

**Treball final de grau**

**GRAU DE  
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques  
Universitat de Barcelona**

---

**INVARIANTS HOMOLÒGICS DE NUSOS**

---

**Gemma Coldeforns Papiol**

Director: Carles Casacuberta Vergés  
Realitzat a: Departament d'Àlgebra i  
Geometria de la UB

Barcelona, 24 de juny de 2013

# Índex

---

English Summary	iii
Introducció i antecedents	v
Objectius i motivació	ix
<b>1 Teoria de nusos</b>	<b>1</b>
1.1 Conceptes bàsics	1
1.2 Equivalència de nusos	1
1.3 Orientació	3
1.4 Projeccions i diagrames	6
1.5 Moviments de Reidemeister	8
1.6 Aritmètica dels nusos	10
1.7 Enllaços	12
1.8 Invariants	13
1.9 Grup del nus	14
<b>2 Invariants polinòmics</b>	<b>17</b>
2.1 Conceptes necessaris	17
2.2 Parèntesi de Kauffman	19
2.3 Polinomi de Jones	21
2.4 Polinomi d'Alexander	24
<b>3 Topologia algebraica</b>	<b>27</b>
3.1 Homologia singular	27
3.2 Cohomologia singular	31
<b>4 Homologia de Khovanov</b>	<b>33</b>
4.1 Sobre invariants homològics	33
4.2 Mikhail Khovanov	33
4.3 Definició i propietats	34
4.4 Algoritme de càlcul	36
4.5 Homologia de Khovanov del nus trèvol	40
4.5.1 Homologia de Khovanov del nus trèvol esquerrà sobre $\mathbb{Z}$	40
4.5.2 Homologia de Khovanov del nus trèvol dretà sobre $\mathbb{Z}$	49
4.5.3 Homologia de Khovanov del nus trèvol esquerrà sobre $\mathbb{Z}/2$	51
4.5.4 Homologia de Khovanov del nus trèvol dretà sobre $\mathbb{Z}/2$	53

---

Conclusions	55
Apèndix A: diagrames de nusos	57
Apèndix B: polinomi de Jones	59
Apèndix C: polinomi de Khovanov	61
Bibliografia	63

# English Summary

---

Since topology is one of my favourite branches in mathematics, I decided to base my Degree Final Project on knot theory, which is a specialty of topology that I had not seen before.

Knot theory is a very recent field with only 100 years of history. It has the advantage that basic rules can be described at an elementary level, and there are open problems that non-experts can try to solve. Knots have existed in the world since remote times, but they only became of interest to mathematicians at the beginning of the 20th century, due to Lord Kelvin's belief that atoms were knotted vortices in the ether.

The first steps made by mathematicians were to establish the basic concepts and try to solve queries about knots, taking into account that the main objective in knot theory is to find invariants in order to decide if two knots are equivalent. An invariant is any object associated with a knot with the property that if two knots have different invariants, then they are not equivalent. Finding good invariants means discovering invariants which discriminate as many knots as possible. This was the goal of important mathematicians in that period, such as Kurt Reidemeister (1893–1971), who defined moves between equivalent knot diagrams, or James W. Alexander (1888–1971), who discovered the first polynomial invariant in 1923. One of the main features of that period is that topologists looked for properties of the knot complement, and it was thought to be impossible to discover invariants anywhere else. But the kind of invariants associated with the knot complement did not distinguish between a knot and its mirror image.

In 1984, however, Vaughan Jones discovered a new knot polynomial invariant. Besides the fact that the Jones polynomial was used to prove some old conjectures, its actual importance lies on the fact that this invariant was not calculated from the knot complement. Knot theory suffered then a reset, and knot theorists focused their research on a new point of view. In 1987, it was Louis Kauffman who offered a new way of calculating the Jones polynomial with combinatorial steps, using the definition of a new knot polynomial, but not invariant, called bracket polynomial or Kauffman bracket. Some others tried to develop a new knot polynomial in two variables generalizing both the Alexander polynomial and the Jones polynomial; this was eventually achieved in 1985 by a group of mathematicians, who discovered the HOMFLY polynomial—the name HOMFLY stands for the first letter of each of the names of the mathematicians who developed that polynomial. Even though these new invariants could distinguish mirror images, they are not good enough since some knots have the same invariant without being equivalent, such as mutant knots.

Subsequently, other invariants have been discovered. For example, a homology theory, Floer homology, was applied to knots getting a homological invariant whose Euler characteristic was related with the Alexander polynomial. This homology theory was related with the knot complement and is even able to discriminate mutant knots. On the other hand, in 1999 Mikhail Khovanov discovered a new homological knot invariant which generalises the Jones polynomial. This invariant was another breakthrough in knot theory since it is computable in a combinatorial way and is better than the Jones' one. Obviously, after the publication of the Khovanov invariant other mathematicians also investigated in that direction. Bar-Natan carried out an exhaustive study in 2002 about Khovanov homology with the only purpose of understanding it better. For this purpose, he created a similar bracket as the Kauffman bracket, now called

Khovanov bracket. Furthermore, in 2011, Kauffman also worked on Khovanov homology, by introducing a new definition thereof.

Based on the above, this essay encompasses, first, some basic concepts related to knot theory. Secondly, we will deal with knot polynomials, presenting how the definition of the Jones polynomial can be reached by means of the Kauffman bracket. In the third chapter we will define (co)homology of (co)chain complexes for its use in the fourth chapter. The main objective of this work is to learn how to compute Khovanov homology, which we deal with in the fourth chapter, where some Khovanov homology computations will also be carried out, with the purpose of extracting valuable conclusions therefrom. Finally, in the concluding section, we will present a global view of knot theory nowadays.

# Introducció i antecedents

---

Aquest treball de final de grau de matemàtiques s'emmarca en el context de la teoria de nusos. Amb uns 100 anys d'antiguitat, és un dels camps més recents de les matemàtiques i els resultats més importants s'han produït durant els últims 30 anys. A més, encara hi ha moltes preguntes obertes, qüestions que permeten fer-se una idea ràpida del que és la recerca i, a més, és una teoria que té l'avantatge, respecte de molts altres camps matemàtics, que moltes de les coses poden ser explicades a un nivell elemental. No es necessita entendre la complexa maquinària d'avançades àrees de les matemàtiques per demostrar resultats interessants.

## Teoria clàssica de nusos

És lògic preguntar-se com va sorgir aquesta teoria, ja que el concepte quotidià de nus és a l'abast de tothom. Els nusos són un objecte familiar des de fa molts i molts anys. A l'antiguitat, el desenvolupament de l'habilitat de fer nusos estava motivat per les necessitats pràctiques, especialment les dels mariners. Per a cada tasca específica els mariners inventaven un nus específic, i els millors nusos sobreviuen passant de generació en generació. Tot i això, hi ha molts altres exemples d'ús de nusos com ara els dels alpinistes o els utilitzats per les politges mecàniques. I no només trobem nusos en el sentit físic: molts escuts, segells o logotips contenen figures de nusos.

Per raons desconegudes, van ser llargament ignorats pels matemàtics. Un esforç per part de Vandermonde al final del segle XVIII va tenir poca vida. I un estudi preliminar de Gauss no va pas tenir més èxit.

L'atac exitós als nusos per part dels matemàtics va ser provocat per la química. A mitjans del segle XIX, es creia que una substància anomenada èter impregnava tot l'espai. En un intent d'explicar els diferents tipus de matèria, William Thomson (1824–1907), conegut com a Lord Kelvin, en 1867 va suggerir la hipòtesi que els àtoms no eren res més que nusos en l'ambient de l'èter. Nusos diferents correspondrien a elements diferents i el tipus de nus determinaria les propietats fisicoquímiques de l'àtom de l'element. Per desenvolupar la seva teoria, Thomson necessitava classificar els nusos per poder fer el mateix amb els elements. Aquesta teoria va convèncer el físic escocès Peter Guthrie Tait (1831–1901), que es va posar a tabular els nusos. Les seves primeres publicacions sobre nusos foren el 1876–1877. Cal remarcar, però, que no era l'únic endinsat en el tema, ja que paral·lelament un matemàtic americà anomenat C. N. Little també estava treballant en les tabulacions dels nusos. Gràcies a això, el 1900 ja existien taules de nusos primers de fins a 10 encreuaments i de nusos primers alternats d'onze encreuaments. Desafortunadament, però, Lord Kelvin estava equivocat i un model més recent de les estructures atòmiques va aparèixer al final del segle dinou, i els químics van perdre l'interès en els nusos durant els següents 100 anys.

És aleshores, però, just a l'inici del segle XX, que els matemàtics es van interessar pels nusos. La seva motivació vingué de la curiositat de saber com la geometria de l'espai de 3 dimensions podia ser explorada pel fenomen dels nusos utilitzant matemàtiques precises. L'objectiu era trobar invariants que distingissin nusos, investigar les seves propietats geomètriques i veure la seva interacció amb la topologia de l'espai de tres dimensions.

Curiosament, fins al 1980 la teoria de nusos es va considerar una branca important de la topologia, però sense interès fora del cercle matemàtic. Tanmateix, aquell any els bioquímics van trobar nusos a les molècules d'ADN. I seguidament també es van descobrir un gran nombre d'aplicacions en la química, la biologia i la física.

Els primers passos dels matemàtics en la teoria de nusos foren establir-ne les bases i començar la seva recerca d'invariants. Un invariant és un objecte associat a un nus o a un enllaç amb la propietat que si dos nusos o enllaços tenen invariants diferents no són equivalents. Òbviament pretenien trobar bons invariants; és a dir, que discriminessin tants nusos com fos possible. Alguns matemàtics importants d'aquest període són Kurt Reidemeister (1893–1971), que va definir els moviments suficients i necessaris entre diagrames de nusos equivalents, o un altre de molt destacat, James W. Alexander (1888–1971), que va descobrir el primer invariant polinòmic en 1923. I fins i tot Max Dehn (1878–1952), que va demostrar la no-equivalència entre un dels nusos més coneguts, anomenat trèvol, i la seva imatge especular. La característica més important per als topòlegs d'aquella època és que creien que tota la informació valuosa sobre els nusos vivia en el complementari del nus a l'espai de tres dimensions. Un dels problemes d'aquest enfocament és que no els permetia distingir entre un nus i la seva imatge de mirall.

### Polinomi de Jones

No obstant això, el 1984, Vaughan Jones, tot treballant en àlgebres de Von Neumann, va descobrir un nou invariant polinòmic calculat directament del diagrama del nus, sense haver d'anar a buscar la informació en el seu complementari. Aquest invariant va permetre demostrar resultats antics, com ara les conjectures de Tait [1] pàgs. 164, 178, la primera de les quals demostrarem en el treball. Des d'aleshores, la teoria de nusos va ser vista des d'una altra perspectiva i molts matemàtics es van posar a recercar en la nova línia oberta per Jones. Un d'ells, i potser el més important, és Louis Kauffman; el 1987 va oferir una nova manera de calcular el polinomi de Jones totalment combinatòria i aplicable a qualsevol nus només amb una mica de paciència. Aquest nou mètode de càlcul feia ús d'un altre polinomi associat al nus que no era pas invariant, i és el que s'anomena parèntesi de Kauffman. També es va trobar l'estreta relació entre el polinomi de Jones i la teoria quàntica de camps. Altres matemàtics es van posar a buscar un invariant polinòmic en dues variables que cobrés la informació del d'Alexander i el de Jones. Aquest polinomi va ser aconseguit l'any 1985 i rebé el nom de polinomi HOMFLY, que correspon a la sigla formada a partir dels noms dels matemàtics que el van descobrir. Aquests nous invariants distingeixen, en general, imatges especulars, ja que un nus amfiquiral té polinomi de Jones simètric. Encara que tenen algunes mancances; per exemple, no discriminen nusos mutants.

Al voltant de 1989, es van descobrir els invariants de Vassiliev, invariants tan poderosos com el de Jones. Molts invariants polinòmics ja coneguts en formen part. Bar-Natan en recull tot l'essencial en el seu article de 1995 [3] i hi segueix treballant. Per aquella època altres invariants també van ser descoberts, com és el cas d'un invariant que feia ús d'una teoria d'homologia anterior. Aquesta és l'homologia de Floer, que aplicada als nusos dona un invariant homològic la característica d'Euler del qual està estretament lligada al polinomi d'Alexander.

### Homologia de Khovanov

Fins a finals del segle XX, eren naturalment visibles dues branques d'invariants: els que es podien construir de manera combinatòria, com els polinomis, i els que no, com l'homologia de Floer. Fins aleshores s'havien trobat poques connexions entre aquests dos grups; la més notable era entre l'homologia de Floer i el polinomi d'Alexander. És llavors quan Mikhail Khovanov, sabent de l'existència d'aquests fets, es va preguntar sobre la possibilitat que els invariants polinòmics poguessin ser interpretats com a característiques d'Euler de teories d'homologia de varietats de tres dimensions. I els seus resultats publicats el 2000 evidencien que tal teoria

d'homologia existeix per al polinomi de Jones. Aquests resultats són conseqüència de la seva investigació en àlgebres de Lie, un camp completament diferent. Mentre hi treballava, es va adonar de la similitud dels diagrames de Temperley–Lieb i els estats d'un enllaç, i així va sorgir aquesta nova teoria d'homologia, construïda d'una manera mai vista fins aleshores. Aquesta teoria d'homologia és construïble de manera combinatòria. A conseqüència de l'article [13] de Khovanov, que el va portar a la fama, molts altres matemàtics es van interessar per entendre com havia construït tal invariant. Un dels primers matemàtics a posar-s'hi fou Bar-Natan, ja esmentat anteriorment, que va passar una setmana a la Universitat de Harvard visitant David Kazhdan i Dylan Thurston amb la finalitat d'entendre i millorar la feina de Khovanov sobre la categorificació del polinomi de Jones. Van assolir el primer objectiu amb grans esforços, tot i que no el segon; però es van convèncer que hi havia alguna cosa molt innovadora en la feina de Khovanov. Després de l'estada a Harvard, el 2001 Bar-Natan va escriure un article [2] sobre l'homologia de Khovanov amb la finalitat que fos més accessible que els articles originals del matemàtic rus tot incloent diagrames i definint el parèntesi de Khovanov de manera molt similar a com Kauffman va definir el parèntesi per calcular el polinomi de Jones. Bar-Natan, en el seu article de 2001, demostra que l'homologia de Khovanov és més potent que el polinomi de Jones. Òbviament, Bar-Natan no és l'únic matemàtic interessat en tal homologia: Oleg Viro publicà un article el 2002 [25] fent observacions a la definició de l'homologia de Khovanov, tot donant una nova manera d'entendre-la a partir d'una variació dels estats dels diagrames dels nusos que ell mateix va introduir. També Kauffman hi volgué aportar el seu granet de sorra i en 2011 publicà un article [11] en què exposà la seva manera de definir l'homologia de Khovanov, tot basant-se en les aportacions de Viro.

A conseqüència d'aquest nou invariant homològic, altres invariants ja coneguts van evolucionar. Per exemple, el 2006 es va trobar la manera de construir l'invariant de l'homologia de Floer per a nusos, de manera essencialment combinatòria i similarment a com es construeix l'homologia de Khovanov. I es va evidenciar que l'homologia de Floer categorifica el polinomi d'Alexander.

## Estructura del treball

El treball s'endinsa en la teoria de nusos feta pels matemàtics i incideix especialment en dos punts àlgids: l'invariant de Jones i el de Khovanov. Dividit en quatre capítols, en el primer introduïm els fonaments de la teoria de nusos. Des de la definició de nus, passem per les múltiples propietats que se'n poden determinar, com ara l'equivalència o l'orientació, definim tot allò que s'hi relaciona, com els diagrames o els enllaços, fem esment de les qüestions obertes, fins a la introducció dels invariants. Definim què són i en donem exemples tot explicant la importància de cadascun i detallem específicament el grup del nus, l'invariant clàssic per excel·lència.

Seguidament, en el segon capítol parlem d'invariants polinòmics, fent especial èmfasi en el polinomi de Jones i la seva definició a partir del parèntesi de Kauffman. Donem els valors de tals polinomis per a un nus que ens acompanyarà al llarg de tot el treball: el nus trèvol. S'introdueix també la noció d'estats del diagrama, essencial en el quart capítol. El polinomi d'Alexander també apareix en aquest capítol i es calcula l'exemple del cas del trèvol.

El tercer capítol és el més independent: en ell s'aporten les nocions essencials de topologia algebraica necessàries al llarg del treball. Fem un recorregut breu i precís pels conceptes d'homologia i cohomologia singulars, i pels complexos de cadenes i cocadenes essencials en el quart capítol, relacionant els conceptes d'homologia i cohomologia.

I el quart capítol, tot i que fem un petit esment a l'homologia de Floer, tracta de l'homologia de Khovanov. Inicialment incloem la definició de Kauffman, ja que, vista l'estreta relació entre el polinomi de Jones i l'homologia de Khovanov, sembla raonable introduir la citada homologia des de la mateixa perspectiva. En donem una altra definició a partir d'un parèntesi i un algorisme de càlcul basant-nos en l'article de Bar-Natan. Cal observar que en el treball no



hem inclòs la manera com aquesta definició es relaciona amb l'algoritme de càlcul donat. El motiu principal és que no és un fet abastable en un treball de final de grau. A continuació, en calculem alguns exemples dels quals treiem conclusions.

Finalment, a les conclusions fem notar l'interès despertat pel treball, la influència de la línia de recerca oberta per Khovanov en les matemàtiques actuals i les deduccions extretes dels càlculs que hem realitzat sobre la seva homologia.

### **Agraïments**

Per concloure la introducció, vull donar les gràcies al director del treball, Carles Casacuberta, per la seva predisposició i dedicació; i al meu pare, Antoni Coldeforns, pel seu suport constant.

# Objectius i motivació

---

Primer que res, i per tant abans d'entrar de ple en la descripció del treball i la concreció dels objectius que li donen sentit, m'entretindré breument a analitzar alguna de les circumstàncies, acadèmiques o personals, que han contribuït a fer-me seguir aquest camí.

Durant els meus estudis de grau, he tingut l'oportunitat d'endinsar-me en el camp de la topologia. Podria dir que m'ha interessat i m'ha atret d'allò més. Fent una mica d'història, en la distribució de matèries de l'antiga llicenciatura en matemàtiques es contemplava, com a optativa, l'assignatura de topologia en dimensió baixa de la qual deriva la teoria de nusos, desconeguda per mi perquè l'assignatura comentada no apareix en el disseny del grau. Amb tot, per interès i per curiositat, vaig decidir de tirar endavant aquest treball en l'àmbit de la teoria de nusos, malgrat que, a més, no tenia els coneixements de topologia algebraica necessaris per endinsar-me en profunditat al tema. I ho vull remarcar perquè són motiu de les dificultats que he mirat de superar: no havia vist anteriorment ni teoria de nusos ni topologia algebraica.

Havent arribat on som, tanco aquestes reflexions de caràcter més general i em centro en els objectius més específics del treball.

Primerament, però, cal deixar clar que l'objectiu principal de la teoria de nusos és discriminar-los, és a dir, poder esbrinar si dos nusos són equivalents o no. Per poder-nos-en sortir ens calen els invariants, objectes propis de cada nus que no varien per deformacions del nus.

Els objectius que ens vam plantejar abans d'iniciar el treball són el següents:

- Conèixer tècniques de classificació de nusos
- Conèixer els fonaments de l'homologia singular
- Calcular el polinomi d'Alexander dels nusos
- Calcular el polinomi de Jones dels nusos
- Veure aplicacions dels polinomis i problemes oberts
- Definir i utilitzar l'homologia de Khovanov

Per tal de descriure el projecte que presentem a continuació, ens hem d'introduir en primer lloc en la teoria de nusos. Tot seguit, un cop establerts els conceptes bàsics i introduïdes tècniques de classificació, farem conèixer un invariant molt important que va revolucionar la teoria de nusos: el polinomi de Jones. En valorarem mèrits i limitacions, i l'aplicarem per demostrar la primera conjectura de Tait. Un altre invariant polinòmic més antic també serà introduït, i veurem aplicacions dels polinomis i problemes oberts. Seguidament, sent conscients de les limitacions del polinomi de Jones, anirem a buscar un invariant més potent. Aquest invariant el trobem en l'homologia de Khovanov. Ara bé, per poder entendre aquest invariant, primerament caldrà introduir alguns conceptes de topologia algebraica com ara l'homologia i la cohomologia singular. Un cop fet això, definirem l'homologia de Khovanov, aprendrem a calcular-la i calcular-ne algun exemple, veurem què té d'especial, com el fet que distingeix el nus trivial, i descobrirem la seva relació amb el polinomi de Jones. Aquest invariant homològic

va ser descobert molt recentment, raó per la qual la informació que es pot trobar és d'articles actuals (no hi ha pas llibres que en parlin), i cal fer notar que, lògicament, els esmentats articles ens permeten entreveure cap a on s'encamina, avui en dia, la línia de recerca de la teoria de nusos.

Per finalitzar, encara que m'adono que corro el risc d'entrar en objectius massa personals, vull dir que m'agradaria haver-ne assolit un que els englobi tots: que aquest treball, fet amb il·lusió i dedicació, assoleixi un grau de rigor elevat.

---

# Capítol 1

## Teoria de nusos

---

### 1.1 Conceptes bàsics

La idea intuïtiva de nus matemàtic és la que s'obté com a resultat d'entrellaçar una corda i posteriorment unir-ne els extrems de manera inseparable. A continuació, veurem l'expressió formal d'aquesta idea i un seguit de conceptes relacionats. Denotarem per  $\mathcal{S}^n$  l'esfera de dimensió  $n$ .

**Definició 1.1.1.** Un nus a  $\mathbb{R}^3$  és un subespai  $K \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $K \cong \mathcal{S}^1$ .

Tot seguit podem veure un parell d'exemples de nusos a  $\mathbb{R}^3$ . És important remarcar que la teoria de nusos té lloc exclusivament a l'espai de 3 dimensions: no té sentit en dimensions superiors ja que en elles els nusos es desfan, és a dir, són tots trivials.

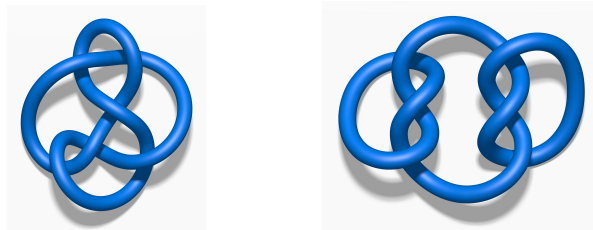


Figura 1.1: Exemples de nusos

La teoria de nusos a  $\mathbb{R}^3$  és equivalent a la teoria de nusos a  $\mathcal{S}^3$ , ja que pel fet de ser  $\mathcal{S}^3 - \{x\} \cong \mathbb{R}^3$  per a tot  $x$  com a conseqüència de la projecció estereogràfica, tenim que per una banda  $\mathbb{R}^3$  és homeomorf a un subespai de  $\mathcal{S}^3$ ; per tant, donat un nus a  $\mathbb{R}^3$  també el tenim a  $\mathcal{S}^3$ . I per l'altra, donat un nus  $K \subset \mathcal{S}^3$ , en tenim prou escollint un punt  $p \in \mathcal{S}^3$  que no sigui del nus, perquè aleshores  $K \subset \mathcal{S}^3 - \{p\} \cong \mathbb{R}^3$ . Ens interessa aquesta equivalència perquè  $\mathbb{R}^3$  no és compacte, però  $\mathcal{S}^3$  sí, i en conseqüència admet triangulacions finites.

**Definició 1.1.2.** Sigui  $K$  un nus. Una *parametrització* de  $K$  és un homeomorfisme  $f : \mathcal{S}^1 \xrightarrow{\cong} K$ .

**Definició 1.1.3.** Un nus *poligonal* és una unió  $K$  d'un nombre finit de segments de  $\mathbb{R}^3$  que, o bé són disjunts, o bé comparteixen un extrem, tal que  $K \cong \mathcal{S}^1$ .

### 1.2 Equivalència de nusos

La idea de l'equivalència de nusos és donar una definició precisa de quan dos nusos poden ser considerats el mateix tot i que la seva posició sigui diferent a l'espai. Intuïtivament, dos nusos són equivalents si un pot ser transformat en l'altre tot deformat-lo, sense tallar-lo.

Recordem que per definició qualsevol nus és homeomorf a  $\mathcal{S}^1$ ; en conseqüència, dos nusos qualssevol sempre són homeomorfs. Per tant, el fet que existeixi un homeomorfisme entre dos nusos no és suficient perquè aquests siguin equivalents. A continuació, donarem un seguit de conceptes per arribar al final a la definició d'equivalència de nusos.

**Definició 1.2.1.** Sigui  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : X \rightarrow Y$  dues aplicacions contínues entre espais topològics. Sigui  $I = [0, 1]$ . Diem que  $f, g$  són *homòtopes* si existeix una aplicació contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que per a tot  $x \in X$ ,

$$(i) \quad H(x, 0) = f(x) \text{ i}$$

$$(ii) \quad H(x, 1) = g(x).$$

L'aplicació  $H$  s'anomena una *homotopia* de  $f$  a  $g$ .

Farem servir la notació  $H_t(x) = H(x, t)$ . I d'ara en endavant  $I = [0, 1]$ .

**Definició 1.2.2.** Sigui  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : X \rightarrow Y$  dues aplicacions contínues entre espais topològics. I sigui  $F : X \times I \rightarrow Y$  una homotopia de  $f$  a  $g$ . Aleshores  $F$  és una *isotopia* de  $f$  a  $g$  quan  $F(x, t)$  és un homeomorfisme per a tot  $t \in I$ . En aquest cas, diem que  $f$  i  $g$  són *isotòpiques*.

Altrament, una isotopia  $F$  de  $F_0$  a  $F_1$  es pot considerar com una família uniparamètrica ( $0 \leq t \leq 1$ ) contínua d'homeomorfismes  $F_t$ .

**Definició 1.2.3.** Un nus  $K \subset \mathbb{R}^3$  és *equivalent* a un nus  $K' \subset \mathbb{R}^3$ , i ho escriurem  $K \sim K'$ , quan existeix una isotopia  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $H_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a  $H_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $H_0 = \text{id}$  i  $H_1(K) = K'$ . Aquesta  $H$  l'anomenarem *isotopia ambient* a  $\mathbb{R}^3$ .

Observem que l'equivalència entre nusos és una relació d'equivalència, és a dir, donats  $K, K', K''$  nusos qualssevol, aleshores  $K \sim K, K \sim K' \Rightarrow K' \sim K$ , i  $K \sim K' \text{ i } K' \sim K''$  implica  $K \sim K''$ .

Analògament a com passa amb la definició de nus, donats dos nusos  $K$  i  $K'$ , aquests són equivalents com a nusos de  $\mathbb{R}^3$  si i només si són equivalents com a nusos de  $\mathcal{S}^3$ . És evident que si ho són a  $\mathbb{R}^3$  aleshores ho són a  $\mathcal{S}^3$ . Recíprocament, si ho són a  $\mathcal{S}^3$  podem escollir un punt prou llunyà de manera que siguin equivalents a  $\mathbb{R}^3$ .

Aquesta manera de definir l'equivalència de nusos no és l'única: n'hi ha una d'equivalent que fa ús de la conservació de l'orientació d'un homeomorfisme. Per definir amb rigor quan un homeomorfisme  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  *conserva l'orientació* o la *inverteix*, cal disposar de l'homologia, que veurem al tercer capítol. No obstant això, sabem que tot homeomorfisme de  $\mathbb{R}^n$  en ell mateix o bé conserva l'orientació o bé la inverteix. A més, donada una isotopia  $\{H_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ ,  $H_t : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$ ,  $H_0$  conserva l'orientació si i només si  $H_1$  conserva l'orientació.

Per tant, si  $K \sim K'$ , llavors hi ha un homeomorfisme  $H_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $H_1(K) = K'$  i  $H_1$  conserva l'orientació, ja que hi ha una isotopia de  $H_0 = \text{id}$  a  $H_1$ .

A més, tenim el teorema següent.

**Teorema 1.2.4.** Per a tot homeomorfisme  $f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$  que conserva l'orientació existeix una isotopia  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $H_0 = \text{id}$ ,  $H_1 = f$ .

*Demostració.* En el cas  $n = 1$ , és a dir, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com que  $f$  és homeomorfisme, o bé  $f$  és estrictament creixent, o bé estrictament decreixent. Com que conserva l'orientació serà estrictament creixent. Per tant, podem considerar la isotopia  $H : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $H(x, t) = (1-t)(f(x), f(x)) + t(x, f(x)) = ((1-t)f(x) + tx, f(x))$ . Per a dimensions superiors es pot consultar [8].  $\square$

Ara ja estem en condicions de donar una definició equivalent a la d'equivalència, que en molts casos ens serà més útil.

