Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

DISSENY, PLANIFICACIÓ, REALITZACIÓ I ANÀLISI D'UN TALLER DE MATEMÀTIQUES ADREÇAT A ALUMNAT DE SECUNDÀRIA

Francesc Massich Vall

Director: Anton Aubanell Pou
Realitzat a: Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. UB

Barcelona, 21 de juny de 2013

ABSTRACT

Engaging population towards the study of mathematics is a challenge. It seems like if there was an unwritten social agreement dictating that maths are difficult and boring. This work presents a final degree project under the name of "Desing, planning, implementation and analysis of a mathematics workshop for high school students" that attempts to overcome such situation by divulgating mathematics within high school in a rigorous and enjoyable manner.

Due to the density of the curriculum, there is no space for recreational or applied mathematics. This project attempts to address such necessity providing a set of activities specially designed for approaching maths from a different point of view. There is no other intention than linking the already acquired knowledge that students have with their daily environment and with concepts of higher mathematics.

The activities have been structured as a workshop which carried out with two groups of heterogeneous ages. This heterogenity was intentional to promote variety of background within the groups in order to observe if people with reduced background could be pushed up by their workshop mates.

The workshop has been split in six equal sessions for both groups. These sessions have had as main topic: cryptography, probability, geometry, mathematical miscellaneous, fractals and anamorphism. Main topics have been switched in every session in order to give a brief overview of as many different mathematical branches as possible.

All sessions have been structured similarly: an historical note in order to contextualize the main topic, a core consisting of a set of activities, usually from three to five, and a challenge conceived as a link between sessions. The activities and challenges are either designed for linking mathematical concepts with student's life or to discover step by step advanced mathematical concepts.

All sessions have been assessed in order to analyze the engagement of the participants and the acquired concepts.

The aim of the project is learn math while enjoing the process of learning and linking maths to our environment. Once completed the workshop it can be concluded that such goals have been reached.

ÍNDEX

1 INTRODUCCIÓ

Sota el títol "Disseny, planificació, realització i anàlisi d'un taller de matemàtiques adreçat a alumnat de secundària", aquest treball pretén deixar palesa:

- La creació d'un seguit d'activitats matemàticament transcendents organitzades en forma de taller ofert a alumnes de secundària.
- El camí seguit pel taller des del seu primer esbós inicial fins a la seva última sessió.
- L'anàlisi, en primer lloc, del funcionament i la qualitat de cadascuna de les sessions, i en segon lloc, de l'impacte generat i el canvi en el comportament i la visió envers les matemàtiques dels participants del taller.

En aquesta memòria del que va començar com un treball de final de grau i ha acabat essent un projecte personal, s'ha volgut mostrar quin ha estat el camí seguit des del seu inici el 29 de setembre de 2012, dia en què es va pensar la possibilitat de centrar-lo en la realització d'un taller, fins al moment actual, on encara s'estan fent accions de difusió del que ha estat aquesta primera edició del taller.

Les decisions preses en els inicis, l'organització general del taller, l'estructura seguida en cada sessió, les activitats realitzades, l'anàlisi local de cadascuna de les sessions, les accions de difusió, la resposta de l'alumnat del centre i la valoració general del projecte, entre moltes altres aspectes es poden trobar en aquesta memòria separats en tres grans blocs:

- Visió global del que ha estat el Treball Final de Grau i el projecte que ha generat.
- Visió local del taller i anàlisi de cadascuna de les sessions.
- Anàlisi general del projecte i conclusions del Treball Final de Grau.

Aprofitant l'ocasió, es vol utilitzar la introducció per fer notar que, al llarg del treball, amb l'ús de genèrics es fa referència a persones d'ambdós sexes independentment de l'article i la paraula utilitzats.

2 MOTIVACIÓ I OBJECTIUS

La motivació d'aquest treball està clarament separada en dos grans blocs, la motivació personal i la motivació didàctica.

- Motivació personal: La motivació principal del treball rau en el fet de poder crear i dur a terme un projecte propi relacionat amb la vocació personal de docent. El mateix motiu pel qual s'ha estudiat la carrera de matemàtiques, ha agafat valor i consistència en aquest treball obtenint un primer contacte amb la professió que es vol exercir.
  Es va considerar que, per sobre de tot, aquest treball havia de ser útil en un futur, és per això, que aquest treball havia de servir per veure si realment el camí que es vol seguir un cop acabada la carrera és el correcte.
  A banda de la creació d'un projecte propi i de l'exploració del camp de la docència, també es volia que el treball no fos una llosa i que la realització d'aquest fos coherent amb les inquietuds personals.

- Motivació didàctica: Recerca pràctica sobre la possibilitat de treballar les matemàtiques en un entorn escolar però tractant temes no estrictament curriculars, amb un tarannà lúdic i distès, però alhora estricte en referència a la dinàmica del grup i rigorós respecte del contingut matemàtic.

Els objectius del treball són els següents:

- Construir un seguit d'activitats matemàtiques on els participants puguin intervenir de manera directa.
- Realitzar el taller de matemàtiques.
- Projectar una visió aplicada, funcional, quotidiana i estètica de les matemàtiques.
- Aproximar el món de les matemàtiques als participants del taller i canviar-ne la imatge.
- Generar curiositat i inquietud als participants per seguir aprenent matemàtiques.
- Analitzar el disseny i l'execució de les activitats didàctiques del taller.

3 DESENVOLUPAMENT DEL PROJECTE

3.1 Tria del treball

El primer pas en el desenvolupament d'aquest treball va ser, evidentment, la tria del projecte. Ja s'havia decidit que el treball final de grau estaria relacionat amb la didàctica de les matemàtiques però encara no estava clar quin seria el treball definitiu. El moment clau en l'elecció del projecte va ser la novena jornada d'ensenyament de les matemàtiques, organitzada per la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) i la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT), sota el títol "La divulgació de les matemàtiques. Una eina per a millorar l'aprenentatge de l'alumnat?". Va ser en aquesta jornada on, després d'assistir a la taula rodona i sobretot, a la xerrada d'en Joan Jareño Ruiz i en Sergi del Moral Carmona, tots dos membres del CREAMAT, titulada "Ponts entre divulgació i educació matemàtica. Què fem des del CREAMAT?", que es va veure la possibilitat de dur a terme un taller de matemàtiques adreçat a alumnes de secundària, amb la intenció de que fos un projecte gratificant a nivell personal i alhora rigorós matemàticament i útil i beneficiós pels participants.

Un cop rebuda una resposta afirmativa del tutor i de la coordinació del treball final de grau, es va començar a buscar informació i a traçar les línies generals del projecte.

3.2 Recerca de informació

Un taller de matemàtiques no era la primera vegada que es feia a Catalunya, així doncs, el primer que es va fer, va ser posar-se en contacte amb l'Alberto Herrero i la Laura Morera, ambdós responsables de diferents tallers de matemàtiques.

Malauradament, degut a una estància a l'estranger fins al febrer i després degut a la difícil disponibilitat de les dues parts, va ser impossible poder organitzar una trobada amb la Laura Morera.

Per altra banda, sí que va ser possible trobar-se amb l'Alberto Herrero. L'Alberto és el màxim responsable d'un taller de matemàtiques (*Club Matemàtic Googolplex*) adreçat a alumnes de sisè de primària i primer i segon d'ESO, que es realitza a l'institut de Canet de Mar un dissabte al mes. Aquest taller, a més de l'aproximació a les matemàtiques, serveix als participants, sobretot als de sisè de primària, per començar a familiaritzar-se amb l'institut i amb els companys que es trobaran l'any següent.

El dissabte 1 de desembre es va anar a l'institut de Canet per poder presenciar una de les sessions en primera persona i poder parlar amb l'Alberto sobre el funcionament, les activitats i l'organització del seu taller. La sessió va començar amb un joc d'escalfament. El joc consistia a posar-se tot el grup en una rotllana i un dels participants començava a comptar per l'1. El participant del seu costat deia el 2 i així successivament. La dificultat però, era que no es podia dir cap nombre que fos múltiple de 4 o que contingués aquesta xifra. El participant que deia un d'aquests nombres prohibits, quedava eliminat. Un cop eliminats cinc participants, es va anar a l'aula. Allà es va fer un concurs de decimals del nombre pi. Els participants que ho volien, recitaven de manera impecable un nombre elevadíssim de decimals de pi. Hi havia qui era capaç de recitar-ne deu o dotze i també qui en recitava una quarantena. Un cop acabats els voluntaris per recitar els decimals de pi, es van treballar els "hexaflexàgons" i la banda de Möbius. Totes les activitats eren molt participatives i els participants eren els autèntics protagonistes del taller.

Aquell dia, a l'institut de Canet, a més del taller de l'Alberto, es realitzava una de les jornades de l'*Anem x + matemàtiques*. L'*Anem x + matemàtiques* són unes sessions que organitzen les associacions de professors de matemàtiques de les diferents demarcacions, adreçades a alumnes de quart d'ESO amb una alta capacitat per a les matemàtiques, que pretenen anar més enllà de l'ensenyament curricular. Així doncs, aprofitant l'oportunitat, part del matí es va passar a la sessió de *l'Anem x + matemàtiques*. En aquesta sessió, es notava que els alumnes eren més grans. Els participants treballaven en grups de quatre o cinc persones i el ritme de treball era molt més elevat que en la sessió del *Club Matemàtic Googolplex*. En aquesta sessió es treballava criptografia, i els alumnes, mitjançant un guió, pràcticament no necessitaven l'ajuda de cap professor sinó que ells mateixos, en grups, ja avançaven de manera autònoma.

Un cop vist el funcionament dels dos tallers, es va quedar amb la Mireia Pacreu, coordinadora de l'*Anem x + matemàtiques* a la demarcació de Girona. A la trobada, la Mireia va explicar el seu punt de vista sobre què han de ser aquest tipus de tallers, la importància de connectar les matemàtiques de l'aula amb les matemàtiques de fora de l'aula, la de combinar el treball en grup amb el treball individual o la de realitzar tallers amb estils diferents (pissarra, power-point, etc.) per tal de poder captar l'atenció de tots els participants i captivar-los. A més, amb molta generositat, la Mireia va donar consentiment a utilitzar material creat per les sessions de *l'Anem x + matemàtiques*.

3.3 Planificació de les línies generals

Un cop observats el funcionament i l'organització d'altres tallers similars al que es volia dur a terme es van començar a traçar les línies principals del projecte. S'obrien diferents horitzons i calia anar-los pensant i treballant per aconseguir definir el projecte final.

Una de les primeres qüestions que calia perfilar era a qui s'adreçaria el taller. S'havien pogut observar dos perfils ben diferents de participants i les diferències en la manera de treballar. Es va decidir, que el taller aniria adreçat a alumnes de quart d'ESO i primer de Batxillerat però que en cap cas la porta quedaria tancada a ningú. Tots els alumnes d'altres cursos interessats en el taller també podrien assistir-hi.

Aquest tema va conduir a plantejar-se el perfil dels participants que es volia per al taller. S'havia decidit l'edat, però les condicions que havia de tenir un participant del taller encara no s'havien considerat. Des d'un inici, es va decidir que el taller no aniria adreçat a alumnes amb una alta capacitat matemàtica sinó que aniria adreçat a alumnes amb una alta motivació. Tothom que tingués inquietud i interès per les matemàtiques havia de tenir un lloc al taller i el nivell matemàtic de les sessions havia de ser adaptable a totes les persones que hi participessin.

Decidits el públic objectiu i les condicions dels participants, faltava triar on s'anirien a buscar aquestes persones. Hi va haver dues opcions sobre la taula. La primera, fer un taller a nivell comarcal amb alumnes de diferents instituts, concretament, amb alumnes de l'Institut de Palamós, de l'Institut Baix Empordà (Palafrugell) i de l'Institut de La Bisbal d'Empordà. Aquesta opció permetia arribar a més gent però per contrapartida, generava problemes d'ubicació d'una seu per al taller i de transport per als participants. La segona opció era fer el taller únicament en un d'aquests tres instituts. Aquesta opció permetria que el taller fos més proper i concentrar els participants en un sol punt, evitant els problemes de la primera opció. Per altra banda, hi havia la possibilitat que el nombre de participants fos molt reduït. Finalment, es va decidir que el taller es presentaria inicialment a un dels tres instituts i que si la participació era molt baixa, la proposta s'ampliaria als altres dos. Quin havia de ser l'institut al qual es fes la proposta? La resposta a aquesta pregunta no va ser massa complicada, degut al fet de viure a La Bisbal i haver estudiat a l'institut del poble, es va decidir que l'institut en el qual es proposaria realitzar el taller seria l'Institut de La Bisbal.

En la planificació inicial també es va concretar que el taller tindria entre vuit i deu sessions i que aquestes es durien a terme entre el 23 de gener i el 3 de maig. No es podia deixar de banda el fet de que un cop acabat el taller, encara s'hauria d'acabar el treball de final de grau. Tampoc es podia ometre que abans de començar el taller, s'havia de contactar amb el centre i fer publicitat del taller per tal de trobar participants. A banda del nombre de sessions, es va decidir que aquestes tindrien una llargada aproximada de dues hores, entenent que és una llargada suficient per poder dur a terme diferents activitats però no extremadament llarga com perquè els participants no puguin mantenir la concentració al llarg de la sessió.

Per últim, només faltava decidir com s'encadenarien les sessions i quins temes s'hi tractarien. El primer que es va decidir va ser que cada sessió tractaria una branca diferent de les matemàtiques. Aquest fet serviria per poder mostrar un ventall molt més ampli d'aspectes matemàtics. Per altra banda, aquest fet feia que es perdés continuïtat entre les sessions. Per reforçar aquest punt feble i per aconseguir que els participants es fixessin en les matemàtiques del seu entorn, es va decidir que a cada sessió es proposaria una activitat per dur a terme al llarg de la setmana, entre sessió i sessió. A més, tal i com s'havia vist al taller de Canet amb el joc d'escalfament, es va considerar oportú fer una activitat inicial semblant per a cada taller. Aquesta activitat es va decidir que seria un apunt històric. Cada sessió aniria introduïda per un apunt de la història de les matemàtiques relacionat amb la branca que es treballaria en aquella sessió.

3.4 Contacte amb el centre i l'alumnat

El primer contacte amb l'Institut de la Bisbal van ser per correu electrònic a finals de novembre. En el correu es feien algunes pinzellades del projecte i es transmetia la voluntat de concretar una trobada amb el director i amb responsables del departament de matemàtiques per tal d'explicar correctament i amb tot detall el projecte. La resposta va ser positiva i es va concretar una reunió per al cap de pocs dies. La reunió va ser amb el director del centre i diferents membres del departament de matemàtiques a banda del director, que també pertany a aquest departament.

A la trobada, es van exposar amb més claredat quines eren les directrius del projecte i la voluntat de portar-lo a terme a l'Institut de la Bisbal. La proposta va ser molt ben rebuda i els altres assistents a la reunió des d'un inici van mostrar la seva implicació amb el projecte i la voluntat que es portés a terme en aquell institut. Es va decidir que els professors de matemàtiques donarien veus als seus alumnes i que un cop passades les vacances de Nadal, es tornaria a fer una trobada per acabar de perfilar els últims detalls i per concretar un dia per poder exposar el projecte als alumnes del centre.

La trobada que va tenir lloc la segona setmana després de les vacances de Nadal, va servir per decidir els horaris, els dijous de dos quarts de cinc a dos quarts de set, el nombre de sessions, vuit, les dates, del 14 de febrer al 25 d'abril i l'aula del taller. A més, es va acordar que el dimecres 6 de febrer, es faria una xerrada d'entre cinc i deu minuts, aula per aula, per tal d'informar als alumnes del centre de la possibilitat d'assistir al taller.

Com estava acordat, el dia 6 de febrer al matí, es va anar al centre a exposar el projecte a l'alumnat. Juntament amb el director, en Xevi Codolà, es va decidir anar primer a les aules de quart d'ESO enfocades als Batxillerats científic i tecnològic i a les aules de primer de Batxillerat d'aquestes mateixes modalitats. De mutu acord, es va decidir que en funció dels preinscrits que s'assolissin en aquestes quatre aules, s'aniria a més aules o no. Així doncs, amb el suport del director, que també es va passar el matí enunciant el taller, es va anar a les aules acordades.

La primera aula que es va visitar, va ser la que estava ocupada pels estudiants de quart d'ESO B. Una trentena d'alumnes assentats a les seves cadires esperaven l'exposició. Algunes cares eren conegudes, haver estat molts anys entrenador de futbol al poble i monitor d'un casal d'estiu feia que en un moment o altre s'hagués coincidit amb gairebé la meitat dels alumnes d'aquella classe. El fet de conèixer gran part dels integrants d'aquella classe, inclosa la professora, va fer que l'ambient fos bastant familiar. Es va exposar el projecte emfatitzant que el taller anava adreçat a tothom, no únicament als alumnes amb bones notes a l'assignatura de matemàtiques, que el taller no serien classes de reforç de matemàtiques sinó que es treballarien unes matemàtiques totalment diferents a les que estaven acostumats a veure a l'aula i que els objectius del projecte eren, per aquest ordre, aprendre matemàtiques, reduir la distància entre ells i les matemàtiques i divertir-se realitzant activitats vinculades amb les matemàtiques. A més, es van avançar alguns exemples del que es faria al taller. Una de les coses que més va impactar als alumnes va ser el fet d'enunciar-los que si s'apuntaven al taller de matemàtiques veurien circumferències quadrades.

Al principi semblava que els alumnes no ho veien massa clar. Els horaris eren un problema degut a que la majoria d'alumnes ja feien activitats extraescolars els dijous a la tarda. A més, la idea de fer matemàtiques fora de l'horari escolar no semblava que quallés entre l'alumnat. Es va passar un foli on els alumnes es podien apuntar però no semblava que cap dels alumnes tingués la intenció de fer-ho. Amb la complicitat del director, en aquell moment es va decidir que si el problema era l'horari, es podia canviar als dimarts. Es va dir que tots els alumnes que pensessin que els hi podia interessar el taller, s'apuntessin dient quin dia els hi aniria millor. Els alumnes seguien indecisos. Finalment, es va demanar a un dels coneguts que s'apuntés, que ho provés i que si no li agradava el taller sempre seria a temps a dir que no tornava. Aquest fet va obrir la veda i darrera seu, no sense insistència es va apuntar el seu company de taula, també conegut. Seguidament, es van anar apuntant tots els indecisos dient quin dia els era més favorable fins arribar als tretze preinscrits.

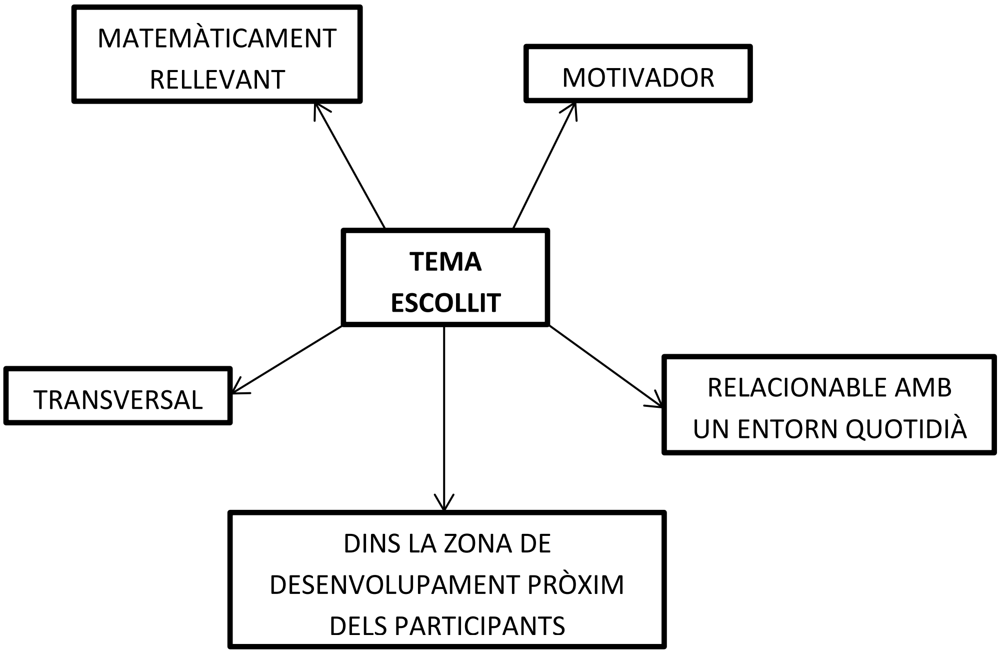
Es va fer la mateixa exposició a les aules de quart d'ESO A i primer de Batxillerat científic i tecnològic. Es van aconseguir un total de trenta-dues preinscripcions. Un cop finalitzades aquestes exposicions, conjuntament amb el director de l'institut es va decidir anar a la classe de segon de Batxillerat. No s'esperava que s'apuntessin gaires alumnes degut al gran volum de feina que suposa aquest curs, però es va considerar que se'ls hi havia de proposar igualment. Es va sortir de l'aula de segon de Batxillerat arribant a quaranta-vuit preinscrits. El nombre de preinscripcions era tan elevat que es va decidir que ja no s'exposaria el taller a cap altra classe.

Les expectatives d'aconseguir entre cinc i deu participants van quedar totalment desbordades i malgrat la falta de confirmació dels alumnes, es va decidir que es farien dos grups del taller, un els dimarts i l'altre els dijous. Aquest fet però, juntament amb la impossibilitat de realitzar el taller algunes de les setmanes previstes degut a les excursions que el centre tenia programades, van fer que el nombre de sessions diferents quedés reduït a sis. Finalment doncs, es farien dotze sessions del taller, sis el grup dels dimarts i sis el grup dels dijous. Es va acordar que el taller començaria el dimarts 19 de febrer.

Aquella mateixa setmana es va enviar un correu electrònic a tots els preinscrits informant de tots els detalls del taller i demanant-los que confirmessin la seva assistència o no assistència al taller. En el correu, també s'informava de la creació d'un grup a la xarxa social *Facebook*, per tal de tenir una comunicació més fluida i assegurar que tothom rebia la informació, i la d'un usuari a la xarxa social *Twitter* (@tallermates) on també es penjaria informació del taller. Finalment, es van inscriure dotze participants al grup del dimarts i vint-i-cinc al grup dels dijous.

3.5 Elecció dels temes

Una de les qüestions més importants per aconseguir un bon funcionament del taller era l'elecció dels temes. A l'hora de fer la tria, es va intentar que els temes complissin tantes condicions de les que s'exposen en el següent esquema com fos possible:



- Motivador: Els temes escollits havien de ser motivadors i interessants per als participants per tal de captivar al màxim la seva atenció. Es considera que el funcionament i el resultat d'una mateixa activitat pot variar molt si qui la realitza està, o no, motivat i amb ganes de fer l'activitat en qüestió.
- Relacionable amb un entorn quotidià: El fet de triar temes que tinguin una relació directe, encara que sigui petita, amb el món que ens envolta, fa que els participants tinguin una referència de la importància d'allò que s'està tractant. Així doncs, hi havia d'haver sempre una relació entre els temes tractats i la vida quotidiana dels participants del taller. D'aquesta manera, a més, s'ajudava a aconseguir un dels objectius principals del projecte, aproximar les matemàtiques als participants del taller.

- Dins la zona de desenvolupament pròxim dels participants: Si s'intenten explicar conceptes nous a una persona, però aquests conceptes es troben molt lluny del coneixement i el nivell que té, és molt difícil que els conceptes s'entenguin i s'assimilin correctament. Per tant, s'havia d'intentar que els conceptes dels temes escollits no es trobessin extremadament lluny del coneixement matemàtic dels participants del taller.
- Transversal: Degut a que els grups no eren homogenis sinó que hi havia integrants de diferents cursos, els temes escollits havien de ser tan transversals com fos possible per tal d'aconseguir que els conceptes explicats interessessin a tothom i es trobessin dins la zona de desenvolupament de tots els participants del taller.
- Matemàticament rellevant: No es podia oblidar que un dels principals objectius del projecte també era que els participants aprenguessin matemàtiques. L'única manera d'assolir aquest objectiu era que els temes triats fossin matemàticament rellevants.

Per tal de poder assegurar el màxim de condicions esmentades anteriorment, es va procurar que cadascun dels temes escollits tingués una relació directa amb algun concepte matemàtic ja vist a classe i es pogués col·locar en un context de la vida quotidiana o connectar-lo amb alguna altra assignatura. A més, es va intentar que en la majoria dels casos, es treballessin conceptes relacionats amb la matemàtica superior intentant exposar-los d'una manera simple i entenedora.

Els temes escollits finalment per a cadascuna de les sessions van ser els següents:

- Criptografia
- Probabilitats
- Geometria
- Miscel·lània matemàtica
- Fractals
- Anamorfismes

Els següents esquemes mostren, per a cada tema escollit, els conceptes matemàtics treballats durant la sessió juntament amb un context quotidià amb el que es pot relacionar i les connexions vinculades a altres assignatures.

CRIPTOGRAFIA

<u>Conceptes coneguts:</u>

- Imatge d'una funció.
- Antiimatge d'una funció.
- Funció inversa.
- Funció identitat.
- Composició de funcions.

<u>Relació amb la matemàtica superior:</u>

- Aplicacions injectives, exhaustives i bijectives.
- Permutacions.
- Transposicions.
- Algorísmica.

<u>Contextos i connexions:</u>

- Contrasenyes.
- Comerç electrònic.

PROBABILITATS

Conceptes coneguts:

- Experiments aleatoris.
- Regla de Laplace.
- Freqüència absoluta i relativa.

Relació amb la matemàtica superior:

- Teoria de probabilitats.
- Teoria de conjunts.
- Llei dels grans nombres.

Contextos i connexions:

- Programes televisius.
- Jocs d'atzar.

GEOMETRIA

Conceptes coneguts:

- Objectes semblants, proporcionalitat, raó.
- Longitud i superfície.
- Seccions còniques.
- Circumferència i mediatriu.

Relació amb la matemàtica superior:

- Definició de distància.
- Geometries no euclidianes.
- Propietats focals de les còniques.

Contextos i connexions:

- Reflexions al mirall. Òptica, física.
- Escala dels mapes.
- Taxi-geometria.

MISCELÀNIA MATEMÀTICA

Conceptes coneguts:

- Àrea del cercle.
- Successions.
- Proporcionalitat.

Relació amb la matemàtica superior:

- Sèries.[1]
- Càlcul de límits.
- Identificacions, espai quocient.
- Superfícies amb vora i/o orientables.
- Teoria de grafs.

Contextos i connexions:

- Successió de Fibonacci a la naturalesa.
- Folis DIN sèrie A.

[1] Aquest concepte no es va treballar pròpiament al cos de la sessió sinó que es va treballar durant l'apunt històric.

FRACTALS

Conceptes coneguts:

- Homotècia.
- Gir.
- Translació.

Relació amb la matemàtica superior:

- Successions de nombres complexos.[2]
- Dimensió de Hausdorff.

Contextos i connexions:

- Fractals a la naturalesa.

ANAMORFISMES

Conceptes coneguts:

- Projeccions i abatiments.
- Sistemes de referència.

Relació amb la matemàtica superior:

- Identificacions, espai quocient.

Contextos i connexions:

- Publicitat.
- Senyalitzacions viàries.
- Art.
- Dibuix tècnic.

3.6 Preparació de les sessions

Ja amb els temes decidits, faltava preparar les sessions del taller. S'havia d'aconseguir transmetre els conceptes d'una manera clara i entenedora però alhora s'havia d'aconseguir que les sessions fossin lleugeres i atractives. Riques matemàticament però entretingudes per als participants.

S'havia decidit que cada sessió tractés un tema diferent. Per tal d'aconseguir donar continuïtat al taller, s'havia considerat la possibilitat de fer una activitat entre sessió i sessió. Aquesta activitat es va decidir que fos un repte setmanal. L'anomenat *repte de la setmana*, proposava als alumnes diverses activitats relacionades amb les matemàtiques que els participants podien realitzar al llarg de la setmana. Tal i com s'havia vist al taller de Canet i s'ha comentat anteriorment, també es va decidir que cada sessió anés introduïda per un apunt històric.

Seguint aquest esquema doncs, cada sessió es podia dividir en tres grans blocs:

- El cos de la sessió.
- El repte de la setmana.
- L'apunt històric.

[2] Aquest concepte no es va treballar pròpiament al cos de la sessió sinó que es va treballar durant l'apunt històric.

Els objectius i els temes tractats en el cos de cada sessió s'han presentat en el punt anterior, "elecció de temes".

Els objectius del repte de la setmana eren els següents:

- Construir continuïtat entre les sessions.
- Aprendre a observar les matemàtiques del nostre entorn més proper.
- Aproximar les matemàtiques a un context quotidià.
- Generar curiositat, inquietud i interès als participants del taller.
- Compartir amb la resta de participants els resultats obtinguts per cadascú, donant valor i importància a la feina feta per cada participant.

El llistat de reptes de la setmana que es van realitzar són:

- Funcions matemàtiques en el nostre entorn. Buscar i fotografiar funcions conegudes a l'entorn.
- Matemàtiques i televisió. Buscar fragments televisius on s'expliquen conceptes matemàtics.
- Errors matemàtics als mitjans. Cercar errors matemàtics als mitjans de comunicació.
- Nombres irracionals. Representar nombres irracionals sense utilitzar xifres numèriques.
- Fotografia matemàtica. Concurs de fotografia matemàtica entre els participants del taller.

Els apunts històrics a l'inici de les sessions tenien els següents objectius:

- Contextualitzar les sessions.
- Situar el tema que es tractaria al llarg de la sessió en el desenvolupament de la matemàtica.
- Dotar els participants de cultura històrica matemàtica.
- Donar el tret de sortida al cos de la sessió.

La llista de personatges presentats i els temes tractats en els apunts històrics és la següent:

- Alan Turing.
- Pierre-Simon Laplace.
- René Descartes.
- La història del nombre pi.
- Benoît Mandelbrot.
- Curiositats de matemàtics: Pierre Fermat i Évariste Galois.

3.7 Realització del taller

El taller de matemàtiques es va realitzar a l'institut de la Bisbal els dimarts 19 i 26 de febrer, 12 i 19 de març i 2 i 23 d'abril i els dijous 21 i 28 de febrer, 7 i 14 de març i 4 i 25 d'abril de dos quarts de cinc a dos quarts de set de la tarda, exceptuant les últimes sessions de cada grup, que es van allargar des de dos quarts de cinc de la tarda fins a dos quarts de deu del vespre.

Aquestes petites variacions entre les dates d'un grup i l'altre, van ser causades per les excursions i els viatges programats pel centre. Per altra banda, la demora de l'última sessió va ser deguda als exàmens parcials de la universitat que van ser del 8 al 12 d'abril i a l'espera d'una setmana per poder comptar amb la col·laboració d'en Sergi del Moral i l'Andrea Richter per a l´última sessió, dedicada als anamorfismes.

La metodologia i el funcionament del taller, tan general com desglossat per sessions, es troba en detall a l'apartat 4 del treball, "metodologia i resultats".

3.8 Anàlisi del taller

A l'hora d'analitzar el taller s'havia de tenir en compte el funcionament de cada sessió del taller. S'havia d'analitzar si s'havien assolit els coneixements esperats i si la metodologia emprada, el ritme de la sessió i la resposta dels participants havien sigut les esperades abans de començar la sessió. L'anàlisi detallat del taller separat per sessions es pot trobar a l'apartat 4 del treball, "metodologia i resultats".

Per altra banda, l'anàlisi del taller no podia acabar aquí. S'havia d'analitzar globalment si s'havien assolit els objectius generals del projecte i els motius que havien portat a l'èxit o al fracàs del taller. L'anàlisi global del taller es troba a l'apartat 5 del treball, "Concordança entre resultats i objectius".

3.9 Difusió de l'experiència

Al llarg del taller, a mesura que s'anaven duent a terme les diferents sessions, es publicaven a les xarxes socials algunes de les activitats que es feien i es mostraven fotografies de la realització d'aquestes activitats. Aquest fet, sumat al boca orella, feien que les activitats que es realitzaven al taller, arribessin més enllà de l'aula.

Un cop acabat el taller, es va decidir que seria una bona idea seguir fent difusió del taller. Es va considerar que a tothom a qui li arribés la informació difosa s'estava aproximant a les matemàtiques i per tant, es valorava aquesta opció com una oportunitat per eixamplar els objectius inicials i poder arribar a molta més gent. Per dur a terme aquesta difusió, es van publicar vídeos de la realització d'algunes de les activitats del taller a Youtube i a les xarxes socials. Aquests vídeos es poden trobar a l'annex A3 del treball. A més, es va fer una crònica del taller que es va publicar a la pàgina web del centre i un article que es va publicar al portal web d'informació local del poble *Totbisbal*. Finalment, es presentarà l'*abstract* d'aquest treball al sisè congrés internacional d'educació, recerca i innovació (*6th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2013*).

Pel que fa referència a la difusió, s'ha de dir que el primer dia de taller, es va demanar la cessió dels drets d'imatge dels participants mitjançant un document que es troba a l'annex A1 del treball.

4 METODOLOGIA I RESULTATS

La realització de cadascuna de les sessions del taller requeria un procés previ. El primer pas, bàsic però delicat, era l'elecció adient del tema que es tractaria en aquella sessió. Aquesta qüestió s'ha tractat extensament a l'apartat 3 del treball, "Desenvolupament del projecte".

Un cop escollit el tema, aquest s'havia d'acotar decidint quins conceptes concrets es volien transmetre. Per poder transmetre amb èxit aquests conceptes, era necessari realitzar activitats que fossin riques matemàticament, però alhora atractives, motivadores i adaptables al nivell dels participants del taller. Així doncs, quan ja estaven decidits el tema i els conceptes que es volien tractar, es feia un llistat de possibles activitats i s'iniciava un procés de recerca d'informació.

En aquesta recerca, generalment es buscava com perfilar les activitats per tal de poder maximitzar les opcions de transmetre correctament els conceptes desitjats. Sovint, la llista inicial d'activitats quedava modificada amb més o menys mesura després de la recerca ja que, tot buscant informació per millorar les activitats, moltes vegades es trobaven altres activitats més adequades per treballar la branca de les matemàtiques que es tractava.

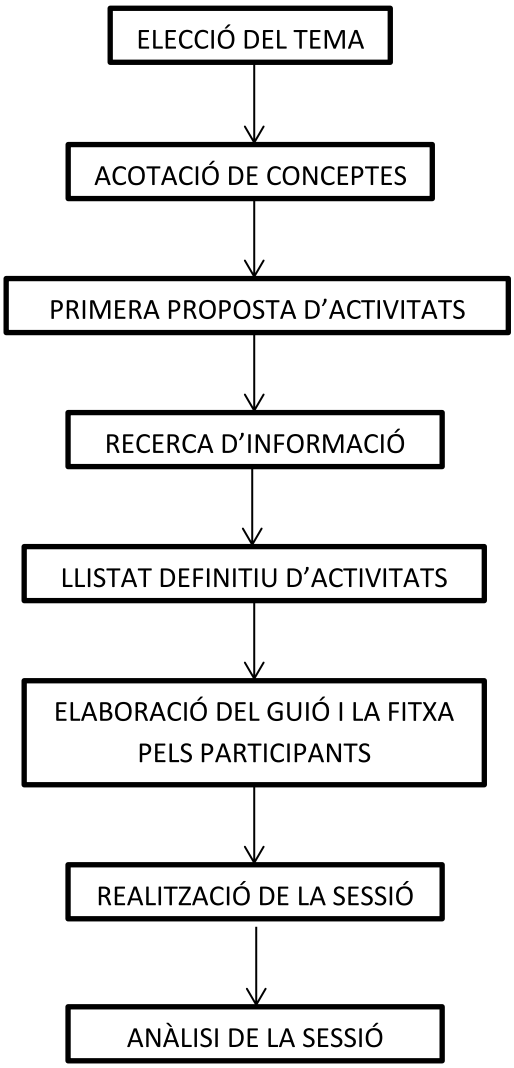
La recerca d'informació, majoritàriament es realitzava mitjançant internet i demanant opinió a diversos professors de matemàtiques coneguts. Un cas a part però, és el de la sessió d'anamorfismes. Per preparar les activitats d'aquesta sessió, es va anar a parlar amb en Sergi del Moral, membre del CREAMAT (Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques) i membre del col·lectiu *granja.cat*, que es dedica a promoure les matemàtiques i la relació que aquestes tenen, sobretot, amb la tecnologia i l'art. La trobada va tenir lloc durant el mes de desembre. Aquest fet va fer que a banda de la preparació de la sessió, en Sergi també pogués transmetre el seu punt de vista sobre què és i què hauria de ser tant la divulgació de les matemàtiques com l'ensenyament d'aquestes. A més, en Sergi va donar la seva opinió envers el projecte i aquesta també va servir per agafar idees pel bon funcionament general del taller tal i com s'havia fet anteriorment amb les visites a l'Alberto Herrero i la Mireia Pacreu.

