij][\delta]$
  - (5) $\delta = \delta_{tall}^{G,G+ij^{'}}$
    - No hi jugada permesa
      - ja que$u_i^*[G][\delta_{tall}^{G,G+ij}] = u_i^*[G^{'}][\delta_{tall}^{G,G+ij}]$,
  - (6) $\forall \delta \in (\delta_{tall}^{G,G+ij}, \delta_{G+ij}^{'})$
    - el pas permes és de $G \longmapsto G + ij$
      - ja que$u_i^*[G][\delta] \leq u_i^*[G + ij][\delta]$

5.3.2.2.3. Resultat fonamental per les jugades

En síntesi, *el joc en xarxa bilateral* només hi ha 3 possiblitats en una jugada:

- (1) l'única jugada permesa és $G \longmapsto G + ij$ si
  - $\nexists \delta_{G,G+ij}^{tall}$ i $(\delta_{joc} \leqslant \delta_G < \delta_{G'}$ o $\delta_G \leq \delta_{joc} < \delta_{G'})$ o
    $\exists \delta_{G,G+ij}^{tall}$ i $\forall \delta \in (\delta_{tall}^{G,G+ij}, \delta_{G+ij}^{'})$
- (2) l'única jugada permesa és $G \longmapsto G - ij$ si
  - $\exists \delta_{G,G+ij}^{tall}$ i $\forall \delta \in (0, \delta_{tall}^{G,G+ij^{'}})$
- (3) No hi ha cap jugada permesa si
  - $\nexists \delta_{G,G+ij}^{tall}$ i $\delta_G < \delta_{G'} \leq \delta_{joc}$ o
    $\exists \delta_{G,G+ij}^{tall}$ i $\delta_G < \delta_{G'} \leq \delta_{joc}$

5.3.2.3. Partida o realització del joc

5.3.2.3.1. Observacions per simulacions de les partides

Al fer diverses observacions, tan per simulacions dirigides com per simulacions automàtiques, veiem que per les partide del joc hi ha moltes variacions i ara para pot passar que el joc no es mou del graf inicial, acabem en el graf complert, o en altres, i fins i tot que no acabi mai.

- $x*(G(0)) \longmapsto x*(G*)$, amb $G* = G(0)$
- $x*(G(0)) \longmapsto ... \longmapsto x*(G*)$, amb $G* = K_M$, amb $M \leq N$
- $x*(G(0)) \longmapsto ... \longmapsto x*(G*)$, amb $G* = C_M$, amb $M \leq N$
- $x*(G(0)) \longmapsto ... \longmapsto x*(G*)$, amb $G*$altres tipus?
- $x*(G(0)) \longmapsto ... \longmapsto \infty$? , simulacions amb poques tirades relatives a N

5.3.2.3.2. Anàlisis de les observacions i resultats per les partides[++++REVISAR]

Analitzant les observacions recollides per la simulació de partides i tenint en compte el que s'ha vist en el cas d'una jugada individual, es previsible que la situació pels jocs en xarxes unilateral és molt més complicada que en el cas de veiem pels jocs en xarxes bilaterals.

Els 2 fets fonamentals que s'observen son:

- (1) En una jugada es pot passar d'una xarxa a una altre afegint o elminant arcs del graf corresponent. Això trenca la monotonia observada en el cas de xarxes bilaterals. També fa que hi hagi la possibilitat de seqüències infinites.
- (2) Els grafs que corresponen a l'equilibri del joc amb jugades, és a dir que el joc no es para en el graf inicial, en el cas de xarxes bilaterals es reduiden al graf complet K_N. En el cas de xarxes unilaterals els grafs que corresponen a equilibris de joc, s'ha trovat entre altres, a part del graf complet K_N : el graf complet per una part dels vèrtexs $K_M$amb $M \leq N$; el cicles dirigits DC_M amb $M \leq N$; ...