**Corol·lari 1.2.5.** *Les afirmacions A i B donades a continuació són equivalents.*

- A. *Dos nusos  $K, K'$  a  $\mathbb{R}^3$  són equivalents si existeix una isotopia  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\{H_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ , tal que  $H_0 = \text{id}$ ,  $H_1(K) = K'$ .*
- B. *Dos nusos  $K, K'$  a  $\mathbb{R}^3$  són equivalents si existeix un homeomorfisme  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que conserva l'orientació tal que  $f(K) = K'$ .*

L'equivalència ens permet distingir entre nusos. Per una banda podem definir el nus *trivial* com tot nus equivalent a  $\mathcal{S}^1$ .

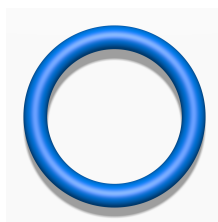


Figura 1.2: Nus trivial

D'altra banda, també ens permet definir el tipus de nus amb el qual ens centrarem en el treball.

**Definició 1.2.6.** Un nus  $K$  es diu *dòcil* si és equivalent a un nus poligonal. Els nusos que no són dòcils es diuen *salvatges*.

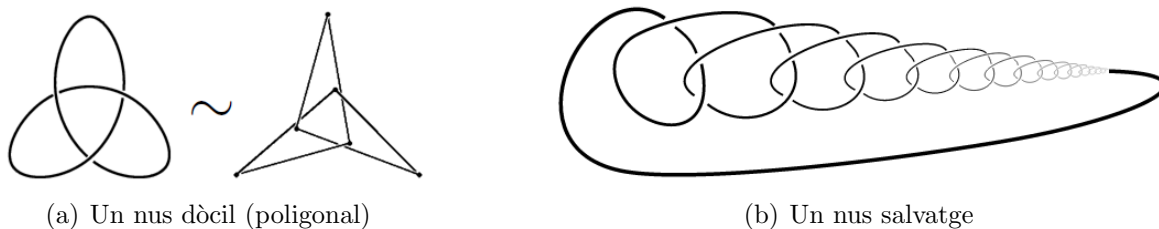
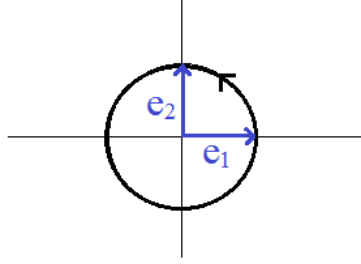


Figura 1.3: Tipus de nusos

En aquest treball només considerarem nusos dòcils. A partir d'ara, quan ens referim a nus, en realitat ens estarem referint a nus dòcil. Ens limitem a estudiar aquests casos a causa que la teoria de nusos salvatges és molt més complexa: moltes de les propietats que es compleixen per als nusos dòcils no són certes per als salvatges.

## 1.3 Orientació

La idea intuïtiva de l'orientació d'un nus és la de triar una direcció per viatjar sobre el nus. Aquesta ve donada a partir de l'orientació de  $\mathcal{S}^1$  que s'estén als nusos de forma natural. Recordem que  $\mathcal{S}^1$  té un sentit de gir canònic (o una orientació estàndard):

Figura 1.4: Orientació estàndard de  $\mathcal{S}^1$ 

El sentit de gir és equivalent a l'elecció d'una base. Una base  $v_1, v_2$  és positiva si i només si  $\det(v_1, v_2) > 0$ . Per tant, s'indueix un sentit de gir en cada nus parametritzat.

**Definició 1.3.1.** Sigui  $K$  un nus a  $\mathbb{R}^3$  i  $f, g$  homeomorfismes  $f, g : \mathcal{S}^1 \rightarrow K$ . Un nus orientat a  $\mathbb{R}^3$  és una classe d'equivalència de parells  $(K, f)$ , tal que

$$(K, f) \sim (K, g) \Leftrightarrow \text{gr}(g^{-1} \circ f) = 1.$$

Vegem-ne la representació en el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^1 & \xrightarrow[\cong]{f} & K \\ & \searrow[\cong]{g^{-1} \circ f} & \uparrow[\cong]{g} \\ & & \mathcal{S}^1 \end{array}$$

Farem ús de la notació  $[(K, f)]$  per referir-nos a la classe d'equivalència d'un nus orientat.

Com que ara considerem nusos orientats ens interessa saber com definir l'equivalència per a aquests nusos.

**Definició 1.3.2.** Donades dues classes de nusos orientats  $[(K, f)]$  i  $[(K', f')]$ , diem que  $[(K, f)]$  és *equivalent* a  $[(K', f')]$ ,  $[(K, f)] \sim [(K', f')]$ , quan existeix una isotopia  $H : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

1.  $H_0 = \text{id}$ ,
2.  $H_1(K) = K'$ , i
3.  $\text{gr}((f')^{-1} \circ H_1|_K \circ f) = 1$ .

Altra vegada, tenim una definició alternativa que en alguns casos ens serà més útil.

**Proposició 1.3.3.**  $[(K, f)] \sim [(K', f')]$  si i només si existeix una isotopia  $H : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

1.  $H_0 = \text{id}$ ,
2.  $H_1(K) = K'$ , i
- 3'.  $H_1(f(z)) = f'(z)$  per a tot  $z \in \mathcal{S}^1$ .

*Demostració.* Cal veure que existeix  $H$  amb 1 + 2 + 3 si i només si existeix  $H'$  amb 1 + 2 + 3'. La implicació de dreta a esquerra és conseqüència de tenir un homeomorfisme de  $\mathcal{S}^1$  a  $\mathcal{S}^1$  donat per  $(f')^{-1} \circ H_1|_K \circ f$ . Com  $H_0|_K$  és homòtop a  $H_1|_K$  per  $H$  i el grau es conserva per homotopies, tenim que  $\text{gr}((f')^{-1} \circ H_1|_K \circ f) = \text{gr}((f')^{-1} \circ H_0|_K \circ f) = \text{gr}(\text{id}) = 1$ , fent servir que  $H_0|_K = \text{id}$ . Per l'altra implicació, fixem-nos que per tenir  $(f')^{-1} \circ H_1|_K \circ f$  grau 1,  $(f')^{-1} \circ H_1|_K \circ f$  és

homòtopa a la identitat. Ens cal trobar la manera d'allargar  $H$  mitjançant  $H_2$  de manera que  $H_2|_K \circ f = f'$ . Això és possible ja que existeix  $G : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  homotopia entre  $H_2$  i  $H_1$ , construïda mitjançant un entorn tubular al voltant del nus  $K'$ , tal que a fora de l'entorn tubular  $G_t$  és la identitat, i a dins va de  $H_1|_K \circ f$  a  $f'$ .  $\square$

Com és d'esperar, a un nus se li pot invertir la orientació, tot creant un nou nus o a vegades sent el mateix.

**Definició 1.3.4.** Sigui  $[(K, f)]$  un nus orientat. Definim el *nus orientat invers* com  $-[(K, f)] = [(K, f \circ \tau)]$ , on  $\tau : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1$  és  $\tau(z) = z^{-1}$ .

A continuació veiem un nus orientat i al costat el mateix nus orientat en sentit contrari, és a dir, el seu invers.

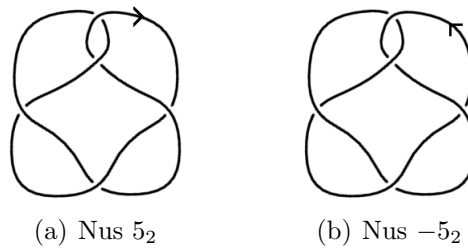


Figura 1.5: Canviant d'orientació

**Definició 1.3.5.** Un nus orientat  $[(K, f)]$  és *invertible* si  $[(K, f)] \sim -[(K, f)]$ .

Cal dir que no cal que un nus sigui orientat per dir que és invertible. Donat un nus qualsevol, direm que és *invertible* si existeix una parametrització  $f : \mathcal{S}^1 \rightarrow K$  tal que  $[(K, f)]$  és invertible. El nus no invertible més senzill és el tabulat com  $8_{17}$ .

Donat un nus, també podem considerar la seva imatge de mirall.

**Definició 1.3.6.** Sigui  $K$  un nus, que no cal que sigui orientat. La seva *imatge especular* es defineix com  $K^* = r(K)$ , on  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  és  $r(x, y, z) = (x, y, -z)$ .

En el cas que el nus sigui orientat,  $[(K, f)]$ , la seva *imatge especular* ve definida com  $[(K, f)]^* = [(r(K), r \circ f)]$ .

Un dels nusos més coneguts i que farem servir més al llarg del treball és el nus  $3_1$ , també anomenat *trèvol*. Fem servir la notació *trèvol dretà* i *trèvol esquerrà* per distingir-ne la imatge especular, ja que no són equivalents.

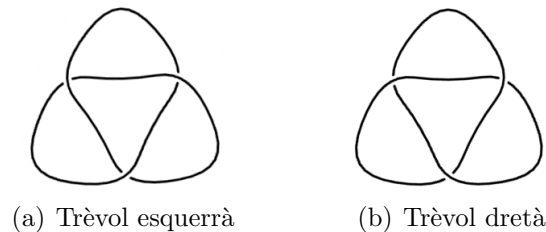


Figura 1.6: Els trèvols

**Definició 1.3.7.** Donat un nus  $K$ , orientat o no, es diu que  $K$  és *amfiquiral* si  $K \sim K^*$ .



Un altre dels nusos més coneguts és el que anomenem *nus vuit* per la forma que té. El nus vuit o  $4_1$  és amfiquiral; per tant, els dos nusos que apareixen a continuació són equivalents.

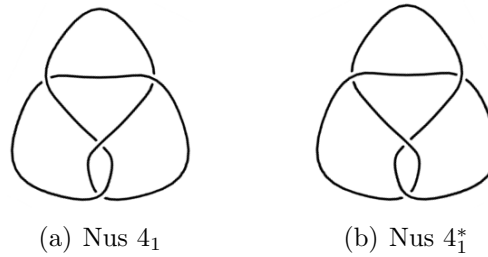


Figura 1.7: Imatge especular del nus vuit

En la majoria de taules de classificació de nusos no s'inclou un nus i la seva imatge especular, tot i que un nus i la seva imatge especular són nusos diferents, ja que no són equivalents, llevat que siguin amfiquirals.

Els conceptes d'invers i d'imatge especular es relacionen de la manera següent.

**Proposició 1.3.8.** *Sigui  $[(K, f)]$  un nus orientat. Aleshores  $-[(K, f)]^* = -([(K, f)]^*)$ .*

*Demostració.* Escollim una parametrització  $f : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  amb  $f(\mathcal{S}^1) = K$ . Llavors,  $-[(K, f)] = [(K, f \circ \tau)]$ , on  $\tau : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1$  és tal que  $\tau(z) = z^{-1}$ ; per tant,  $-[(K, f)]^* = [(K, f \circ \tau)]^* = [(r(K), r \circ f \circ \tau)]$ . I  $[(K, f)]^* = [(r(K), r \circ f)]$ , on  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  és tal que  $r(x, y, z) = (x, y, -z)$ ; per tant,  $-([(K, f)]^*) = -[(r(K), r \circ f)] = [(r(K), r \circ f \circ \tau)]$ . I efectivament  $-([(K, f)]^*)^*$  coincideix amb  $-([(K, f)]^*)$ .  $\square$

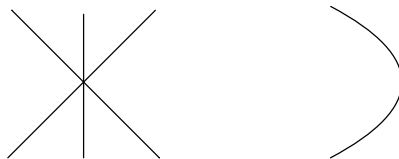
## 1.4 Projeccions i diagrames

Ja que els nusos formen part de  $\mathbb{R}^3$ , ens interessa la manera de poder-los representar sobre paper sense perdre informació. El mètode més comú per visualitzar i manipular un nus és fent ús d'un diagrama pla.

Donat un nus  $K$ , per a cada punt  $p$  de l'esfera  $\mathcal{S}^2$  podem considerar la projecció de  $K$  en el pla perpendicular a  $p$  que passa per l'origen. A tot aquest conjunt de projeccions li podrem donar nom.

**Definició 1.4.1.** Sigui  $K$  un nus orientat i sigui  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una projecció. Un punt  $x \in \pi(K)$  és *regular* quan  $\pi^{-1}(x)$  és un únic punt, altrament és *singular*. Quan  $|\pi^{-1}(x)| = 2$ , el punt  $x$  s'anomena un *punt doble*.

**Definició 1.4.2.** Sigui  $K$  un nus orientat i sigui  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una projecció. Una projecció del nus és *regular* si  $\pi(K)$  té un nombre finit de punts singulars i tots aquests són punts dobles transversals. És a dir, no es produeix cap de les situacions següents:



Per conveni, si un punt  $x$  de la projecció és singular, és a dir, és la projecció de dos punts  $x_1, x_2 \in K$  i tenim que  $d(x_1, x) > d(x_2, x)$ , direm que el tram (línia connexa) del diagrama corresponent al punt  $x_1$  passa *per damunt*.

**Definició 1.4.3.** Un *diagrama* d'un nus és una projecció regular del nus amb una informació a cada punt singular. Aquesta informació addicional és la de distingir quina línia passa per damunt en els punts dobles, tot deixant discontinua la que passa per sota. És a dir, amb  $\times$ .

Per fer-nos-en una idea, podem veure alguns diagrames dels nusos més coneguts:

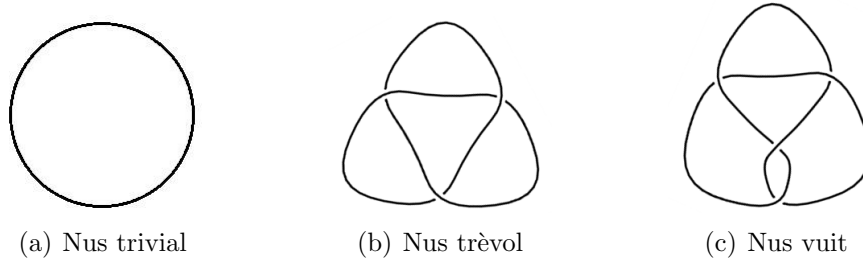


Figura 1.8: Diagrames

Un mateix nus admet molts diagrames diferents, ja que per a cada projecció regular en tenim un.

Cada part d'un diagrama rep un nom: per una banda tenim els *encreuaments*, que són cadascun dels punts singulars. I per l'altra tenim els *trams*, que són cadascun dels arcs (continus) del diagrama entre dos encreuaments.

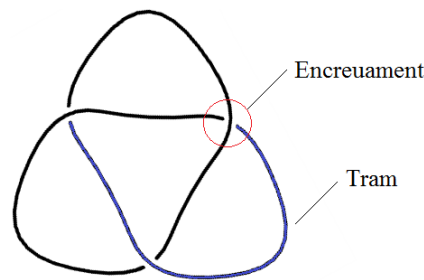


Figura 1.9: Trams i encreuaments

Els nusos orientats  $[(K, f)]$  els representarem amb *diagrames orientats*. L'orientació del nus indueix una orientació al diagrama, que representarem introduint una fletxeta al diagrama del nus. Per tant, cada diagrama té dues possibles orientacions. Vegem-ne per exemple dos del nus trèvol dretà amb orientacions oposades:

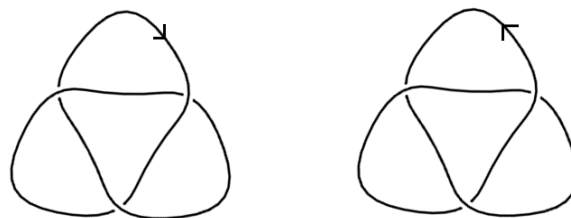
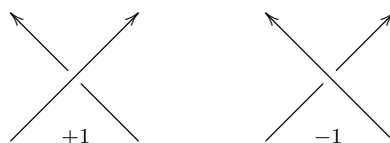


Figura 1.10: Diagrames orientats

**Definició 1.4.4.** Donat un nus orientat  $[(K, f)]$ , determinar el *signe* dels encreuaments és associar el valor  $+1$  o  $-1$  a cada encreuament de  $[(K, f)]$  d'acord amb el conveni següent:



**Definició 1.4.5.** Un diagrama es diu *alternat* quan, escollida una orientació, en anar recorrent el nus en el sentit de gir indicat per l'orientació escollida, els encreuaments per on passem es van alternant “per damunt” amb “per dessota”.

Així, direm que un nus és *alternat* si admet algun diagrama alternat. Cal tenir present que no tots els nusos admeten diagrames alternats. El primer nus no alternat és el  $8_{19}$ . S'ha conjeurat que la proporció de nusos alternats tendeix exponencialment a 0 a mesura que s'incrementa el nombre d'encreuaments.

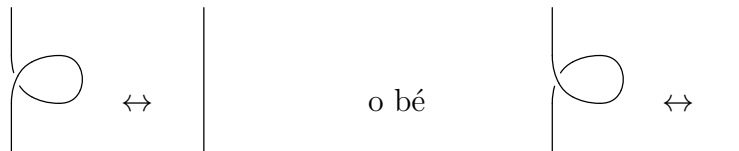
Recordem que només considerem nusos dòcils. Aquest fet també té una relació amb els diagrames i és que és equivalent a considerar diagrames amb un nombre finit d'encreuaments. A més, tot ens funciona perquè tot nus (dòcil) admet algun diagrama. Aquest fet és conseqüència que els nusos dòcils són equivalents a poligonals. I els poligonals admeten diagrama ja que tenen un nombre finit de vèrtexs i arestes, cosa que comporta que els punts de projecció no desitjats es poden escriure amb equacions algebraiques i per tant el subespai de punts de  $\mathcal{S}^2$  no adequats per a la projecció és algebraic. I com que tot subespai algebraic de  $\mathcal{S}^2$  està format per punts aïllats i un nombre finit de corbes, el complementari és dens. Per tant, hi ha infinites projeccions regulars.

## 1.5 Moviments de Reidemeister

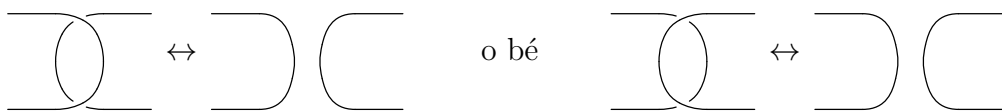
El 1920, el matemàtic alemany Kurt Reidemeister, també autor del primer llibre sobre nusos matemàtics anomenat *Knottentheorie*, va començar a estudiar els nusos en profunditat. Reidemeister es plantejava si podia la projecció d'un nus ser contínuament modificada de tal manera que s'obtinguessin totes les possibles posicions del nus a l'espai. La resposta a aquesta qüestió són els anomenants *moviments de Reidemeister*, que veurem a continuació.

**Definició 1.5.1.** Els *moviments de Reidemeister* són transformacions dels diagrames dels nusos dels tipus següents:

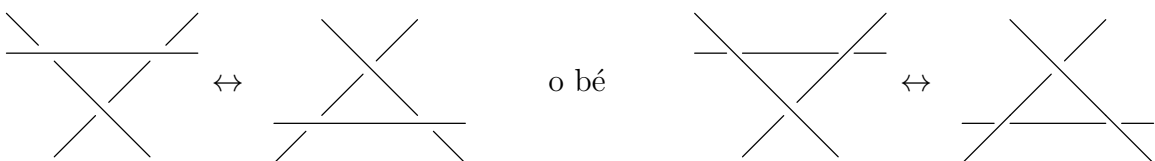
- Tipus I: Ens permet posar o treure un gir.



- Tipus II: Ens permet afegir dos encreuaments o treure dos encreuaments.



- Tipus III: Ens permet fer relliscar un tros del nus des d'un costat d'un encreuament fins a l'altre.



**Definició 1.5.2.** Siguin  $D$  i  $D'$  dos diagrames regulars de dos nusos. Una *isotopia plana* de  $D$  a  $D'$  és una aplicació contínua  $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F_0 = \text{id}$ ,  $F_1(D) = D'$  i  $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  és un homeomorfisme per a tot  $t$ . De la isotopia plana en direm *moviment de Reidemeister de tipus 0*.

**Teorema 1.5.3** (Teorema de Reidemeister). *Siguin  $K_1, K_2$  dos nusos (dòcils). Siguin  $D_1$  i  $D_2$  dos diagrames (regulars) que representen  $K_1$  i  $K_2$  respectivament. Aleshores  $K_1 \sim K_2$  si i només si es pot passar de  $D_1$  a  $D_2$  mitjançant una successió finita de moviments de Reidemeister de tipus 0, I, II i III.*

*Demostració.*

$\Leftarrow$ ) És evident.

$\Rightarrow$ ) Suposem  $K_1 \sim K_2$  i volem veure que es pot passar de  $D_1$  a  $D_2$  mitjançant una successió finita de moviments de Reidemeister de tipus I, II i III, i d'isotopies planes.

Considerem  $K_1$  i  $K_2$  com a nusos de  $\mathcal{S}^3$ . Per ser  $K_1, K_2$  dòcils, sabem que són equivalents a poligonals finits. Suposem doncs  $K_1$  i  $K_2$  poligonals finits. Triangulem  $\mathcal{S}^3$  amb un nombre finit de símplexs de manera que  $K_1$  i  $K_2$  formin part de la triangulació. Per ser  $K_1 \sim K_2$  sabem que existeix un homeomorfisme  $f : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$  que conserva l'orientació i tal que  $f(K_1) = K_2$ . Refinant, si cal, la triangulació de  $\mathcal{S}^3$ , podem escollir  $f$  que sigui simplicial, és a dir, que  $f$  d'un símplex sigui un símplex. Podem passar de  $K_1$  a  $K_2$  amb una successió finita de moviments triangulars [4] pàgs. 10–11. Un moviment triangular és de la forma:

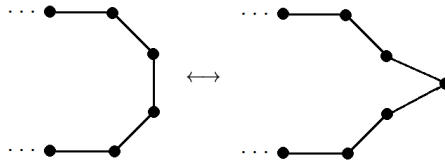


Figura 1.11: Moviment triangular

Sigui doncs  $\Delta'$  una successió finita de moviments triangulars de  $K_1$  a  $K_2$  a  $\mathcal{S}^3$ . Projectem la successió  $\Delta'$  en una direcció comuna, escollida de manera que tots els diagrames projectats siguin regulars. És possible, ja que les projeccions singulars vénen donades per desigualtats algebraiques; per tant, corresponen a un conjunt de mesura zero a  $\mathcal{S}^2$ , i així podem escollir el punt de projecció del complementari.

En el pla de projecció, un moviment triangular de  $\mathcal{S}^3$  es veu com un dels tres moviments de Reidemeister o com una isotopia plana. Combinatorialment es veu que tots els altres són combinacions d'aquests.

Només falta veure que si  $D$  i  $D'$  són projeccions (regulars) d'un mateix nus  $K$  en direccions diferents, llavors es pot passar de  $D$  a  $D'$  amb moviments de Reidemeister. Siguin  $p$  i  $p'$  les direccions de projecció que donen els diagrames  $D$  i  $D'$  respectivament. Un camí de  $p$  a  $p'$  talla els conjunts singulars en un nombre finit de punts, ja que les direccions de projecció singulars són un nombre finit d'arcs de còniques. Llavors, mentre el camí no passa per cap d'aquests punts, fem una isotopia plana. I cada punt de tall amb els conjunts singulars correspon a un moviment de Reidemeister I, II o III.  $\square$

## 1.6 Aritmètica dels nusos

Parlem d'aritmètica dels nusos perquè a continuació veurem que hi ha una gran similitud entre els nombres naturals i els nusos. Els nusos també tenen una multiplicació commutativa (anomenada *composició* o *suma connexa*) i un teorema d'unicitat de la descomposició de nusos en nusos primers. Val a dir que la demostració d'aquest teorema no va ser aconseguida fins el 1949 pel matemàtic alemany Schubert. Intuïtivament dos nusos es poden sumar (suma connexa) fent un tall a cadascun i unint els finals restants d'un nus amb els de l'altre. És important remarcar que la suma connexa de nusos només es defineix per a nusos orientats.

**Definició 1.6.1.** Siguin  $[(K_1, f_1)]$ ,  $[(K_2, f_2)]$  dos nusos orientats. Considerem el diagrama de cada nus, i suposem es troben continguts en discs disjunts (si cal es fa ús d'una translació). Considerem un rectangle  $R$  qualsevol del pla tal que a l'interior del rectangle hi ha un arc de cada nus i la resta del rectangle és disjunt amb els nusos. Aleshores  $\partial R \cap K_1 = \{p_1, q_1\}$  i  $\partial R \cap K_2 = \{p_2, q_2\}$ . Sense pèrdua de generalització podem suposar que  $p_i$  és el punt d'entrada a  $R$  i  $q_i$  el de sortida (segons l'orientació per  $f_i$ ), per a  $i \in \{1, 2\}$ . Aleshores definim la *suma connexa* o *composició* de  $[(K_1, f_1)]$  i  $[(K_2, f_2)]$ , i ho escrivim  $[(K_1 \# K_2, f)]$ , com el nou nus orientat que té per diagrama l'obtingut eliminant el rectangle i afegint un segment de  $p_2$  a  $q_1$  i un segment de  $p_1$  a  $q_2$ .

Per fer-nos-en una idea, vegem l'exemple següent. Volem sumar el nus trèvol i el nus vuit orientats tal com veiem a continuació:

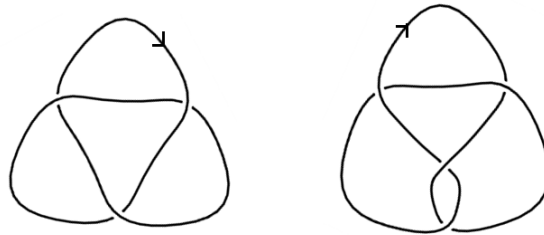


Figura 1.12: Trèvol i vuit orientats

Tenim el procés següent:

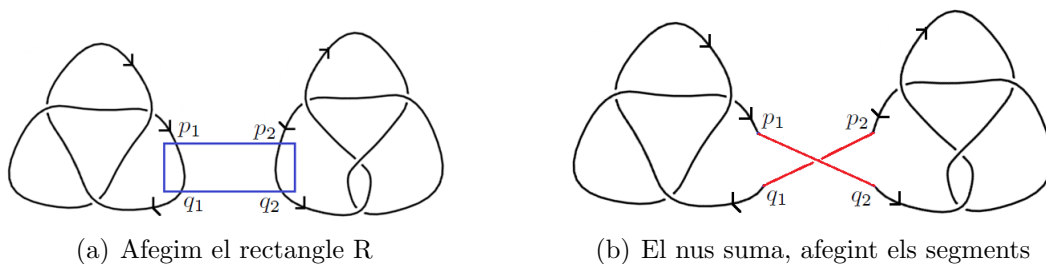


Figura 1.13: Procés de la suma connexa

Atenció: és molt important ser conscient que la suma connexa no està ben definida per a nusos no orientats. Per tant, quan parlem de suma connexa de nusos donarem per fet que són orientats i sobreentendrem que un nus  $K$  denota la classe d'equivalència de  $[(K, f)]$ . Ara bé, el nus  $K = K_1 \# K_2$  depèn de les orientacions escollides per a  $K_1$  i  $K_2$ .

**Proposició 1.6.2.** Siguin  $K_1, K_2$  dos nusos orientats. Si  $K_1$  o bé  $K_2$  és invertible, aleshores  $K_1 \# K_2$  no depèn de les orientacions escollides.

*Demostració.* Suposem que  $K_2$  és invertible, per tant  $K_2 \sim (-K_2)$ . Volem veure que  $K_1 \# K_2 \sim K_1 \# (-K_2)$ . Tenint en compte que són nusos orientats, això és equivalent a veure que

$$[(K_1, f_1)] \# [(K_2, f_2)] \sim [(K_1, f_1)] \# [(K_2, f_2 \circ \tau)].$$

Sigui  $H : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una isotopia amb  $H_0 = \text{id}$ ,  $H_1(K_2) = K_2$  i  $H_1 \circ f_2 = f_2 \circ \tau$ . Considerem dos plans de tall sobre els segments afegits per a la suma, tal que si hi ha encreuament quedi a la part del nus  $-K_2$ . Aleshores, definim una nova isotopia  $H' : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $H'$  és la identitat a la part on viu  $K_1$ , és  $H$  a la part on viu  $-K_2$ , i a l'espai entre els dos plans de tall ho empallem bé. Sabem que això és possible perquè com que  $H_1$  conserva l'orientació tenim una homotopia entre  $H$  i la identitat.  $\square$

La suma connexa de nusos és associativa, commutativa i té element neutre (el nus trivial). Aquestes propietats són molt evidents de veure gràficament. A més, la suma connexa dels nusos també ens dóna lloc a altres propietats.