Durant la xerrada en Sergi, un autèntic amant dels anamorfismes, va fer un passeig molt ampli per aquest món un pèl desconegut on, a més de donar el nom de diverses persones que s'hi dediquen, va mostrar un gran ventall de situacions quotidianes on es troben i va proposar una sèrie d'activitats molt atractives i engrescadores per realitzar. Més endavant, durant els dies previs a la sessió d'anamorfismes, es va proposar a en Sergi de col·laborar amb el taller en la realització de la sessió. La proposta va ser acceptada i en Sergi, acompanyat de l'Andrea Richter, també membre del col·lectiu *granja.cat*, van assistir i van participar de manera activa a la realització de la sessió del taller dedicada als anamorfismes.

Ja amb tota la informació reunida i amb un llistat quasi definitiu d'activitats per a cada sessió, l'últim pas que calia fer era estructurar cadascuna de les sessions i adaptar-la al temps del que es disposava. Per fer-ho, es va decidir que la millor opció era fer un guió per a cada sessió. Així doncs, es va crear un guió de cada sessió amb una explicació per a cadascuna de les activitats proposades i els fonaments teòrics que s'hi trobaven darrera. A cada guió, s'hi va incorporar també l'apunt històric de cada sessió. En la majoria dels casos, aquest es trobava a l'inici de la sessió i, en conseqüència, a l'inici del guió però en alguns casos excepcionals, es va considerar oportú realitzar primer una introducció al tema tractat i posteriorment l'apunt històric. L'altre gran bloc de les sessions, el repte de la setmana, a conseqüència de no tenir una posició temporal fixa en el desenvolupament de la sessió, es va decidir que no formés part del guió sinó que es tractés de manera independent.

A banda del guió, que servia per estructurar les sessions, es va decidir que a cada sessió es donaria als participants una fitxa. En aquesta fitxa, generalment extreta del guió, els participants hi podien trobar les activitats proposades sovint acompanyades de preguntes que servien per guiar les activitats. Algunes de les activitats proposades, si era possible, es duien a terme prèviament per veure'n el funcionament i per evitar imprevistos durant la sessió.

Un cop finalitzada la sessió, se'n feia un anàlisi per valorar-ne el funcionament general, la resposta obtinguda en cadascuna de les activitats i si s'havien assolit els objectius i els conceptes esperats. El següent esquema mostra el procés general seguit en cadascuna de les sessions del taller:



A continuació s'hi troben els guions de cadascuna de les sessions juntament amb un anàlisi, sessió per sessió, valorant el funcionament i els resultats obtinguts durant la sessió i una valoració general dels reptes de la setmana. Les fitxes que es van donar als participants es troben a l'annex A2 del treball juntament amb el material utilitzat per dur a terme cadascuna de les sessions, les fotografies que es van fer.

4.1 Criptografia

4.1.1 Guió

Apunt històric: Alan Turing

Alan Turing neix el 23 de juny del 1912 i mor el 7 de juny del 1954 a l'edat de 41 anys. Els seus pares, anglesos residents a l'Índia, decideixen tornar a Anglaterra per educar-hi els seus fills. Els negocis obliguen als pares d'Alan Turing a combinar els dos països deixant els seus dos fills, John i Alan, a casa d'uns amics quan ells dos són a l'Índia. De ben petit ja apunta a ser un geni i el porten a una escola de nivell. L'escola, està encarada a l'estudi de clàssics i no hi encaixa massa bé, malgrat tot, ell segueix destacant en les assignatures de ciències i resol problemes avançats sense haver fet cap curs de càlcul.

Durant la segona guerra mundial, Alan Turing treballa de forma decisiva en la feina per trencar els codis alemanys. Dona idees per contribuir a trencar tant la màquina enigma com el codi Lorenz SZ 40/42 i és, durant un temps, el cap del Hut 8, la secció que s'encarregava de la lectura dels senyals navals alemanys. Un cop acabada la guerra, segueix treballant al govern com a consultor criptogràfic.

El 1952, Arnold Murray, un noi de 19 anys va ser còmplice d'un robatori a casa seva. Durant la investigació, en Turing reconeix que tenia una relació sexual amb en Murray. Durant aquesta època, l'homosexualitat era considerada una malaltia mental i comportava sancions criminals. A en Turing se'l deixa triar entre la presó o la llibertat condicionada a un tractament hormonal i ell es decanta per la segona opció. A més, perd el seu nivell de seguretat i la feina de consultor criptogràfic del govern. Des del 1952 fins a la seva mort, Turing treballa en el camp de la biologia matemàtica.

El 7 de juny del 1954 mor per enverinament de cianur. Aparentment, menjant una poma coberta de cianur que deixà a mig menjar. La mort es va classificar com a suïcidi però la mare no ho accepta i assegura que és una intoxicació accidental. El seu biògraf, suggereix que l'Alan Turing es va suïcidar de forma ambigua voluntàriament per donar a la seva mare algun motiu per creure. També hi ha qui diu que en Turing va ser assassinat.

L'Alan Turing no aconsegueix mai reconeixement en vida, però aquest reconeixement sí que l'ha rebut una vegada mort. A banda d'altres homenatges, des del 1966, la societat professional d'informàtics més important del món atorga cada any al *Premi Turing*. És el 2009 però, quan el primer ministre de Gran Bretanya, Gordon Brown, demana disculpes al matemàtic pel tracte rebut per la seva homosexualitat en una entrada al seu blog en motiu d'una campanya de rehabilitació del matemàtic organitzada per un altre expert en ordinadors i un defensor dels drets dels gais. Gordon Brown, admetia que: *no és exagerat assegurar que sense la seva increïble contribució, la història de la Segona Guerra Mundial hauria estat una altra.*

Introducció a la criptografia

La criptografia (*kryptos* = amagat i *gráphin* = escriptura) és l'estudi de formes de convertir informació des de la seva forma original cap a un codi incompressible. Amagar la informació que tenen una imatge o un text es pot fer de moltes maneres però a vegades, l'únic que es fa és jugar amb les paraules del propi text, com per exemple, quan plantegem una endevinalla que porta implícita, però amagada la solució. Sovint, aquests jocs de paraules també es poden trobar en el món de la publicitat (http://www.youtube.com/watch?v=IwqZiOfxxzU).

La criptografia moderna utilitza les matemàtiques, juntament amb la informàtica i la electrotècnia i algunes de les aplicacions en les que s'usa la criptografia són les contrasenyes o el comerç electrònic.

Codificar significa expressar un missatge utilitzant un codi però aquest codi no ha de ser necessàriament ocult, per altra banda, xifrar un missatge significa escriure'l utilitzant un codi secret.

De la informació original se'n diu text clar. Aquest missatge inicial, passa per un procés de xifrat mitjançant algorismes, no necessàriament matemàtics, que converteixen el missatge original en un codi il·legible per a tothom que no tingui els mitjans per desxifrar-lo. És a dir, per a tothom que no tingui la clau.

La criptografia és la tècnica de xifrar dades per tal d'evitar que siguin conegudes per a qualsevol persona. Per altra banda, la criptoanàlisi s'encarrega de desxifrar aquestes dades. La unió entre la criptografia i la criptoanàlisi genera la criptologia.

Activitat 1: Xifratge del Cèsar

El mètode del Cèsar és un dels més simples i coneguts. Aquest mètode és un mètode de substitució.

Xifratge: Cada lletra del text clar es substitueix per una altra lletra que estigui un determinat nombre fix de posicions desplaçada a la dreta de l'alfabet. Aquest determinat nombre de posicions se l'anomenarà a partir d'ara d (decalatge). Així doncs, per a cada decalatge el missatge xifrat té un aspecte diferent.

Clau: La clau d'aquest mètode ve determinada per el valor d.

Desxifratge: Per desxifrar el missatge rebut sabent la clau d, s'ha de substituir cada lletra del missatge xifrat per la lletra de l'abecedari que està desplaçada d posicions a la seva esquerra de l'alfabet.

Observacions: En el cas concret en què $d = 13$, el mètode té el nom de ROT13. Aquest cas concret té la característica de que l'algorisme de xifrat i el de desxifrat són el mateix. És a dir, si s'aplica dues vegades seguides ROT13 a un missatge, es torna a obtenir el missatge inicial, és a dir, el text clar.

Exemple: Xifrar DIVENDRES FAVES TENDRES amb la clau $d = 3$.

GLYHQGUHV IDYHV WHQGUHV

Desxifrar NDHRFGN FRGZNAN PBZRAPRZ RY GNYYRE QR ZNGRZNGVDHRF. GERONYYNERZ PEVCGBTENSVN amb el mètode ROT13.

AQUESTA SETMANA COMENCEM EL TALLER DE MATEMÀTIQUES. TREBALLAREM CRIPTOGRAFIA

Activitat 2: Xifratge de Gronsfeld

Aquest mètode és una variació del xifratge del Cèsar i és un mètode polialfabètic. Això significa que s'utilitza més d'un alfabet xifrat, en el nostre cas deu, per donar la clau del missatge i que es canvia d'un alfabet xifrat a un altre quan es passa d'una lletra del text clar a una altra. Per facilitar-ho, s'utilitza la següent taula:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
2	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
3	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
4	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
5	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
6	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
7	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
8	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
9	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Clau: Agafem com a clau una sèrie de dígits amb un màxim de deu dígits. Per exemple (16409).

Xifratge: En aquest cas xifrem el missatge lletra a lletra. La primera lletra del text clar la xifrem utilitzant el xifratge del Cèsar essent d el primer dígit. La segona lletra la xifrarem de la mateixa manera però aquest cop, d serà el segon dígit. Es repeteix aquest procés fins acabar de xifrar el missatge clar, tenint en compte que un cop s'acaben els dígits de la sèrie, aquesta torna a començar.

Per agilitzar el procés es pot utilitzar la taula de la següent manera. La lletra xifrada serà la lletra que es troba a la columna de la lletra del text clar i a la fila del dígit de la clau corresponent.

Desxifratge: Sabent la clau dígit a dígit, per desxifrar el missatge hem de fer el següent: es busca a la fila del dígit de la clau corresponent la lletra del missatge xifrat. Un cop hem localitzat la lletra a la fila adequada, la lletra del text clar que té associada és la que encapçala la columna.

Observacions: El xifratge de Grondsfeld altera la freqüència de les lletres del text de manera que un text clar pot tenir un mateix símbol tres vegades i després del xifratge, el missatge no compleixi aquesta característica.

Només es poden utilitzar deu decalatges diferents del mètode del Cèsar.

Variants: Tal i com està construïda la taula, els únics decalatges del xifratge del Cèsar que es poden utilitzar són els que corresponen a $d = 0, 1, \dots, 9$. Si es vol utilitzar un altres decalatges, es col·loquen a la taula i cadascun queda representat pel dígit corresponent a la seva fila.

Exemple: Xifrar CALONGE, BONA TERRA I MALA GENT amb la clau 16409.

DGPOWHK, FOWB ZIRAB O QAUB MINC

Desxifrar GRNA ERJWVB NW QXDZBB AUC JQCFBT, FFWII amb la clau 1908

FINS DIJOUS NO PODRAS AMB AQUEST, XENIA

Activitat 3. Xifratge de *Playfair*

Per poder utilitzar aquest mètode, que també és de substitució, es necessita una quadrícula de cinc files i cinc columnes. Es col·loquen vint-i-cinc lletres diferents dins de la quadrícula amb l'ordre que es vulgui. Una cosa a tenir en compte si s'utilitza aquest mètode és que hi ha una lletra de l'abecedari que no es pot utilitzar en el text clar. Un exemple de quadrícula en la qual no s'ha utilitzat la lletra Z pot ser el següent:

E	R	D	X	M
S	A	F	N	C
B	H	K	T	L
O	Q	P	G	Y
I	J	V	U	W

Clau: La clau per desxifrar el missatge són la pròpia quadrícula i el següent algorisme.

Xifratge: Per xifrar el text clar s'utilitza el següent algorisme:

1. Primer de tot s'agrupa el text clar per parelles de lletres.
2. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa fila, aquestes es substitueixen cadascuna per la que la segueix. En el cas que una de les dues sigui l'última de la fila, aquesta es substitueix per la primera.
3. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa columna, aquestes es substitueixen per les dues lletres que es troben a sota d'elles respectivament. En el cas que una de les lletres sigui l'última de la columna, aquesta es substitueix per la primera.
4. Si les dues lletres de la parella no es troben ni a la mateixa fila ni a la mateixa columna, aquestes són els vèrtex oposats d'un rectangle. Així doncs, aquestes dues lletres es substitueixen, cadascuna, per la lletra que forma un dels dos vèrtex nous del rectangle i que comparteix fila amb ella.
5. Si les dues lletres de la parella són iguals, es substitueix la primera per la següent de la mateixa fila i la segona per la lletra que s'ha descartat al principi (la lletra que no es troba a la quadrícula).
6. Si el nombre de lletres del text és imparell, l'última lletra del text es substitueix per la següent de la mateixa fila.

Desxifratge: Per desxifrar el missatge, s'utilitza l'algorisme invers a l'anterior. És el següent:

1. Primer de tot s'agrupa, en aquest cas el missatge xifrat, per parelles de lletres.
2. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa fila, aquestes es substitueixen cadascuna per la que la precedeix. En el cas que una de les dues sigui la primera de la fila, aquesta es substitueix per l'última.
3. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa columna, aquestes es substitueixen per les dues lletres que es troben a sobre d'elles respectivament. En el cas que una de les lletres sigui la primera de la columna, aquesta es substitueix per l'última.
4. Si les dues lletres de la parella no es troben ni a la mateixa fila ni a la mateixa columna, aquestes són els vèrtex oposats d'un rectangle. Així doncs, aquestes dues lletres es substitueixen, cadascuna, per la lletra que forma un dels dos vèrtex nous del rectangle i comparteix fila amb ella.
5. Si la segona de les lletres és la que no es troba a la quadrícula, totes dues lletres es substitueixen per l'anterior de la mateixa fila de la primera. Les dues lletres són iguals.
6. Si el nombre de lletres del text és imparell, l'última lletra del text es substitueix per l'anterior de la mateixa fila.

Exemple: Xifrar ABordilsMengenLaBotifarraIDeixenElsFils utilitzant la quadrícula d'exemple.

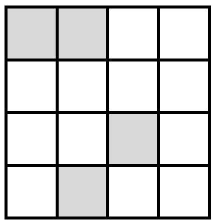
SHqeevbcErtuxsHcOibunfdzsJXruexsMbaNwba

Desxifrar HcSyhbfRdSubqeXtEvnHyssJXtChhxxSq utilitzant la quadrícula d'exemple.

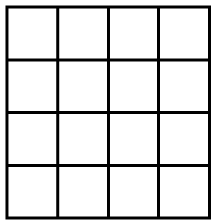
LaCoblaDeFitorUnDiaTocaIUnAltreNo

Activitat 4: Xifratge de "reixa"

Material: Dues quadrícules, una de les quals (quadrícula A) no té alguns dels quadrats, els té foradats. La segona, és una quadrícula normal i corrent. A la imatge, els forats de la primera quadrícula vénen simbolitzats amb un ombrejat.



Quadrícula A



Quadrícula B

Clau: La clau d'aquest mètode ve donada per la quadrícula A. Per saber quins són els quadrats buits de la quadrícula, es poden indicar o bé senyalant-los amb una creu o sinó per exemple assignant-los una lletra o un nombre (notació matricial) a cada quadrat. Per exemple:

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

Exemple 1

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Exemple 2

Així doncs, la clau de la quadrícula A seria {A,B,K,N} a l'exemple 1 i {11,12,33,42} al segon exemple.

Xifratge: Per xifrar un missatge utilitzant aquest mètode es fa de la següent manera. Es col·loca la quadrícula A sobre la quadrícula B. S'escriuen les primeres lletres del missatge, d'esquerra a dreta i de dalt a baix a la quadrícula B en els espais buits de la quadrícula A. Es gira la quadrícula A noranta graus, d'aquesta manera, les primeres lletres del missatge queden tapades per la quadrícula A i es generen nous espais buits a la quadrícula B que no estan tapats per la quadrícula A. S'escriuen les següents lletres del missatge de manera ordenada a la quadrícula B. Es repeteix el procés fins a quatre vegades de manera que els espais buits de la quadrícula A tornaran a trobar-se a la posició inicial.

Si es dóna el cas de no poder encabir tot el missatge a la quadrícula B, és a dir, si el missatge té més de setze lletres en el cas de l'exemple, es pot utilitzar una altra quadrícula igual que la quadrícula B i així successivament anar repetint el procés fins a xifrar totes les lletres del missatge.

Desxifratge: Un cop tenim el missatge xifrat i la clau, per desxifrar-lo s'ha de procedir de la següent manera. Es posa la quadrícula A sobre la quadrícula B. Només es veuran un nombre determinat de lletres, aquest és l'inici del missatge. Es gira la quadrícula A noranta graus, d'aquesta manera, queden visibles unes lletres diferents a les anteriors, llegides amb l'ordre correcte, aquestes lletres són la continuació del missatge. Si es va girant la quadrícula A noranta graus cada vegada, s'anirà desxifrant el missatge.

En el cas de que hi hagi més d'una quadrícula amb part del missatge, un cop s'hagi girat quatre vegades la quadrícula A, es canvia la quadrícula amb missatge per la següent.

Observacions: Si el nombre de lletres no quadra amb el nombre de quadrats, es pot afegir un caràcter o un símbol que no consti en el missatge per separar les paraules o en els espais buits del final.

Variants: Aquest mètode també es pot utilitzar amb quadrícules més grans. En cas de que la quadrícula tingui un nombre parell de quadres, el quadrat del mig no es fa servir ja que quan es fa una rotació de noranta graus, el quadrat central no varia de posició. Una altra variació d'aquest mètode és ordenar els espais buits. D'aquesta manera, si s'ordenen els espais buits, cada cop que es gira la quadrícula A, s'ha d'escriure o llegir en l'ordre que s'han ordenat els espais.

Exemple: Xifrar SETZE JUTGES D'UN JUTJAT utilitzant la clau de la quadrícula A.

S	E	T	E
X	G	X	J
D	U	T	U
N	Z	E	S

X	J	X	J
A	X	X	T
X	X	U	X
X	T	X	X

On les X representen espais buits i el els passos realitzats a cada quadrícula segueixen el següent ordre: blau, verd, vermell i negre.

Activitat 5: Xifratge de transposició de columnes

Aquest mètode és un mètode de transposició bastant senzill.

Xifratge: Es tria un nombre que a partir d'ara serà anomenat n i s'escriu el missatge en files de n lletres de manera que s'obtenen n columnes. Es fa una permutació del conjunt {1,2,3,4,5}, per exemple {3,2,4,5,1} i es col·loca cada columna original al seu lloc corresponent de la permutació. A l'exemple, es col·locaria a davant de tot la tercera columna, la segona columna quedaria altra vegada en segona posició, llavors vindria la quarta, la cinquena i finalment, la primera.

Clau: En aquest mètode la clau ve donada per la permutació, en el nostre exemple la clau ve donada pel conjunt {3,2,4,5,1}. Si es vol, també es pot donar la clau xifrada en forma de paraula. Per fer-ho s'utilitzarà una paraula tal que la permutació ve donada per l'ordre que ocupen les lletres a l'abecedari. En el nostre exemple, la clau en forma de paraula podria ser PORTA. S'observa que la primera lletra de la paraula que trobem a l'abecedari és la A, per tant, la primera columna del text pla serà la última del missatge xifrat. La segona és la O, per tant, la segona columna queda fixa. La tercera és la P, la quarta la R i la última la T. D'aquesta manera, s'obté la clau {3,2,4,5,1}.

Desxifratge: Per desxifrar el missatge un cop la clau és coneguda, l'únic que s'ha de fer és reordenar les columnes i llegir el missatge fila a fila.

Exemple: Desxifrar el missatge utilitzant la clau PORTA

N	I	S	E	D		D	I	N	S	E
A	C	N	T	L		L	C	A	N	T
H	R	I	H	I		I	R	H	I	H
N	U	A	F	A		A	U	N	A	F
T	S	A	P	E		E	S	T	A	P
A	R	I	X	E		E	R	A	I	X
H	L	E	M	O		O	L	H	E	M
T	E	R	E	D	$\xrightarrow{\{3,2,4,5,1\}}$	D	E	T	R	E
A	C	R	P	N		N	C	A	R	P
Q	R	U	E	E		E	R	Q	U	E
S	N	U	R	E		E	N	S	U	R
M	I	O	L	T		T	I	M	O	L
G	A	R	E	T		T	A	G	R	E
A	C	I	E	S		S	C	A	I	E
O	P	G	U	N		N	P	O	G	U
T	M	O	T	E		E	M	T	O	T
I	D	S	F	S		S	D	I	S	F
T	U	A	R	R		R	U	T	A	R

Referències bibliogràfiques de la sessió

[SIN00], [W01], [W02] i [W06].

4.1.2 Anàlisi de la sessió

La primera sessió era una sessió molt especial. Era la que donava el tret de sortida, la que podia deixar entreveure les línies generals del que seria el taller. La valoració general de la primera sessió va ser molt positiva.

El més important d'aquesta primera sessió era que els participants s'adonessin que les activitats que es durien a terme en el taller serien activitats útils per a ells i que malgrat fer activitats noves relacionades amb matemàtiques que ells no havien vist fins el moment, aquestes estaven estretament relacionades amb les que ells sí que coneixien i dominaven.

L'objectiu principal de la sessió es va aconseguir. Poder relacionar l'acció de xifrar i desxifrar amb les funcions que tant treballen a classe va servir per aproximar unes activitats desconegudes a un terreny perfectament conegut pels participants.

Un fet curiós va ser veure que, preguntats per el nombre de possibilitats d'ordenar l'alfabet, es va poder observar la diversitat reunida. "*Ostres sí, l'exclamació de la calculadora.*", "*Factorial? Em sona molt, crec que un dia ens en van parlar a classe.*", "*Això ho devien explicar només a l'altre grup, jo no ho he vist mai.*" Un dels grans reptes del taller era atendre a la diversitat dels participants i aquest aspecte va quedar palès des del primer moment.

Ja s'ha dit que la valoració general de la primera sessió va ser molt positiva. Si es separa per grups però, la valoració no és simètrica. El grup de dimarts, ja des d'un inici més reduït amb un total de dotze inscrits, es va veure condicionat per un examen de tecnologia previst per l'endemà. Pocs minuts abans de començar la primera sessió amb el primer grup, nou dels dotze participants van informar que no assistirien al taller perquè havien d'estudiar tecnologia. Així doncs, la primera sessió de totes es va realitzar amb tres participants. Les expectatives generades eren molt altes i el fet d'haver-hi tantes baixes d'última hora va crear un pèl de neguit. Malgrat això, el funcionament del taller va ser molt bo i amb els tres participants que van assistir al taller es va treballar tal i com estava previst.

Contràriament al que havia passat el dimarts, l'assistència al grup del dijous va ser massiva i van assistir-hi dinou participants. L'ambient de treball va ser molt bo. Es va dividir el grup en dos, uns van començar pels mètodes de transposició i els altres pels mètodes de substitució. Una sorpresa positiva va ser veure que entre diferents grups de treball s'ajudaven els uns als altres malgrat ser de cursos diferents.

El gran nombre d'activitats i el temps necessari per realitzar-les va fer que cap dels grups fos capaç de completar totes les activitats.

4.2 Probabilitats

4.2.1 Guió

Apunt històric: Pierre-Simon Laplace

Pierre-Simon Laplace neix el 23 de març de 1749 a França i mor el 5 de març de 1827 a l'edat de 77 anys. Laplace va ser un brillant matemàtic però també astrònom i físic. Als 24 anys ja se l'anomenava el "Newton de França". És particularment cèlebre per la seva obra sobre mecànica celeste, la qual ell mateix diu que ofereix una completa solució al gran problema mecànic que presenta el sistema solar.

En el camp de les matemàtiques, Laplace va ser apadrinat per D'Alembert, que el va anomenar professor de matemàtiques a l'escola militar per tal de poder desenvolupar els seus estudis. Un dels seus alumnes va ser Napoleó al qual, Laplace, lluny de conformar-se amb la intervenció divina li va dir: "*la hipòtesi de l'existència d'un Déu ho explica tot, però no permet predir res*". Va desenvolupar la teoria de la probabilitat (1775 aprox.), va ser el primer a publicar el valor de la integral de Gauss i va estudiar la transformació de Laplace entre moltes altres coses. En honor seu, existeix un operador diferencial anomenat operador laplacià.

Introducció a la probabilitat

Un experiment aleatori és un experiment del qual es coneixen tots els possibles resultats però no es pot predir quin es produirà. Un exemple d'experiment aleatori és el llançament d'una moneda, del qual sabem del cert que sortirà cara o creu però no podem predir quina de les dues serà.

El conjunt de possibles resultats d'un experiment s'anomena espai mostral (Ω) i els subconjunts d'aquest espai s'anomenen successos o esdeveniments. Un succés elemental és un succés que està format per un únic element de l'espai mostral, un succés segur és el que està format per tot l'espai mostral (Ω) i finalment, un succés impossible és el que no es dona mai ($\emptyset$).

El càlcul de probabilitats és una branca de les matemàtiques que es dedica a calcular les possibilitats (probabilitat) de que pugui ocórrer un determinat succés en realitzar un cert experiment aleatori.

La probabilitat d'un esdeveniment pertany sempre a l'interval [0,1], essent 1 la probabilitat d'un succés segur i 0 la probabilitat d'un succés impossible.

Una molt bona manera de calcular la probabilitat d'un succés d'un experiment aleatori en el cas que tots els successos tinguin la mateixa probabilitat de succeir és la regla de Laplace, que ve donada per la següent fórmula:

$$P = \frac{Nombre\ de\ casos\ faborables}{Nombre\ de\ casos\ possibles}$$

La freqüència absoluta d'un valor és el nombre de vegades que apareix aquest valor al llarg de l'estudi.

La freqüència relativa d'un valor és el quocient entre la freqüència absoluta d'aquest valor i el nombre de repeticions.

La llei dels grans nombres, diu que quan el nombre d'observacions d'un fenomen aleatori és molt gran, la freqüència relativa d'un esdeveniment s'aproxima progressivament a un valor determinat. Aquest valor, és la probabilitat de l'esdeveniment.

Per donar un exemple de la llei dels grans nombres, es pot utilitzar una simulació amb Scratch que es pot troba al següent enllaç:

http://scratch.mit.edu/projects/francescmassich/3034544

Activitat 0: Propietats de la probabilitat

Un cop coneguda la regla de Laplace, es conduirà als participants del taller a deduir certes probabilitats de la probabilitat mitjançant l'exemple del dau per fer-ho, es calcularan entre tots els participants les següents probabilitats i es discutiran diverses preguntes:

$$P(\{Treure\ un\ 2\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\})$$

$$P(\{Treure\ un\ 5\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\})$$

$$P(\{Treure\ un\ nombre\ major\ a\ 3\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\})$$

$$P(\{Treure\ un\ nombre\ parell\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\})$$

1. Quina és la probabilitat de no treure un 2 en el llançament d'un dau?
2. Quina és la probabilitat de no treure un 5 en el llançament d'un dau?
3. Quina és la probabilitat de no treure un nombre major a 3 en el llançament d'un dau?

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

4. Quina és la probabilitat de treure un nombre major a 3 o treure un 2 en el llançament d'un dau?
5. Quina és la probabilitat de treure un nombre parell o treure un 5 en el llançament d'un dau?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad si\ A \cap B = \emptyset$$

6. Quina és la probabilitat de treure un nombre major a 3 o treure un 5 en el llançament d'un dau?
7. Quina és la probabilitat de treure un nombre parell o treure un 2 en el llançament d'un dau?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad si\ A \cap B \neq \emptyset$$

8. Si es llença un dau dues vegades, quina és la probabilitat de treure un 2 a la primera i un 5 a la segona?
9. Si es llença un dau dues vegades, quina és la probabilitat de treure un nombre parell a la primera i un 5 a la segona?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad si\ A\ i\ B\ són\ independents$$

Activitat 1: Problema de Monty Hall

El problema de Monty Hall és el següent: En un concurs de televisió es fa triar al concursant entre tres portes. A darrera d'una de les portes hi ha un cotxe. A l'altra banda de les altres dues portes hi ha una cabra. El concursant tria la porta que considera que té el cotxe i seguidament, el presentador, coneixedor de la posició del premi obra una porta que té una cabra i que no és la que ha triat el concursant. D'aquesta manera, queden dues portes, una amb premi i l'altra sense. El presentador demana al concursant si vol canviar la porta que havia triat inicialment per l'altra que queda sense obrir o si prefereix seguir amb la mateixa porta. Aquest problema, haver de decidir quina és la millor opció, continuar amb la mateixa porta o canviar-la, s'anomena problema de Monty Hall.

Per preparar aquesta activitat, es col·locaran 100 grups de tres gots de plàstic del revés que representen les tres portes. A cada grup de tres gots, es col·locarà una llentia, que representarà el premi, a sota d'un dels gots. Els altres dos gots quedaran buits. Aquesta preparació haurà de ser prèvia a l'inici de la sessió per tan de poder mantenir en secret la posició de les llenties.

Un cop exposat el problema als participants del taller, se'ls farà dir quina creuen que és la decisió que dóna més opcions de guanyar el cotxe:

- És indiferent seguir amb la mateixa porta o canviar-la.
- La millor opció és seguir amb la mateixa porta.
- La millor opció és canviar de porta.

Aquesta tria dividirà el taller en tres grups. El primer grup, el més escèptic rebrà el paper de presentador del concurs. Se'ls donarà la informació sobre la posició del premi a cada grup de tres portes.

Per altra banda, els altres dos grups representaran dos tipus de concursants. Un dels grups representarà un concursant que tria una de les tres portes i no canvia mai la seva decisió encara que el presentador obri una de les portes que no conté cap premi. Per altra banda, l'altre grup representarà un concursant que sempre canvia de decisió quan el presentador li dóna la oportunitat de fer-ho un cop s'ha obert una de les portes buides.

Es representarà el concurs de les portes deu vegades amb cada grup i, excepte als que fan de presentadors, es deixarà decidir als participants del taller si volen canviar de grup. Es tornarà a representar el concurs deu vegades més amb cada grup i altra vegada, es deixarà triar als participants del taller si volen canviar de grup. Així successivament, els participants del taller podran triar fins a cinc vegades, inclosa la inicial, a quin grup volen pertànyer.

El que s'espera d'aquesta activitat és que, degut a la llei dels grans nombres, un dels grups guanyi el joc moltes més vegades que l'altre i que, a mida que es va deixant triar el grup als participants, aquests vegin quin dels dos grups té més opcions de guanyar i la diferència de persones entre un grup i l'altre es vagi fent més gran.

Un cop finalitzada la representació del concurs cent vegades, cinquanta conservant la porta inicial i cinquanta canviant-la, els participants del taller han de veure que la decisió que té mes probabilitats de victòria és la de canviar la decisió inicial.

Malgrat saber la solució del problema, per explicar la resolució i el rerefons matemàtic que hi ha darrera d'aquest problema, s'utilitzarà un fragment de la pel·lícula "*21 Blackjacks*" on un professor d'universitat planteja el problema als seus alumnes i un d'ells el resol tenint en compte les probabilitats que hi ha darrera de cada esdeveniment del problema (http://www.youtube.com/watch?v=14KMJyf5N7E). El vídeo, a més, servirà per introduir el repte de la setmana, que serà "matemàtiques i televisió".

Finalment, es resoldran els dubtes que encara quedin sobre el problema de Monty Hall.

Activitat 2: Càlcul de probabilitats de diferents esdeveniments mitjançant la llei dels grans nombres

En aquesta activitat es dividirà el taller en 5 grups i cada grup treballarà en una zona diferent. Cada zona tindrà un experiment aleatori diferent assignat. Els grups doncs, hauran de repetir moltes vegades un mateix experiment. El límit vindrà donat o bé per un cert nombre de repeticions o bé per temps, intentant realitzar l'experiment el màxim nombre de cops.

Cada grup tindrà un foli on apuntarà quantes vegades ha repetit l'experiment i quantes vegades ha sortit cada resultat.

Un cop cada grup hagi realitzat tots els experiments, es podrà calcular la freqüència relativa de cada succés. A més, per tenir més repeticions i en principi una freqüència relativa que s'aproximi més a la probabilitat del succés, es poden sumar les repeticions fetes per tots els grups.

ZONA A: Xinxetes.

Experiment: Llençar una xinxeta a l'aire.

Espai mostral: $\Omega = \{Caure\ amb\ la\ punxa\ amunt, Caure\ amb\ la\ punxa\ avall\}$

En aquest experiment hi ha dos factors molt important a tenir en compte que poden fer variar el resultat. Un és la forma de la xinxeta. Si la xinxeta és més o menys corbada o si la punxa és més o menys llarga. L'altre és el pes i el repartiment d'aquest. Així doncs, abans de començar les repeticions de l'experiment només es pot demanar als participants que diguin intuïtivament quin dels dos successos consideren més probable o si els consideren tots dos equiprobables. Malgrat la incertesa inicial, un cop realitzades totes les repeticions es veurà que la freqüència relativa de "caure amb la punxa amunt" és aproximadament 0,8.

ZONA B: Daus (suma).

Experiment: Llençar dos daus i sumar-ne els valors obtinguts.

Espai mostral: $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

En aquest experiment les probabilitats de cada succés són conegudes, així doncs, la previsió és que la freqüència relativa de cada succés tendeixi a la probabilitat corresponent a mida que es va augmentant el nombre de repeticions. Les probabilitats de cada succés són les següents:

$$P(2) = P(12) = \frac{1}{36};\ P(3) = P(11) = \frac{1}{18};\ P(4) = P(10) = \frac{1}{12}$$

$$P(5) = P(9) = \frac{1}{9};\ P(6) = P(8) = \frac{5}{36};\ P(7) = \frac{1}{6}$$

ZONA C: Daus (diferència).

Experiment: Llençar dos daus i calcular la diferència dels valors obtinguts.

Espai mostral: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

En aquest experiment les probabilitats de cada succés són conegudes, així doncs, la previsió és que la freqüència relativa de cada succés tendeixi a la probabilitat corresponent a mida que es va augmentant el nombre de repeticions. Les probabilitats de cada succés són les següents:

$$P(0) = P(3) = \frac{1}{6};\ P(1) = \frac{5}{18};\ P(2) = \frac{2}{9};\ P(4) = \frac{1}{9};\ P(5) = \frac{1}{18}$$

ZONA D: Monedes de Buffon (pauta).

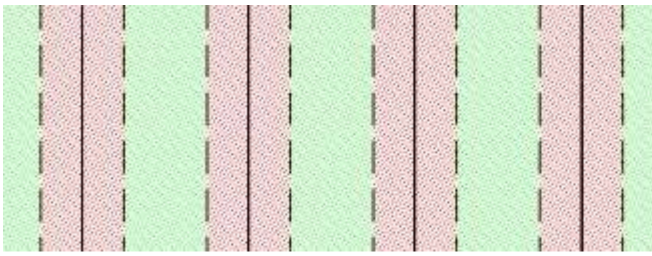
Experiment: Llençar una moneda sobre un foli pautat on la distància entre dues línies consecutives és dues vegades el diàmetre de la moneda.

