



Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

CALCUL D'ECLIPSIS

Mario Cristel Borrero

Director: Gerard Gómez
Departament de
Matemàtica Aplicada i
Anàlisi. UB

Barcelona, 3 de Juny de 2013

INDICE

1	Introducción	2
2	Conceptos preliminares.....	3
2.1	Forma de la Tierra	3
2.2	El Saros.....	5
2.3	Frecuencia de los eclipses.....	8
3	Ecuaciones fundamentales	10
3.1	Posición del eje de sombra	10
3.2	Distancia del punto de observación al eje de sombra.....	14
3.3	Radios de los conos de sombra y de penumbra	18
4	Previsión general de eclipses solares	21
4.1	Intersección del cono de sombra con la superficie terrestre.....	21
4.2	Curva de máximo en el horizonte.....	24
4.3	Curvas límite Norte y Sur.....	26
4.4	Curvas de contacto en el horizonte.....	27
4.5	Límites temporales del eclipse	29
4.6	Curva de eclipse central.....	31
4.7	Límites Norte y Sur del eclipse total o anular	32
5	Aplicación al eclipse del 12 de Agosto del 2026.....	33
5.1	Datos utilizados	33
5.2	Tablas de cálculo	35
5.3	Curvas calculadas	36
6	Summary.....	40
7	Bibliografía	41
8	Anexo.....	42

1 Introducción

En 1824 el astrónomo y matemático prusiano Friedrich Bessel introdujo un nuevo método para la predicción de eclipses de Sol. Tuvo tanto éxito, que sigue siendo hoy en día la técnica más potente, incluso con la utilización de ordenadores.

En el presente trabajo se detallan los apartados principales del procedimiento, según la pauta que se detalla a continuación. En el Capítulo 2 se exponen unos primeros conceptos (forma de la Tierra, el Saros) que serán útiles para los apartados siguientes. En el Capítulo 3 se expone el procedimiento para calcular los Elementos Besselianos de un eclipse. En el 4 se expone la forma en que, a partir de los Elementos Besselianos, se calcula el recorrido y la visibilidad del eclipse sobre la superficie de la Tierra. El Capítulo 5 se destina a resolver el caso particular del eclipse total de Sol que tendrá lugar el 12 de Agosto del 2026, cuya particularidad consiste en que será visible en el sur de Catalunya.

En este trabajo se ha seguido principalmente la obra de William Chauvenet, **Manual of spherical and practical astronomy**, ref [1], y la **Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos**, de F. Javier Gil, ref [2].

La clave del método de Bessel es la expresión de las efemérides del Sol y de la Luna en relación con la sombra de la Luna con respecto al centro de la Tierra. Este cambio de coordenadas simplifica mucho los cálculos sin pérdida de precisión.

Para definir los Elementos Besselianos de un eclipse, se introduce un plano que pasa por el centro de la Tierra, perpendicular al eje de la sombra de la Luna. Llamamos *plano fundamental* a este plano y sobre el se construye un sistema de coordenadas ortogonales $X - Y$ con origen en el centro de la Tierra (sistema geocéntrico). Los ejes de este sistema están orientados hacia el Norte en la dirección positiva del eje Y y hacia el este en la dirección positiva del eje X . El eje Z es perpendicular al plano fundamental y paralelo al eje de la sombra.

Las coordenadas $X - Y$ del eje de la sombra se pueden expresar ahora en unidades del radio de la Tierra. Los radios de la zona de penumbra y de la zona de sombra en el plano fundamental están tabulados como $L1$ y $L2$ respectivamente. La dirección del eje de sombra en la esfera celeste se define por su declinación ' d ' y ángulo horario ' m '. Finalmente los ángulos que los conos de penumbra y de sombra hacen con el eje de sombra se expresan como $f1$ y $f2$ respectivamente. Estos ocho son los parámetros que definen los Elementos Besselianos necesarios para caracterizar el eclipse.

2 Conceptos preliminares

En este capítulo se introducen unos conceptos preliminares, particularmente la forma de la Tierra y el período del Saros, necesarios para comprender luego mejor la teoría general relativa a los eclipses.

2.1 Forma de la Tierra

Coordenadas geográficas del lugar de observación

La forma de la Tierra no es una esfera sino, aproximadamente, un elipsoide de revolución (su sección de corte por el meridiano es una elipse) y para predecir las circunstancias locales con precisión hace falta distinguir entre:

- φ = latitud geográfica
- φ' = latitud geocéntrica
- ρ = radio geocéntrico

Sea EPQP' uno de los meridianos (con perfil elíptico) de la Tierra, tal como se muestra en la Fig.1. EQ el diámetro del ecuador, PP' el diámetro polar, o eje de la Tierra, C el centro, F uno de los focos.

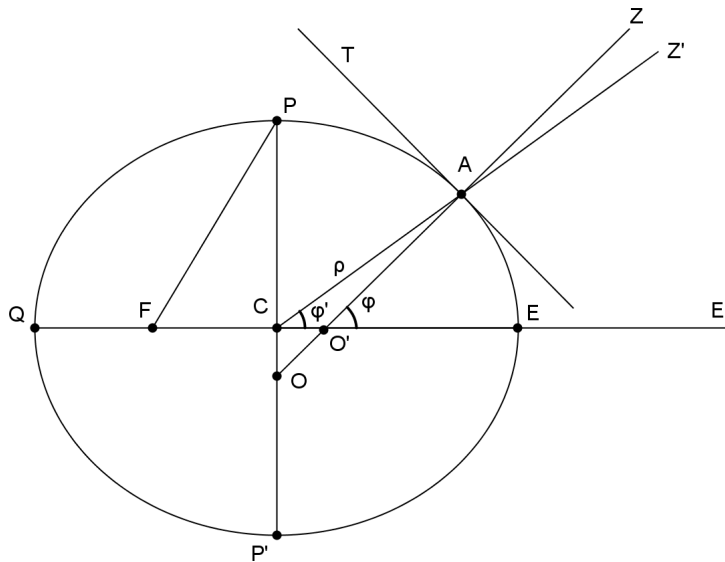


Figura 1. Sección meridiano con perfil elíptico

Sean:

- a = semieje mayor, o radio ecuatorial = CE
- b = semieje menor, o radio polar = CP
- f = "flattening" o achatamiento polar
- e = excentricidad del meridiano

El achatamiento terrestre se define como:

$$f = (a - b) / a = 1 - b / a$$

La excentricidad es CF / CE . Ya que por la definición métrica de la elipse $PF = CE$, tenemos

$$e^2 = \frac{CF^2}{CE^2} = \frac{(PF^2 - PC^2)}{PF^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - (1 - f)^2$$

Para los cálculos posteriores tomamos para e el valor (J. Meuss) [4]

$$e = 0,0818192$$

por lo que $1/f = 298,257157$

Sea ahora A un punto de la superficie de la Tierra, AT la tangente al meridiano en este punto, AO, perpendicular a AT, la normal a la superficie de la Tierra en A. AO representa la línea vertical del observador en A. Esta vertical no coincide con el radio, excepto en el ecuador y en los polos. Sean, además, E', Z, Z' las proyecciones en la esfera celeste de las líneas CE, OA y CA.

El ángulo ZO'E' es la declinación del cenit, o latitud geográfica, y Z el cenit geográfico; el ángulo Z'CE' es la declinación del cenit geocéntrico Z', o latitud geocéntrica; el ángulo ZAZ' es la reducción de latitud. Se observa que la latitud geocéntrica es siempre inferior a la latitud geográfica.

La ecuación de la elipse meridiana es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Debido al perfil elíptico de los meridianos, el radio terrestre ρ varía con la latitud. De acuerdo con [1], se obtiene una relación que nos da el valor del radio terrestre ρ en función de la latitud geográfica, siendo a el radio ecuatorial de la Tierra:

$$\rho = a \sqrt{\frac{1 - 2e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + e^4 \operatorname{sen}^4 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Además se cumple según [1] que

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \rho \cos \varphi'$$

$$y = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \rho \operatorname{sen} \varphi'$$

2.2 El Saros

El período Saros fue ya conocido por los astrónomos caldeos, quienes le dieron el nombre que aún conserva.

La condición para que se produzca un eclipse es que el Sol y la Luna se encuentren, aproximadamente, en la dirección del nodo (ascendente o descendente) lunar. La órbita de la Luna está inclinada en promedio $5^\circ 9'$ respecto a la eclíptica, a la que corta en dos puntos llamados *nodo ascendente* y *nodo descendente*. Los nodos retrogradan sobre la eclíptica, dando una vuelta en (aproximadamente) 18,03 años.

El período entre dos lunas llenas se llama *mes sinódico* (S) y su valor es

$$S = 29,530588 \text{ días.}$$

Pero el Sol o la Luna necesitan estar cerca de los nodos lunares o puntos de la órbita donde la Luna atraviesa la eclíptica. El Sol tarda 346,620031 días en pasar por el mismo nodo y este período se llama *año de eclipses* (E).

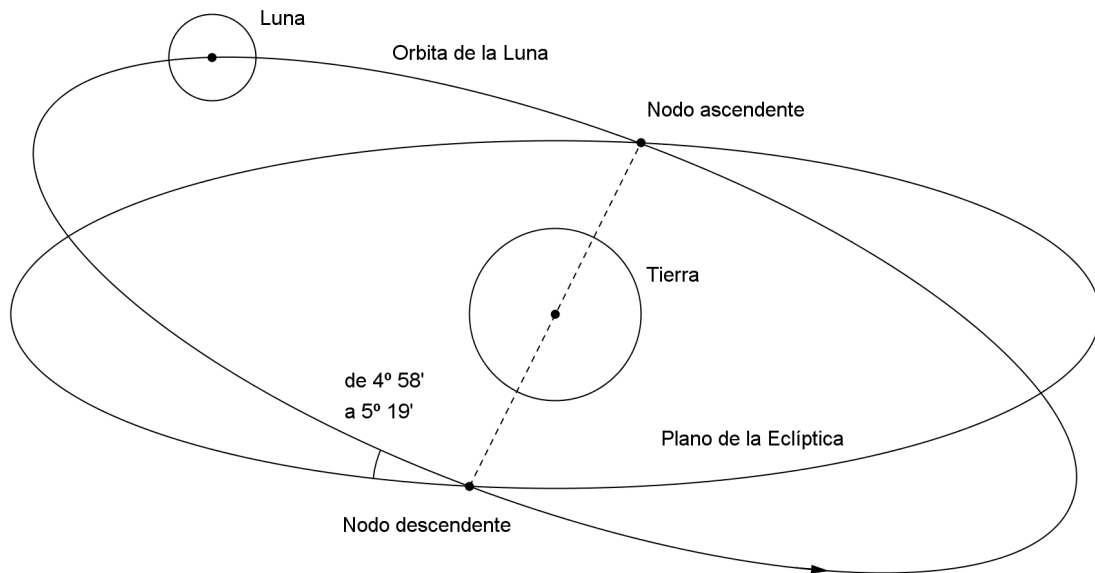


Figura 2. Órbita de la Luna y nodos

El período de Saros, en que se repiten aproximadamente los eclipses, es un múltiplo del mes sinódico pues la sicigias (Luna Nueva o Luna Llena) son condiciones necesarias para que se produzcan los eclipses (de Sol o de Luna, respectivamente).

Además es múltiplo del año de eclipses. Es decir si m y n son dos números naturales:

$$m \cdot S = m \cdot 29,530588 \text{ días} = n \cdot 346,620031 \text{ días} = n \cdot E$$

Esta igualdad se satisface, con un error de 0,46 días, para m = 223 lunaciones y n = 19 años de eclipse. Por tanto si se anota el instante en que ocurre un eclipse y su fase, al cabo de

$$223 \cdot 29,530588 \text{ días} = 6.585,32 \text{ días}$$

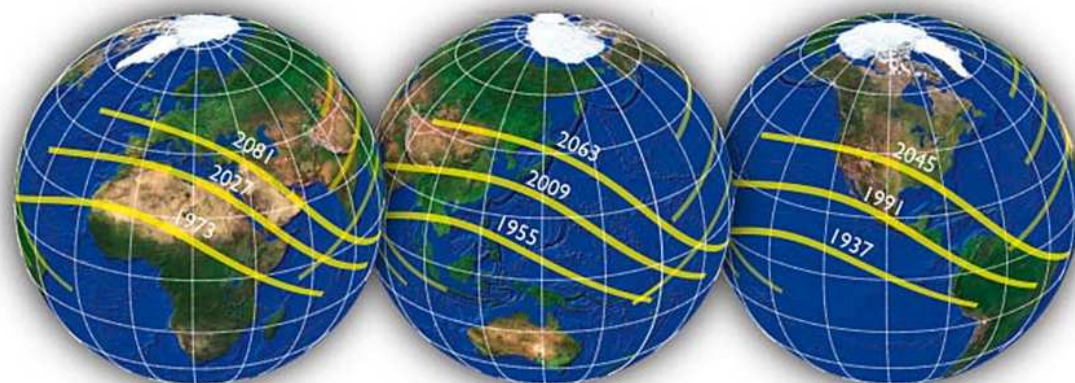
se obtiene otro instante en que ocurre otro eclipse muy similar llamado eclipse homólogo. Se cumple que

$$19 \cdot E = 19 \cdot 346,620031 \text{ días} = 6.585,78 \text{ días}$$

Estos dos valores son muy parecidos, por lo que si el Sol y la Luna se encuentran un determinado día en el mismo punto nodal, se volverán a encontrar otra vez aproximadamente al cabo de 6.585,78 días, o sea 18 años y 11,3 días.

Esta periodicidad de los eclipses se denomina Saros (Saros = ciclos o repetición). Sucede que ocurre un cierto eclipse de Sol para una determinada posición del Sol y la Luna respecto a un nodo. Al cabo de un Saros, dicha posición se repite, pero más aproximada al nodo, y así sucesivamente en Saros siguientes, hasta llegar al nodo y rebasarlo. El eclipse continúa repitiéndose en Saros sucesivos, pero ya alejándose los astros del nodo, hasta que este alejamiento hace el eclipse imposible. Cada serie de eclipses comienza con un eclipse parcial y de muy escasa duración, siendo tan sólo visible en las inmediaciones de un polo terrestre. En los Saros siguientes los eclipses de esa serie van siendo de mayor duración, aún parciales, y la región donde son visibles se va extendiendo hacia latitudes más bajas. Más adelante se presentará

Saros 136



Cada eclipse se desplaza $\approx 120^\circ$ hacia
occidente con respecto al anterior

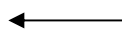


Figura 3. Eclipses y Saros [4]

como anular o total y a partir de entonces se manifestará hacia latitudes cada vez más cercanas al polo opuesto a aquel en que se observó por primera vez. Los últimos eclipses de la serie serán parciales y de escasa duración. Ver Fig. 3 y 4.