**Definició 1.6.3.** Un nus  $K$  és *indescomponible* quan, si  $K \sim K_1 \# K_2$ , aleshores

- o bé  $K_1$  és equivalent al nus trivial,
- o bé  $K_2$  és equivalent al nus trivial.

Un fet no evident però que és molt important és que el nus trivial és indescomponible. Aquest resultat es pot demostrar a partir de considerar superfícies de Seifert (superfície orientable la vora de la qual és un nus donat) i estudiar-ne el gènere a fi de veure que no hi ha nusos inversos per a la suma connexa. Per tant, sumant nusos mai no arribarem a poder desfer un nus donat.

**Definició 1.6.4.** Un nus  $K$  s'anomena *primer* quan és indescomponible i no trivial. Altrament, un nus no equivalent al trivial i no primer s'anomena *compost*. Els nusos que formen un nus compost s'anomenen *nusos factors*.

La classificació més estesa dels nusos és la de tabular els diagrames dels nusos primers i el nus trivial amb mínim nombre d'encreuaments, llevat d'imatge especular, i anomenar-los mitjançant dos nombres naturals  $A_B$ , on  $A$  representa el mínim nombre d'encreuaments d'un diagrama d'aquell nus i  $B$  el complementa amb un ordre acordat per conveni d'arrels històriques per diferenciar els nusos primers que coincideixen en nombre d'encreuaments.

**Definició 1.6.5.** Un diagrama d'un nus  $K$  es diu *reduït* si no es pot descompondre en suma connexa ni conté encreuaments del tipus  $\overline{\cup}$ .

I també, per completar el paral·lelisme amb els nombres naturals, tenim el següent teorema.

**Teorema 1.6.6** (Teorema de Schubert). *Tot nus no trivial es descompon en suma connexa finita de nusos primers de manera única llevat de l'ordre.*

Obtenir la demostració d'aquest teorema va ser l'ambició de molts investigadors fins a finals dels anys quaranta quan Schubert ho va demostrar. Aquesta demostració és molt tècnica; veure [4] pàg. 96.

Ara ja estem en condicions d'enunciar la primera conjectura de Tait, tot i que no la demostrarem fins haver introduït el polinomi de Jones al capítol següent.

**Teorema 1.6.7** (Conjectura de Tait). *Si un diagrama és alternat i reduït, llavors no es pot representar el mateix nus amb cap diagrama amb menys encreuaments.*

## 1.7 Enllaços

Un conjunt de nusos, entrelaçats entre ells o no, és el que s'anomena un *enllaç*.

**Definició 1.7.1.** Un *enllaç* és un subespai de  $\mathbb{R}^3$  homeomorf a una unió disjunta finita de circumferències  $\mathcal{S}^1 \amalg \dots \amalg \mathcal{S}^1$ .

Alguns exemples d'enllaços amb nom:

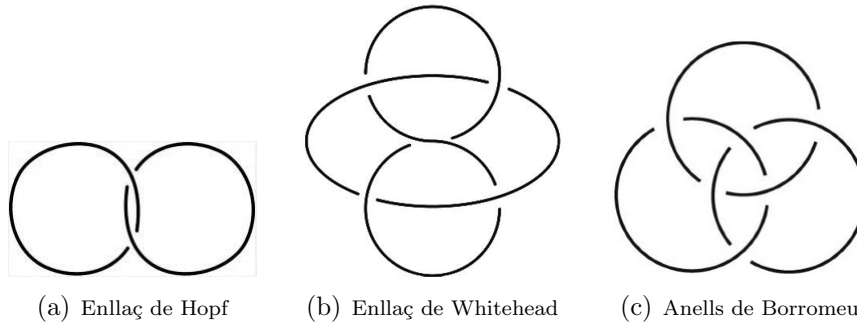


Figura 1.14: Alguns enllaços

Gairebé tot el que hem dit fins ara per a nusos s'aplica igualment per a enllaços. L'equivalència d'enllaços a  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathcal{S}^3$  es defineix igual que per a nusos. I si dues projeccions representen el mateix enllaç, hi ha d'haver una seqüència finita de moviments de Reidemeister que van d'una projecció a l'altra.

Escriurem  $L = (K_1, \dots, K_n)$  per designar un enllaç on cada  $K_i$  és un nus. Cada nus que forma un enllaç es diu una *component* de l'enllaç. Per tant, un nus pot ser descrit com un enllaç d'una component.

**Definició 1.7.2.** Un enllaç  $L$  es diu *separable* si  $L \sim L'$  on  $L' = (K'_1, \dots, K'_n)$  i els nusos  $K'_i$  estan continguts en boles disjunes.

Una manera ràpida de saber si certs enllaços són equivalents és únicament comptant el nombre de components de cada enllaç. Si els dos nombres són diferents, els dos enllaços han de ser diferents. Per tant, el trèvol, l'enllaç de Whitehead i els anells de Borromeu són enllaços diferents.

Així, si tenim dues projeccions de dos enllaços amb el mateix nombre de components, volem saber si aquests són equivalents, és a dir, si representen el mateix enllaç. A continuació introduïrem un nombre, el *nombre d'enllaç*, que ens dirà com d'entrelaçades estan les components entre elles.

**Definició 1.7.3.** Sigui  $D$  un diagrama orientat d'un enllaç  $L = (K_1, K_2)$ . Definim el *nombre d'enllaç*  $l(D)$  de  $D$  com

$$l(D) = (\text{suma dels signes dels encreuaments entre } K_1 \text{ i } K_2) \times \frac{1}{2}.$$

Observem que perquè  $l(D)$  estigui ben definit amb  $l \in \mathbb{Z}$ , la suma dels signes dels encreuaments entre components diferents sempre ha de ser parella. Això passa sempre, ja que si pensem que una component de l'enllaç passa per dins o per fora de l'altra, perquè l'enllaç pugui tancar-se ha de passar per dins el mateix nombre de vegades que per fora, fent un total d'un nombre parell d'encreuaments.

A partir de la definició, és evident que si  $L$  és separable aleshores  $l(D) = 0$ . Ara bé, el recíproc no és cert. Podem mirar com a contraexemple l'enllaç de Whitehead, que té  $l = 0$ , però que no és separable.

## 1.8 Invariants

A grans trets, un *invariant* d'un nus és un un cert objecte algebraic associat a un nus concret, de tal manera que aquest objecte no varia en manipular el nus. Els invariants dels nusos (o dels enllaços) serveixen per respondre negativament a la pregunta essencial de la teoria de nusos de saber quan dos nusos són equivalents, és a dir, donats dos nusos, descartar la seva equivalència. Diferents valors de l'invariant demostren que els nusos no poden ser equivalents.

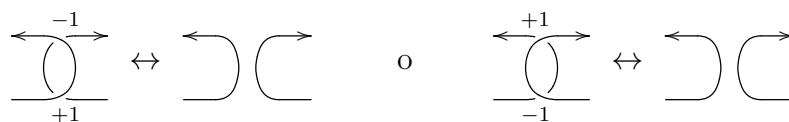
Un dels primers invariants algebraics associat a un nus va ser el càlcul del grup fonamental del complement del nus (el *grup del nus*). Aquest invariant el tractarem a la secció següent. Des de la perspectiva més moderna, es defineixen invariants dels nusos a partir dels seus diagrames. N'hi ha de numèrics, de polinòmics, etc. En els últims anys, hi ha hagut un gran interès pels invariants homològics de nusos que categorifiquen invariants ja coneguts. Parlarem d'un d'ells en l'últim capítol.

A mesura que s'introduïen conceptes sobre la teoria de nusos, ja hem tingut ocasió de topar amb algun invariant. A continuació en veurem alguns de bàsics i al llarg del treball en veurem de més importants i revolucionadors.

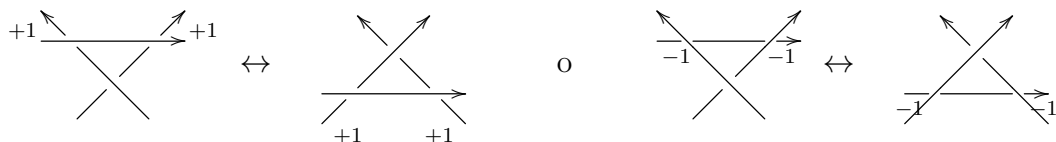
**Definició 1.8.1.** Sigui  $K$  un nus. Definim el *nombre d'encreuament* d'un nus, i ho escrivim  $c(K)$ , com el mínim nombre d'encreuaments que pot tenir un diagrama de  $K$ .

És clar que el nombre d'encreuament és un invariant del nus.

Ja hem vist a l'apartat dels enllaços que el nombre de components és un invariant dels enllaços, ja que si tenen un nombre de components diferents no poden ser enllaços equivalents. Un altre dels invariants per als enllaços és el ja definit nombre d'enllaç  $l(D)$ . El nombre d'enllaç és invariant per a moviments de Reidemeister de tipus II i III. De tipus II perquè un dels encreuaments contribueix a sumar 1 i l'altre a restar 1 (sigui quina sigui l'orientació escollida) en el cas que hi ha encreuaments; per tant, contribueix en 0 al seu nombre d'enllaç, igual que en el cas que no hi ha encreuaments. Gràficament per a una de les orientacions:



Per a les altres orientacions és anàleg. De tipus III, triant totes les orientacions possibles, també veiem que es conserva. L'encreuament central no canvia, i els altres dos es mantenen. Gràficament per a una de les orientacions:



Per a la resta d'orientacions és anàleg. I els de tipus I no es poden donar entre components diferents.

Un altre invariant relacionat amb els diagrames és el de la *tricolorabilitat*.

**Definició 1.8.2.** *Tricolorar* el diagrama d'un nus vol dir pintar-lo amb tres colors diferents, anomenem-los  $\{0, 1, 2\}$ , un tram de cada color, de manera que s'utilitzin tots tres colors i en cada encreuament coincideixin tots tres colors o bé un de sol.

**Definició 1.8.3.** Un nus és *tricolorable* si admet un diagrama que es pot tricolorar.



Vegem per exemple un diagrama del trèvol tricolorat, i per tant en deduïm que el trèvol és tricolorable.

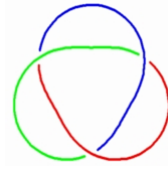


Figura 1.15: Trèvol tricolorat

**Teorema 1.8.4.** *Si  $D$  i  $D'$  són diagrames d'un mateix nus, llavors  $D$  és tricolorable si i només si  $D'$  és tricolorable.*

*Demostració.* Es dedueix del teorema de Reidemeister. Cal comprovar que cada moviment respecta la propietat de ser tricolorable o no ser-ho.

- Moviments del tipus 0: No fan variar els encreuaments.
- Moviments del tipus I: Si introduïm un encreuament, mantenim els colors i es preserva la tricolorabilitat. Anàlogament si eliminem un encreuament.
- Moviments del tipus II: En els dos casos veiem que si la projecció original es podia colorejar com a mínim amb 2 colors, ara també. El cas que una banda són 2 colors i l'altra 3 també conserva la tricolorabilitat, ja que perquè sigui un nus en algun moment els trams de colors diferents s'han d'unir/encreuar, i si ja hi ha 2 colors, n'hi haurà un tercer en el cas de ser tricolorable.
- Moviments del tipus III: Es pot comprovar fent totes les combinacions possibles.

□

És gràcies a la tricolorabilitat que podem demostrar que el trèvol (tant el dretà com l'esquerrà) no és equivalent al nus trivial. I també que el trèvol (tant el dretà com l'esquerrà) no és equivalent al nus vuit. És conseqüència del fet que el trèvol és tricolorable, però en canvi el nus vuit i el trivial no ho són.

## 1.9 Grup del nus

Durant molts anys, fins al descobriment del polinomi de Jones, es va creure que tota la informació que portava un nus vivia en el seu complementari. Així, es va desenvolupar una gran teoria en què tots els invariants clàssics de nusos i enllaços s'obtenien a partir del complement del nus a  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathcal{S}^3$ . A continuació, recordarem alguns conceptes de topologia, per veure després el grup del nus.

**Definició 1.9.1.** Definim el conjunt  $\pi_1(X, p) = \{[\sigma] \mid \sigma : I \rightarrow X, \sigma(0) = \sigma(1) = p\}$ , on  $[\sigma]$  és la classe d'homotopia (rel.  $\{0, 1\}$ ) de  $\sigma : I \rightarrow X$ . Aquest conjunt té una operació interna  $[\sigma] \cdot [\omega] = [\sigma * \omega]$ , definint  $\sigma * \omega$  com la concatenació de camins.

**Definició 1.9.2.** El *grup fonamental* o *grup de Poincaré* o *primer grup d'homotopia* de  $X$  en el punt base  $p$  és el grup  $\pi_1(X, p)$  amb l'operació  $[\sigma] \cdot [\omega] = [\sigma * \omega]$ .

**Definició 1.9.3.** Sigui  $K$  un nus a  $\mathcal{S}^3$ . Definim el *grup del nus* com  $G(K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 - K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 - K, p)$ , on  $p$  és un punt molt llunyà a  $K$ . És per això que l'eliminem de la notació.

Altra vegada, ens és indiferent pensar el nus a  $\mathbb{R}^3$  o a  $\mathcal{S}^3$  ja que  $\pi_1(\mathcal{S}^3 - K, p) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$ . Aquest fet és conseqüència del teorema de Seifert i van Kampen. Sigui  $p$  un punt de  $\mathcal{S}^3$  i sigui  $D$  una bola també a  $\mathcal{S}^3$  que conté a  $p$ . Aleshores,  $\mathcal{S}^3 \setminus K = ((\mathcal{S}^3 - \{p\}) \setminus K) \cup D$ . Com que  $D$  és contràctil,  $\pi_1(D) = 0$ . Com que  $D - \{p\}$  és homòtop a  $\mathcal{S}^2$ ,  $\pi_1(D - \{p\}) = 0$ . Aplicant Seifert i van Kampen, tenim que  $\pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus K) \cong \pi_1((\mathcal{S}^3 - \{p\}) \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ .

**Proposició 1.9.4.** *Si  $K \sim K'$  són nusos equivalents a  $\mathbb{R}^3$  aleshores  $G(K) \cong G(K')$ .*

*Demostració.* Per definició d'equivalència, existeix un homeomorfisme  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(K) = K'$ , i per tant  $f|_{\mathbb{R}^3 - K} : \mathbb{R}^3 - K \rightarrow \mathbb{R}^3 - K'$  és un homeomorfisme. En conseqüència  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K')$ .  $\square$

D'aquesta proposició en podem deduir que el grup del nus és un invariant del nus. Més recentment s'ha demostrat el recíproc: si dos nusos primers tenen grups isomorfs, aleshores són o bé equivalents o bé imatges especulars (teorema de Gordon–Luecke). Perquè el grup del nus no distingeix un nus de la seva imatge especular.

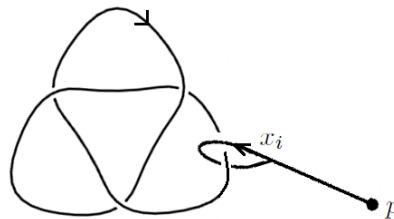
**Proposició 1.9.5.** *Sigui  $K$  un nus. Aleshores  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K^*)$ .*

*Demostració.* Per ser  $K^*$  imatge especular, hi ha un homeomorfisme  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  amb  $r(K) = K'$  on  $r(x, y, z) = (x, y, -z)$ . Llavors  $r(\mathbb{R}^3 - K) = \mathbb{R}^3 - K^*$ . Per tant,  $\mathbb{R}^3 - K \cong \mathbb{R}^3 - K^*$ .  $\square$

En 1910, Wirtinger va donar un algorisme de càlcul per al grup d'un nus (dòcil) que encara es fa servir avui en dia a causa de la seva simplicitat.

**Algorisme 1.9.6** (Presentació de Wirtinger).

- Sigui  $K$  un nus. Volem calcular  $G(K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$ .
- Si  $K$  no és orientat, orientem-lo.
- Considerem el diagrama orientat  $D$  de  $K$ .
- Sigui  $n$  el nombre d'encreuaments de  $D$ .
- Per a cada tram considerem un generador  $x_i$ , que al seu torn està orientat:



- Determinem una relació  $r_i$  a cada encreuament, donada pels generadors. Tindrem una relació com en una de les figures següents:



La primera la relació és  $r = x_i x_j^{-1} x_k^{-1} x_j$  i la segona és  $r = x_j x_k^{-1} x_j^{-1} x_i$ .

- Aleshores,  $G(K) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ .
- Tinguem en compte que hi haurà una relació redundant, ja que  $r_1 \cdots r_n = 1$ . Obviem-la.

*Demostració.* La demostració que aquesta  $G(K)$  és efectivament el grup del nus que volem es basa en el teorema de Seifert i van Kampen. Per veure la demostració [4].  $\square$

A tall d'exemple, calculem el grup del nus del trèvol esquerrà. Considerem el següent diagrama orientat; a continuació marquem en vermell els  $n = 3$  encreuaments i en determinem els generadors  $x, y, z$  especificats en blau.

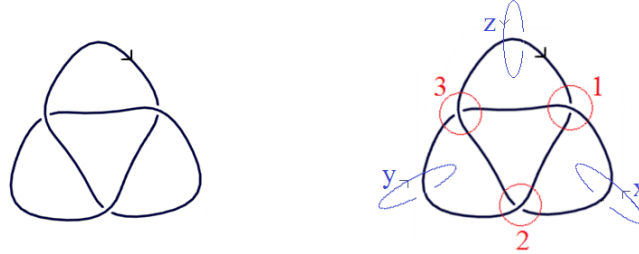


Figura 1.16: El trèvol i els seus generadors

En cadascun dels encreuaments, determinem la relació.

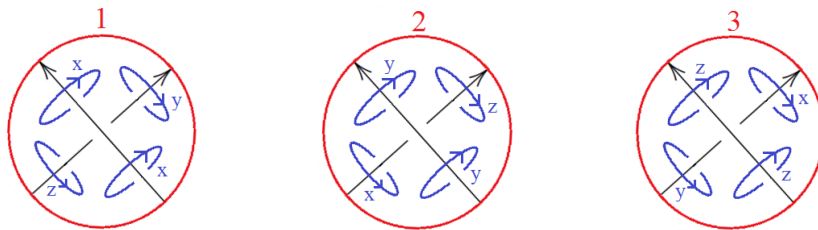


Figura 1.17: Relacions als encreuaments

Així, tal com ens diu cadascuna de les figures anteriors, tenim que:

$$r_1 : zxy^{-1}x^{-1} = 1,$$

$$r_2 : xyz^{-1}y^{-1} = 1,$$

$$r_3 : yzx^{-1}z^{-1} = 1.$$

Observem que  $r_3 \cdot r_1 \cdot r_2 = 1$ . Per tant obviem  $r_3$ , i com que

$$zxy^{-1}x^{-1} = 1 \text{ i } xyz^{-1}y^{-1} = 1 \text{ és equivalent a } z = xyx^{-1} \text{ i } z = y^{-1}xy,$$

tenim que

$$G(\text{trèvol}) = \langle x, y, z \mid z = xyx^{-1}, z = y^{-1}xy \rangle = \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^{-1}xy \rangle = \langle x, y \mid yxy = xyx \rangle.$$

De manera similar, podem veure que  $G(\text{nus trivial}) \cong \mathbb{Z}$ .

**Teorema 1.9.7.** Per a tot nus  $K$ , el grup del nus abelianitzat és  $G(K)_{ab} \cong \mathbb{Z}$ .

*Demostració.* Les relacions  $r_1, \dots, r_n$  abelianitzades donen  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .  $\square$

---

## Capítol 2

# Invariants polinòmics

---

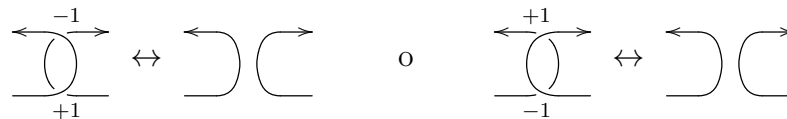
### 2.1 Conceptes necessaris

Introduïrem un parell de conceptes essencials per poder definir el polinomi de Jones i veure'n les propietats.

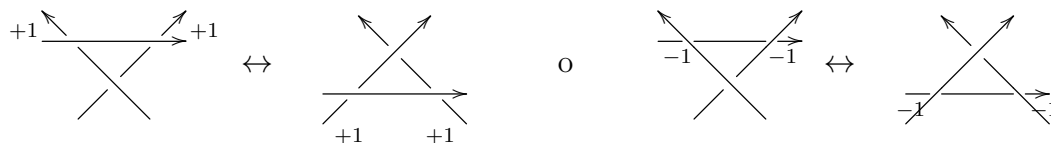
**Definició 2.1.1.** Sigui  $D$  un diagrama d'un enllaç orientat. Definim la *contorsió* de  $D$  com la suma dels signes dels encreuaments de  $D$ . Ho escrivim  $\omega(D)$ .

Es pot veure que la contorsió és un invariant per moviments de Reidemeister de tipus II i III. Només cal comprovar-ho per totes les orientacions possibles. Fem-ne un cas; els altres són anàlegs.

- De tipus II: On no hi ha encreuament l'aportació es 0, i en els dos encreuaments el signe d'un anul·la el de l'altre aportant també 0.



- De tipus III: L'encreuament central no canvia, i els altres dos es mantenen, contribuint a aportar el mateix valor a la contorsió.



Cal remarcar que no és invariant per moviments de Reidemeister de tipus I, ni tan sols si imposem que tots els diagrames siguin reduïts. Ja que en el cas que no hi ha encreuament l'aportació a la contorsió és 0, però en canvi en el cas de l'encreuament l'aportació és +1 o -1. Podem veure el contraexemple següent de dos diagrames del nus trèvol dretà amb contorsions diferents.

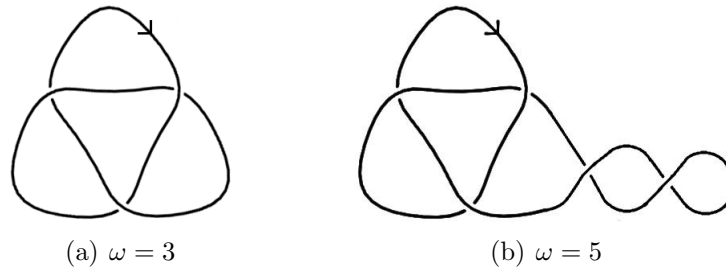
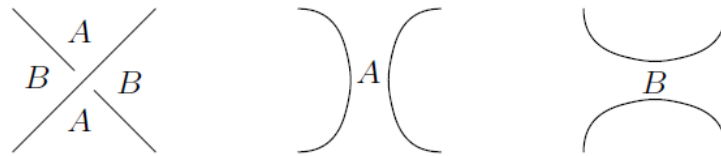


Figura 2.1: Diagrames de trèvols dretans

Entrarem ara en els estats d'un diagrama alternat. Considerem l'encreuament que hi ha a continuació i els dos canals que té al costat.



Si en un diagrama tenim un encreuament del tipus anterior, i els dos canals que hi ha al seu costat s'anomenen  $A$  i  $B$ , és clar que l'encreuament o bé es pot desfer mitjançant un canal de tipus  $A$  o bé amb un de tipus  $B$ .

**Definició 2.1.2.** Donat un encreuament del tipus anterior, anomenem  $A$ -suavitització a desfer-lo mitjançant un canal del tipus  $A$  i anomenem  $B$ -suavitització a desfer-lo mitjançant un canal del tipus  $B$ .

**Definició 2.1.3.** Sigui  $D$  un diagrama d'un enllaç. Si el diagrama té  $n$  components, les  $2^n$  maneres possibles de desfer els encreuaments mitjançant  $A$ -suavititzacions o  $B$ -suavititzacions són els *estats* del diagrama.

Òbviament un estat es pot identificar amb un element de  $\{A, B\}^n$  si suposem els encreuaments ordenats. Cada estat serà un conjunt de cicles.

A continuació calculem els estats del nus trèvol:

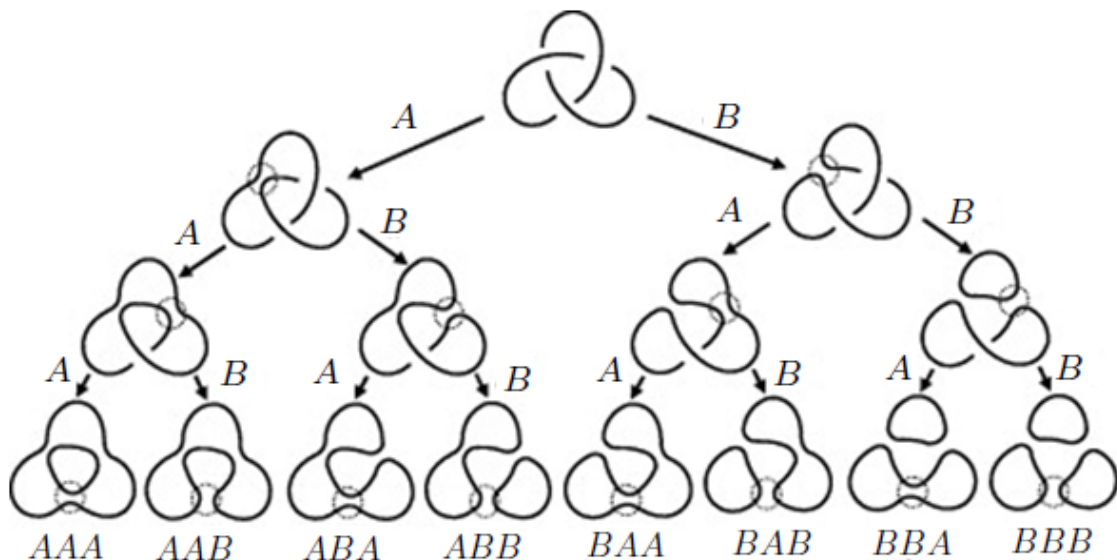


Figura 2.2: Estats d'un diagrama del nus trèvol

Observem que podem distingir entre regions de tipus  $A$  i tipus  $B$ , en el nus original i en cadascun dels estats. Si el diagrama no és alternat, aquesta separació en regions no és possible; ara bé, sí que se li poden desfer els encreuaments i trobar estats. Aquesta observació és important, perquè aquests estats d'un diagrama qualsevol són els que fa servir Khovanov per construir la seva homologia.

## 2.2 Parèntesi de Kauffman

Louis H. Kauffman, topòleg a la Universitat d'Illinois interessat en la teoria de nusos, va crear una nova manera d'introduir el polinomi de Jones que veurem a la següent secció. Kauffman va desenvolupar un polinomi associat als enllaços invariant per moviments de Reidemeister de tipus II i III. Intentarem entendre com arribar a determinar aquest polinomi, que s'anomena *parèntesi de Kauffman*.

Busquem la manera d'associar un polinomi a partir d'unes regles a cada diagrama de manera que sigui invariant per moviments de Reidemeister. Ja hem dit, però, que només ho serà per a tipus II i III. Farem servir la notació  $\langle K \rangle$  per referir-nos al parèntesi de Kauffman del nus  $K$ . Sembla lògic demanar que el parèntesi prengui el valor 1 per al nus trivial, així que imposarem la primera regla:

- Regla 1:  $\langle \bigcirc \rangle = 1$ .

Després, com que el que volem és obtenir el parèntesi d'un enllaç a partir del d'enllaços més simples, sembla evident imposar que el valor del parèntesi d'un encreuament estigui en funció de les dues maneres possibles de desfer un encreuament. Així, obtenim la segona regla:

- Regla 2:  $\langle \diagdown \diagup \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \curvearrowright \rangle$ , on  $A$  i  $B$  són variables.

Finalment, també sembla raonable tenir una regla per saber com canvia el valor del parèntesi en afegir un cicle aïllat a l'enllaç. Per tant, la tercera regla és:

- Regla 3:  $\langle \bigcirc + D \rangle = C \langle D \rangle$ , on  $D$  és un diagrama qualsevol i  $C$  és una variable.

$A$ ,  $B$  i  $C$  les concretarem a continuació, tenint en compte que el que volem és que les regles siguin invariants per moviments de Reidemeister.

Per tenir invariància per moviments de tipus II, cal que  $\langle \overline{\bigcirc} \rangle = \langle \bigcirc \bigcirc \rangle$ .

I com que  $\langle \overline{\bigcirc} \rangle = (A^2 + ABC + B^2) \langle \curvearrowright \rangle + BA \langle \rangle \langle \rangle$ , cal imposar:

- $B \cdot A = 1$ ,
- $A^2 + A \cdot B \cdot C = 0$ .