Espai mostral:

$\Omega = \{La\ moneda\ toca\ alguna\ línia, La\ moneda\ no\ toca\ cap\ línia\}$

En aquest experiment les probabilitats de cada succés són conegudes, així doncs, la previsió és que la freqüència relativa de cada succés tendeixi a la probabilitat corresponent a mida que es va augmentant el nombre de repeticions. La probabilitat de cada succés no és tan evident com en el cas dels daus, hem de veure doncs quina és la probabilitat de cada succés.

Perquè una moneda toqui una línia, el centre d'aquesta ha de caure a una distància menor o igual al seu radi. Així doncs, si es tracen dues paral·leles a cada línia a una distància igual al radi de les monedes, es veu clarament que la zona on ha de caure el centre de la moneda per no tocar cap línia ocupa la mateixa superfície que la zona on ha de caure la moneda per tocar alguna de les línies de la pauta. La següent imatge mostra de color verd les zones on la moneda no tocarà cap línia si el seu centre hi cau a sobre i de color vermell les zones on, si el centre de la moneda hi cau, algun dels seus punts tocarà una de les línies de la pauta.



$$P(Tocar\ alguna\ línia) = P(No\ tocar\ cap\ línia) = \frac{1}{2}$$

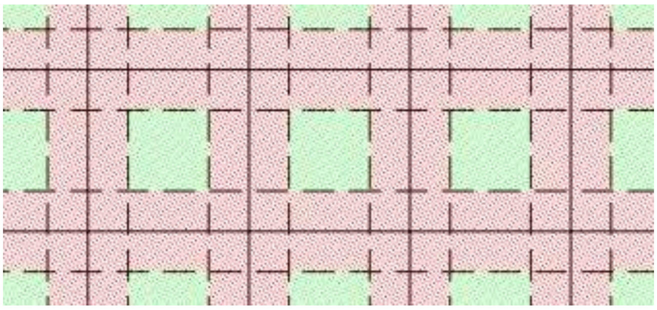
ZONA E: Monedes de Buffon (quadrícula).

Experiment: Llençar una moneda sobre un foli quadriculat on el costat de cada quadrat mesura dues vegades el diàmetre de la moneda.

Espai mostral: $\Omega = \{La\ moneda\ toca\ alguna\ línia, La\ moneda\ no\ toca\ cap\ línia\}$

En aquest experiment les probabilitats de cada succés són conegudes, així doncs, la previsió és que la freqüència relativa de cada succés tendeixi a la probabilitat corresponent a mida que es va augmentant el nombre de repeticions. Les probabilitats en aquest cas tampoc són evidents, així doncs, amb un raonament similar a l'anterior, s'ha de veure quina és la probabilitat de cada succés.

Com s'ha vist anteriorment, perquè una moneda toqui una línia, el centre d'aquesta ha de caure a una distància menor o igual al seu radi. En aquest cas però, hi ha moltes més línies, per tant, quan es tracin dues paral·leles a cada línia a una distància igual al radi de les monedes, la zona on ha de caure el centre de la moneda per no tocar cap línia ocuparà menys superfície que en el cas anterior. Si s'observa només un quadrat de la següent imatge, es veu clarament que la zona vermella ocupa el triple que la zona verda.



$$P(Tocar\ alguna\ línia) = \frac{3}{4};\ P(No\ tocar\ cap\ línia) = \frac{1}{4}$$

Activitat 3: Torneig de probabilitats

Aquesta activitat constarà de diferents partides, organitzades com un torneig, del següent joc de probabilitats:

Nombre de persones per partida: Dues.

Material per partida: Tres xinxetes, dos daus, tres monedes i vint cartes de cinc colors diferents, quatre de cada color, que fan referència als cinc experiments aleatoris treballats a l'activitat 2. A cadascuna de les cartes hi ha descrits tres successos. A més, cada carta té una puntuació, que pot anar d'un a quatre punts, que depèn de la probabilitat dels successos. Menor probabilitat equival a major puntuació i viceversa.

Funcionament: El jugador A tria una carta de les vint i realitza l'experiment aleatori corresponent a la carta que ha triat. Si els resultats de l'experiment corresponen amb els tres successos de la carta, independentment de l'ordre, el jugador es queda la carta i suma la seva puntuació. Altrament, es retira la carta. Un cop el jugador A ha acabat el seu experiment, és el jugador B que tria una de les dinou cartes que queden i procedeix de la mateixa manera. La tercera carta la tria el jugador B, la quarta i la cinquena el jugador A i així successivament fins arribar a la última carta que se la quedarà el jugador A.

Quan s'hagin acabat les cartes, guanya el jugador que ha aconseguit una major puntuació. En cas d'empat, guanya el jugador que ha aconseguit més cartes de 4 punts. En cas que segueixi l'empat, guanya el jugador que ha aconseguit més cartes de 3 punts primer, 2 punts després i finalment 1 punt. En cas que continuï l'empat, es triarà una carta de manera conjunta i guanyarà el primer que aconsegueixi els successos corresponents a la carta triada.

Referències bibliogràfiques de la sessió

[WUS89], [W01], [W02] i [W05].

4.2.2 Anàlisi de la sessió

La sessió de probabilitats va servir per confirmar les bones sensacions que havia deixat el grup dels dijous de la primera sessió. Les activitats van ser molt participatives i la majoria dels nois i noies es van implicar plenament en cadascuna d'elles.

Abans de començar la primera activitat, la del problema de Monty Hall, es va demanar als participants que triessin quina creien que era l'estratègia correcta a seguir. Tal i com s'esperava, la majoria dels participants van triar l'opció de quedar-se amb la porta triada inicialment. En el grup del dijous només quatre participants van optar per l'estratègia de canviar de porta mentre que en el grup del dimarts, que era menys nombrós, només hi va haver un participant que optés per aquesta estratègia. En tots dos grups però, malgrat repetir l'experiment cinquanta vegades, la freqüència relativa no es va anar aproximant a la probabilitat teòrica fins al final. Finalment, l'estratègia de canviar de porta va aconseguir guanyar un 56% dels cops que es va fer l'experiment el dimarts i un 55% el dijous mentre que l'estratègia de conservar la porta inicial va guanyar un 38% de les vegades que es va repetir l'experiment el dimarts i un 37% el dijous. Malgrat no assolir els resultats teòrics que preveien un 66% de victòries per l'estratègia del canvi, la majoria dels participants van veure que era millor aquesta estratègia i, tal i com s'esperava, a mitja activitat van decidir canviar d'estratègia.

En la segona activitat els resultats obtinguts es van aproximar molt als resultats teòrics esperats. Les següents taules mostren les freqüències absolutes, les freqüències relatives, el percentatge obtingut i el percentatge esperat obtingudes sumant totes les repeticions del total dels participants del taller.

Suma de daus	Freq. Absoluta	Freq. relativa	% obtingut	% esperat
2	12	0,025	2,50%	2,78%
3	29	0,06	6%	5,56%
4	37	0,077	7,70%	8,33%
5	63	0,131	13,10%	11,11%
6	61	0,13	13%	13,89%
7	96	0,2	20%	16,67%
8	54	0,11	11%	13,89%
9	57	0,12	12%	11,11%
10	29	0,06	6%	8,33%
11	29	0,06	6%	5,56%
12	12	0,025	5%	2,78%
Total	479	1	100%	100%

Diferència de daus	Freq. absoluta	Freq. relativa	% obtingut	% esperat
0	59	0,16	16%	16,67%
1	109	0,29	29%	27,78%
2	87	0,22	22%	22,22%
3	65	0,17	17%	16,67%
4	34	0,09	9%	11,11%
5	28	0,07	7%	5,56%
Total	382	1	100%	100%

Xinxetes	Freq. absoluta	Freq. relativa	% obtingut	% esperat
Punxa amunt	917	0,69	69%	-
Punxa avall	417	0,31	31%	-
Total	1334	1	100%	100%

Pauta Buffon	Freq. absoluta	Freq. relativa	% obtingut	% esperat
Toca línia	365	0,51	51%	50%
No toca línia	356	0,49	49%	50%
Total	721	1	100%	100%

Quadrícula Buffon	Freq. absoluta	Freq. relativa	% obtingut	% esperat
Toca línia	639	0,75	75%	75%
No toca línia	213	0,25	25%	25%
Total	852	1	100%	100%

Altra vegada, el temps va fer que el grup del dimarts no acabés totes les activitats. No va ser així en el grup del dijous on el concurs de probabilitats va servir per veure que els participants havien entès els conceptes exposats a la segona activitat i cadascú seguia l'estratègia que creia adient tenint en compte les probabilitats trobades prèviament.

4.3 Geometria

4.3.1 Guió

Apunt històric: René Descartes

René Descartes neix el 31 de març de 1596 a França i mor l'11 de febrer de 1650 a Suècia a l'edat de 53 anys. Descartes va ser un filòsof racionalista francès molt important del segle XVII. És considerat el pare de la filosofia moderna i encara en aquest camp, va ser l'autor de la frase *cogito ergo sum* (penso aleshores existeixo). En el camp de les matemàtiques, és l'inventor de les coordenades cartesianes i el propulsor de la geometria analítica.

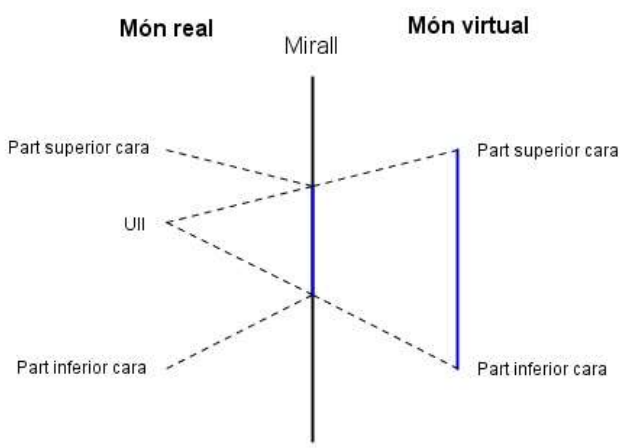
El seu perfil racionalista el va fer arribar molt més lluny que altres matemàtics anteriors a ell ja que es va tornar formular totes aquelles qüestions que es donaven per resoltes i va postular els seus enunciats amb tota la precisió requerida. Descartes va revolucionar el món de la geometria analítica a partir de l'aparició de la seva obra *Geometria* (1637). El gran avenç en aquest sentit va ser el sistema de coordenades cartesianes, que permet determinar qualsevol punt en el pla a partir de les seves distàncies a dos eixos fixes i perpendiculars utilitzant el conveni correcte de signes.

A més, Descartes va treballar en la teoria de les tangents a corbes i va ser el primer a utilitzar el concepte de límit. A ell es deu també, el fet d'utilitzar les lletres de l'inici de l'alfabet per a les quantitats conegudes i lletres del final de l'alfabet per a les incògnites.

Activitat 1: Mirall

Per realitzar aquesta activitat es demanaran dos voluntaris entre els participants. Un no tindrà massa feina ja que tan sols haurà d'aguantar un mirall a una alçada i una distància de l'altre voluntari adients. L'altre voluntari, haurà d'emmirallar-se i amb un retolador no permanent, s'haurà de dibuixar la silueta de la cara al mirall. No és necessari dibuixar els detalls de la cara, únicament amb la silueta és suficient. És probable que dibuixar la silueta de la cara no sigui senzill. Per aconseguir una millor precisió és aconsellable tancar un ull. Aquest fet s'anomena paral·làxia.

Un cop la silueta estigui dibuixada al mirall, s'ensenyarà a la resta de la classe. És impactant veure que el cap dibuixat per el voluntari és considerablement més petit que el cap real del participant. De fet, les distàncies queden reduïdes a la meitat, es tracta d'un dibuix a escala 1:2. El perquè les distàncies queden reduïdes a la meitat es pot veure a la imatge següent:



Es pot veure perfectament, que aquesta és una aplicació del teorema de Tales que trobem a la vida quotidiana. Una observació que es pot fer, és que la superfície que delimita la silueta és una quarta part de la superfície real de la cara. Això és degut a que si les distàncies són semblants amb una certa raó, les àrees ho són amb la raó de les distàncies al quadrat i els volums amb la raó de les distàncies al cub.

Per aprofundir una mica amb aquest aspecte, es poden plantejar diferents preguntes i situacions per treballar aquesta propietat.

Activitat 2: Càlcul de la superfície i la longitud de costa del Baix Empordà

La realització d'aquesta activitat serà per parelles. A cada parella se l'hi repartirà un mapa del Baix Empordà amb una certa escala juntament amb un tros de fil i un paper quadriculat. L'objectiu d'aquesta activitat és que cada parella pensi i trobi una estratègia per determinar la superfície i la longitud de la costa del Baix Empordà de la manera més acurada.

Una de les maneres de calcular la longitud de la costa del Baix Empordà és resseguir-la el màxim acuradament amb el fil. Un cop fet, mirar la longitud de fil utilitzada i utilitzant l'escala del mapa, saber quina és la longitud de la costa.

Per calcular la superfície, es pot procedir d'una manera similar, amb l'ajuda del paper quadriculat es pot mirar quina superfície ocupa el Baix Empordà en el mapa. Utilitzant l'escala, i recordant que la semblança de la superfície té per raó l'escala del mapa al quadrat, es pot calcular la superfície total del Baix Empordà.

Un cop cada parella hagi trobat una superfície i una longitud de costa, es farà una mitjana entre tots els resultats obtinguts. En principi, s'haurien d'obtenir 700 quilòmetres quadrats de superfície i 78 quilòmetres de costa aproximadament.

Activitat 3: Generació de còniques amb paper vegetal

Les còniques, són les corbes d'intersecció entre un con i un pla. Depenent de la posició del pla respecte el con, obtenim diferents tipus de cònica. De còniques n'hi ha de quatre tipus: circumferències, el·lipses, paràboles i hipèrboles. A la imatge de la següent pàgina es pot veure la vista de perfil de cada secció.

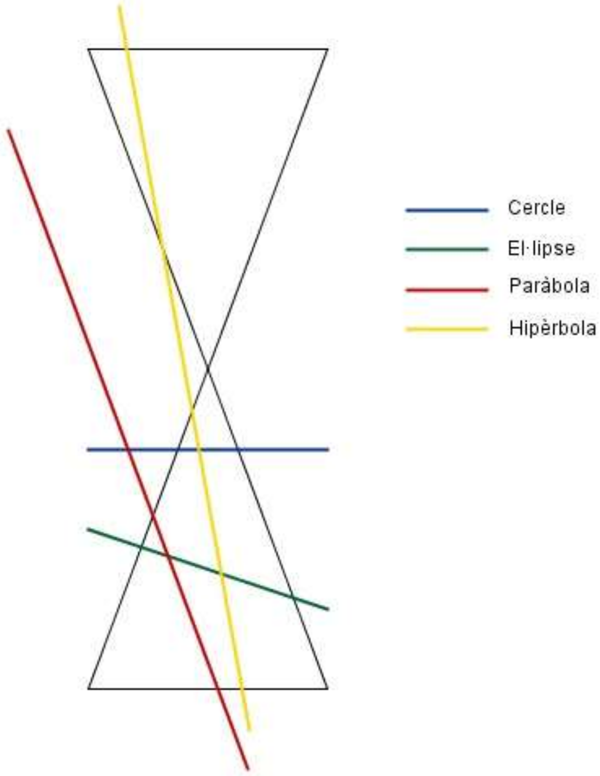
En aquesta activitat, el que es farà és generar tres tipus de còniques (el·lipses, paràboles i hipèrboles) mitjançant paper vegetal. L'activitat es realitzarà individualment, i cada participant realitzarà una de les següents tres opcions:

1. El·lipse: Dibuixa una circumferència força gran i centrada al paper vegetal. Marca'n el centre C i un punt interior P. Aquest punt P pot ser qualsevol punt interior, però és millor si es tria més proper a la circumferència que al centre. Plega el paper vegetal sobreposant el punt P a un punt de la circumferència i marca molt bé el plec al paper. Repeteix aquest procés per el màxim nombre de punts de la circumferència possibles intentant que els punts de la circumferència utilitzats estiguin ben repartits al llarg de la circumferència. Observaràs que els plecs són les rectes tangents a una el·lipse de focus el centre de la circumferència C i el punt P. Depenent de la posició del punt P s'obtindrà una el·lipse més o menys excèntrica.

2. Paràbola: Posa el paper vertical i dibuixa una recta horitzontal a la zona inferior que parteixi el foli en dues parts. A la part superior, marca un punt P. Aquest punt P pot ser

qualsevol , però és millor si es tria centrat. Plega el paper vegetal sobreposant el punt P a un punt de la recta i marca molt bé el plec al paper. Repeteix aquest procés per el màxim nombre de punts de la recta possibles intentant que els punts de la recta utilitzats estiguin ben repartits al llarg de la recta. Observaràs que els plecs són les rectes tangents a una paràbola de focus el punt P i directriu la recta. Depenent de la posició del punt P s'obtindrà una paràbola amb més o menys obertura.

3. Hipèrbola: Dibuixa una circumferència no massa gran i descentrada al paper vegetal. Marca'n el centre C i un punt exterior P. Plega el paper vegetal sobreposant el punt P a un punt de la circumferència i marca molt bé el plec al paper. Repeteix aquest procés per el màxim nombre de punts de la circumferència possibles intentant que els punts de la circumferència utilitzats estiguin ben repartits al llarg de la circumferència. Observaràs que els plecs són les rectes tangents a una hipèrbola de focus el centre de la circumferència C i el punt P. Depenent de la posició del punt P, s'obtindrà una hipèrbola amb més o menys excentricitat.



Activitat 4: Geometria del taxi

L'objectiu d'aquesta activitat és canviar la percepció que l'única distància existent és la euclidiana. Per fer-ho, es definirà la funció distància com una funció de X^2 a R on X és un conjunt d'elements i R el conjunt de nombres reals que satisfà:

1. $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0\ sii\ x = y. \forall x, y \in X$
2. $d(x,y) = d(y,x). \forall x, y \in X$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \forall x, y, z \in X$

Per demostrar que l'euclidiana no és l'única distància existent, s'introduirà la mètrica de Manhattan, on la distància entre el punt $A = (x_a, y_a)$ i el punt B= (x_b, y_b) és:

$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Un cop coneguda aquesta mètrica, es recordaran quins són cadascun dels següents llocs geomètrics i es compararan com queda representat cadascun utilitzant les dues distàncies.

1. Mediatriu: La mediatriu entre dos punts A i B és el lloc geomètric dels punts que són equidistants a A i a B. És a dir, tots els punts de la mediatriu equidisten de A i B.
2. Circumferència: La circumferència és el lloc geomètric dels punts que equidisten a un altre punt C que s'anomena centre. La distància entre tots aquest punts i el centre s'anomena radi.
3. El·lipse: La el·lipse és el lloc geomètric dels punts per els quals la suma de les distàncies a dos punts anomenats focus és constant.
4. Hipèrbola: La hipèrbola és el lloc geomètric dels punts per els quals la diferència entre les distàncies a dos punts anomenats focus és constant.

Si es dibuixen circumferències utilitzant la mètrica de Manhattan, s'observa que sorprenentment les circumferències són quadrades.

En el cas de les mediatrius, s'observa que la mediatriu entre dos punts que es troben a una distància senar no existeix, i que la mediatriu entre dos punts que es troben a una distància parell, es comporta de manera diferent segons la posició dels punts encara que la distància sigui la mateixa.

Referències bibliogràfiques de la sessió

[W01], [W02], [W04] i [W05].

4.3.2 Anàlisi de la sessió

La sessió de geometria, entre d'altres coses va servir per confirmar la implicació dels participants. Lluny quedava el primer dia amb només tres persones i es consolidaven dos grups molt nombrosos de deu i quinze participants aproximadament.

Aquesta sessió del taller es va veure alterada pel repte de la setmana que havia sigut matemàtiques i televisió. Com es comentarà més endavant, a conseqüència de la proposta d'un participant, es va preparar una activitat sobre la Llei d'Hondt que va ocupar part de la sessió i en el grup del dimarts, va fer que s'hagués d'ometre l'activitat tres.

Ja centrats en la sessió de geometria, l'activitat del mirall va impactar molt als participants. Mai s'havien parat a pensar que en una activitat tan diària com mirar-se al mirall hi pogués haver algun rerefons matemàtic.

Un altre fet curiós de la sessió va ser veure com en l'activitat de buscar la superfície del Baix Empordà cada parella feia servir una estratègia diferent. Hi va haver parelles de participants de quart d'E.S.O. que utilitzaven l'estratègia correcta mentre que n'hi va haver de segon de Batxillerat que no va seguir-la. Finalment però, tots els participants van acordar quina era la millor estratègia per calcular correctament la superfície desitjada.

L'última activitat va servir per poder explicar rigorosament als participants el concepte de distància. Al principi se'ls va fer molt estrany allunyar-se de la distància euclidiana, però finalment van agafar la idea i es van sorprendre moltíssim quan van veure circumferències quadrades tal i com se'ls hi havia promès el dia que se'ls hi va presentar el projecte.

4.4 Miscel·lània matemàtica

4.4.1 Guió

Aquesta sessió no tindrà una temàtica concreta sinó que s'intentarà treballar diferents conceptes curiosos de les matemàtiques que, a priori, no tenen relació entre elles i que degut a la durada del taller no s'hi podia dedicar una sessió sencera.

Apunt històric: La història de π (pi)

La cultura anglosaxona, acostuma a escriure numèricament les dates de manera inversa a la que s'utilitza a Catalunya. S'escriu primer el mes i seguidament el dia. Per exemple, el 27 d'agost, s'escriu numèricament 8.27.

Durant la setmana d'aquesta sessió hi ha el 14 de març (3.14), és per això que l'apunt històric d'aquesta setmana servirà per introduir la importància i les aproximacions de π al llarg de la història.

π és una constant irracional que relaciona la longitud d'una circumferència amb el seu diàmetre. La cerca del major nombre de decimals del nombre π ha estat un dels objectius de nombrosos científics al llarg de la història.

La primera aproximació de π s'atribueix a l'escriba egipci Ahmes l'any 1800 aC, descrit en el *Papir Rhind* on s'utilitza un valor aproximat de π assegurant que l'àrea del cercle és la d'un quadrat, el costat del qual és equivalent al diàmetre del cercle disminuït en 1/9.

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}(4r^2) \rightarrow \pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}16049$$

Més endavant, el segle III a.C., Arquímedes va ser capaç de determinar de manera rigorosa que el valor de pi estava comprès dins d'un interval. El mètode utilitzat per Arquímedes era inscriure i circumscriure polígons regulars en una circumferència i calcular el perímetre d'aquests polígons. Arquímedes va començar amb un hexàgon i va anar doblant el nombre de costats fins arribar a un polígon regular de 96 costats. Arquímedes va aconseguir acotar el valor de pi dins l'interval següent:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \rightarrow 3{,}14085 < \pi < 3{,}14286$$

Un nou pas en el càlcul de π va arribar amb el desenvolupament del càlcul infinitesimal i amb el descobriment de les sèries infinites que permeten calcular π amb la precisió que es desitgi si s'afegeix una quantitat prou gran de termes a la sèrie. Al voltant de l'any 1.400 es troba la primera d'aquestes sèries. És la següent:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

El problema d'aquesta sèrie però, és que convergeix molt lentament. Posteriorment, se'n van trobar d'altres, de convergència més ràpida. Un altre exemple és el següent:

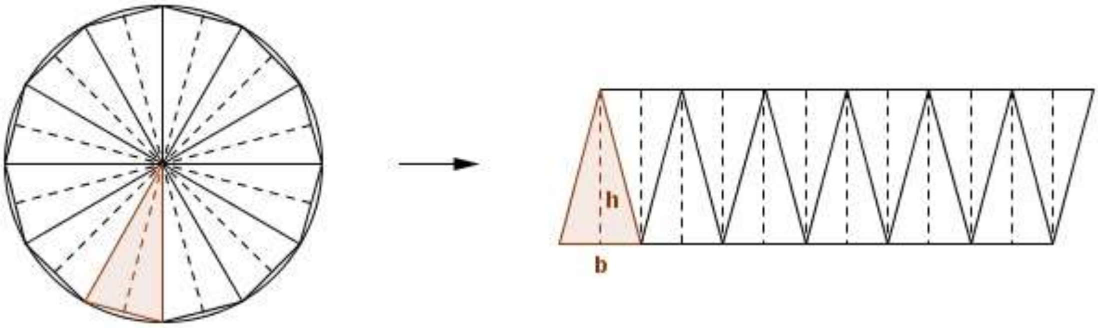
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Finalment, a principis del segle XX, la irrupció de la informàtica permet calcular un nombre molt gran de decimals de pi i per tant, aquest problema deixa de ser principal pels matemàtics. El 2002 ja s'havien calculat un 1.241.100.000.000 decimals de π.

Activitat 1: Deducció que la superfície d'un cercle és πr^2

Es defineix π com la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre, però és conegut que la superfície del cercle s'obté multiplicant π per el quadrat del seu radi. En aquesta activitat s'intentarà deduir aquesta igualtat.

El cercle es pot dividir amb un cert nombre de triangles iguals d'una certa alçada (h) i base (b). Un cop es tenen aquests triangles, aquestes es poden col·locar fàcilment de manera que formin un rectangle partint-ne un d'ells tal com mostra la figura següent:



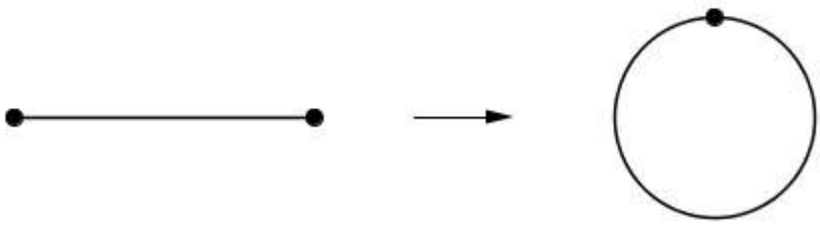
Quina seria l'alçada d'aquests triangles si fossin molt estrets i n'hi hagués moltíssims? Quina seria en aquest cas la base del rectangle format tornant a col·locar els triangles?

Un cop vist que l'alçada d'aquests triangles tan petits és equivalent al radi de la circumferència i que la base del rectangle mesura π multiplicat per el radi de la circumferència, ja que és la meitat de la longitud de la circumferència, és fàcil veure que l'àrea del rectangle és πr^2 i que aquesta és també la superfície del cercle.

Activitat 2: Banda de Möbius

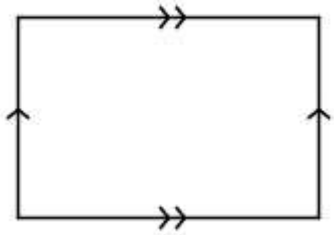
La topologia és la branca de la geometria que s'ocupa de les propietats de les superfícies i les figures en general però no es preocupa de la mesura de longituds o angles. En topologia, es pot estirar i deformar qualsevol figura, és per això que s'acostuma a descriure la topologia com la geometria de plastilina. En topologia, un "donut" i una tassa són la mateixa figura.

En topologia, la identificació de dos conjunts és considerar que són el mateix. Així doncs, si s'identifiquen els dos extrems d'un segment, s'obté una circumferència:



Si en comptes d'identificar els dos extrems d'un segment, s'uneixen en el mateix sentit dos costats oposats d'un rectangle s'obté un cilindre o banda. Si a més, s'identifiquen els costats que han quedat lliures (en el mateix sentit), s'obté un torus.

Cilindre



Torus

Què passa si s'identifiquen dos costats oposats d'un rectangle però aquesta vegada en sentit contrari? En aquest cas, s'obté una banda de Möbius.

Banda de Möbius

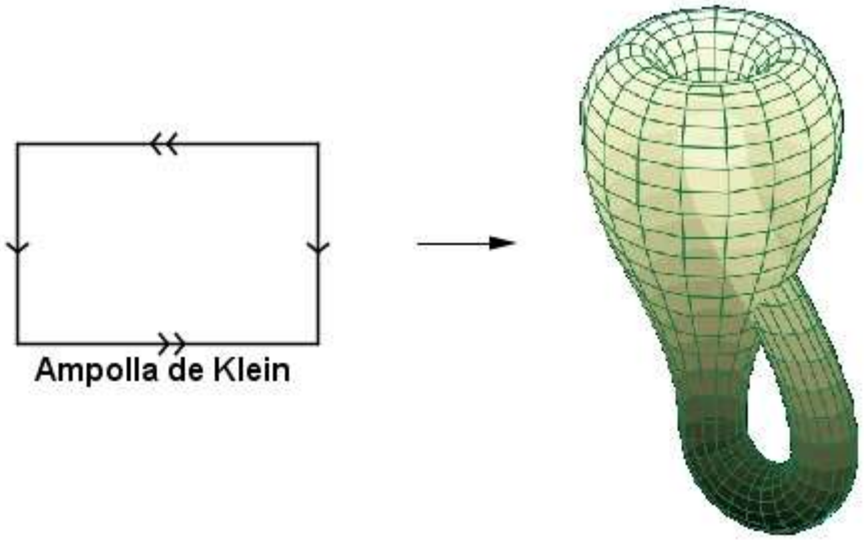
Quines propietats té aquesta banda? Alguna de les peculiaritats de la banda de Möbius són les següents:

- Té una única vora.
- Té una única cara.
- No és una banda orientada.

Per descobrir aquests i d'altres peculiaritats de la banda de Möbius, es demanarà als participants que construeixin diferents bandes, normals i de Möbius, que realitzin diferents activitats i que en comparin els resultats:

1. Utilitza una banda de cada tipus. Ressegueix les vores de cadascuna. Quantes n'has trobat en cada cas?
2. Marca un punt centrat a cada banda. Fes una línia rodant la banda fins que tornis a arribar al punt inicial. Què observes en cada cas?
3. Dibuixa una fletxa que assenyali un dels laterals de la banda. Avança una mica i dibuixa una altra fletxa amb el mateix sentit. Repeteix el procés fins a tornar a trobar la fletxa inicial. Què observes en cada cas?
4. Retalla la banda per la meitat utilitzant la línia de l'activitat 2. Quantes bandes has obtingut? Són de Möbius aquestes bandes?
5. Utilitza ara dues bandes noves (una de cada tipus). Retalla-les però aquesta vegada fes-ho a una distància del lateral equivalent a un terç de l'amplada en comptes de a la meitat. Quantes bandes has obtingut? Són de Möbius aquestes bandes? Què passaria si es retallessin a una distància de la vora equivalent a un quart de l'amplada total?
6. Utilitza ara les últimes bandes (una de cada tipus). Uneix-les utilitzant cola adhesiva amb un angle recte i retalla-les, sense desenganxar-les, cadascuna per la meitat. Què creus que obtindràs? Què has obtingut? T'ha sorprès?

Finalment, si els costats oposats del rectangle que han generat la banda de Möbius s'identifiquen (en el mateix sentit) s'obté una ampolla de Klein:



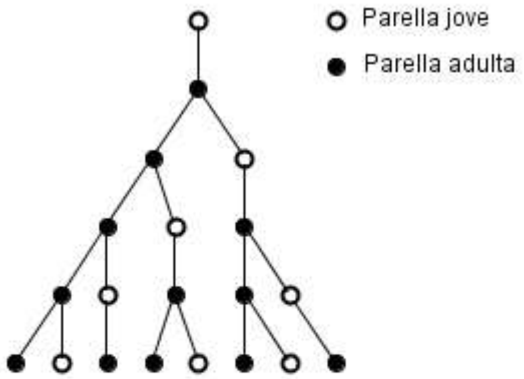
Activitat 3: Successió de Fibonacci, raó àuria i altres proporcions com la sèrie DIN

Aquesta activitat està pensada perquè els participants del taller descobreixin per si sols la successió de Fibonacci. Un cop descoberta, trobar-ne les propietats i veure on es pot trobar a la vida real. Un cop coneguda la successió de Fibonacci, s'introduirà el nombre auri i la proporció àuria i finalment, es farà una menció a la proporcionalitat que segueixen i les propietats que tenen els folis DIN.

Per descobrir la successió de Fibonacci, s'utilitzarà el mateix problema que va fer servir Leonardo de Pisa el 1202 en el *Liber Abaci.* El problema és el següent:

Volem saber quantes parelles de conills hi haurà al final d'un any, sota les condicions següents:

- Al principi de l'any només hi ha una parella jove.
- Una parella jove tarda un mes a ser una parella adulta.
- Una parella adulta genera una parella jove cada mes.
- Cap parella de conills mor.



La successió, si $F_n = nombre\ de\ conills\ el\ mes\ n$, segueix la següent relació de recurrència:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Aquesta és doncs, la successió de Fibonacci. Els primers termes són els següents:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 \ldots$$

Aquesta successió és molt important a la natura. En dos dels llocs on es pot trobar són per exemple en carxofes o pinyes. Si es mira el nombre d'espirals en una direcció i en l'altre es pot veure que aquests nombres són dos nombres consecutius de la successió de Fibonacci. Es interessant portar una carxofa i una pinya al taller perquè els participants puguin comprovar-ho ells mateixos.

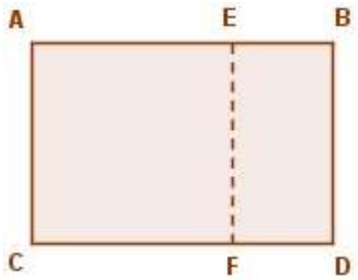
El que es pot fer a continuació és veure quina és la relació entre un nombre de la successió i l'anterior. És fàcil veure que aquesta successió nova convergeix ràpidament:

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	233/144
1	2	1,5	1,667	1,6	1,625	1,615	1,619	1,6176	1,6182	1,6180	1,6181

La successió tendeix al nombre auri:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398875$$

Com ha de ser un rectangle com el següent perquè el rectangle EBDF sigui semblant al rectangle ABDC tenint en compte que AC=AE?



Considerem el costat AC=1 i el costat AB=x. La proporció del rectangle ABDC és $\frac{x}{1}$. Com que AE=AC, el costat EB=x-1 i el costat EF=1. Així doncs, la proporció del rectangle EBDF és $\frac{1}{x-1}$.

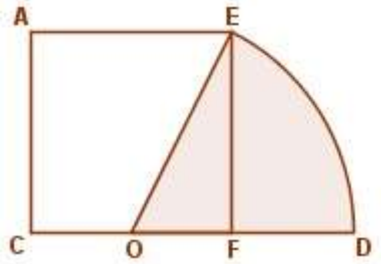
Es vol que els dos rectangles siguin semblants, així doncs, les seves proporcions han de ser iguals. Igualant les seves proporcions s'obté la següent equació:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

L'única solució positiva d'aquesta equació és:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Hem vist doncs que els rectangles que compleixen aquesta propietat són rectangles de proporció àuria. Com es poden construir aquests rectangles? El procés és el següent:



Es considera el quadrat AEFC de costat la unitat i el punt O el punt mig del segment CF. La longitud OF és $\frac{1}{2}$ i és la mateixa que la del segment CO. Utilitzant el teorema de Pitàgores en el triangle OEF, es pot veure que el segment OE té una longitud $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Utilitzant un compàs centrat a O, es pot dibuixar l'arc ED. És evident que OD=OE, de manera que la longitud CD és la següent:

$$CD = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

S'ha aconseguit doncs, un rectangle amb proporció àuria.

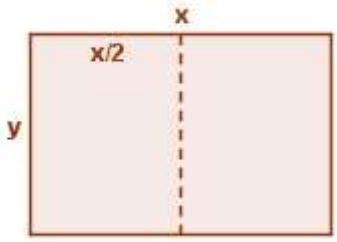
Un vídeo amb exemples de proporcionalitat àuria i la successió de Fibonacci a la natura és el següent:

http://vimeo.com/9953368

Hi ha molts altres rectangles amb proporcions conegudes, un dels més importants i més relacionats amb la vida quotidiana són els folis de format DIN sèrie A.

