Análisis Dinámico: Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Jesús Getán y Eva Boj

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

Marzo de 2014

Introducción

Con objeto de establecer un marco de trabajo adecuado a nuestro estudio, primero haremos las siguientes definiciones

Definición

Una **ecuación diferencial** de segundo orden es aquella que relaciona una variable independiente, una función suya (incógnita) y sus derivadas hasta el segundo orden, la denotaremos

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0.$$

i.e. la ecuación $2x + 3y + 5y' - 2y'' = 0.$

Cuando la función incógnita depende de una variable real se dice que la **ecuación diferencial es ordinaria** (EDO) y la denotaremos

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0.$$

Recordemos que llamamos **orden** de una ecuación diferencial al de la derivada más elevada que en ella aparece.

i.e. la ecuación $2x + 3y + 5y' - 2y'' = 0$ tiene orden 2.

- ¿Cómo distinguir los elementos de las ecuaciones?

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

- Término de segundo orden
- Término de primer orden
- Término de orden cero
- Término independiente

- ¿Cómo distinguir los elementos de las ecuaciones?

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

- Término de segundo orden
- Término de primer orden
- Término de orden cero
- Término independiente

- ¿Cómo distinguir los elementos de las ecuaciones?

$$\boxed{y''} + \boxed{py'} + qy = \boxed{g(x)}$$

- Término de segundo orden
- Término de primer orden
- Término de orden cero
- Término independiente

- ¿Cómo distinguir los elementos de las ecuaciones?

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

- Término de segundo orden
- Término de primer orden
- Término de orden cero
- Término independiente

- ¿Cómo distinguir los elementos de las ecuaciones?

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

- Término de segundo orden
- Término de primer orden
- Término de orden cero
- Término independiente

La solución de la ecuación general

$$y'' + py' + qy = g(x),$$

donde $p, q \in \mathbb{R}$ y $g(x)$ es una función diferenciable, es la suma de la solución de la ecuación homogénea, $y_h(x)$, y una solución particular de la completa, $y_p(x)$,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

También se puede indicar como

$$y = y_h + y_p.$$

Ecuación homogénea asociada

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Ecuación característica asociada

$$w^2 + pw^1 + qw^0 = 0.$$

Simplificando

$$w^2 + pw + q = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado. La solucionamos y podemos obtener tres casos

$w_1 \neq w_2$ ó $w_1 = w_2$ ó w_1, w_2 complejas.

Para cada caso las soluciones serán

- Si las raíces $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ y $w_1 \neq w_2 \Rightarrow$

$$y_h(x) = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x}$$

- Si las raíces $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ y $w_1 = w_2 = w \Rightarrow$

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{wx}$$

- Si las raíces $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ y $w_1 = a + bi, w_2 = a - bi \Rightarrow$

$$y_h(x) = e^{ax} \left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$$

Ecuación completa. Solución particular.

$$y'' + py' + qy = g(x).$$

Miraremos el término independiente y según su tipo ensayaremos una solución con coeficientes indeterminados a calcular.

Caso 1 $g(x) = e^{ax}P_n(x)$ donde $a \in \mathbb{R}$ y $P_n(x)$ es un polinomio de orden n.

(1.1) Si a no es raíz de la ecuación característica, la solución a ensayar es:

$$y_p(x) = e^{ax}Q_n(x)$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados de orden n a determinar.

(1.2) Si a es raíz de la ecuación característica, la solución a ensayar es:

$$y_p(x) = e^{ax}x^rQ_n(x)$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados de orden n a determinar y r es el grado de multiplicidad de la raíz a.

Nótese que

Unas posibles variaciones del término independiente pueden ser:

$$g(x) = P_n(x),$$

$$g(x) = e^{ax},$$

$$g(x) = b,$$

donde b es una constante.

El caso en que $g(x) = b^x$ se obtiene haciendo $P_n(x) = 1$ y $a = \ln b$, resultando $y_p(x) = e^{x \ln b}$.

Caso 2 $g(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\sin bx + Q_m(x)\cos bx\right)$
donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $P_n(x)$, $Q_m(x)$ son polinomios de orden n y m respectivamente.

(2.1) Si $w_1 \neq a + bi, w_2 \neq a - bi \Rightarrow$
$y_p(x) = e^{ax}\left(S_N(x)\sin bx + T_N(x)\cos bx\right)$, donde $S_N(x)$ y $T_N(x)$ son polinomios de orden $N = \max\{n, m\}$ con coeficientes a determinar.
(2.2) Si $w_1 = a + bi, w_2 = a - bi \Rightarrow$
$y_p(x) = x^r e^{ax}\left(S_N(x)\sin bx + T_N(x)\cos bx\right)$, donde r es el grado de multiplicidad de la raíz en la ecuación característica (en el caso de EDO orden 2, $r = 1$).