Escollim  $A$  i  $B$  que commutïn, i per tant tenim que:

- $B = A^{-1}$ ,
- $C = -(A^2 + A^{-2})$ .

Per l'altra opció de moviments de tipus II apareixen exactament els mateixos valors. Amb aquestes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  el parèntesi també és invariant per moviments del tipus III. Es pot veure fent una simple comprovació.



En conseqüència, podem reescriure les relacions de Kauffman com:

- Regla 1:  $\langle \bigcirc \rangle = 1$ .
- Regla 2:  $\langle \diagdown \diagup \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \frown \rangle$ , on  $A$  és una variable.
- Regla 3:  $\langle \bigcirc + D \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$ , on  $D$  és un diagrama qualsevol i  $A$  una variable.

Per fer càlculs ens serà convenient tenir la regla 2 reescrita; és a dir,

- Regla 2':  $\langle \diagdown \diagup \rangle = A \langle \frown \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$ .

Vegem per exemple el valor del càlcul d'aquest parèntesi en el nus trèvol. Recordem que enlloc ens ha intervingut l'orientació.

- Per al nus trèvol esquerrà  és  $A^7 - A^{-5} - A^3$ .
- Per al nus trèvol dretà  és  $A^{-7} - A^5 - A^{-3}$ .

Observem, però, que aquest parèntesi de Kauffman que hem definit no és invariant per a moviments de tipus I, ja que

$$\langle \overline{\bigcirc} \rangle = -A^3 \langle \text{---} \rangle.$$

Una possible idea per solucionar aquest problema seria imposar doncs  $A = -1$ , però aleshores ens dóna un valor numèric i ja no és un polinomi com volíem, i després arribem a la conclusió que aquest nombre és  $(-2)^{n-1}$ , on  $n$  és el nombre de components que té l'enllaç, fet fàcilment demostrable per inducció. Per tant, de poca cosa ens serveix.

És per això que el parèntesi de Kauffman queda determinat per les relacions que hem imposat anteriorment, i ja veurem a la següent secció com aquest problema dels moviments de tipus I se soluciona fent aparèixer la contorsió i definint aleshores el polinomi de Jones.

Fent servir els estats d'un diagrama, tenim una manera alternativa de calcular el parèntesi de Kauffman sense usar les regles 1, 2 i 3, ja que la regla número 2 el que fa és obrir els encreuaments. En general,

$$\langle D \rangle = \sum_i A^{\alpha_i} A^{-\beta_i} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma_i - 1},$$

on  $i$  és cadascun dels estats del diagrama,  $\alpha_i$  és el nombre d'obertures de tipus  $A$  en l'estat  $i$ -èsim, anàlogament per a  $\beta_i$ , i  $\gamma_i$  és el nombre de cicles resultants en l'estat  $i$ -èsim.

D'aquesta nova definició del parèntesi de Kauffman en podem deduir que compleix que si  $D$  és un diagrama reduït i alternat amb  $n$  encreuaments,  $\langle D \rangle$  té grau  $2n + 2(r_A + r_B) - 4$ , on  $r_A$  i  $r_B$  són el nombre de regions de tipus  $A$  i  $B$  respectivament, ja que el terme de grau màxim de  $\langle D \rangle$  és  $A^n (-A^2 - A^{-2})^{r_B - 1}$ , que té grau  $n + 2(r_B - 1)$ , i el terme de grau mínim de  $\langle D \rangle$  és  $A^n (-A^2 - A^{-2})^{r_A - 1}$  amb grau  $-n - 2(r_A - 1)$ .

Cal fer esment que el parèntesi de Kauffman és la base de la construcció de l'homologia de Khovanov que veurem a l'últim capítol, ja que els generadors del complex de cadenes de l'homologia de Khovanov són els estats del parèntesi de Kauffman decorats amb elements de l'àlgebra de Frobenius. Però no fa servir exactament el parèntesi de Kauffman com hem vist anteriorment, sinó que li fa una petita modificació a les variables. Aquesta nova versió del parèntesi de Kauffman consisteix a aplicar les tres regles que veiem a continuació:

- Regla 1:  $\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1}$ .
- Regla 2:  $\langle \diagdown \diagup \rangle = \langle \frown \rangle - q \langle \rangle \langle \rangle$ , on  $q$  és una variable.
- Regla 3:  $\langle \bigcirc + D \rangle = (q + q^{-1}) \langle D \rangle$ , on  $D$  és un diagrama qualsevol i  $q$  una variable.

## 2.3 Polinomi de Jones

El 1984, Vaughan Jones, un matemàtic de Nova Zelanda, va descobrir un nou polinomi per als nusos i enllaços que en honor seu s'anomenà polinomi de Jones. Tot treballant en àlgebres d'operadors, una àrea completament diferent en les matemàtiques, va adonar-se que algunes de les coses que havia descobert podien ser utilitzades com a invariants d'enllaços. Com a resultat del seu descobriment, Jones va ser guardonat amb la medalla Fields el 1990. El descobriment d'aquest polinomi va generar molta emoció entre els entesos en la teoria de nusos; va ser tota una revolució. Per començar, el fet més sorprenent és que es tracta d'un invariant polinòmic extret directament de la informació del diagrama del nus, sense ser necessari fer ús del complementari del nus. I també va ser mitjançant el seu ús que es pogueren demostrar les conjectures de Tait. Així doncs, va significar un abans i un després per a la teoria de nusos.

Introduïrem el polinomi de Jones tal com va fer Kauffman. Primerament, definim el següent polinomi.

**Definició 2.3.1.** Sigui  $D$  un diagrama orientat d'un enllaç. Definim  $V(D) = (-A^3)^{-\omega(D)} \cdot \langle D \rangle$ .

Vegem que aquest polinomi el que fa és solucionar-nos l'error de tipus I que ens donava el parèntesi de Kauffman. És evident que és invariant per moviments de Reidemeister de tipus II i III, ja que tant el parèntesi de Kauffman com la contorsió ho són. Comprovem que efectivament també és invariant per moviments de tipus I:

- $V(\overrightarrow{\cup}) = (-A^3)^{-1} \cdot \langle \overrightarrow{\cup} \rangle = -A^{-3} \cdot (-A^3) \cdot \langle \text{---} \rangle = \langle \text{---} \rangle$ ,
- $V(\overleftarrow{\cup}) = (-A^3)^{-1} \cdot \langle \overleftarrow{\cup} \rangle = \langle \text{---} \rangle$ .

I com que  $V(\overleftarrow{\text{---}}) = V(\overrightarrow{\text{---}}) = \langle \text{---} \rangle$ , ja ho tenim.

Observem que aquest  $V(D)$  és un polinomi de Laurent en  $A$  i  $A^{-1}$ ,  $V(D) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ . A més, és fàcil de veure que  $V(D)$  no depèn de l'orientació escollida a  $D$  si l'enllaç és un nus, ja que  $\langle D \rangle = \langle -D \rangle$  i  $\omega(-D) = \omega(D)$ .

Fent ús de la inducció, podem adonar-nos que si  $D$  és el diagrama d'un nus,  $V(D) \in \mathbb{Z}[A^4, A^{-4}]$ , i que si  $D$  és un diagrama d'un enllaç d'un nombre parell de components, aleshores  $V(D) \in \mathbb{Z}[A^2, A^{-2}]$ .

I ara només cal dir que el polinomi de Jones és aquest polinomi anterior llevat d'un canvi de variable.

**Definició 2.3.2.** El *polinomi de Jones* d'un enllaç orientat  $L$  és el polinomi obtingut calculant  $V(D) = (-A^3)^{-\omega(D)} \cdot \langle D \rangle$  per a qualsevol diagrama  $D$  de  $L$ , i després substituint  $A = t^{-1/4}$ . Escriurem  $V_L(t)$  per referir-nos-hi.

Per exemple, el polinomi de Jones del nus trèvol esquerrà és  $V_{3_1^-(t)} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$ . En canvi, per al nus trèvol dretà és  $V_{3_1^+(t)} = t + t^3 - t^4$ .

Els resultats obtinguts en els càlculs anteriors dels trèvols ens fan pensar en el que ens diu la següent proposició.

**Proposició 2.3.3.** Si  $L$  és un enllaç orientat, aleshores  $V_L(t^{-1}) = V_{L^*}(t)$ .

*Demostració.* Per a la contorsió tenim que  $\omega(L^*) = -\omega(L)$ . Per al parèntesi de Kauffman, considerem  $D$  el diagrama d'un enllaç  $L$ . Aleshores,  $L^*$  admet un diagrama  $D'$  que és igual a  $D$  però amb tots els encreuaments canviats. A més, el procés per calcular  $\langle D' \rangle$  consta dels



mateixos passos que el procés de càlcul de  $\langle D \rangle$  excepte que on abans teníem  $\searrow$  ara tenim  $\swarrow$  i viceversa, i on abans teníem  $\bigcirc + E$  ara tenim  $\bigcirc + E'$ , on  $E'$  és igual que  $E$  canviant tots els encreuaments. Com a conclusió arribem al mateix resultat final, però amb  $A^{-1}$  en comptes de  $A$ , ja que  $A^2 + A^{-2}$  no varia en canviar  $A$  per  $A^{-1}$ . I, per tant, també tenim que  $t^{-1}$  canvia per  $t$ .  $\square$

Conseqüentment, si un nus és amfiquiral tindrà polinomi de Jones simètric. El recíproc no és cert. Per exemple, el nus  $9_{42}$  té polinomi de Jones simètric,  $V_{9_{42}}(t) = t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1 + t - t^2 + t^3$ , però no és amfiquiral.

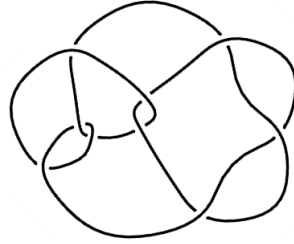
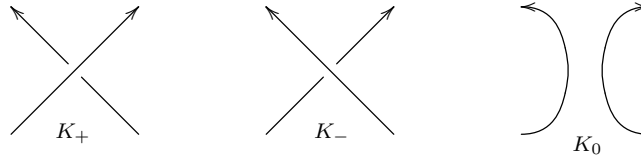


Figura 2.3: Nus  $9_{42}$

Existeix un altre mètode més ràpid per calcular el polinomi de Jones d'un enllaç. Primer de tot cal tenir clares unes noves notacions d'encreuaments:



Considerem un diagrama orientat  $D$  d'un enllaç  $L$ ; n'escollim un encreuament del tipus  $K_+$  i definim el diagrama  $D'$  com  $D$  canviant l'encreuament escollit per  $K_-$ , i anàlogament definim  $D_0$ , diagrames dels enllaços  $L'$  i  $L_0$ . El que volem és trobar una relació entre  $V(D)$ ,  $V(D')$  i  $V(D_0)$ . Primer, però, mirem quina relació hi ha entre les contorsions d'aquests diagrames i els seus parèntesis de Kauffman:

- $\omega(D) = 1 + \omega(D_0) = \omega(D') + 2$ ,
- $\omega(D) = \omega(D_0) + 1$ ,
- $A \langle D \rangle = A^{-1} \langle D' \rangle - (A^{-2} - A^2) \langle D_0 \rangle$  i
- $\langle D \rangle = A^{-2} \langle D' \rangle - A^{-1}(A^{-2} - A^2) \langle D_0 \rangle$ .

A més, a partir de les dues visions de la regla número 2, multiplicant-les per  $A$  i  $A^{-1}$  respectivament i restant-les, obtenim que

$$A \langle \searrow \swarrow \rangle - A^{-1} \langle \swarrow \searrow \rangle + (A^{-2} - A^2) \langle \rangle \langle \rangle = 0.$$

Per tant,  $A \langle D \rangle - A^{-1} \langle D' \rangle + (A^{-2} - A^2) \langle D_0 \rangle = 0$ . I fent tot un seguit de substitucions arribem a la relació que estavem buscant, que s'anomena *relació fonamental per al polinomi de Jones*:

$$t^{-1} \cdot V_{L_+}(t) - t \cdot V_{L_-}(t) + (t^{-1/2} - t^{1/2}) \cdot V_{L_0}(t) = 0.$$

Aquesta fórmula que hem trobat és vàlida tant per a nusos com per a enllaços i és un invariant.

Recordem que el parèntesi de Kauffman es podia calcular a partir dels estats d'un diagrama; aquest fet ens porta a la següent propietat.

**Corol·lari 2.3.4.** *Donats  $K_1$  i  $K_2$  dos nusos orientats,  $V_{K_1\#K_2}(t) = V_{K_1}(t) \cdot V_{K_2}(t)$ .*

*Demostració.* Si anomenem  $D$  al diagrama de  $K_1\#K_2$  i  $D_1, D_2$  als de  $K_1$  i  $K_2$  respectivament, per la fórmula del parèntesi de Kauffman a partir dels estats,  $\langle D \rangle = \langle D_1 \rangle \cdot \langle D_2 \rangle$ . I com que  $\omega(K_1\#K_2) = \omega(K_1) + \omega(K_2)$ , ja ho tenim.  $\square$

El polinomi de Jones té una altra propietat molt important la qual ens permet demostrar la primera conjectura de Tait.

**Proposició 2.3.5.** *El polinomi de Jones d'un nus  $K$  amb diagrama alternat i reduït  $D$  té grau total  $n$ , on  $n$  és el nombre d'encreuaments de  $D$ .*

*Demostració.* És conseqüència del fet que el parèntesi de Kauffman té grau total  $2n + 2(r_A + r_B) - 4$ ; per tant, el polinomi de Jones té aquest mateix grau dividit entre 4. Fem servir que  $2(r_A + r_B) = n + 2$  perquè tenim una regió amb  $n$  vèrtexs i  $2n$  arestes, i arribem al resultat desitjat.  $\square$

Recordem la conjectura de Tait (1.6.7) perquè ara ja estem en condicions de demostrar-la.

**Teorema 2.3.6** (Conjectura de Tait). *Si dos diagrames  $D$  i  $D'$  alternats i reduïts representen un mateix nus  $K$ , llavors  $D$  i  $D'$  tenen el mateix nombre d'encreuaments.*

*Demostració.* Com que  $D$  és alternat i reduït, tenim que el nombre d'encreuaments de  $D$  és igual al grau de  $V_K(t)$ . I anàlogament el nombre d'encreuaments de  $D'$  és igual al grau de  $V_K(t)$ .  $\square$

Un fet important per al polinomi de Jones és que podria ser que discriminés el nus trivial, ja que fins al moment no s'ha trobat cap nus amb polinomi de Jones 1 excepte el trivial. Però aquest fet no s'ha pogut ni demostrar ni refutar, així que és una de les preguntes obertes en teoria de nusos.

El polinomi de Jones té limitacions. Per exemple, no distingeix moltes de les mutacions. Una mutació és el que succeeix en el parell de nusos següents:

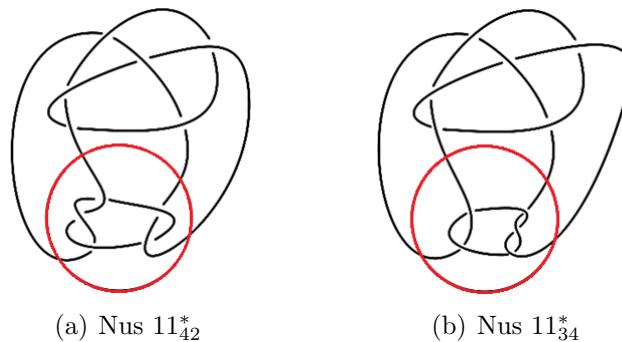


Figura 2.4: Nusos mutants

Igual com hem definit el parèntesi de Kauffman modificat, ja que és el que farem servir a l'hora de treballar amb l'homologia de Khovanov, també podem definir el *polinomi de Jones no normalitzat*. Si  $\langle D \rangle$  és el parèntesi de Kauffman modificat del diagrama d'un enllaç  $L$ , el *polinomi de Jones no normalitzat* ve donat per  $\hat{J}_K(q) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle K \rangle$ , on  $n_-$  i  $n_+$  són el

nombre d'encreuaments positius i negatius, respectivament, del diagrama. La relació entre el polinomi de Jones no normalitzat i el polinomi de Jones normalitzat és

$$V_K(t) = \frac{\hat{J}_K(q)}{q + q^{-1}} \Big|_{q^2=t}$$

per a qualsevol nus o enllaç  $K$ .

## 2.4 Polinomi d'Alexander

El primer polinomi associat als nusos i als enllaços va ser descobert per James W. Alexander pels voltants de 1923. Els matemàtics el van utilitzar per distingir entre nusos i enllaços durant aproximadament els 60 anys posteriors al seu descobriment. Veurem que la seva construcció no té res a veure amb el polinomi de Jones definit anteriorment.

Per definir el polinomi d'Alexander hem de fer unes consideracions sobre el grup  $G$  d'un nus  $K$ . Si  $G' = [G, G]$ , és a dir, el subgrup generat per  $\{aba^{-1}b^{-1}\}$ , amb  $a, b \in G$ , aleshores  $G/G'$  actua per conjugació sobre  $G'/G''$ . Posem  $G/G' = G_{ab}$ . La sèrie derivada de  $G$  és  $G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq G''' \supseteq \dots$ .

**Definició 2.4.1.** Definim  $M = G'/G'' = (G')_{ab}$  i l'anomenem *mòdul d'Alexander* de  $K$ .

El mòdul d'Alexander  $M$  és un  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -mòdul ja que si un grup  $G$  actua sobre un grup abelià  $M$ , llavors  $M$  rep una estructura de  $\mathbb{Z}G$ -mòdul, i  $\mathbb{Z}(G_{ab}) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , ja que  $G_{ab}$  és cíclic infinit per a tot nus  $K$ .

Considerem una resolució lliure del mòdul d'Alexander  $M$  d'un nus  $K$  com a  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -mòdul:

$$\dots \xrightarrow{\partial} F_2 \xrightarrow{\partial} F_1 \xrightarrow{\partial} F_0 \twoheadrightarrow M,$$

on  $F_0$  i  $F_1$  estiguin finitament generats; quedem-nos amb

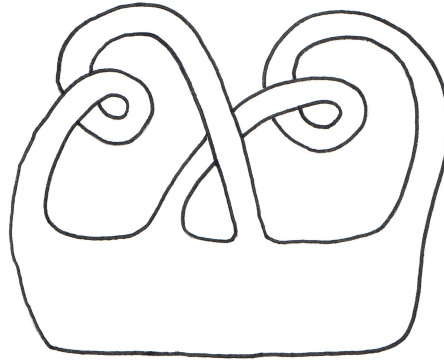
$$(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^m \xrightarrow{A(t)} (\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^n \twoheadrightarrow M,$$

on  $A(t) \in M_{n \times m}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ . El fet que podem escollir  $m = n$  és conseqüència del teorema d'Alexander [4], que a més ens diu que  $\det A(t)$  no depèn de la presentació lliure escollida, llevat d'invertibles de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ .

**Definició 2.4.2.** Sigui  $K$  un nus orientat. El *polinomi d'Alexander* de  $K$  és el determinant  $\det(A(t))$ . El denotem per  $\Delta_K(t)$ .

La versió del teorema d'Alexander que acabem d'esmentar es demostra de forma constructiva. Vegem-ne un exemple per entendre com va. Anem a calcular el polinomi d'Alexander del trèvol esquerrà  $K = 3_1^*$ .

Primer de tot, necessitem una superfície orientable la vora de la qual sigui el trèvol. La següent n'és un exemple:

Figura 2.5: Superfície amb el trèvol  $3_1^*$  de vora

El fet que tot nus és la vora d'una superfície orientable (amb vora) a  $\mathbb{R}^3$  és un fet conegut: [4] pàg. 102.

Escollim generadors per a cadascuna de les cintes. En el nostre cas en són dos, orientats, i els anomenem  $a_1$  i  $a_2$ .

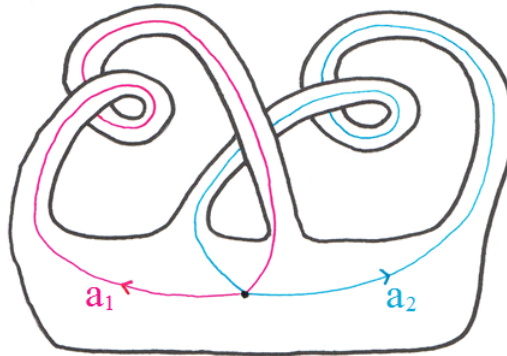


Figura 2.6: Els generadors

Siguin  $a_1^-$  i  $a_2^-$  corbes dins d'un entorn tubular de la superfície tals que passen per sota de  $a_1$ ,  $a_2$  respectivament, amb la mateixa orientació. Aleshores definim  $v_{jk} = l(a_j^-, a_k)$ , per a cada  $j, k$ . Ho calculem en el nostre cas i obtenim

- $v_{11} = 1$ ,
- $v_{12} = -1$ ,
- $v_{21} = 0$ ,
- $v_{22} = 1$ .

La matriu de Seifert (que no és única) es defineix com la matriu  $V = (v_{jk})$ . En el nostre cas, la matriu de Seifert és

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I en conseqüència

$$A(t) = V^T - tV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -1 & 1-t \end{pmatrix}.$$

I per tant, el polinomi d'Alexander del trèvol és

$$\Delta_K(t) = \det(A(t)) = t(t - 1 + t^{-1}).$$

Un fet important del polinomi d'Alexander és que per a tot  $K$ ,  $\Delta_{K^*} = \Delta_K$ , ja que  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K^*) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ . Per tant, no distingeix imatges especulars. Així, el polinomi d'Alexander que hem trobat per al trèvol esquerrà és el mateix que el del dretà.

Una propietat important és que el polinomi d'Alexander de qualsevol enllaç separable sempre és 0: [4] pàg. 131.

Contràriament al polinomi de Jones, sí que es coneixen nusos amb polinomi d'Alexander 1 no equivalents al trivial. Tampoc distingeix entre mutacions.

Anys més tard del descobriment d'aquest polinomi, John Conway va donar una versió per calcular aquest polinomi fent servir relacions d'encreuaments. Aquí  $L_+$ ,  $L_-$  i  $L_0$  són els mateixos que en la relació fonamental del polinomi de Jones.

- Regla 1:  $\Delta(\bigcirc) = 1$ .
- Regla 2:  $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) = 0$ .

A partir d'aquestes regles es pot calcular el polinomi d'Alexander.

Un cop es va introduir el polinomi de Jones anys més tard del d'Alexander, alguns matemàtics van començar a buscar polinomis en dues variables,  $l$  i  $m$ , en lloc d'una, que generalitzessin els dos polinomis (Alexander i Jones). El polinomi que es va trobar és l'anomenat *polinomi HOMFLY* (les lletres són les inicials dels noms de les persones que el van descobrir: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter). Pot ser donat amb dues regles. Altra vegada  $L_+$ ,  $L_-$  i  $L_0$  són els mateixos que en la relació fonamental del polinomi de Jones.

- Regla 1:  $P(\bigcirc) = 1$ .
- Regla 2:  $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$ .

---

## Capítol 3

# Topologia algebraica

---

En la topologia algebraica i en l'àlgebra abstracta, la teoria d'homologia té una gran importància. L'homologia és un procediment general per associar una successió de grups abelians o mòduls a un objecte matemàtic donat.

Tot i que en aquest treball no desenvoluparem completament la teoria d'homologia, en veurem les nocions essencials i els conceptes necessaris per poder introduir en el següent capítol l'homologia de Khovanov.

### 3.1 Homologia singular

**Definició 3.1.1.** Sigui  $n$  un enter,  $n \geq 0$ . Definim el  $n$ -*símplex estàndard*  $\Delta^n$  com el subespai de  $\mathbb{R}^{n+1}$  donat per

$$\Delta^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \mid x_0 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0 \text{ per a tot } i \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Per exemple:  $\Delta^0$  és un únic punt,  $\Delta^1$  és un interval,  $\Delta^2$  una regió triangular i  $\Delta^3$  un tetraedre.

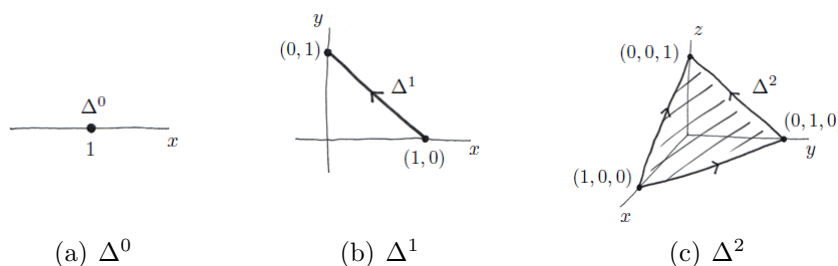


Figura 3.1: Símplexs estàndard

**Definició 3.1.2.** Sigui  $X$  un espai topològic i sigui  $n$  un enter,  $n \geq 0$ . Un  $n$ -*símplex singular* a  $X$  és qualsevol aplicació contínua

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X.$$

Un 1-*símplex singular* és el mateix que un camí, llevat de l'homeomorfisme  $\alpha : [0, 1] \xrightarrow{\cong} \Delta^1$ . Recíprocament, a partir d'un camí podem obtenir un 1-símplex singular.

**Definició 3.1.3.** Sigui  $X$  un espai topològic i sigui  $n$  un enter,  $n \geq 0$ . Definim una  $n$ -*cadena* a  $X$  amb coeficients a  $\mathbb{Z}$  com  $\sum_{i=0}^r \lambda_i \sigma_i$  tal que  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  i  $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ .

**Definició 3.1.4.** Sigui  $X$  un espai topològic i sigui  $n$  un enter,  $n \geq 0$ . Definim el *grup abelià* (o  $\mathbb{Z}$ -mòdul) de les  $n$ -cadenes com:

$$\begin{aligned} S_n(X) &= \{\text{grup abelià lliure generat pels } n\text{-símplexs singulars}\} \\ &= \{\sigma_1 \pm \cdots \pm \sigma_r \mid \sigma_i : \Delta^n \rightarrow X, \text{ per a tot } i \in \{1, \dots, r\}\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i \sigma_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^n \rightarrow X \right\}. \end{aligned}$$

**Definició 3.1.5.** Donats  $n$  i  $j$  enters,  $n \geq 1$  i  $0 \leq j \leq n$ , definim l'*aplicació cara* com:

$$\delta_j : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n \text{ on } \delta_j(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1}).$$

**Lema 3.1.6.** Fixada una dimensió  $n$  i  $0 \leq i < j \leq n$ , es compleix

$$\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_j : \Delta^{n-2} \rightarrow \Delta^n.$$

*Demostració.* Donat  $(x_0, \dots, x_{n-2}) \in \Delta^{n-2}$ , calculem d'una banda

$$\begin{aligned} \delta_j \circ \delta_i(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_j(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

i de l'altra

$$\begin{aligned} \delta_i \circ \delta_{j-1}(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_i(x_0, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

I efectivament coincideixen. □

**Definició 3.1.7.** Sigui  $n > 0$  un enter. Definim l'*operador vora* com el morfisme de grups abelians

$$\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

obtingut imposant que, per a qualsevol símplex singular  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ ,

$$\partial_n \sigma = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma \circ \delta_j \in S_{n-1}(X).$$

Sempre que sigui convenient suposarem que  $S_i(X) = 0$  per a  $i \in \mathbb{Z}^-$ .

**Teorema 3.1.8.** Per a tot  $n$ , se satisfà  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . És a dir,

$$\begin{array}{ccccc} S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & S_{n-2}(X) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & 0 \end{array}$$

per a tot  $n$ .

*Demostració.* És suficient veure que  $(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma) = 0$  per a qualsevol  $n$ -símplex singular  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . Fem el cas  $n = 2$ :  $\partial(\partial\sigma) = \partial(\sigma \circ d_0 - \sigma \circ d_1 + \sigma \circ d_2) = \partial(\sigma \circ d_0) - \partial(\sigma \circ d_1) + \partial(\sigma \circ d_2) = \partial \circ d_0 \circ d_0 - \partial \circ d_0 \circ d_1 - (\partial \circ d_1 \circ d_0 - \partial \circ d_1 \circ d_1) + \partial \circ d_2 \circ d_0 - \partial \circ d_2 \circ d_1 = 0$ . Per a  $n$  més grans és anàleg; veure [16] pàgs. 260–261. □

Vistos tots els conceptes anteriors, estem en condicions de donar un seguit de noves definicions. Sigui  $X$  un espai topològic. Definim:

- Els  $n$ -cicles singulars de  $X$  com:

$$Z_n(X) = \text{Ker}(\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)).$$

- Les  $n$ -voves singulars de  $X$  com:

$$B_n(X) = \text{Im}(\partial_{n+1} : S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X)).$$

- La  $n$ -homologia singular (o el  $n$ -èsim grup d'homologia) de  $X$  com el quocient

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\text{Ker}(\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X))}{\text{Im}(\partial_{n+1} : S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X))}.$$

Calculem l'homologia d'un espai topològic  $X = \{*\}$  (l'espai d'un sol punt) a partir de la definició. Existeix un únic  $n$ -símplex singular  $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow X$  (l'aplicació constant). Per tant,

$$S_n(X) = \langle \{\Delta^n \rightarrow X\} \rangle = \langle \sigma_n \rangle = \mathbb{Z}\sigma_n \cong \mathbb{Z},$$

i se satisfà

$$\partial_n \sigma_n = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sigma_n \circ \delta_j = \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j \right) \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és senar,} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases}$$

Per tant, el complex de cadenes singulars de  $X$  és

$$\cdots \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\sigma_3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\sigma_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\sigma_1 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\sigma_0 \longrightarrow 0$$

i l'homologia és

- $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ ,
- $H_j(X) = 0$  per a tot  $j > 0$ .