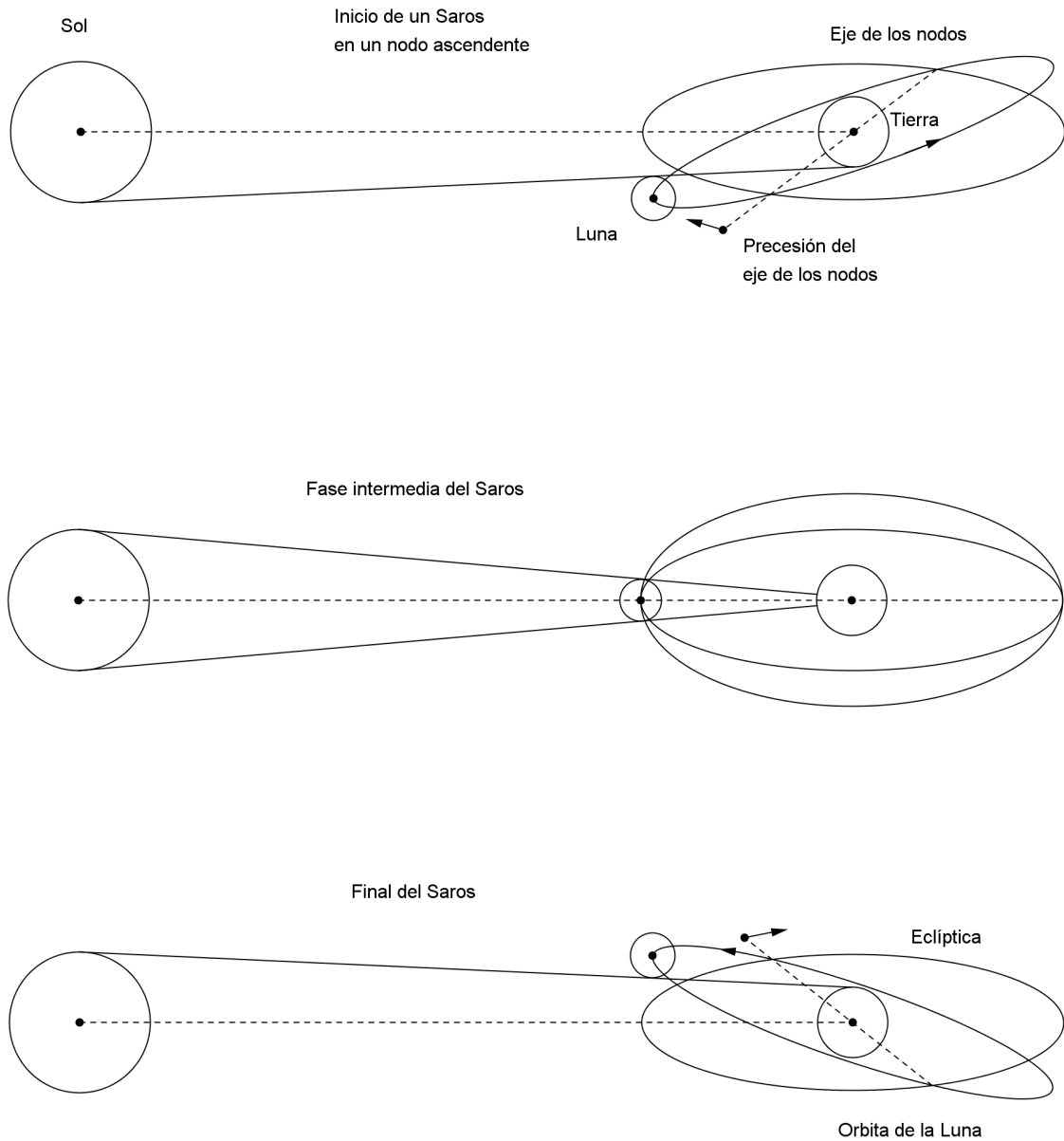


Figura 4. Evolución de un período de Saros

El período de Saros tiene un número exacto de días enteros más, aproximadamente, un tercio de día. Como la Tierra gira 360° grados por día, un tercio de día son 120° grados y por consiguiente, la posición de cada nuevo eclipse estará desplazada 120° grados hacia el oeste con respecto al eclipse anterior.

Cada Saros agrupa un conjunto de eclipses de Sol que se repiten cada 18 años y 11,3 días y recorren toda la superficie terrestre, tal como se ha explicado. El número de eclipses de Sol de cada Saros varía entre 69 y 86, lo que corresponde a una duración que se encuentra comprendida entre 1.280 y 1.530 años. Este hecho implica que se están produciendo varios períodos de Saros simultáneamente. Cada Saros recibe un número correlativo. Los eclipses de Sol que se están produciendo en la actualidad se hallan incluidos en los Saros con numeración comprendida entre 117 y 156. El primer eclipse del Saros 156 se produjo el 1 de Julio de 2011. El último del Saros 117 se producirá el 3 de Agosto del 2054.

2.3 Frecuencia de los eclipses

La máxima distancia angular del Sol al nodo de la órbita para la que se puede dar un eclipse es de $18^{\circ}26'59''$ [2]. La línea de los nodos retrograda a lo largo de la eclíptica completando una revolución en 6.793,5 días. Como el intervalo entre dos pasos consecutivos del Sol por el nodo es de 346,62 días, el Sol se separa del nodo a razón de $30,67$ grados por mes sinódico (intervalo entre dos Lunas nuevas o lunaciones).

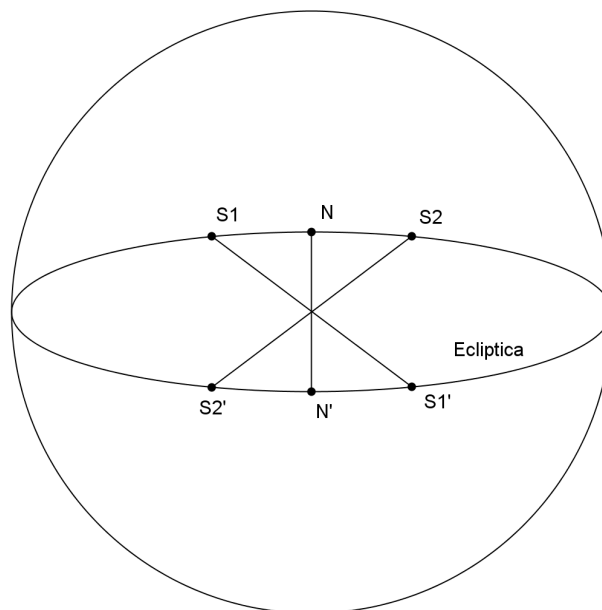


Figura 5. Posiciones extremas de los nodos

En la Fig. 5, NN' es la línea de los nodos $NS_1 = NS_2 = N'S_1' = N'S_2' = 18^{\circ}26'59''$. El arco $S_1S_2 = S_1'S_2' = 36^{\circ}53'58''$, es mayor que el ángulo en que el Sol se separa del nodo en un mes sinódico. Por tanto, cuando el Sol se encuentre en el arco S_1S_2 pueden producirse uno o dos eclipses, y otro u otros dos cuando se encuentra en $S_1'S_2'$.

De hecho, siempre se producirán dos como mínimo, cerca de los nodos de la órbita lunar, si bien pueden suceder cuatro e incluso cinco eclipses en un mismo año. Suceden cinco eclipses solares en un año cuando el primero de ellos tiene lugar poco tiempo después del primero de enero. Entonces el segundo tendrá lugar en el novilunio siguiente, el tercero y el cuarto sucederán antes de que transcurra medio año, y el quinto tendrá lugar pasados 345 días después del primero, puesto que ese es el número de días que contienen 12 meses sinódicos. Es un fenómeno muy poco frecuente. Hubo cinco eclipses de Sol en el 1935 y volverá a ocurrir el 2206.

3 Ecuaciones fundamentales

En este capítulo veremos como, a partir de las Efemérides del Sol y de la Luna, se calculan los Elementos Besselianos, de gran ayuda en la determinación posterior de las zonas de visibilidad del eclipse sobre la superficie de la Tierra. Para ello empezamos con la determinación de lo que definimos como *eje de sombra*.

3.1 Posición del eje de sombra

El eje de sombra, que es el que une los centros de la Luna y el Sol (ver Figs. 6 y 7), corta a la esfera celeste en aquel punto en que el observador situado en el centro de la Luna vería proyectado el centro del Sol. Sea O el centro de la Tierra, S el centro del Sol y L el centro de la Luna. Todas las líneas paralelas a SL cortan la esfera celeste, en el infinito, en el mismo punto Z (ver Fig. 7 y 8). En primer lugar calcularemos las coordenadas de este punto.

Consideremos un sistema de referencia geocéntrico, ecuatorial y rectangular. El eje X está dirigido hacia el punto vernal γ (punto de la eclíptica en el cual el Sol pasa del hemisferio sur al norte: aproximadamente 21 Marzo; es el origen de la ascensión recta), el eje Y hacia el punto del ecuador cuya ascensión recta es de 90° y el eje Zt perpendicular a ambos, Fig. 6.

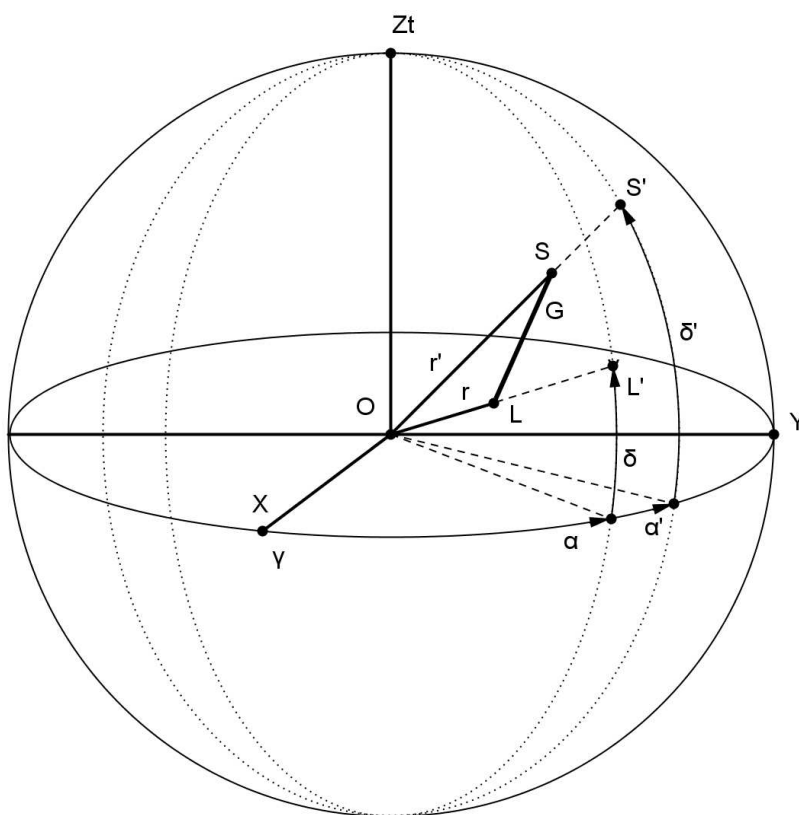


Figura 6. Eje de sombra SL

Sean en este sistema

(α, δ, r) la ascensión recta, la declinación y la distancia, desde el centro de la Tierra, del centro de la Luna

(α', δ', r') la ascensión recta, la declinación y la distancia, desde el centro de la Tierra, del centro del Sol

Por medio de una conversión de coordenadas polares a ortogonales, las coordenadas (x, y, z) correspondientes de la Luna serán

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos \alpha \\y &= r \cos \delta \sin \alpha \\z &= r \sin \delta\end{aligned}$$

y las coordenadas (x', y', z') del Sol

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos \delta' \cos \alpha' \\y' &= r' \cos \delta' \sin \alpha' \\z' &= r' \sin \delta'\end{aligned}$$

Consideremos ahora el sistema centrado en la Luna y paralelo al anterior. La posición del Sol en este sistema determina el punto Z. Sean ahora

(a, d, G) la ascensión recta, la declinación y la distancia, desde el centro de la Luna, del centro del Sol

Las coordenadas (x_s, y_s, z_s) del Sol en este sistema son

$$\begin{aligned}x_s &= G \cos d \cos a \\y_s &= G \cos d \sin a \\z_s &= G \sin d\end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned}G \cos d \cos a &= r' \cos \delta' \cos \alpha' - r \cos \delta \cos \alpha \\G \cos d \sin a &= r' \cos \delta' \sin \alpha' - r \cos \delta \sin \alpha \\G \sin d &= r' \sin \delta' - r \sin \delta\end{aligned} \tag{1}$$

Multiplicando la primera ecuación de (1) por $\sin \alpha'$ y la segunda por $\cos \alpha'$ y restando y seguidamente multiplicando la primera por $\cos \alpha'$ y la segunda por $\sin \alpha'$ y sumando, el conjunto de ecuaciones se transforma en

$$\begin{aligned}G \cos d \sin (a - \alpha') &= -r \cos \delta \sin (\alpha - \alpha') \\G \cos d \cos (a - \alpha') &= r' \cos \delta' - r \cos \delta \cos (\alpha - \alpha') \\G \sin d &= r' \sin \delta' - r \sin \delta\end{aligned}$$

Dividiendo por r' y substituyendo por $g = G/r'$ y $b = r/r'$ (2)

$$\begin{aligned} g \cos d \operatorname{sen}(\alpha - \alpha') &= -b \cos \delta \operatorname{sen}(\alpha - \alpha') \\ g \cos d \cos(\alpha - \alpha') &= \cos \delta' - b \cos \delta \cos(\alpha - \alpha') \\ g \operatorname{sen} d &= \operatorname{sen} \delta' - b \operatorname{sen} \delta \end{aligned} \quad (3)$$

Se puede resolver aproximadamente el sistema (3) teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

$b = r/r'$ es del orden de 1/400

$\alpha - \alpha'$ durante el eclipse no puede ser mayor de $1^\circ 43'$

$\alpha - \alpha'$ es un pequeño arco que no excede $17''$

En base a estas consideraciones podemos escribir las aproximaciones:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \alpha') &= 1 & \cos(\alpha - \alpha') &= 1 \\ \operatorname{sen}(\alpha - \alpha') &= \alpha - \alpha' & \tan(\alpha - \alpha') &= \alpha - \alpha' \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuación de (3) por la segunda, y substituyendo $\cos \delta'$ por $\sec \delta'$

$$\tan(\alpha - \alpha') = -\frac{b \cos \delta \sec \delta' \operatorname{sen}(\alpha - \alpha')}{1 - b \cos \delta \sec \delta' \cos(\alpha - \alpha')}$$

Además tenemos en cuenta que δ y δ' son casi iguales en el momento del eclipse. Con estas simplificaciones

$$\alpha - \alpha' = -\frac{b}{1-b} \cos \delta \sec \delta' (\alpha - \alpha')$$

Aplicando ahora las mismas simplificaciones a la segunda de las ecuaciones (3)

$$\begin{aligned} g \cos d &= \cos \delta' - b \cos \delta \\ g \operatorname{sen} d &= \operatorname{sen} \delta' - b \operatorname{sen} \delta \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda igualdad por $\cos \delta'$ y la primera por $\operatorname{sen} \delta'$ y restando y multiplicando la segunda $\operatorname{sen} \delta'$ y la primera por $\cos \delta'$ y sumando, las ecuaciones anteriores que se pueden escribir como

$$\begin{aligned} g \operatorname{sen}(d - \delta') &= -b \operatorname{sen}(\delta - \delta') \\ g \cos(d - \delta') &= 1 - b \cos(\delta - \delta') \end{aligned}$$

de las que resulta

$$\tan(d - \delta') = -\frac{b \operatorname{sen}(\delta - \delta')}{1 - b \cos(\delta - \delta')}$$

y aplicando las simplificaciones anteriores

3.2 Distancia del punto de observación al eje de sombra

Sean las posiciones del Sol, de la Luna y del observador referidas a un sistema de coordenadas ortogonales constituido por tres planos que pasan por el centro de la Tierra, siendo el plano XY perpendicular al eje de la sombra. Sea YZ el plano del círculo de declinación que contiene el punto Z . El plano XZ será ortogonal a los otros dos.

El eje de las z será el la línea OZ trazada por el centro de la Tierra y paralela al eje de sombra. Será positivo en dirección Z . El eje de las y será la intersección OY del plano del círculo de declinación que contiene Z con el plano principal. Será tomado positivo hacia el Norte. El eje de las x será la intersección OX del plano del ecuador con el plano principal, será tomado positivo hacia X . Su ascensión recta es $90^\circ + a$, Fig. 8.

