Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

CÀLCUL DE TRAJECTÒRIES INTERPLANETÀRIES DE SATÈL·LITS ARTIFICIALS

Francesc Pons Llopis

Director: Gerard Gomez
Realitzat a: Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. UB

Barcelona, 23 de juny de 2013

Índex

English Summary

Since ancient times humans have tried to comprehend what was happening in the sky. They created many different myths trying to explain what held world up, or what caused the sun to rise. They realised that they could navigate using the sun and the stars so tried to calculate their movements. However, they found it extremely difficult to describe them as they incorrectly believed the Earth as the centre of the universe which made the movement of every planet very complicated.

Although some philosophers had already conjectured that the sun was actually the centre of the solar system, since they didn't posses the necessary scientific methods, they couldn't prove or refute a theory in the way we can now. This changed with Galileo, the father of the scientific method, it is due to him that we are now able to conclusively prove or disprove hypotheses. Based on observation of the moons of Jupiter, he claimed that the sun was the centre of the universe. At the same time, Johannes Kepler formulated his three laws of the movement of the planets around the Sun. It was then Newton who was first to produce a concrete scientific theory that would explain the movement of the planets. After he published his famous Principia most of the great mathematicians of history devoted part of their time trying to describe the movements of celestial objects using the Newtonian theory.

Despite all of the theory developed, it wasn't until the beginning of the twentieth that it occurred to the scientific community that a man-made object could be sent to the space and kept there. However, it was not until the end of the Second World War, that astrodynamics truly began to develop. Before then, scientists were unable to develop a vehicle capable of producing the great amount of velocity needed to escape the gravitational effects of the Earth. It was after the Second World War when the USSR and the USA started the space race that large amounts of money were invested with the goal of sending probes into space.

Since this moment, satellites have gained more and more importance in our lives. As every satellite needs somebody able to design and control its trajectory, astrodynamics has become incredibly important.

To exactly predict the trajectory of a satellite we need to take into account many factors, such as the gravitational pull of the other planets in the solar system or the effects of radiation pressure. However, the resulting equations do not have an analytic solution, and can only be solved by integrating them numerically. Finding a trajectory numerically requires a lot of trial and error, and without a good first approximation the time needed to find it would be prohibitive. Thus we need to find ways to approximate trajectories; this essay is devoted to the study of two of these approximations.

The first approximation we are going to deal with is the two body problem. This is the simplest approximation and is rather easy to study. The equations for the two body problem can be integrated, but the solution is given by a transcendent equation which cannot be solved using algebraic methods. For this reason we use numerical integration to find a solution. We can make

a complete qualitative study that will allow us to analytically find the trajectory of the satellite for most possible initial conditions. Hence, not only will we try to explain the principles of this method, but we will also apply it to compute transfers from the earth to the moon. Moreover, once we have a method to systematically compute these trajectories, we will try to find the most energy efficient way to do such transfers.

Once we have computed the minimum energy needed to perform a transfer, we will introduce an alternative and more complicated model to find the approximated trajectory of the satellite. This is the restricted circular and planar three body problem (RCPTBP). We will try to describe how the use of this allows us to approach a lunar transfer using less energy than the minimum found using the method derived from studying the two body problem. Due to the complexity of this model, we will focus only on the study of its equation of motion and the study of the basic dynamics introduced by them.

Whilst completing this project the main challenges I have had to face, apart from the obvious mathematical ones, have been the physical concepts such as dealing with units, or changing coordinates frames as well as learning how to use Latex and writing in a correct and understandable way.

Introducció i antecedents

L'ésser humà s'ha interessat pel cel des dels seus orígens. Des de l'antiguitat, viatgers tant per mar com per Terra han utilitzat els astres per orientar-se. A més, la Lluna i el cel estan presents en la majoria de mites i llegendes i en moltes religions es considera el cel com la morada de les seves divinitats. Per això, no és estrany que ja en temps dels grecs, els filòsofs intentessin descriure el cel: com s'havia creat i com eren els moviments que s'hi produïen. Tot i així, els seus intents d'explicar l'origen del cel, juntament amb les seves descripcions del moviment dels seus astres, es basaven en suposicions sense cap base empírica i per tant, eren majoritàriament falses. Com que es basaven en les seves pròpies sensacions per descriure'l, la majoria de grans pensadors van assegurar que la Terra era immòbil al centre de l'univers (ja que era el que ells percebien) i aquesta creença es va mantenir al món occidental, gràcies al cristianisme, fins ben entrat el segle XVII; tot i la evidencia empírica indicant el contrari.