**Definició 3.1.9.** Un complex de cadenes de  $\mathbb{Z}$ -mòduls (és a dir, grups abelians)  $(A_*, \partial_*)$  és una successió  $A_*$  de morfismes  $\partial_*$  de grups abelians  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots, n \in \mathbb{Z},$$

tal que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  per a tot  $n$ .

En particular cal que  $\text{Im } \partial_n \subseteq \text{Ker } \partial_{n-1}$  per a tot  $n$ .

Un complex de cadenes es pot pensar com un grup abelià graduat  $\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} A_j$  amb un operador diferencial  $\partial^2 = 0$  de grau  $-1$ .

**Definició 3.1.10.** Un complex de cadenes és un complex de cadenes positiu (no negatiu) si  $A_j = 0$  per a tot  $j < 0$ .

**Definició 3.1.11.** Per a tot espai topològic  $X$ , definim el complex de cadenes singular de  $X$  com

$$S_*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n(X).$$

**Definició 3.1.12.** Sigui  $(A_*, \partial_*)$  un complex de cadenes. Definim la seva homologia com

$$H_n(A_*) = \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}.$$



Els grups  $H_n(A_*)$  mesuren la manca d'exactitud de la successió  $A_*$ . Una successió és exacta quan  $\text{Ker } \partial_n = \text{Im } \partial_{n+1}$  per a tot  $n$ , o el que és el mateix,  $H_n(A_*) = 0$  per a tot  $n$ .

Cal observar que  $H_n(X) = H_n(S_*(X))$ .

En comptes de prendre cadenes amb coeficients a  $\mathbb{Z}$  com hem dit a (3.1.3), podem prendre-les amb coeficients en un anell qualsevol  $R$ . Llavors es fa tot igual. Es denota per  $H_*(X; R)$  i és un  $R$ -mòdul graduat. Normalment, els casos interessants són  $R = \mathbb{Q}$  i  $R = \mathbb{Z}/p$ ,  $p$  primer.

Tot seguit parlarem de la functorialitat de l'homologia.

**Definició 3.1.13.** Sigui  $f : X \rightarrow Y$  una aplicació contínua entre espais topològics. Podem definir  $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  donada per  $f_{\#}(\sum_{j=0}^n \lambda_j \sigma_j) = \sum_{j=0}^n \lambda_j (f \circ \sigma_j)$ .

**Lema 3.1.14.**  $\partial_k^Y f_{k\#} = f_{k-1\#} \partial_k^X$ .

*Demostració.* Primer deixem clar d'on i cap a on van cadascuna de les aplicacions:

- $\partial_k^Y : S_k(Y) \rightarrow S_{k-1}(Y)$ .
- $f_{k\#} : S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$ .
- $\partial_k^X : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ .
- $f_{k-1\#} : S_{k-1}(X) \rightarrow S_{k-1}(Y)$ .

Ara cal que  $\partial_k^Y \circ f_{k\#}(\sigma) = f_{k-1\#} \circ \partial_k^X(\sigma)$  per a tot  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ . Per una banda,  $\partial_k^Y \circ f_{k\#}(\sigma) = \partial_k^Y(f \circ \sigma) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (f \circ \sigma) \circ \delta_j$ . I per l'altra,  $f_{k-1\#} \circ \partial_k^X(\sigma) = f_{k-1\#} \sum_{j=0}^k (-1)^j (\sigma \circ \delta_j) = \sum_{j=0}^k (-1)^j f_{k-1\#}(\sigma \circ \delta_j) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (f \circ \sigma) \circ \delta_j$ . I les dues expressions coincideixen.  $\square$

Com a conseqüència d'aquest resultat tenim que  $f_{\#}$  està ben definida.

**Corol·lari 3.1.15.**

- a. Si  $\sum_{j=0}^n \lambda_j \sigma_j$  és un cicle, aleshores  $f_{\#}(\sum_{j=0}^n \lambda_j \sigma_j)$  és un cicle.
- b. Si  $\sum_{j=0}^n \lambda_j \sigma_j$  és una vora, aleshores  $f_{\#}(\sum_{j=0}^n \lambda_j \sigma_j)$  és una vora.

*Demostració.* És una simple comprovació, tenint en compte que  $\partial_k^Y f_{k\#} = f_{k-1\#} \partial_k^X$ .  $\square$

En altres paraules,  $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  és un morfisme de complexos de cadenes.

Com a conseqüència del corol·lari 3.1.15,  $f_{\#}$  es restringeix a  $f_{\#} : Z_n(X) \rightarrow Z_n(Y)$  perquè  $f_{\#}$  conserva cicles, i factoritza a  $\bar{f}_{\#} = f_* : Z_n(X)/B_n(X) \rightarrow Z_n(Y)/B_n(Y)$  perquè  $f_{\#}$  conserva vores. Per tant, tenim un morfisme entre les homologies.

**Teorema 3.1.16** (Condicions de functorialitat).

1. Si  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : Y \rightarrow X$  són aplicacions contínues entre espais topològics, aleshores, per a tot  $n \geq 0$ ,  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .
2. Si  $\text{id} : X \rightarrow X$  és la identitat, aleshores  $(\text{id})_* = \text{id}$  per a tot  $n \geq 0$ .

*Demostració.*  $(g \circ f)_*([z]) = (g \circ f)_*([\sum \lambda_j \sigma_j]) = [(g \circ f)_{\#}(\sum \lambda_j \sigma_j)] = [(\sum \lambda_j (g \circ f \circ \sigma_j))] = [g_{\#}(\sum \lambda_j (f \circ \sigma_j))] = [g_{\#}(f_{\#}(\sum \lambda_j (f \circ \sigma_j)))] = g_*([f_{\#}(\sum \lambda_j (f \circ \sigma_j))]) = g_*(f_*[\sum \lambda_j \sigma_j]) = g_*(f_*([z]))$ . Anàlogament per a la identitat.  $\square$

**Corol·lari 3.1.17.** Si  $f : X \rightarrow Y$  és un homeomorfisme, aleshores  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  és un isomorfisme per a tot  $n \geq 0$ .

*Demostració.* Si  $f : X \rightarrow Y$  és un homeomorfisme llavors existeix  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f = \text{id}_X$  i  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Aleshores,  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id}_* = \text{id}$  i  $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \text{id}_* = \text{id}$ . Per tant,  $H_n(X) \cong H_n(Y)$  per a tot  $n$ .  $\square$

Observem que hem vist que l'homologia és un functor de la topologia a l'àlgebra. I a més, tenim el resultat següent.

**Teorema 3.1.18.** *Si dos espais són homotòpicament equivalents, els seus grups d'homologia són isomorfs.*

*Demostració.* Es basa en demostrar que si  $f \simeq f'$  aleshores  $f_* = (f')_*$ . Veure [16] pàg. 265.  $\square$

## 3.2 Cohomologia singular

La cohomologia pot ser vista com un mètode d'assignar invariants algebraics a espais topològics amb una estructura més refinada del que fa l'homologia. La cohomologia sorgeix de la dualització algebraica de la construcció de l'homologia: els homeomorfismes induïts van en direcció oposada com a resultat de la dualització.

**Definició 3.2.1.** Siguin  $X$  un espai topològic i  $R$  un anell unitari. Definim  $S^n(X; R) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(X), R) = \{\varphi : S_n(X) \rightarrow R \text{ tal que } \varphi \text{ és un morfisme de } \mathbb{Z}\text{-mòduls}\}$ .

**Proposició 3.2.2.** *Sigui  $\delta : S^n(X; R) \rightarrow S^{n+1}(X; R)$  tal que per a tot  $\alpha \in S^n(X; R)$  es compleix  $\delta(\alpha) = \alpha \circ \partial$ , on  $\partial : S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X)$ . Aleshores  $\delta \circ \delta = 0$ .*

*Demostració.* És conseqüència que  $\partial \circ \partial = 0$ , com hem vist a la secció anterior. Ja que, per a qualsevol  $\alpha \in S^n(X; R)$ ,  $\delta(\delta(\alpha)) = \delta(\alpha \circ \partial) = \alpha \circ \partial \circ \partial = \alpha \circ 0 = 0$ .  $\square$

Ara ja estem en condicions de definir els complexos de cocadenes per a continuació definir la cohomologia.

**Definició 3.2.3.** Un *complex de cocadenes* de  $R$ -mòduls és una successió de  $R$ -mòduls i morfismes

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} A^n \xrightarrow{\delta_n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$$

amb  $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$  per tot  $n$ . Farem servir la notació  $S^*(X; R)$  per denotar el complex de cocadenes singular de  $X$  amb coeficients a  $R$ .

**Definició 3.2.4.** Definim la *cohomologia* d'un espai topològic  $X$  amb coeficients en un anell unitari  $R$  com  $H^n(X; R) = H^n(S^*(X; R))$ .

Com abans, els casos més interessants són  $R = \mathbb{Q}$  o  $R = \mathbb{Z}/p$  amb  $p$  primer.

**Definició 3.2.5.** El grup de cohomologia  $H^n(X; R)$  es defineix com  $\frac{\text{Ker}(\delta_n)}{\text{Im}(\delta_{n-1})}$ .

Anàlogament a l'homologia, podem definir  $f^*$ . Ve donada per  $f^* : H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$  tal que per a  $[\alpha] \in H^n(Y)$  (és a dir,  $\alpha \in S^n(Y)$ ),  $f^*([\alpha]) = [\alpha \circ f_{\#}]$ .

I tenim que els grups de cohomologia també són invariants homotòpics; veure [10] pàg. 201.

La cohomologia és més important que l'homologia. Això és degut al fet que  $H^*(X; R)$  és un anell graduat si  $R$  és un anell. És a dir, tenim el producte de cohomologia  $\bullet$  que  $H_*$  no té:

$$\begin{array}{ccc} H^n(X; R) & \times & H^m(X; R) & \xrightarrow{\bullet} & H^{n+m}(X; R) \\ (\alpha & , & \beta) & \longmapsto & \alpha \bullet \beta \end{array}$$

Anem a veure el motiu que  $H^*$  tingui un producte i  $H_*$  no el tingui.

Tot  $f : X \rightarrow Y$  indueix morfismes

- $H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(Y)$ , ja que l'homologia és covariant;
- $H^n(X) \xleftarrow{f^*} H^n(Y)$ , ja que la cohomologia és contravariant.

Pel teorema d'Eilenberg–Zilber,

$$H_n(X \times Y) = H_n(S_*(X \times Y)) \cong H_n(S_*(X) \otimes S_*(Y)).$$

Per tant, fent  $Y = X$ , tenim el producte de cohomologia donat per:

$$\begin{array}{ccc}
 S_{n+m}(X \times X) & \xrightarrow{E-Z} & S_n(X) \otimes S_m(X) \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} R \otimes R \\
 \uparrow \text{diag}_\# & & \downarrow \text{multiplicació} \\
 S_{n+m}(X) & \xrightarrow{\alpha \bullet \beta} & R
 \end{array}$$

on  $\text{diag} : X \rightarrow X \times X$  ve donada per  $\text{diag}(p) = (p, p)$ .

És l'existència d'aquesta aplicació diagonal que fa que  $H^*(X; R)$  admeti estructura natural d'anell graduat. No es pot fer el mateix per a  $H_*(X; R)$  a menys que l'espai  $X$  admeti una multiplicació contínua  $X \times X \rightarrow X$ .

---

## Capítol 4

# Homologia de Khovanov

---

### 4.1 Sobre invariants homològics

En els últims 25 anys han aparegut nous invariants en la teoria de nusos: els invariants homològics, que són homologies de complexos de cadenes associats al nus d'una certa manera. Aquests nous invariants han revolucionat la teoria de nusos com a conseqüència de categorificar invariants ja coneguts; és a dir, tenen la propietat que la seva característica d'Euler és un invariant dels ja descoberts, i és per això que ens aporten més informació de la que teníem. Els dos més rellevants són l'homologia de Floer i l'homologia de Khovanov.

Es construeix un invariant homològic de nusos basat en l'homologia de Floer, teoria d'homologia coneguda des de finals dels anys 80, que categorifica el polinomi d'Alexander. Més recentment, pels voltants del 2007, gràcies al descobriment de l'homologia de Khovanov, s'ha trobat la possibilitat de calcular aquest invariant de manera combinatòria. Aquest invariant és destacable perquè ha permès demostrar noves propietats dels invariants clàssics, però sobretot perquè detecta l'operació de mutació dels nusos.

Igual que va succeir amb el polinomi de Jones, casualment, mentre Khovanov treballava en la categorificació d'àlgebres de Lie, s'adonà de la similitud entre els diagrames de Temperley–Lieb i els estats d'un enllaç. És a partir d'aquí que va crear una categorificació homològica del polinomi de Jones, construïda de manera combinatòria. Aquest invariant serà tractat al llarg d'aquest capítol.

### 4.2 Mikhail Khovanov

Mikhail Khovanov, nascut a Rússia el 1972, es va doctorar en Matemàtiques per la Universitat de Yale l'any 1997. Igor Frenkel fou el seu tutor.

Interessat en la teoria de nusos i en la topologia algebraica, el 30 d'agost de 1999 va donar a conèixer l'article [13]. L'esmentat article li va significar el reconeixement general del món matemàtic, ja que hi exposava el descobriment d'un invariant homològic de nusos que compleix que la seva característica d'Euler és el polinomi de Jones. Aquest invariant es coneix actualment com a homologia de Khovanov.

Donat un diagrama  $D$  d'un enllaç orientat, Khovanov construeix de manera purament combinatòria un complex de cocadenes bigraduat  $\mathcal{C}^{*,*}(D)$  associat a  $D$ :

$$D \xrightarrow{\text{Khovanov}} \mathcal{C}^{*,*}(D).$$

Donat un complex de cocadenes, li podem calcular la cohomologia. Si trobem la cohomologia de  $\mathcal{C}^{*,*}(D)$  respecte a la primera variable, obtenim l'homologia de Khovanov  $Kh^{*,*}(D)$ :

$$\mathcal{C}^{*,*}(D) \xrightarrow{\text{cohomologia}} Kh^{*,*}(D).$$

L'homologia de Khovanov satisfà les propietats següents:

- Si  $D$  està relacionat amb un altre diagrama  $D'$  per una successió de moviments de Reidemeister, aleshores hi ha un isomorfisme  $Kh^{*,*}(D) \cong Kh^{*,*}(D')$ .
- La característica d'Euler graduada és el polinomi de Jones no normalitzat:

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^j \dim(Kh^{i,j}(D)) = \hat{J}(D).$$

### 4.3 Definició i propietats

A continuació donarem un seguit de conceptes per arribar a introduir la definició de l'homologia de Khovanov donada per Kauffman a [11]. Creiem que és adequat donar la definició formulada per Kauffman, ja que el polinomi de Jones també l'hem presentat com ho va fer Kauffman a partir del seu parèntesi.

**Definició 4.3.1.** Definim el conjunt d'estats *ampliats* del diagrama d'un nus com els estats del diagrama d'un nus etiquetant amb un  $+1$  o un  $-1$  cadascun dels cicles que apareixen en cada estat. El *grau homològic*  $i(s)$  d'un estat ampliat  $s$  d'un diagrama és el nombre de suavitzacions de tipus 1 que han ocorregut per arribar a l'estat  $s$ . El *grau quàntic* d'un estat ampliat  $s$  d'un diagrama és  $j(s) = i(s) + \lambda(s)$ , on  $i(s)$  és el grau homològic de l'estat ampliat  $s$  i  $\lambda(s)$  és el nombre d'enllaços trivials etiquetats amb un  $1$  menys els nombre d'enllaços trivials etiquetats amb un  $-1$  de l'estat ampliat  $s$ .

A partir dels estats ampliats trobem una nova versió del parèntesi de Kauffman, el *parèntesi de Kauffman modificat*, que ve donat per

$$\langle K \rangle = \sum_s (-1)^{i(s)} q^{j(s)}.$$

Ara ja estem en condicions de donar la definició.

**Definició 4.3.2.** Considerem un enllaç orientat  $L$  a  $\mathbb{R}^3$ ,  $D$  un diagrama (orientat) de  $L$ ,  $\{s\}$  el conjunt dels estats ampliats del diagrama  $D$ ,  $\mathcal{C}^{i,j}$  el  $\mathbb{C}$ -espai vectorial generat pel conjunt d'estats ampliats  $s$  del diagrama  $D$  tals que  $i(s) = i$  (grau homològic) i  $j(s) = j$  (grau quàntic), i  $\partial : \mathcal{C}^{i,j} \rightarrow \mathcal{C}^{i+1,j}$  l'operador determinat per la condició  $j(\partial s) = j(s)$  per a tot estat ampliat  $s$  de  $D$ . Aleshores, l'*homologia de Khovanov* de  $L$  és la cohomologia del complex  $\mathcal{C}^{*,*}$  respecte a la primera variable. La denotarem per  $Kh^{*,*}$  o bé per  $Kh^*$ , on

$$Kh^n(L) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} Kh^{n,j}(L), \quad Kh^{n,j}(L) = H^n(\mathcal{C}^{*,j}).$$

Perquè aquesta definició estigui ben formulada cal demostrar l'existència i unicitat de l'operador  $\partial$ ; veure [11]. Igualment per relacionar la definició amb l'algoritme de càlcul que farem servir a la següent secció també es pot consultar el mateix article.

En alguns dels articles on s'han fet càlculs de l'homologia de Khovanov d'algun enllaç donen el resultat en una taula. D'altres, però, fan servir un polinomi, que anomenarem *polinomi de Khovanov*, ja que és més sintètic.

**Definició 4.3.3.** Sigui  $W = \bigoplus_m W_m$  un grup abelià graduat amb components homogenis  $\{W_m\}$ . La *dimensió graduada* de  $W$  és la sèrie de potències  $\text{qdim } W = \sum_m q^m \dim W_m$ .

**Definició 4.3.4.** El *polinomi de Poincaré* de l'homologia de Khovanov o *polinomi de Khovanov* és

$$P_k(t, q) = \sum_i t^i \text{qdim}(Kh^i(L)),$$

on  $i$  és el grau homològic.

També és important veure la síntesi que en va fer Bar-Natan al definir el *parèntesi de Khovanov*  $[[L]]$  fent servir un parèntesi semblant al de Kauffman. És necessari, però, fer-hi els canvis d'índexs següents.

**Definició 4.3.5.** Sigui  $W = \bigoplus_m W_m$  un espai vectorial graduat. L'operació *desplaçament* (o canvi de grau)  $\{l\}$  en  $W$  ve donada per  $W\{l\}_m = W_{m-l}$ .

**Definició 4.3.6.** Sigui  $\mathcal{C}$  un complex de cocadenes  $\dots \rightarrow \mathcal{C}^r \xrightarrow{d^r} \mathcal{C}^{r+1} \rightarrow \dots$  d'espais vectorials graduats on  $r$  és el *pes* de  $\mathcal{C}^r$ . L'operació *canvi de pes*  $[s]$  en  $\mathcal{C}$  ve donada per si  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}[s]$  aleshores  $(\mathcal{C}')^r = \mathcal{C}^{r-s}$ . Les diferencials també es desplacen corresponentment.

La definició del parèntesi de Khovanov ve donada per les tres regles següents:

- Regla 1:  $[[\emptyset]] = 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ .
- Regla 2:  $[[\bigcirc + L]] = V \otimes [[L]]$ .
- Regla 3:  $[[\diagdown]] = \mathcal{F}(0 \rightarrow \mathbb{D}[\square] \xrightarrow{d} \mathbb{F}[\curvearrowright]\{1\} \rightarrow 0)$ .

Aquí  $V$  és un grup abelià de dimensió graduada  $q + q^{-1}$ ,  $\mathcal{F}$  és l'operació "d'aplanament", que porta un complex doble a un de simple per sumes directes a través de les diagonals, i  $d$  és la mateixa que definim a la secció 4.4 de l'algorisme.

A partir del parèntesi de Khovanov, l'homologia de Khovanov  $Kh(L)$  és l'homologia de la renormalització del parèntesi de Khovanov  $[[L]][-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$ .

Tot el que farem serà amb coeficients a  $\mathbb{Z}$ , tot i que, en el seu article, Khovanov treballa més generalment sobre  $\mathbb{Z}[c]$  amb  $\text{gr}(c) = 2$ . Sovint, però, és suficient treballar amb coeficients a  $\mathbb{Q}$ .

Com hem dit anteriorment, l'homologia de Khovanov categorifica el polinomi de Jones. Per veure-ho, primer de tot ens cal saber que la característica d'Euler d'un complex de cadenes es defineix com la suma alternada de les dimensions graduades dels grups d'homologia.

**Proposició 4.3.7.**

$$\sum_i (-1)^i \text{qdim}(Kh^i(L)) = \hat{J}(L).$$

*Demostració.* És un exercici d'àlgebra lineal demostrar que

$$\sum_i (-1)^i \text{qdim}(Kh^i(L)) = \sum_i (-1)^i \text{qdim}(\mathcal{C}^i(L)).$$

I que la part dreta és igual a  $\hat{J}(L)$  és immediat a partir de la definició del polinomi de Jones no normalitzat i la construcció del complex de cocadenes per Bar-Natan [2].  $\square$

I després tenim el següent teorema, que ja ens globalitza el fet de ser categorificació del polinomi de Jones i ser invariant. Per veure que és invariant, cal provar que ho és pels tres moviments de Reidemeister. Per a la demostració veure [2] pàgs. 345–350; aquí no la donarem per la seva extensió i per l'ús de coneixements més avançats dels que disposem sobre teoria d'homologia.

**Teorema 4.3.8.** *Els grups abelians graduats  $Kh^i(L)$  són invariants d'enllaços  $L$ . Per tant, el polinomi de Khovanov en les variables  $t$  i  $q$  és un invariant d'enllaços que pren el valor del polinomi de Jones no normalitzat per a  $t = -1$ .*

Anem a veure com s'aplica l'homologia de Khovanov a la teoria de nusos. Aquests dos nusos tenen el mateix polinomi de Jones, però diferent homologia de Khovanov. Per tant, aquí tenim un exemple del fet que l'homologia de Khovanov és més potent que el polinomi de Jones.

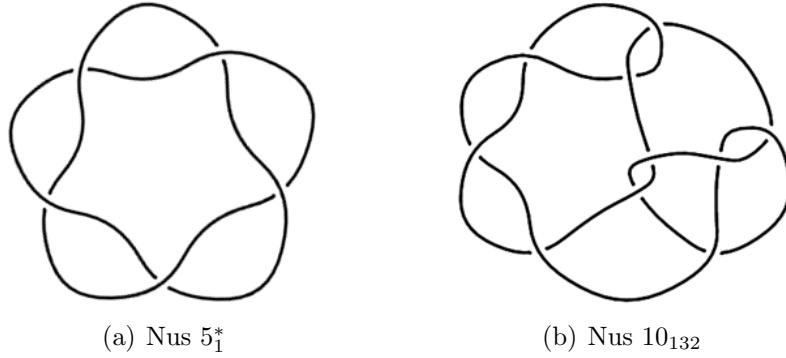


Figura 4.1: Nusos amb igual polinomi de Jones, però diferent homologia de Khovanov

Polinomi de Jones no normalitzat:  
 $\hat{J}_{5_1^*}(q) = q^{-3} + q^{-5} + q^{-7} - q^{-15}$ .

Polinomi de Jones no normalitzat:  
 $\hat{J}_{10_{132}}(q) = q^{-3} + q^{-5} + q^{-7} - q^{-15}$ .

Homologia de Khovanov  $Kh^{i,j}(5_1^*)$ :

Homologia de Khovanov  $Kh^{i,j}(10_{132})$ :

Kh	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3						$\mathbb{Q}$
-5						$\mathbb{Q}$
-7				$\mathbb{Q}$		
-9						
-11		$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$			
-13						
-15	$\mathbb{Q}$					

Kh	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-1							$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$
-3								$\mathbb{Q}$
-5					$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$		
-7				$\mathbb{Q}$				
-9				$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$			
-11		$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$					
-13								
-15	$\mathbb{Q}$							

Observem que en aquest cas hem donat el valor de les homologies sobre  $\mathbb{Q}$  perquè ja són suficients per diferenciar els dos nusos.

Fixem-nos que no apareixen files de graus parells a la taula ja que són trivials. Això no és un fenomen aïllat. La demostració de la següent proposició la podem consultar a [13].

**Proposició 4.3.9.** *Si un enllaç  $L$  té un nombre senar de components, llavors  $Kh^{*,\text{parell}}(L) = 0$ . Si  $L$  té un nombre parell de components, aleshores  $Kh^{*,\text{senar}}(L) = 0$ .*

Una de les propietats més importants de l'homologia de Khovanov és que detecta el nus trivial, és a dir, tot enllaç amb polinomi de Khovanov igual a  $q + q^{-1}$  és el nus trivial [17], fet que no s'ha descobert si passa o no amb el polinomi de Jones.

## 4.4 Algoritme de càlcul

Igual que el parèntesi de Kauffman, i per tant el polinomi de Jones, l'homologia de Khovanov també es pot construir de forma algorítmica o combinatòria. L'objectiu és el següent: a partir

d'un enllaç, associar un complex de cocadenes al seu diagrama d'estats i d'aquest complex calcular-ne la cohomologia. Aquest algoritme es basa en la definició del parèntesi de Khovanov donada per Bar-Natan.

1. Construcció del complex de cocadenes (o complex de Khovanov):

Els grups abelians:

- Primer de tot, considerem un diagrama orientat  $D$  d'un enllaç  $L$ .
- Denotem per  $\mathfrak{X}$  el conjunt dels encreuaments de  $D$ .
- Sigui  $n$  el nombre d'encreuaments de  $D$ , és a dir, el cardinal de  $\mathfrak{X}$ .
- Escrivim  $n = n_+ + n_-$  on  $n_+$  és el nombre d'encreuaments positius i  $n_-$  el de negatius, d'acord amb la regla ja vista (1.4.4).
- Enumerem els encreuaments (arbitràriament).
- Recordem que un encreuament es podia desfer o bé amb una  $A$ -suavitzió o bé amb una  $B$ -suavitzió (2.1.2).

Fem un canvi de notació:  $A = 0$  i  $B = 1$ .

- A partir de les 0-suavitzacions i 1-suavitzacions obtenim el conjunt d'estats del diagrama (2.1.3), en total  $2^n$  estats.
- Cada estat l'etiquetem amb  $\{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$  segons la suavització que s'hagi efectuat en cada encreuament, ordenats per l'ordre dels encreuaments donat anteriorment (en el cinquè punt).
- Per tant, podem considerar el  $n$ -cub associat als estats de  $D$ , on les arestes fan de pont entre estats tals que la seva nomenclatura difereix en només una posició. Ens imaginarem el vèrtex format per només zeros a l'esquerra de tot, i oposat a ell, a la dreta de tot, el vèrtex amb només uns; i entre ells ens imaginem columnes de tal manera que a cada columna hi ha els estats que coincideixen en nombre d'uns i de zeros, i les columnes estan ordenades d'esquerra a dreta de menys nombre d'uns a més.
- Associem un grup abelià graduat  $(V_\alpha)_*$  a cada vèrtex  $\alpha \in \{0, 1\}^n$  de la manera següent:

$$(V_\alpha)_* = \overbrace{(V \otimes \cdots \otimes V)}^k \{r\}, \text{ on}$$

$$V = \mathbb{Z}v_+ \oplus \mathbb{Z}v_- \text{ amb } |v_+| = 1, |v_-| = -1,$$

$$k = \text{nombre de cicles de l'estat } \alpha,$$

$$r = |\alpha| = \text{nombre de 1's de l'estat } \alpha.$$

- Abans de continuar amb els càlculs, per facilitar les coses més endavant és convenient posar nom a cadascun dels diferents  $V$  de cada estat i a cada cicle de cada estat.
  - Primer de tot, cal numerar cadascun dels semitrans (trossos de tram entre dos encreuaments) del diagrama  $D$ . Escollim un dels semitrans i l'enumerem 1, i a partir d'aquest, seguint l'orientació establerta, anem numerant la resta de semitrans. Aquesta numeració seguirà un ordre ascendent excepte un salt descendent quan es troben el primer i l'últim.