5.3.2.3.3. Resultat fonamental per les partides de jocs en xarxes unilaterals

En síntesi, *el joc en xarxa unilateral no es sap si está determinat* al contrari del cas de les xarxes bilaterals en que si ho està. En principi hi ha 3 possibilitats fonamentals:

- (A) El joc no te cap jugada i acaba a $u^*[G* = G(0)][\delta_{joc}] = 0$, si

  $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)}$ i $\forall i, j = 0, ..., (N-1)$ $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)+\mathrm{ij}}$ i això passa si:

  $\nexists \delta^{tall}_{G,G+ij}$ i $\delta_G < \delta_{G'} \leq \delta_{joc}$ o
  $\exists \delta^{tall}_{G,G+ij}$ i $\delta_G < \delta_{G'} \leq \delta_{joc}$

- (B) El joc acaba en un nombre finit de jugades a $u^*[G*][\delta_{joc}]$, pero $G^* = K_M$ $M \leq N$, o $G^* = DC_M$ $M \leq N$, altres casos?, si:

  $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)}$ i $\exists i, j = 0, ..., (N-1)$ $\delta_{joc} \leqslant \delta_{G(0)+\mathrm{ij}}$ o $\delta_{G(0)} < \delta_{joc}$

- (C) El joc no acaba mai per que hi ha una seqüència infinita de jugades.

6. INTERPRETACIÓ ECONÒMICA DELS RESULTATS DEL MODEL AMB COSTOS QUADRÀTICA

6.1. Joc en xarxa d'innovació pels mercats d'intercanvi de coneixment

Ara es vorà el model analitzat amb costos quadràtics pot interpretar-se des del punt de vista de la teoria econòmica, pensant en un *mercat d'intercanvi de coneixement*. En aquest mercat el coneixement proporciona a cada agent una certa utilitat que depen funcionalment del propi coneixement així com del coneixement de la reste d'agents connectats a la xarxa.

Formalment el mercat de coneixment es modelitza com un joc sobre xarxa d'innovació $J_X = (R; \chi_N)$, amb les xarxes caracteritzades per

$X = X(G; V_x, V_e, F) \in \chi_N$.

Els valors de les variables d'estat V_e de la xarxa de cada agent s'interpreten com la utilitat que rep cada un d'ells del coneixement propi i dels seus veïns $u_i(x_0, ..., x_N)$.

Tal com hem vist, les funcions de dinàmica venen definides com

$F = (F_i)_{i=0,...,(N-1)}$, amb $F_i = F_i(x_0, ..., x_N; A(G); b, c, d)$

i ens donen la condició d'equilibri amb les funcions d'utilitat reduïda

$-\delta u_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j - g_i^+ u_i^2 = 0.$

- on per a cada agent:
  - $D_i = \delta u_i$ és el cost de mantenir-se actiu,
  - $C_i = g_i^+ u_i^2$ és el cost d'estar connectat amb els veïns, i
  - $B_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j$ és el guany obtingut gràcies el coneixement compartit dels veïns.
- i el paràmetre $\delta = \delta_{joc}$ pot interpretar-se com el ratio unitari d'utilitat de la informació, com a quocient entre la tasa del cost d'automantenir-se i la tasa de benefici rebut de la xarxa.

A més tenim les regles del joc R que determinen la dinàmica estructural. En aquest cas considerem les vistes "utility driven dynamics" o dinàmica dirigida a la utilitat. Aquesta dinàmica fa que les decisions que estableixen les jugades permeses als jugadors són preses individualment per cada jugador: el moviment corresponent a crear o eliminar un enllaços entre jugadors depen únicament d'una decisió individual en funció de si la utilitat obtinguda amb el canvi augmenta. Aquesta dinàmica modelitza la idea que les decisions egoïstes dels agents fan millorar la seva utilitat mitjançant proves d'assaig i error.