Ejemplo 1

Hallar la solución general de

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

La ecuación característica es:

$$w^2 + w - 2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, sus raíces son:

$$w_1 = 1 \text{ y } w_2 = -2.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

Ejemplo 2

Hallar la solución general de

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

La ecuación característica es:

$$w^2 + 2w + 5 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, sus raíces son:

$$w_1 = -1 + 2i \text{ y } w_2 = -1 - 2i.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)\, e^{-x}.$$

Ejemplo 3

Hallar la solución general de

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

La ecuación característica es:

$$w^2 - 4w + 4 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, sus raíces son:

$$w_1 = 2 \text{ y } w_2 = 2.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}.$$

Ejemplo 4

Hallar la solución general de

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

Primero, hallaremos la solución de la ecuación homogénea asociada.
Seguidamente propondremos una solución particular adecuada y aplicaremos el método de variación de constantes para determinarla.
Finalmente, daremos la solución general de la ecuación completa.

La ecuación característica es:

$$w^2 + 4w + 3 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, sus raíces son:

$$w_1 = -2 \text{ y } w_2 = -3.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Dado que el término independiente es del tipo del Caso 1.1, proponemos como solución particular

$$y = Ax + B.$$

En este caso

$$y' = A \text{ y } y'' = 0.$$

Sustituyendo en la ecuación completa, obtenemos

$$4A + 3(Ax + B) = x.$$

Igualando coeficientes y resolviendo el sistema lineal resultante, obtenemos

$$A = \frac{1}{3} \text{ y } B = \frac{-4}{9}.$$

La solución particular es

$$y_p = \frac{1}{3}x + \frac{-4}{9}.$$

La solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x + \frac{-4}{9}.$$

Ejemplo 5

Hallar la solución general de

$$y'' + 9y = xe^{3x}.$$

Primero, hallaremos la solución de la ecuación homogénea asociada.
Seguidamente propondremos una solución particular adecuada y aplicaremos el método de variación de constantes para determinarla.
Finalmente, daremos la solución general de la ecuación completa.

La ecuación característica es:

$$w^2 + 9 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, sus raíces son:

$$w_1 = 3i \text{ y } w_2 = -3i.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y_h = (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)\, e^{0x}.$$

Simplificando

$$y_h = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x.$$

Dado que el término independiente es del tipo del Caso 1.1, proponemos como solución particular

$$y = (Ax + B)\, e^{3x}.$$

En este caso

$$y' = A \text{ y } y'' = 0.$$

Sustituyendo en la ecuación completa, obtenemos

$$4A + 3(Ax + B) = x.$$

Igualando coeficientes y resolviendo el sistema lineal resultante, obtenemos

$$A = \frac{1}{3} \text{ y } B = \frac{-4}{9}.$$

La solución particular es

$$y_p = \left(\frac{1}{3}x + \frac{-4}{9}\right) e^{3x}.$$

La solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \left(\frac{1}{3}x + \frac{-4}{9}\right) e^{3x}.$$

Ejemplo 6

Hallar la solución general de

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$$

Primero, hallaremos la solución de la ecuación homogénea asociada.
Seguidamente propondremos una solución particular adecuada y aplicaremos el método de variación de constantes para determinarla.
Finalmente, daremos la solución general de la ecuación completa.

La ecuación característica es:

$$w^2 + 2w + 5 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, sus raíces son:

$$w_1 = -1 + 2i \text{ y } w_2 = -1 - 2i.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y_h = e^{-x} \left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \right).$$

Dado que el término independiente es del tipo del Caso 2.1, proponemos como solución particular

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

En este caso

$$y' = -A\sin x + B\cos x \text{ y } y'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Sustituyendo en la ecuación completa, obtenemos

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Resolviendo la expresión resultante, obtenemos

$$A = \frac{2}{5} \text{ y } B = \frac{1}{5}.$$

La solución particular es

$$y_p = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

La solución general es

$$y = y_h + y_p = e^{-x}\left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\right) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Ejemplo 1 Tenemos un mercado en el que la demanda y la oferta están influenciadas por los precios corrientes y las tendencias de esos precios, que se manifiestan no sólo cuando esos precios aumentan o disminuyen sino cuando conocemos como aumentan o disminuyen en unos determinados ratios.
Asumimos que:
La oferta de un bien es $S = -5 + 10p - 3p' + 6p''$.
La demanda de un bien es $D = 1 - 5p - 11p' + 5p''$.
Calcular la trayectória temporal del precio y el precio de equilibrio.