- A continuació, cal també posar número a cada cicle de cadascun dels estats del diagrama d'estats. I es fa a partir de la numeració dels semitrams. Cada cicle pren el menor valor entre els dels semitrams que el formen.
- Com que a cada estat hi ha tants grups abelians  $V$  com cicles, el conjunt de grups abelians d'un estat serà  $\{V_i\}$  per a cada  $i$  valor d'un cicle de l'estat. Per tant,

$$(V_\alpha)_* = \left( \overbrace{V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_k}}^k \right) \{r\} \text{ per a } i_1, \dots, i_k \text{ cadascun dels valors dels cicles de } \alpha.$$

- Ara definim  $[[D]]^r = \bigoplus_{r=|\alpha|} (V_\alpha)_*$ ,  $r \in \{0, \dots, n\}$ . És a dir, per a cada  $r$  de 0 fins a  $n$  obtenim un nou grup abelià fent la suma directa dels grups abelians associats als estats que coincideixen en nombre de 1-suavitzacions, que vénen a ser els que estan a la mateixa columna.
- Ara podem considerar el complex de cocadenes de grups abelians

$$[[D]] = 0 \xrightarrow{d_{-1}} [[D]]^0 \xrightarrow{d_0} [[D]]^1 \xrightarrow{d_1} [[D]]^2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} [[D]]^n \xrightarrow{d_n} 0,$$

on  $d_0, \dots, d_{n-1}$  les definirem a continuació.

Les aplicacions:

- Cada aresta  $\xi$  del cub l'etiquetem amb una seqüència  $\{0, 1, *\}^x$  tal que  $*$  apareix un i només un cop. Com que entre dos vèrtexs enllaçats per una aresta només canvia un 0 del de més a l'esquerra, que passa a ser un 1 en el de més a la dreta, la seqüència de l'aresta serà la mateixa que la dels vèrtexs adjacents, llevat del valor que canvia, que passa a ser el  $*$ . Així cada aresta  $\xi$  serà igual a  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ , amb  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \{0, 1, *\}$ .
- Per a cada aresta  $\xi$ ,  $(-1)^\xi := (-1)^{\sum_{i < j} \xi_i}$  on  $j$  és la posició de  $*$  a  $\xi$ . Quan el valor és negatiu, posem una rodoneta al final de l'aresta per indicar-ho.
- Considerem les dues aplicacions lineals següents:

$$\begin{aligned} m : \quad & V \otimes V \rightarrow V \\ & v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+ \\ & v_+ \otimes v_- \mapsto v_- \\ & v_- \otimes v_+ \mapsto v_- \\ & v_- \otimes v_- \mapsto 0 \\ \Delta : \quad & V \rightarrow V \otimes V \\ & v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ & v_- \mapsto v_- \otimes v_- \end{aligned}$$

- A cada aresta hi associem aplicacions  $d_\xi$ . Aquestes aplicacions van del grup abelià  $V_\alpha$  associat al vèrtex de més a l'esquerra de l'aresta al grup abelià  $V_\alpha$  del vèrtex de més a la dreta. Recordem que el grup abelià  $V_\alpha$  d'un vèrtex  $\alpha$  té tants factors tensorials com cicles de l'estat corresponent a  $\alpha$ , i com que dos vèrtexs relacionats amb una aresta només difereixen en una suavització, tenim que d'un vèrtex a un altre, o bé es conserva tot llevat de dos cicles que es fusionen en un, o bé es conserva tot llevat d'un cicle que es divideix en dos. Així, per a cada  $\xi$ ,  $d_\xi$  serà la identitat en els factors tensorials corresponents a cicles que es mantenen iguals, complementat amb una de les dues aplicacions lineals  $m$  o  $\Delta$  considerades anteriorment. De la manera següent:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} i \quad j \\ \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ \bigcirc \end{array} \right) &\longrightarrow (V_i \otimes V_j \xrightarrow{m} V_i), \text{ on } i < j, \\ \left( \begin{array}{c} k \\ \text{---} \\ \bigcirc \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} k \quad l \\ \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \right) &\longrightarrow (V_k \xrightarrow{\Delta} V_k \otimes V_l), \text{ on } k < l, \end{aligned}$$

on  $i, j, k, l$  es corresponen amb la notació posada anteriorment als cicles i als subíndexs dels espais vectorials  $V$ .

- Tenint en compte que  $|\xi|$  és igual al nombre de 1's de la seqüència associada a  $\xi$ , definim  $d^r := \sum_{|\xi|=r} (-1)^\xi d_\xi$ , evidenciant que el sumatori serà a vegades un canvi de component de l'aplicació. Si les aplicacions  $d_\xi$  van al mateix vèrtex, aleshores es troben a la mateixa component. Si no, es troben en components diferents.
- I finalment considerem el nou complex de cocadenes de grups abelians lliures

$$\mathcal{C} = [[D]][-n_-]\{n_+ - 2n_-\},$$

on per a cada  $r$ ,  $r \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{C}(D)^{r-n_-} = [[D]]^r[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$ .

## 2. Càlcul de la cohomologia i tabulació:

- Determinem una base per a cadascun dels grups abelians de  $\mathcal{C}$ .
- Escrivim quin és el grau de cada element de la base.
- Aplicant les bases corresponents a les aplicacions  $d_0, \dots, d_{n-1}$ , determinem la matriu de cadascuna de les aplicacions  $d_r$ .
- Calculem el nucli i la imatge de cadascuna de les aplicacions  $d_r$ ,  $r \in \{0, \dots, n-1\}$ , que ens són necessàries per calcular la cohomologia.
- Tenint en compte el grau homològic de cada espai vectorial, en calculem la cohomologia. És a dir, per a  $i \in \{-n_-, \dots, n_+\}$ ,

$$H^i(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ker}(d_{i-n_-})}{\text{Im}(d_{i-1-n_-})}.$$

Deixem aquests quocients en funció dels elements de la base.

- Canvi de notació:  $Kh^i(D) = H^i(\mathcal{C})$  (ja que aquesta cohomologia que hem calculat és l'homologia de Khovanov).
- Mirem el grau dels elements que ens generen els quocients.
- Fem una taula, on les columnes són els graus homològics i les files els graus dels elements que ens apareixen en els quocients. I per a cadascun dels graus homològics que tenim, entrem a cada casella que tingui el grau de l'element el grup abelià que aquest element ens genera en el quocient corresponent.

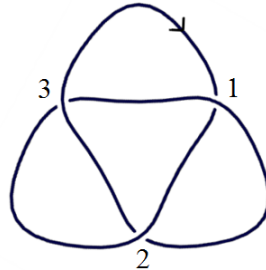
Aquest algoritme recull els passos de com Khovanov defineix la seva homologia. Com ja es pot entreveure a l'algoritme, aquesta manera de construir el complex es basa en els *cobordismes* d'unions de  $a$  cicles a unions de  $b$  cicles, on  $a$  i  $b$  són el nombre de cicles de cada estat que tenen una aplicació entre ells. A partir d'aquests cobordismes es defineixen les aplicacions multiplicació i co-multiplicació  $m$  i  $\Delta$  amb grau  $-1$ , perquè les  $d_\xi$  són de grau 0 amb els signes corresponents perquè el cub sigui anticommutatiu i ens generi per tant un complex de cocadenes. Per informació més detallada, cal consultar l'article de Khovanov [13].

Com que l'algoritme porta a càlculs molt llargs, Bar-Natan es va encarregar de fer-ne un programa que podem trobar a [2].

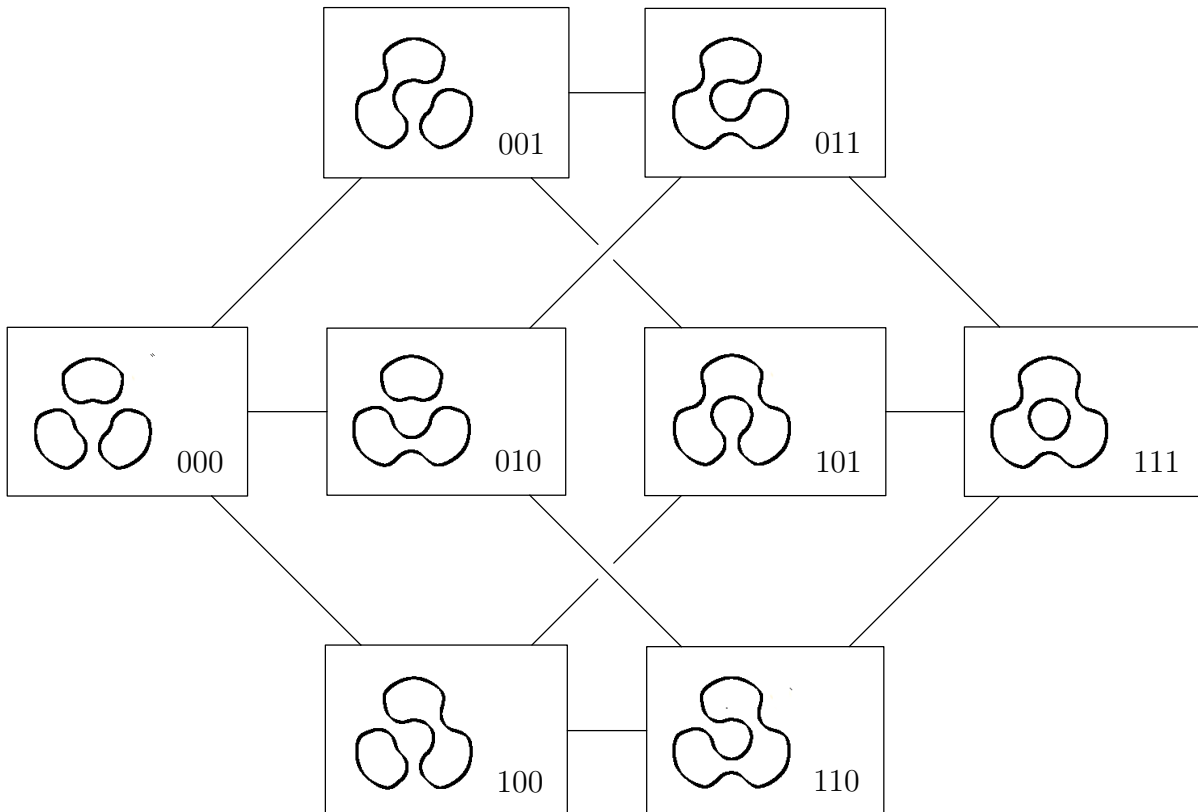
## 4.5 Homologia de Khovanov del nus trèvol

### 4.5.1 Homologia de Khovanov del nus trèvol esquerrà sobre $\mathbb{Z}$

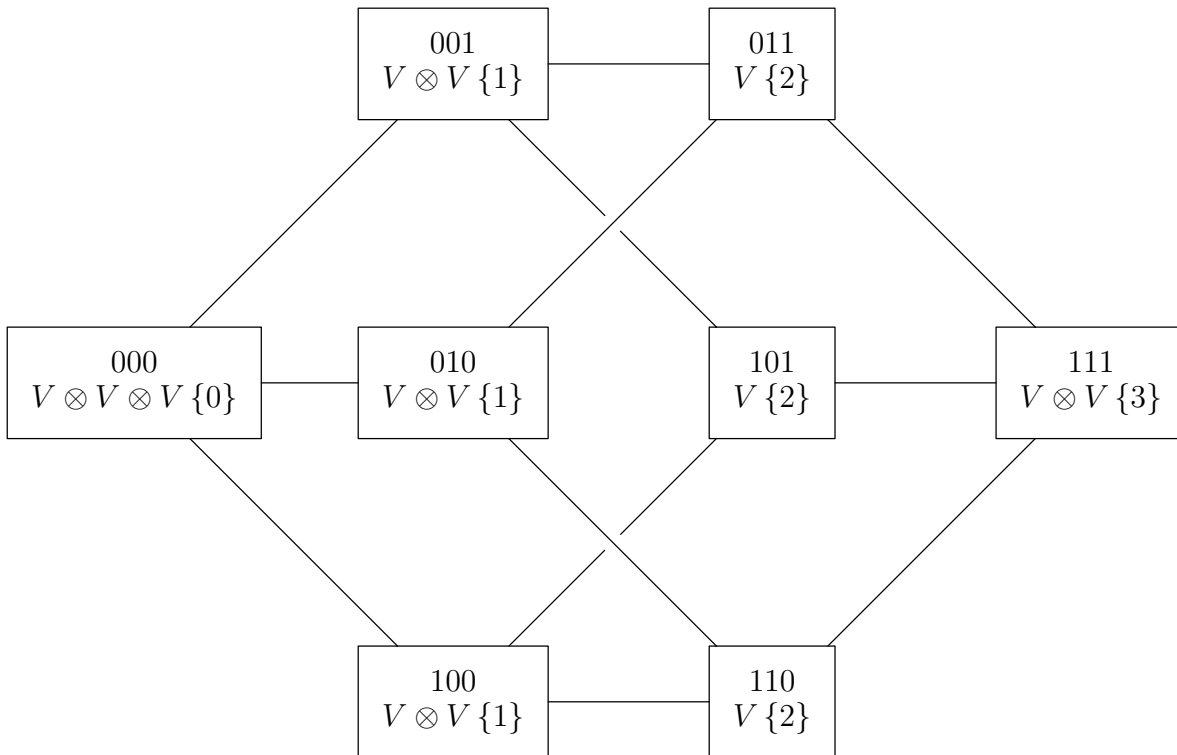
Considem el diagrama orientat  $D$  del nus trèvol esquerrà següent, amb els seus  $n = 3$  encreuaments numerats i en el qual  $n_+ = 0$  i  $n_- = 3$ :



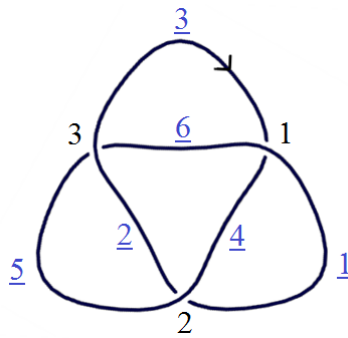
El seu diagrama d'estats corresponent, obtingut per les 0-suavitzacions i les 1-suavitzacions, ja etiquetat amb  $\{0, 1\}^3$  i posat en forma de cub és:



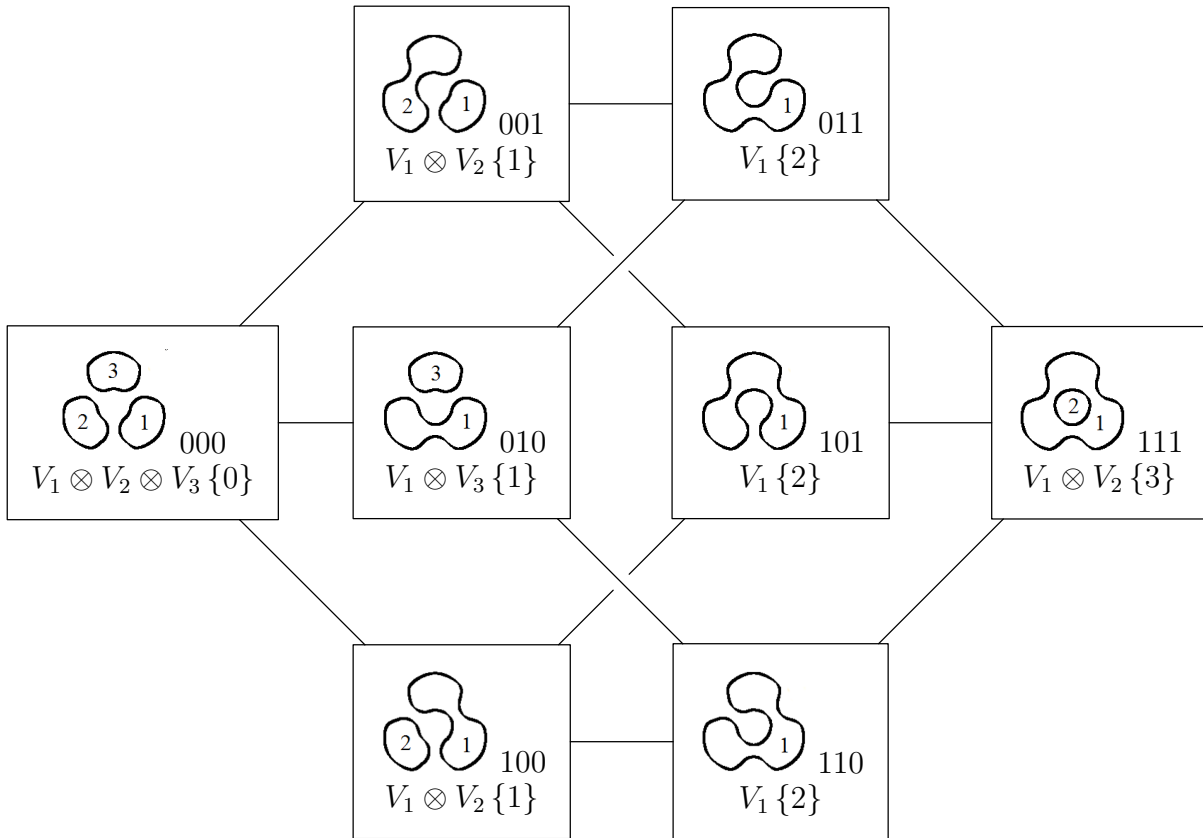
Considerem ara el 3-cub, i hi afegim ja el grups abelians graduats associats a cada vèrtex, on recordem que  $V = \mathbb{Z}v_+ \oplus \mathbb{Z}v_-$ :



Posem nom als espais vectorials i als cicles dels estats. Primerament, numerem els semitrams. Escollim, per exemple, que el semitram més exterior de 1 a 2 sigui el primer i l'etiquetem amb 1. Seguint l'orientació enumerem tota la resta i el diagrama del trèvol ens queda de la manera següent:



Així, el cub resultant d'incloure els estats amb cada cicle numerat i els espais vectorials amb cada factor tensorial també numerat ens queda:



Seguim amb la construcció del complex. Per suma directa dels que estan a la mateixa columna (igual nombre de 1-*suavitacions*), obtenim els grups abelians següents:

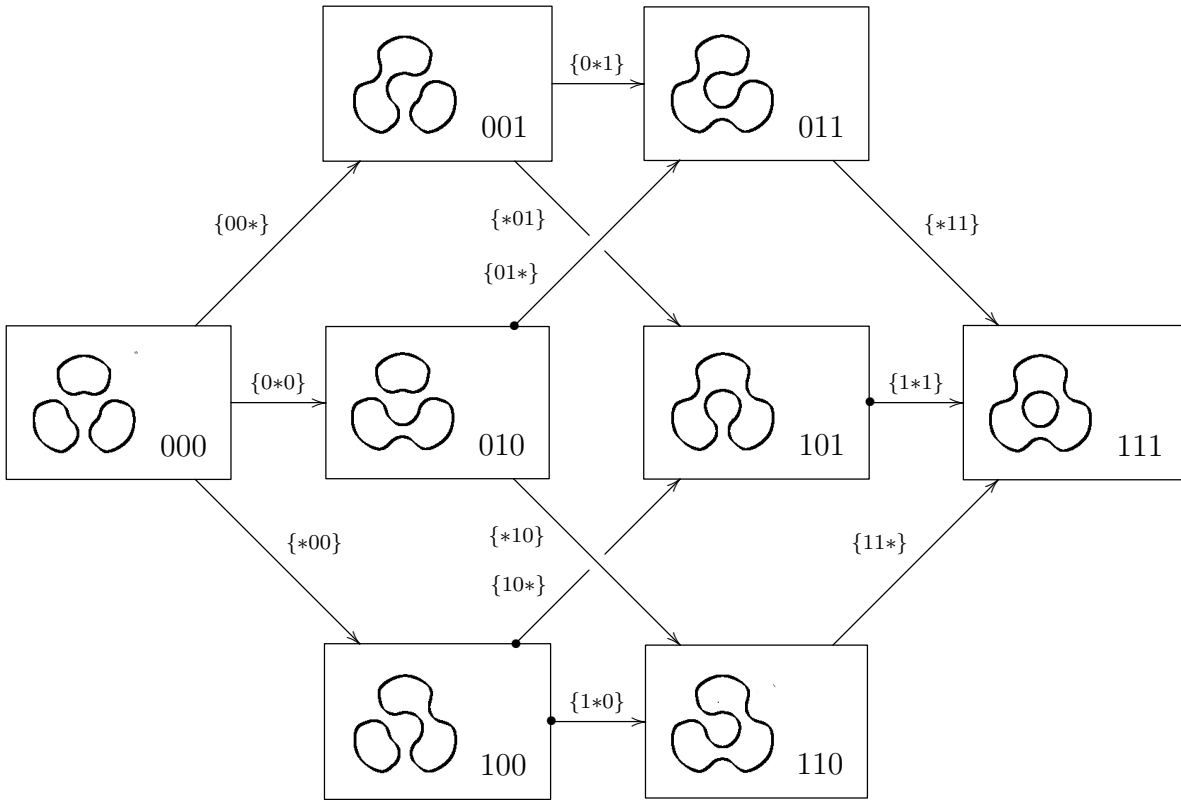
- $[[D]]^0 = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ ,
- $[[D]]^1 = (V_1 \otimes V_2 \{1\}) \oplus (V_1 \otimes V_3 \{1\}) \oplus (V_1 \otimes V_2 \{1\})$ ,
- $[[D]]^2 = V_1 \{2\} \oplus V_1 \{2\} \oplus V_1 \{2\}$ ,
- $[[D]]^3 = V_1 \otimes V_2 \{3\}$ .

Considerem el complex de cocadenes

$$[[[D]]] = 0 \xrightarrow{d_{-1}} [[D]]^0 \xrightarrow{d_0} [[D]]^1 \xrightarrow{d_1} [[D]]^2 \xrightarrow{d_2} [[D]]^3 \xrightarrow{d_3} 0,$$

on  $d_0$ ,  $d_1$  i  $d_2$  els definirem a continuació.

Ara anem a determinar les aplicacions. Les arestes passen a ser aplicacions. Etiquetem cada aresta del cub amb la seqüència corresponent i els posem una rodoneta al final si  $(-1)^\xi$  és negatiu:



Amb la informació que ens dóna el diagrama anterior, tenint en compte la  $m$  i la  $\Delta$  definides a l'apartat de l'algorisme, podem determinar les  $d_\xi$ , que són les aplicacions que representen les arestes:

$$d_{\{00*\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_2 \otimes V_3\{0\} \longrightarrow V_1 \otimes V_2\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \longmapsto v_1 \otimes m(v_2 \otimes v_3) \end{array}$$

$$d_{\{0*0\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_2 \otimes V_3\{0\} \longrightarrow V_1 \otimes V_3\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{array}$$

$$d_{\{ *00\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_2 \otimes V_3\{0\} \longrightarrow V_1 \otimes V_2\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \longmapsto m(v_1 \otimes v_3) \otimes v_2 \end{array}$$

$$d_{\{0*1\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_2\{1\} \longrightarrow V_1\{2\} \\ v_1 \otimes v_2 \longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \end{array}$$

$$d_{\{ *01\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_2\{1\} \longrightarrow V_1\{2\} \\ v_1 \otimes v_2 \longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \end{array}$$

$$d_{\{01*\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_3\{1\} \longrightarrow V_1\{2\} \\ v_1 \otimes v_2 \longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \end{array}$$

$$d_{\{ *10\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_3\{1\} \longrightarrow V_1\{2\} \\ v_1 \otimes v_2 \longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \end{array}$$

$$d_{\{10*\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_2\{1\} \longrightarrow V_1\{2\} \\ v_1 \otimes v_2 \longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \end{array}$$

$$d_{\{1*0\}} : \begin{array}{l} V_1 \otimes V_2\{1\} \longrightarrow V_1\{2\} \\ v_1 \otimes v_2 \longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \end{array}$$

$$d_{\{ *11 \}} : \begin{array}{ccc} V_1\{2\} & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2\{3\} \\ v_1 & \longmapsto & \Delta(v_1) \end{array}$$

$$d_{\{ 1*1 \}} : \begin{array}{ccc} V_1\{2\} & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2\{3\} \\ v_1 & \longmapsto & \Delta(v_1) \end{array}$$

$$d_{\{ 11* \}} : \begin{array}{ccc} V_1\{2\} & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2\{3\} \\ v_1 & \longmapsto & \Delta(v_1) \end{array}$$

I, per tant, les aplicacions  $d_0$ ,  $d_1$  i  $d_2$  que estàvem buscant són:

- $d_0 = (d_{\{00*\}}, d_{\{0*0\}}, d_{\{ *00\}})$ , és a dir:

$$d_0 : \begin{array}{ccc} V_1 \otimes V_2 \otimes V_3\{0\} & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2\{1\} \oplus V_1 \otimes V_3\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 & \longmapsto & (m(v_1 \otimes v_3) \otimes v_2, m(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3, m(v_1 \otimes v_3) \otimes v_2) \end{array}$$

- $d_1 = (d_{\{0*1\}} - d_{\{01*\}}, d_{\{ *01\}} - d_{\{10*\}}, d_{\{ *10\}} - d_{\{1*0\}})$ , és a dir:

$$d_1 : \begin{array}{ccc} V_1 \otimes V_2\{1\} \oplus V_1 \otimes V_3\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{2\} & \longrightarrow & V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \oplus V_1\{1\} \\ (v_1 \otimes v_2, v_3 \otimes v_4, v_5 \otimes v_6) & \longmapsto & (m(v_1 \otimes v_2) - m(v_3 \otimes v_4), \\ & & m(v_1 \otimes v_2) - m(v_5 \otimes v_6), \\ & & m(v_3 \otimes v_4) - m(v_5 \otimes v_6)) \end{array}$$

- $d_2 = (d_{\{ *11\}} - d_{\{ 1*1\}} + d_{\{ 11* \}})$ , és a dir:

$$d_2 : \begin{array}{ccc} V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2\{3\} \\ (v_1, v_2, v_3) & \longmapsto & (\Delta(v_1) - \Delta(v_2) + \Delta(v_3)) \end{array}$$

I ja tenim el complex de cocadenes de grups abelians lliures:

$$\mathcal{C} = [[D]][-3]\{-6\}, \text{ on } [[D]] = [[D]]^0 \rightarrow [[D]]^1 \rightarrow [[D]]^2 \rightarrow [[D]]^3.$$

Agafem una base per a cadascun dels grups abelians que ens intervenen en el complex de cocadenes:

- De  $\mathcal{C}(D)^{-3} = [[D]]^0[-3]\{-6\}$  que és  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3[0-3]\{-6\}$ , tenim la base  $\{e_{1_0}, e_{2_0}, e_{3_0}, e_{4_0}, e_{5_0}, e_{6_0}, e_{7_0}, e_{8_0}\}$  donada per:

$$e_{1_0} = v_+ \otimes v_+ \otimes v_+ \text{ que té grau } -3,$$

$$e_{2_0} = v_- \otimes v_+ \otimes v_+ \text{ que té grau } -5,$$

$$e_{3_0} = v_+ \otimes v_- \otimes v_+ \text{ que té grau } -5,$$

$$e_{4_0} = v_+ \otimes v_+ \otimes v_- \text{ que té grau } -5,$$

$$e_{5_0} = v_- \otimes v_- \otimes v_+ \text{ que té grau } -7,$$

$$e_{6_0} = v_- \otimes v_+ \otimes v_- \text{ que té grau } -7,$$

$$e_{7_0} = v_+ \otimes v_- \otimes v_- \text{ que té grau } -7,$$

$e_{8_0} = v_- \otimes v_- \otimes v_-$  que té grau  $-9$ .

- o De  $\mathcal{C}(D)^{-2} = [[D]]^1[-3] \{-6\}$  que és  $(V_1 \otimes V_2 \{1\} \oplus V_1 \otimes V_3 \{1\} \oplus V_1 \otimes V_2 \{1\})[1-3] \{-6\}$ , tenim la base  $\{e_{1_1}, e_{2_1}, e_{3_1}, e_{4_1}, e_{5_1}, e_{6_1}, e_{7_1}, e_{8_1}, e_{9_1}, e_{10_1}, e_{11_1}, e_{12_1}\}$  donada per:

$e_{1_1} = (v_+ \otimes v_+, 0, 0)$  que té grau  $-3$ ,

$e_{2_1} = (0, v_+ \otimes v_+, 0)$  que té grau  $-3$ ,

$e_{3_1} = (0, 0, v_+ \otimes v_+)$  que té grau  $-3$ ,

$e_{4_1} = (v_- \otimes v_+, 0, 0)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{5_1} = (0, v_- \otimes v_+, 0)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{6_1} = (0, 0, v_- \otimes v_+)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{7_1} = (v_+ \otimes v_-, 0, 0)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{8_1} = (0, v_+ \otimes v_-, 0)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{9_1} = (0, 0, v_+ \otimes v_-)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{10_1} = (v_- \otimes v_-, 0, 0)$  que té grau  $-7$ ,

$e_{11_1} = (0, v_- \otimes v_-, 0)$  que té grau  $-7$ ,

$e_{12_1} = (0, 0, v_- \otimes v_-)$  que té grau  $-7$ .