Els folis DIN tenen una propietat que no tenen la majoria de folis, si es dobleguen per la meitat, s'aconsegueixen dos rectangles semblants al rectangle original. D'aquesta manera, si pleguem un A4 per la meitat, s'obtenen dos folis A5. En sentit contrari, un A3 està compost per dos A4. Com més petit sigui el nombre de la mida A, més gran és el foli.

Les mides d'un DIN A4 són 210mm per 297mm. La raó de la longitud per l'alçada és 1,4142. Com és que la proporció adequada perquè es compleixi aquesta propietat és 1,4142? El raonament és el següent:



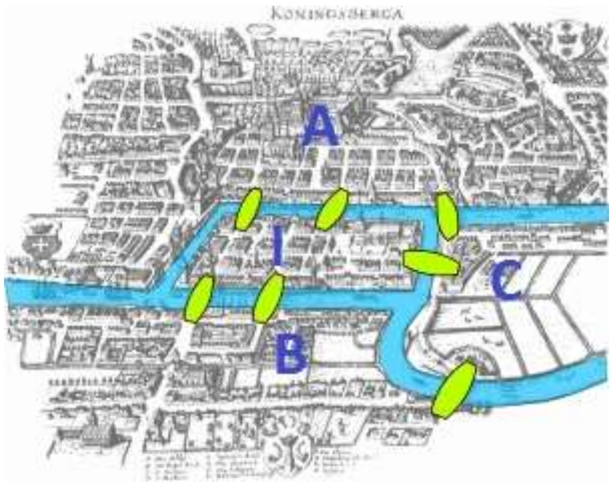
Es considera un rectangle qualsevol, d'amplada x i d'alçada y. La propoció del rectangle gran és $\frac{x}{y}$ i la del rectangle petit és $\frac{y}{x/2}$. Es vol que aquests dos rectangles siguin semblants, per tant, igualant les dues proporcions s'obté la següent equació:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}} \rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$$

S'ha vist doncs, que la relació entre tots els DIN de la sèrie A és 1,4142 però, com s'enumeren i perquè? El DIN de la sèrie A més gran és l'A0. Aquest compleix la propietat que la seva superfície és d'1 metre quadrat. Les seves mides són 841mm per 1189mm. A partir d'aquí, si es divideix l'A0 per la meitat, s'obtenen dos A1. Així successivament, es poden aconseguir tots els DIN de la sèrie A.

Activitat 4: Problemes de grafs

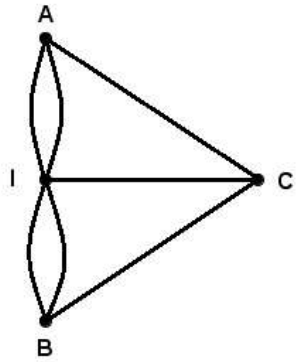
La següent imatge és de la ciutat de Königsberg, actualment Kaliningrad, famosa pels set ponts que creuen el seu riu Pregolya. En el segle XVIII es va plantejar la següent pregunta. És possible sortir a fer una volta passant una sola vegada per cada pont sense necessitat de començar i acabar el passeig al mateix punt?



Per realitzar aquesta activitat, es dividirà el grup en quatre, cadascun dels subgrups intentarà trobar una solució sortint des d'una de les zones de terra diferent. Com que no és possible s'afegirà un pont entre l'illa (I) i la zona de terra superior (A) i es tornarà a exposar el problema. Aquesta vegada, els dos grups que tenen un nombre senar de ponts han de trobar almenys una solució. I si es posa ara un pont entre la zona de terra inferior (B) i la zona de terra que té riu a dalt i a baix (C)? En aquest cas tots els grups han d'aconseguir trobar almenys un camí que sigui solució del problema plantejat. Perquè?

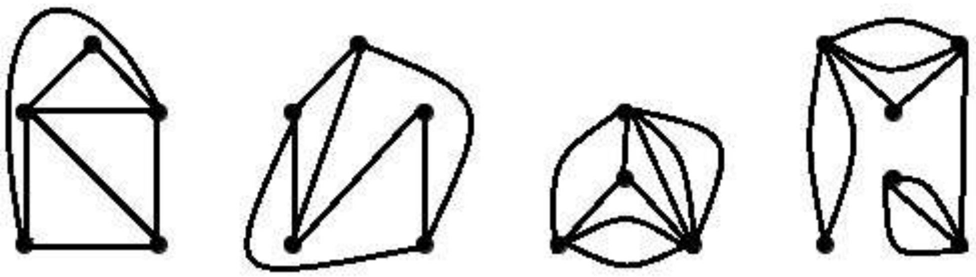
És fàcil de veure que quan s'arriba a un tros de terra, si es vol marxar per un altre pont que encara no s'ha fet servir es necessiten com a mínim dos ponts. Així doncs, si en un tros de terra hi ha un nombre parell de ponts sempre es podrà arribar per un i marxar per un altre. D'aquesta manera, si tots els trossos de terra tenen un nombre parell de ponts, es podrà començar i acabar al mateix lloc. Si hi ha dos trossos de terra on hi ha un nombre senar de ponts, l'únic camí possible utilitzant una sola vegada tots els ponts serà començar en un d'aquests trossos de terra i acabar a l'altre. Altrament, si hi ha un nombre diferent a zero o dos trossos de terra amb un nombre de ponts senar, no és possible trobar un camí que passi per tots els ponts.

En la teoria de grafs, l'important són les connexions. Les zones de terra es representaran amb punts (vèrtex) i les connexions, els ponts, amb línies (arestes) que uneixin els punts corresponents sense importar la forma ni la longitud d'aquestes línies. Així doncs, l'abstracció del problema dels set ponts de Königsberg és la següent:



El nombre d'arestes que es troben en un vèrtex s'anomena grau del vèrtex. Així doncs, serà possible un passeig passant per tots els ponts si els graus de tots els vèrtex del graf és parell o si hi ha dos vèrtex de grau senar.

Abans d'explicar la solució del problema dels set ponts, es pot demanar als participants si són capaços de dibuixar els següents grafs sense aixecar el llapis. Començant i acabant al mateix punt? Des de qualsevol punt? La solució de cadascun dels grafs tindrà a veure amb el nombre de vèrtex senars que tingui i l'explicació és la mateixa que la dels ponts de Königsberg. Alguns dels possibles grafs a dibuixar són els següents:



Un camí que passa per totes les arestes, independentment de les vegades que passa per un vèrtex s'anomena camí eulerià. Si aquest camí comença i acaba en el mateix vèrtex, s'anomena cicle eulerià.

Un cop s'ha vist què és el grau d'un vèrtex i quines són les condicions que s'han de complir per poder tenir un camí o un cicle eulerià, es pot proposar dibuixar grafs donant els graus de cada vèrtex.

És possible dibuixar un graf amb un nombre senar de vèrtexs de grau senar? La resposta a aquesta pregunta és negativa, ja que totes les arestes tenen un principi i un final, per tant, la suma total dels graus ha de ser dues vegades el nombre d'arestes, que és un nombre parell.

Un arbre és una graf que no té cap cicle. Un cop s'ha passat per un vèrtex, és impossible tornar a aquest sense passar dues vegades per alguna aresta. Una activitat possible és dibuixar tots els arbres que tenen cinc i sis vèrtex.

Activitat 5: Quadrats màgics

Un quadrat màgic és una quadrícula quadrada on a cadascuna de les cel·les s'escriu un nombre enter diferent de manera que el sumatori de cada fila, el sumatori de cada columna i el sumatori de les dues diagonals coincideix en el mateix nombre.

És evident que tots els quadrats 1x1 són màgics, per això no es treballaran en aquest taller.

És possible trobar un quadrat màgic 2x2? Si n'existís algun, tindria la forma del següent quadrat, però s'ha de veure si compleix les condicions de quadrat màgic:

a	b
c	d

La suma de les files i la suma de les columnes ha de coincidir, per tant, observant la primera fila i la primera columna es pot deduir la igualtat $a+b=a+c$. Perquè es compleixi aquesta igualtat, s'ha de complir que $b=c$ però tots els nombres d'un quadrat màgic han de ser diferents. Per tant, no existeix cap quadrat màgic 2x2.

Com que ja s'ha vist que els quadrats màgics 2x2 no existeixen, s'intentarà trobar-ne un 3x3 utilitzant els nombres consecutius 1,2,...,8,9. Com que és un quadrat relativament petit, es pot construir pel mètode d'assaig i error. Aquesta activitat, si hi ha suficients participants, es plantejarà com un role-play. Cada persona serà un nombre i s'haurà de construir una quadricula de persones on cadascú representarà un nombre i la suma de cada fila, cada columna i cada diagonal ha de coincidir en el mateix nombre.

Aquest problema, si s'utilitzen els nou primers nombres consecutius (començant per l'1) és de solució única llevat de rotacions i simetries respecte la cel·la, la fila o la columna central. Se'n pot deduir fàcilment la posició d'alguns nombres.

La primera observació que s'ha de fer és veure que la suma de tots els nombres és 45. Així doncs, com que hi ha tres files, cadascuna ha de sumar 15. El mateix raonament serveix per a les columnes. Un cop s'ha vist que totes les files, totes les columnes i totes les diagonals han de sumar 15, la segona observació a fer és que la suma de les dues diagonals, la fila central i la columna central és 60 i que en aquesta suma s'utilitzen totes les caselles una sola vegada exceptuant la casella central que s'utilitza quatre vegades. Si s'anomena c al valor de la casella central, es pot deduir la següent equació:

$$45+3c=60$$

Resolent l'equació es troba que el valor de la casella central és 5. Un cop és conegut que la casella central s'ha d'ocupar amb el 5 tot és més senzill però encara es pot fer una altra observació. Si s'utilitza l'1 per una casella que fa cantonada, automàticament l'última casella d'aquella diagonal que queda buida s'ha d'ocupar amb el 9. La fila i la columna de l'1 segueixen lliures, per tant, es necessiten quatre nombres per ocupar-les, els quals s'han d'agrupar per parelles i cada parella ha de sumar 14. Els nombres més alts que encara no s'han utilitzat són 8, 7, 6 i 4 la suma dels quals és 25 per tant, no és possible separar-los amb parelles que sumin 14 cadascuna. Per tant, s'ha provat que l'1 no pot ocupar cap cantonada i que el 5 ha d'ocupar la casella central. Aquesta informació permetrà simplificar la resolució del quadrat màgic 3x3, també anomenat *quadrat de Lo Shu,* que és el següent:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Com ja s'ha comentat, aquest és l'únic quadrat màgic 3x3. És possible trobar un quadrat màgic 4x4? La resposta, és que utilitzant els nombres consecutius de l'1 al 16 hi ha 880 quadrats màgics diferents. El quadrat màgic que encapçala la llista d'aquests 880 és el gravat a l'obra *Melancolia I* d'Albecht Dürer, realitzat l'any 1514. Aquest quadrat màgic té moltes propietats, algunes de les quals s'exposen a continuació:

- El sumatori de cadascuna de les files, columnes i diagonals és 34.
- Si es divideix el quadrat 4x4 en quatre quadrats 2x2, aquests també sumen 34.
- La suma de les quatre cantonades, les quatre caselles centrals, les caselles centrals de la primera i l'ultima fila i les caselles centrals de la primera i l'ultima columna també és 34.
- Els dos nombres centrals de l'última fila formen l'any en que es va fer l'obra, 1514.

El quadrat màgic pintat per Albecht Dürer a *Melancolia I* és el següent:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Com a curiositat, no es pot passar per alt que la façana de la Sagrada Família llueix un quadrat màgic 4x4. És el següent:

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Referències bibliogràfiques de la sessió

[CRI09], [STE77], [W01] i [W02].

4.4.2 Anàlisi de la sessió

Segurament aquesta sessió va ser la que va anar menys bé. El fet de tenir només sis sessions va fer que molts dels aspectes que es volien tractar haguessin de quedar exclosos. Aquest va ser el motiu per el qual es va decidir fer una sessió que no tingués un tema concret sinó que toqués diferents temes que es consideraven importants o atractius per treballar amb els participants.

Voler tractar moltes coses va fer que es preparessin moltes activitats diferents i que aquestes no estiguessin relacionades. L'accés d'ambició va fer que en cap dels dos grups es poguessin completar totes les activitats.

El grup del dijous va ser el primer de realitzar aquesta sessió i les activitats es van realitzar en l'ordre previst. No es va aconseguir arribar a la quarta activitat. En el grup del dimarts es va canviar l'ordre per poder realitzar la cinquena activitat ja que el nombre de participants quadrava amb els necessaris per dur-la a terme.

A la primera activitat un dels passos més complicats per als participants va ser el pas al límit. Només els mes grans van ser capaços de veure per ells mateixos aquest pas. L'activitat de la banda de Möbius va ser molt manipulativa i aquest fet va fer que l'ambient de treball en tots dos grups fos molt bo. El més impactant de l'activitat de la sèrie de Fibonacci va ser poder comprovar de primera mà que en una pinya i en una carxofa i per extensió, a moltes flors, fruits i plantes de la naturalesa, s'hi poden trobar dos nombres consecutius de la successió. La quarta activitat, malauradament no es va poder realitzar amb tot el detall que s'hauria desitjat i va quedar un pèl fluixa. Per altra banda però, el role-play del quadrat màgic va ser una activitat molt atractiva per als participants que la van realitzar i la seva implicació va ser màxima malgrat no trobar-la una activitat gens trivial.

Malgrat tocar molts temes diferents i no poder acabar totes les activitats en cap dels dos grups, la valoració general de la sessió va ser molt positiva degut al bon treball realitzat pels participants i perquè es va aconseguir transmetre els conceptes desitjats.

En el següent enllaç s'hi pot trobar un vídeo del role-play realitzat amb el grup del dimarts per resoldre el quadrat màgic 3x3.

http://www.youtube.com/watch?v=Q9d1WtdjYJE

4.5 Fractals

4.5.1 Guió

Introducció als fractals

És complicat definir què és exactament un fractal, però es pot intentar fer una aproximació pot ser definir un fractal com un objecte que compleix les següents propietats:

1. És autosemblant.
2. Es genera iterativament.
3. Té dimensió fraccionària.

Que un fractal sigui autosemblant, significa que si ens fixem en una part de l'objecte, aquesta és semblant a l'objecte total. Aquesta propietat és equivalent a la invariància d'escala. És a dir, independentment de l'escala que utilitzi, l'objecte obtingut és el mateix.

Un fractal es genera mitjançant un procés iteratiu. Per obtenir un fractal, s'apliquen diferents transformacions geomètriques contractives (homotècia + gir + translació).

Que un objecte tingui dimensió fraccionària significa que la seva dimensió no ve donada per un nombre enter sinó per una fracció. Per saber la dimensió d'un objecte, es pot utilitzar la tècnica *Box Counting*. Sigui N el nombre de parts iguals en què dividim l'objecte inicial i sigui r el factor d'escala. Aleshores, un objecte té dimensió d si:

$$Nr^d = 1 \to d = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Apunt històric: Benoît Mandelbrot

Benoît Mandelbrot neix a Varsòvia el 20 de novembre de 1924 i mor el 14 d'octubre de 2010 als Estats Units. Mandelbrot és considerat el pare de la geometria fractal. L'any 1975 Mandelbrot va crear el terme fractal per descriure alguns objectes matemàtics. El 1977 va publicar el llibre *Fractals: Form, chance and dimension* on destaca que aquests objectes, considerats curiositats fins aleshores, són una eina útil per la interpretació de molts aspectes del món real. En aquest llibre també va enumerar les propietats comunes dels fractals: l'autosemblança, la invariància d'escala i la dimensió de Hausdorff no sencera. L'any 1982 Mandelbrot va ampliar aquestes idees en el llibre *The fractal geometry of nature*. En aquest llibre mostra com els fractals són un model per a les formes de les muntanyes, les línies de les costes, l'estructura dels planetes i el sistema arterial entre d'altres.

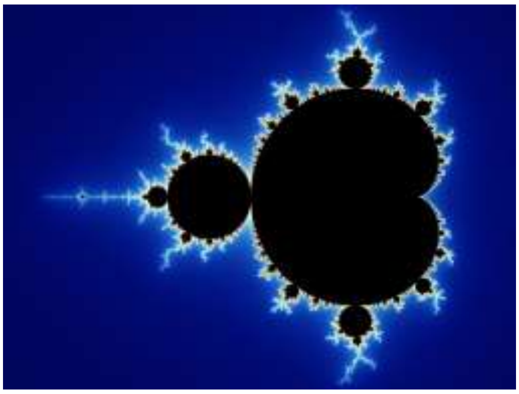
En honor seu, el 1982 es va anomenar Conjunt de Mandelbrot a un subconjunt de nombres complexos que ha esdevingut un dels temes importants en dinàmica complexa. El Conjunt de Mandelbrot és el conjunt fractal més conegut i estudiat i la seva definició és la següent:

Sigui c un nombre complex qualsevol. A partir de c es construeix la següent successió:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

Si aquesta successió queda acotada, aleshores c pertany al conjunt de Mandelbrot. Altrament, c no hi pertany.

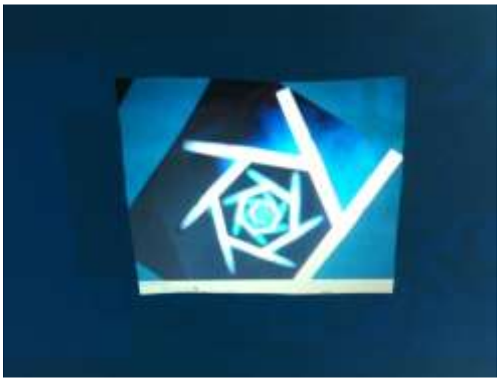
La següent imatge mostra una representació del Conjunt de Mandelbrot:



Activitat 1: Fractals amb l'ordinador

Una activitat molt atractiva per fer amb els participants del taller és generar fractals amb l'ordinador utilitzant una web cam i fulls de colors col·locats a l'exterior de la pantalla.

Enfocant amb la càmera la pantalla, s'aconsegueixen figures sorprenents.



En comptes d'utilitzar fulls de colors, es poden utilitzar també fulls amb patrons.

Activitat 2: Descobriment de fractals coneguts

Aquesta activitat està pensada perquè els participants generin iterativament tres fractals molt coneguts (el Conjunt de Cantor, el Triangle de Sierpinski i el Floc de neu de Koch) i en dedueixin i en comprovin les seves propietats: raó homotètica, gir, translació i dimensió.

2.1 Conjunt de Cantor:

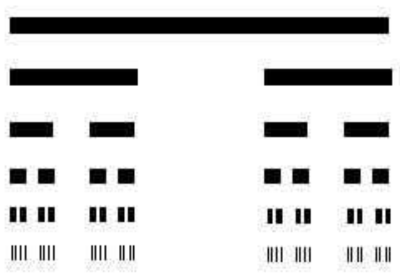
Dibuixa el segment d'una recta. Aquest segment representarà l'interval tancat [0,1]. Dibuixa un altre segment igual a sota l'anterior. Divideix aquest segon segment en tres parts iguals i esborra el tros central. Dibuixa els dos segments obtinguts a sota. Divideix els dos segments en tres parts iguals i esborra'n la central en cada cas. Repeteix el procés tantes vegades com sigui possible de dibuixar.

Quants segments has obtingut a la segona fila? I a la cinquena? Quants segments hi haurà a la n-èssima fila?

En quina posició es troba la part final del primer segment de cada fila?

Digues la raó homotètica, el gir i la translació de cadascuna de les transformacions utilitzades.

Quina és la dimensió d'aquest fractal?



2.2 Triangle de Sierpinski:

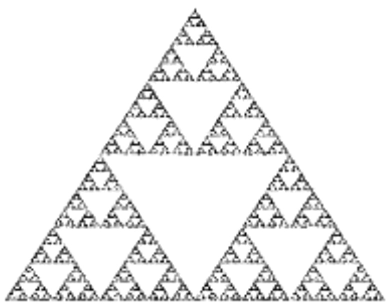
Dibuixa un triangle equilàter. Dibuixa un altre triangle equilàter inscrit a l'anterior unint els punts centrals de cadascun dels costats. Pinta aquest segon triangle. Dibuixa un triangle equilàter inscrit a cadascun dels triangles que encara no s'han pintat. Repeteix el procés tantes vegades com sigui possible de dibuixar.

Quants triangles no pintats has obtingut a la tercera repetició? Pots generalitzar el resultat?

Quants triangles pintants has obtingut a la tercera repetició? Pots generalitzar el resultat?

Digues la raó homotètica, el gir i la translació de cadascuna de les transformacions utilitzades.

Quina és la dimensió d'aquest fractal?



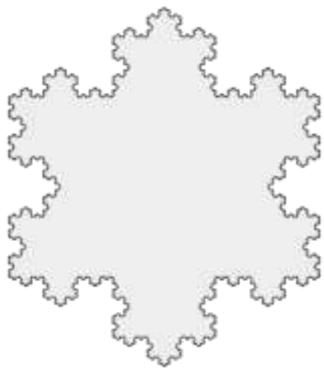
2.3 Floc de neu de Koch:

Dibuixa un triangle equilàter. Divideix cadascun dels costats en tres segments iguals. Dibuixa un triangle equilàter a cadascun dels costats, utilizant els segments centrals de cada costat com a base dels nous triangles. Repeteix el procés en cadascun dels costats de la nova figura. Repeteix successivament el procés tantes vegades com sigui possible de dibuixar.

Quants costats té la figura obtinguda després de tres repeticions? Pots generalitzar el resultat?

Digues la raó homotètica, el gir i la translació de cadascuna de les transformacions utilitzades.

Quina és la dimensió d'aquest fractal?



Activitat 3: Fractals de paper en tres dimensions (pop-up)

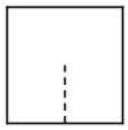
Es proposen tres opcions per generar un fractal en tres dimensions. Cada participant en realitzarà només una. Per a realitzar aquesta activitat, es necessiten dos folis de colors diferents i unes tisores.

3.1 Triangle de Sierpinski:

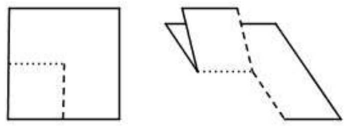
3.1.1 Dibuixa i retalla en un dels folis de color un rectangle que tingui una base de 140 mil·límetres i una altura de 280 mil·límetres.

3.1.2 Plega el rectangle per la meitat, unint els vèrtex inferiors als superiors i deixant el plec a la part inferior del quadrat obtingut.

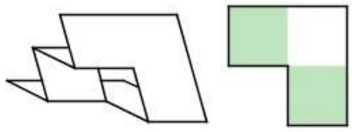
3.1.3 Retalla el quadrat obtingut des de la meitat de la base fins a la meitat de l'alçada.



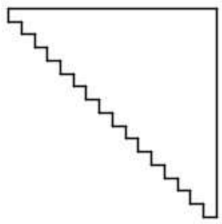
3.1.4 Plega el rectangle de l'esquerra per la meitat, unint els vèrtex inferiors amb els superiors i deixant el plec a la part inferior del nou quadrat obtingut.



3.1.5 Replega el quadrat de l'esquerra en forma d'acordió i considera a partir d'ara els quadrats de la diagonal principal.



3.1.6 Repeteix el procés des del punt 2.1.3 fins al punt 2.1.5 tres vegades més fins a obtenir una figura com la que es mostra a continuació:



3.1.7 Desplega el rectangle inicial per el primer plec que has fet. Ja tens el Triangle de Sierpinski.

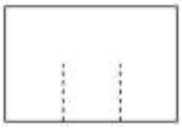
3.1.8 Per donar-li estabilitat, dibuixa i retalla al paper de l'altre color un rectangle com el del punt 2.1.1 i enganxa'l a la part posterior del Triangle de Sierpinski obtingut.

3.2 Conjunt de Cantor:

3.2.1 Dibuixa i retalla en un dels folis de color un rectangle que tingui una base de 187 mil·límetres i una altura de 224 mil·límetres.

3.2.2 Plega el rectangle per la meitat, unint els vèrtex inferiors als superiors i deixant el plec a la part inferior del rectangle obtingut.

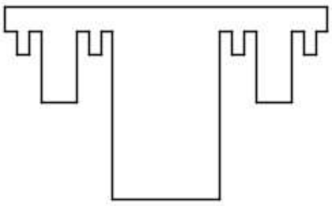
3.2.3 Retalla el rectangle obtingut des d'un terç de la base fins a la meitat de l'alçada i des de dos terços de la base fins a la meitat de l'alçada.



3.2.4 Plega els dos rectangles exteriors per la meitat, unint els seus vèrtex inferiors amb els superiors i deixant el plec a la part inferior.

3.2.5 Replega els rectangles obtinguts (exteriors) en forma d'acordió i considera a partir d'ara els rectangles que has replegat.

3.2.6 Repeteix el procés des del punt 2.2.3 fins al punt 2.2.5 dues vegades més fins a obtenir una figura com la que es mostra a continuació. Tingues en compte que ara, per poder plegar els rectangles exteriors, hauràs d'allargar els talls fets anteriorment.



3.2.7 Desplega el rectangle inicial pel primer plec que has fet. Ja tens el Conjunt de Cantor.

3.2.8 Per donar-li estabilitat, dibuixa i retalla al paper de l'altre color un rectangle com el del punt 2.2.1 i enganxa'l a la part posterior del Conjunt de Cantor obtingut.

3.3 Variació del Conjunt de Cantor:

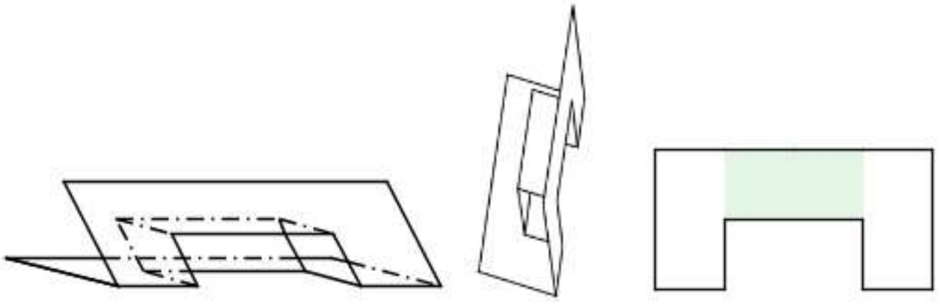
3.3.1 Dibuixa i retalla en un dels folis de color un rectangle que tingui una base de 192 mil·límetres i una altura de 286 mil·límetres.

3.3.2 Plega el rectangle per la meitat, unint els vèrtex inferiors als superiors i deixant el plec a la part inferior del rectangle obtingut.

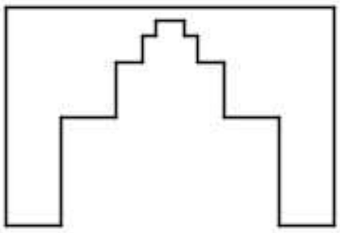
3.3.3 Retalla el rectangle obtingut des d'un quart de la base fins a la meitat de l'alçada i des de tres quarts de la base fins a la meitat de l'alçada.

3.3.4 Plega el rectangle central per la meitat, unint els seus vèrtex inferiors amb els superiors i deixant el plec a la part inferior.

3.3.5 Replega el rectangle central en forma d'acordió i considera a partir d'ara el rectangle replegat.



3.3.6 Repeteix el procés des del punt 2.3.3 fins al punt 2.3.5 tres vegades més fins a obtenir una figura com la que es mostra a continuació:



3.3.7 Desplega el rectangle inicial pel primer plec que has fet. Ja tens una variació del Conjunt de Cantor.
3.3.8 Per donar-li estabilitat, dibuixa i retalla al paper de l'altre color un rectangle com el del punt 2.3.1 i enganxa'l a la part posterior de la variació del Conjunt de Cantor obtingut.

Un cop es té la figura construïda, també és interessant mirar-la des de darrera a contrallum. Degut a la opacitat del primer paper de color, la llum no es reflexa de forma uniforme i crea un efecte òptic curiós.

Activitat 4: Creació de fractals i reproducció a gran escala

En aquesta activitat es demanarà que cada participant inventi un fractal mitjançant un procés iteratiu.

Un cop cada participant n'hagi creat un, entre tots se'n triarà un per reproduir-lo a gran escala.

El fractal gros es pot fer amb guix al terra del patí de l'institut. Aquest mètode té l'inconvenient de que s'han d'utilitzar molts de guixos i que si plou no es pot realitzar l'activitat. Com alternativa, si el fractal és prou "recte" es pot fer amb folis de paper posats un al costat de l'altre. Aquest mètode permet que si plou o fa vent, es pugui realitzar l'activitat a l'interior del pavelló.

Referències bibliogràfiques de la sessió

[HOF87], [PET92], [W01], [W02], [W03], [W07] i [W08].

4.5.2 Anàlisi de la sessió

Aquesta sessió segurament va ser una de les sessions reines del taller. Es treballava un tema que els participants no havien vist mai i van haver de descobrir un terreny nou per a ells.

La resposta per part dels dos grups va ser asimètrica, el grup del dimarts va respondre molt bé a la primera activitat. Tots els participants van voler fer fractals amb l'ordinador i malgrat no tenir tots la mateixa sort, hi va haver algun participant que realment va aconseguir figures molt boniques. El grup del dijous en canvi, es va mostrar més reticent a l'hora de provar sort amb la càmera web i van ser molt pocs els participants que van voler provar de generar fractals.

La tercera activitat va agradar molt. Haver de retallar i manipular material va fer que l'activitat fos molt dinàmica i els resultats van ser molt positius. A més, com que cadascú feia només una de les tres figures, un cop els participants havien acabat ajudaven a la resta i aquest fet es considera molt positiu ja que mostra la bona sintonia que hi havia entre els participants i el bon ambient del grup.

La idea inicial per a la quarta activitat era dibuixar el fractal gegant al patí de l'escola amb guix. Un dia plujós i ventós però, va fer que s'hagués de modificar l'activitat. El primer que es va pensar va ser fer el fractal amb folis de papers al pavelló de l'institut però en el moment de realitzar l'activitat el pavelló estava ocupat per les noies de patinatge del poble. Aquest cúmul de circumstàncies va fer que finalment es decidís fer el fractal gegant amb folis de paper retallats al menjador de l'institut. L'activitat va funcionar molt bé i es va decidir modificar l'activitat definitivament i que el grup del dijous, independentment del temps faria el fractal gegant al pavelló.

Inversament al que havia succeït amb la primera activitat, l'última activitat va funcionar més bé amb el grup del dijous que amb el del dimarts, segurament degut a les nombroses modificacions que va patir l'activitat el dimarts i l'endarreriment que aquestes van suposar. El grup del dijous va fer una molt bona feina, va treballar molt bé en grup i van aconseguir fer un fractal que ocupés més de la meitat del pavelló de l'institut.

4.6 Anamorfismes

4.6.1 Guió

En aquesta sessió, el guió estarà complementat per un power point que es pot trobar en el següent link:

http://es.slideshare.net/massich/tallerdematemtiquesanamorfismes

Apunt històric: Curiositats de matemàtics

- Pierre Fermat va néixer a França el 17 d'agost de 1601 i va morir el 12 de gener de 1665. Fermat es va dedicar a moltes branques de les matemàtiques però la més destacada és l'aritmètica.

Fermat assegurava que ell demostrava tots els seus teoremes, però això, els altres matemàtics ho posaven en dubte per la dificultat dels teoremes i les eines matemàtiques limitades del moment.

L'anomenat "Últim Teorema de Fermat", va ser descobert per el seu fill al marge d'un dels llibres del seu pare. Al marge, hi havia la següent nota:

> *És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quartes i, en general, que qualsevol número que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga."*

Aquest problema es va convertir en un repte per a molts matemàtics, i no va ser fins el 1995 quan es va aconseguir demostrar tres segles i mig més tard.

- Évariste Galois neix a França el 25 d'octubre de 1811 i mor el 31 de maig del 1832. Mentre encara era adolescent va determinar la condició necessària i suficient per què un polinomi pugui ser resolt per radicals.

Els primers anys de la seva vida, Galois és educat a casa per la seva mare on va aconseguir una sòlida formació en llatí i grec. No és fins que té 15 anys però, quan té el seu primer contacte amb les matemàtiques.

L'objectiu de Galois era entrar a l'École Polytechnique, però va ser rebutjat diverses vegades. Finalment, va ser admès a l'École Normale.

Galois era republicà i va ser expulsat de l'École Normale per assistir a una manifestació. El 1831 va ser detingut i empresonat per un delicte de sedició en contra del rei. A la presó, Galois, va aprofitar per arrodonir les qüestions pendents en el seu treball.

Uns dies abans de la seva mort, va ser alliberat. Galois va morir en un duel on no està clar què va conduir a que es celebrés. El que queda per a la història, és que la nit abans del duel, Galois, convençut de la seva mort es va passar tota la nit escrivint cartes als seus amics republicans on deixava escrit el seu llegat matemàtic juntament amb una còpia del manuscrit que havia enviat a l'acadèmia i que havia sigut rebutjat.

Finalment, les seves contribucions matemàtiques van ser publicades el 1843.

Introducció als anamorfismes

Un anamorfisme és una imatge o un objecte deformat que obté sentit quan s'observa des d'un punt de vista concret o quan s'aplica una transformació òptica o matemàtica.

És quan s'observa des del punt de vista privilegiat o òptim que l'objecte pren una forma proporcionada o clara.

Els anamorfismes s'utilitzen en senyalitzacions viàries, en publicitat, en educació i en art entre d'altres.

Activitat 1: Creació de paraules anamòrfiques.

Per poder realitzar aquesta activitat correctament, s'escriuran lletres de pal en papers de diferents mides. Una lletra per paper.

Cada participant excepte un, agafarà una lletra de manera que entre tots es formi una paraula o una frase.

El participant que no té cap lletra serà el que determinarà el punt de vista privilegiat. L'activitat consisteix en col·locar la resta de companys de manera que des del seu punt de vista es pugui llegir la paraula o la frase correctament.

El fet de que les lletres estiguin escrites en papers de diferents mides, farà que els participants no s'hauran de posar l'un al costat de l'altre sinó que la distància entre el punt de vista privilegiat i les lletres escrites en un paper més gran haurà de ser també més gran que la distància entre el punt de vista privilegiat i les lletres escrites en un paper més petit.

Per acabar l'activitat, és interessant veure quina relació hi ha entre la raó de les distàncies al punt òptim i la raó entre les mides dels papers.

Activitat 2: Realització d'un anamorfisme amb pintura al passadís de l'institut

En aquesta activitat es pintarà un anamorfisme en un passadís de l'institut.

Aquest anamorfisme serà una figura plana que quedarà dibuixada en un espai en tres dimensions de manera que la figura només serà entesa des del punt de vista privilegiat.

Primer de tot, es deixarà triar als participants entre unes quantes propostes de figura plana. Un cop decidida quina serà la figura que es pintarà, el que es farà és projectar la imatge des del punt de vista òptim fins a la paret amb un projector. Un cop es tingui la imatge projectada, es delimitarà la figura amb cinta de pintor.

Quan la figura ja estigui delimitada, ja es pot apagar el projector i es pot començar a pintar la figura.

Finalment, un cop la figura estigui pintada, es treu la cinta de pintor. Es podrà observar que efectivament la imatge només pren sentit quan és observada des del punt de vista privilegiat i que quan no s'observa des d'aquest punt, la figura queda deformada de manera molt curiosa.

És important projectar la imatge en un lloc en tres dimensions o en un lloc on el passadís no sigui regular per tal d'observar fàcilment les deformacions quan no s'observa la figura des del punt de vista òptim.

Activitat 3: Realització d'un anamorfisme amb guix al pati de l'institut

En aquesta activitat es pintarà un anamorfisme amb guix al pati de l'institut.

Aquest anamorfisme serà una figura en tres dimensions que quedarà dibuixada en un espai pla.

Abans de dibuixar un anamorfisme entre tots els participants, s'explicarà quin tipus de deformacions s'han de fer per tal de poder obtenir aquest efecte. Veure Power point.

Individualment, cadascun dels participants dibuixarà un anamorfisme d'aquestes característiques a petita escala.