En el equilibrio $S = D$, por lo tanto

$$-5 + 10p - 3p' + 6p'' = 1 - 5p - 11p' + 5p'',$$

simplificando

$$p'' + 8p' + 15p = 6.$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea es:

$$w^2 + 8w + 15 = 0.$$

Sus raíces son

$$w_1 = -3 \text{ y } w_2 = -5.$$

La solución general de la homogénea será

$$p_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-5x}.$$

Dado que el término independiente es del tipo del Caso 1.1, proponemos como solución particular

$$y = A.$$

En este caso

$$y' = 0 \text{ y } y'' = 0.$$

Sustituyendo en la ecuación completa, obtenemos

$$15A = 6.$$

Resolviendo obtenemos

$$A = \frac{6}{15}.$$

La solución particular es

$$p_p = \frac{6}{15}.$$

La solución general es

$$p = p_h + p_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-5x} + \frac{6}{15}.$$

El precio de equilibrio es

$$p_e = \lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{6}{15}.$$

Ejemplo 2 (Sydsaeter, K. Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Ed. Prentice Hall. p. 640) El modelo debido F. Dresch nos dice que la tasa de aumento de los precios es proporcional al total acumulado de todos los excesos de demanda pasados. Modelizado en fórmula es:

$$p'(t) = a \int_{-\infty}^{t} [D(p(\tau)) - S(p(\tau))] \, d\tau \text{ con } (a > 0).$$

Si consideramos que $a = 5$, $D(p(t)) = 6 - 3p$ y $S(p(t)) = 8 + 5p$. Encontrar la ecuación diferencial de segundo orden y la solución general de la misma.

Recordemos que:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Además

$$\left(\int_a^t f(\tau)d\tau\right)' = (F(t) - F(a))' = F'(t) = f(t).$$

Sustituyendo en la expresión obtenemos

$$p'(t) = 5\int_{-\infty}^{t} [6 - 3p(\tau) - 8 - 5p(\tau)]\, d\tau.$$

Al derivar con respecto a t resulta

$$p''(t) = 5\,[6 - 3p(t) - 8 - 5p(t)]\,.$$

Ordenando y simplificando

$$p''(t) + 40p(t) = -10.$$

Ahora resolvemos.

La ecuación característica es

$$w^2 + 40 = 0.$$

Resolviendo la ecuación, sus raíces son

$$w_1 = 2\sqrt{10}i \text{ y } w_2 = -2\sqrt{10}i.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$p_h = \left(C_1 \sin 2\sqrt{10}t + C_2 \cos 2\sqrt{10}t\right) e^{0t}.$$

Simplificando

$$p_h = C_1 \sin 2\sqrt{10}t + C_2 \cos 2\sqrt{10}t.$$

Dado que el término independiente es del tipo del Caso 1.1, proponemos como solución particular

$$p = A.$$

En este caso

$$p' = 0 \text{ y } p'' = 0.$$

Sustituyendo en la ecuación completa, obtenemos

$$40A = -10.$$

Resolviendo obtenemos

$$A = -\frac{10}{40} = -\frac{1}{4}.$$

La solución particular es

$$p_p = -\frac{1}{4}.$$

La solución general es

$$p = p_h + p_p = C_1 \sin 2\sqrt{10}t + C_2 \cos 2\sqrt{10}t - \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3 Modelo de Phillips. (Chiang, A. C. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Cuarta Ed. McGraw-Hill. pp. 532–537) Primero, y con base empírica, se da una relación entre la tasa de crecimiento del salario en dinero y la tasa de desempleo. Esto, en un mercado de trabajo.

$$\frac{W'}{W} = f(U) = \alpha - \beta U \text{ donde } f'(U) \leq 0, \qquad (1)$$

donde W son los salarios y U la tasa de desempleo que, en este caso, la hemos tomado lineal con $\alpha, \beta \geq 0$.

Si $\dfrac{W'}{W} > 0$ nos indica que el costo creciente del salario monetario nos lleva a una situación inflacionaria, en consecuencia, también nos indica que la tasa de inflación será una función de U.
Sin embargo, la presión inflacionaria puede ser compensada por un incremento de la productividad laboral, que se supone exógena y se denota por T.