- o De  $\mathcal{C}(D)^{-1} = [[D]]^2[-3] \{-6\}$  que és  $(V_1 \{2\} \oplus V_1 \{2\} \oplus V_1 \{2\})[2-3] \{-6\}$ , tenim la base  $\{e_{1_2}, e_{2_2}, e_{3_2}, e_{4_2}, e_{5_2}, e_{6_2}\}$  donada per:

$e_{1_2} = (v_+, 0, 0)$  que té grau  $-3$ ,

$e_{2_2} = (0, v_+, 0)$  que té grau  $-3$ ,

$e_{3_2} = (0, 0, v_+)$  que té grau  $-3$ ,

$e_{4_2} = (v_-, 0, 0)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{5_2} = (0, v_-, 0)$  que té grau  $-5$ ,

$e_{6_2} = (0, 0, v_-)$  que té grau  $-5$ .

- o De  $\mathcal{C}(D)^0 = [[D]]^3[-3] \{-6\}$  que és  $V_1 \otimes V_2[3-3] \{-3\}$ , tenim la base  $\{e_{1_3}, e_{2_3}, e_{3_3}, e_{4_3}\}$  donada per:

$e_{1_3} = v_+ \otimes v_+$  que té grau  $-1$ ,

$e_{2_3} = v_- \otimes v_+$  que té grau  $-3$ ,

$e_{3_3} = v_+ \otimes v_-$  que té grau  $-3$ ,

$e_{4_3} = v_- \otimes v_-$  que té grau  $-5$ .

Amb cada aplicació  $d_0$ ,  $d_1$  i  $d_2$  utilitzem la base del seu espai de sortida corresponent, expressant el resultat obtingut per columnes en funció dels vectors de l'espai d'arribada, i així obtenim les corresponents matrius de l'aplicació.

- Per a  $d_0$  obtenim:



$$d_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Per a  $d_1$  obtenim:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- I per a  $d_2$  obtenim:

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerquem el nucli i la imatge de  $d_0, d_1$  i  $d_2$ :

- $\text{Ker}(d_0) = \langle (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rangle = \langle e_{8_0} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_0) = \langle (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \rangle = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1}, e_{5_1} + e_{7_1} + e_{9_1}, e_{6_1} + e_{7_1} + e_{8_1}, e_{10_1} + e_{11_1}, e_{10_1} + e_{12_1}, e_{11_1} + e_{12_1} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_1) = \langle (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rangle = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1}, e_{7_1} - e_{4_1}, e_{8_1} - e_{5_1}, e_{9_1} - e_{6_1}, e_{10_1}, e_{11_1}, e_{12_1} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_1) = \langle (1, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 1) \rangle = \langle e_{1_2} + e_{2_2}, e_{2_2} + e_{3_2}, e_{4_2} + e_{5_2}, e_{5_2} + e_{6_2} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_2) = \langle (1, 1, 0, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, -1, 0, 1) \rangle = \langle e_{1_2} + e_{2_2}, e_{3_2} - e_{1_2}, e_{4_2} + e_{5_2}, e_{6_2} - e_{4_2} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_2) = \langle (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle = \langle e_{2_3} + e_{3_3}, e_{4_3} \rangle$ .

I la imatge de  $d_{-1}$  i el nucli de  $d_3$ , ja que també els necessitem per fer la cohomologia, són:

- $\text{Ker}(d_3) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle = \langle e_{1_3}, e_{2_3}, e_{3_3}, e_{4_3} \rangle$ .

◦  $\text{Im}(d_{-1}) = 0$ .

Determinem ara la cohomologia del complex de cocadenes  $\mathcal{C}$ :

- Quan el grau homològic és  $-3$ :

$$Kh^{-3}(D) = H^{-3}(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ker}(d_0)}{\text{Im}(d_{-1})} = \text{Ker}(d_0) = \langle e_{8_0} \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

- Quan el grau homològic és  $-2$ :

$$\begin{aligned} Kh^{-2}(D) &= H^{-2}(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ker}(d_1)}{\text{Im}(d_0)} = \\ &= \frac{\langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1}, e_{7_1} - e_{4_1}, e_{8_1} - e_{5_1}, e_{9_1} - e_{6_1}, e_{10_1}, e_{11_1}, e_{12_1} \rangle}{\langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1}, e_{5_1} + e_{7_1} + e_{9_1}, e_{6_1} + e_{7_1} + e_{8_1}, e_{10_1} + e_{11_1}, e_{10_1} + e_{12_1}, e_{11_1} + e_{12_1} \rangle}; \end{aligned}$$

on fent el canvi de notació

$$w_1 = e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1},$$

$$w_2 = e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1},$$

$$w_3 = e_{7_1} - e_{4_1},$$

$$w_4 = e_{8_1} - e_{5_1},$$

$$w_5 = e_{9_1} - e_{6_1},$$

$$w_6 = e_{10_1},$$

$$w_7 = e_{11_1},$$

$$w_8 = e_{12_1};$$

obtenim:

$$Kh^{-2}(D) = \frac{\langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8 \rangle}{\langle w_1, w_2, w_2 + w_3 + w_5, w_2 + w_3 + w_4, w_6 + w_7, w_6 + w_8, w_7 + w_8 \rangle};$$

tenint en compte la matriu que aplica el  $\text{Ker}(d_1)$  cap a  $\text{Im}(d_0)$  i la seva reduïda per columnes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

arribem al fet que

$$Kh^{-2}(D) = \frac{\langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8 \rangle}{\langle w_1, w_2, w_3 + w_5, w_4 - w_5, w_6 + w_7, w_7 - w_8, 2w_8 \rangle};$$

i com que  $w_5 = -w_3$ ,  $w_4 = w_5$ ,  $w_7 = -w_6$ ,  $w_8 = w_7$  i refent el canvi de notació ens surt que

$$\begin{aligned} Kh^{-2}(D) &= \frac{\langle w_3, w_6 \rangle}{\langle 2w_6 \rangle} = \frac{\langle e_{7_1} - e_{4_1}, e_{10_1} \rangle}{\langle 2e_{10_1} \rangle} = \langle e_{7_1} - e_{4_1}, e_{10_1} \mid 2e_{10_1} = 0 \rangle = \\ &= \langle e_{7_1} - e_{4_1} \rangle \oplus \langle e_{10_1} \mid 2e_{10_1} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

- Quan el grau homològic és  $-1$ :

$$Kh^{-1}(D) = H^{-1}(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ker}(d_2)}{\text{Im}(d_1)} = \frac{\langle e_{1_2} + e_{2_2}, e_{3_2} - e_{1_2}, e_{4_2} + e_{5_2}, e_{6_2} - e_{4_2} \rangle}{\langle e_{1_2} + e_{2_2}, e_{2_2} + e_{3_2}, e_{4_2} + e_{5_2}, e_{5_2} + e_{6_2} \rangle};$$

on fent el canvi de notació

$$t_1 = e_{1_2} + e_{2_2},$$

$$t_2 = e_{3_2} - e_{1_2},$$

$$t_3 = e_{4_2} + e_{5_2},$$

$$t_4 = e_{6_1} - e_{4_2};$$

obtenim que

$$Kh^{-1}(D) = \frac{\langle t_1, t_2, t_3, t_4 \rangle}{\langle t_1, t_1 + t_2, t_3, t_3 + t_4 \rangle} = 0.$$

- Quan el grau homològic és  $0$ :

$$Kh^0(D) = H^0(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ker}(d_3)}{\text{Im}(d_2)} = \frac{\langle e_{1_3}, e_{2_3}, e_{3_3}, e_{4_3} \rangle}{\langle e_{2_3} + e_{3_3}, e_{4_3} \rangle} = \langle e_{1_3}, e_{3_3} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Resumint i mirant els graus de les bases explicitats anteriorment, tenim:

- $Kh^{-3}(D) = \langle e_{8_0} \rangle \cong \mathbb{Z}$ , on  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau  $-9$ .
- $Kh^{-2}(D) = \langle e_{7_1} - e_{4_1} \rangle \oplus \langle e_{10_1} \mid 2e_{10_1} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ , on  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau  $-5$  i  $\mathbb{Z}/2$  està generat per un element de grau  $-7$ .
- $Kh^{-1}(D) = 0$ .
- $Kh^0(D) = \langle e_{1_3}, e_{3_3} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , on el primer  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau  $-1$  i l'altre  $\mathbb{Z}$  per un element de grau  $-3$ .

I finalment, la taula on expressem els valors de l'homologia de Khovanov ens queda:

Kh	-3	-2	-1	0
-1				$\mathbb{Z}$
-3				$\mathbb{Z}$
-5		$\mathbb{Z}$		
-7		$\mathbb{Z}/2$		
-9	$\mathbb{Z}$			

De la taula en podem extreure el polinomi de Khovanov, que és

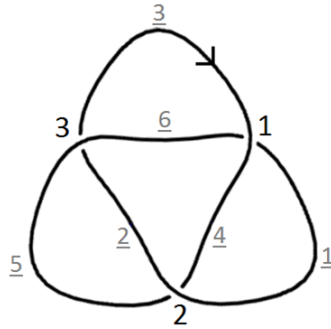
$$P_{3_1^*}(t, q) = q^{-1} + q^{-3} + t^{-2}q^{-5} + t^{-3}q^{-9}.$$

I també el polinomi de Jones, que és

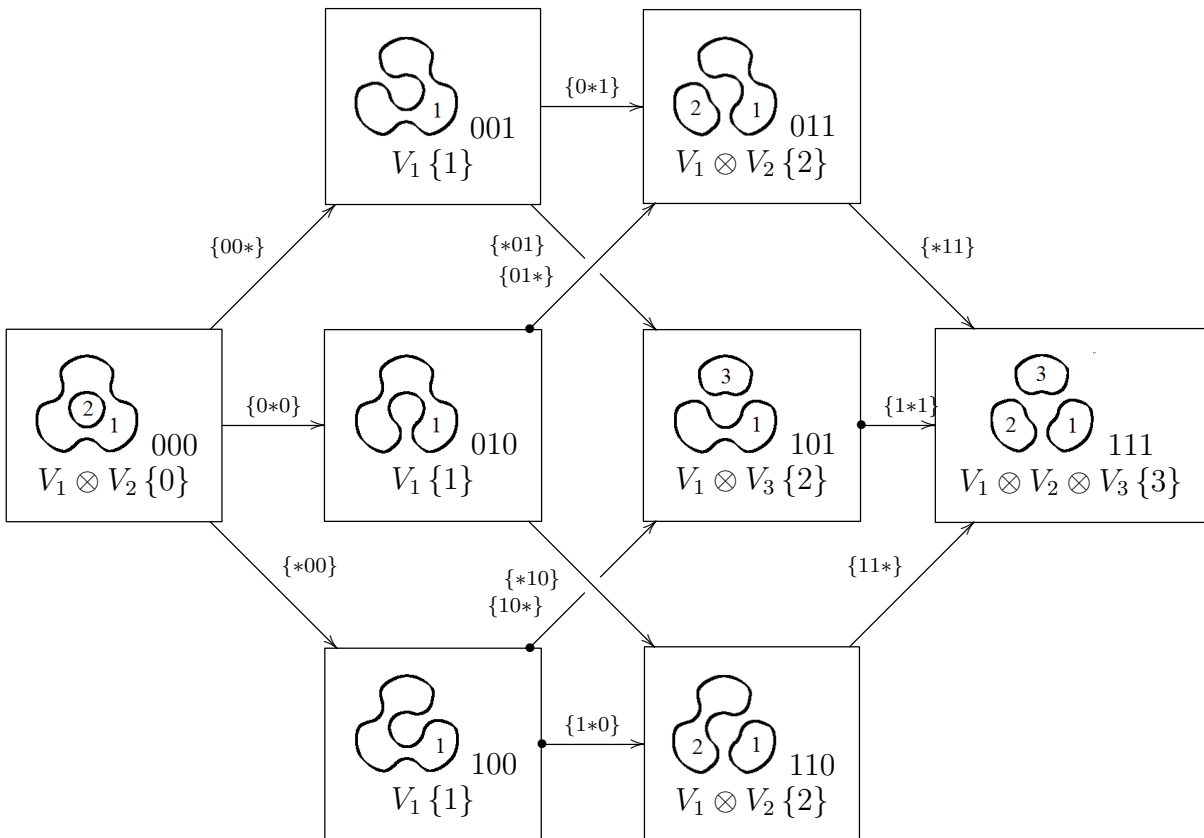
$$V_{3_1^*}(t) = P_{3_1^*}(-1, t^{1/2}) \cdot (t^{1/2} + t^{-1/2})^{-1} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.$$

### 4.5.2 Homologia de Khovanov del nus trèvol dretà sobre $\mathbb{Z}$

Considerem el següent diagrama del nus trèvol dretà, orientat tal com veiem, ja enumerats els encreuaments i els semitrams.



Com que també té tres encreuaments, el conjunt d'estats seran els mateixos que per al trèvol esquerrà, llevat que la distribució al cub serà oposada. Fixem-nos que hem pogut posar el mateix nom als semitrams; per tant, la nomenclatura també es conserva. A més, com que el cub és també de tres dimensions, les etiquetes de les arestes són les mateixes. Així que, aprofitant la informació del càlcul al nus trèvol esquerrà, tenint en compte que  $n_+ = 3$  i  $n_- = 0$ , obtenim el següent diagrama per al trèvol dretà:



A més, on abans hi havia aplicacions  $m$  ara hi haurà  $\Delta$  i recíprocament. Aprofitant les mateixes bases, tot i que ara canvien de grau, podem veure que el complex de cocadenes és

$$\mathcal{C} = [[D]][0] \{3\}, \text{ tal que } [[D]] = [[[[D]]] = 0 \xrightarrow{d_{-1}} [[D]]^0 \xrightarrow{d_0} [[D]]^1 \xrightarrow{d_1} [[D]]^2 \xrightarrow{d_2} [[D]]^3 \xrightarrow{d_3} 0,$$

amb

- $[[D]]^0 = V_1 \otimes V_2,$
- $[[D]]^1 = V_1 \{1\} \oplus V_1 \{1\} \oplus V_1 \{1\},$
- $[[D]]^2 = (V_1 \otimes V_2 \{2\}) \oplus (V_1 \otimes V_3 \{2\}) \oplus (V_1 \otimes V_2 \{2\}),$
- $[[D]]^3 = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \{3\},$

on  $d_0, d_1$  i  $d_2$  tenen les següents matrius:

- Per a  $d_0$  obtenim:

$$d_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Per a  $d_1$  obtenim:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- I per a  $d_2$  obtenim:

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara fent càlculs anàlegs als del trèvol esquerrà, calculem els nuclis i les imatges de cadascuna.

- $\text{Ker}(d_0) = \langle e_{2_0} - e_{3_0}, e_{4_0} \rangle.$
- $\text{Im}(d_0) = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1} \rangle.$
- $\text{Ker}(d_1) = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1} \rangle.$
- $\text{Im}(d_1) = \langle e_{4_2} + e_{5_2} + e_{7_2} + e_{8_2}, -e_{4_2} + e_{6_2} - e_{7_2} + e_{9_2}, e_{10_2} + e_{11_2}, -e_{10_2} + e_{12_2} \rangle.$

- $\text{Ker}(d_2) = \langle e_{10_2} + e_{11_2}, e_{10_2} - e_{12_2}, e_{4_2} - e_{5_2} - e_{6_2}, e_{9_2} - e_{5_2} - e_{7_2}, e_{9_2} + e_{4_2} + e_{8_2} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_2) = \langle e_{2_3} + e_{4_3}, -e_{2_3} - e_{3_3}, e_{3_3} + e_{4_3}, e_{6_3}, -e_{7_3}, e_{5_3}, e_{8_3} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_3) = \langle e_{1_3}, e_{2_3} \cdot e_{3_3}, e_{4_3}, e_{5_3}, e_{6_3}, e_{7_3}, e_{8_3} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_{-1}) = 0$ .

Si prenem la cohomologia del complex de cocadenes, tenim:

- $Kh^0(D) = \langle e_{2_0} - e_{3_0}, e_{4_0} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , on el primer  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau 3 i el segon per un de grau 1.
- $Kh^1(D) = 0$ .
- $Kh^2(D) = \langle e_{4_2} - e_{5_2} - e_{6_2} \rangle \cong \mathbb{Z}$ , on  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau 5.
- $Kh^3(D) = \langle e_{1_3} \rangle \oplus \langle e_{4_3} \mid 2e_{4_3} = 0 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ , on  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau 9 i  $\mathbb{Z}/2$  per un element de grau 7.

Si anem a mirar els graus dels elements segons l'espai al qual pertanyen, obtenim la següent taula:

Kh	0	1	2	3
9				$\mathbb{Z}$
7				$\mathbb{Z}/2$
5			$\mathbb{Z}$	
3	$\mathbb{Z}$			
1	$\mathbb{Z}$			

El polinomi de Khovanov és  $P_{3_1}(t, q) = q + q^3 + t^2q^5 + t^3q^9$ .

I el polinomi de Jones és  $V_{3_1}(t) = P_{3_1}(-1, t^{1/2}) \cdot (t^{1/2} + t^{-1/2})^{-1} = t + t^3 - t^4$ .

### 4.5.3 Homologia de Khovanov del nus trèvol esquerrà sobre $\mathbb{Z}/2$

Tot és igual que en el cas del trèvol esquerrà sobre  $\mathbb{Z}$  llevat de les matrius, on tots els uns negatius passen a ser idèntics als positius.

- Per a  $d_0$  obtenim:

$$d_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Per a  $d_1$  obtenim:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- I per a  $d_2$  obtenim:

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerquem els nuclis i les imatges:

- $\text{Ker}(d_0) = \langle e_{5_0} + e_{6_0} + e_{7_0}, e_{8_0} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_0) = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1}, e_{5_1} + e_{7_1} + e_{9_1}, e_{6_1} + e_{7_1} + e_{8_1}, e_{10_1} + e_{11_1}, e_{10_1} + e_{12_1} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_1) = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1}, e_{7_1} + e_{4_1}, e_{8_1} + e_{5_1}, e_{9_1} + e_{6_1}, e_{10_1}, e_{11_1}, e_{12_1} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_1) = \langle e_{1_2} + e_{2_2}, e_{1_2} + e_{3_2}, e_{4_2} + e_{5_2}, e_{4_2} + e_{6_2} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_2) = \langle e_{1_2} + e_{2_2}, e_{3_2} + e_{1_2}, e_{4_2} + e_{5_2}, e_{6_2} + e_{4_2} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_2) = \langle e_{2_3} + e_{3_3}, e_{4_3} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_3) = \langle e_{1_3}, e_{2_3}, e_{3_3}, e_{4_3} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_{-1}) = 0$ .

Mirant els graus de les bases i calculant les cohomologies, tenim:

- $Kh^{-3}(D) = \langle e_{5_0} + e_{6_0} + e_{7_0}, e_{8_0} \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ , on el primer  $\mathbb{Z}/2$  està generat per un element de grau  $-7$  i el segon per un element de grau  $-9$ .
- $Kh^{-2}(D) = \langle e_{7_1} + e_{4_1}, e_{10_1} \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ , on el primer  $\mathbb{Z}/2$  està generat per un element de grau  $-5$  i el segon per un element de grau  $-7$ .
- $Kh^{-1}(D) = 0$ .
- $Kh^0(D) = \langle e_{1_3}, e_{3_3} \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ , on el primer  $\mathbb{Z}/2$  està generat per un element de grau  $-1$  i el segon per un element de grau  $-3$ .

I finalment, la taula on expressem els valors de l'homologia de Khovanov ens queda:

Kh	-3	-2	-1	0
-1				$\mathbb{Z}/2$
-3				$\mathbb{Z}/2$
-5		$\mathbb{Z}/2$		
-7	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$		
-9	$\mathbb{Z}/2$			

#### 4.5.4 Homologia de Khovanov del nus trèvol dretà sobre $\mathbb{Z}/2$

Tot és igual que en el cas del trèvol dretà sobre  $\mathbb{Z}$  llevat de les matrius, on tots els uns negatius passen a ser idèntics als positius.

- Per a  $d_0$  obtenim:

$$d_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Per a  $d_1$  obtenim:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- I per a  $d_2$  obtenim:

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerquem els nuclis i les imatges:

- $\text{Ker}(d_0) = \langle e_{2_0} + e_{3_0}, e_{4_0} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_0) = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1} \rangle$ .



- $\text{Ker}(d_1) = \langle e_{1_1} + e_{2_1} + e_{3_1}, e_{4_1} + e_{5_1} + e_{6_1} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_1) = \langle e_{4_2} + e_{5_2} + e_{7_2} + e_{8_2}, e_{4_2} + e_{6_2} + e_{7_2} + e_{9_2}, e_{10_2} + e_{11_2}, e_{10_2} + e_{12_2} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_2) = \langle e_{10_2} + e_{11_2}, e_{10_2} + e_{12_2}, e_{4_2} + e_{5_2} + e_{6_2}, e_{9_2} + e_{5_2} + e_{7_2}, e_{9_2} + e_{4_2} + e_{8_2}, e_{1_2} + e_{2_2} + e_{3_2} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_2) = \langle e_{2_3} + e_{4_3}, e_{2_3} + e_{3_3}, e_{6_3}, e_{7_3}, e_{5_3}, e_{8_3} \rangle$ .
- $\text{Ker}(d_3) = \langle e_{1_3}, e_{2_3} \cdot e_{3_3}, e_{4_3}, e_{5_3}, e_{6_3}, e_{7_3}, e_{8_3} \rangle$ .
- $\text{Im}(d_{-1}) = 0$ .

Mirant els graus de les bases i calculant les cohomologies, tenim:

- $Kh^0(D) = \langle e_{2_0} + e_{3_0}, e_{4_0} \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ , on el primer  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau 3 i el segon per un de grau 1.
- $Kh^1(D) = 0$ .
- $Kh^2(D) = \langle e_{1_2} + e_{2_2} + e_{3_2}, e_{4_2} + e_{5_2} + e_{6_2} \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ , on el primer  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau 7 i el segon per un de grau 5.
- $Kh^3(D) = \langle e_{1_3}, e_{2_3} \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ , on el primer  $\mathbb{Z}$  està generat per un element de grau 9 i el segon per un de grau 7.

I finalment, la taula on expressem els valors de l'homologia de Khovanov ens queda:

Kh	0	1	2	3
9				$\mathbb{Z}/2$
7			$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
5			$\mathbb{Z}/2$	
3	$\mathbb{Z}/2$			
1	$\mathbb{Z}/2$			

# Conclusions

---

L'experiència d'elaborar el treball ha estat especialment gratificant, malgrat l'esforç i la considerable inversió de temps que hi hem hagut de dedicar. Hem descobert un món completament nou, però fascinant; i és que és un camp prou assequible en els seus inicis, que a mesura que s'hi va entrant sempre se'n vol saber més i més. I com que molts dels problemes oberts són fàcils de comprendre, les ganes d'intentar resoldre'ls sempre apareixen.

A més, l'enfocament donat al treball és molt evolutiu. Permet anar des de zero, que era la pròpia posició inicial en teoria de nusos, fins a l'actualitat; tot veient pel camí, indagant en articles molt recents, com és el món de la recerca matemàtica.

De totes les parts del treball se'n poden comentar coses, però l'última és la que té més a discutir, ja que hi culmina el treball sobre un tema encara en desenvolupament pel que fa a la teoria de nusos. Sembla raonable de preguntar-se com és que, si per calcular l'homologia de Khovanov fem ús d'una cohomologia, es diu homologia i no pas cohomologia? La resposta a aquesta pregunta es lliga amb la relació que podem extreure de les dues homologies de Khovanov calculades sobre  $\mathbb{Z}$ : la del trèvol esquerrà i la del dretà. Les dues taules són simètriques llevat del factor de torsió; per tant, podem conjecturar que els rangs de les homologies de Khovanov són simètrics per a imatges especulars. O el que és el mateix, que la taula per a l'homologia de Khovanov racional és simètrica per a imatges especulars. I efectivament aquesta suposició és certa ja que Khovanov la prova en el seu article en el cas de coeficients racionals. Per evidenciar aquest resultat, cal anar a la construcció del cub i veure que les aplicacions preses en direcció contrària són les de la imatge especular i, en aquest cas, per trobar l'homologia de Khovanov calcularíem una homologia. Aquesta dualitat entre homologia i cohomologia en el cub d'estats n'explica la denominació: homologia de Khovanov. A més, també hi ha una relació entre els factors de torsió que ens apareixen a les taules, i tal com Khovanov comenta, resulta que si  $L^*$  és la imatge especular de  $L$ , aleshores

$$\mathrm{Tor}(Kh^{i,j}(L^*)) = \mathrm{Tor}(Kh^{1-i,-j}(L)),$$

on  $\mathrm{Tor}$  denota el subgrup de torsió.

Un cop observat el fet que l'homologia de Khovanov racional dóna taules simètriques per a un nus i la seva imatge especular, vam decidir calcular les mateixes homologies sobre  $\mathbb{Z}/2$ , per veure si la simetria es dóna amb coeficients a qualsevol cos. I tal com ens esperàvem ens van sortir taules simètriques. Sembla lògic pensar que les taules de l'homologia de Khovanov d'imatges especulars sobre un cos són simètriques. Aquest fet no s'esmenta en l'article de Khovanov, així que enunciem el nostre propi resultat.

**Proposició 4.5.1.** *Sigui  $L$  un nus i sigui  $L^*$  la seva imatge especular. Aleshores*

$$Kh^{i,j}(L^*; R) = Kh^{-i,-j}(L; R)$$

per a qualsevol cos  $R$ .

*Demostració.* Si tenim un complex de cadenes de  $R$ -mòduls, on  $R$  és un cos,

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \longrightarrow 0,$$

dualitzant,  $A_i^* = \text{Hom}_R(A_i, R)$ , obtenim el complex de cocadenes

$$0 \longleftarrow A_n^* \xleftarrow{d_n^*} A_{n-1}^* \xleftarrow{d_{n-1}^*} A_{n-2}^* \xleftarrow{d_{n-2}^*} \cdots A_1^* \xleftarrow{d_1^*} A_0^* \longleftarrow 0.$$

I només resta veure que  $\dim_R H_i(A) = \dim_R H^i(A^*)$  per a tot  $i$ , que és una comprovació.  $\square$

Com ja hem vist en el treball, l'homologia de Khovanov és més potent que el polinomi de Jones, ja que hi ha nusos amb igual polinomi de Jones que es distingeixen per l'homologia de Khovanov. I per altra banda també podem evidenciar que l'homologia de Khovanov revela la torsió, cosa que el polinomi de Jones no fa. No obstant això, no és infal·lible. Trobem l'article [26] que ens parla de nusos primers amb la mateixa homologia de Khovanov. A més, tot i l'ampli coneixement de generalitzacions i relacions del polinomi de Jones, poc se sap sobre generalitzacions i relacions de la seva categorificació. I encara s'ignora si l'homologia de Khovanov té una relació rica amb la teoria quàntica de camps com la que té el polinomi de Jones. Alguns indicis els trobem en els articles [14], [20].

Un cop categorificat el polinomi de Jones i també el d'Alexander, sembla lògic buscar l'homologia que categorifica el polinomi HOMFLY. És així que en 2008 Khovanov i Rozansky publiquen un article on descobreixen tal homologia [15].

Evidentment, aquí no s'acaba la recerca en la línia iniciada per Khovanov: podem trobar articles dipositats a arXiv de maig de 2013 relacionats amb l'homologia de Khovanov, com per exemple [9]; per tant, podem entreveure que encara ha de donar molt de joc. I no només en el camp de la teoria d'homologia, atès que recentment s'ha relacionat l'homologia de Khovanov amb la teoria d'homotopia. Podem veure'n articles molt recents com ara [7], i a començaments de juny de 2013 hi va haver un curs-taller a Louvain-la-Neuve on es va descriure l'homologia de Khovanov en termes de límits homotòpics. Cal afegir, també, que l'homologia de Khovanov ha estat generalitzada per als nusos virtuals, que és un dels nous enfocaments de la teoria de nusos.