Això canvia amb Galileu (1564–1642) que és considerat el pare del mètode científic. Basat en les observacions que va fer, utilitzant un telescopi, de les llunes de Júpiter; va arribar a la conclusió que era la Terra qui donava voltes al Sol i no al contrari. També durant aquesta època, Kepler (1571–1630) va formular les tres lleis fonamentals que descriuen el moviment dels planetes al voltant del Sol, en el que va ser la primera descripció matemàtica detallada del moviment d'aquests planetes. Finalment, Newton (1642–1727), va formular la llei de la gravitació universal i les lleis de la mecànica. Aquestes lleis, permetien entendre per primer cop la dinàmica que regia els moviments dels cossos celestes i va significar un abans i un després en la mecànica celeste. Gràcies a elles, Newton va ser capaç de deduir que un cos, atret per una força central proporcional a l'invers del quadrat de la distància, seguiria una òrbita amb forma de cònica. A més va estudiar algunes òrbites, especialment l'òrbita de la Lluna al voltant de la Terra i també va donar mètodes per calcular òrbites de cometes. Un contemporani seu, Halley, va utilitzar les tècniques desenvolupades per Newton per poder preveure l'aparició d'un cometa i identificar aquest mateix amb l'observació de cometes de havien aparegut anteriorment. Aquest cometa, va ser anomenat en honor seu, cometa Halley.

A partir d'aquestes lleis, la gran majoria dels grans matemàtics de la història van estudiar problemes de mecànica celeste: Euler, Gauss... Els estudis es dedicaven a intentar descriure el moviment d'alguns astres (cometes, altres planetes,...) matemàticament i després comprovar que es corresponguessin amb les observacions o al contrari, donar nous mètodes per determinar òrbites de cossos celestes a partir d'observacions. A més, Euler va estudiar el problema de tres cossos, va estudiar diverses variants restringides d'aquest. Entre altres descobriments, va trobar els tres punts colinials d'equilibri en el problema restringit de tres cossos. Lagrange (1736–1813), va fer també moltes aportacions a l'astronomia i també es va centrar amb el problema de tres cossos. En el seu estudi del problema general de tres cossos va estudiar com variava la distància entre aquests. Així va descobrir que si estaven en moviment circular hi havia dues tipus solucions en que les distàncies es mantenien constants, una colinial i una equilateral. Quan ens trobem en el problema restringit circular de tres cossos, aquestes solucions trobades es converteixen en els tres punts colineals que primer havia trobat Euler i dos punts equilaterals (en que la tercera massa forma un triangle equilàter amb els altres dos cossos). Tot i que Lagrange no va donar aquests punts implícitament, aquests 5 punts es diuen típicament punts de Lagrange.

En aquell moment, ningú s'havia plantejat que en un futur es pogués viatjar a l'espai, posar objectes en òrbites estacionàries a la Terra, o acabar enviant satèl·lits a altres planetes i a la Lluna. De fet, una gran part dels estudis que es van fer sobre el moviment de la Lluna i altres planetes, va ser degut a que durant els segles XVII-XVIII es pagaven generoses recompenses a aquells que fessin avanços en el càlculs de les seves trajectòries, per les aplicacions que tenien per orientar-se en la navegació. Les bases de l'astrodinàmica, és a dir, l'aplicació de la balística i la mecànica celeste pels problemes pràctics sobre el moviment de coets i altres naus espacials van ser desenvolupades a principis del segle XX de manera independent per tres físics: Robert Goddard, Konstantín Tsiolkovski i Hermann Julius Oberth. Tot i així, amb el desenvolupament tecnològic d'aquella època, era impensable fer realitat els dissenys d'aquests científics, i per això en aquell moment la seva obra no va ser tinguda molt en compte. Abans de la segona guerra mundial, l'Alemanya nazi, va dissenyar míssils de llarga distància, en el que va ser la primera utilització occidental militar de la balística. Després de la segona guerra mundial i durant tota la guerra freda, va ser quan aquest camp científic va viure el seu desenvolupament més intens. Com que tant la URSS com els EUA volien posar satèl·lits en òrbita geostacionària i arribar a la Lluna, van fer grans inversions i van posar equips de científics sencers per desenvolupar les eines d'enginyeria necessàries per fer aquestes naus possibles. Aquesta carrera, que va culminar amb l'arribada a la Lluna per part d'una nau dels Estats Units el 1969, va ser la que va provocar que es passés a utilitzar les lleis de gravitació, ja no només per estudiar els cossos naturals celestes, sinó per poder calcular òrbites d'objectes creats pels humans.