Por tanto, denotando por $\dfrac{P'}{P}$ como la tasa de inflació (tasa de crecimiento de los precios), se puede escribir

$$\frac{P'}{P} = \frac{W'}{W} - T. \tag{2}$$

Combinando las fórmulas (1) y (2) obtenemos

$$\frac{P'}{P} = \alpha - \beta U - T. \tag{3}$$

Sostiene Friedman que, si una tendencia inflacionaria ha estado en vigor por suficiente tiempo, las personas tienden a formar ciertas expectativas de inflación que luego intentan incorporar a sus demandas de salario monetario. Expresado en términos matemáticos

$$\frac{W'}{W} = f(U) + h\pi \text{ con } 0 \leq h \leq 1,$$

donde π es la tasa esperada de inflación.

Añadiéndolo a la ecuación (3) obtenemos

$$\frac{P'}{P} = \alpha - \beta U - T + h\pi \text{ con } 0 \leq h \leq 1. \tag{4}$$

Fórmula que nos da las **expectativas aumentadas de Phillips**.

Como hemos introducido una nueva variable para denotar la tasa de inflación, se hace necesario formular una hipótesis de cómo se forman dichas expectativas. Para ello, buscaremos una función que nos describa el patrón de π a través del tiempo en el caso de que la tasa de crecimiento de los precios (tasa de inflación real) est é relacionada con la tasa esperada π.

$$\frac{d\pi}{dt} = j\left(\frac{P'}{P} - \pi\right) \text{ con } 0 \leq j \leq 1. \quad (5)$$

Fórmula que nos da las **expectativas adaptativas de Phillips.**

Lo que nos indica esta fórmula es la discrepancia entre la inflación real y la esperada.

Las ecuacions (4) y (5) tienen tres variables, luego necesitamos encontrar otra ecuación. La idea es introducir una ecuación que nos explique la variable U.

Consideremos una **política monetaria**, en ecuación

$$\frac{dU}{dt} = -k\left(\frac{M'}{M} - \frac{P'}{P}\right) \text{ con } k \geq 0. \tag{6}$$

El paréntesis nos da el crecimiento del dinero real y $\dfrac{M'}{M}$ es la tasa de crecimiento de la masa monetaria.

Busquemos la trayectoria temporal de π.

Partimos de las siguientes ecuaciones:
(a) **expectativas aumentadas de Phillips**,

$$\frac{P'}{P} = \alpha - \beta U - T + h\pi \text{ con } 0 \leq h \leq 1.$$

(b) **expectativas adaptativas de Phillips**,

$$\frac{d\pi}{dt} = j\left(\frac{P'}{P} - \pi\right) \text{ con } 0 \leq j \leq 1.$$

(c) **política monetaria**,

$$\frac{dU}{dt} = -k\left(\frac{M'}{M} - \frac{P'}{P}\right) \text{ con } k \geq 0.$$

Sustituyendo (3) en (5) obtenemos

$$\frac{d\pi}{dt} = j\left(\frac{P'}{P} - \pi\right) = j\left(\alpha - \beta U - T\right) - j\left(1 - h\right)\pi,$$

diferenciando, resulta

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = -j\beta\frac{dU}{dt} - j\left(1 - h\right)\frac{d\pi}{dt},$$

sustituyendo (7), obtenemos

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = j\beta k\left(\frac{M'}{M} - \frac{P'}{P}\right) - j\left(1 - h\right)\frac{d\pi}{dt},$$

Por otra parte, sabemos que partiendo de (5)

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{j}\frac{d\pi}{dt} + \pi,$$

sustituyendo y reordenando, resulta

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} + \left(\beta k + j\left(1-h\right)\right)\frac{d\pi}{dt} + j\beta k\pi = j\beta k\frac{M'}{M}. \qquad (7)$$

Esta es la ecuación diferencial que tenemos que resolver.

Ejemplo 1:
En un país se han encontrado las siguientes relaciones:
Expectativas aumentadas de Phillips,

$$p = \frac{1}{6} - 3U + \pi.$$

Expectativas adaptativas de Phillips,

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{3}{4}(p - \pi).$$

Política monetaria,

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2}(m - p).$$

Se pide, encontrar las trayectorias temporales de la tasa esperada de inflación $\pi(t)$, tasa de crecimiento de los precios $p(t)$ y la tasa de desempleo $U(t)$.