6.2. Resultats del model pels mercats d'intercanvi de coneixment: massa crítica d'un mercat

S'ha vist que, perquè el joc tingui valors d'utilitat positiva, és condició suficient que $\delta_{joc} \leqslant \delta_G$; és a dir, que el graf corresponent de la xarxa ha de tenir un valor de paràmetre superior al valor del ratio unitari d'utilitat de la informació. Ara es considera ara un mercat donat pel seu paràmetre $\delta_{joc} = \delta_{mercat}$, i el paràmetre de graf δ_G maximal que es pot considerar i que correspon al graf complet K_N, és a dir $\delta_{KN} = N - 1$. Per a que el mercat sigui viable hi ha d'haver algun agent i amb utiliat positiva $u_i^* > 0$ i com a mínim ha de pasar en el cas més favorable en que tots els agents estan relacionats $u_i^*(K_N; \delta) > 0$ (s'ha de pensar que si passes $\delta_{KN} < \delta_{mercat}$, aleshores

$\forall G \in \mathcal{H} \delta_G < \delta_{mercat}$ i en cosequència no hi hauria cap possibilitat de tenir utilitats positives). Com $\delta_{KN} = N - 1$, és condició necessariai que passar $N - 1 > \delta_{mercat}$, és a dir, que $N > 1 + \delta_{mercat}$. Al valor mínim que compleix aquesta condició li direm N^*_{mc} o massa crítica que és el nombre mínim d'agents perquè un mercat sigui viable.

Aquest fenomen pot observar-se en el món econòmic en la idea que l'èxit en la difusió de una tecnologia concreta cal associar-lo a un cost de difusió baix, relativament a l'estructura i tamany de la xarxa social en què es vol introduir. En altres paraules, perquè la difusió de la tecnologia sigui viable ha d'haver una massa crítica d'agents relacionats convenientment.

Com exemples presents en la realitat econòmica i social, es pot pensar-se en el fenòmen d'extinció de llengües minoritaries, o en el fracàs en la implementació d'una tecnologia.

7. CONCLUSIONS

7.1. Consideracions teòriques

Des del punt de vista més teoric s'han de destacar 2 aspectes:

- La teoria de xarxes econòmiques és relativament recent i només en els darrers anys hi hagut un cert desenvolupament. Això fa que en aquest treball s'hagin fet plantejaments més abstractes que en el conjunt de literatura consultada, tan llibres com articles. Aquesta mirada més abstracta ha estat posible fonamentalment al poder reduïr l'espai de paràmetres a l'estudi d'un únic paràmetre, que ha permés trovar resultats més globals.
- S'ha tractat de donar una visió conceptual general sobre la teoria de xarxes econòmiques i analitzar alguns detalls d'un tipus de joc en xarxa que fos suficientment senzill per poder-lo tractar analíticament amb una certa profunditat i suficientment ric perquè ja tingués la complexitat dels models de jocs en xarxa.

7.2. Síntesi dels resultats obtinguts: resposta a les preguntes inicials

Ara és el moment de recordar les preguntes formulades t a l'inici del treball que han servit de punt de partida:

- Quin és el comportament d'una xarxa econòmica que la fa peculiar?
- Podem donar algun principi teòrico-pràctic que sintetitzi aquest comportament ?
- En quines condicions existeix l'equilibri?

7.2.1. Pecularitat del comportament de les xarxes ecònomiques

Com ja s'ha comentat en el model clàssic, l'equilibri del mercat només depèn del comportament agregat dels agents econònomics que intervenen en aquest, fent que tots ells siguin indiferenciables. La teoria de jocs intenta superar algunes limitacions del model admetent comportaments microeconòmics diferenciats dels agents com, per exemple, la idea de competidor dominant. La teoria de xarxes econòmiques, en canvi, contempla la idea que els agents, encara que iguals, internament són diferents en les relacions que hi ha entre ells. El resultat que hem vist és que, en aquesta nova visió que ens aporta le teoria de xarxes econòmiques, el comportament dels agents depen fortament de l'estructura de la xarxa sobre la que es basen les relacions entre els agents i que queda totalment caracteritzada pel graf que la modelitza.