Tot i que la guerra freda fa temps que va acabar, la importància de l'espai, i el treball en aquest camp no ha disminuït sinó tot al contrari, a més de ser un objectiu purament militar i nacional, l'espai també ha guanyat importància per les seves aplicacions comercials com ara les telecomunicacions, la localització i un camp que avui en dia a guanyat molta importància com el de l'observació de la Terra. A més de la importància que té per a la ciència, on les missions espacials són fonamentals per avançar en la investigació de l'origen de l'univers, l'existència de vida fora de la Terra, estudi de l'habitabilitat d'altres planetes entre moltres altres coses. Els satèl·lits estan contínuament presents en la nostra vida: des de la televisió, passant pels gps i google maps depenen dels satèl·lits per funcionar. Aquest gran nombre d'aplicacions que sumat a que se'n van descobrint i reinventant contínuament fa que el camp de l'astrodinàmica sigui molt actiu, i que contínuament es dissenyin noves missions.

Quan es vol fer una transferència d'un satèl·lit artificial, des de la Terra a qualsevol altre lloc, és essencial saber quina trajectòria seguirà segons les diferents condicions inicials, per poder trobar la manera més eficient possible (la que utilitzi menys energia, la més ràpida possible o un terme òptim entremig d'aquests dos factors) de què el satèl·lit arribi a la seva destinació. Les prioritats d'un vol, dependran del tipus de missió que es porti a terme. Per exemple, si estem parlant d'una missió tripulada a la Lluna, s'haurà de prioritzar el temps de vol, ja que és perillós, pels astronautes, estar-se massa temps exposats a la radiació solar fora de l'atmosfera. Per altra banda, si el que es vol fer és una missió sense tripulants, i destinada a llocs més llunyans que la Lluna, s'haurà de prioritzar l'eficiència energètica, ja que sinó s'optimitza l'ús d'energia, algunes missions no serien possibles.

Per estudiar el moviment d'un satèl·lit, és necessari plantejar les seves equacions del moviment. Per poder descriure amb exactitud la dinàmica del sistema solar però, s'hauria de formular unes equacions del moviment que tenguessin en compte la posició de tots els planetes del sistema solar, la pressió de radiació, la forma no esfèrica dels planetes i la seva distribució de densitat no homogènia entre d'altres factors. Entre tots aquests factors que intervenen en el moviment, senzillament un plantejament de les equacions del moviment que tengui en compte tots els planetes del sistema solar i una pertorbació pels altres efectes no és integrable analíticament. Per tant, l'equació del moviment del satèl·lit no serà integrable analíticament, així que només em podem extreure informació utilitzant teoria de les pertorbacions i teoria qualitativa de les equacions diferencials a més d'utilitzant eines d'integració numèrica.

Per tant, per calcular trajectòries de forma precisa hem d'utilitzar mètodes d'integració numèrica. Però aquests per si sols no són suficients, ja que quan es busca que una missió segueixi una trajectòria determinada, si s'agafen unes condicions inicials aleatòries i es va provant quina trajectòria segueixen fins a trobar les condicions que ens donarien la que busquem, sense cap tipus d'aproximació inicial, el temps que tardaria qualsevol ordinador a fer els càlculs seria massa llarg. A més, degut a la gran quantitat d'operacions que haurien de fer, probablement tendrien errors numèrics importants. Per aquest motiu, és molt important tenir una primera aproximació de la trajectòria que seguirà el satèl·lit, encara que aquesta no sigui molt exacte. Per aconseguir aquestes aproximacions, es fan models simplificats.