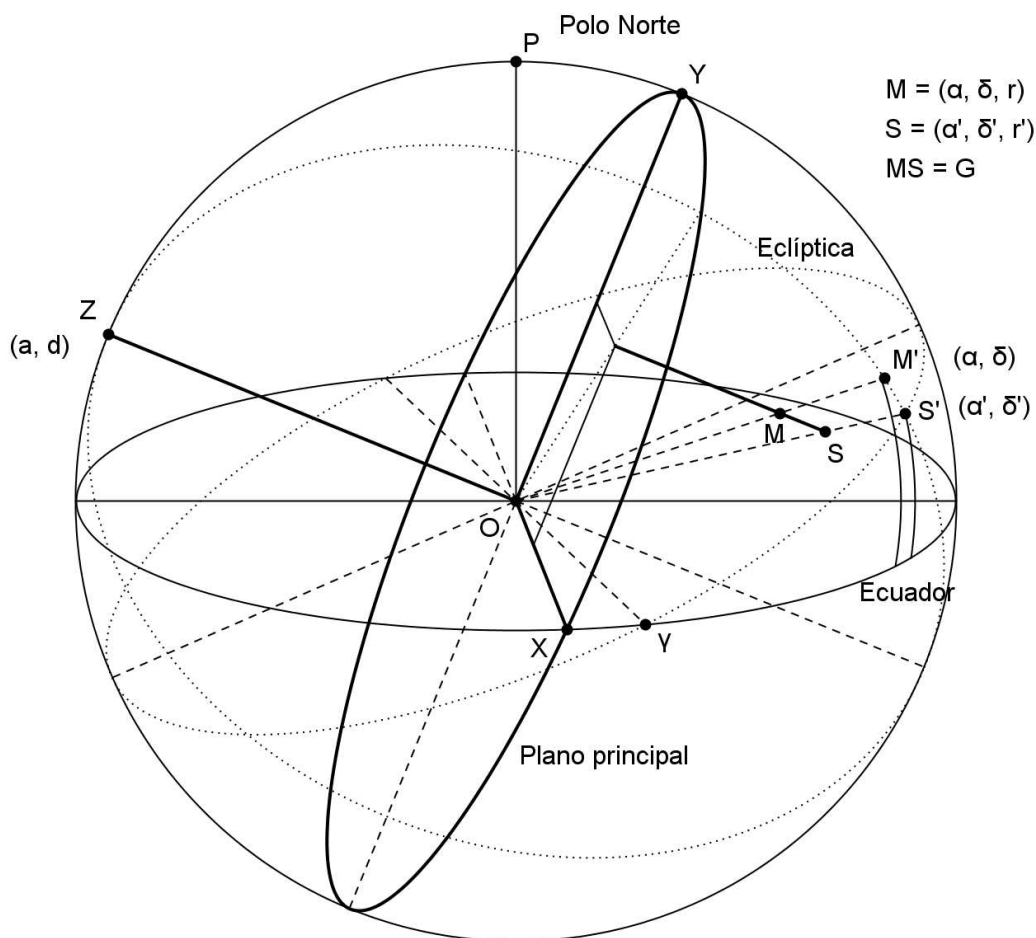


Figura 8. Conjunto ejes de referencia

Sean M' y S' las posiciones de la Luna y del Sol en la esfera celeste. Entonces si (x, y, z) son las coordenadas de la Luna en este sistema, resulta

$$\begin{aligned} x &= r \cos M'X \\ y &= r \cos M'Y \\ z &= r \cos M'Z \end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas de la trigonometría esférica al triángulo M'PX (con PX = 90°), tenemos, Fig. 9:

$$\begin{aligned} \cos M'X &= \cos M'P \cos PX + \operatorname{sen} M'P \operatorname{sen} PX \cos P = \\ &= \operatorname{sen} (90 - \delta) \cos (90 + a - \alpha) = \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - a) \end{aligned}$$

en el triángulo M'PY

$$\begin{aligned} \cos M'Y &= \cos M'P \cos PY + \operatorname{sen} M'P \operatorname{sen} PY \cos P = \\ &= \cos (90 - \delta) \cos d + \operatorname{sen} (90 - \delta) \operatorname{sen} d \cos ((a - \alpha) - 180) = \\ &= \operatorname{sen} \delta \cos d - \cos \delta \operatorname{sen} d \cos (\alpha - a) \end{aligned}$$

en el triángulo M'PZ

$$\begin{aligned} \cos M'Z &= \cos M'P \cos PZ + \operatorname{sen} M'P \operatorname{sen} PZ \cos P = \\ &= \cos (90 - \delta) \cos (90 - d) + \operatorname{sen} (90 - \delta) \operatorname{sen} (90 - d) \cos (a - \alpha) = \\ &= \delta \operatorname{sen} d + \cos \delta \cos d \cos (\alpha - a) \end{aligned}$$

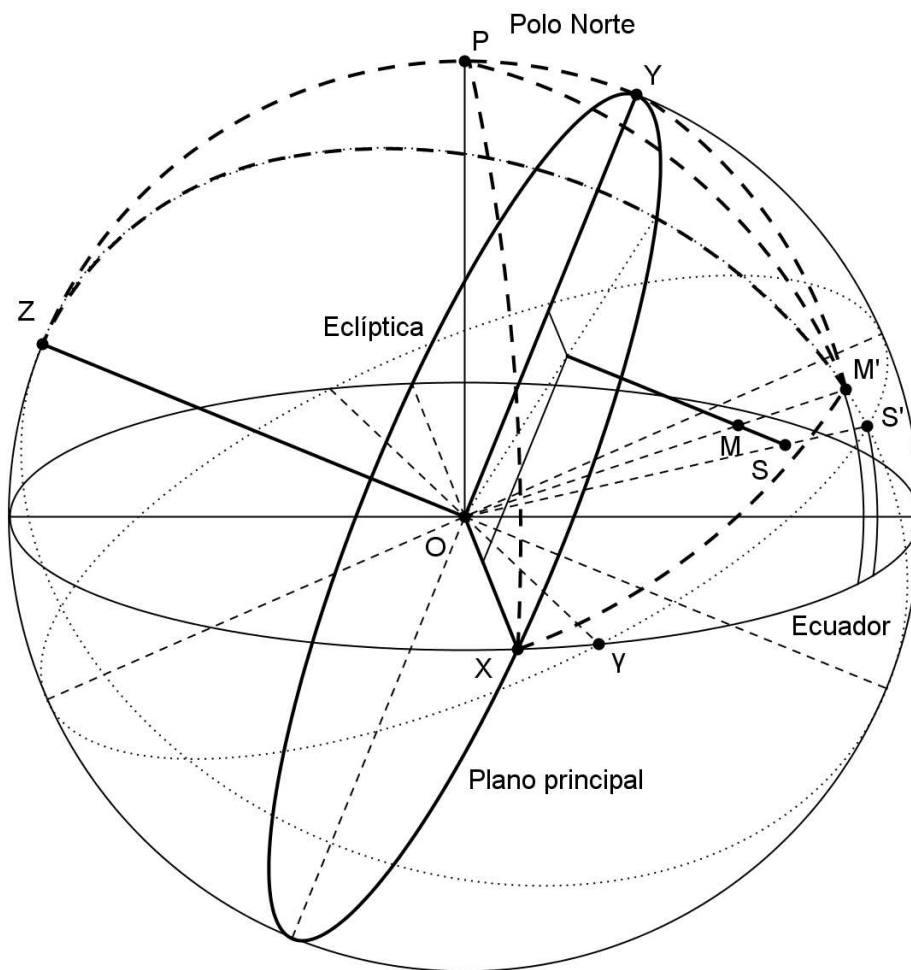


Figura 9. Resolución triángulos esféricos M'PX, M'PY, M'PZ (a)

y finalmente

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - a) \\y &= r (\operatorname{sen} \delta \cos d - \cos \delta \operatorname{sen} d \cos (\alpha - a)) \\z &= r (\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} d + \cos \delta \cos d \cos (\alpha - a))\end{aligned}\quad (6)$$

En este sistema las coordenadas (x, y) del Sol son las mismas que las de la Luna. La tercera coordenada será $(z + G)$.

Sean ahora

(ζ, η, ζ)	coordenadas ortogonales del punto de observación (en este sistema)
φ	latitud del observador
φ'	latitud geocéntrica
ρ	radio del elipsoide en la latitud del observador
μ	tiempo sidéreo de la posición del observador

Si (x, y) son las coordenadas de la proyección de la Luna (eje de sombra) sobre el plano principal y (ζ, η) las de la proyección de la posición del observador, la distancia entre ambos puntos es:

$$\Delta^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2$$

o bien, en forma paramétrica,

$$\begin{aligned}\Delta \operatorname{sen} Q &= x - \zeta \\ \Delta \cos Q &= y - \eta\end{aligned}$$

Si O es el cenit geocéntrico del observador, a partir del triángulo POX, Fig. 10

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos OX = \rho (\cos OP \cos PX + \operatorname{sen} OP \operatorname{sen} PX \cos P) = \\ &= \rho \operatorname{sen} (90 - \varphi') \cos (a + 90 - \mu) = \rho \operatorname{sen} (90 - \varphi') \cos (90 - (\mu - a)) = \\ &= \rho \cos \varphi' \operatorname{sen} (\mu - a)\end{aligned}$$

siendo $OP = 90^\circ - \varphi'$, $PX = 90^\circ$. El ángulo P es la diferencia entre las ascensiones rectas de O y de X.

A partir del triángulo POY

$$\begin{aligned}\eta &= \rho \cos OY = \rho (\cos OP \cos PY + \operatorname{sen} OP \operatorname{sen} PY \cos P) = \\ &= \rho (\cos (90 - \varphi') \cos d + \operatorname{sen} (90 - \varphi') \operatorname{sen} d \cos (360 - \mu + a - 180)) = \\ &= \rho (\operatorname{sen} \varphi' \cos d + \cos \varphi' \operatorname{sen} d \cos (180 - (\mu - a))) = \\ &= \rho (\operatorname{sen} \varphi' \cos d - \cos \varphi' \operatorname{sen} d \cos (\mu - a))\end{aligned}$$

y a partir del triángulo POZ

$$\begin{aligned}\zeta &= \rho \cos OZ = \rho (\cos OP \cos PZ + \text{sen } OP \text{ sen } PZ \cos P) = \\ &= \rho (\cos (90 - \varphi') \cos (90 - d) + \text{sen } (90 - \varphi') \text{ sen } (90 - d) \cos (\mu - a)) = \\ &= \rho (\text{sen } \varphi' \text{ sen } d + \cos \varphi' \cos d \cos (\mu - a))\end{aligned}$$

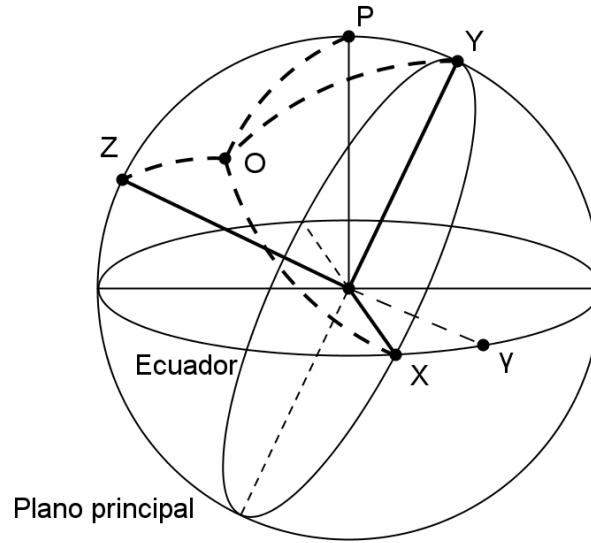


Figura 10. Resolución triángulos esféricos (b)

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \varphi' \text{ sen } (\mu - a) \\ \eta &= \rho (\text{sen } \varphi' \cos d - \cos \varphi' \text{ sen } d \cos (\mu - a)) \\ \zeta &= \rho (\text{sen } \varphi' \text{ sen } d + \cos \varphi' \cos d \cos (\mu - a))\end{aligned}\tag{7}$$

Si definimos A y B según

$$\begin{aligned}A \text{ sen } B &= \rho \text{ sen } \varphi' \\ A \cos B &= \rho \cos \varphi' \cos (\mu - a)\end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \varphi' \text{ sen } (\mu - a) \\ \eta &= A \text{ sen } (B - d) \\ \zeta &= A \cos (B - d)\end{aligned}$$

siendo $(\mu - a)$ el ángulo horario del punto Z. Si para un instante dado μ_1 es el ángulo horario de Z respecto a Greenwich y ω la longitud oeste del lugar de observación, entonces el ángulo horario del punto Z para el observador es (Fig. 11)

$$\theta = \mu - a = \mu_1 - \omega$$

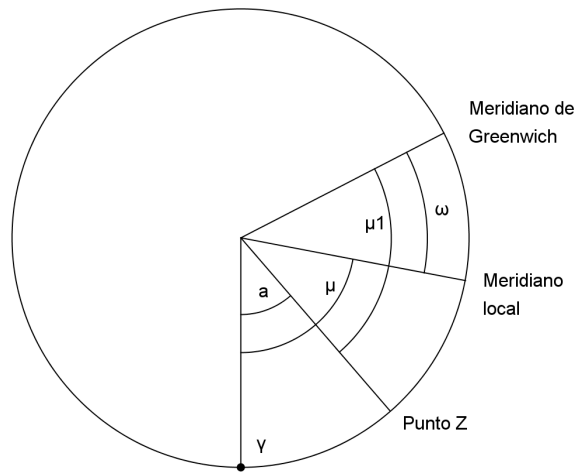


Figura 11. Angulos horarios

3.3 Radios de los conos de sombra y de penumbra

En la Figura 12 se representan los conos de sombra y de penumbra durante un eclipse de Sol.

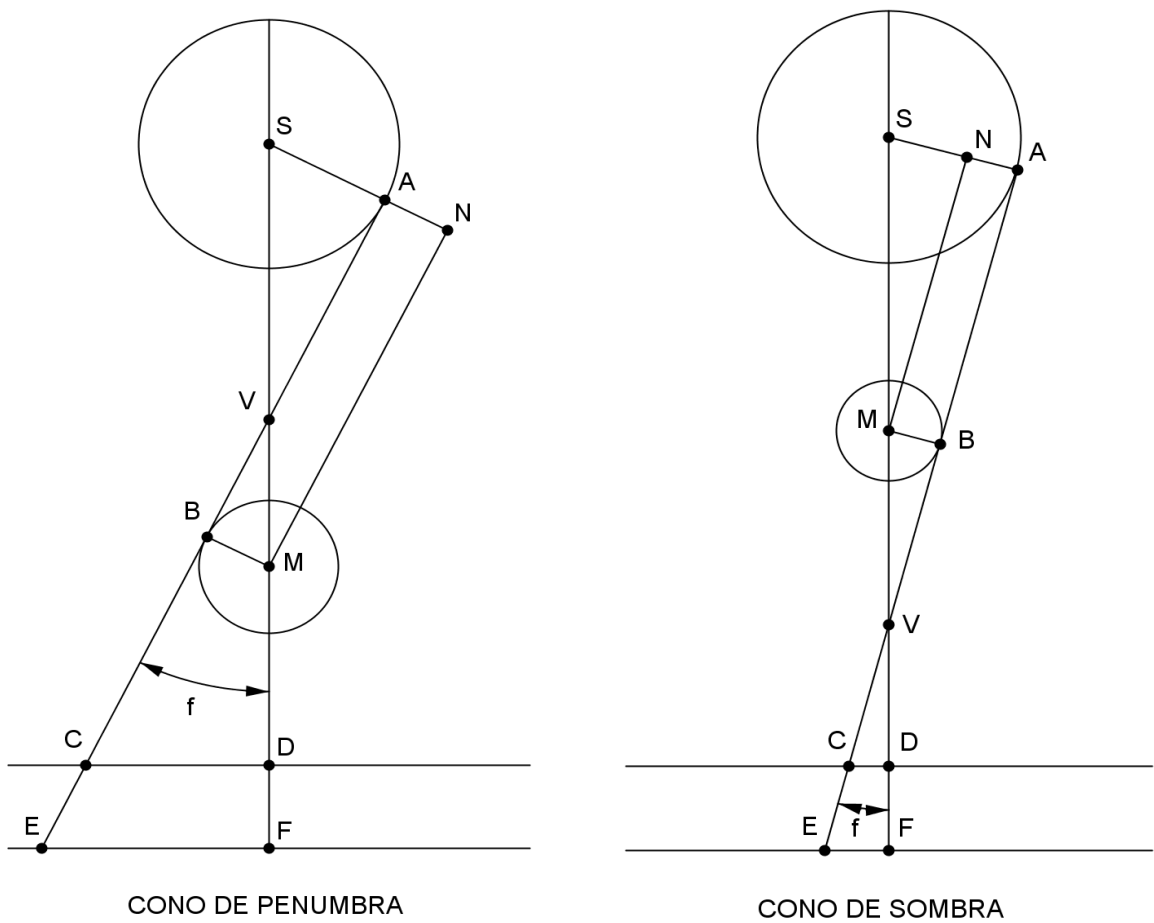


Figura 12. Conos de penumbra y de sombra

Sean

H	semidiámetro aparente del Sol a su distancia media
k	razón entre los radios de la Luna y del Ecuador terrestre
f	ángulo del cono EVF
$c = VF$	distancia del vértice del cono al plano principal
$\zeta = DF$	la distancia entre la posición del observador y el plano principal
$\ell = EF$	radio de la sombra en el plano principal
$L = CD$	radio de la sombra en el plano $z = \zeta$

Si π_0 es el paralaje medio del Sol y tomamos como unidad de distancia la unidad astronómica (distancia media Tierra-Sol), tenemos

$$\begin{aligned} \text{sen } \pi_0 &= \text{radio de la Tierra} \\ \text{sen } H &= SA = \text{radio del Sol} \\ k \text{ sen } \pi_0 &= MB = \text{radio de la Luna} \end{aligned}$$

Para el cono de penumbra, recordando que $SM = r'g = G$ (2), se deduce de la Figura 12 que

$$\text{sen } f = SN / SM = (SA + AN) / SM = (\text{sen } H + k \text{ sen } \pi_0) / r'g$$

y para el cono de sombra

$$\text{sen } f = SN / SM = (SA - AN) / SM = (\text{sen } H - k \text{ sen } \pi_0) / r'g$$

o sea

$$\text{sen } f = (\text{sen } H \pm k \text{ sen } \pi_0) / r'g \quad (8)$$

Si tomamos ahora como unidad de distancia el radio terrestre, como $\text{sen } f = MB / VM$,

$$VM = k / \text{sen } f$$

de donde

$$c = VF = MF \pm VM = z \pm k / \text{sen } f$$

$$\ell = VF \tan f = z \tan f \pm k \sec f \quad (9)$$

$$L = (c - \zeta) \tan f = \ell - \zeta \tan f = \ell - i \zeta \quad (10)$$

llamando $i = \tan f$.