Un cop assolits els conceptes relacionats amb aquest tipus d'anamorfismes, se'n realitzarà un a gran escala al pati de l'institut i es pintarà amb guix.

També serà interessant en aquest cas, comprovar com es deforma la imatge segons el punt de vista on es mira però és realment impactant comprovar la diferència entre les àrees de les zones properes al punt de vista privilegiat i les llunyanes. Aquesta diferència es pot fer evident veient el nombre de persones que ocupen cadascun dels espais.

Referències bibliogràfiques de la sessió

[WUS89], [W01], [W02], [W07] i [W08].

4.6.2 Anàlisi de la sessió

La sessió d'anamorfismes va ser la més especial de totes. S'ha de dir que l'anàlisi d'aquesta sessió perdria sentit si no es mencionés en Sergi del Moral i l'Andrea Richter, que van assistir, van donar suport i van participar activament i en primera persona a la sessió del dimarts.

La sessió de clausura del taller, a més, va comptar amb la presència de tres professors del departament de matemàtiques el dimarts i amb la de dos el dijous.

Segurament aquesta va ser la sessió del taller de matemàtiques que va ser més taller i menys matemàtica però a mesura que s'anaven passant diapositives del power point utilitzat per a la sessió, les cares de sorpresa i d'incredulitat dels participants del taller i dels professors del departament de matemàtiques augmentava. Va ser una presentació bastant participativa, els nois i noies del taller van passar de no saber de què se'ls estava parlant a reconèixer que veuen anamorfismes cada dia i que se'n troben contínuament en la seva vida quotidiana. Fins i tot en alguns casos eren capaços de donar exemples que no es trobaven a les diapositives.

La primera activitat va servir per tornar a constatar la cohesió del grup. Es van fer dos equips per fer paraules anamòrfiques i tothom, inclosos els professors, donava la seva opinió i col·laborava per aconseguir l'objectiu final.

Per fer la segona activitat es va demanar permís al centre per poder pintar els passadissos de l'institut. La resposta va ser afirmativa i amb la col·laboració de professors i conserges els participants del taller van poder pintar un anamorfisme al centre. Es van acabar pintant dos anamorfismes al centre, el grup del dimarts va pintar quadrats concèntrics mentre que el grup del dijous va pintar una estrella amb un pentàgon inscrit.

Les dues sessions es van allargar moltíssim. Malgrat aquest fet, els participants van decidir que no volien deixar la sessió a mitges i van quedar-se a l'institut fins a dos quarts de deu del vespre. Tant el dimarts com el dijous, el taller va tenir una llargada de cinc hores.

La dificultat de l'anamorfisme del grup del dimarts va fer que s'hagués d'anar a l'institut el dimecres al matí per treure la cinta de les parets pintades. Els participants van estar molt orgullosos de la seva obra i explicaven a tots els seu companys de classe què és un anamorfisme.

Amb el grup del dijous es va fer un anamorfisme més senzill. Aquest fet va fer que es pogués realitzar l'activitat tres. Aquest altre anamorfisme, totalment diferent a l'anterior, va tenir el mateix èxit que el primer i un cop va estar acabat, els participants del taller s'hi van fotografiar i van publicar aquestes fotos a les xarxes socials.

Així doncs, la valoració d'aquesta sessió és absolutament positiva. La implicació dels participants i dels professors va ser màxima i altra vegada, es va crear un ambient de grup, treball i companyonia excel·lent.

Els següents vídeos mostren alguns dels anamorfismes que es van realitzar. El tercer enllaç, és un vídeo que va ser gravat i editat per l'Arnau Llobet, un dels participants.

http://www.youtube.com/watch?v=BP85DNqz6B8

http://www.youtube.com/watch?v=dF6cPyU1XrQ

http://www.youtube.com/watch?v=RHnrbIlIYBg

4.7 Reptes de la setmana

4.7.1 Funcionament

Els reptes de la setmana eren les activitats creades per donar continuïtat al taller. Els fils que lligaven una sessió amb la següent. Servien per mantenir els participants del taller connectats a les matemàtiques fora de les aules de l'institut.

Els comentaris d'un repte i l'anunci del següent repte no havien d'anar col·locats en el mateix moment de la sessió. Generalment els reptes de la setmana es comentaven a l'inici de la sessió mentre que l'anunci del següent repte es podia fer a continuació, al final de la sessió o aprofitant alguna de les activitats que es duien a terme al llarg de la sessió.

Si es trobava una activitat que aconseguís lligar el tema que s'estava tractant i el repte de la setmana, s'intentava aprofitar per tal de donar més valor tant a l'activitat com al repte. Un exemple clar d'aquest lligam és el repte "Matemàtiques i televisió", on es va aprofitar l'activitat del problema de Monty Hall per passar als participants un fragment de la pel·lícula "*21 Black Jack*" i introduir d'aquesta manera el repte setmanal.

El repte de la setmana va tenir una resposta molt bona per part dels participants. Malgrat no tenir una resposta molt àmplia, aquesta va ser de molta qualitat i es van complir els objectius marcats per aquest espai del taller.

La majoria dels participants del taller no van dur a terme tots els reptes però també és cert que la majoria dels participants van realitzar almenys algun dels reptes. Aquest fet constata que gran part dels participants en algun moment es van fixar en el seu voltant i van observar les matemàtiques que hi poden trobar.

4.7.2 Anàlisi dels reptes

En el primer repte, "Funcions matemàtiques en el nostre entorn", es va aconseguir interpretar:

- Un semàfor com el tros d'una hipèrbola.
- Un collaret com una paràbola.
- Les voltes de La Bisbal com l'arrel del sinus o com el valor absolut del sinus.
- Una teulada com un sinus o un cosinus.

El segon repte, "Matemàtiques i televisió", els participants van donar el nom de moltes pel·lícules com "*Los crimenes de Oxford*" o "*La habitación de Fermat*", sèries com "*Numb3rs*" o "*The big bang theory*" o programes televisius com el "*Quèquicom*". Precisament, l'aportació d'un dels participants mencionant que s'havia explicat la llei d'Hondt al programa "*Quèquicom*", va fer que es considerés oportú realitzar una activitat on es treballés la llei d'Hondt utilitzant les dades de les últimes eleccions municipals de La Bisbal d'Empordà. Aquesta activitat es pot trobar a l'annex A2 del treball.

"Errors matemàtics als mitjans" va ser un dels reptes que més va costar als participants del taller, segurament, per la complexitat pròpia del repte i per la recerca que aquest requeria. Malgrat tot, els participants van mencionar que en un telenotícies el presentador havia demanat als jugadors d'un equip que competissin al dos-cents per dos-cents. Tampoc va passar per alt l'error en una suma d'una de les candidates a la presidència de la Generalitat en un debat previ a les eleccions autonòmiques.

El quart repte, en el qual es demanava representar un nombre irracional sense utilitzar xifres, va ser el més creatiu de tots. La majoria dels participants van optar per representar el nombre triat amb un codi de colors, d'altres van optar per representar-lo mitjançant un text mentre que una de les participants, va dibuixar el nombre irracional com una concatenació de segments, cadascun dels quals amb la llargada del dígit del nombre irracional corresponent.

L'últim repte va ser un concurs de fotografies matemàtiques. En aquest repte tampoc es va aconseguir la resposta esperada. La baixa participació en aquest repte s'atribueix a l'amplitud del tema ja que la resposta al primer repte, aparentment semblant però restringit a funcions, havia tingut una resposta molt bona. Malgrat tot, es van aconseguir fotografiar, entre d'altres, un pastís d'esferes, les diagonals del cel i una suma feliç.

Les fotografies i tot el material recopilat dels reptes de la setmana també es poden trobar a l'annex A2 del treball.

5 CONCORDANÇA ENTRE RESULTATS I OBJECTIUS

L'anàlisi individualitzat de cadascuna de les sessions s'ha exposat extensament a l'apartat 4 del treball, "metodologia i resultats".

Aquest apartat del treball se centra doncs en l'anàlisi global del taller. S'analitzarà si s'han complert els objectius principals del projecte i s'interpretarà el perquè s'han assolit o s'han deixat d'assolir aquests objectius.

L'últim dia de taller, es va passar una enquesta als participants amb un seguit de preguntes referents al funcionament del propi taller i a la visió, prèvia i posterior al taller, dels participants envers les matemàtiques. Així doncs, l'anàlisi global del projecte es fa tenint en compte les sensacions personals i les respostes dels participants obtingudes a les enquestes. Les enquestes dels assistents a l'última sessió es poden trobar a l'annex A4 del treball.

Els dos primers objectius, construir un seguit d'activitats matemàtiques on els participants puguin intervenir de manera directa i realitzar el taller de matemàtiques es consideren assolits amb èxit. És evident que el taller s'ha realitzat mentre que el perfil de les activitats s'ha discutit àmpliament a l'apartat 4 del treball "metodologia i resultats" i es pot observar que en la majoria dels casos, els assistents al taller participaven en les activitats de manera activa.

Les activitats realitzades, juntament amb els reptes de la setmana, mostren que l'objectiu de projectar una visió aplicada, funcional, quotidiana i estètica de les matemàtiques s'ha assolit. Els participants del taller, s'han adonat que parlar de matemàtiques no és únicament resoldre problemes a l'aula sinó que només cal mirar al seu voltant per trobar-hi matemàtiques. Aquest fet també demostra que l'objectiu d'aproximar el món de les matemàtiques als participants del taller i canviar-ne la imatge també s'ha complert. A més, el cent per cent dels participants que van respondre l'enquesta van afirmar que la seva visió envers les matemàtiques després del taller era diferent que abans de fer-lo.

Generar curiositat i inquietud als participants per seguir aprenent matemàtiques és un objectiu que no es pot saber amb tota seguretat si s'ha complert. Curiositat i inquietud en els participants se n'ha generat, això sí. A més, es pot assegurar que s'ha aconseguit que els participants del taller perdin la por a aprendre matemàtiques. Voler anar més enllà de les matemàtiques exposades a l'institut és un fet que es veurà a llarg termini en els participants però, en tot cas, s'ha d'esmentar que un cop acabat el taller, algun dels participants ha compartit informació matemàtica i vídeos originals al grup del taller que es va crear a la xarxa social Facebook. Així doncs, es considera que en gran part, aquest objectiu també s'ha assolit.

L'últim objectiu del treball, analitzar el disseny i l'execució de les activitats didàctiques del taller s'ha fet i s'està fent en aquestes pàgines de la memòria del treball.

Es considera però, que l'anàlisi del projecte realitzat en el si del Treball Final de Grau ha d'anar més enllà d'una anàlisi local i una anàlisi global del propi taller. El projecte ha assolit una magnitud totalment inesperada en el moment que es va iniciar. Difondre les activitats ha servit per poder aproximar les matemàtiques no només als participants del taller sinó a molta més gent. En moltes ocasions s'ha pogut observar que persones alienes al taller s'interessaven per les activitats que s'hi feien. Un exemple molt clarificador és que el portal de noticies local *Totbisbal* es va posar en contacte amb el taller per aconseguir informació sobre el funcionament i les activitats realitzades.

“La foto d'aquella cosa rara que ocupa mig pavelló és molt ben parida! Ho heu fet al taller?”, “Des que em vas explicar allò dels anamorfismes no faig res més que veure'n a tot arreu. Anamorfismes es deia oi? Ho dic bé?”, “A veure Massich, explica'm ben bé en què consisteix això que fas a l'institut.”, “El curs que ve ho hauries de venir a fer al nostre institut”, “Això dels fractals és espectacular, m'hauràs d'explicar de què va.”, “És espectacular, els nanos s'ho deuen passar pipa”, “No hi acabo de veure la relació amb les matemàtiques, quan ens veiem m'ho expliques.”, “Vaig quedar impressionada, n'has de venir a pintar un a la nostra escola!”...

Aquetes frases són algunes de les mostres de suport i de sorpresa de gent propera que s'ha interessat i s'ha sobtat de les activitats que es feien al taller. Així doncs les matemàtiques no únicament han estat presents en els participants del taller sinó que altres persones també han mostrat la seva inquietud per saber quins eren tant el fons com la forma del projecte. És en aquest sentit que es considera que s'han superat els objectius que es proposaven en aquest Treball Final de Grau.

6 CONCLUSIONS

El Treball Final de Grau ha estat centrat, com el seu propi nom indica, en la planificació, realització i anàlisi d'un taller de matemàtiques. En aquests primers paràgrafs s'analitzarà el propi taller com a nucli del TFG.

Amb la perspectiva de la feina feta, es veu que un aspecte molt important a l'hora d'aconseguir l'èxit final va ser la tria de l'institut on s'havia de dur a terme el taller. El fet de conèixer gran part del professorat i dels treballadors del centre va fer que la implicació i l'ajuda rebuda fos màxima. L'altra avantatge d'haver triat l'institut de La Bisbal és que molts dels alumnes del centre ja es coneixien abans de presentar el projecte a les aules. Pràcticament el cinquanta per cent dels participants del taller ja eren coneguts prèviament. Aquest fet, a més de servir com a empenta per apuntar-se al taller, va ajudar a crear un ambient molt familiar i proper.

Aconseguir un nombre molt elevat d'inscrits s'atribueix en gran part al fet de conèixer l'alumnat del centre prèviament però malgrat aquest fet, aconseguir mantenir el gruix més ampli dels inscrits al taller també s'atribueix a que les sessions estaven ben treballades, eren atractives, els participants consideraven que eren útils i la feina de preparació estava suficientment ben feta.

Un dels aspectes que es considera un encert és haver treballat amb nois i noies de diferents edats i nivells. S'ha aconseguit que aquest fet no fos un problema insalvable i encara que, evidentment, hi havia ocasions en què els participants de més nivell tenien més facilitat per entendre el rerefons matemàtic de les activitats, no hi ha hagut cap cas en què els participants més joves hagin sentit que no arribaven al nivell requerit. En aquest sentit, s'ha vist que és possible tractar idees matemàticament molt potents, fins i tot aspectes treballats a nivell universitari, de manera precoç. Sovint, fent èmfasi en l'arrel de les idees més complicades, manipulant material o construint els conceptes en petits passos, els participants del taller que a priori no tenien nivell suficient per entendre certs conceptes matemàtics, eren capaços de captar, entendre o fins i tot descobrir l'essència d'aquests conceptes.

Com s'ha comentat anteriorment, la implicació dels participants en el taller ha estat màxima. El canvi que s'ha produït en els participants del taller dins i fora de les classes de matemàtiques és evident. Tots els professors de matemàtiques del centre han transmès que havien notat un canvi en els seus alumnes que participaven a les sessions del taller, han comunicat que es mostraven molt més atents a les classes, que relacionaven els conceptes treballats a classe amb els treballats al taller i fins i tot, que durant les excursions comentaven les matemàtiques que es trobaven pels carrers. A més de totes aquestes paraules, els professorat de matemàtiques del centre ha fet arribar una carta d'agraïment signada per tots ells que es pot veure a l'annex A5 del treball mostrant l'èxit del projecte sota el seu punt de vista.

Degut a l'èxit obtingut, es considera que s'hauria de donar continuïtat al projecte iniciat a l'institut de La Bisbal. No es descarta ampliar i millorar el taller realitzat a La Bisbal per oferir-lo a altres centres de la comarca o de la província. Es considera que gran part de la feina feta es pot tornar a utilitzar i que una vegada les activitats i les sessions ja estan pensades i organitzades seria una pena no aprofitar-les. També en aquest sentit, s'ha rebut la proposta de publicar algunes de les activitats realitzades a l'ARC (Aplicació de Recursos al Currículum). Aquesta aplicació del

Departament d'Ensenyament, permet compartir les idees i les activitats amb tots aquells professors que les trobin interessants.

Finalment, a nivell personal es considera que el taller ha estat un èxit absolut i, en conseqüència, el Treball Final de Grau ha estat una experiència molt satisfactòria. Considero que l'aposta de centrar el TFG en un projecte d'aquestes característiques va ser molt encertada. Si en un futur vull treballar de docent, no tenia cap mena de sentit fer el treball de final de grau enfocat a un altre àmbit de les matemàtiques. La conseqüència d'haver fet una bona tria és que la feina que ha portat el TFG sempre s'ha fet amb molt de gust i amb tota la dedicació possible. Considero que el Treball Final de Grau m'ha servit per confirmar que la direcció que vull seguir en un futur és la correcta i que al llarg d'aquest treball he après moltíssimes coses. He pres decisions durant la planificació del taller i n'he organitzat l'estructura. He modificat aquestes decisions i la planificació quan han sorgit imprevistos. He vist de primera mà les dificultats que comporta coordinar un projecte d'aquestes característiques. Per primera vegada, he estat sol davant d'una aula. He vist les hores de dedicació que comporta preparar una sessió. He hagut de gestionar el temps de les sessions i modificar-les sobre la marxa quan el moment ho requeria. He hagut de plantejar un objectius, preparar material per assolir-los i analitzar s'hi s'havien assolit. He après moltes matemàtiques, ja que buscant informació i preparant activitats sempre trobava alguna cosa desconeguda o per aprofundir-hi. A més de tot el que he après i de tots els problemes que he hagut d'afrontar, he de dir que he gaudit moltíssim realitzant aquest Treball Final de Grau no només en la realització del taller sinó que també he gaudit moltíssim pensant-lo, organitzant-lo, preparant-lo i analitzant-lo.

A banda de l'experiència personal, també considero un èxit el seguiment del taller per part dels participants. Com a anècdota, sempre podré dir que el dia de Sant Jordi, amb l'anada d'unes semi finals de la Copa d'Europa de futbol en joc on hi participava l'equip més popular del país, deu alumnes i tres professors de l'institut de La Bisbal van passar la tarda i el vespre fent matemàtiques en comptes d'anar a passejar per les parades de llibres i roses del poble i mirar el seu equip de futbol. Aquesta anècdota demostra clarament que els participants del taller venien a gust, motivats i amb ganes d'aprendre matemàtiques. No s'ha de perdre de vista que els autèntics protagonistes del taller havien de ser els nois i noies i que vinguessin al taller amb les ganes que venien de manera desinteressada i sense rebre res a canvi fa que la valoració final del taller no sigui només positiva sinó que arribi a ser excel·lent.

A més dels participants, també considero que el Departament de Matemàtiques de l'institut i el propi centre valoren molt positivament l'experiència. Aquest fet és molt important, ja que fa que es tanqui un cercle on les tres parts implicades hem quedat satisfetes amb el taller.

Un altre motiu per estar molt satisfet és que persones estimades, amics, companys i coneguts, han mostrat interès en el projecte i han valorat també de manera positiva la feina que s'estava duent a terme. En aquest sentit, vull tornar a esmentar que el projecte ha traspassat les línies marcades inicialment i s'ha estès cap a gent, a priori, aliena al taller.

7 BIBLIOGRAFIA

7.1 Llibres consultats

[CRI09] CRILLY, TONY. *50 Cosas que hay que saber sobre matemáticas.* Madrid: Ariel, 2009.

[SIN00] SINGH, SIMON. *Los códigos secretos: El arte y la ciencia de la criptografía desde el antiguo Egipto a la era de internet.* Madrid: Debate, 2000.

[HOF87] HOFSTADTER, DOUGLAS. Gödel, Escher, Bach: *Un eterno i grácil bucle*. Barcelona: Tusquets, 1987.

[PET92] PETERSON, IVARS. *El turista matemático*. Madrid: Alianza, 1992.

[WUS89] WUSSING, HANS i ARNOLD, WOLFGANG. *Biografías de grandes matemáticos*. Universidad de Zaragoza, 1989.

[STE77] STEWARD, IAN. *Conceptos de matemática moderna*. Madrid: Alianza Universidad, 1977.

7.2 Pàgines web consultades

[W01] Vikipèdia:

https://ca.wikipedia.org

[W02] Youtube:

http://www.youtube.com/

[W03] Universitat de Yale:

http://classes.yale.edu/fractals/

[W04] Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques (CREAMAT):

http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/

[W05] Llicència Anton Aubanell:

http://www.xtec.cat/~aaubanel/

[W06] Anem x + matemàtiques:

http://venxmas.fespm.es/temas/si-lo-escondo-lo-encuentras.html

[W07] Col·lectiu *granja.cat*:

http://granja.cat/

[W08] Pàgina web personal d'en Sergi del Moral:

http://www.sergidelmoral.net/

8 AGRAÏMENTS

La realització d'aquest Treball Final de Grau no hagués sigut possible sense l'oportunitat que em va donar l'Anton Aubanell Pou, director del treball. La implicació mostrada i l'ajuda contínua han estat un estímul per intentar aconseguir un rendiment màxim en cadascun dels passos. A més, ha fet que al llarg d'aquest camí em sentís molt acompanyat ja que mai ha tingut un no per resposta i m'ha donat tot el suport sempre que ha sigut necessari.

Vull agrair a l'INS La Bisbal i al professorat del seu Departament de Matemàtiques les facilitats donades per poder dur a terme el taller al seu centre.

A l'Adelina Ros l'ajuda en l'elaboració de materials utilitzats en les sessions.

A l'Ariadna Arbat, en Pau Arbat, en Pau Ramírez i l'Ivan Cruz les gravacions i les fotografies de totes les sessions.

A en Lluís Fonalleras, l'Ivan Cruz i en Miki Villanueva que em deixessin el material adient per poder gravar i fer fotografies de les sessions.

A en Lluís Fonalleras i a l'Arnau Llobet l'edició dels vídeos per difondre el taller.

A en Sergi del Moral la xerrada prèvia al taller i la col·laboració juntament amb l'Andrea Richter en la sessió d'anamorfismes.

A en Joan Massich l'ajuda en la correcció del text.

Als protagonistes d'aquest treball, Mar Matés, Maria Viella, Laia Mateu, Oliver Canosa, Jaume Soler, Guillem Gasull, Oriol Vilà, Roger Generoso, Arnau Pérez, Teresa Luque, Ruben Soto, Aleix Olivet, Carla Subirana, Eloi Matés, Ferran Pou, Guillem Llenas, Ingrid Corbacho, Roger Pi, Xènia Sala, Joan Seguí, Arnau Llobet, Alí El Bakouri, Eduard, Baquer, Adrià Orellana, Helena Planas, Anna Planas, Maria Huix, Marc de Bustamente, Marta Suñé, Carles Pou i Marc Roura, la confiança dipositada i les ganes en què han assistit al taller.

A tota la gent que no he citat però que d'una manera o altra m'ha ajudat en la realització d'aquest treball.

9 ANNEX

9.1 Annex A1: Document de cessió dels drets d'imatge

El següent document es va donar a tots els participants del taller per tal de poder fer difusió de les activitats i poder utilitzar la seva imatge a la memòria i a la presentació del Treball Final de Grau. Tots els participants del taller van accedir a la cessió dels seus drets d'imatge.

CESSIÓ DELS DRETS D'IMATGE

El taller de matemàtiques que es realitza a l'Institut de La Bisbal disposa de diferents espais a la xarxa (Twitter i Facebook) on s'informa i es fa difusió de les activitats que s'hi realitzen.

En aquests espais s'hi poden publicar imatges o vídeos en les quals apareguin, individualment o en grup, participants del taller realitzant activitats.

Donat que el dret a la pròpia imatge està reconegut a l'article 18.1 de la Constitució i regulat per la Llei 5/1982, de 5 de maig, sobre el dret a l'honor, a la intimitat personal i familiar i a la pròpia imatge, l'organitzador d'aquest taller demana el consentiment als pares o tutors legals per poder publicar fotografies o vídeos on apareguin els seus fills i filles on aquests o aquestes siguin clarament identificables.

A més, també es demana el consentiment per poder utilitzar aquetes fotografies o vídeos a la memòria o a la presentació del Treball de final de grau, realitzat per en Francesc Massich i Vall, que consisteix en dissenyar, planificar, realitzar i analitzar l'esmentat taller de matemàtiques.

Jo, ... amb DNI o passaport ...., autoritzo que la imatge del meu fill/a .... pugui aparèixer en fotografies i vídeos corresponents a activitats del taller de matemàtiques organitzat per en Francesc Massich i Vall i publicades a:

- Xarxes socials del taller (Twitter (@tallermates) i facebook).
- Filmacions destinades a difusió pública no comercial.
- Fotografies per a revistes o publicacions d'àmbit educatiu.
- Memòria o presentació del Treball de final de grau (facultat de matemàtiques de la Universitat de Barcelona) realitzat per en Francesc Massich i Vall.

Signatura,

La Bisbal, ...de..............................de 2013

9.2 Annex A2: Material utilitzat i extret de les sessions del taller

9.2.1 Criptografia

9.2.1.1 Fitxa participants

Apunt històric: Alan Turing.

Alan Turing neix el 23 de juny del 1912 i mor el 7 d juny del 1954 a l'edat de 41 anys.

Durant la segona guerra mundial, Alan Turing treballa de forma decisiva en la feina per trencar els codis alemanys i un cop acabada la guerra, segueix treballant al govern com a consultor criptogràfic.

El 7 de juny del 1954 mor per enverinament de cianur. Malgrat no rebre mai el reconexement que mereixia en vida, una vegada mort aquest li és atorgat pel govern del Regne Unit per la seva feina realitzada durant la Segona Guerra Mundial.

Introducció a la criptografia:

Criptografia (*kryptos* = amagat i *gráphin* = escriptura).

De la informació original se'n diu text clar. Aquest missatge inicial, passa per un procés de xifrat mitjançant algorismes que converteixen el missatge original en un codi il·legible per a tothom que no tingui els mitjans per desxifrar-lo. És a dir, per a tothom que no tingui la clau.

La criptografia és la tècnica de xifrar. Per altra banda, la criptoanàlisi s'encarrega de desxifrar els missatges. La unió entre la criptografia i la criptoanàlisi genera la criptologia.

Tipus de mètodes de Xifratge: Xifratges de substitució (es substitueixen les lletres del text clar per unes altres que aparentment no tenen res a veure) i xifratges de transposició (s'intercanvia l'ordre entre les pròpies lletres del text clar).

Activitats:

1. **Xifratges de substitució.**
   1.1 Xifratge del Cèsar.
   Un dels mètodes de xifrat més antics, el que treballarem a continuació, és el xifratge del Cèsar (en honor a Juli Cèsar). L'algoritme d'aquest mètode consisteix en desplaçar tres espais (la clau és 3) cap a la dreta els caràcters del text clar.
   1. Xifra la paraula MISSATGE amb aquest mètode. El missatge xifrat és:

   2. Prova-ho ara amb un text clar una mica més llarg. Per poder fer-ho més fàcilment, ajuda't de la següent taula.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

La taula conté l'alfabet a la primera fila, i a la segona, l'alfabet desplaçat tres posicions a la dreta.

Les frases que has de xifrar són:

B	O	N	A		N	I	T		I		T	A	P	A	T

D	I	V	E	N	D	R	E	S		F	A	V	E	S		T	E	N	D	R	E	S

3. És obligatori desplaçar-se sempre 3 vegades? A partir d'ara el nombre de posicions que ens desplacem l'anomenarem d, (clau= d). Reescriu els dos missatges anteriors utilitzant $d = 8$ i $d = 11$.
   Et serveix la taula anterior? Utilitza les dues rodes[3] per xifrar el missatge.

4. Quantes claus diferents podem utilitzar?

5. Té sentit utilitzar $d = 0$ o $d = 26$? Perquè?

6. Per xifrar el missatge, no és necessari que l'alfabet de la segona fila (el del missatge xifrat) sigui ordenat. Si desordenéssim l'alfabet, quantes claus diferents hi hauria?

7. Utilitzem ara $d = 13$? Quina particularitat hi trobeu? Ajuda: Xifreu una lletra i després xifreu la lletra resultant. Saps dir alguna funció matemàtica que compleixi aquesta propietat? Quina?

$$f(x) =$$

8. Desxifra la frase següent amb el mètode ROT13:
   NDHRFGN FRGZNAN PBZRAPRZ RY GNYYRE QR ZNGRZNGVDHRF. GERONYYNERZ PEVCGBTENSVN.

9. És possible que un missatge xifrat amb aquest mètode tingui la següent forma: DZTIUUUUUWA ? Per què?

Aparentment, el xifratge del Cèsar és poc segur. A l'època que s'utilitzava però, no era usual ocultar missatges utilitzant un text xifrat per tant, amb aquest mètode era suficient per amagar escrits. Actualment, aquest mètode només serveix per amagar missatges a simple vista.

[3] Les rodes es poden trobar al punt 9.2.1.3 Material construït.

Provem ara de desxifrar un missatge: Un mètode és usant la força bruta, és a dir, com que si l'alfabet està ordenat tenim un nombre determinat d'opcions, anem provant fins a trobar una opció que tingui sentit:

10. Desxifra el següent missatge utilitzant la següent taula:

	W	V	Y	A	H	S
d = 1	V	U	X	Z	G	R
d = 2	U	T	W	Y	F	Q
d = 3	T	S	V	X	E	P
d = 4						
…						

És evident però, que aquest mètode no és útil si es sospita que l'alfabet utilitzat està desordenat. Un altre mètode per desxifrar missatges és l'estudi de freqüències que consisteix en mirar quines lletres solen ser les més repetides i desxifrar intuïtivament el missatge.

11. Quins tipus de missatges ens porten problemes alhora de desxifrar-los utilitzant l'estudi de freqüències? Escriu un exemple.

1.2 Xifratge de Gronsfeld.

Aquest mètode és una variant del xifratge del Cèsar.

1. Xifra el següent text clar utilitzant $d = 7$ per les lletres en posició sanar i $d = 4$ per les lletres en posició parell.

	L	L	A	R	G		C	O	M		U	N		D	I	A		S	E	N	S	E		P	A
d = 4																									
d = 7																									

En aquest cas, direm que la clau del missatge és 74.

Aquest mètode utilitza un màxim de deu alfabets diferents alhora, així doncs, per ajudar-nos utilitzarem la taula següent:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
2	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
3	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
4	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
5	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
6	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
7	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
8	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
9	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I

2. Xifra la següent frase utilitzant el mètode de Gronsfeld amb clau: 16409
   "CALONGE, BONA TERRA I MALA GENT"

3. Desxifra la següent frase sabent que la clau és: 1908
   "GRNA ERJWVB NW QXDZBB AUC JQCFBT, FFWII"

4. Busca una solució per si es vol usar un alfabet diferent als corresponents a $d = 0,1, \dots 9$.

5. Seria possible ara que el missatge xifrat amb aquest mètode quedés de la forma DZTIUUUUUWA ? Perquè?

1.3 Xifratge de Playfair.

A continuació hi ha una explicació de com funciona el mètode:

Per poder utilitzar aquest mètode es necessita una quadrícula de cinc files i cinc columnes. Es col·loquen vint-i-cinc lletres diferents dins de la quadrícula amb l'ordre que es vulgui. Una cosa a tenir en compte si s'utilitza aquest mètode és que hi ha una lletra de l'abecedari que no es pot utilitzar en el text clar. Un exemple de quadrícula en la qual no s'ha utilitzat la lletra Z pot ser el següent:

E	R	D	X	M
S	A	F	N	C
B	H	K	T	L
O	Q	P	G	Y
I	J	V	U	W

Clau: La clau per desxifrar el missatge són la pròpia quadrícula i el següent algorisme.

Xifratge: Per xifrar el text clar s'utilitza el següent algorisme:

i. Primer de tot s'agrupa el text clar per parelles de lletres.
ii. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa fila, aquestes es substitueixen cadascuna per la que la segueix. En el cas que una de les dues sigui l'última de la fila, aquesta es substitueix per la primera.
iii. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa columna, aquestes es substitueixen per les dues lletres que es troben a sota d'elles respectivament. En el cas que una de les lletres sigui l'última de la columna, aquesta es substitueix per la primera.
iv. Si les dues lletres de la parella no es troben ni a la mateixa fila ni a la mateixa columna, aquestes són els vèrtex oposats d'un rectangle. Així doncs, aquestes dues lletres es substitueixen, cadascuna, per la lletra que forma un dels dos vèrtex nous del rectangle i que comparteix fila amb ella.
v. Si les dues lletres de la parella són iguals, es substitueix la primera per la següent de la mateixa fila i la segona per la lletra que s'ha descartat al principi (la lletra que no es troba a la quadrícula).
vi. Si el nombre de lletres del text és imparell, l'última lletra del text es substitueix per la següent de la mateixa fila.

Desxifratge: Per desxifrar el missatge, s'utilitza l'algorisme invers a l'anterior. És el següent:

i. Primer de tot s'agrupa, en aquest cas el missatge xifrat, per parelles de lletres.
ii. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa fila, aquestes es substitueixen cadascuna per la que la precedeix. En el cas que una de les dues sigui la primera de la fila, aquesta es substitueix per l'última.
iii. Si les dues lletres de la parella es troben a la mateixa columna, aquestes es substitueixen per les dues lletres que es troben a sobre d'elles respectivament. En el cas que una de les lletres sigui la primera de la columna, aquesta es substitueix per l'última.
iv. Si les dues lletres de la parella no es troben ni a la mateixa fila ni a la mateixa columna, aquestes són els vèrtex oposats d'un rectangle. Així doncs, aquestes dues lletres es substitueixen, cadascuna, per la lletra que forma un dels dos vèrtex nous del rectangle i comparteix fila amb ella.
v. Si la segona de les lletres és la que no es troba a la quadrícula, totes dues lletres es substitueixen per l'anterior de la mateixa fila de la primera. Les dues lletres són iguals.
vi. Si el nombre de lletres del text és imparell, l'última lletra del text es substitueix per l'anterior de la mateixa fila.

1. Xifreu "ABordilsMengenLaBotifarraIDeixenElsFils" utilitzant la quadrícula d'exemple.
2. Desxifreu "HcSyhbfRdSubqeXtEvnHyssJXtChhxxSq" utilitzant la quadrícula d'exemple.

3. Xifratges de transposició.

3.1 Xifratge de "reixa".

La idea de xifrar missatges utilitzant quadrícules amb forats es deu a Girolamo Cardano, matemàtic italià del segle XVI, al qual també se'l considera el precursor del Braille.

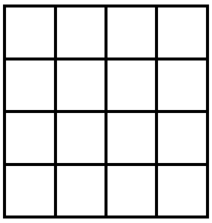
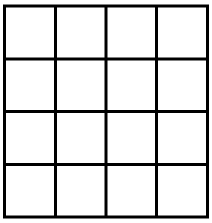
Per començar, cadascú es fa la seva quadrícula[4]. Agafeu la quadrícula amb ombrejats grisos i retalleu les caselles ombrejades.

[4] Les quadrícules (reixes) es troben al punt 9.2.1.3 Material construït.

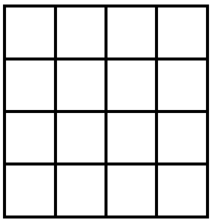
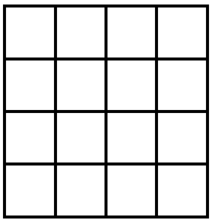
Agafa la quadrícula foradada i posa-la al cim d'una sense retallar. Marca amb un bolígraf els quadrats de la quadrícula de sota que no queden tapats. Gira la quadrícula foradada 90º i torna a marcar els quadrats que no quedin tapats. Repeteix aquest procés fins a tornar la plantilla foradada a la posició inicial.

1. Què has observat? Creus que passaria el mateix si els forats estiguessin col·locats de manera diferent?

2. Crea una plantilla que tingui aquesta mateixa propietat i una altra que no la compleixi.

3. Ja has descobert com es poden utilitzar les quadrícules per xifrar un missatge? Xifra el text clar: SETZE JUTGES D'UN JUTJAT. Si sobre espais utilitzem X.

Has tingut algun problema? Com el pots solucionar?

4. Busca una tècnica per donar la clau per poder desxifrar el missatge.

5. El mètode funcionaria igual si les quadrícules fossin de 3 files i 3 columnes? I si fossin de 5 files i 5 columnes? I 6 files i sis columnes? Sabries trobar alguna solució?

6. De quantes maneres diferents es pot foradar la quadrícula de 4 files i 4 columnes i que el mètode segueixi funcionant?