Així en el cas del model estandard de la teoria neoclàssica en un *mercat*, s'ha de pensar en el mercat d'un bé concret i en condicions del que s'anomena competència perfecte (veure [W]), hi ha un sol equilibri independenment de l'estructura de les relacions entre els agents. En aquest model tenim:

- Els agents *proveïdors* formen agregadament l'oferta del mercat. Formalment la oferta del mercat és una funció S que ens dona la quantitat que s'ofereix q_S en funció del preu p, $q_S = S(p)$.
- Els agents *consumidors* que formen agragadament la demanda del mercat. Formalment la demanda del mercat és una funció D que ens dona la quantitat que es demanda q_D en funció del preu p, $q_D = D(p)$.
- El equilibri del mercat es produeix quan s'igualen la oferta i la demanda, es a dir quan $S(p) = Q(p)$. Aquest únic punt es denota com el preu d'equilibri del mercat $p^* = p_{mercat}$ $q* = S(p^*) = D(q^*)$ i com veiem no depen per res de les relacions entre els agents.

En canvi en el model que ens dona la teoria de xarxes econòmiques ens trovem que l'equilibri ja no és unic sino que depen de l'estructura de les relacions entre els agents, es a dir del graf que les modelitza. Formalment donat el paràmetre del mercat δ_{mercat}, considerem 2 estructures diferents dels mateixos agents corresponents a 2 grafs diferents G_1 i G_2 i sense pérdua de generalitat considerem els corresponents valors de paràmetre de garf $\delta_{G1} < \delta_{G2}$. Aplicant els resultats trobats anteriorment sabem que existeixen les funcions d'utilitat reduïda correspoents a cada un dels grafs $u^*[G_1][\delta]$ i $u^*[G_2][\delta]$. Ara donat el paràmetre de mercat δ_{mercat}, s'obtenen 2 solucions d'equilibri depenent de quin graf estiguem considerant $u^*[G_1][\delta_{mercat}]$ i $u^*[G_2][\delta_{mercat}]$. Com u^*determina la quantitat x^*, finalment per un paràmetre de mercat δ_{mercat} obtenim 2 quantitats d'equilibri $x^*[G_1][\delta_{mercat}]$ i $x^*[G_2][\delta_{mercat}]$.

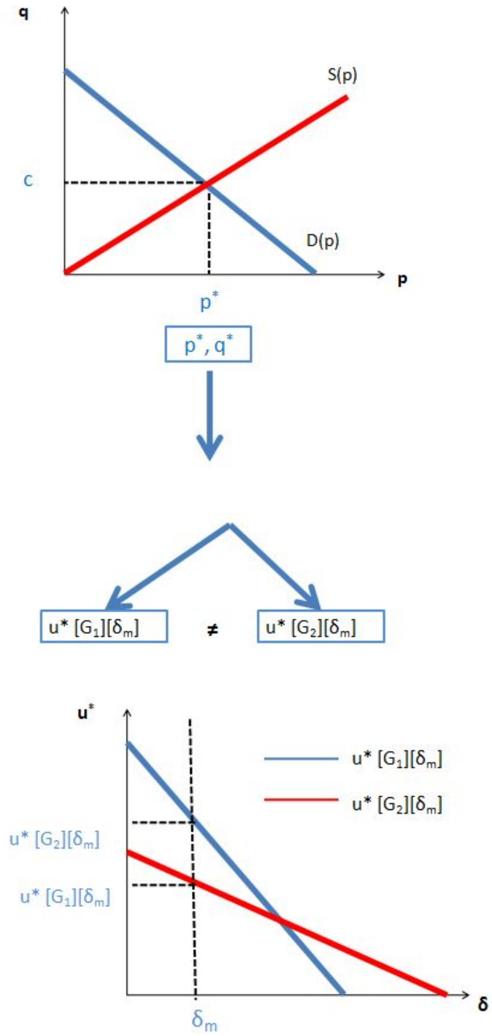

Fig. 7.1. Equilibri en el model estàndard i en la teoria de xarxes econòmiques

7.2.2. Resultats teorico-pràctics

De l'anàlisi exhaustiva que s'ha fet del model de joc en xarxa d'innovació considerat, s'ha vist que bàsicament hi ha 2 grans principis de comportament:

- D'una banda, el cas bilateral en què el comportament del joc és molt lineal i que essencialment fa sempre el mateix, donat que l'únic moviment que porta a l'equilibri és el d'anar afegint arestes i, per tant, quan realitzem una partida del joc, o ens quedem en el graf inicial o acabem en el graf complet K_N.
- D'altra banda, el cas unilateral en què el comportament del joc és més ric i aparentment menys previsible. Aquí s'alternen moviments d'afegir amb els d'eliminar arcs. Degut a això

i al factor d'aleatorietat, introduit en les regles del joc a l'hora d'anar selecionant quin agent decideix en cada jugada, fa que hi hagi diferents alternatives possibles que depenen del graf inicial i de la selecció aleatòria d'agents feta en cada jugada.