Dues de les simplificacions més utilitzades són el problema de dos cosos, i el problema circular restringit de tres cossos. El primer dels dos és integrable, però no és possible obtenir la equació de posició del satèl·lit en funció del temps. Això es degut a que tot i que és possible trobar una equació de la posició en funció l'anomalia real, es pot obtenir una equació del temps en funció de l'anomalia excèntrica i a més es poden relacionar les dues anomalies, l'equació de l'anomalia excèntrica en funció del temps és transcendent cosa que fa que les solucions només es puguin trobar mitjançant mètodes numèrics o amb desenvolupaments de sèries. Per aquest motiu, generalment s'utilitza integració numèrica per estudiar les trajectòries. En el primer cas és possible entendre perfectament la geometria de les òrbites i en el segon cas, es pot fer un estudi de la seva dinàmica prou complert. A aquests dos models està dedicat aquest treball. En la primera part d'aquest treball, es treballarà amb el problema de dos cossos. En primer lloc, presentarem un mètode que ens permeti fer aproximacions de transferències interplanetàries de satèl·lits i posteriorment aplicarem aquest mètode per estudiar una transferència de la Terra a la Lluna. En la segona part, es farà un estudi del problema restringit de tres cossos planar. Per una banda, ens dedicarem a estudiar alguns aspectes dinàmics d'aquest sistema i a més, es farà una explicació de com es poden utilitzar els coneixements adquirits estudiant aquests problema per obtenir òrbites més complicades i aconseguir una transferència a la Lluna més eficient energèticament que la que aconseguíem amb el problema dels dos cossos.

Al llarg de tot el treball, m'he anat trobant amb diversos problemes que espero haver anat superant. En primer lloc, el fet d'estar tractant amb models essencialment físics, ha fet que m'hagi vist obligat a centrar-me no només en els càlculs i la part formal de tots aquests, sinó que també he hagut d'entendre el contingut empíric davall tots aquests aquests càlculs, cosa que al principi em va costar bastant. Així mateix, el fet d'haver de treballar contínuament amb unitats m'ha provocat més d'un ensurt ja que era incapaç d'entendre perquè no em quadraven molts valors. A més, també he hagut de treballar amb conceptes com el Hamiltonià, el Lagrangià i una sèrie de principis físics, que no dominava. Finalment, aprendre a utilitzar pròpiament el Latex combinat amb redactar el que ha estat el primer treball llarg de la meva vida, han estat també reptes significatius.

Objectius i motivació del problema

Per començar a presentar els objectiu perseguits al llarg d'aquest treball, m'agradaria exposar els motius que em van portar a escollir-lo. Aquests són el meu interès personal per l'astronomia i les ganes d'entendre millor com funcionava tota la mecànica celeste al mateix temps que aprendre una aplicació de les matemàtiques a la física, que sempre m'ha agradat molt. Durant aquest anys fent matemàtiques, he après moltes coses, la majoria de les quals no podia ni concebre abans de començar la carrera. Tot i així, des de jove, les estrelles, els coets i tot el que tingués a veure amb el cel m'havia fascinat, fins el punt que volar a l'espai exterior sempre ha estat un dels meus somnis. Quan finalment vaig decidir fer matemàtiques, havia assumit, que no tractaria aquests temes, però tot i així, no vaig perdre-hi interès. Per aquest motiu, quan vaig veure a les propostes de treball, una que em permetria acabar la carrera, aprenent sobre un dels temes que més m'interessen fora de les matemàtiques pures, no vaig dubtar en escollir-lo.

Per tant, cal remarcar que el primer objectiu que he perseguit, és aprendre tant com fos possible sobre l'astrodinàmica en general. Des de quines missions s'han fet al llarg de la història, quins mètodes s'utilitzen per dissenyar les missions més avançades, la història sobre els diversos avanços en tot aquest camp. Tot això en principi no formava part del treball, val la pena comentar-ho ja que ha tingut un paper important en l'elecció del treball.