3.2 Xifratge de transposició per columnes.

A continuació hi ha una explicació de com funciona el mètode:

Xifratge: Es tria un nombre que a partir d'ara serà anomenat n i s'escriu el missatge en files de n lletres de manera que s'obtenen n columnes. Es fa una permutació del conjunt {1,2,3,4,5}, per exemple {3,2,4,5,1} i es col·loca cada columna original al seu lloc corresponent de la permutació. A l'exemple, es col·locaria a davant de tot la tercera columna, la segona columna quedaria altra vegada en segona posició, llavors vindria la quarta, la cinquena i finalment, la primera.

Clau: En aquest mètode la clau ve donada per la permutació, en el nostre exemple la clau ve donada pel conjunt {3,2,4,5,1}. Si es vol, també es pot donar la clau xifrada en forma de paraula. Per fer-ho s'utilitzarà una paraula tal que la permutació ve donada per l'ordre que ocupen les lletres a l'abecedari. En el nostre exemple, la clau en forma de paraula podria ser PORTA. S'observa que la primera lletra de la paraula que trobem a l'abecedari és la A, per tant, la primera columna del text pla serà la última del missatge xifrat. La segona és la O, per tant, la segona columna queda fixa. La tercera és la P, la quarta la R i la última la T. D'aquesta manera, s'obté la clau {3,2,4,5,1}.

Desxifratge: Per desxifrar el missatge un cop la clau és coneguda, l'únic que s'ha de fer és reordenar les columnes i llegir el missatge fila a fila

1. Desxifra el missatge següent si la clau és PORTA: (considera que el missatge no està partit, la columna de la dreta va a sota de la de l'esquerra).

N	I	S	E	D	Q	R	U	E	E
A	C	N	T	L	S	N	U	R	E
H	R	I	H	I	M	I	O	L	T
N	U	A	F	A	G	A	R	E	T
T	S	A	P	E	A	C	I	E	S
A	R	I	X	E	O	P	G	U	N
H	L	E	M	O	T	M	O	T	E
T	E	R	E	D	I	D	S	F	S
A	C	R	P	N	T	U	A	R	R

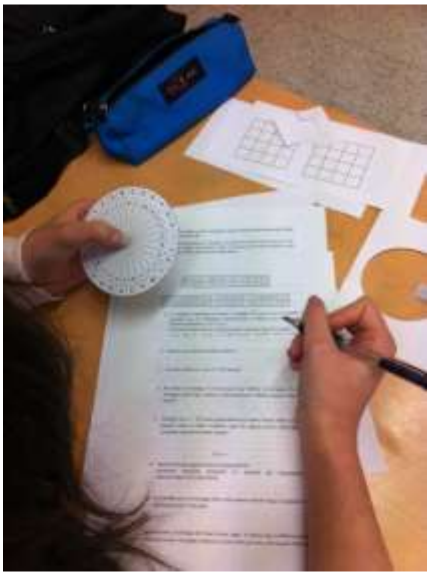
Activitat final:

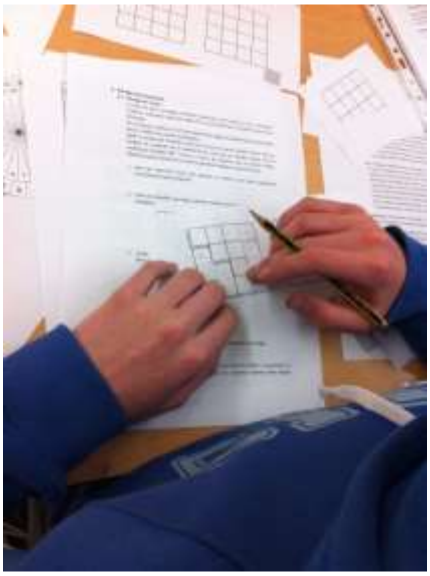
Penseu per grups cinc frases fetes o dites en català. Xifreu-ne una amb cada mètode i passeu-les a els altres grups (una o dues a cada grup).

Dels altres grups rebreu algun missatge per desxifrar.

Apunteu en aquest els textos clars de les vostres frases i com han quedat els missatges xifrats. Apunteu també, com us han arribat els missatges xifrats i quin era el text clar en cada cas.

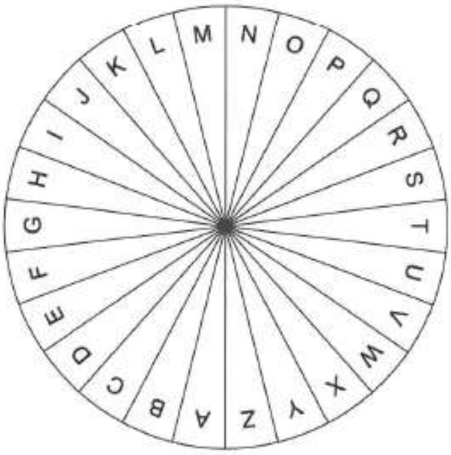
9.2.1.2 Fotografies

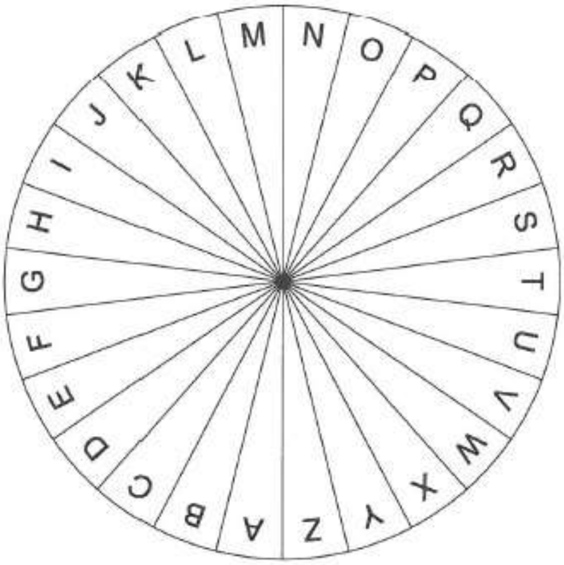




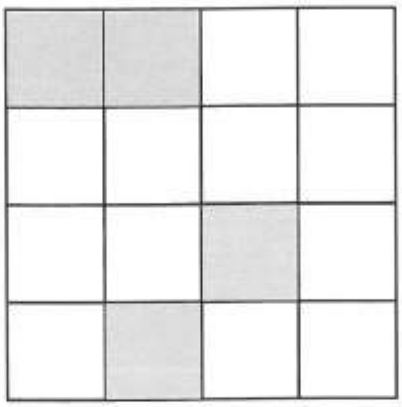
9.2.1.3 Material construït

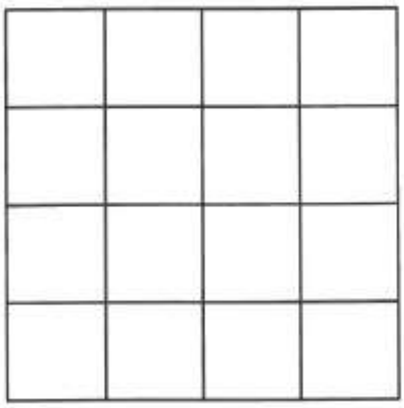
Rodes:





Reixes:





9.2.2 Probabilitat

9.2.2.1 Fitxa participants

Apunt històric: Pierre-Simon Laplace.

Pierre-Simon Laplace neix el 23 de març de 1749 a França i mor el 5 de març de 1827 a l'edat de 77 anys. Laplace va ser un brillant matemàtic, físic i astrònom. Als 24 anys ja se l'anomenava el "Newton de França". És particularment cèlebre per la seva obra sobre mecànica celeste, la qual ell mateix diu que ofereix una completa solució al gran problema mecànic que presenta el sistema solar.

En el camp de les matemàtiques va desenvolupar la teoria de la probabilitat, va ser el primer a publicar el valor de la integral de Gauss i va estudiar la transformació de Laplace.

Introducció a la probabilitat:

Un **experiment aleatori** és un experiment del qual es coneixen tots els possibles resultats però no es pot predir quin es produirà. Un exemple d'experiment aleatori és el llançament d'una moneda.

El conjunt de possibles resultats d'un experiment s'anomena **espai mostral (Ω)** i els subconjunts d'aquest espai s'anomenen **successos o esdeveniments**. Un succés elemental està format per un únic element de l'espai mostral, un succés segur està format per tot l'espai mostral (Ω) i finalment, un succés impossible és el que no es dona mai (∅).

El càlcul de probabilitats és una branca de les matemàtiques que es dedica a calcular les possibilitats (probabilitat) de que pugui ocórrer un determinat succés en realitzar un cert experiment aleatori.

La probabilitat d'un esdeveniment pertany sempre a l'interval [0,1], essent 1 la probabilitat d'un succés segur i 0 la probabilitat d'un succés impossible.

Una molt bona manera de calcular la probabilitat d'un succés d'un experiment aleatori en el cas que tots els successos tinguin la mateixa probabilitat de succeir és la **regla de Laplace**, que ve donada per la següent fórmula:

$$P = \frac{Nombre\ de\ casos\ faborables}{Nombre\ de\ casos\ possibles}$$

La **freqüència absoluta** d'un valor és el nombre de vegades que apareix aquest valor al llarg de l'estudi.

La **freqüència relativa** d'un valor és el quocient entre la freqüència absoluta d'aquest valor i el nombre de repeticions.

La **llei dels grans nombres**, diu que quan el nombre d'observacions d'un fenomen aleatori és molt gran, la freqüència relativa d'un esdeveniment s'aproxima progressivament a un valor determinat. Aquest valor, és la probabilitat de l'esdeveniment.

Activitat 0: Propietats de la probabilitat:

Calcula les següents probabilitats utilitzant la regla de Laplace, respon les preguntes i completa les propietats:

$$P(\{Treure\ un\ 2\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\}) =$$

$$P(\{Treure\ un\ 5\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\}) =$$

$$P(\{Treure\ un\ nombre\ major\ a\ 3\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\}) =$$

$$P(\{Treure\ un\ nombre\ parell\ en\ el\ llençament\ d'un\ dau\}) =$$

1. Quina és la probabilitat de no treure un 2 en el llançament d'un dau?
2. Quina és la probabilitat de no treure un 5 en el llançament d'un dau?
3. Quina és la probabilitat de no treure un nombre major a 3 en el llançament d'un dau?

Propietat 1: $P(A^C) =$

4. Quina és la probabilitat de treure un nombre major a 3 o treure un 2 en el llançament d'un dau?
5. Quina és la probabilitat de treure un nombre parell o treure un 5 en el llançament d'un dau?

Propietat 2: $P(A \cup B) =$ $si\ A \cap B = \emptyset$

6. Quina és la probabilitat de treure un nombre major a 3 o treure un 5 en el llançament d'un dau?
7. Quina és la probabilitat de treure un nombre parell o treure un 2 en el llançament d'un dau?

Propietat 3: $P(A \cup B) =$ $si\ A \cap B \neq \emptyset$

8. Si es llença un dau dues vegades, quina és la probabilitat de treure un 2 a la primera i un 5 a la segona?
9. Si es llença un dau dues vegades, quina és la probabilitat de treure un nombre parell a la primera i un 5 a la segona?

Propietat 4: $P(A \cap B) =$ $si\ A\ i\ B\ són\ independents$

Activitat 1: Problema de Monty Hall

Quina és la millor tria en el problema de Monty Hall?

Activitat 2: Càlcul de probabilitats de diferents esdeveniments mitjançant la llei dels grans nombres.

Quina és la probabilitat de tirar una xinxeta i que caigui amb la punxa amunt?

Quina és la probabilitat de tirar una moneda en una pauta, on la distància entre les línies és dues vegades el diàmetre de la moneda, i aquesta toqui una línia?

Quina és la probabilitat de tirar una moneda en una quadrícula, on el costat dels quadrats mesura dues vegades el diàmetre de la moneda, i que aquesta toqui una línia?

Quina és la probabilitat de tirar dos daus i la suma dels valors obtinguts sigui major que 3 i menor que 7?

Quina és la probabilitat de tirar dos daus i la diferència dels valors obtinguts sigui menor que 2 o major que 4?

Activitat 3: Torneig de probabilitats.

Nombre de persones per partida: Dues.

Material per partida: Tres xinxetes, dos daus, tres monedes i vint cartes de cinc colors diferents, quatre de cada color, que fan referència als cinc experiments aleatoris treballats a l'activitat 2. A cadascuna de les cartes hi ha descrits tres successos. A més, cada carta té una puntuació, que pot anar d'un a quatre punts, que depèn de la probabilitat dels successos. Menor probabilitat equival a major puntuació i viceversa.

Funcionament: El jugador A tria una carta de les vint i realitza l'experiment aleatori corresponent a la carta que ha triat. Si els resultats de l'experiment corresponen amb els tres successos de la carta, independentment de l'ordre, el jugador es queda la carta i suma la seva puntuació. Altrament, es retira la carta. Un cop el jugador A ha acabat el seu experiment, és el jugador B que tria una de les dinou cartes que queden i procedeix de la mateixa manera. La tercera carta la tria el jugador B, la quarta i la cinquena el jugador A i així successivament fins arribar a la última carta que se la quedarà el jugador A.

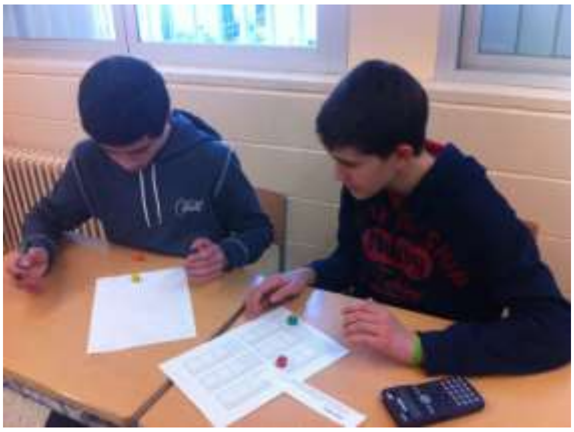
Quan s'hagin acabat les cartes, guanya el jugador que ha aconseguit una major puntuació. Ens cas d'empat, guanya el jugador que ha aconseguit més cartes de 4 punts. En cas que segueixi l'empat, guanya el jugador que ha aconseguit més cartes de 3 punts primer, 2 punts després i finalment 1 punt. En cas que continuï l'empat, es triarà una carta de manera conjunta i guanyarà el primer que aconsegueixi els successos corresponents a la carta triada.

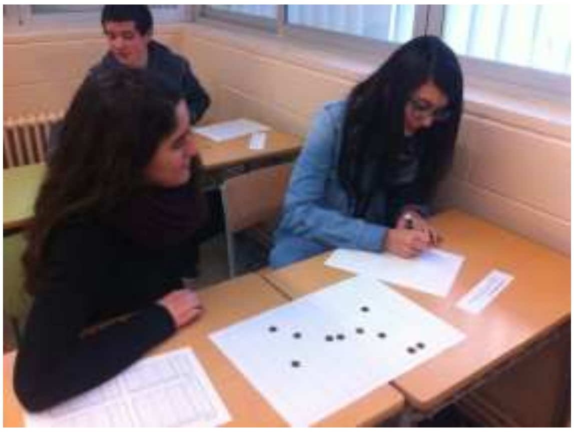
Quantes partides has jugat?

Quantes partides has guanyat?

Quina creus que és la millor estratègia per guanyar?

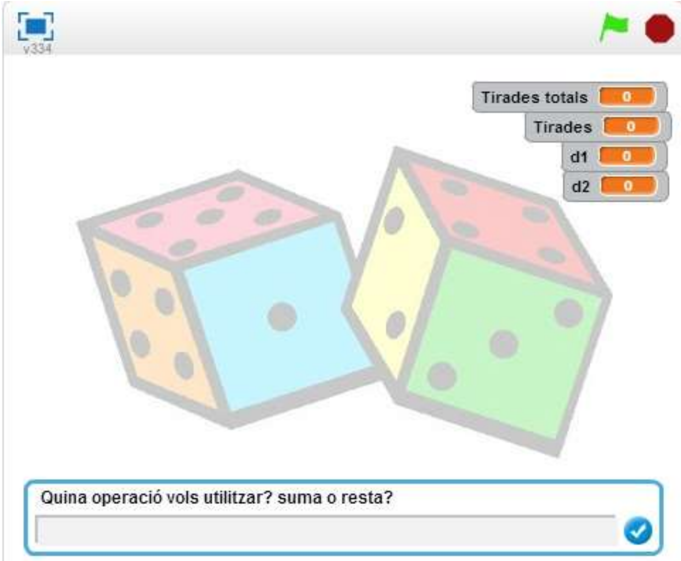
9.2.2.2 Fotografies

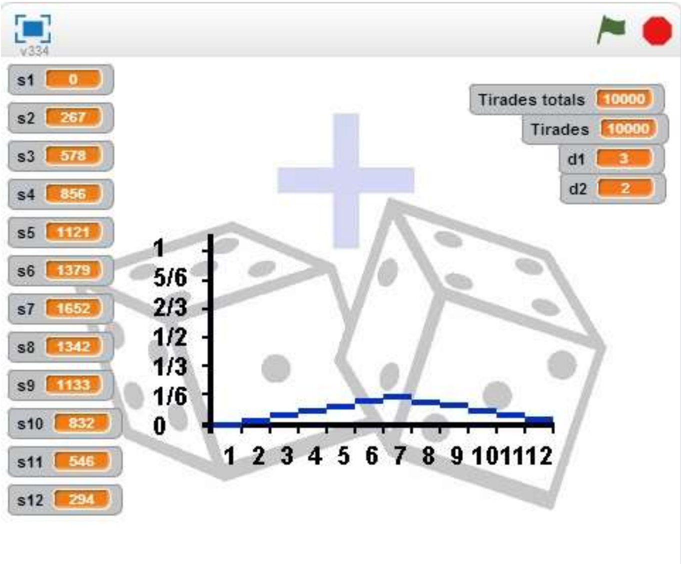


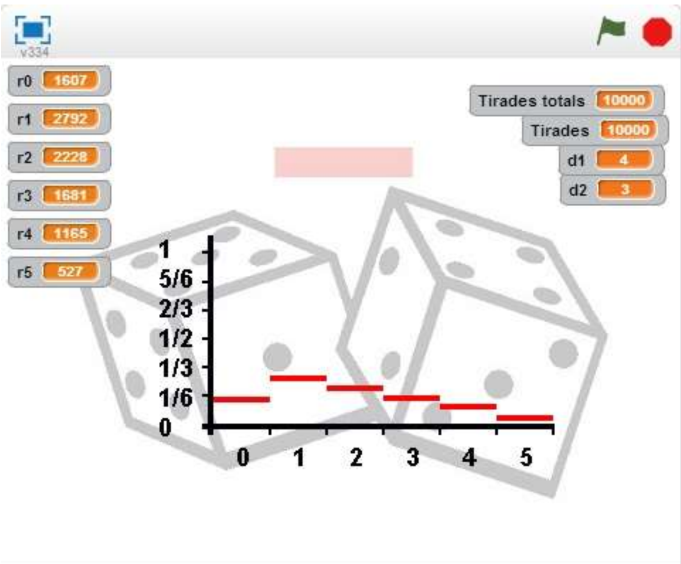


9.2.2.3 Material construït

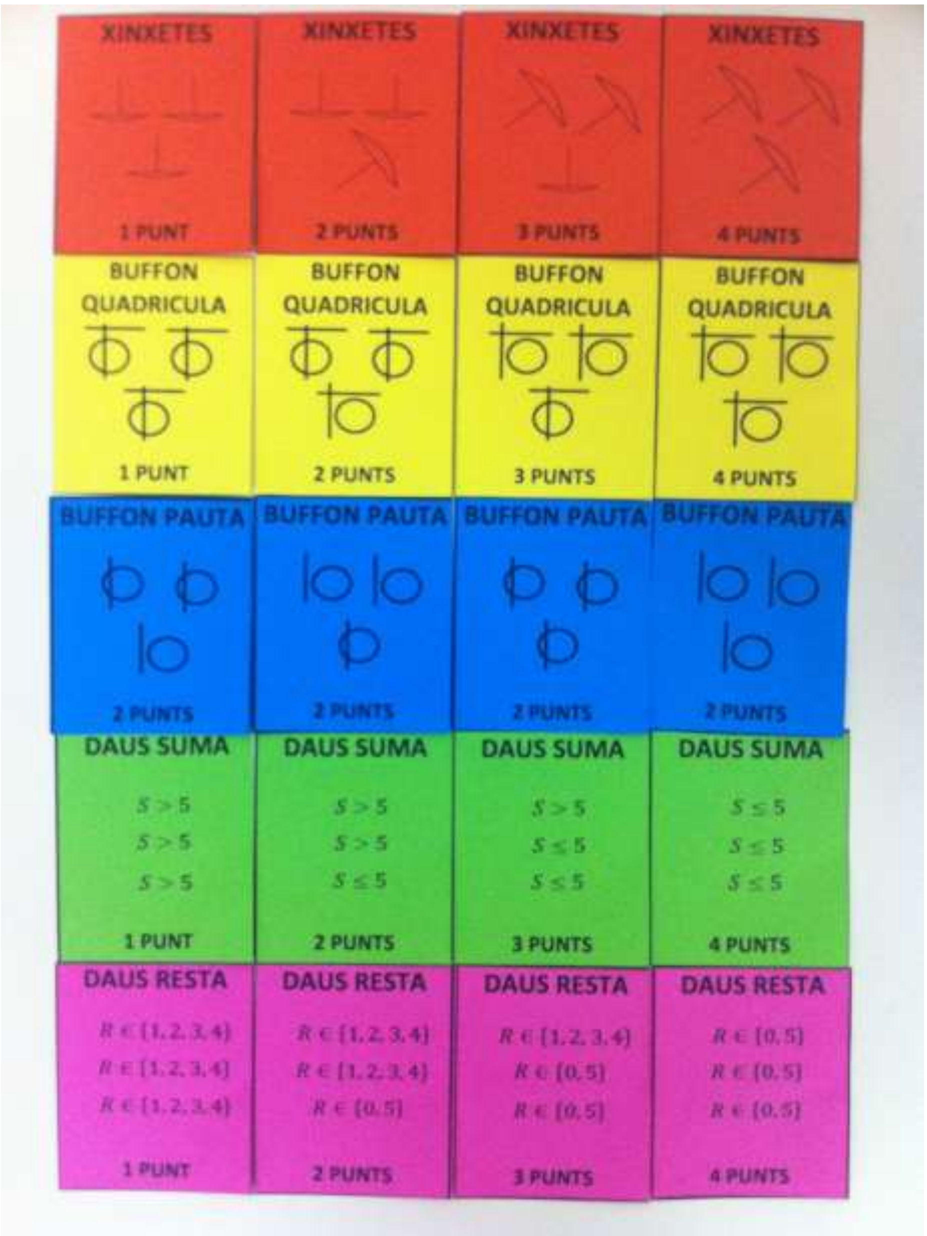
Programa d'Scrach: http://scratch.mit.edu/projects/francescmassich/3034544







Cartes:


XINXETES
1 PUNT
XINXETES
2 PUNTS
XINXETES
3 PUNTS
XINXETES
4 PUNTS
BUFFON QUADRICULA
1 PUNT
BUFFON QUADRICULA
2 PUNTS
BUFFON QUADRICULA
3 PUNTS
BUFFON QUADRICULA
4 PUNTS
BUFFON PAUTA
2 PUNTS
BUFFON PAUTA
2 PUNTS
BUFFON PAUTA
2 PUNTS
BUFFON PAUTA
2 PUNTS
DAUS SUMA
$S > 5$
$S > 5$
$S > 5$
1 PUNT
DAUS SUMA
$S > 5$
$S > 5$
$S \leq 5$
2 PUNTS
DAUS SUMA
$S > 5$
$S \leq 5$
$S \leq 5$
3 PUNTS
DAUS SUMA
$S \leq 5$
$S \leq 5$
$S \leq 5$
4 PUNTS
DAUS RESTA
$R \in \{1,2,3,4\}$
$R \in \{1,2,3,4\}$
$R \in \{1,2,3,4\}$
1 PUNT
DAUS RESTA
$R \in \{1,2,3,4\}$
$R \in \{1,2,3,4\}$
$R \in \{0,5\}$
2 PUNTS
DAUS RESTA
$R \in \{1,2,3,4\}$
$R \in \{0,5\}$
$R \in \{0,5\}$
3 PUNTS
DAUS RESTA
$R \in \{0,5\}$
$R \in \{0,5\}$
$R \in \{0,5\}$
4 PUNTS

9.2.3 Geometria

9.2.3.1 Fitxa participants

Apunt històric: René Descartes.

René Descartes neix el 31 de març de 1596 a França i mor l'11 de febrer de 1650 a Suècia a l'edat de 53 anys. Descartes va ser un filòsof racionalista francès molt important del segle XVII. És considerat el pare de la filosofia moderna i encara en aquest camp, va ser l'autor de la frase *cogito ergo sum* (penso aleshores existeixo). En el camp de les matemàtiques, és l'inventor de les coordenades cartesianes i el propulsor de la geometria analítica.

El seu perfil racionalista el va fer arribar molt més lluny que altres matemàtics anteriors a ell ja que es va tornar formular totes aquelles qüestions que es donaven per resoltes i va postular els seus enunciats amb tota la precisió requerida. Descartes va revolucionar el món de la geometria analítica a partir de l'aparició de la seva obra Geometria (1637). El gran avenç en aquest sentit va ser el sistema de coordenades cartesianes, que permet determinar qualsevol punt en el pla a partir de les seves distàncies a dos eixos fixes i perpendiculars utilitzant el conveni correcte de signes.

A més, Descartes va treballar en la teoria de les tangents a corbes i va ser el primer a utilitzar el concepte de límit. A ell es deu també, el fet d'utilitzar les lletres de l'inici de l'alfabet per a les quantitats conegudes i lletres del final de l'alfabet per a les incògnites.

Activitat 1: Mirall

Posa't davant d'un mirall, i amb un retolador no permanent, dibuixa't la silueta de la cara. Si és complicat veure la silueta ben definida, tanca un ull, veuràs com es veu millor.

Què observes al dibuix fet? Quina és la relació entre les distàncies de la vida real i les dibuixades al mirall? Per què?

Quina és la relació entre la superfície de la cara a la vida real i la superfície que delimita la silueta dibuixada al mirall?

Suposem que vivim en un món virtual on totes les distàncies han quedat reduïdes a una cinquena part. Quina seria l'alçada d'una persona que a la vida real mesura 1,75 metres? Quina seria la superfície d'un camp de futbol que a la vida real mesura 60 metres d'ample i 100 de llarg? I el volum d'un edifici (prisma rectangular) que a la vida real mesura 10 metres d'ample, 25 metres d'alçada i 10 metres de profunditat? Què passaria amb totes aquestes magnituds si visquéssim en un món virtual on totes les distàncies han quedat ampliades cinc vegades? Queden totes les magnituds ampliades o reduïdes cinc vegades?

Activitat 2: Càlcul de la superfície i la longitud de costa del Baix Empordà.

Quina és la superfície del Baix Empordà? I la longitud de la seva costa?

Quina estratègia has utilitzat?

Quina és la mitjana de les superfícies trobades per tots els grups? I la mitjana de les longituds de la costa?

Activitat 3: Generació de còniques amb paper vegetal.

1. **El·lipse:** Dibuixa una circumferència força gran i centrada al paper vegetal. Marca'n el centre C i un punt interior P. Aquest punt P pot ser qualsevol punt interior, però és millor si es tria més proper a la circumferència que al centre. Plega el paper vegetal sobreposant el punt P a un punt de la circumferència i marca molt bé el plec al paper. Repeteix aquest procés per el màxim nombre de punts de la circumferència possibles intentant que els punts de la circumferència utilitzats estiguin ben repartits al llarg de la circumferència. Observaràs que els plecs són les rectes tangents a una el·lipse de focus el centre de la circumferència C i el punt P. Depenent de la posició del punt P s'obtindrà una el·lipse més o menys excèntrica.

2. **Paràbola:** Posa el paper vertical i dibuixa una recta horitzontal a la zona inferior que parteixi el foli en dues parts. A la part superior, marca un punt P. Aquest punt P pot ser qualsevol , però és millor si es tria centrat. Plega el paper vegetal sobreposant el punt P a un punt de la recta i marca molt bé el plec al paper. Repeteix aquest procés per el màxim nombre de punts de la recta possibles intentant que els punts de la recta utilitzats estiguin ben repartits al llarg de la recta. Observaràs que els plecs són les rectes tangents a una paràbola de focus el punt P i directriu la recta. Depenent de la posició del punt P s'obtindrà una paràbola amb més o menys obertura.

3. **Hipèrbola:** Dibuixa una circumferència no massa gran i descentrada al paper vegetal. Marca'n el centre C i un punt exterior P. Plega el paper vegetal sobreposant el punt P a un punt de la circumferència i marca molt bé el plec al paper. Repeteix aquest procés per el màxim nombre de punts de la circumferència possibles intentant que els punts de la circumferència utilitzats estiguin ben repartits al llarg de la circumferència. Observaràs que els plecs són les rectes tangents a una hipèrbola de focus el centre de la circumferència C i el punt P. Depenent de la posició del punt P, s'obtindrà una hipèrbola amb més o menys excentricitat.

Activitat 4: Geometria del taxi.

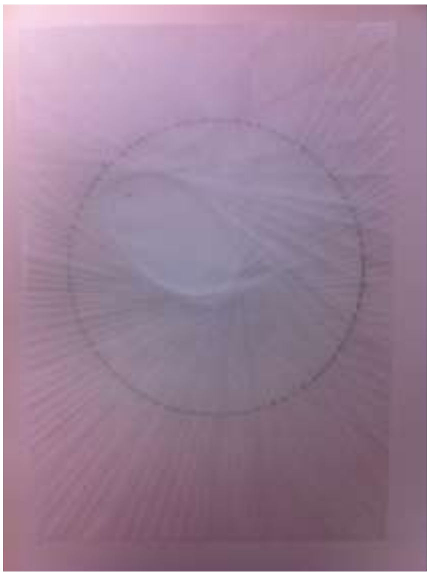
Siguin $A = (x_a, y_a)$ i B= (x_b, y_b) dos punts, considera la distància euclidiana ($d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$) i considera també la *mètrica de Manhattan* on la distància ve definida per:

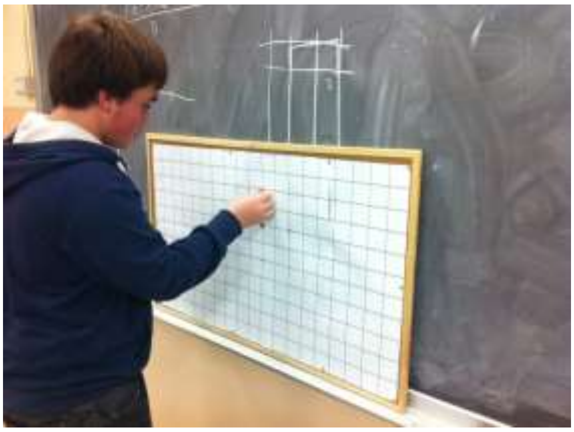
$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

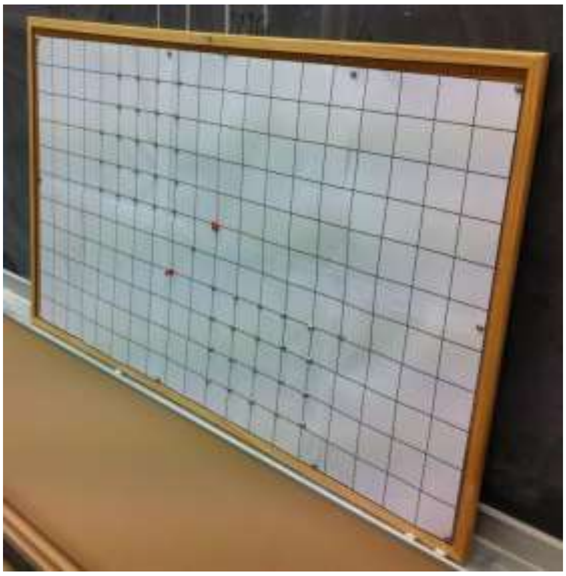
Dibuixa una circumferència de radi 2 utilitzant les dues distàncies. Fes també una circumferència de radi 3 i una de radi 4. Què observes?

Dibuixa, utilitzant la *mètrica de Manhattan*, la mediatriu de dos punts que estiguin a distància 2, 3, 4, 5 i 6. Tingues en compte totes les opcions. Es comporta sempre igual la mediatriu?

9.2.3.2 Fotografies







9.2.4 Miscel·lània matemàtica

9.2.4.1 Fitxa participants

Apunt històric: La història de π (pi).

La cultura anglosaxona, acostuma a escriure numèricament les dates de manera inversa a la que s'utilitza a Catalunya. S'escriu primer el mes i seguidament el dia. Per exemple, el 27 d'agost, s'escriu numèricament 8.27.

Durant la setmana d'aquesta sessió hi ha el 14 de març (3.14), és per això que l'apunt històric d'aquesta setmana servirà per introduir la importància i les aproximacions de π al llarg de la història.

π és una constant irracional que relaciona la longitud d'una circumferència amb el seu diàmetre. La cerca del major nombre de decimals del nombre π ha estat un dels objectius de nombrosos científics al llarg de la història.

La primera aproximació de π s'atribueix a l'escriba egipci Ahmes l'any 1800 aC, descrit en el *Papir Rhind* on s'utilitza un valor aproximat de π assegurant que l'àrea del cercle és la d'un quadrat, el costat del qual és equivalent al diàmetre del cercle disminuït en 1/9.

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}(4r^2) \rightarrow \pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}16049$$

Més endavant, Arquímedes va ser capaç de determinar de manera rigorosa que el valor de pi estava comprès dins d'un interval. El mètode utilitzat per Arquímedes era inscriure i circumscriure polígons regulars en una circumferència i calcular el perímetre d'aquests polígons. Arquímedes va començar amb un hexàgon i va anar doblant el nombre de costats fins arribar a un polígon regular de 96 costats. Arquímedes va aconseguir acotar el valor de pi dins l'interval següent:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \rightarrow 3{,}14085 < \pi < 3{,}14286$$

Un nou pas en el càlcul de π va arribar amb el desenvolupament del càlcul infinitesimal i amb el descobriment de les sèries infinites que permeten calcular π amb la precisió que es desitgi si s'afegeix una quantitat prou gran de termes a la sèrie. Al voltant de l'any 1.400 es troba la primera d'aquestes sèries. És la següent:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

El problema d'aquesta sèrie però, és que convergeix molt lentament. Posteriorment, se'n van trobar d'altres, de convergència més ràpida. Un altre exemple és el següent:

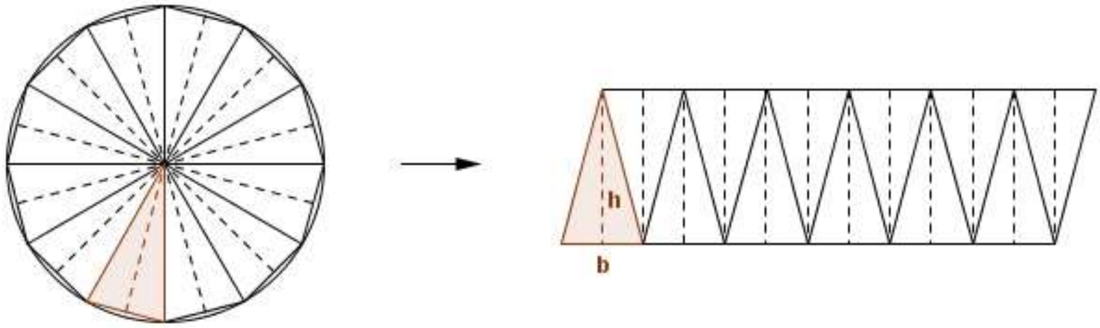
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Finalment, a principis del segle XX, la irrupció de la informàtica permet calcular un nombre molt gran de decimals de pi i per tant, aquest problema deixa de ser principal pels matemàtics. El 2002 ja s'havien calculat un 1.241.100.000.000 decimals de π.