Para el cono de penumbra, $c - \zeta$ es siempre positivo, por lo tanto L es positivo. Para el cono de sombra, $c - \zeta$ es negativo cuando el vértice del cono está por debajo del plano del observador. En este caso se produce eclipse total y L es negativo. En caso contrario, el eclipse es anular.

Comenzará o terminará un eclipse en un punto cuando su distancia al eje de sombra sea igual al radio del cono en el plano paralelo al fundamental que contiene el punto. Si Δ es esta distancia,

$$\Delta = L$$

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (\ell - i \zeta)^2$$

o en forma paramétrica

$$\begin{aligned} x - \xi &= (\ell - i \zeta) \operatorname{sen} Q \\ y - \eta &= (\ell - i \zeta) \operatorname{cos} Q \end{aligned}$$

Las cantidades a , d , x , y , i , ℓ se pueden calcular mediante las fórmulas (4), (5), (6), (8), (9) respectivamente. Son independientes del lugar de observación y es conveniente calcularlas unas horas antes y unas horas después de la conjunción en longitud del Sol y de la Luna. A estos elementos se les conoce como Elementos Besselianos del eclipse y pueden encontrarse ya calculados en diferentes publicaciones. Ver ref [3], [4].

En resumen, las fórmulas necesarias para el cálculo de los Elementos Besselianos son:

$$a = \alpha' - \frac{b}{1-b} \cos \delta \sec \delta' (\alpha - \alpha')$$

$$d = \delta' - \frac{b}{1-b} (\delta - \delta')$$

$$x = r \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - a)$$

$$y = r (\operatorname{sen} \delta \cos d - \cos \delta \operatorname{sen} d \cos (\alpha - a))$$

$$\operatorname{sen} f = (\operatorname{sen} H \pm k \operatorname{sen} \pi_0) / r'g$$

$$\ell = VF \tan f = z \tan f \pm k \sec f$$

4 Previsión general de eclipses solares

En este capítulo, a partir de los Elementos Besselianos ya calculados, establecemos las zonas en las cuales un eclipse de Sol es visible de forma parcial o total, determinando los límites de cada zona.

En las Fig. 13, 14, 15 se puede ver una representación de todas las curvas concernientes a un eclipse dado, cuya explicación se dará a continuación.

4.1 Intersección del cono de sombra con la superficie terrestre

La intersección del cono de la sombra con la superficie de la Tierra es la curva en la superficie de la Tierra que contiene a todos los puntos desde los cuales pueden verse los limbos del Sol y de la Luna en contacto.

La distancia de tales puntos al eje de sombra es igual al radio del cono en el plano paralelo al fundamental que contiene al observador. Según vimos en el apartado 3.3.

$$\begin{aligned}(\ell - i \zeta) \operatorname{sen} Q &= x - \xi \\(\ell - i \zeta) \operatorname{cos} Q &= y - \eta\end{aligned}\quad (11)$$

Disponemos de estas ecuaciones, además de las (7), y teniendo en cuenta que $\theta = \mu - a = \mu_1 - \omega$

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \operatorname{cos} \varphi' \operatorname{sen} \theta \\ \eta &= \rho \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{cos} d - \rho \operatorname{cos} \varphi' \operatorname{sen} d \operatorname{cos} \theta \\ \zeta &= \rho \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} d + \rho \operatorname{cos} \varphi' \operatorname{cos} d \operatorname{cos} \theta\end{aligned}\quad (12)$$

Tenemos cinco ecuaciones y seis variables: ξ , η , ζ , φ' , θ y Q . Tomando una de las variables como parámetro, se pueden calcular todas las demás y observar su variación en función de la variable tomada como parámetro. Tomamos Q como parámetro y lo hacemos variar entre 0° y 360° .

Estas ecuaciones incluyen la cantidad ρ que depende de φ' , cuyo valor desconocemos. En un primer momento consideramos $\rho = 1$ y obtenemos una primera aproximación de φ' . Esta nos permite obtener el valor de ρ y proceder de forma iterativa.

Si φ es la latitud geográfica, tenemos

$$\rho \operatorname{cos} \varphi' = \frac{\operatorname{cos} \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\rho \operatorname{sen} \varphi' = \frac{(1-e^2) \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\tan \varphi' = (1-e^2) \tan \varphi$$

donde se ha tomado como unidad el radio ecuatorial terrestre.

Tomamos una nueva variable φ_1 tal que

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \sqrt{1-\cos^2 \varphi_1} = \frac{\operatorname{sen} \varphi \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

de forma que

$$\cos \varphi_1 = \rho \cos \varphi'$$

$$\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} \varphi_1 = \rho \operatorname{sen} \varphi'$$

$$\xi = \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \theta$$

$$\eta = \operatorname{sen} \varphi_1 \cos d \sqrt{1-e^2} - \cos \varphi_1 \operatorname{sen} d \cos \theta$$

$$\zeta = \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} d \sqrt{1-e^2} + \cos \varphi_1 \cos d \cos \theta$$

Introducimos ahora las variables ρ_1, ρ_2, d_1, d_2 y sustituimos

$$\rho_1 \operatorname{sen} d_1 = \operatorname{sen} d$$

$$\rho_2 \cos d_2 = \cos d$$

$$\rho_1 \cos d_1 = \sqrt{1-e^2} \cos d$$

$$\rho_2 \operatorname{sen} d_2 = \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} d$$

$$\xi = \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \theta$$

$$\eta = \rho_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos d_1 - \rho_1 \cos \varphi_1 \operatorname{sen} d_1 \cos \theta$$

$$\zeta = \rho_2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} d_2 + \rho_2 \cos \varphi_1 \cos d_2 \cos \theta$$

Sea $\eta_1 = \eta / \rho_1$ y sea ζ_1 tal que

$$\xi^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1$$

o lo que es igual

$$\xi = \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \theta$$

$$\eta_1 = \operatorname{sen} \varphi_1 \cos d_1 - \cos \varphi_1 \operatorname{sen} d_1 \cos \theta$$

$$\zeta_1 = \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} d_2 + \cos \varphi_1 \cos d_2 \cos \theta$$

Multiplicando la tercera expresión por $\cos d_1$ y la segunda por $\sin d_1$ y restando y multiplicando la tercera por $\sin d_1$ y la segunda por $\cos d_1$ y sumando resultan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \cos \theta &= -\eta_1 \sin d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ \sin \varphi_1 &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \sin d_1 \end{aligned} \quad (13)$$

El problema tiene ahora la forma

$$\begin{aligned} (\ell - i \zeta_1) \sin Q &= x - \zeta \\ (\ell - i \zeta_1) \cos Q &= y - \eta \\ \zeta^2 + \eta^2 + \zeta_1^2 &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

que para cada valor de Q (entre 0 y 360°) nos da los valores de ζ , η , ζ_1 .

A continuación por medio de

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \sin \theta &= \zeta \\ \cos \varphi_1 \cos \theta &= -\eta_1 \sin d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ \sin \varphi_1 &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \sin d_1 \end{aligned} \quad (15)$$

se determina φ_1 y θ . La latitud y la longitud correspondiente a cada punto resulta de

$$\tan \varphi = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{1-e^2}} \quad \omega = \mu_1 - \theta$$

Si ℓ toma el valor l_1 obtenemos la curva límite de la proyección de la penumbra sobre la superficie de la Tierra. Si toma el valor l_2 tenemos la correspondiente a la umbra o zona desde la cual se divide el eclipse total en un instante determinado. Estas curvas se van desplazando y modificando sobre la superficie de la Tierra a medida que transcurre el tiempo.

Procedemos en primer lugar a resolver (14). De la primera y la segunda

$$\begin{aligned} \zeta &= x - \ell \sin Q + i \zeta_1 \sin Q \\ \eta_1 &= y/\rho_1 - \ell \cos Q/\rho_1 + i \zeta_1 \cos Q/\rho_1 \end{aligned}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned} a &= x - \ell \sin Q = \sin \beta \sin \gamma \\ b &= y/\rho_1 - \ell \cos Q/\rho_1 = \sin \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (15a)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \zeta &= \sin \beta \sin \gamma + i \zeta_1 \sin Q \\ \eta_1 &= \sin \beta \cos \gamma + i \zeta_1 \cos Q \end{aligned} \quad (16)$$

que sustituimos en la tercera

$$\zeta_I^2 = 1 - \zeta^2 - \eta^2 = \cos^2 \beta - 2 i \zeta_I \sin \beta \cos (Q - \gamma) - i^2 \zeta_I^2$$

que resuelta, y despreciando los términos en i^2 , da

$$\zeta_I = \pm [\cos \beta - i \sin \beta \cos (Q - \gamma)] \quad (16a)$$

Para eliminar la ambigüedad del signo vemos que una generatriz del cono corta la superficie de la Tierra en dos puntos, uno por encima y otro por debajo del plano fundamental. Pero si observamos el eclipse lo hacemos por encima del plano fundamental, con lo cual habremos de tomar el valor positivo.

β y γ vienen determinadas por (15a), a partir de (16a) obtenemos ζ_I y (16) nos da ζ y η .

Las evolventes de estas curvas dan lugar a las curvas límite Norte y Sur.

4.2 Curva de máximo en el horizonte

Es la curva que une los puntos desde los cuales se observa el máximo del eclipse con el Sol en el horizonte, a su salida o a su puesta.

Cuando un punto de la Tierra de coordenadas (ζ , η , ζ) no se encuentra en la superficie del cono, sino a una distancia Δ de su eje, tenemos las condiciones

$$\begin{aligned} \Delta \sin Q &= x - \zeta \\ \Delta \cos Q &= y - \eta \end{aligned} \quad (17)$$

La fracción del diámetro solar ocultada por la Luna depende de la distancia en que el lugar de observación se encuentre inmerso en el cono de sombra, o sea de la distancia $L - \Delta$, siendo L el radio de la sombra en un plano paralelo al principal y que contiene el punto de observación. Para el máximo del eclipse se cumplirá

$$dL/dT - d\Delta/dT = 0$$

Derivando a partir de (17)

$$\begin{aligned} d\Delta/dT \sin Q + \Delta \cos Q dQ/dT &= x' - \zeta' \\ d\Delta/dT \cos Q - \Delta \sin Q dQ/dT &= y' - \eta' \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por $\sin Q$ y la segunda por $\cos Q$ y sumando, queda

$$d\Delta/dT = (x' - \zeta') \sin Q + (y' - \eta') \cos Q$$

y teniendo en cuenta que $L = \ell - i \zeta$ (10)

$$dL/dT = \ell' - i \zeta'$$

de forma que queda una expresión que denominamos P'

$$P' \equiv (x' - \zeta') \operatorname{sen} Q + (y' - \eta') \operatorname{cos} Q - (\ell' - i \zeta') = 0 \quad (18)$$

Derivando a partir de (12) encontramos ζ' , η' , ζ' .

$$\zeta' = \rho \operatorname{cos} \varphi' \operatorname{cos} \theta \, d\theta/dT$$

Como $\theta = \mu_1 - \omega$, resulta $\theta' = \mu_1'$ y poniendo

$$\mu' = \mu_1' \operatorname{sen} I'' \quad d' = dd/dT \operatorname{sen} I''$$

tenemos a partir de (13) y (14)

$$\begin{aligned} \zeta' &= \mu' \rho \operatorname{cos} \varphi' \operatorname{cos} \theta = \mu' (-\eta \operatorname{sen} d + \zeta \operatorname{cos} d) = \\ &= \mu' (-y \operatorname{sen} d + \zeta \operatorname{cos} d + (\ell - i \zeta) \operatorname{sen} d \operatorname{cos} Q) \end{aligned}$$

$$\eta' = \mu' \zeta \operatorname{sen} d - d' \zeta = \mu' (x \operatorname{sen} d - (\ell - i \zeta) \operatorname{sen} d \operatorname{sen} Q) - d' \zeta$$

$$\begin{aligned} \zeta' &= \mu' \zeta \operatorname{cos} d + d' \eta = \\ &= \mu' (-x \operatorname{cos} d + (\ell - i \zeta) \operatorname{cos} d \operatorname{sen} Q) + d' (y - (\ell - i \zeta) \operatorname{cos} Q) \end{aligned}$$

Substituyendo en (18) y despreciando los términos en i^2 y en id' , queda

$$P' = a' - b' \operatorname{cos} Q + c' \operatorname{sen} Q - \zeta (\mu' \operatorname{cos} d \operatorname{sen} Q - d' \operatorname{cos} Q)$$

siendo

$$\begin{aligned} a' &= -\ell' + \mu' i x \operatorname{cos} d \\ b' &= -y' + \mu' x \operatorname{sen} d \\ c' &= x' + \mu' y \operatorname{sen} d + \mu' i \ell \operatorname{cos} d \end{aligned}$$

Haciendo ahora las substituciones

$$\begin{aligned} e \operatorname{sen} E &= b' & f \operatorname{sen} F &= d' \\ e \operatorname{cos} E &= c' & f \operatorname{cos} F &= \mu' \operatorname{cos} d \end{aligned}$$

queda

$$P' = a' + e \operatorname{sen} (Q - E) - \zeta f \operatorname{sen} (Q - F) \quad (19)$$

La condición que caracteriza el máximo del eclipse en un momento dado es $P' = 0$. Para el caso en que el Sol se halla en el horizonte, es suficiente tomar $\zeta = 0$ y, despreciando la cantidad a' , por ser muy pequeña, queda

$$\operatorname{sen} (Q - E) = 0$$

que da dos valores

$$Q = E \qquad Q = 180^\circ + E$$

Entonces, para un momento determinado, las condiciones (17) quedan como

$$\begin{aligned} \pm \Delta \operatorname{sen} Q &= x - \zeta \\ \pm \Delta \operatorname{cos} Q &= y - \eta \end{aligned}$$

que junto con la condición

$$\zeta^2 + \eta^2 = 1$$

determinan los puntos requeridos de la curva.