Un cop exposat aquests objectius més personals, arriben els objectius tècnics que el treball espera assolir. Aquests són estudiar les transferències interplanetàries. En concret, es centrarà en adquirir els coneixement necessaris per poder entendre com s'utilitza el problema de dos cossos per obtenir bones aproximacions de la trajectòria que seguirà un satèl·lit artificial i posteriorment, utilitzar aquests coneixements per fer un programa que ens permeti estudiar la transferència d'un satèl·lit des d'una òrbita circular a una certa altura de la Terra, fins a una òrbita circular a una certa altura de la Lluna. Finalment, el treball pretén estudiar un mètode alternatiu per dissenyar transferències Terra-Lluna, un mètode que es fonamenta en el problema restringit circular i pla del tres cossos. El treball s'organitza en tres capítols i 2 apendix.

En el primer capítol es pretén anunciar tots els conceptes bàsics sobre les equacions que descriuen el moviment d'un satèl·lit artificial afectat únicament per l'efecte gravitatori d'un cos puntual celeste. En aquesta part no es donarà la demostració de la majoria dels conceptes que s'expliquen, ja que no són difícils i estan perfectament explicats al llibre: "Fundamentals of Astrodynamics"de Bate i Mueller. A continuació, s'explicarà el mètode de les còniques encadenades, que ens permet estudiar transferències de satèl·lits entre dos cossos com si fossin dos problemes de dos cossos encadenats. També es donarà un criteri per escollir quin dels cossos s'ha de prendre com a sistema de referència.

El segon capítol, és la part central del treball. En ell s'aplicaran els conceptes del primer capítol al problema pràctic de fer una transferència d'un satèl·lit de la Terra a la Lluna. En primer lloc, s'explicaran els elements que ens serviran per dissenyar aquesta transferència. Veurem que la trajectòria del satèl·lit, quedarà determinada pel modul de la velocitat inicial, l'altura a la que es trobi al començament el satèl·lit i dos angles. A més, calcularem com podem determinar a quina posició ha d'estar la Lluna al principi, perquè la transferència tingui èxit. Un cop vist tot això, es farà un programa que ens permeti, un cop escollides aquestes quatre dades, saber de forma automàtica si amb les quantitats donades és possible fer la transferència, quin serà el temps total de vol i quina serà l'energia total necessària per fer la transferència. Un cop fets aquests càlculs, intentarem concloure quins són els valors de velocitat inicial i sobretot dels diferents angles, per aconseguir l'òrbita més eficient energèticament.

Finalment, en el tercer i últim capítol, intentaré explicar un altre mètode per dissenyar transferències a la Lluna, un mètode que consisteix en encadenar dos problemes restringits circulars i plans de tres cossos (PRCPTC). Donat que entendre bé la dinàmica d'aquest problema és complicat, a l'apèndix s'intentarà fer un estudi el mes complert possible de la seva dinàmica. En aquesta part, com que els mètodes que hauré d'utilitzar seran nous, si que s'exposaran totes les demostracions que hagi pogut fer. Tot i que no serà possible explicar aquest mètode de formar complerta i detallada, es pretén que es vegi fins a quin punt, utilitzant els sistemes dinàmics, es poden dissenyar òrbites molt més sofisticades del que en un principi sembla possible si només ens centrem en el problema de dos cossos.

Capítol 1

El mètode de les còniques encadenades

1.1 Conceptes relacionats amb l'equació del moviment

En primer lloc, cal que plantegem les equacions del moviment del problema de dos cossos. Suposem que tenim un sistema Terra-satèl·lit. Suposem a més, que el satèl·lit té una massa negligible en comparació a la Terra i que aquesta té forma esfèrica amb densitat uniforme, per tal que la poguem considerar una massa puntual. Llavors, les equacions del moviment d'un satèl·lit atret per la força de la Terra són:

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m_t}{r^3}\vec{r}$$

o escrita per components:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -G\frac{m_t}{r^3}x \\ \ddot{y} = -G\frac{m_t}{r^3}y \\ \ddot{z} = -G\frac{m_t}{r^3}z \end{cases}$$

on

G =constant gravitació universal

$\vec{r}$=vector de posició del satèl·lit respecte a la Terra

r=modul vector de posició del satèl·lit respecte a la Terra

Les solucions d'aquesta equació, seràn les possibles òrbites del planeta. Observem que aquest sistema de 3 equacions diferencials de segon ordre es pot escriure com un sistema de 6 equacions diferencials de primer ordre:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -G\frac{m_t}{r^3}x \\ \dot{v}_y = -G\frac{m_t}{r^3}y \\ \dot{v}_z = -G\frac{m_t}{r^3}z \end{cases}$$

Observem que aquestes equacions són completament generals per qualsevol cos puntual. Per tant, en lloc de la massa de la Terra, podríem tenir qualsevol altra massa en aquestes equacions.