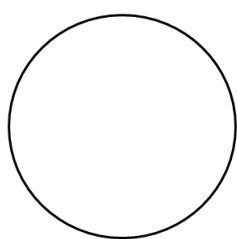
Tampoc s'han deixat de banda els antics invariants. Bar-Natan està treballant en la publicació d'un parell d'articles sobre invariants que contenen el polinomi d'Alexander; es pot consultar al seu web personal per obtenir-ne informació.

I ja per acabar, tot i les qüestions obertes i els múltiples progressos que encara es poden dur a terme en la teoria de nusos, és important remarcar el gran nombre d'aplicacions que té aquesta teoria en la biologia molecular, com ara l'actuació d'enzims sobre cadenes d'ADN (vistes com a nusos), i en la física; veure [12].

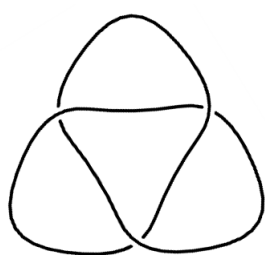
# Apèndix A: diagrames de nusos

---

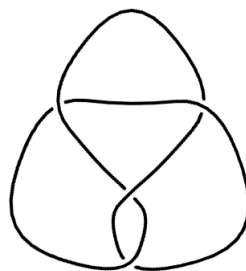
A continuació, per a cada nus primer fins a 8 encreuaments presentem un diagrama. Com a la majoria de tabulacions de nusos, no afegim imatges especulars.



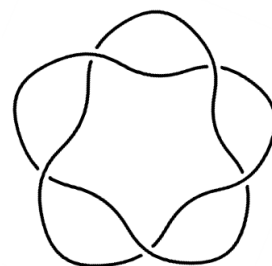
$0_1$



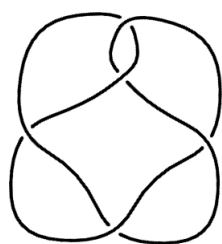
$3_1$



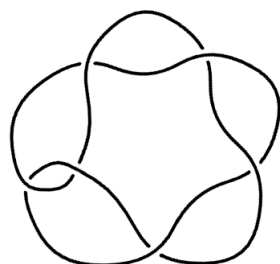
$4_1$



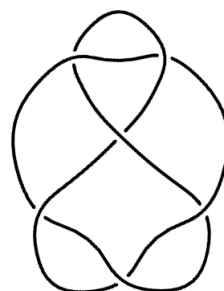
$5_1$



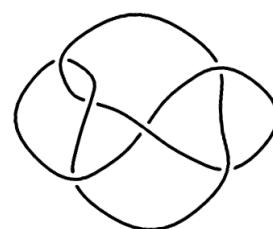
$5_2$



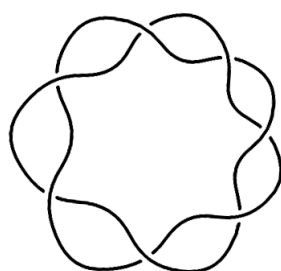
$6_1$



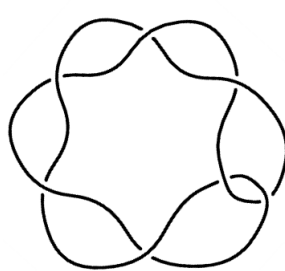
$6_2$



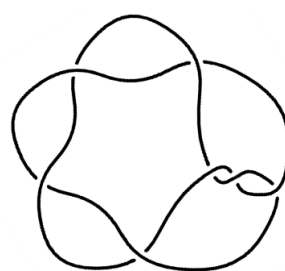
$6_3$



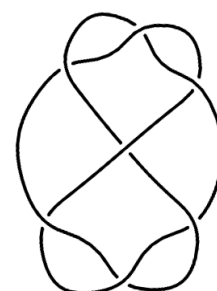
$7_1$



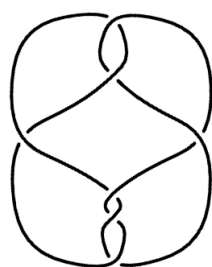
$7_2$



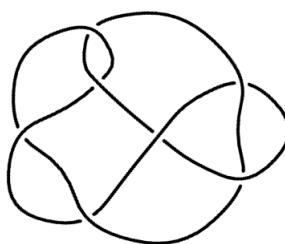
$7_3$



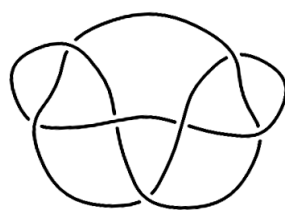
$7_4$



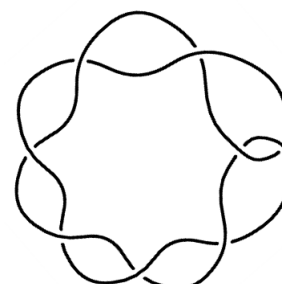
$7_5$



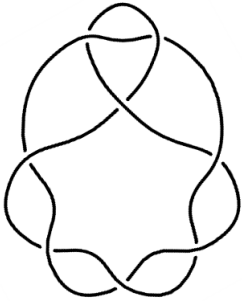
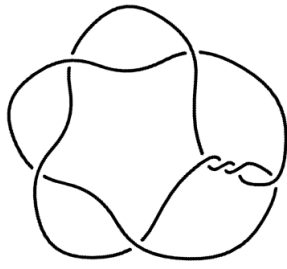
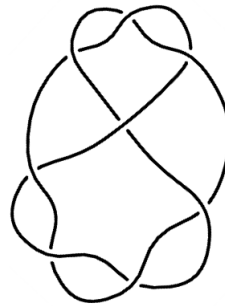
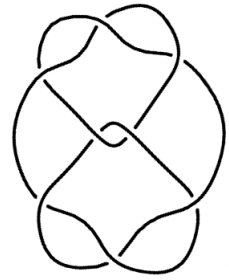
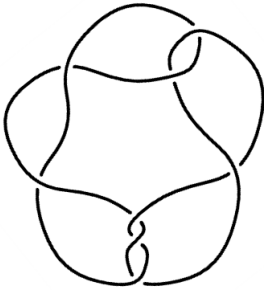
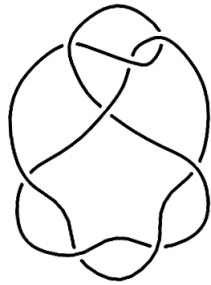
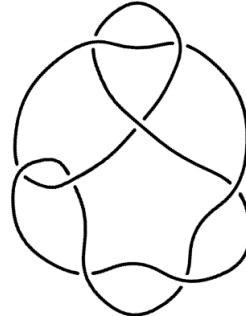
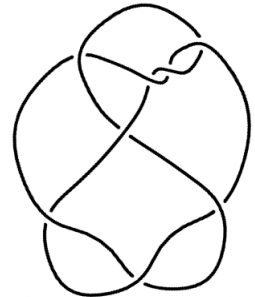
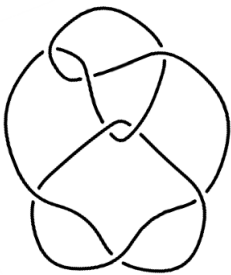
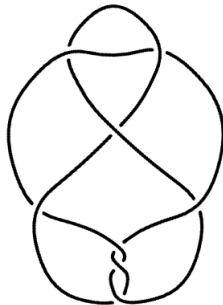
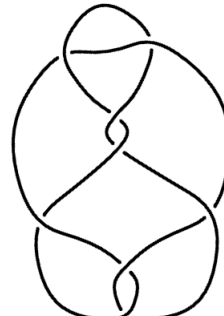
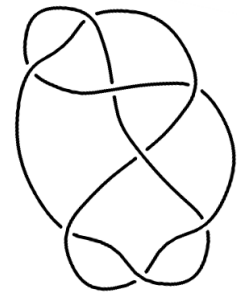
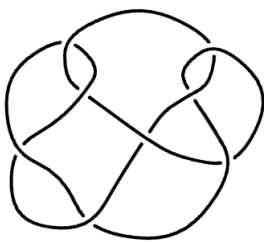
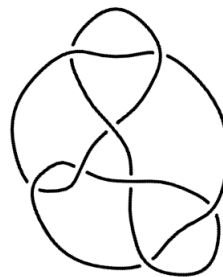
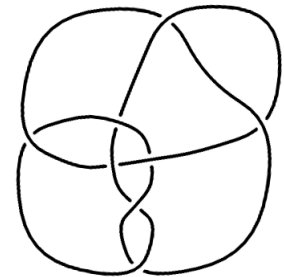
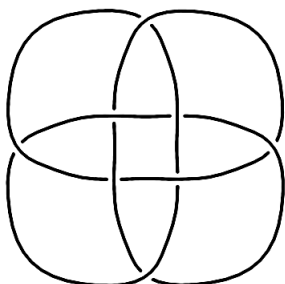
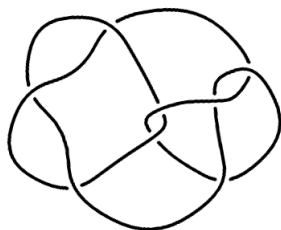
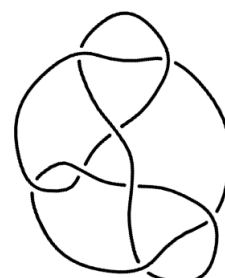
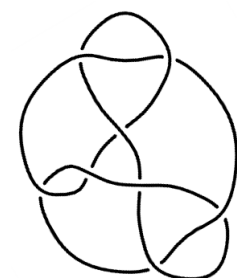
$7_6$



$7_7$



$8_1$

 $8_2$  $8_3$  $8_4$  $8_5$  $8_6$  $8_7$  $8_8$  $8_9$  $8_{10}$  $8_{11}$  $8_{12}$  $8_{13}$  $8_{14}$  $8_{15}$  $8_{16}$  $8_{17}$  $8_{18}$  $8_{19}$  $8_{20}$  $8_{21}$

# Apèndix B: polinomi de Jones

---

Ara, per als diagrames de l'apèndix A, en donem el polinomi de Jones.

Nus	Polinomi de Jones
0 <sub>1</sub>	1
3 <sub>1</sub>	$t + t^3 - t^4$
4 <sub>1</sub>	$t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$
5 <sub>1</sub>	$t^2 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7$
5 <sub>2</sub>	$t - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^5 - t^6$
6 <sub>1</sub>	$t^{-2} - t^{-1} + 2 - 2t + t^2 - t^3 + t^4$
6 <sub>2</sub>	$t^{-1} - 1 + 2t - 2t^2 + 2t^3 - 2t^4 + t^5$
6 <sub>3</sub>	$-t^{-3} + 2t^{-2} - 2t^{-1} + 3 - 2t + 2t^2 - t^3$
7 <sub>1</sub>	$t^3 + t^5 - t^6 + t^7 - t^8 + t^9 - t^{10}$
7 <sub>2</sub>	$t - t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 2t^5 - t^6 + t^7 - t^8$
7 <sub>3</sub>	$t^2 - t^3 + 2t^4 - 2t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8 - t^9$
7 <sub>4</sub>	$t - 2t^2 + 3t^3 - 2t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7 - t^8$
7 <sub>5</sub>	$t^2 - t^3 + 3t^4 - 3t^5 + 3t^6 - 3t^7 + 2t^8 - t^9$
7 <sub>6</sub>	$t^{-1} - 2 + 3t - 3t^2 + 4t^3 - 3t^4 + 2t^5 - t^6$
7 <sub>7</sub>	$t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 4 - 3t + 3t^2 - t^3$
8 <sub>1</sub>	$t^{-2} - t^{-1} + 2 - 2t + 2t^2 - 2t^3 + t^4 - t^5 + t^6$
8 <sub>2</sub>	$1 - t + 2t^2 - 2t^3 + 3t^4 - 3t^5 + 2t^6 - 2t^7 + t^8$
8 <sub>3</sub>	$t^{-4} - t^{-3} + 2t^{-2} - 3t^{-1} + 3 - 3t + 2t^2 - t^3 + t^4$
8 <sub>4</sub>	$t^{-5} - 2t^{-4} + 3t^{-3} - 3t^{-2} + 3t^{-1} - 3 + 2t^1 - t^2 + t^3$
8 <sub>5</sub>	$1 - t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 4t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8$
8 <sub>6</sub>	$t^{-1} - 1 + 3t - 4t^2 + 4t^3 - 4t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7$
8 <sub>7</sub>	$-t^{-6} + 2t^{-5} - 3t^{-4} + 4t^{-3} - 4t^{-2} + 4t^{-1} - 2 + 2t - t^2$
8 <sub>8</sub>	$-t^{-5} + 2t^{-4} - 3t^{-3} + 4t^{-2} - 4t^{-1} + 5 - 3t + 2t^2 - t^3$
8 <sub>9</sub>	$t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 5 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$
8 <sub>10</sub>	$-t^{-6} + 2t^{-5} - 4t^{-4} + 5t^{-3} - 4t^{-2} + 5t^{-1} - 3 + 2t - t^2$
8 <sub>11</sub>	$t^{-1} - 2 + 4t - 4t^2 + 5t^3 - 5t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7$
8 <sub>12</sub>	$t^{-4} - 2t^{-3} + 4t^{-2} - 5t^{-1} + 5 - 5t + 4t^2 - 2t^3 + t^4$
8 <sub>13</sub>	$-t^{-5} + 2t^{-4} - 3t^{-3} + 5t^{-2} - 5t^{-1} + 5 - 4t + 3t^2 - t^3$
8 <sub>14</sub>	$t^{-1} - 2 + 4t - 5t^2 + 6t^3 - 5t^4 + 4t^5 - 3t^6 + t^7$
8 <sub>15</sub>	$t^2 - 2t^3 + 5t^4 - 5t^5 + 6t^6 - 6t^7 + 4t^8 - 3t^9 + t^{10}$
8 <sub>16</sub>	$-t^{-6} + 3t^{-5} - 5t^{-4} + 6t^{-3} - 6t^{-2} + 6t^{-1} - 4 + 3t - t^2$
8 <sub>17</sub>	$t^{-4} - 3t^{-3} + 5t^{-2} - 6t^{-1} + 7 - 6t + 5t^2 - 3t^3 + t^4$
8 <sub>18</sub>	$t^{-4} - 4t^{-3} + 6t^{-2} - 7t^{-1} + 9 - 7t + 6t^2 - 4t^3 + t^4$
8 <sub>19</sub>	$t^3 + t^5 - t^8$
8 <sub>20</sub>	$-t^{-5} + t^{-4} - t^{-3} + 2t^{-2} - t^{-1} + 2 - t$
8 <sub>21</sub>	$2t - 2t^2 + 3t^3 - 3t^4 + 2t^5 - 2t^6 + t^7$



# Apèndix C: polinomi de Khovanov

I finalment, per als diagrames de l'apèndix A, en donem el polinomi de Khovanov.

Nus	Polinomi de Khovanov
0 <sub>1</sub>	$q + q^{-1}$
3 <sub>1</sub>	$q^9 t^3 + q^5 t^2 + q^3 + q$
4 <sub>1</sub>	$q^5 t^2 + qt + q^{-1} + q + q^{-1} t^{-1} + q^{-5} t^{-2}$
5 <sub>1</sub>	$q^{15} t^5 + q^{11} t^4 + q^{11} t^3 + q^7 t^2 + q^5 + q^3$
5 <sub>2</sub>	$q^{13} t^5 + q^9 t^4 + q^9 t^3 + (q^7 + q^5) t^2 + q^3 t + q^3 + q$
6 <sub>1</sub>	$q^9 t^4 + q^5 t^3 + q^5 t^2 + (q^3 + q) t + 2q^{-1} + q + q^{-1} t^{-1} + q^{-5} t^{-2}$
6 <sub>2</sub>	$q^{11} t^4 + (q^9 + q^7) t^3 + (q^7 + q^5) t^2 + (q^5 + q^3) t + q^3 + 2q + t^{-1} q + q^{-3} t^{-2}$
6 <sub>3</sub>	$q^7 t^3 + (q^5 + q^3) t^2 + (q^3 + q) t + 2q^{-1} + 2q + t^{-1} (q^{-1} + q^{-3}) + (q^{-3} + q^{-5}) t^{-2} + q^{-7} t^{-3}$
7 <sub>1</sub>	$q^{21} t^7 + q^{17} t^6 + q^{17} t^5 + q^{13} t^4 + q^{13} t^3 + q^9 t^2 + q^7 + q^5$
7 <sub>2</sub>	$q^{17} t^7 + q^{13} t^6 + q^{13} t^5 + (q^{11} + q^9) t^4 + (q^9 + q^7) t^3 + (q^7 + q^5) t^2 + q^3 t + q^3 + q$
7 <sub>3</sub>	$q^3 + q^5 + tq^5 + (q^7 + q^9) t^2 + (q^9 + q^{11}) t^3 + (2q^{11} + q^{13}) t^4 + 2q^{15} t^5 + q^{15} t^6 + q^{19} t^7$
7 <sub>4</sub>	$q + q^3 + 2tq^3 + (q^5 + 2q^7) t^2 + (q^7 + q^9) t^3 + (2q^9 + q^{11}) t^4 + 2q^{13} t^5 + q^{13} t^6 + q^{17} t^7$
7 <sub>5</sub>	$q^{19} t^7 + (q^{17} + q^{15}) t^6 + (2q^{15} + q^{13}) t^5 + (q^{13} + 2q^{11}) t^4 + (2q^{11} + q^9) t^3 + (q^9 + 2q^7) t^2 + q^5 t + q^5 + q^3$
7 <sub>6</sub>	$q^{13} t^5 + (q^{11} + q^9) t^4 + (2q^9 + q^7) t^3 + (2q^7 + 2q^5) t^2 + (q^5 + 2q^3) t + 2q^3 + 2q + t(q + q^{-1}) + q^{-3} t^{-2}$
7 <sub>7</sub>	$q^7 t^3 + (2q^5 + q^3) t^2 + (q^3 + 2q) t + 2q^{-1} + 3q + t^{-1} (2q^{-1} + 2q^{-3}) + (q^{-3} + 2q^{-5}) t^{-2} + (q^{-5} + q^{-7}) t^{-3} + q^{-9} t^{-4}$
8 <sub>1</sub>	$q^{13} t^6 + q^9 t^5 + q^9 t^4 + (q^7 + q^5) t^3 + (q^5 + q^3) t^2 + (q^3 + q) t + 2q^{-1} + q + q^{-1} t^{-1} + q^{-5} t^{-2}$
8 <sub>2</sub>	$q^{17} t^6 + (q^{15} + q^{13}) t^5 + (q^{13} + q^{11}) t^4 + (2q^{11} + q^9) t^3 + (q^9 + 2q^7) t^2 + (q^7 + q^5) t + q^5 + 2q^3 + t^{-1} q^3 + qt^{-2}$
8 <sub>3</sub>	$q^9 t^4 + q^{-5} t^3 + 2q^5 t^2 + (q^3 + 2q) t + 2q^{-1} + 2q + t^{-1} (2q^{-1} + q^{-3}) + 2q^{-5} t^{-2} + q^{-5} t^{-3} + q^9 t^{-4}$
8 <sub>4</sub>	$q^{11} t^4 + (q^9 + q^7) t^3 + (2q^7 + q^5) t^2 + (q^5 + 2q^3) t + 2q^3 + 2q + t^{-1} (q^{-1} + 2q) + 2q^{-3} t^{-2} + q^{-3} t^{-3} + q^{-7} t^{-4}$
8 <sub>5</sub>	$q^{-1} t^{-2} + q^3 t^{-1} + 3q^3 + q^5 + t(q^5 + 2q^7) + (2q^7 + q^9) t^2 + (2q^9 + 2q^{11}) t^3 + (q^{11} + 2q^{13}) t^4 + (q^{13} + q^{15}) t^5 + q^{17} t^6$
8 <sub>6</sub>	$q^{15} t^6 + (q^{13} + q^{11}) t^5 + (2q^{11} + q^9) t^4 + (2q^9 + 2q^7) t^3 + (2q^7 + 2q^5) t^2 + (2q^5 + 2q^3) t + q^3 + 3q + t^{-1} q + q^{-3} t^{-2}$
8 <sub>7</sub>	$q^5 t^3 + (q^3 + q) t^2 + (q^{-1} + q) t + 3q^{-1} + 2q^{-3} + t(2q^{-3} + 2q^{-5}) + (2q^{-5} + 2q^{-7}) t^{-2} + (q^{-7} + 2q^{-9}) t^{-3} + (q^{-9} + q^{-11}) t^{-4} + q^{-13} t^{-5}$
8 <sub>8</sub>	$q^7 t^3 + (q^5 + q^3) t^2 + (2q^3 + q) t + 3q^{-1} + 3q + t^{-1} (2q^{-1} + 2q^{-3}) + (2q^{-3} + 2q^{-5}) t^{-2} + (q^{-5} + 2q^{-7}) t^{-3} + (q^{-7} + q^{-9}) t^{-4} + q^{-11} t^{-5}$
8 <sub>9</sub>	$q^9 t^4 + (q^7 + q^5) t^3 + (2q^5 + q^3) t^2 + (2q^3 + 2q) t + 3q^{-1} + 3q + t^{-1} (2q^{-1} + 2q^{-3}) + (q^{-3} + 2q^{-5}) t^{-2} + (q^{-5} + q^{-7}) t^{-3} + q^{-9} t^{-4}$



$8_{10}$	$q^5t^3 + (q^3 + q)t^2 + (q^{-1} + 2q)t + 3q^{-1} + 3q^{-3} + t^{-1}(2q^{-3} + 2q^{-5}) + (3q^{-5} + 2q^{-7})t^{-2} + (q^{-7} + 3q^{-9})t^{-3} + (q^{-9} + q^{-11})t^{-4} + q^{-13}t^{-5}$
$8_{11}$	$q^{15}t^6 + (q^{13} + q^{11})t^5 + (2q^{11} + q^9)t^4 + (3q^9 + 2q^7)t^3 + (2q^7 + 3q^5)t^2 + (2q^5 + 2q^3)t + 2q^3 + 3q + t^{-1}(q^{-1} + q) + q^{-3}t^{-2}$
$8_{12}$	$q^9t^4 + (q^7 + q^5)t^3 + (3q^5 + q^3)t^2 + (2q^3 + 3q)t + 3q^{-1} + 3q + t^{-1}(3q^{-1} + 2q^{-3}) + (q^{-3} + 3q^{-5})t^{-2} + (q^{-5} + q^{-7})t^{-3} + q^{-9}t^{-4}$
$8_{13}$	$q^7t^3 + (2q^5 + q^3)t^2 + (2q^3 + 2q)t + 3q^{-1} + 3q + t(3q^{-1} + 2q^{-3}) + (2q^{-3} + 3q^{-5})t^{-2} + (q^{-5} + 2q^{-7})t^{-3} + (q^{-7} + q^{-9})t^{-4} + q^{-11}t^{-5}$
$8_{14}$	$q^{15}t^6 + (2q^{13} + q^{11})t^5 + (2q^{11} + 2q^9)t^4 + (3q^9 + 2q^7)t^3 + (3q^7 + 3q^5)t^2 + (2q^5 + 3q^3)t + 2q^3 + 3q + t^{-1}(q^{-1} + q) + q^{-3}t^{-2}$
$8_{15}$	$q^{21}t^8 + (2q^{19} + q^{17})t^7 + (2q^{17} + 2q^{15})t^6 + (4q^{15} + 2q^{13})t^5 + (2q^{13} + 4q^{11})t^4 + (3q^{11} + 2q^9)t^3 + (2q^9 + 3q^7)t^2 + 2q^5t + q^5 + q^3$
$8_{16}$	$q^{-13}t^{-5} + (2q^{-11} + q^{-9})t^{-4} + (3q^{-9} + 2q^{-7})t^{-3} + (3q^{-7} + 3q^{-5})t^{-2} + (3q^{-5} + 3q^{-3})t^{-1} + 3q^{-3} + 4q^{-1} + t(2q + 2q^{-1}) + (q + 2q^3)t^2 + q^5t^3$
$8_{17}$	$q^9t^4 + (2q^7 + q^5)t^3 + (3q^5 + 2q^3)t^2 + (3q^3 + 3q)t + 4q^{-1} + 4q + t^{-1}(3q^{-1} + 3q^{-3}) + (2q^{-3} + 3q^{-5})t^{-2} + (q^{-5} + 2q^{-7})t^{-3} + q^{-9}t^{-4}$
$8_{18}$	$q^9t^4 + (3q^7 + q^5)t^3 + (3q^5 + 3q^3)t^2 + (4q^3 + 3q)t + 5q^{-1} + 5q + t^{-1}(3q^{-1} + 4q^{-3}) + (3q^{-3} + 3q^{-5})t^{-2} + (q^{-5} + 3q^{-7})t^{-3} + q^{-9}t^{-4}$
$8_{19}$	$q^5 + q^7 + q^9t^2 + q^13t^3 + (q^11 + q^13)t^4 + (q^15 + q^17)t^5$
$8_{20}$	$q^{-11}t^{-5} + q^{-7}t^{-4} + q^{-7}t^{-3} + (q^{-5} + q^{-3})t^{-2} + q^{-1}t^{-1} + q + 2q^{-1} + tq^3$
$8_{21}$	$q^{15}t^6 + (q^{13} + q^{11})t^5 + (q^{11} + q^9)t^4 + (2q^9 + q^7)t^3 + (q^7 + 2q^5)t^2 + (q^5 + q^3)t + q^3 + 2q$

# Bibliografia

---

- [1] Adams, C. C.: *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [2] Bar-Natan, D.: On Khovanov's categorification of the Jones polynomial, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 337–370.
- [3] Bar-Natan, D.: On the Vassiliev knot invariants, *Topology* **34** (1995), 423–472.
- [4] Burde, G.; Zieschang, H.: *Knots*, de Gruyter, Berlin, 1985.
- [5] Cha, J. C.; Livingston, C.: *Table of Knot Invariants*, [www.indiana.edu/~knotinfo](http://www.indiana.edu/~knotinfo), juny de 2013.
- [6] Cromwell, P. R.: *Knots and Links*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [7] Everitt, B.; Lipshitz, R.; Sarkar, S; Turner, P.: Khovanov homotopy types and the Dold–Thom functor, [arXiv:math.GT/1202.1856v1](https://arxiv.org/abs/math/1202.1856v1) (2012).
- [8] Fisher, G. M.: On the group of all homeomorphisms of a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960), 193–212.
- [9] Grigsby, J. E.; Ni, Y.: Sutured Khovanov homology distinguishes braids from other tangles, [arXiv:math.GT/1305.2183](https://arxiv.org/abs/math/1305.2183) (2013).
- [10] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [11] Kauffman, L. H.: Khovanov homology, [arXiv:math.GT/1107.1524v1](https://arxiv.org/abs/math/1107.1524v1) (2011).
- [12] Kauffman, L. H.: *Knots and Physics*, World Scientific Publishing, Singapore, 1991.
- [13] Khovanov, M.: A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.* **101**, no. 3 (2000), 359–426.
- [14] Khovanov, M.:  $sl(3)$  link homology I, *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), 1045–1081.
- [15] Khovanov, M.; Rozansky, L.: Matrix factorizations and link homology, *Fund. Math.* **199** (2008), 1–91.
- [16] Kosniowski, C.: *Topología Algebraica*, Reverté, Barcelona, 1986.
- [17] Kronheimer, P. B.; Mrowka, T. S.: Khovanov homology is an unknot-detector, *Publ. Math. IHÉS* **113** (2011), 97–208.
- [18] Livingston, C.: *Knot Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [19] Manolescu, C.; Ozsvath, P; Sarkar, S.: A combinatorial description of knot Floer homology, *Ann. of Math.* **169**, no. 2 (2009), 633–660.

- 
- [20] Ozsvath, P.; Szabo, Z.: Holomorphic disks and knot invariants, *Adv. Math.* **186**, no. 1 (2004), 58–116.
- [21] Ozsvath, P.; Szabo, Z.: Knot Floer homology, genus bounds and mutation, *Topology Appl.* **141** (2004), 59–85.
- [22] Sossinsky, A.: *Knots: Mathematics With a Twist*, Harvard University Press, Massachusetts, 2002.
- [23] Turner, P.: A spectral sequence for Khovanov homology with an application to  $(3, q)$ -torus links, *Algebr. Geom. Topol.* **8** (2008), 869–884.
- [24] Vick, J. W.: *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math. vol. 145, Springer, New York, 1994.
- [25] Viro, O.: Remarks on the definition of Khovanov homology, [arXiv:math.GT/0202199](https://arxiv.org/abs/math/0202199) (2002).
- [26] Watson, L.: Knots with identical Khovanov homology, *Algebr. Geom. Topol.* **7** (2007), 1389–1407.