4.3 Curvas límite Norte y Sur

Las curvas límite Norte y Sur contienen los puntos de la superficie terrestre situados más al Norte y más al Sur desde los cuales puede observarse el eclipse. Desde cada uno de estos puntos los discos del Sol y de la Luna parece que se tocan en un solo punto. La Luna pasa totalmente al Norte o totalmente al Sur del Sol. Estas curvas las podemos definir también como las evolventes de la familia de curvas que son las intersecciones del cono de sombra con la superficie de la Tierra en los instantes sucesivos del eclipse. La solución de este problema se deriva de la consideración que en este caso el simple contacto es el máximo del eclipse. En este caso $P' = 0$ y de (19)

$$a' + e \operatorname{sen} (Q - E) = \zeta f \operatorname{sen}(Q - F) \qquad (20)$$

El problema se resuelve por aproximaciones sucesivas para obtener valores de Q y ζ que satisfagan la ecuación (20).

Para acotar el valor de Q en primer lugar se pueden despreciar a' y F , por ser valores muy pequeños, quedando

$$e \operatorname{sen} (Q - E) = \zeta f \operatorname{sen} Q \qquad (21)$$

por otra parte los valores extremos de ζ son 0 y 1. Si $\zeta = 0$

$$Q = E \qquad Q = 180^\circ + E$$

Si $\zeta = 1$

$$e \operatorname{sen} (Q - E) = f \operatorname{sen} Q$$

ecuación que se puede escribir como

$$e \operatorname{sen}\left(Q - \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\right) = f \operatorname{sen}\left(Q + \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\right)$$

que da lugar a

$$\tan\left(Q - \frac{E}{2}\right) = \frac{e+f}{e-f} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

Definiendo Ψ como

$$\tan \Psi = \tan\left(Q - \frac{E}{2}\right) = \frac{e+f}{e-f} \tan \frac{E}{2}$$

obtenemos como límites

$$Q = E/2 + \Psi \qquad Q = E/2 + \Psi + 180^\circ$$

Por tanto asumiremos que Q se encuentra o bien en el intervalo $[E, E/2 + \Psi]$ o bien en el intervalo $[E + 180^\circ, E/2 + \Psi + 180^\circ]$.

Para determinar esta curva utilizamos el siguiente sistema iterativo: asumimos un valor de Q dentro de los intervalos establecidos y obtenemos un valor de ζ a partir de (21). De

$$\begin{aligned} (\ell - i \zeta) \operatorname{sen} Q &= x - \zeta \\ (\ell - i \zeta) \operatorname{cos} Q &= y - \eta \end{aligned} \tag{22}$$

obtenemos ζ y η . Suponiendo $\rho = 1$, de

$$\zeta^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

obtenemos un nuevo valor de ζ que substituido en

$$\tan\left(Q - \frac{E}{2}\right) = \frac{e+f\zeta}{e-f\zeta} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

nos da un nuevo valor de Q .

4.4 Curvas de contacto en el horizonte

Estas curvas están formadas por aquellos puntos de la superficie de la Tierra para los cuales el eclipse comienza o termina cuando el Sol se encuentra en el horizonte. Será suficiente determinar estos límites con la condición que el punto Z se halle en el horizonte. Esto da $\operatorname{cos} Z = 0$ o $\zeta_1 = 0$ y en consecuencia

$$\zeta^2 + \eta_1^2 = 1$$

Las ecuaciones (11) se reducen a

$$\begin{aligned}\ell \operatorname{sen} Q &= x - \xi \\ \ell \operatorname{cos} Q &= y - \eta\end{aligned}$$

Hacemos ahora los cambios

$$\begin{aligned}m \operatorname{sen} M &= x; & p \operatorname{sen} \gamma &= \xi \\ m \operatorname{cos} M &= y; & p \operatorname{cos} \gamma &= \eta\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\ell \operatorname{sen} Q &= m \operatorname{sen} M - p \operatorname{sen} \gamma \\ \ell \operatorname{cos} Q &= m \operatorname{cos} M - p \operatorname{cos} \gamma\end{aligned}\quad (24)$$

de donde, sumando sus cuadrados

$$\begin{aligned}\ell^2 &= m^2 + p^2 - 2 m p \operatorname{cos} (M - \gamma) \\ 1 - \operatorname{cos} (M - \gamma) &= \frac{l^2 - (m - p)^2}{2 m p} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{M - \gamma}{2}\end{aligned}\quad (25)$$

Si ponemos $\lambda = M - \gamma$ o $\lambda = \gamma - M$, tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{\lambda}{2} = \pm \sqrt{\frac{(l + m - p)(l - m + p)}{4 m p}}\quad (26)$$

donde λ se debe tomar siempre inferior a 90° , pero se debe usar el doble signo para obtener los dos puntos de la superficie de la Tierra que satisfacen las condiciones en un instante dado.

En (25) conocemos m , M y ℓ y desconocemos p . Pero de

$$\begin{aligned}\xi^2 + \eta^2 &= l^2 \\ p \operatorname{sen} \gamma &= \xi \\ p \operatorname{cos} \gamma &= \eta\end{aligned}$$

deducimos que $p = l$. Usando este valor en (25), obtenemos un valor γ' que es un primer valor aproximado de γ . Para mejorarlo procedemos como sigue: poniendo $\xi = \operatorname{sen} \gamma'$ de

$$\xi^2 + \eta_1^2 = l^2$$

resulta

$$\eta_1 = \operatorname{cos} \gamma'$$

y siendo $\eta = \rho_1 \eta_1$

$$\begin{aligned} p \operatorname{sen} \gamma &= \zeta = \operatorname{sen} \gamma' \\ p \operatorname{cos} \gamma &= \eta = \rho_1 \operatorname{cos} \gamma' \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tan \gamma = 1/\rho_1 \tan \gamma'$$

$$p = \operatorname{sen} \gamma' / \operatorname{sen} \gamma = \rho_1 \operatorname{cos} \gamma' / \operatorname{cos} \gamma$$

El nuevo valor de p se substituye nuevamente en (25) para obtener una γ que en (27) nos da un valor de γ' que puede considerarse definitivo.

$$\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{sen} \gamma' \\ \eta_1 &= \operatorname{cos} \gamma' \\ \zeta_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{sen} \theta &= \operatorname{sen} \gamma' \\ \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \theta &= -\operatorname{cos} \gamma' \operatorname{sen} d_1 \\ \operatorname{sen} \varphi_1 &= \operatorname{cos} \gamma' \operatorname{cos} d_1 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\tan \varphi = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{1-e^2}} \quad \omega = \mu_1 - \theta$$

El Sol está saliendo si el ángulo θ (ángulo horario del punto Z) se halla entre 180° y 360° y se está poniendo si se halla entre 0° y 180° .

Para determinar si el eclipse está empezando o acabando recurrimos al signo de P' (19). Asumiendo un valor de a' despreciable y $\zeta = 0$ en esta expresión, el eclipse está empezando o acabando en función de que el signo de $\operatorname{sen} (Q - E)$ sea negativo o positivo, respectivamente.

A partir de (24) podemos escribir

$$\ell \operatorname{sen} (Q - E) = m \operatorname{sen} (M - E) - p \operatorname{sen} (\gamma - E)$$

En la condición de principio o final del eclipse tenemos

$$\begin{aligned} m \operatorname{sen} (M - E) < p \operatorname{sen} (\gamma - E) & \quad \text{el eclipse está comenzando} \\ m \operatorname{sen} (M - E) > p \operatorname{sen} (\gamma - E) & \quad \text{el eclipse está terminando} \end{aligned}$$

4.5 Límites temporales del eclipse

Para aplicar el método precedente de determinación de las curvas de contacto en el orto y en el ocaso, es necesario conocer los extremos del intervalo temporal en que la solución es posible. Cuando la superficie del cono sea tangente al elipsoide, las

dos soluciones dadas por (26) se reducirán a una, lo que ocurre cuando $\lambda = 0$, es decir, cuando $M = \gamma$. Pero si $\lambda = 0$, el numerador del segundo miembro también ha de anularse, con lo que tenemos dos posibilidades:

$$\begin{aligned}\ell + m - p &= 0 \\ \ell - m + p &= 0\end{aligned}$$

Hay dos tangencias exteriores del cono con el elipsoide: la del inicio del eclipse, primer punto de la superficie desde el que se observa contacto, y la del final, último punto de la superficie desde el que se observa. En ambos casos el eje del cono se encuentra fuera de la Tierra, por lo que

$$m = \sqrt{x^2 + y^2} = p + l$$

que es el valor más alto de las dos condiciones anteriores. Tenemos por lo tanto, a partir de (23), para el primer y último contacto

$$\begin{aligned}(p + \ell) \operatorname{sen} M &= x \\ (p + \ell) \operatorname{cos} M &= y\end{aligned}\tag{28}$$

Sea T el instante en que estas condiciones se satisfacen. Si T_0 es un instante intermedio,

$$\begin{aligned}T &= T_0 + \tau \\ x &= x_0 + x' \tau \\ y &= y_0 + y' \tau\end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned}m_0 \operatorname{sen} M_0 &= x_0; & n \operatorname{sen} N &= x' \\ m_0 \operatorname{cos} M_0 &= y_0; & n \operatorname{cos} N &= y'\end{aligned}$$

las condiciones (28) se escriben como

$$\begin{aligned}(p + \ell) \operatorname{sen} M &= m_0 \operatorname{sen} M_0 + \tau n \operatorname{sen} N \\ (p + \ell) \operatorname{cos} M &= m_0 \operatorname{cos} M_0 + \tau n \operatorname{cos} N\end{aligned}$$

Multiplicando la primera expresión por $\operatorname{cos} N$, la segunda por $\operatorname{sen} N$ y restando y multiplicando la primera por $\operatorname{sen} N$, la segunda por $\operatorname{cos} N$ y sumando, queda

$$\begin{aligned}(p + \ell) \operatorname{sen} (M - N) &= m_0 \operatorname{sen} (M_0 - N) \\ (p + \ell) \operatorname{cos} (M - N) &= m_0 \operatorname{cos} (M_0 - N) + \tau n\end{aligned}$$

Definimos ahora $\Psi = M - N$

$$\operatorname{sen} \Psi = \frac{m_0 \operatorname{sen} (M_0 - N)}{p + l}$$

$$\tau = \frac{p+l}{n} \cos \Psi - \frac{m_0}{n} \cos(M_0 - N)$$

$$T = T_0 + \tau$$

En estas expresiones $\cos \Psi$ puede tener signo positivo o negativo. El primero corresponde al inicio del eclipse y el segundo al final.

4.6 Curva de eclipse central

La curva de eclipse central contiene todos aquellos puntos de la superficie de la Tierra desde los que se observa el centro del eclipse anular o total y es la intersección del eje del cono de sombra con la superficie de la Tierra. Es el mismo problema tratado en el apartado correspondiente a las curvas límite Norte y Sur, teniendo en cuenta que ahora la intersección del cono con la superficie se reduce a un punto. Esta condición se expresa como (22)

$$\ell - i \zeta = 0$$

o bien

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta \end{aligned}$$

Las ecuaciones (14) y (16) quedan como

$$\begin{aligned} \xi &= x = \text{sen } \beta \text{ sen } \gamma \\ \eta_1 &= y_1 = y/\rho_1 = \text{sen } \beta \text{ cos } \gamma \end{aligned}$$

Además

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta_1^2}$$

Estas ecuaciones, junto con las ya definidas en apartados anteriores

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \text{ sen } \theta &= \xi \\ \cos \varphi_1 \cos \theta &= -\eta_1 \text{ sen } d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ \text{sen } \varphi_1 &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \text{ sen } d_1 \end{aligned}$$

$$\tan \varphi = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{1 - e^2}} \quad \omega = \mu_1 - \theta$$

determinan φ y θ .

4.7 Límites Norte y Sur del eclipse total o anular

Estas curvas unen los puntos límite sobre la superficie de la Tierra desde los cuales puede verse el eclipse total o anular.

Las dos curvas límite del eclipse son muy próximas a la curva del eclipse central. Para determinarlas se utilizará el procedimiento utilizado en el apartado 4.3 tomando ahora para ℓ el valor l_2 en lugar de l_1 . Si l_2 es positivo, el eclipse es anular y si l_2 es negativo, el eclipse es total.

El procedimiento da dos valores de Q , que difieren en 180° , uno para cada una de las dos curvas.

5 Aplicación al eclipse del 12 de Agosto del 2026

5.1 Datos utilizados

Se han publicado tablas con los valores de los Elementos Besselianos para cada eclipse (ref [3], [4]). Estas tablas reportan sus valores a una hora determinada, t_0 , que es el tiempo de referencia, (cercana al momento central del episodio) y, por medio de una formulación adecuada, estos valores se extienden a un periodo de varias horas antes y después de la hora de referencia.

Los valores publicados son

t_0
 x_0, x_1, x_2, x_3
 y_0, y_1, y_2, y_3
 d_0, d_1, d_2
 m_0, m_1
 l_{10}, l_{11}, l_{12}
 l_{20}, l_{21}, l_{22}
 $\tan f_1$
 $\tan f_2$

Si t es la diferencia entre el instante de referencia t_0 y la hora buscada, t_1 , los valores de los Elementos Besselianos se calculan según las fórmulas polinómicas:

$$\begin{aligned}t &= t_0 - t_1 \\x &= x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 \\y &= y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 \\d &= d_0 + d_1 t + d_2 t^2 \\ \mu_1 &= m_0 + m_1 t \\l_1 &= l_{10} + l_{11} t + l_{12} t^2 \\l_2 &= l_{20} + l_{21} t + l_{22} t^2\end{aligned}$$

Adicionalmente se calculan x' e y' , derivando los polinomios de x e y .

$$\begin{aligned}x' &= x_1 + 2 x_2 t + 3 x_3 t^2 \\y' &= y_1 + 2 y_2 t + 3 y_3 t^2\end{aligned}$$

Para el eclipse del 12 de Agosto de 2026 utilizamos los Elementos Besselianos publicados por F. Espenak, NASA's GSFC, ref [4] incluidos en la Tabla 1.

Este eclipse forma parte del Saros 126. Este Saros tuvo su inicio el 10 de Marzo de 1179 y tendrá su último eclipse el 3 de Mayo de 2459. Su duración habrá sido de 1.280 años.

Tabla 1

Elementos Besselianos para el eclipse del 12 de mayo de 2026

	t_0				$\tan f_1 = i$	$\tan f_2 = i$
	18:00				0,0046141	0,0045911
n	x	y	d	l_1	l_2	μ
0	0,4755140	0,7711830	14,7966700	0,5379550	-0,0081420	88,747787
1	0,5189249	-0,2301680	-0,0120650	0,0000939	0,0000935	15,003090
2	-0,0000773	-0,0001246	-0,0000030	-0,0000121	-0,0000121	
3	-0,0000080	0,0000038				

Para los cálculos se ha tomado para el valor de la excentricidad de la Tierra (J. Meuss) [4].

$$e = 0,0818192$$

Con estos datos iniciales y las fórmulas polinómicas anteriores se han hallado, por medio de una hoja de cálculo Excel (se incluye una parte como muestra), los valores de los Elementos Besselianos comprendidos entre las 15:10 y las 20:00 horas UT del 12 de Agosto del 2026. En un CD adjunto se incluye la hoja de cálculo completa que se ha realizado para el cálculo de los Elementos Besselianos de las curvas.

A continuación, por medio de la utilización de sendas hojas de cálculo, se han hallado los valores del resto de curvas, que posteriormente se han incluido en un programa propio realizado en C++ para la representación gráfica de sólidos. Los resultados obtenidos se han representado a diferentes escalas.

Como comprobación de los resultados obtenidos, se han incluido en los gráficos, en color azul, los datos correspondientes al eclipse total publicados por F. Espenak, NASA's GSFC. Existe una ligera discrepancia entre ambas curvas, que físicamente es inferior a 30 km. Esta diferencia la atribuyo al hecho de no haber considerado en los cálculos el efecto de la refracción de la atmósfera.