Activitat 1: Deducció que la superfície d'un cercle és πr^2.

Es defineix π com la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre, però és conegut que la superfície del cercle sobte multiplicant π per el quadrat del seu radi. En aquesta activitat s'intentarà deduir aquesta igualtat.

Divideix el cercle amb un cert nombre de triangles iguals d'una certa alçada (h) i base (b). Un cop tinguis aquests triangles, col·loca'ls de manera que formin un rectangle partint-ne un d'ells tal com mostra la figura següent:



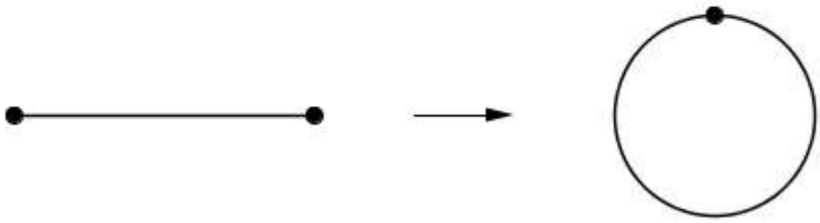
Quina és la base del rectangle en funció dels triangles que has fet?

Quina seria l'alçada d'aquests triangles si fossin molt estrets i n'hi hagués moltíssims? Quina seria en aquest cas la base del rectangle format tornant a col·locar els triangles?

Activitat 2: Banda de Möbius.

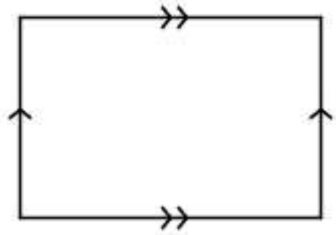
La topologia és la branca de la geometria que s'ocupa de les propietats de les superfícies i les figures en general però no es preocupa de la mesura de longituds o angles. En topologia, es pot estirar i deformar qualsevol figura, és per això que s'acostuma a descriure la topologia com la geometria de plastilina. En topologia, un "donut" i una tassa són la mateixa figura.

En topologia, la identificació de dos conjunts és considerar que són el mateix. Així doncs, si s'identifiquen els dos extrems d'un segment, s'obté una circumferència:



Si en comptes d'identificar els dos extrems d'un segment, s'uneixen en el mateix sentit dos costats oposats d'un rectangle s'obté un cilindre o banda. Si a més, s'identifiquen els costats que han quedat lliures (en el mateix sentit), s'obté un torus.

Cilindre



Torus

Què passa si s'identifiquen dos costats oposats d'un rectangle però aquesta vegada en sentit contrari? En aquest cas, s'obté una banda de Möbius.

Banda de Möbius

Construeix quatre bandes normals, quatre bandes de Möbius i realitza les següents activitats:

7. Utilitza una banda de cada tipus. Ressegueix les vores de cadascuna. Quantes n'has trobat en cada cas?

8. Marca un punt centrat a cada banda. Fes una línia rodant la banda fins que tornis a arribar al punt inicial. Què observes en cada cas?

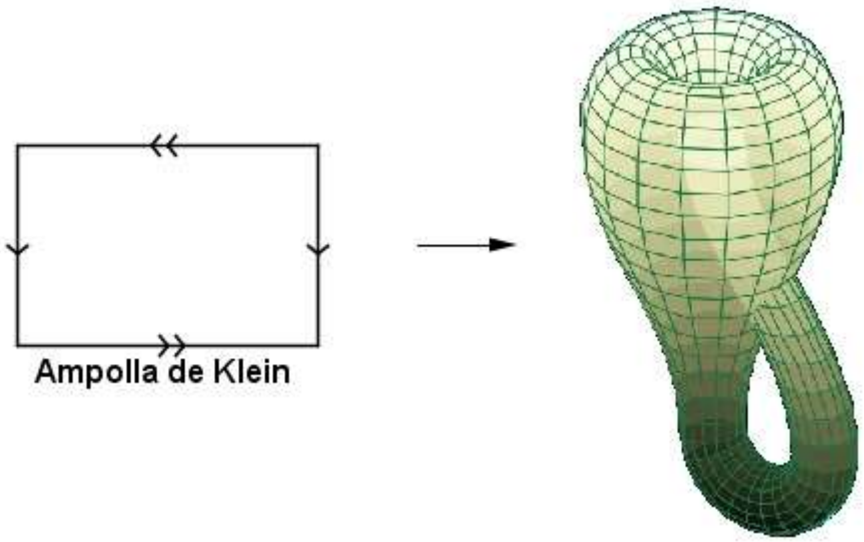
9. Dibuixa una fletxa que assenyali un dels laterals de la banda. Avança una mica i dibuixa una altra fletxa amb el mateix sentit. Repeteix el procés fins a tornar a trobar la fletxa inicial. Què observes en cada cas?

10. Retalla la banda per la meitat utilitzant la línia de l'activitat 2. Quantes bandes has obtingut? Són de Möbius aquestes bandes?

11. Utilitza ara dues bandes noves (una de cada tipus). Retalla-les però aquesta vegada fes-ho a una distància del lateral equivalent a un terç de l'amplada en comptes de a la meitat. Quantes bandes has obtingut? Són de Möbius aquestes bandes? Què passaria si es retallessin a una amplada equivalent a un quart de l'amplada?

12. Utilitza ara les últimes bandes (una de cada tipus). Uneix-les utilitzant enganxament amb un angle recte i retalla-les, sense desenganxar-les, cadascuna per la meitat. Què creus que obtindràs? Què has obtingut? T'ha sorprès?

Finalment, si els costats oposats del rectangle que han generat la banda de Möbius s'identifiquen (en el mateix sentit) s'obté una ampolla de Klein:



Activitat 3: Successió de Fibonacci i DIN.

Quantes parelles de conills hi haurà al final de l'any sota les següents condicions?

- Al principi de l'any només hi ha una parella jove.
- Una parella jove tarda un mes a ser una parella adulta.
- Una parella adulta genera una parella jove cada mes.
- Cap parella de conills mor.

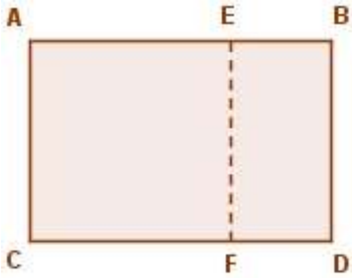
Trobes alguna relació entre uns mesos i els altres?

On es troba aquesta successió a la natura? De quina forma?

Divideix cada terme de la successió per el terme anterior i fes una taula. Què observes?

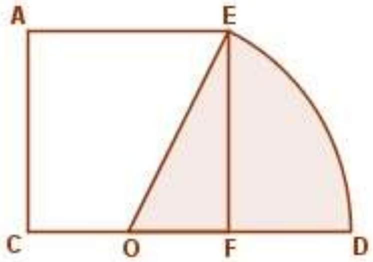
Calcula $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Com ha de ser un rectangle com el següent perquè el rectangle EBDF sigui semblant al rectangle ABDC tenint en compte que AC=AE=1? Troba una equació i indica quina és la seva solució positiva.



Comprova quina és la proporció del teu carnet d'identitat.

Hem vist doncs que els rectangles que compleixen aquesta propietat són rectangles de proporció àuria. Com es poden construir aquests rectangles? El procés és el següent:



Es considera el quadrat AEFC de costat la unitat i el punt O el punt mig del segment CF. La longitud OF és $\frac{1}{2}$ i és la mateixa que la del segment CO. Utilitzant el teorema de Pitàgores en el triangle OEF, es pot veure que el segment OE té una longitud $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Utilitzant un compàs centrat a O, es pot dibuixar l'arc ED. És evident que OD=OE, de manera que la longitud CD és la següent:

$$CD = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

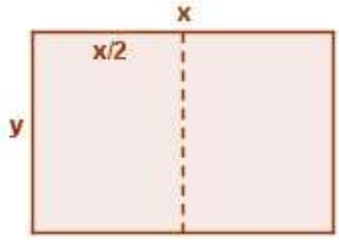
S'ha aconseguit doncs, un rectangle amb proporció àuria.

Hi ha molts altres rectangles amb proporcions conegudes, un dels més importants i més relacionats amb la vida quotidiana són els folis de format DIN sèrie A.

Quina és la proporció d'un foli DIN A4?

Doblega un DIN A4 per la meitat. Quina és la propoció del rectangle obtingut? Què observes?

Considera el següent rectangle, troba una equació que utilitzant la propietat que has observat i troba quina és exactament la proporcionalitat dels DIN de la sèrie A.

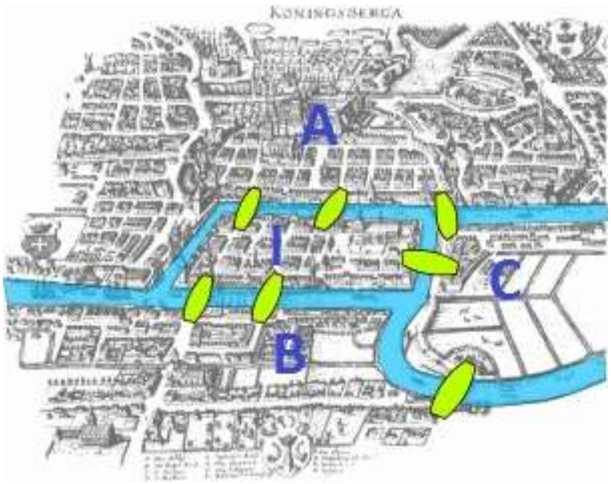


Quina és la superfície d'un DIN A0?

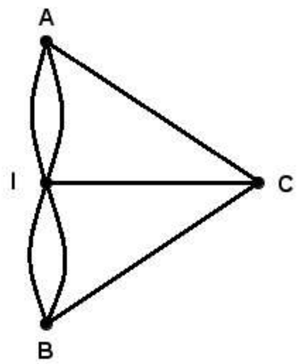
Un vídeo amb exemples de proporcionalitat àuria i la successió de Fibonacci a la natura és el següent: http://vimeo.com/9953368

Activitat 4: Problemes de grafs.

La següent imatge és de la ciutat de Königsberg, actualment Kaliningrad, famosa pels set ponts que creuen el seu riu Pregolya. En el segle XVIII es va plantejar la següent pregunta. És possible sortir a fer una volta passant una sola vegada per cada pont sense necessitat de començar i acabar el passeig al mateix punt?



En la teoria de grafs, l'important són les connexions. Les zones de terra es representaran amb punts (vèrtex) i les connexions, els ponts, amb línies (arestes) que uneixin els punts corresponents sense importar la forma ni la longitud d'aquestes línies. Així doncs, l'abstracció del problema dels set ponts de Königsberg és la següent:

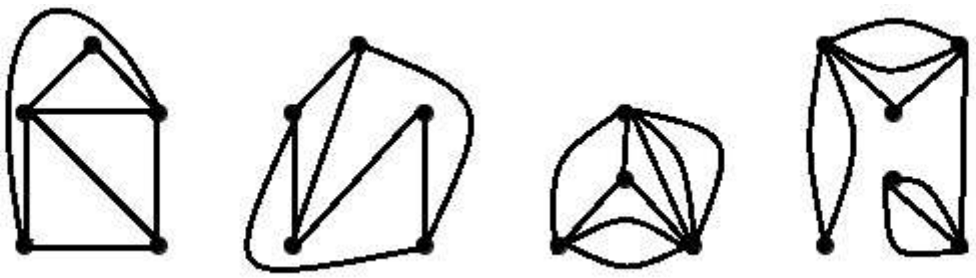


A quina zona de la ciutat has començat la passejada? Has aconseguit trobar algun camí que passes per tots els ponts una sola vegada?

Després de fer un altre pont entre A i I, has trobat algun camí? I després de fer un últim pont entre B i C?

Sabries dir el perquè de les respostes anteriors?

Si ja saps el perquè, serà fàcil saber si es poden dibuixar els següents grafs sense aixecar el bolígraf i passant una sola vegada per cada aresta (pont). Si encara no saps el perquè, intenta dibuixar-los i descobrir-ne la raó.



El nombre d'arestes que es troben en un vèrtex s'anomena grau del vèrtex. Un camí que passa per totes les arestes, independentment de les vegades que passa per un vèrtex s'anomena camí eulerià. Si aquest camí comença i acaba en el mateix vèrtex, s'anomena cicle eulerià.

Dibuixa un graf que tinguis els següents graus en els seus vèrtex: {1,2,2,3,3,4,5}, {1,1,1,2,2,2,3,3,3}, {2,2,2}, {3,3,3}.

Has pogut dibuixar l'últim? Per què?

Un arbre és una graf que no té cap cicle. Un cop s'ha passat per un vèrtex, és impossible tornar a aquest sense passar dues vegades per alguna aresta. Dibuixa tots els arbres de cinc i sis vèrtex.

Activitat 5: Quadrats màgics.

Un quadrat màgic és una quadrícula quadrada on a cadascuna de les cel·les s'escriu un nombre enter diferent de manera que el sumatori de cada fila, el sumatori de cada columna i el sumatori de les dues diagonals coincideix en el mateix nombre.

És evident que tots els quadrats 1x1 són màgics, per això no es treballaran en aquest taller.

És possible trobar un quadrat màgic 2x2? Si n'existís algun, tindria la forma del següent quadrat, però s'ha de veure si compleix les condicions de quadrat màgic:

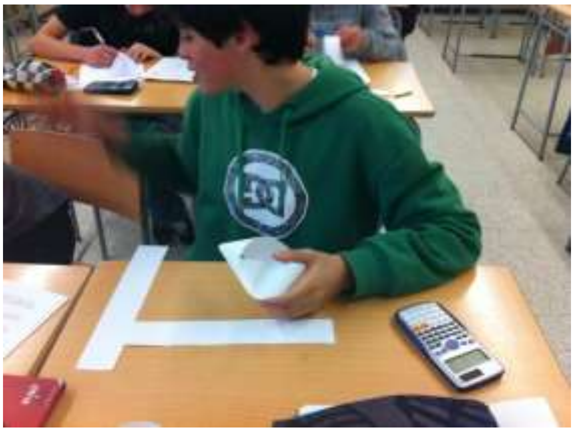
a	b
c	d

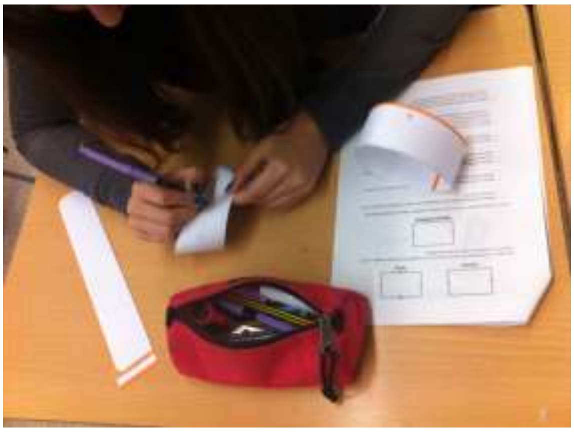
La suma de les files i la suma de les columnes ha de coincidir, per tant, observant la primera fila i la primera columna es pot deduir la igualtat $a + b = a + c$. Perquè es compleixi aquesta igualtat, s'ha de complir que $b = c$ però tots els nombres d'un quadrat màgic han de ser diferents. Per tant, no existeix cap quadrat màgic 2x2.

Construeix l'únic quadrat màgic 3x3 que existeix amb les nou primeres xifres.

Construeix un quadrat màgic 4x4 amb les 16 primeres xifres.

9.2.4.2 Fotografies





9.2.5 Fractals

9.2.5.1 Fitxa participants

Introducció als fractals:

És complicat definir què és exactament un fractal, però es pot intentar fer una aproximació pot ser definir un fractal com un objecte que compleix les següents propietats:

4. És autosemblant.
5. Es genera iterativament.
6. Té dimensió fraccionària.

Que un fractal sigui autosemblant, significa que si ens fixem en una part de l'objecte, aquesta és semblant a l'objecte total. Aquesta propietat és equivalent a la invariància d'escala. És a dir, independentment de l'escala que utilitzi, l'objecte obtingut és el mateix.

Un fractal es genera mitjançant un procés iteratiu. Per obtenir un fractal, s'apliquen diferents transformacions geomètriques contractives (homotècia + gir + translació).

Que un objecte tingui dimensió fraccionària significa que la seva dimensió no ve donada per un nombre enter sinó per una fracció. Per saber la dimensió d'un objecte, es pot utilitzar la tècnica *Box Counting*. Sigui N el nombre de parts iguals en què dividim l'objecte inicial i sigui r el factor d'escala. Aleshores, un objecte té dimensió d si:

$$Nr^d = 1 \to d = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Apunt històric: Benoît Mandelbrot.

Benoît Mandelbrot neix a Varsòvia el 20 de novembre de 1924 i mor el 14 d'octubre de 2010 als Estats Units. Mandelbrot és considerat el pare de la geometria fractal. L'any 1975 Mandelbrot va crear el terme fractal per descriure alguns objectes matemàtics. El 1977 va publicar el llibre *Fractals: Form, chance and dimension* on destaca que aquests objectes, considerats curiositats fins aleshores, són una eina útil per la interpretació de molts aspectes del món real. En aquest llibre també va enumerar les propietats comunes dels fractals: l'autosemblança, la invariància d'escala i la dimensió de Hausdorff no sencera. L'any 1982 Mandelbrot va ampliar aquestes idees en el llibre The fractal geometry of nature. En aquest llibre mostra com els fractals són un model per a les formes de les muntanyes, les línies de les costes, l'estructura dels planetes i el sistema arterial entre d'altres.

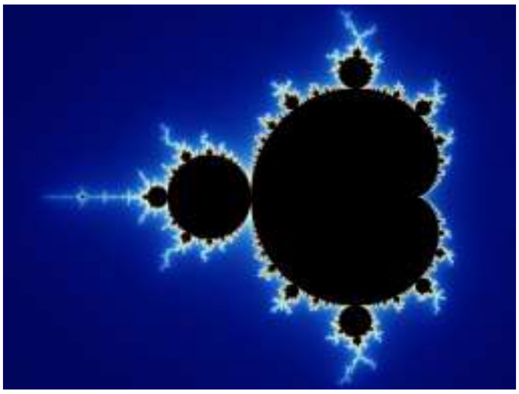
En honor seu, el 1982 es va anomenar Conjunt de Mandelbrot a un subconjunt de nombres complexos que ha esdevingut un dels temes importants en dinàmica complexa. El Conjunt de Mandelbrot és el conjunt fractal més conegut i estudiat i la seva definició és la següent:

Sigui c un nombre complex qualsevol. A partir de c es construeix la següent successió:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

Si aquesta successió queda acotada, aleshores c pertany al conjunt de Mandelbrot. Altrament, c no hi pertany.

La següent imatge mostra una representació del Conjunt de Mandelbrot:



Activitat 1: Fractals amb l'ordinador.

En aquesta activitat es generaran fractals amb l'ordinador, una web cam i fulls de color que envoltin la pantalla.

Enfoca la pantalla amb la càmera i observa les imatges que es formen. Són fractals. Mou a poc a poc la càmera per veure com van variant les imatges.

En comptes d'utilitzar fulls de colors, també pots utilitzar fulls amb patrons. Observa què passa.

Activitat 2: Descobriment de fractals coneguts:

2.4 Conjunt de Cantor:

Dibuixa el segment d'una recta. Aquest segment representarà l'interval tancat [0,1]. Dibuixa un altre segment igual a sota l'anterior. Divideix aquest segon segment en tres parts iguals i esborra el tros central. Dibuixa els dos segments obtinguts a sota. Divideix els dos segments en tres parts iguals i esborra'n la central en cada cas. Repeteix el procés tantes vegades com sigui possible de dibuixar.

- Quants segments has obtingut a la segona fila? I a la cinquena? Quants segments hi haurà a la n-èssima fila?

- En quina posició es troba la part final del primer segment de cada fila?

- Digues la raó homotètica, el gir i la translació de cadascuna de les transformacions utilitzades.

- Quina és la dimensió d'aquest fractal?

2.5 Triangle de Sierpinski:

Dibuixa un triangle equilàter. Dibuixa un altre triangle equilàter inscrit a l'anterior unint els punts centrals de cadascun dels costats. Pinta aquest segon triangle. Dibuixa un triangle equilàter inscrit a cadascun dels triangles que encara no s'han pintat i pinta'l. Repeteix el procés tantes vegades com sigui possible de dibuixar.

- Quants triangles no pintats has obtingut a la tercera repetició? Pots generalitzar el resultat?

- Quants triangles pintants has obtingut a la tercera repetició? Pots generalitzar el resultat?

- Digues la raó homotètica, el gir i la translació de cadascuna de les transformacions utilitzades.

- Quina és la dimensió d'aquest fractal?

2.6 Floc de neu de Koch:

Dibuixa un triangle equilàter. Divideix cadascun dels costats en tres segments iguals. Dibuixa un triangle equilàter a cadascun dels costats, utilitzant els segments centrals de cada costat com a base dels nous triangles. Repeteix el procés en cadascun dels costats de la nova figura. Repeteix successivament el procés tantes vegades com sigui possible de dibuixar.

- Quants costats té la figura obtinguda després de tres repeticions? Pots generalitzar el resultat?

- Digues la raó homotètica, el gir i la translació de cadascuna de les transformacions utilitzades.

- Quina és la dimensió d'aquest fractal?

Activitat 3: Fractals de paper en tres dimensions (pop-up).

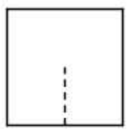
Tria una de les següents opcions i genera un fractal en tres dimensions.

6.1 Triangle de Sierpinski:

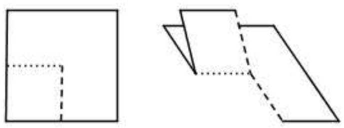
6.1.1 Dibuixa i retalla en un dels folis de color un rectangle que tingui una base de 140 mil·límetres i una altura de 280 mil·límetres.

6.1.2 Plega el rectangle per la meitat, unint els vèrtex inferiors als superiors i deixant el plec a la part inferior del quadrat obtingut.

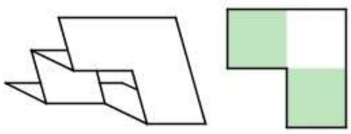
6.1.3 Retalla el quadrat obtingut des de la meitat de la base fins a la meitat de l'alçada.



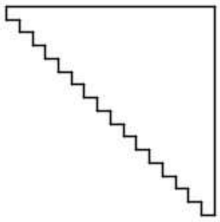
6.1.4 Plega el rectangle de l'esquerra per la meitat, unint els vèrtex inferiors amb els superiors i deixant el plec a la part inferior del nou quadrat obtingut.



6.1.5 Replega el quadrat de l'esquerra en forma d'acordió i considera a partir d'ara els quadrats de la diagonal principal.



6.1.6 Repeteix el procés des del punt 2.1.3 fins al punt 2.1.5 tres vegades més fins a obtenir una figura com la que es mostra a continuació:



6.1.7 Desplega el rectangle inicial per el primer plec que has fet. Ja tens el Triangle de Sierpinski.

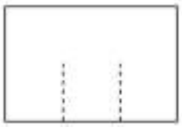
6.1.8 Per donar-li estabilitat, dibuixa i retalla al paper de l'altre color un rectangle com el del punt 2.1.1 i enganxa'l a la part posterior del Triangle de Sierpinski obtingut.

6.2 Conjunt de Cantor:

6.2.1 Dibuixa i retalla en un dels folis de color un rectangle que tingui una base de 187 mil·límetres i una altura de 224 mil·límetres.

6.2.2 Plega el rectangle per la meitat, unint els vèrtex inferiors als superiors i deixant el plec a la part inferior del rectangle obtingut.

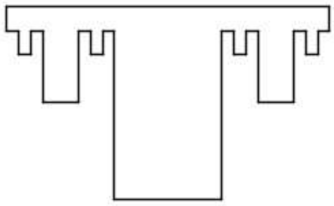
6.2.3 Retalla el rectangle obtingut des d'un terç de la base fins a la meitat de l'alçada i des de dos terços de la base fins a la meitat de l'alçada.



6.2.4 Plega els dos rectangles exteriors per la meitat, unint els seus vèrtex inferiors amb els superiors i deixant el plec a la part inferior.

6.2.5 Replega els rectangles obtinguts (exteriors) en forma d'acordió i considera a partir d'ara els rectangles que has replegat.

6.2.6 Repeteix el procés des del punt 2.2.3 fins al punt 2.2.5 dues vegades més fins a obtenir una figura com la que es mostra a continuació. Tingues en compte que ara, per poder plegar els rectangles exteriors, hauràs d'allargar els talls fets anteriorment.



6.2.7 Desplega el rectangle inicial pel primer plec que has fet. Ja tens el Conjunt de Cantor.

6.2.8 Per donar-li estabilitat, dibuixa i retalla al paper de l'altre color un rectangle com el del punt 2.2.1 i enganxa'l a la part posterior del Conjunt de Cantor obtingut.

6.3 Variació del Conjunt de Cantor:

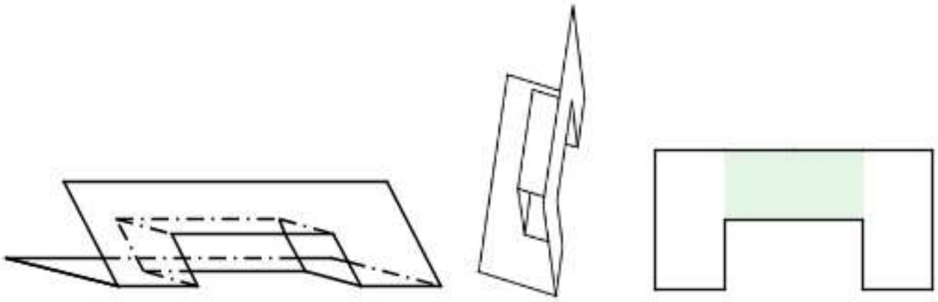
6.3.1 Dibuixa i retalla en un dels folis de color un rectangle que tingui una base de 192 mil·límetres i una altura de 286 mil·límetres.

6.3.2 Plega el rectangle per la meitat, unint els vèrtex inferiors als superiors i deixant el plec a la part inferior del rectangle obtingut.

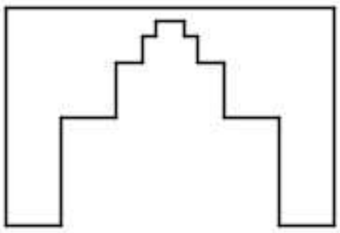
6.3.3 Retalla el rectangle obtingut des d'un quart de la base fins a la meitat de l'alçada i des de tres quarts de la base fins a la meitat de l'alçada.

6.3.4 Plega el rectangle central per la meitat, unint els seus vèrtex inferiors amb els superiors i deixant el plec a la part inferior.

6.3.5 Replega el rectangle central en forma d'acordió i considera a partir d'ara el rectangle replegat.



6.3.6 Repeteix el procés des del punt 2.3.3 fins al punt 2.3.5 tres vegades més fins a obtenir una figura com la que es mostra a continuació:



6.3.7 Desplega el rectangle inicial pel primer plec que has fet. Ja tens una variació del Conjunt de Cantor.

6.3.8 Per donar-li estabilitat, dibuixa i retalla al paper de l'altre color un rectangle com el del punt 2.3.1 i enganxa'l a la part posterior de la variació del Conjunt de Cantor obtingut.

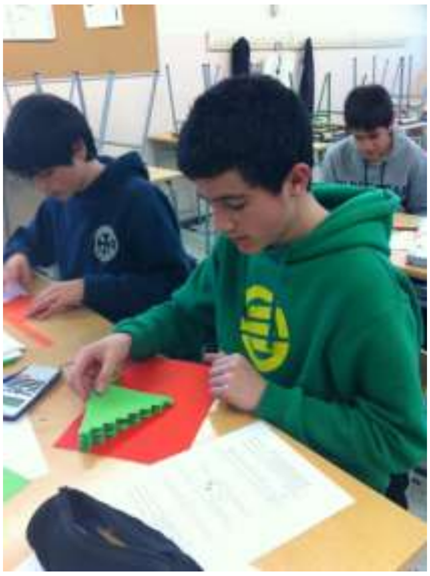
Activitat 4: Creació de fractals i reproducció a gran escala.

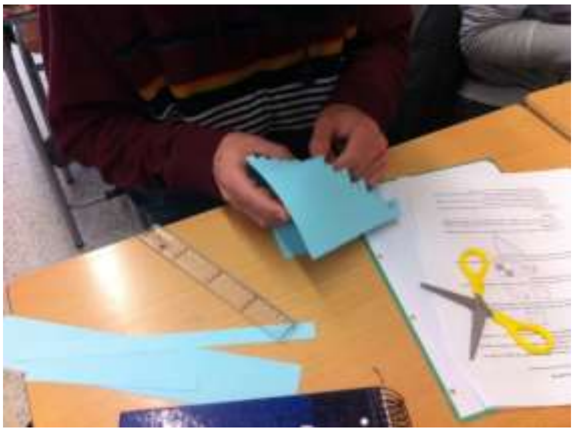
Inventa't un fractal mitjançant un procés iteratiu.

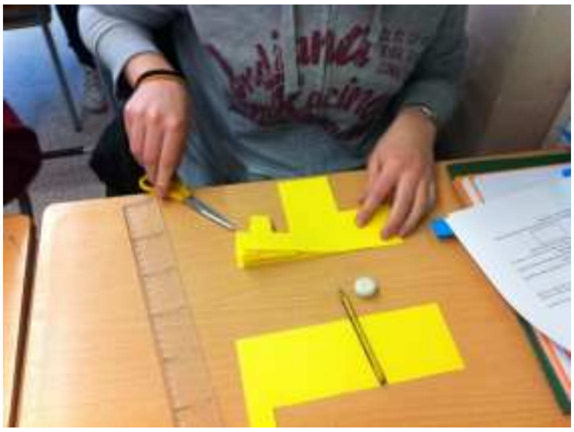
Voteu el fractal que més us agradi entre tots els participants.

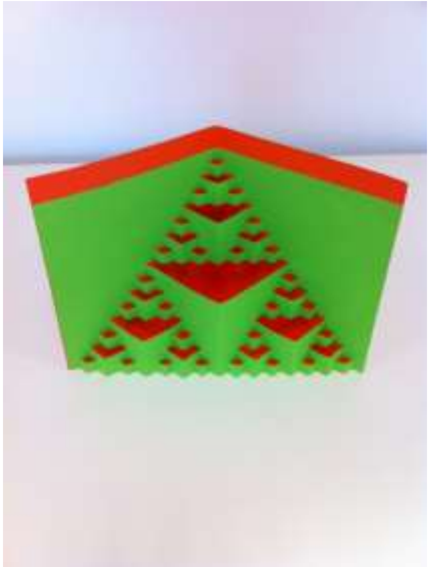
Genereu el fractal votat a gran escala al pati o al pavelló de l'institut.

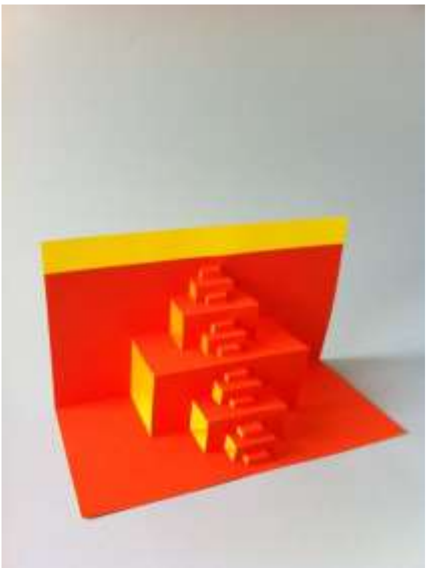
9.2.5.2 Fotografies











9.2.6 Anamorfismes

9.2.6.1 Fitxa participants

En aquesta sessió es va utilitzar el guió com a fitxa pels participants.

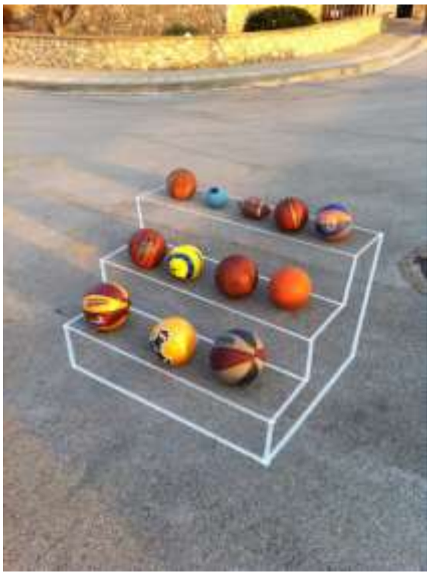
9.2.6.2 Fotografies

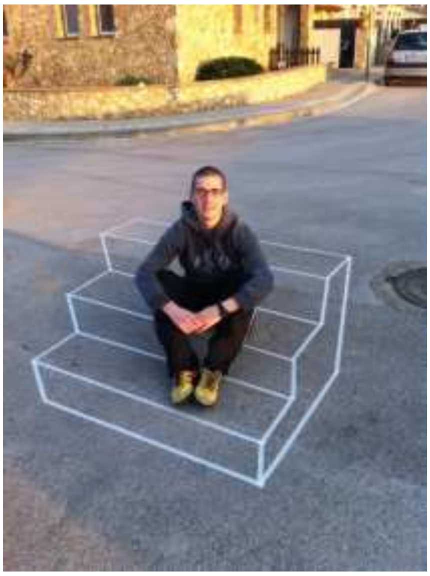






TALLER DE MATES

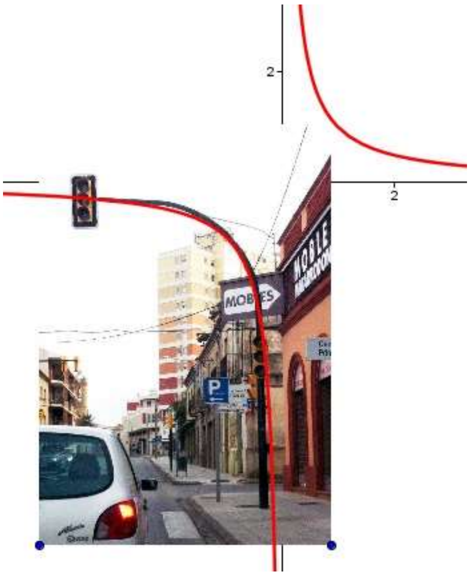




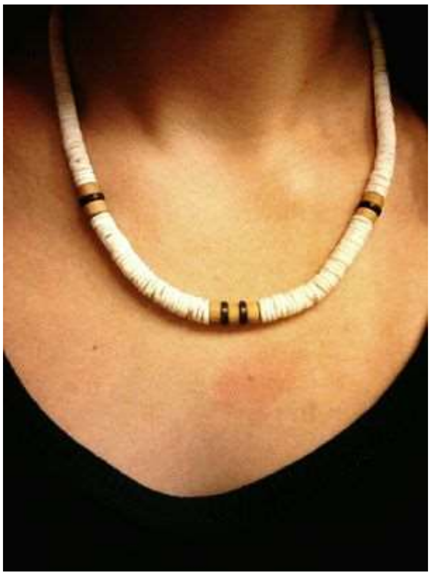
9.2.7 Reptes de la setmana

9.2.7.1 Funcions matemàtiques en el nostre entorn

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = x^2$$



$f(x) = |\sin(x)|$

$f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

$f(x) = \sin(x)$

$f(x) = |x|$

9.2.7.2 Matemàtiques i televisió

Activitat realitzada sobre la llei d'Hondt:

El nombre de vots que cada partit obté en unes eleccions es pot expressar en percentatge. Un partit pot obtenir, per exemple el 37,8% dels vots, però el 37,8% dels escons/regidors totals pot no ser un nombre natural. Així doncs, sorgeixen problemes si es vol traslladar el nombre de vots obtinguts per un partit a un cert nombre d'escons, ja que és evident que els regidors no es poden partir.

Per solucionar aquest problema, a Catalunya, com a molts altres països s'utilitza la Llei d'Hondt.