Tenemos que

Datos problema	Ecuaciones referencia
$p = \frac{1}{6} - 3U + \pi,$	$\frac{P'}{P} = \alpha - \beta U - T + h\pi.$
$\frac{d\pi}{dt} = \frac{3}{4}(p - \pi),$	$\frac{d\pi}{dt} = j\left(\frac{P'}{P} - \pi\right).$
$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2}(m - p),$	$\frac{dU}{dt} = -k\left(\frac{M'}{M} - \frac{P'}{P}\right).$

Los parámetros correspondientes son:

$$\alpha = \frac{1}{6}, \beta = 3, k = \frac{1}{2}, j = \frac{3}{4}, T = 0, h = 1.$$

La ecuación a usar es

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} + (\beta k + j(1-h))\frac{d\pi}{dt} + j\beta k\pi = j\beta k\frac{M'}{M}.$$

Sustituyendo los parámetros resulta

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} + \left(3\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(1-1)\right)\frac{d\pi}{dt} + \frac{3}{4}3\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}3\frac{1}{2}\frac{M'}{M}.$$

Simplificando

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{d\pi}{dt} + \frac{9}{8}\pi = \frac{9}{8}\frac{M'}{M}.$$

Es una EDO lineal de orden 2. Escribimos la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada

$$w^2 + \frac{3}{2}w + \frac{9}{8} = 0.$$

Sus raíces son

$$w_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i, \; w_1 = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$$

la solución general a la ecuación homogénea es

$$\pi_h(t) = e^{-\frac{3t}{4}} \left(C_1 \cos \frac{3t}{4} + C_2 \sin \frac{3t}{4} \right).$$

La solución particular es del tipo $g(t) = A$, con A por determinar.

Sabemos que $g'(t) = g''(t) = 0$. Por tanto, al sustituir en la ecuación resulta

$$0 + 0 + \frac{9}{8}A = \frac{9}{8}\frac{M'}{M} \Rightarrow A = \frac{M'}{M}.$$

La solución general de la ecuación es

$$\pi(t) = e^{-\frac{3t}{4}}\left(C_1 \cos\frac{3t}{4} + C_2 \sin\frac{3t}{4}\right) + \frac{M'}{M}.$$

Por otra parte sabemos que

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{3}{4}\left(p - \pi\right).$$

Si derivamos la solución hallada y junto con esa solución la sustituimos en esta expresión obtenemos

$$-\frac{3e^{-\frac{3t}{4}}}{4}\left(C_1\cos\frac{3t}{4} + C_2\sin\frac{3t}{4}\right) + e^{-\frac{3t}{4}}\left(-\frac{3C_1}{4}\sin\frac{3t}{4} + \frac{3C_2}{4}\cos\frac{3t}{4}\right) =$$

$$\frac{3p}{4} - \frac{3e^{-\frac{3t}{4}}}{4}\left(C_1\cos\frac{3t}{4} + C_2\sin\frac{3t}{4}\right) - \frac{3}{4}\frac{M'}{M}.$$

Resultando

$$p(t) = e^{-\dfrac{3t}{4}} \left(C_2 \cos \frac{3t}{4} - C_1 \sin \frac{3t}{4} \right) + \frac{M'}{M}.$$

Análogamente, de

$$p(t) = \frac{1}{6} - 3U(t) + \pi(t),$$

obtenemos

$$U(t) = \frac{1}{18} - \frac{p(t)}{3} + \frac{\pi(t)}{3}.$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores y simplificando obtenemos

$$U(t) = \frac{1}{18} + \frac{e^{-\frac{3t}{4}}}{3}\left[(C_1 - C_2)\cos\frac{3t}{4} + (C_2 - C_1)\sin\frac{3t}{4}\right].$$

Ejemplo 2:

Datos problema	Ecuaciones referencia
$p=\frac{1}{4}-2U+\pi,$	$\frac{P'}{P}=\alpha-\beta U-T+h\pi.$
$\frac{d\pi}{dt}=\frac{1}{2}(p-\pi),$	$\frac{d\pi}{dt}=j\left(\frac{P'}{P}-\pi\right).$
$\frac{dU}{dt}=-(m-p),$	$\frac{dU}{dt}=-k\left(\frac{M'}{M}-\frac{P'}{P}\right).$

Los parámetros correspondientes son:

$$\alpha=\frac{1}{4},\beta=2,k=1,j=\frac{1}{2},T=0,h=1.$$

Al sustituir en (7) obtenemos

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} + 2\frac{d\pi}{dt} + \pi = \frac{M'}{M}.$$

Resolviendo la EDO lineal de segundo grado obtenemos

$$\pi(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \frac{M'}{M}.$$

Análogamente al resultado anterior

$$p(t) = e^{-t}\left(-C_1 + 2C_2 - tC_2\right) + \frac{M'}{M}.$$

$$U(t) = \frac{1}{8} + e^{-t}\left(C_1 + C_2\left(t-1\right)\right).$$