Como otra comprobación, incluyo los valores de las horas del primer y del último contacto del eclipse, calculados y publicados

	Calculado	Publicado por F. Espenak, NASA's GSFC
Primer contacto	15h 34' 44"	15h 34' 01"
Ultimo contacto	19h 58' 42"	19h 57' 47"

5.2 Tablas de cálculo

		Eclipse 12 Agosto 2026				t0 = 18.00h		Datos de F. Espenak						
	e	t	x	x'	y	y'	d	sen d	cos d	$\mu 1$	l1	l1'	l2	i = tan f1
	0,0818192		0,4755140		0,7711830		14,7966700			88,7477870	0,5379550		-0,0081420	0,0046141
	Δt		0,5189249		-0,2301680		-0,0120650			15,0030900	0,0000939		0,0000935	
	83,80		-0,0000773		-0,0001246		-0,0000030			0,0000000	-0,0000121		-0,0000121	i = tan f2
			-0,0000080		0,0000038		0,0000000			0,0000000	0,0000000		0,0000000	0,0045911
15 10,00	15,167	-2,810	-0,983127	0,519170	1,416900	-0,229378	14,830550	0,255961	0,966687	46,588271	0,537596	0,000162	-0,008500	
15 20,00	15,333	-2,643	-0,896599	0,519166	1,378666	-0,229430	14,828542	0,255927	0,966696	49,088786	0,537622	0,000158	-0,008474	
15 30,00	15,500	-2,477	-0,810071	0,519161	1,340423	-0,229481	14,826533	0,255893	0,966705	51,589301	0,537648	0,000154	-0,008448	
15 34,00	15,567	-2,410	-0,775461	0,519158	1,325124	-0,229501	14,825730	0,255880	0,966709	52,589507	0,537658	0,000152	-0,008438	
15 40,00	15,667	-2,310	-0,723545	0,519154	1,302172	-0,229531	14,824525	0,255860	0,966714	54,089816	0,537674	0,000150	-0,008423	
15 50,00	15,833	-2,143	-0,637020	0,519146	1,263913	-0,229581	14,822516	0,255826	0,966723	56,590331	0,537698	0,000146	-0,008398	
16 0,00	16,000	-1,977	-0,550497	0,519137	1,225645	-0,229631	14,820507	0,255792	0,966732	59,090846	0,537722	0,000142	-0,008374	
16 1,18	16,020	-1,957	-0,540287	0,519136	1,221129	-0,229637	14,820270	0,255788	0,966733	59,385906	0,537725	0,000141	-0,008371	
16 1,70	16,028	-1,948	-0,535788	0,519135	1,219139	-0,229639	14,820166	0,255786	0,966733	59,515933	0,537726	0,000141	-0,008370	
16 10,00	16,167	-1,810	-0,463975	0,519126	1,187369	-0,229680	14,818498	0,255758	0,966741	61,591361	0,537745	0,000138	-0,008351	
16 20,00	16,333	-1,643	-0,377455	0,519114	1,149085	-0,229728	14,816489	0,255724	0,966750	64,091876	0,537768	0,000134	-0,008328	
16 30,00	16,500	-1,477	-0,290937	0,519101	1,110793	-0,229775	14,814480	0,255690	0,966759	66,592391	0,537790	0,000130	-0,008306	
16 40,00	16,667	-1,310	-0,204421	0,519086	1,072493	-0,229822	14,812471	0,255656	0,966768	69,092906	0,537811	0,000126	-0,008285	
16 50,00	16,833	-1,143	-0,117908	0,519070	1,034186	-0,229868	14,810461	0,255622	0,966777	71,593421	0,537832	0,000122	-0,008265	
16 58,11	16,969	-1,008	-0,047748	0,519056	1,003113	-0,229905	14,808831	0,255595	0,966784	73,621338	0,537848	0,000118	-0,008249	
17 0,00	17,000	-0,977	-0,031398	0,519053	0,995871	-0,229914	14,808451	0,255588	0,966786	74,093936	0,537852	0,000118	-0,008245	
17 1,00	17,017	-0,960	-0,022747	0,519051	0,992039	-0,229918	14,808250	0,255585	0,966787	74,343987	0,537854	0,000117	-0,008243	
17 1,78	17,030	-0,947	-0,015999	0,519050	0,989050	-0,229922	14,808094	0,255582	0,966787	74,539027	0,537855	0,000117	-0,008241	
17 3,00	17,050	-0,927	-0,005445	0,519048	0,984375	-0,229927	14,807848	0,255578	0,966788	74,844090	0,537858	0,000116	-0,008239	
17 5,00	17,083	-0,893	0,011856	0,519044	0,976710	-0,229936	14,807446	0,255571	0,966790	75,344193	0,537861	0,000116	-0,008235	
17 10,00	17,167	-0,810	0,055110	0,519034	0,957548	-0,229959	14,806441	0,255554	0,966795	76,594451	0,537871	0,000114	-0,008226	
17 20,00	17,333	-0,643	0,141614	0,519014	0,919218	-0,230003	14,804431	0,255521	0,966804	79,094966	0,537890	0,000109	-0,008207	
17 30,00	17,500	-0,477	0,228114	0,518993	0,880880	-0,230047	14,802421	0,255487	0,966813	81,595481	0,537907	0,000105	-0,008189	

5.3 Curvas calculadas

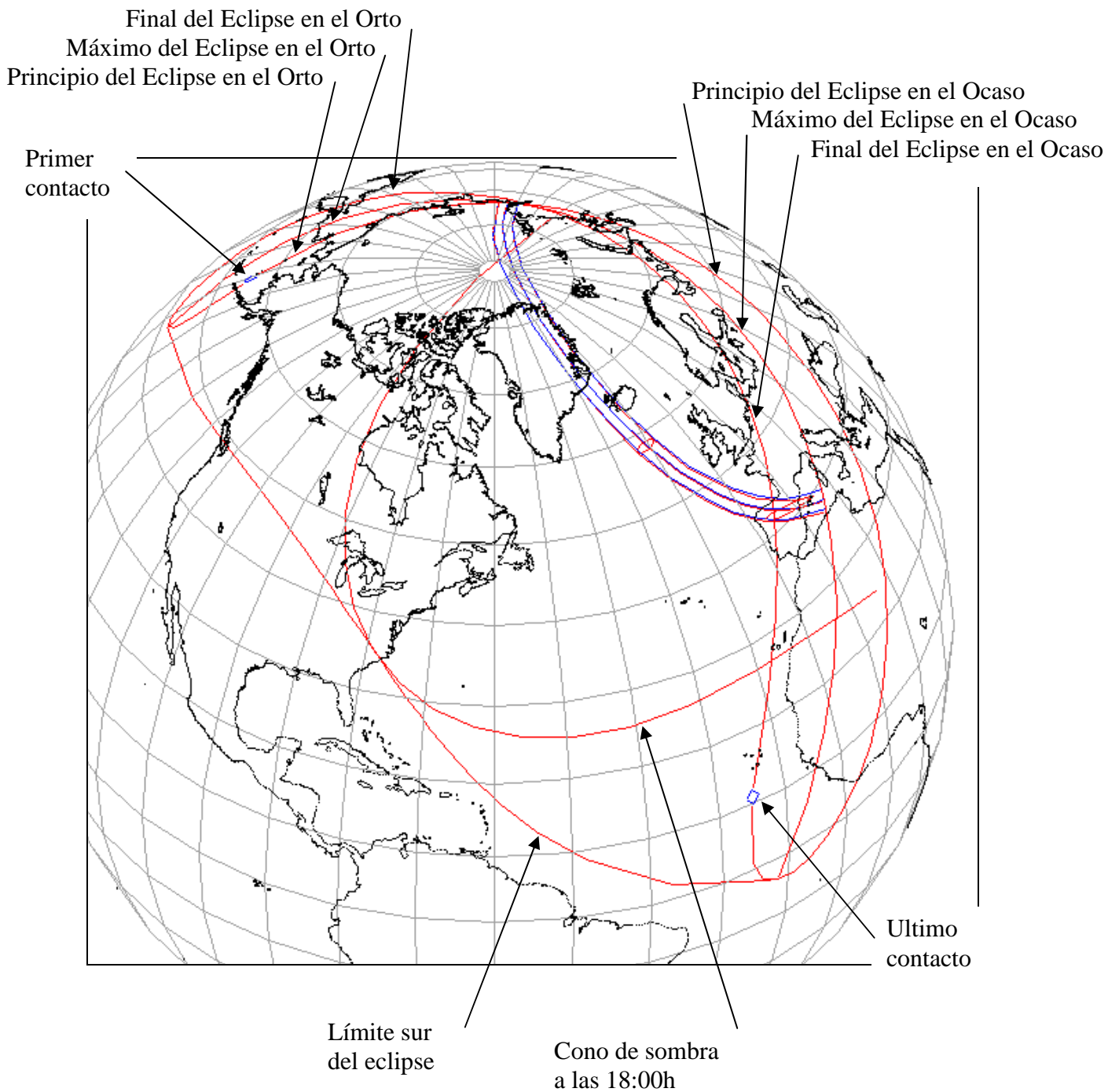
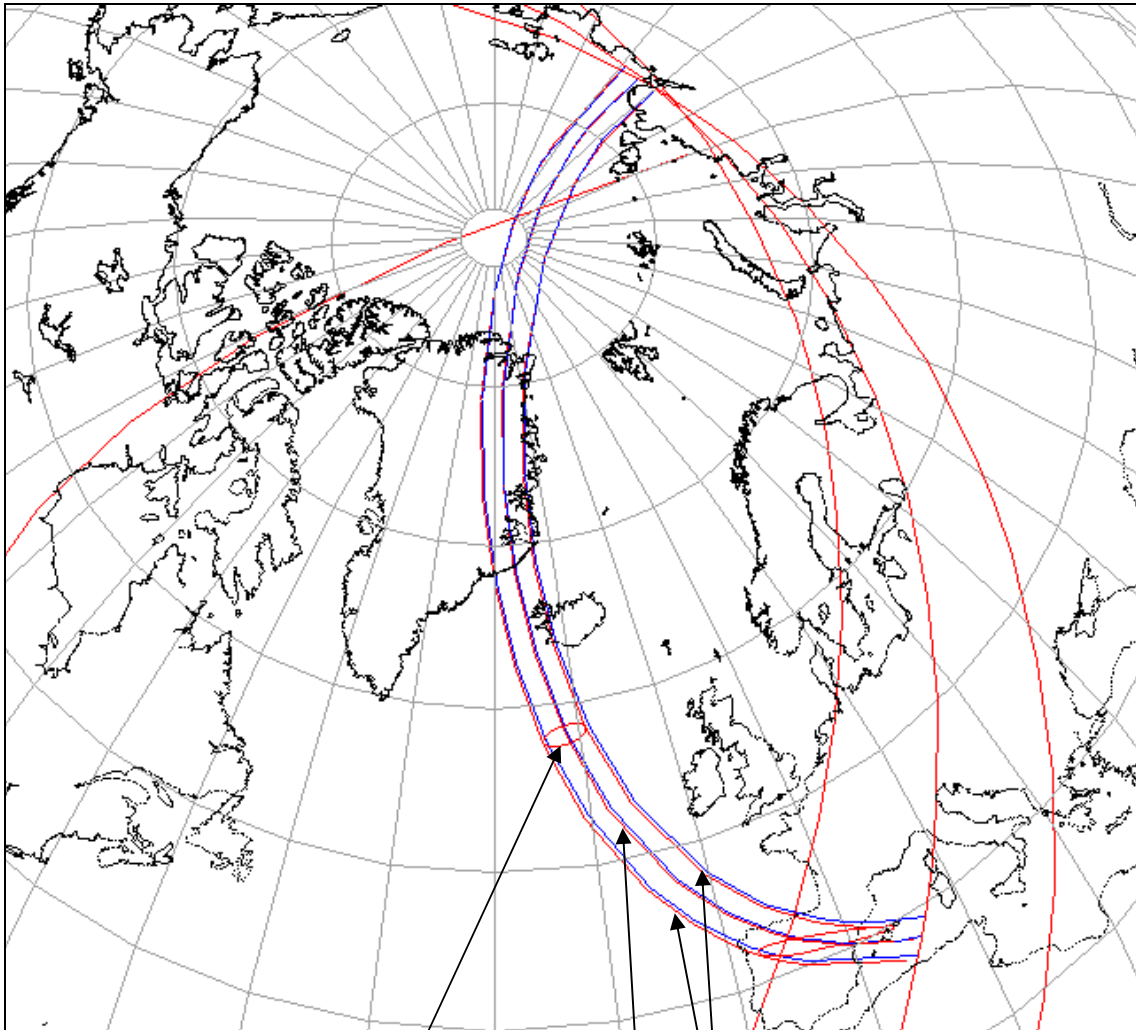