7.2.3. Existència d'equilibri estructural

Una de les preguntes inicials plantejava en quines condicions hi havia equilibri en el joc, és a dir en quines condicions hi havia equilibri absolut. En el capitol cinqué dedicat a la modelització i simulació s'ha vist que les condicions d'equilibri del joc en el cas de jocs en xarxes bilaterals són totalment diferents del cas de jocs en xarxes unilaterals.

S'ha vist que pel cas de jocs en xarxes bilaterals la resposta es que sempre hi ha equilibri absolut. Aquest equilibri es correspon o bé al graf inicial, si el joc no pot tenir jugades, o bé al graf complet K_N. En canvi en el cas de jocs en xarxes unilaterals les condicions d'existència d'equilibri són molt més complicades. Aquí l'equilibri també pot correspondre al graf inicial, quan el joc no pot tenir jugades, al graf complet K_N, però també hi ha altres grafs que poden correspondre a l'equilibri con els cicles. I fins i tot podria passar que el joc no acabés mai i per tant no tingués propiament un equilibri.

7.3. Prospectiva: preguntes obertes

En aquest treball només s'ha donat una pinzellada de l'ampli mon que formen els models de jocs en xarxes econòmiques. S'han donat alguns resultats usant la models matemàtics que s'han estudiat amb mètodes analítics i de simulació. En el cas de jocs en xarxes bilaterals el tema ha quedat pràcicament tancat. En canvi en el cas de xarxes unilaterals només s'han pogut donar alguns resultats parcials quedant el estudi d'aquest cas obert.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Basart Muñoz, J.M. (1994), *Grafs, Fonaments i Algorismes*, Publicacions Universistat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.
- [2] Bondy, J.A. i Murty,U.S.R. (2008), *Graph Theory*, Springer, New York.
- [3] Brower, A.E. i Haemers, W.H. (2001), *Spectra of Graphs*, Springer, Amsterdam.
- [4] Calvo-Armegol, A. i Jackson, M.A. (2007), *Networks in Labor Markets: Wage Dynamics and Inequality*, Journal of Economic Theory v.132, n.1, p. 27-46.
- [5] Davis, J.R. i al. (2011), *Equilibria and Efficiency Loss in Games on Networks*, Internet Mathematica 7(3), p. 178-205.
- [6] Gibbons, R. (1993), *Un primer curso de Teoria de Juegos*, Antonio Bosch Editor S.A., Barcelona.
- [7] Goyal, S. (2007), *Connections: An Introduction to the Economics of Networks*, Princeton University Press, Princeton.
- [8] Jackson M.A. (2008), *Social and Economic Networks*, Princeton University Press, cop., Princeton (N.J.).
- [9] Kirman A. (1997), *The economy as an envolving network*, Journal of Evolutionary Economics 7(4), p. 339-353.
- [10] König, M.D. i Battiston, S. (2009), *From Graph Theory to Models of Economic Networks. A Tutorial*, Research Gate, http://www.researchgate.net/publication / 226175200_From_Graph_Thec / file / 9c9605180042b5f1a3.pdf (15.Maig.2013).
- [11] König i al. (2009), *Chapter 8 Modelling Evolving Innovation Networks,* en Pyka, A. i Scharnhorst, A. ed., *Innovation Networks*, Springer, New York.
- [12] Rasmusen, E. (1996), *Juegos e Información*, Fondo de Cultura Económica, México D.F.
- [13] Vega-Redondo, F. (2007), *Complex Social Networks*, Cambridge university Press, Cambridge.