Funcionament de la Llei d'Hondt per al repartiment de regidors d'un municipi a partir del nombre de vots obtinguts:

- Els partits que obtenen menys del 5% dels vots vàlids totals no tenen representació. (A les eleccions generals aquest percentatge és del 3%).
- El nombre de vots obtinguts per cada partit es divideix per 1, per 2, per 3... fins al nombre total de regidors del municipi.
- Els regidors s'assignen correlativament als nombres més grans obtinguts.
- En cas d'empat, el regidor s'assigna al partit amb més vots. Si continua l'empat, es fa un sorteig per decidir qui obté el primer regidor i els següents s'assignen alternativament.

Exemple: Eleccions municipals a La Bisbal d'Empordà de l'any 2011, 17 regidors.

Partit	ERC-AM	PSC-PM	CIU	ICV-EUIA-E	PP	Blanc	Nul	Total Vàlids
Vots	1212	1100	628	271	185	193	78	
>5%?								
/1								
/2								
/3								
/4								
/5								
/6								
/7								
...								
Regidors								

Quants vots en blanc haguessin sigut necessaris perquè algun partit es quedés sense representació?

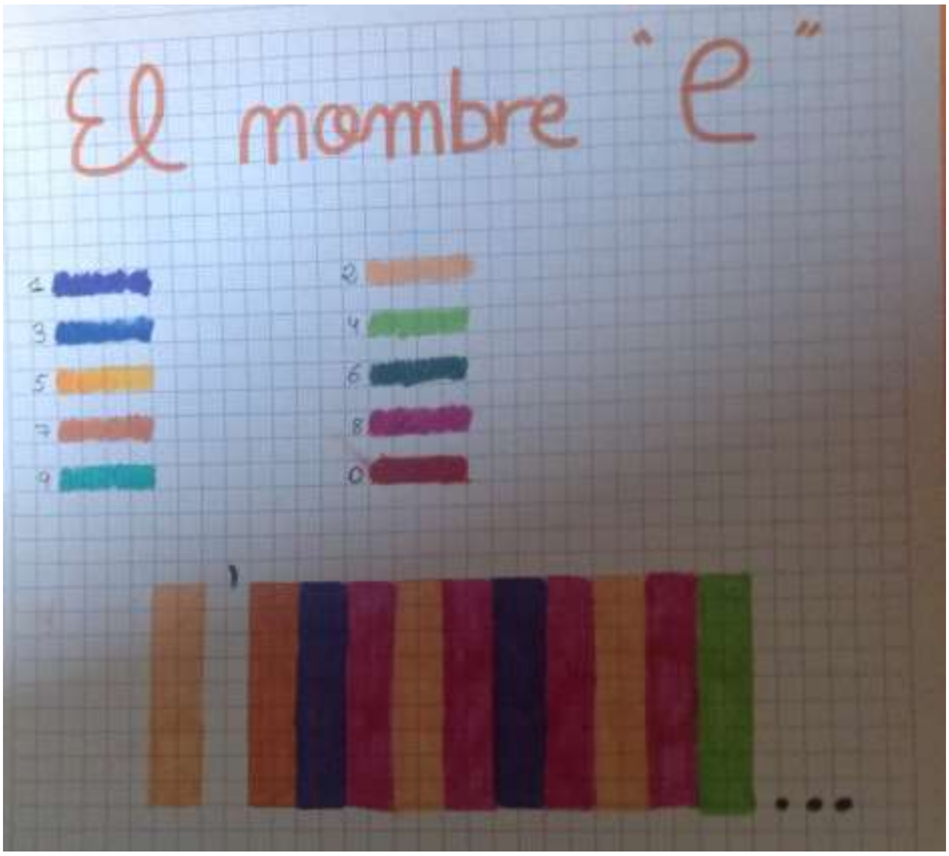
Quants vots més hagués necessitat ICV per desempatar en nombre de regidors amb el PP?

Quants vots més hagués necessitat ERC per desempatar en nombre de regidors amb el PSC? I per aconseguir majoria absoluta?

9.2.7.3 Errors matemàtics als mitjans

9.2.7.4 Nombres irracionals

Aquestes són les diferents representacions sense xifres que els participants del taller van fer de diferents nombres irracionals:



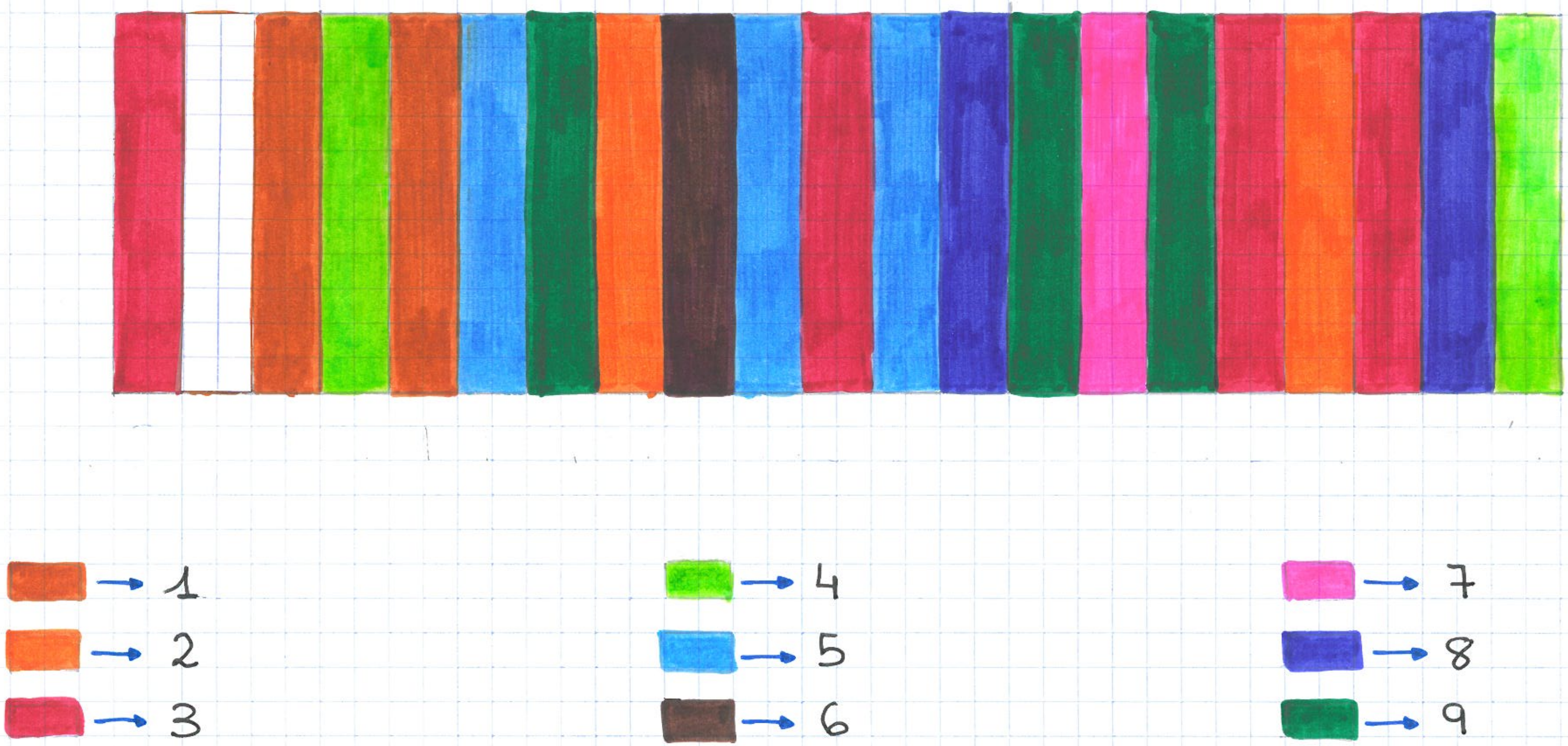
Arnau Llobet Rosell

ei francesc! aquí el meu número pi. no m'havia costat mai tant escriure dos frases simples de primària... espero que et serveixi jeje

3, 14159265358979323846
Era 1 matí a flaçà assentats al comboi quiet per error. Buscàvem juntament algunes solucions per si els policies eren pesats.

Mai Matès

El nombre π



$e = 2,718281827$

2 =  = ANEC / 7 =  = PORXO

1 =  = LLAPIS / 8 =  = NINOT DE NEU

l'ANEC, a sota el PORXO amb un LLAPIS i apareix el NINOT DE NEU. L'ANEC li dona al NINOT DE NEU el seu LLAPIS. El NINOT DE NEU i l'ANEC es queden a sota el PORXO.

REPTE DE LA SETMANA

MARIA VIELLA ANDREU

1 → 

2 → 

3 → 

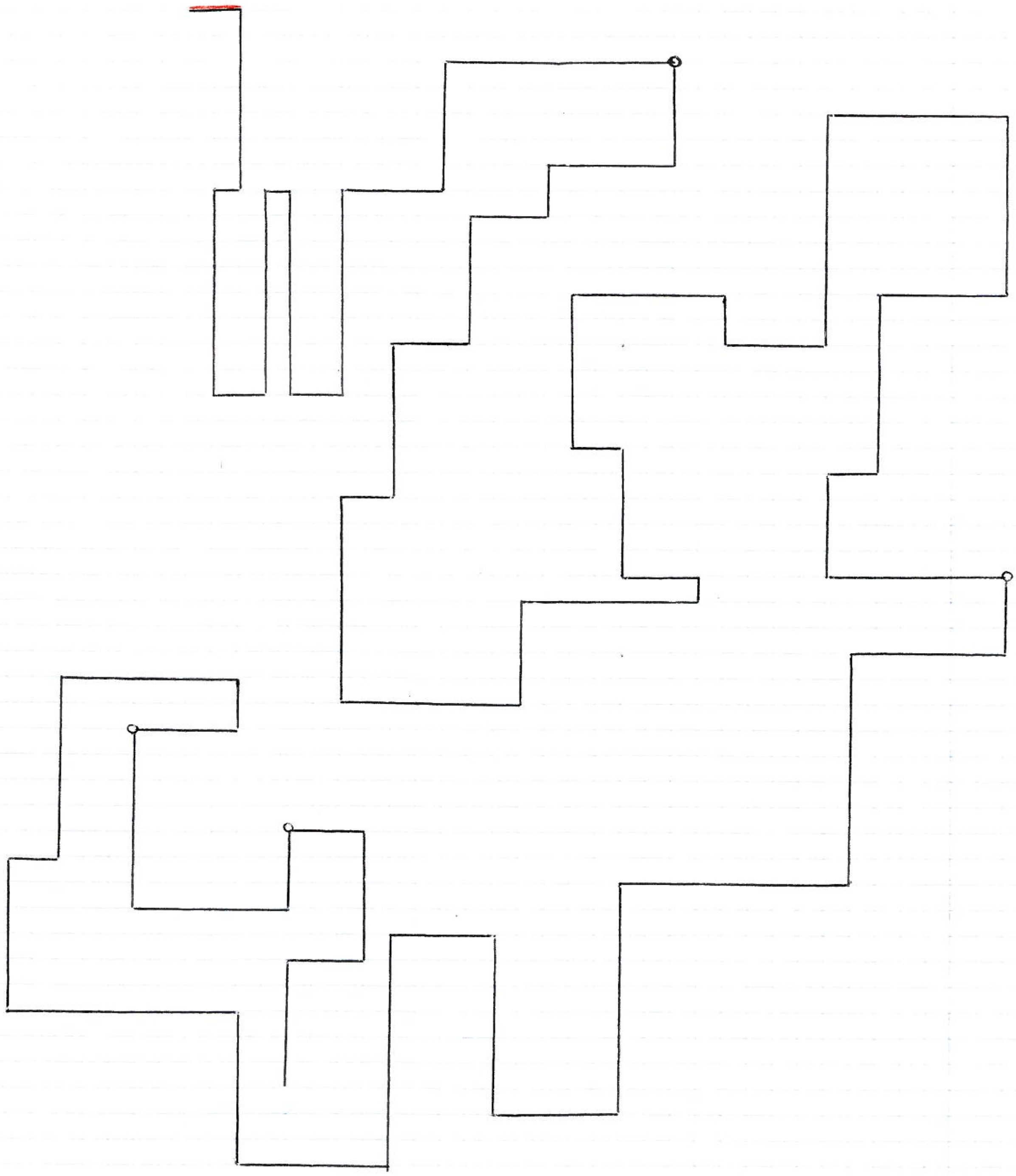
4 → 

5 → 

6 → 

Número ⇒ $\sqrt{2}$ = 

NOMBRE e

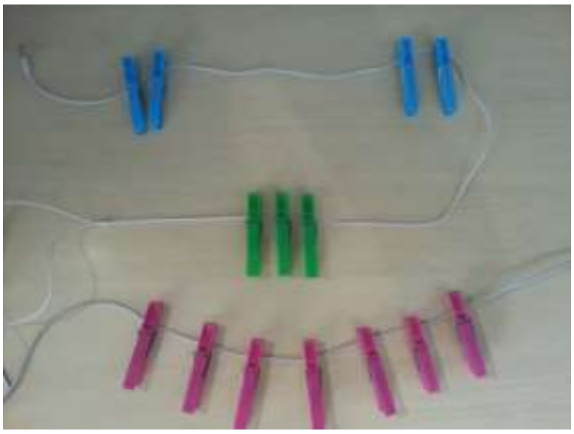


9.2.7.5 Fotografia matemàtica

Pastís d'esferes:

Diagonals del cel:

Suma feliç 4+3=7:



Calculadora del taller:

Phi-nal:

***Phi*-nal**

9.3 Annex A3: Vídeos

Els següents enllaços porten als vídeos que s'han publicat al portal Youtube per tal de fer difusió del treball.

En aquest primer vídeo s'hi pot veure la realització d'un role-play que es va fer per resoldre un quadrat màgic 3x3.

http://www.youtube.com/watch?v=Q9d1WtdjYJE

Els següents vídeos mostren els anamorfismes que es van pintar a l'institut de La Bisbal en l´última sessió del taller. L'últim d'aquests vídeos, va ser gravat i editat per l'Arnau Llobet, un dels participants del taller.

http://www.youtube.com/watch?v=BP85DNqz6B8

http://www.youtube.com/watch?v=dF6cPyU1XrQ

http://www.youtube.com/watch?v=RHnrbIlIYBg

9.4 Annex A4: Enquestes

En aquest apartat de l'annex, s'hi poden trobar les enquestes contestades pels participants. Aquestes enquestes només van ser respostes pels assistents a l'última sessió.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Que eren unes mates diferents

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent, no me l'esperava tan divertit

Fas ESO o Batxillerat?

ESO

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Encert

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Elevat

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

Probabilitat o Fractals perquè s'entenia molt bé

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

M'han agradat totes

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

La de cinta de Moebius perquè era sorprenent i la de ~~dit~~ fer un fractal gegant

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Totes m'han agradat

Quina activitat t'ha sorprès més?

La de pintar un anamorfisme

Quina activitat has trobat més avorrida?

Cap era avorrida

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

No en canviaria cap

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Totes

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que són divertides i molt diferents

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

No ho faria

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Molt

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Suficients

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Si

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Expliques bé

Consideres que el taller ha estat útil?

si molt

T'has divertit fent matemàtiques?

Si!

Consideres que has après matemàtiques?

si!

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

si

Vols afegir alguna cosa?

Gràcies per oferir-nos aquestes classes, ens hem divertit molt i ens has ensenyat una altre cara de les mates que no coneixia. Espero que treguis molt bona nota i et vagi tot molt bé! Gràcies.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Que eren unes notes diferents

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent, no tan divertit

Fas ESO o Batxillerat?

ESO

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Encert

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Elevat

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La de probabilitat perquè es podia entendre molt.

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

M'han agradat totes

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Cinta de moebius perquè era sorprenent.

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Totes m'han agradat

Quina activitat t'ha sorprès més?

La de anamorfismes

Quina activitat has trobat més avorrida?

Cap

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Cap, totes estaven bé.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Totes

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que són unes rates divertides i totalment diferents.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

No li diria.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Sí, molt.

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Suficients

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Sí.

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Res, expliques bé.

Consideres que el taller ha estat útil?

Sí.

T'has divertit fent matemàtiques?

Molt

Consideres que has après matemàtiques?

Sí

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Sí

Vols afegir alguna cosa?

No.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

El poder fer unes mates diferents i més "lúdiques".

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Molt diferent.

Fas ESO o Batxillerat?

ESO.

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Un encert perquè també era una manera de relacionar-te amb els més grans.

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Assequible.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

L'última, la de la probabilitat i la dels fractals.

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

Totes m'han agradat molt.

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

L'última, la de la probabilitat i la dels fractals.

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Totes m'han agradat molt però si n'hagués de triar una, seria la del dia de resseguir la costa.

Quina activitat t'ha sorprès més?

L'última. No m'esperava pintar una paret de l'institut.

Quina activitat has trobat més avorrida?

Cap m'ha semblat aborrida.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Cap.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Totes.

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que són unes mates molt lúdiques i divertides. Que val la pena i que s'aprenen moltes coses.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

No li diria res.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Moltíssim.

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides.

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Suficients.

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Molt.

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Res. S'enten tot molt bé.

Consideres que el taller ha estat útil?

Molt.

T'has divertit fent matemàtiques?

Moltíssim! I no m'ho esperava.

Consideres que has après matemàtiques?

Sí.

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Sí. He vist que t'ho pots passar bé i disfrutar fent mates.

Vols afegir alguna cosa?

Que gràcies per donar-nos la oportunitat de fer el taller. Ha valgut molt la pena i que no men arrepenteixo.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Que et coneixia i que m'agraden les mates.

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

com ha sigut més o menys

Fas ESO o Batxillerat?

ESO però ara ja començare Batxillerat

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Encert.

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

assequible

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La que vam fer els fractals perquè va ser la que m'ho vaig passar millor i vaig aprendre més

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

Cap. Totes m'han agradat

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Les dels fractals i la - perquè són les

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Cap, totes m'han agradat.

Quina activitat t'ha sorprès més?

La de l'ordinador i la càmera. Quan la faies girar feia formes.

Quina activitat has trobat més avorrida?

La de dibuixar quadrats proporcionals cada vegada més petits dins un quadrat inicial.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

La de la resposta anterior.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

La dels fractals.

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que és molt divertit i que s'apren molt

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Que són matemàtiques si més no.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Ha estat perfecte

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

suficients però si se'n fessin més jo vindria.

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Si

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

No

Consideres que el taller ha estat útil?

Si

T'has divertit fent matemàtiques?

Si, basicament perquè és la carrera que vull fer (física/mates)

Consideres que has après matemàtiques?

Si

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

No perquè ja m'agradaven

Vols afegir alguna cosa?

La gent hauria de veure la part divertida de les matemàtiques i l'ho increïbles que són, que en la nostra vida quotidiana hi apareixen continuament. Tu ens has ajudat a veure-ho! Gràcies.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques? La manera en que es feien les classes i no ser matemàtics que podien fer a classe.

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent? M'imaginava que seria alguna cosa divertida. i ho ha sigut. He après i m'ho he passat bé.

Fas ESO o Batxillerat? ESO.

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells? Indiferent.

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat? En algun casos elevat (algunes fórmules) però normalment assequible

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què? La última. Perquè hem pintat l'IES

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què? La primera, perquè era el primer dia, i estàvem tots una mica "nerviosos"

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què? La de pintar. Ha sigut diferent i divertida

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què? Totes m'han agradat

Quina activitat t'ha sorprès més? La última.

Quina activitat has trobat més avorrida? Cap.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què? Totes m'han agradat

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què? Totes

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller? Que s'ho passava molt bé.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller? Res

El meu tracte cap als participants ha estat correcte? Molt

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

El temps de les sessions era massa curt, correcte o ~~massa~~ llarg? (però està bé)

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta? Sí, molt

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats? NO, molt bé.

Consideres que el taller ha estat útil? Sí

T'has divertit fent matemàtiques? Sí

Consideres que has après matemàtiques? Sí

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller? De les matemàtiques ~~que m~~ que no coneixia sí

Vols afegir alguna cosa? Tot perfecte.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Que hi haguessin formes divertides per fer matemàtiques i alhora aprendre

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Me l'imaginava com a sigut

Fas ESO o Batxillerat?

Batxillerat

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Un encert

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Assequible, ha sigut un nivell que tothom ho entés

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La dels fractals. Perquè és una cosa que mai havia fet i és original

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

Tot m'ha agradat

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

La papiroflèxia quan vam fer els fractals perquè és una activitat més entretinguda i que la pots fer a casa

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Totes m'han agradat

Quina activitat t'ha sorprès més?

Els anamorfismes.

Quina activitat has trobat més avorrida?

Cap

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Cap, perquè totes m'han agradat

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

La última, perquè t'ho passes molt bé i fas una activitat diferent

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que s'hi li agraden les mates si apuntes perquè s'ho passarà bé i apendrà

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Que si no li agraden les mates no si apunti perquè s'avorrirà

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Si

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Molt ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Tot i que per altres activitats extraescolars no he pogut estar tota l'hora, està molt bé

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Suficients

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Si

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Res

Consideres que el taller ha estat útil?

Si

T'has divertit fent matemàtiques?

Si

Consideres que has après matemàtiques?

Si

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Si

Vols afegir alguna cosa?

No

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

La presentació va ser interessant i les matemàtiques sempre m'han agradat

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent, ha sigut millor, més dinàmic i divertit.

Fas ESO o Batxillerat?

Batx

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

En alguns punts de l'explicació ha sigut difícil seguir però així s'ha fet ambient diferent.

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

en alguns llocs assequible i en altres elevat.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

La primera. No era massa divertida

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Fractals gegants i probabilitat.

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Cap

Quina activitat t'ha sorprès més?

Fractals

Quina activitat has trobat més avorrida?

Cap

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Cap

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Anamorfismes

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que es més divertit del que sembla.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

~~Que és a~~ No li diria res.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Molt

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Massa poques.

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Si

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

La rapidesa. vas massa ràpid

Consideres que el taller ha estat útil?

Si

T'has divertit fent matemàtiques?

Si

Consideres que has après matemàtiques?

Si

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Si

Vols afegir alguna cosa?

Les preguntes finals han sigut repetides.
TOT PERFECTE

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques? Saber altres coses a part de números.

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent? Sí, me l'imaginava igual.

Fas ESO o Batxillerat? Bat.

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells? Suposo que no barrejar-los hagués estat millor, però en cap moment ha estat un impediment

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Assequible elevat.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

L'última perquè no coneixia ni sabia les aplicacions dels anamorfismes

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

La de xifratge. Massa mecànica i repetitiva.

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

La última, fractals. No sé, potser perquè no ho coneixia abans o el resultat "molava" més

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Les de xifrar i desxifrar. Massa mecànic. Tota l'estona era el mateix

Quina activitat t'ha sorprès més?

Quina activitat has trobat més avorrida?

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Crec que tot ha estat bé i que no s'hauria de canviar gaire res

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller? Que és divertit i que les mates no només són números.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller? No ho sé.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte? Crec que sí

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides? ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg? Correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller? Suficients.

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta? Crec que sí, tot i que algunes cosas no he acabat d'entendre-les.

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats? Potser a estones parles massa ràpid

Consideres que el taller ha estat útil? Sí

T'has divertit fent matemàtiques? Sí

Consideres que has après matemàtiques? Sí

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller? Una mica

Vols afegir alguna cosa?

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Que no eren molts corrents

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent

Fas ESO o Batxillerat?

ESO

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Encert

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Assequible tirant a elevat però només en determinats cops.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La última.

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

La criptografia. Perquè eren 3

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Pintar el sostre.

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Totes estaven bé.

Quina activitat t'ha sorprès més?

La de fractals o la dels ponts

Quina activitat has trobat més avorrida?

NS/NC

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

NS/NC

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

NS/NC

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que és divertit

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Que són mates

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Sí

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

un pèl llarg

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Les justes

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Si

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

No

Consideres que el taller ha estat útil?

Si

T'has divertit fent matemàtiques?

Si

Consideres que has après matemàtiques?

Si

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Si

Vols afegir alguna cosa?

Que ha estat bé.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

L'idea de passar una bona estona i diferent

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent, me l'imaginava més teòric

Fas ESO o Batxillerat?

Batxillerat

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Ho he trobat bé

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Assequible

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La d'anamorfismes, perquè és la més pràctica

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

Potser la primera, perquè encara no havíem trobat el ritme de classe

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

La dels fractals, és la més directa i amb més resultats.

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

La de probabilitats i les portes. Massa lent

Quina activitat t'ha sorprès més?

No ho sabria dir ()

Quina activitat has trobat més avorrida?

La de probabilitat.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

La d'anamorfismes (amb els guixos)

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que es molt entretingut.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

No li diris res.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Molt.

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides.

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Correcte.

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Poques sesions

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Si.

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Res, quan vas agafar més confiansa tot s'entenia bé

Consideres que el taller ha estat útil?

Si.

T'has divertit fent matemàtiques?

Si

Consideres que has après matemàtiques?

Sempre s'aprenen coses noves

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

No, sempre ha estat bona.

Vols afegir alguna cosa?

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Colaboran i si eren mates diferents, em va cridar l'atenció

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent

Fas ESO o Batxillerat?

ESO

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Encert

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Assequible

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La última, és la més divertida

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

Probabilitat

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Fer la figura a la paret

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Tirar els daus

Quina activitat t'ha sorprès més?

Anamorfisme, frectals

Quina activitat has trobat més avorrida?

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Anamorfismes

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Per veure altres coses de les mates

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Si s'avorreix amb les mates, no ho fagi

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Sí

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Sí

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Ja està bé

Consideres que el taller ha estat útil?

Sí, hi ha mates diferents

T'has divertit fent matemàtiques?

Sí

Consideres que has après matemàtiques?

Sí

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Sí

Vols afegir alguna cosa?

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Que m'agraden les matemàtiques, i també ajudar a fer un projecte de final de carrera

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent, hi ha sigut millor del que pensava

Fas ESO o Batxillerat?

ESO

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Encert

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Elevat i assequible alhora.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La última la dels anamorfismes, perquè hem pintat l'institut.

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

No recordo la que menys m'ha agradat.

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

La de pintar l'institut

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

No en recordo cap.

Quina activitat t'ha sorprès més?

La dels anamorfismes, per això m'ha agradat tant.

Quina activitat has trobat més avorrida?

No ho recordo, crec que cap.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Totes les trobo un encert.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

La del anamorfismes, m'ha enamorat

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Doncs que el fes, que no pot viure sense fer aquest taller.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Si no t'agrada ni les matemàtiques ni el bon rollo no t'hi apuntis.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Perfecte.

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides.

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Poques, ~~pa~~ jo per ser n'hagués fet més i de més curtes.

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Sí.

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Res, la manera enèrgica en que t'expresses és fantàstica.

Consideres que el taller ha estat útil?

Sí.

T'has divertit fent matemàtiques?

Sí.

Consideres que has après matemàtiques?

Sí.

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Sí.

Vols afegir alguna cosa?

Doncs no, crec que ho has preguntat tot, i tot ha estat molt bé.
Res, només donar-te les gràcies.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

~~[illegible]~~ La pintura de l'últim dia.

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent

Fas ESO o Batxillerat?

Batx

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Encert

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

A vegades elevat per la diferencia d'edats

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

L'última, és més en conjunt.

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

La de xifratge perquè sempre era igual

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Pintar

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Xifratge

Quina activitat t'ha sorprès més?

La última, no ho veia possible

Quina activitat has trobat més avorrida?

Contar el nombre de repeticions d'una cosa

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

La de xifrar

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

La de pintar

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que aprendrà segur.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Que s'avorriria.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Sí

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides.

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Correcte

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Suficients

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Sí

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Que no s'estigui tant a l'aula.

Consideres que el taller ha estat útil?

Sí

T'has divertit fent matemàtiques?

Sí

Consideres que has après matemàtiques?

Sí

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Sí.

Vols afegir alguna cosa?

NO

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Que aprendriem unes matematiques mes lúdiques.

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

M'he sorprès amb moltes coses, no m'imaginava que amb les matemàtiques podies fer tot això.

Fas ESO o Batxillerat?

ESO

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Un encert, així ens ajudavem.

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Elevat, però alhora assequible.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

La d'annamorfismes perquè m'han sorpres totes les formes

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

La ~~de~~ que ferem escrits desxifrats perquè era ser la menys lúdica.

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

L'annamorfisme quan hem pintat la paret, perquè era entretingut.

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

La dels pots amb llenties (probabilitats) es va fer llarg.

Quina activitat t'ha sorprès més?

Annamorfisme.

Quina activitat has trobat més avorrida?

igual.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

una altre d'annamorfisme.

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que aprens i alhora t'ho passes bé.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

que t'hauràs de saltar hores lliures.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Sí.

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides.

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

correcte.

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Suficients, però han passat rapid

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Sí.

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Anar més directe al gra.

Consideres que el taller ha estat útil?

Sí. He après.

T'has divertit fent matemàtiques?

Sí

Consideres que has après matemàtiques?

Alguna cosa sí.

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Sí, ~~s~~ es poden aplicar molt a la vida.

Vols afegir alguna cosa?

Quina enquesta més llarga!

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Quan el van venir a presentar a la classe, vaig veure que les mates eren a per tot i que si ho feià les veuria diferent.

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Algunes coses si i d'altres no m'ho imaginava

Fas ESO o Batxillerat?

Batxillerat

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Un encert.

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Elevat en alguns casos, però després de ser explicat assequible.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

Els anamorfismes.

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

Totes han estat interessants (algu nou he après)

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Els fractals

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

~~Els q.~~

Cap

Quina activitat t'ha sorprès més?

Anamorfismes

Quina activitat has trobat més avorrida?

avorrida cap.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Totes han estat MOLT interessants

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Fractals, anamorfismes ... Són les que m'han impactat més

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?
Que veurà les mates diferents

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?
No el desaconsellaria.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?
Sí.

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?
Molt ben dirigides

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?
Correcte.

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?
Se m'ha fet curt perquè m'he divertit, però són suficients

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?
Sí

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?
Res

Consideres que el taller ha estat útil?
Sí

T'has divertit fent matemàtiques?
Sí

Consideres que has après matemàtiques?
Sí

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?
Sí

Vols afegir alguna cosa?
Ha estat molt aprofitable!

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Les activitats que s'hi farien

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Fas ESO o Batxillerat?

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Elevat però assequible (en algunes sessions, en d'altres assequible)

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

L'última perquè ha sigut la més participativa

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

La de criptografia perquè totes les activitats eren molt semblants

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Les de fer manualitats (fractals, pintar...) perquè són les més diferents a les classes tradicionals de mates i són les més visuals.

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Les "d'escriure"

Quina activitat t'ha sorprès més?

La dels gots de la probabilitat

Quina activitat has trobat més avorrida?

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

\-

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

La de pintar

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que farà mates d'una manera diferent a la que es fem a classe

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Que les sessions són llargues i ocupen temps

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Sí

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Algunes poc però per tal que ens haguéssim d'espavilar més

El temps de les sessions era massa curt, ~~correcte~~ o massa llarg?

Curt respecte el contingut però llarg respecte el temps (crec que s'hauria hagut de repetir més les activitats)

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Sí

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Explicar-les més a fons, algunes s'han explicat molt per sobre per falta de temps.

Consideres que el taller ha estat útil?

Sí

T'has divertit fent matemàtiques?

Sí

Consideres que has après matemàtiques?

Sí

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Sí

Vols afegir alguna cosa?

Crec que s'haurien de fer les activitats més a fons i menys en un mateix dia.

ENQUESTA FINAL TALLER

Què et va cridar l'atenció per apuntar-te al taller de matemàtiques?

Les aplicacions de les matemàtiques en la vida quotidiana

Te l'imaginaves com ha sigut o diferent?

Diferent, m·

Fas ESO o Batxillerat?

ESO

Has trobat un encert o una errada barrejar els alumnes dels diferents nivells?

Un encert, perquè els alumnes menors hem tingut l'oportunitat d'aprendre dels més grans.

Com has trobat el nivell de matemàtiques del taller, baix, assequible, elevat o molt elevat?

Elevat.

Quina ha estat la sessió que més t'ha agradat? Per què?

L'última, perquè els anamorfismes hem fascinant.

Quina ha estat la sessió que menys t'ha agradat? Per què?

La sessió dedicada a la successió de Fibonacci. Perquè, tot i que va estar bé va ser una mica aburrida.

Quina/es activitats t'han agradat més? Per què?

Un joc relacionat amb les probabilitats. Perquè va ser molt entretingut i divertit

Quina/es activitats t'han agradat menys? Per què?

Perquè va ser bastanta teorica, poca pràctica i una mica avorrida.

Quina activitat t'ha sorprès més?

Els anamorfismes

Quina activitat has trobat més avorrida?

La dedicada a en Fibonacci

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que no hi fos? Per què?

Perquè la vaig trobar un pel avorrida.

Si haguessis de repetir el taller, quina activitat t'agradaria que hi tornés a ser? Per què?

Perquè es una activitat entretinguda i molt visual.

Què li diries a un amic per aconsellar-li fer el taller?

Que son matemàtiques divertides i entretingudes.

Què li diries a un amic per desaconsellar-li fer el taller?

Que si no tens curiositat no cal que vinguis.

El meu tracte cap als participants ha estat correcte?

Si.

Les activitats han estat poc dirigides, ben dirigides o massa dirigides?

Ben dirigides.

El temps de les sessions era massa curt, correcte o massa llarg?

Correcte.

Hi ha hagut poques, suficients o masses sessions del taller?

Suficients.

Creus que s'han transmès els continguts del taller de manera correcta?

Si

Què creus que he de canviar a l'hora d'explicar les activitats?

Res, t'explicas prou bé.

Consideres que el taller ha estat útil?

Si

T'has divertit fent matemàtiques?

Si

Consideres que has après matemàtiques?

Si

Ha canviat la teva visió de les matemàtiques després del taller?

Si

Vols afegir alguna cosa?

Ha sigut un plaer assistir a aquest taller.

9.5 Annex A5: Carta d'agraïment

El següent document és una carta signada per tots els professors del Departament de Matemàtiques de l'INS La Bisbal, on s'agraeix la feina realitzada amb alumnes del centre.

Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Institut La Bisbal

Eusebi Díaz Costa, 16-38
17100 La Bisbal d'Empordà
Tel. 972 64 00 16
Fax 972 64 34 15
b7007300@xtec.cat
http://www.ieslabisbal.cat

El Departament de Matemàtiques de l'INS LA BISBAL

FEM CONSTAR

Que el taller de matemàtiques que en Francesc Massich Vall ha realitzat al nostre institut ha superat totalment les expectatives que, a priori, s'havien fixat.

Per començar cal destacar l'efectivitat de la crida a participar entre el nostre alumnat. Ha estat espectacular la capacitat de captació de clients que ha demostrat en Francesc i la de fidelització, cosa que encara és més d'admirar. La mitjana d'assistència al taller ha estat entorn de les 25 persones, la qual cosa indica l'interès que ha despertat entre els nostres alumnes.

El contingut de les sessions ha estat molt engrescador i motivador. Això s'ha notat fins i tot en l'interès per les classes de matemàtiques i els comentaris que l'alumnat ha fet. Han après a valorar aspectes que fins ara no ho havien estat gaire, com la importància de fer-se preguntes i les connexions de les matemàtiques amb altres matèries.

Ja ens agradaria poder tenir un estudiant com en Francesc cada curs!

AIXÍ, DONCS,

Volem donar-li la nostra felicitació més cordial i sincera per l'èxit aconseguit i alhora mostrar-li el nostre agraïment per la feina feta amb els nostres alumnes.

I perquè així consti, signem aquest document, a la Bisbal el dia 17 de maig de 2013

Victòria Oliu
Cap de departament

Núria Terradellas

Josep Mejías

Martí Fabrellas

Roser Roura

Joan Alabort

Xavier Codolà
Director centre

INSTITUT D'EDUCACIÓ SECUNDÀRIA
LA BISBAL