Figura 13. Conjunto de curvas de un eclipse



Eclipse total a las 18:00h

Límites norte y sur del Eclipse total
Curva del Eclipse central

Figura 14. Curvas del eclipse total

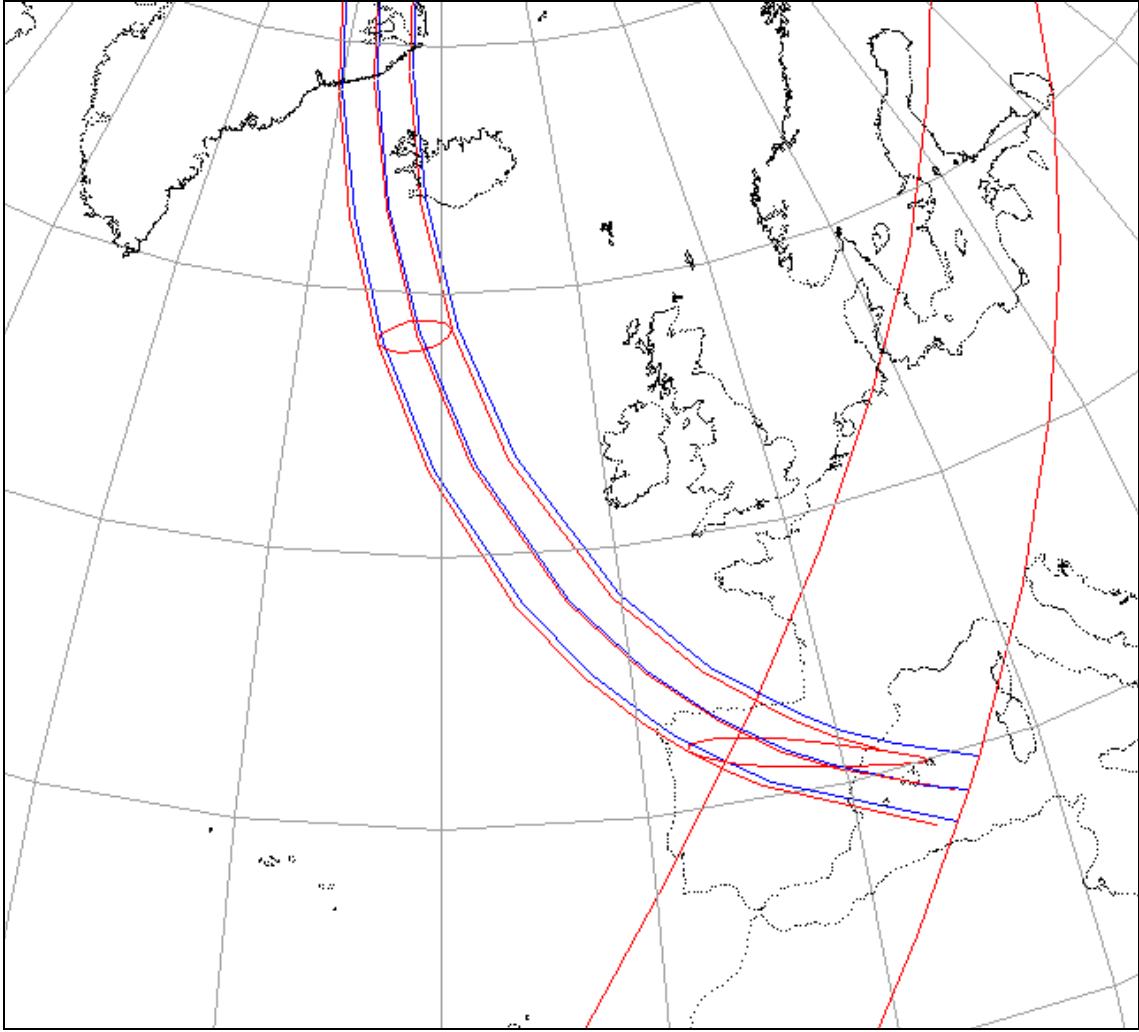
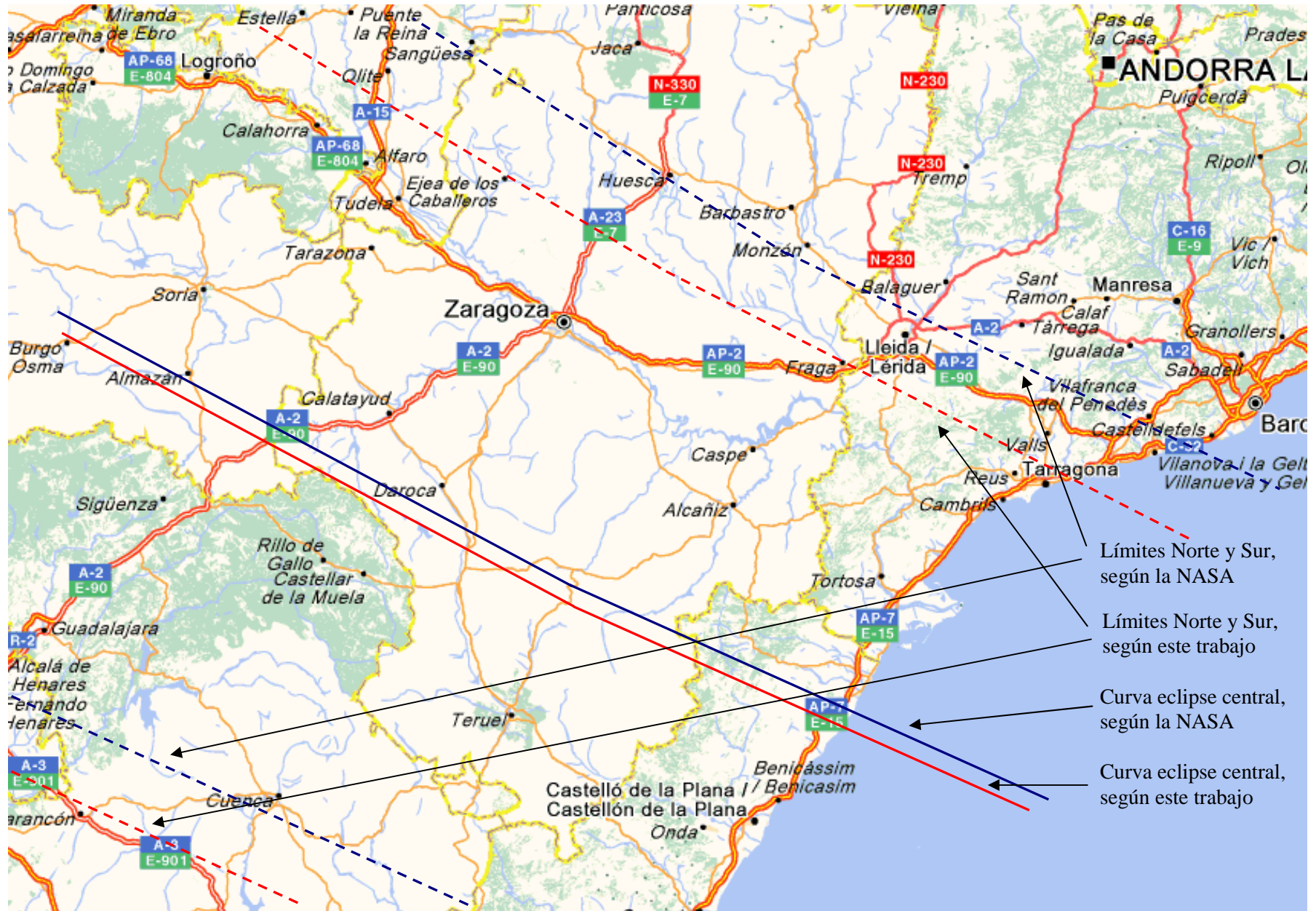


Figura 15. Curvas del eclipse total



6 Summary

In 1824, the Prussian astronomer and mathematician Friedrich Bessel introduced a new method for the prediction of solar eclipses. It was so successful that it remains today as the most powerful technique, even with the application of digital computers.

In this report, we detail the approach followed and the main areas of the process, as per the following steps.

Chapter 2 presents some basic concepts (earth shape, the *Saros*) which will be useful for the next chapters.

Chapter 3 shows the process to determine the Besselian Elements of an eclipse.

Chapter 4 explains, based on the Besselian Elements, how to determine the itinerary and the visibility of an eclipse over the Earth surface.

Finally, in chapter 5 we apply the previous concepts to a real case: the Sun eclipse expected for 12th August 2026, which will be visible from the South of Catalonia.

References used for the realisation of the current report: ref [1], **Manual of spherical and practical astronomy**, by William Chauvenet and ref [2], **Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos**, by F. Javier Gil.

The key to Bessel's method is the expression of the ephemerides of the Sun and Moon in terms of the Moon's shadow with respect to Earth's center. This change in the frame of reference greatly simplifies the mathematics and geometry without any sacrifice in accuracy.

To define the Besselian elements of an eclipse, a plane is passed through the center of Earth which is fixed perpendicular to axis of the lunar shadow. This is called the *fundamental plane* and on it is constructed an $X - Y$ rectangular coordinate system with its origin at the geocenter. The axes of this system are oriented with north in the positive Y direction and east in the positive X direction. The Z axis is perpendicular to the fundamental plane and parallel to the shadow axis. The $X - Y$ coordinates of the shadow axis can now be expressed in units of the equatorial radius of Earth.

The radii of the penumbral and umbral shadows on the fundamental plane are also tabulated as $L1$ and $L2$, respectively. The direction of the shadow axis on the celestial sphere is defined by its declination ' d ' and ephemeris hour angle ' m '. Finally, the angles which the penumbral and umbral shadow cones make with the shadow axis are expressed as $f1$ and $f2$, respectively. These eight parameters, often tabulated at hourly intervals serve as the only input needed to characterize an eclipse. The details of actual eclipse calculations can be found in the references listed below.

7 Bibliografía

- [1] William Chauvenet.
Manual of Spherical and Practical Astronomy. Vol. I.
J. B. Lippincott Company, 1891

- [2] F. Javier Gil Chica
Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos
Universidad de Alicante, 1996

- [3] Jean Meeus
Elements of Solar Eclipses. 1951 - 2200
Willmann-Bell, Inc, 1989

- [4] NASA. Eclipses and Saros. Fred Espenak, 2012

- [5] G. Bielig – Schulz
3D graphics in Pascal
John Wiley & Sons, 1990

8 Anexo

Datos de la NASA del eclipse del

12 de Agosto de 2026

Total Solar Eclipse of 2026 Aug 12

Geocentric Conjunction = 17:03:39.9 UT J.D. = 2461265.210878
 Greatest Eclipse = 17:45:43.7 UT J.D. = 2461265.240089

Eclipse Magnitude = 1.0386 Gamma = 0.8976

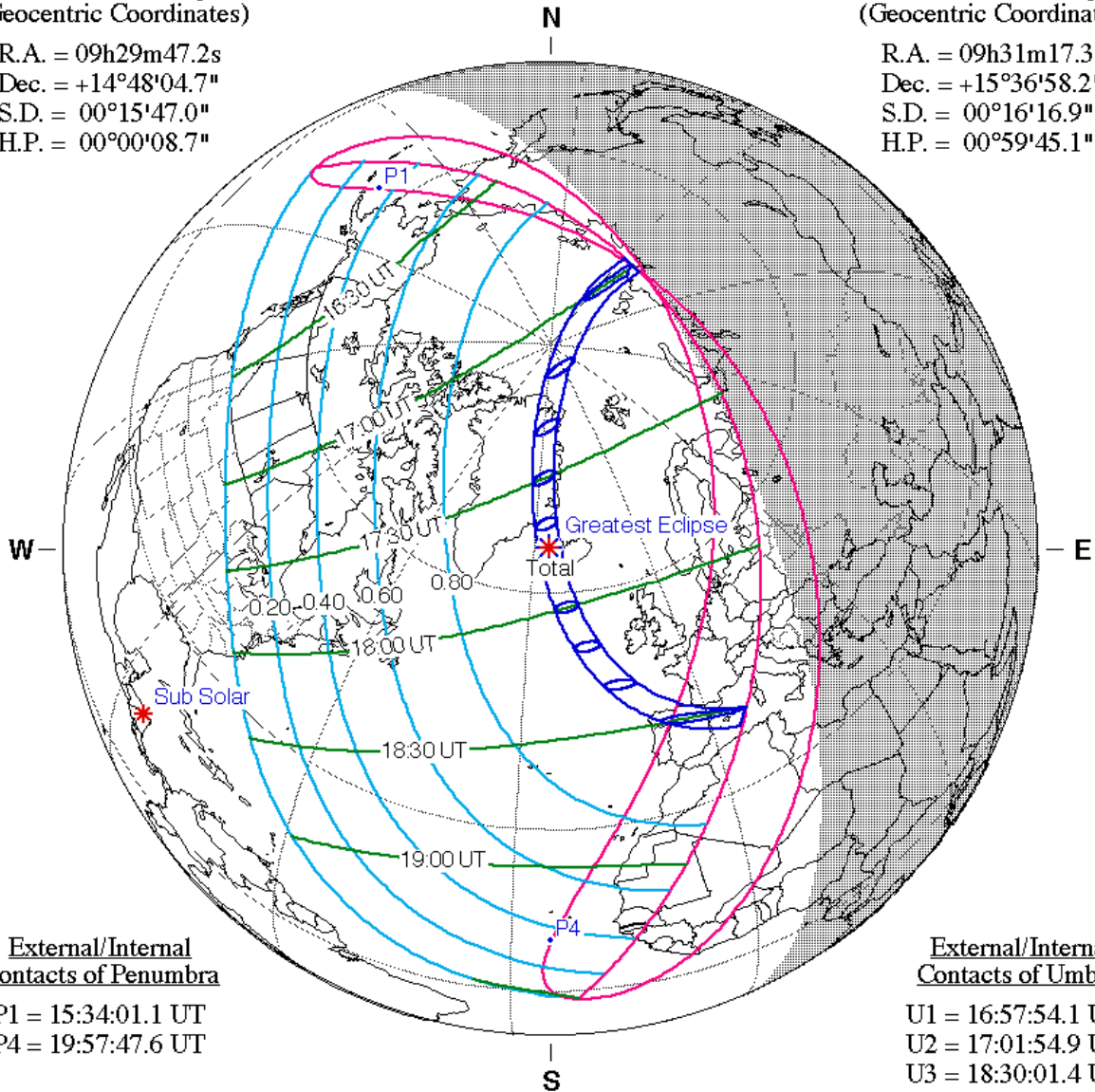
Saros Series = 126 Member = 48 of 72

Sun at Greatest Eclipse
(Geocentric Coordinates)

R.A. = 09h29m47.2s
 Dec. = +14°48'04.7"
 S.D. = 00°15'47.0"
 H.P. = 00°00'08.7"

Moon at Greatest Eclipse
(Geocentric Coordinates)

R.A. = 09h31m17.3s
 Dec. = +15°36'58.2"
 S.D. = 00°16'16.9"
 H.P. = 00°59'45.1"



External/Internal
Contacts of Penumbra

P1 = 15:34:01.1 UT
 P4 = 19:57:47.6 UT

External/Internal
Contacts of Umbra

U1 = 16:57:54.1 UT
 U2 = 17:01:54.9 UT
 U3 = 18:30:01.4 UT
 U4 = 18:33:57.4 UT

Local Circumstances at Greatest Eclipse

Lat. = 65°13.0'N Sun Alt. = 25.8°
 Long. = 025°13.6'W Sun Azm. = 248.3°

Ephemeris & Constants

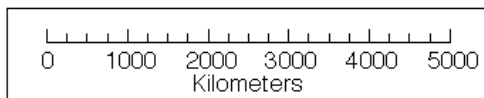
Eph. = Newcomb/ILE
 $\Delta T = 83.8$ s
 $k1 = 0.2724880$
 $k2 = 0.2722810$
 $\Delta b = 0.0''$ $\Delta l = 0.0''$

Path Width = 293.8 km Duration = 02m18.3s

Geocentric Libration
(Optical + Physical)

$l = 4.08^\circ$
 $b = -1.12^\circ$
 $c = 16.98^\circ$

Brown Lun. No. = 1282



F. Espenak, NASA's GSFC - Fri, Jul 2,
sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/eclipse.html

Besselian Elements for the Total Solar Eclipse of 2026 Aug 12

Equatorial Conjunction: 17:05:01.6 TDT J.D. = 2461265.211824
 (Sun & Moon in R.A.) (=17:03:46.2 UT)

Ecliptic Conjunction: 17:37:54.0 TDT J.D. = 2461265.234653
 (Sun & Moon in Ec. Lo.) (=17:36:38.6 UT)

Instant of Greatest Eclipse: 17:47:05.7 TDT J.D. = 2461265.241039
 (=17:45:50.3 UT)

Gamma = 0.8977	Ephemerides = VSOP87/ELP2000-82
Eclipse Magnitude = 1.0386	Lunation No. = 329
ΔT = 75.4 s	Saros Series = 126 (48/72)

Lunar Radius k1 = 0.272488 (Penumbra) Shift in Δb = 0.00"
 Constants: k2 = 0.272281 (Umbra) Lunar Position: Δl = 0.00"

Geocentric Coordinates of Sun & Moon at Greatest Eclipse (VSOP87/ELP2000-82):

Sun: R.A. = 09h29m47.3s	Moon: R.A. = 09h31m17.3s
Dec. = +14°48'04.5"	Dec. = +15°36'58.4"
Semi-Diameter = 15'47.0"	Semi-Diameter = 16'16.9"
Eq.Hor.Par. = 08.7"	Eq.Hor.Par. = 0°59'45.1"

Polynomial Besselian Elements for: 2026 Aug 12 18:00:00.0 TDT (=t0)

n	x	y	d	l1	l2	μ
0	0.475514	0.771183	14.79667	0.537955	-0.008142	88.74779
1	0.5189249	-0.2301680	-0.012065	0.0000939	0.0000935	15.003090
2	-0.0000773	-0.0001246	-0.000003	-0.0000121	-0.0000121	
3	-0.0000080	0.0000038				

Tan f1 = 0.0046141 Tan f2 = 0.0045911

At time t1 (decimal hours), each Besselian element is evaluated by:

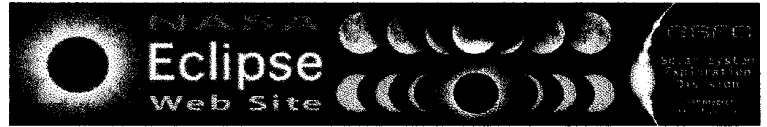
$$a = a_0 + a_1*t + a_2*t^2 + a_3*t^3 \quad (\text{or } a = \sum [a_n*t^n]; n = 0 \text{ to } 3)$$

where: a = x, y, d, l1, l2, or μ
 t = t1 - t0 (decimal hours) and t0 = 18.000 TDT

The Besselian elements were derived from a least-squares fit to elements calculated at five uniformly spaced times over a six hour period centered at t0. The Besselian elements are valid over the period 15.00 ≤ t0 ≤ 21.00 TDT.

Note that all times are expressed in Terrestrial Dynamical Time (TDT).

Saros Series 126: Member 48 of 72 eclipses in series.