Exceptuant quan $\vec{r} = (0, 0, 0)$, l'equació està ben definida, i el teorema fonamental de les equacions diferencials ens assegura que coneguent unes condicions inicials de velocitat i posició, existeix una única solució per aquesta equació. Cada solució d'aquestes, serà l'òrbita que seguiria el satèl·lit amb aquelles condicions inicials. Mentre no ens acostem molt a l'origen, no hi haurà problemes. En aquest treball, els satèl·lits sempre estaran a una altura superior al radi dels planetes (no estudiarem impactes ni res similar). Per tant, el tipus de solucions que ens interessen d'aquestes equacions, estan ben definides i ens podem olvidar d'aquestes singularitats.

Tot i que, com hem dit a la introducció, aquest sistema d'equacions és integrable analíticament, la impossibilitat de trobar una solució que ens indiqui la posició del satèl·lit en funció del temps, fa que en general no sigui pràctic buscar directament les seves solucions. Llavors, haurem d'estudiar-lo qualitativament. En primer lloc, per començar a entendre'l, mirarem de trobar algunes de les seves integrals primeres. Com que la gravetat és una força conservativa, sembla lògic que el satèl·lit es mogui en òrbites en que l'energia mecànica es mantingui constant.
Efectivament, és senzill comprovar que la funció:

$$E = \frac{v^2}{2} + \left(c - \frac{Gm_t}{r}\right)$$

on c=const i $v = \dot{r}$, $r = |\vec{r}|$
és una integral primera de l'equació del moviment.
Observem que $\frac{v^2}{2}$ és clarament l'energia cinètica per unitat de massa. A més, $-\frac{Gm_t}{r}$ és la formula del potencial gravitatori. Pel que fa a la constant c, en donar-li un valor fixarem un sistema de referència per l'energia potencial. Per fer la formula el més senzilla possible, fixarem $c = 0$ i llavors E serà:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm_t}{2}$$

Aquesta integral primera, ens dóna informació sobre com es comportarà el satèl·lit. Com que E haurà de ser constant al llarg de tota l'òrbita, si aquesta és positiva significa que quan r augmenti cap a l'infinit i el potencial es faci 0, la nau haurà de tenir encara velocitat perquè l'energia segueixi positiva. Per tant, la nau arribarà a qualsevol distància amb velocitat positiva. Per altra banda, si $E = 0$, la nau també arribarà a una distància infinita, però aquest cop, quan el potencial sigui nul, l'energia cinètica valdra 0, és a dir, que arribarà a l'infinit amb velocitat 0. Finalment, si $E < 0$, la nau només es podrà allunyar fins una certa distància del cos (ja que sinó tindrem en algun moment que $\frac{v^2}{2} < 0$, que és impossible).

Per trobar una altra integral primera, utilitzem que considerem el moviment del nostre satèl·lit com el moviment d'un cos atret per una força central. Per tant, el moment angular també hauria de ser constant al llarg de l'òrbita. En aquest cas, també es pot comprovar que:

$$h = \vec{r} \times \vec{v}$$

és una integral primera de l'equació del moviment.

Que el moment angular sigui constant també ens permet deduir certs aspectes del moviment del satèl·lit. En concret, com que el moment angular és un vector perpendicular al vector posició i al vector velocitat, si aquest és contant, significa que els vectors de posició i velocitat estan sempre dins el pla perpendicular al vector del moment angular. Per tant, les òrbites sempre seran planes. Gracies a això, a partir d'ara podrem estudiar aquesta equació com una equació al pla en lloc de a l'espai.

Utilitzant aquesta última integral primera, podem integrar parcialment l'equació del moviment i deduïr que les solucions de l'equació hauran de seguir l'equació polar:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu} cos(\nu)}$$

on:

h =moment angular
$\mu = Gm_t$
B =modul del vector constant d'integració.
ν =angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{B}$

Observem que aquesta equació no ens diu res del temps. Aquest s'hauria de calcular utilitzant l'equació de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

Aquí, $M = n(t - t_0)$ s'anomena anomalia mitjana. La n s'anomena velocitat angular mitjana i es defineix com $n = \frac{2\pi}{T}$ on T és el període del satèl·lit. E és l'anomalia excèntrica (no confondre amb l'energia que hem calculat abans i que anirem utilitzant al llarg de tot el treball). En la següent imatge es pot veure definida la E, a més d'altres elements de l'òrbita.