Path of the Total Solar Eclipse of 2026 Aug 12

Fred Espenak

The following table delineates the path of the Moon's umbral shadow during the Total Solar Eclipse of 2026 Aug 12. The geographic coordinates (WGS 84) of the northern and southern limits and the central line are listed at 60-second intervals. This provides adequate detail for making plots of the path on larger scale maps. Local circumstances on the central line include the ratio of the apparent diameters of the Moon to the Sun, the Sun's altitude and azimuth (degrees), the path width (kilometers) and the duration on the central line (minutes and seconds).

The global visibility of the eclipse is shown on an [Orthographic Map](#). The features of this map are described in the [Key to Solar Eclipse Path Tables](#). The path of the eclipse is displayed in greater detail on a [Google Map](#).

Total Solar Eclipse of 2026 Aug 12

Universal Time	Northern Limit		Southern Limit		Central Line		M:S Diam. Ratio	Sun Alt °	Sun Azm °	Path Width km	Central Line Durat.
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude					
Limits	75 10.4N	108 42.6E	74 54.8N	117 58.7E	75 04.7N	113 28.3E	1.031	0	-	269	01m34.3s
17:01	-	-	83 55.5N	120 57.9E	80 13.1N	114 05.2E	1.033	5	8	273	01m42.4s
17:02	76 32.7N	108 45.8E	85 24.2N	119 18.7E	82 23.2N	112 22.1E	1.033	7	6	273	01m45.9s
17:03	80 16.6N	106 39.2E	86 41.4N	115 42.9E	84 01.6N	109 09.7E	1.034	9	4	274	01m48.6s
17:04	82 16.0N	102 58.6E	87 48.9N	107 47.0E	85 22.1N	103 50.8E	1.034	10	359	274	01m50.9s
17:05	83 45.0N	097 34.9E	88 43.7N	086 57.6E	86 28.4N	095 04.5E	1.035	11	350	274	01m52.9s
17:06	84 54.7N	089 52.9E	89 03.6N	034 35.0E	87 19.2N	080 28.0E	1.035	12	336	274	01m54.7s
17:07	85 47.5N	079 07.5E	88 32.1N	005 41.5W	87 48.3N	057 52.1E	1.035	13	314	275	01m56.3s
17:08	86 22.2N	064 54.4E	87 44.4N	020 03.2W	87 48.7N	031 31.3E	1.035	14	288	275	01m57.8s
17:09	86 36.9N	048 13.7E	86 54.7N	026 11.5W	87 24.7N	010 49.6E	1.036	15	268	275	01m59.2s
17:10	86 32.0N	031 49.0E	86 05.7N	029 21.6W	86 47.8N	002 15.1W	1.036	16	255	275	02m00.5s
17:11	86 11.6N	018 09.2E	85 17.8N	031 11.0W	86 05.6N	010 17.2W	1.036	16	247	275	02m01.7s
17:12	85 41.3N	007 51.1E	84 31.2N	032 17.8W	85 21.6N	015 25.9W	1.036	17	242	275	02m02.8s
17:13	85 05.4N	000 21.9E	83 45.9N	032 59.7W	84 37.3N	018 53.3W	1.036	18	239	276	02m03.9s
17:14	84 26.6N	005 05.2W	83 01.7N	033 25.9W	83 53.3N	021 18.3W	1.037	18	237	276	02m04.9s
17:15	83 46.3N	009 07.0W	82 18.6N	033 41.6W	83 09.9N	023 02.8W	1.037	19	236	276	02m05.9s
17:16	83 05.5N	012 09.3W	81 36.6N	033 50.2W	82 27.2N	024 19.9W	1.037	19	235	276	02m06.8s
17:17	82 24.7N	014 29.3W	80 55.4N	033 53.6W	81 45.3N	025 17.7W	1.037	20	235	277	02m07.7s
17:18	81 44.1N	016 18.5W	80 15.1N	033 53.3W	81 04.2N	026 01.4W	1.037	20	234	277	02m08.5s
17:19	81 03.9N	017 44.8W	79 35.6N	033 50.0W	80 23.8N	026 34.6W	1.037	21	234	277	02m09.3s
17:20	80 24.2N	018 53.8W	78 56.9N	033 44.7W	79 44.1N	026 59.7W	1.037	21	234	278	02m10.0s
17:21	79 44.9N	019 49.3W	78 18.8N	033 37.6W	79 05.1N	027 18.6W	1.038	21	235	278	02m10.7s
17:22	79 06.2N	020 34.3W	77 41.4N	033 29.2W	78 26.7N	027 32.6W	1.038	22	235	278	02m11.4s
17:23	78 28.0N	021 10.9W	77 04.6N	033 19.8W	77 49.0N	027 42.6W	1.038	22	235	279	02m12.0s
17:24	77 50.3N	021 40.6W	76 28.3N	033 09.5W	77 11.8N	027 49.3W	1.038	22	235	279	02m12.6s
17:25	77 13.1N	022 04.7W	75 52.6N	032 58.6W	76 35.2N	027 53.4W	1.038	23	236	280	02m13.2s
17:26	76 36.4N	022 24.1W	75 17.3N	032 47.1W	75 59.0N	027 55.2W	1.038	23	236	280	02m13.7s
17:27	76 00.1N	022 39.7W	74 42.5N	032 35.1W	75 23.4N	027 55.2W	1.038	23	237	281	02m14.2s
17:28	75 24.3N	022 52.0W	74 08.1N	032 22.7W	74 48.2N	027 53.6W	1.038	24	237	281	02m14.6s
17:29	74 48.9N	023 01.5W	73 34.2N	032 09.9W	74 13.4N	027 50.6W	1.038	24	238	282	02m15.1s
17:30	74 13.9N	023 08.5W	73 00.6N	031 56.9W	73 39.0N	027 46.5W	1.038	24	238	282	02m15.5s

Universal Time	Northern Limit	Southern Limit	Central Line	M:S Diam. Ratio	Sun Alt °	Sun Azm °	Path Width km	Central Line Durat.
----------------	----------------	----------------	--------------	-----------------	-----------	-----------	---------------	---------------------

Time	-----		-----		-----		Ratio	Alt	Azm	Width	Durat.
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude					
	°		°		°			°	°	km	
17:31	73 39.3N	023 13.5W	72 27.4N	031 43.7W	73 05.0N	027 41.3W	1.038	24	239	283	02m15.8s
17:32	73 05.0N	023 16.6W	71 54.5N	031 30.2W	72 31.4N	027 35.2W	1.038	24	239	283	02m16.2s
17:33	72 31.1N	023 18.1W	71 21.9N	031 16.5W	71 58.1N	027 28.3W	1.038	25	240	284	02m16.5s
17:34	71 57.5N	023 18.2W	70 49.7N	031 02.7W	71 25.1N	027 20.7W	1.038	25	241	285	02m16.8s
17:35	71 24.2N	023 17.0W	70 17.7N	030 48.6W	70 52.4N	027 12.4W	1.038	25	241	285	02m17.0s
17:36	70 51.2N	023 14.7W	69 46.0N	030 34.5W	70 20.0N	027 03.6W	1.039	25	242	286	02m17.3s
17:37	70 18.4N	023 11.3W	69 14.5N	030 20.1W	69 47.9N	026 54.2W	1.039	25	242	287	02m17.5s
17:38	69 46.0N	023 07.0W	68 43.3N	030 05.7W	69 16.0N	026 44.3W	1.039	25	243	288	02m17.7s
17:39	69 13.7N	023 01.8W	68 12.4N	029 51.1W	68 44.4N	026 34.0W	1.039	25	244	288	02m17.8s
17:40	68 41.7N	022 55.9W	67 41.6N	029 36.3W	68 13.0N	026 23.3W	1.039	26	244	289	02m18.0s
17:41	68 09.9N	022 49.2W	67 11.0N	029 21.4W	67 41.8N	026 12.1W	1.039	26	245	290	02m18.1s
17:42	67 38.4N	022 41.8W	66 40.7N	029 06.4W	67 10.8N	026 00.6W	1.039	26	246	291	02m18.1s
17:43	67 07.0N	022 33.7W	66 10.5N	028 51.2W	66 40.0N	025 48.7W	1.039	26	246	292	02m18.2s
17:44	66 35.7N	022 25.0W	65 40.4N	028 35.9W	66 09.3N	025 36.4W	1.039	26	247	292	02m18.2s
17:45	66 04.7N	022 15.8W	65 10.6N	028 20.4W	65 38.9N	025 23.8W	1.039	26	248	293	02m18.2s
17:46	65 33.8N	022 06.0W	64 40.9N	028 04.8W	65 08.5N	025 10.9W	1.039	26	248	294	02m18.2s
17:47	65 03.1N	021 55.6W	64 11.3N	027 48.9W	64 38.4N	024 57.6W	1.039	26	249	295	02m18.2s
17:48	64 32.5N	021 44.8W	63 41.8N	027 32.9W	64 08.3N	024 43.9W	1.039	26	250	296	02m18.1s
17:49	64 02.0N	021 33.4W	63 12.5N	027 16.8W	63 38.4N	024 30.0W	1.039	26	251	297	02m18.0s
17:50	63 31.6N	021 21.5W	62 43.3N	027 00.4W	63 08.6N	024 15.7W	1.039	26	251	298	02m17.9s
17:51	63 01.4N	021 09.1W	62 14.1N	026 43.8W	62 38.9N	024 01.1W	1.039	26	252	299	02m17.7s
17:52	62 31.2N	020 56.2W	61 45.1N	026 26.9W	62 09.3N	023 46.1W	1.039	26	253	300	02m17.5s
17:53	62 01.1N	020 42.9W	61 16.2N	026 09.9W	61 39.8N	023 30.7W	1.038	25	253	301	02m17.4s
17:54	61 31.1N	020 29.0W	60 47.3N	025 52.6W	61 10.3N	023 15.1W	1.038	25	254	302	02m17.1s
17:55	61 01.1N	020 14.6W	60 18.5N	025 35.0W	60 40.9N	022 59.0W	1.038	25	255	303	02m16.9s
17:56	60 31.2N	019 59.7W	59 49.7N	025 17.2W	60 11.6N	022 42.5W	1.038	25	255	304	02m16.6s
17:57	60 01.3N	019 44.4W	59 21.0N	024 59.1W	59 42.3N	022 25.7W	1.038	25	256	305	02m16.3s
17:58	59 31.5N	019 28.4W	58 52.3N	024 40.6W	59 13.0N	022 08.5W	1.038	25	257	306	02m16.0s
17:59	59 01.6N	019 12.0W	58 23.7N	024 21.9W	58 43.8N	021 50.8W	1.038	25	258	307	02m15.6s
18:00	58 31.8N	018 55.0W	57 55.0N	024 02.8W	58 14.6N	021 32.7W	1.038	24	258	307	02m15.3s

Universal Time	Northern Limit		Southern Limit		Central Line		M:S Diam. Ratio	Sun Alt	Sun Azm	Path Width	Central Line Durat.
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude					
	°		°		°			°	°	km	
18:01	58 02.0N	018 37.4W	57 26.4N	023 43.3W	57 45.4N	021 14.1W	1.038	24	259	308	02m14.9s
18:02	57 32.2N	018 19.2W	56 57.8N	023 23.4W	57 16.1N	020 55.0W	1.038	24	260	309	02m14.4s
18:03	57 02.3N	018 00.3W	56 29.1N	023 03.1W	56 46.9N	020 35.4W	1.038	24	260	310	02m14.0s
18:04	56 32.4N	017 40.9W	56 00.5N	022 42.4W	56 17.6N	020 15.3W	1.038	24	261	311	02m13.5s
18:05	56 02.4N	017 20.7W	55 31.8N	022 21.2W	55 48.3N	019 54.6W	1.038	23	262	312	02m13.0s
18:06	55 32.3N	016 59.8W	55 03.0N	021 59.5W	55 18.9N	019 33.3W	1.038	23	263	313	02m12.4s
18:07	55 02.2N	016 38.2W	54 34.3N	021 37.3W	54 49.5N	019 11.4W	1.038	23	263	314	02m11.9s
18:08	54 31.9N	016 15.7W	54 05.4N	021 14.5W	54 19.9N	018 48.8W	1.038	22	264	315	02m11.3s
18:09	54 01.5N	015 52.4W	53 36.4N	020 51.0W	53 50.3N	018 25.5W	1.037	22	265	316	02m10.6s
18:10	53 31.0N	015 28.1W	53 07.4N	020 27.0W	53 20.5N	018 01.3W	1.037	22	266	316	02m10.0s
18:11	53 00.3N	015 02.9W	52 38.2N	020 02.2W	52 50.6N	017 36.4W	1.037	21	266	317	02m09.3s
18:12	52 29.4N	014 36.5W	52 08.9N	019 36.6W	52 20.6N	017 10.5W	1.037	21	267	318	02m08.5s
18:13	51 58.3N	014 09.1W	51 39.5N	019 10.3W	51 50.3N	016 43.7W	1.037	21	268	318	02m07.7s
18:14	51 26.9N	013 40.3W	51 09.9N	018 43.0W	51 19.9N	016 15.8W	1.037	20	269	319	02m06.9s
18:15	50 55.2N	013 10.2W	50 40.0N	018 14.8W	50 49.2N	015 46.8W	1.037	20	269	319	02m06.1s
18:16	50 23.1N	012 38.6W	50 10.0N	017 45.5W	50 18.2N	015 16.6W	1.037	19	270	319	02m05.2s
18:17	49 50.7N	012 05.3W	49 39.7N	017 15.0W	49 46.9N	014 44.9W	1.036	19	271	319	02m04.2s
18:18	49 17.9N	011 30.1W	49 09.1N	016 43.3W	49 15.3N	014 11.7W	1.036	18	272	319	02m03.2s
18:19	48 44.5N	010 52.8W	48 38.2N	016 10.2W	48 43.3N	013 36.9W	1.036	18	272	319	02m02.2s
18:20	48 10.5N	010 13.0W	48 07.0N	015 35.6W	48 10.8N	013 00.1W	1.036	17	273	319	02m01.1s
18:21	47 35.8N	009 30.5W	47 35.3N	014 59.2W	47 37.8N	012 21.2W	1.036	16	274	318	01m59.9s
18:22	47 00.3N	008 44.8W	47 03.1N	014 20.9W	47 04.1N	011 39.8W	1.035	16	275	317	01m58.7s

18:23	46 23.7N 007 55.1W	46 30.4N 013 40.3W	46 29.7N 010 55.5W	1.035	15 276	316	01m57.4s
18:24	45 45.9N 007 00.7W	45 57.0N 012 57.2W	45 54.5N 010 08.0W	1.035	14 277	315	01m56.0s
18:25	45 06.5N 006 00.5W	45 22.9N 012 11.2W	45 18.2N 009 16.4W	1.035	13 278	313	01m54.5s
18:26	44 24.9N 004 52.3W	44 47.8N 011 21.7W	44 40.6N 008 19.9W	1.034	13 279	311	01m52.9s
18:27	43 40.5N 003 33.6W	44 11.7N 010 27.9W	44 01.4N 007 17.2W	1.034	11 280	308	01m51.2s
18:28	42 51.6N 001 58.7W	43 34.2N 009 29.0W	43 19.9N 006 06.4W	1.034	10 281	304	01m49.2s
18:29	41 54.5N 000 05.6E	42 54.9N 008 23.4W	42 35.4N 004 44.1W	1.033	9 282	300	01m47.0s
18:30	40 33.6N 003 36.5E	42 13.3N 007 09.1W	41 46.0N 003 04.2W	1.033	7 283	294	01m44.4s

Universal Time	Northern Limit		Southern Limit		Central Line		M:S Diam. Ratio	Sun Alt	Sun Azm	Path Width	Central Line Durat.
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude					
18:31	-	-	41 28.4N	005 42.0W	40 47.6N	000 51.1W	1.032	5 285	285	01m41.1s	
18:32	-	-	40 38.0N	003 55.0W	39 15.7N	003 25.3E	1.031	2 288	269	01m35.2s	
Limits	39 42.4N	006 21.2E	37 41.3N	004 33.1E	38 40.7N	005 25.6E	1.031	0 -	262	01m32.8s	