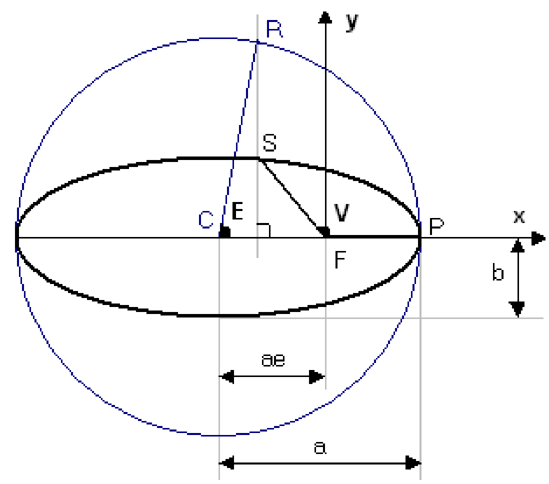

Figura 1.1: Elements de l'equació

Observem que aquesta equació, és transcendent, i per tant no pot ser resolta utilitzant mètodes algebraics. Les solucions d'aquest equació només es poden trobar utilitzant mètodes numèrics o amb desenvolupaments de sèries. Per aquest motiu, utilitzarem directament integració numèrica per trobar la posició en funció del temps.

Tornant a l'estudi l'equació de posició del satèl·lit en funció de ν, ens interessa coneixer quina figura geomètrica d'escriu aquesta equació. Per saber-ho només cal que la comparem amb l'equació polar de les còniques. L'equació polar d'una cònica és:

$$r = \frac{p}{1 + ecos(\nu)}$$

Llavors depenent del valor de e aquesta equació d'escriurà:

$e = 0$ cercle
$0 < e < 1$ el·lipse
$e = 1$ paràbol·la

$e > 1$ hipèrbole

Observem que aquesta equació és identica a l'equació que s'obté integrant l'equació del moviment, agafant $p = \frac{h}{\mu}$ i $e = \frac{B}{\mu}$. Per tant, és clar que les úniques òrbites que pot seguir el satèl·lit són les quatre còniques de dalt.

Del vector d'integració, en podem deduir que el mínim de la funció $r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\frac{B}{\mu}cos(\nu)}$ s'assolirà quan $cos(\nu) = 1$. Això passa quan $\nu = 0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, tenim que quan $\vec{B}$ i $\vec{r}$ són paral·lels, la distància r és mínima. Llavors, en les nostres equacions, el vector $\vec{B}$ apunta a la periapsis.

A partir d'ara, anomenarem p i e als valors deduïts d'integrar les equacions del moviment, en lloc d'utilitzar $\frac{h}{\mu}$ i $\frac{B}{\mu}$.

Observem que trobar p per la nostra equació és immediat ja que amb les dades coneixerem la velocitat i la posició inicials, per tant podem calcular el moment angular. Calcular e en canvi ja no és tant fàcil ja que no coneixem la constant d'integració $\vec{B}$, només sabem que apunta a la periapsis. Tot i així, podem utilitzar una sèrie de resultats, per determinar el valor de e, sense coneixer directament $\vec{B}$.

En primer lloc, introduïrem els valors geomètrics c, a i p. La seva definició es veu clarament en els dibuixos d'aquestes còniques:

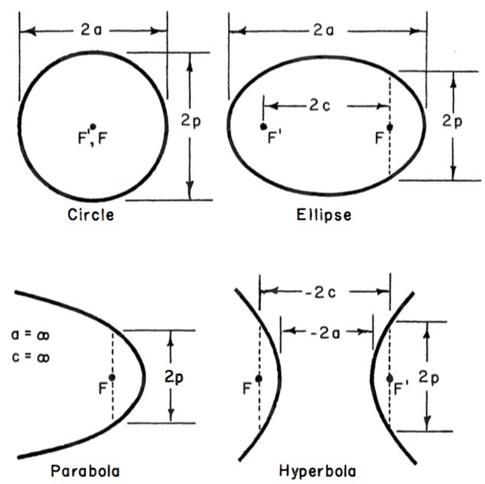

Figura 1.2: Els 4 tipus de còniques

Llavors, utilitzant pròpietats de les còniques tenim:

$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$

$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}$

Combinant les equacions de h i E també es pot obtenir:

$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$

Llavors, d'aquestes igualtats en deduïm:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 - \frac{\frac{h^2}{\mu}}{a}} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu\frac{-\mu}{2E}}} = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$$

Per tant, hem pogut determinar e, sense necessitat de coneixer la constant d'integració $\vec{B}$. Així doncs, ja sabem que el satèl·lit seguirà l'equació d'una cònica i a més, coneixent la velocitat i la posició del satèl·lit podem determinar la forma d'aquesta cònica. Finalment, observem que utilitzant aquesta relació entre E i e, podem deduir que:

si $E > 0$, llavors $e > 1$ i per tant la trajectòria és una hipèrbola

si $E = 0$, llavors $e = 1$ i per tant la trajectòria és una paràbola

si $E < 0$, llavors $0 < e < 1$ i per tant la trajectòria és una el·lípse

Per tant, l'energia ja ens indica quina cònica seguirà la nostra trajectòria.

1.1.1 Maniobres orbitals

Aquesta però, no és l'única aplicació d'aquestes integrals. Utilitzant que l'energia és una integral primera, es pot calcular la manera de fer transferències entre dues òrbites el·líptiques diferents (o posar un satèl·lit en òrbita el·liptica).

Existeixen diversos tipus de maniobres orbitals:

-Posar un satèl·lit en òrbita des de la Terra.

-Canviar d'una òrbita a una altra de diferent.

-Canviar el pla de l'òrbita.

Aquí, només explicarem la segona maniobra. La primera, que té uns principis bastant similars a la segona, no la farem servir en tot el treball, ja que suposarem que tenim el satèl·lit a una certa alçada quan comencem a fer els nostres calculs. La tercera no l'explicarem ja que en aquest treball suposarem que les nostres òrbites no necessiten canviar de pla en cap moment. De fet, encara que aquesta maniobra de vegades sigui inevitable, és molt cara en termes d'augment de velocitat i per tant, s'utilitza el mínim possible.

En primer lloc, estudiem que li passa a la a quan variem la velocitat del satèl·lit en una òrbita el·líptica.

Observem que de les equacions:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

En podem deduir que:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Llavors, suposem que canviem la velocitat. Observem que r seguirà fix (no canviem la posició) i per tant podem veure com varia a (Δa) en funció de la variació de v (Δv). Per fer-ho derivem a l'esquerra de la igualtat en funció de v i a la dreta en funció de a i igualem les dues expressions:

$$2vdv = \mu\frac{1}{a^2}da$$

Per tant,

$$da = 2vdva^2$$

Aquesta és la variació de la a en funció de la variació de la velocitat.

Estudiem que passa si fem aquest canvi de velocitat a la periapsis o a la apoapsis i l'increment de la velocitat es fa en la mateixa direcció que la velocitat inicial. Farem el cas de la periapsis ja que el cas de l'apoapsis és anàl·leg.

Observem que la distància al periapsis no augmentara (perquè ja hi estem a damunt i per tant, com l'òrbita és tancada, hi tornarà a passar. Però hem vist, que $da = 2vdva^2$. Llavors perquè això passi, la distància a l'apoapsis (h_a) haurà d'augmentar segons:

$$\Delta h_a = 2\Delta a = 4v\Delta v a^2$$

Per tant, quan el que ens interessa és que l'el·lipse arribi el més lluny possible, el lloc òptim per fer l'increment de velocitat és al periapsis.

Això és especialment útil en les òrbites circulars, ja que en qualsevol dels punts de la seva trajectòria, ens trobem en les mateixes condicions que si estessim al periapsis d'una òrbita el·líptica. A més, com que molts satèl·lits estan en òrbites circular, val la pena mirar-nos com són aquests canvis. En concret, ens interessarà trobar la manera més energèticament eficient de passar d'una òrbita circular a una certa alçada fins a una altra òrbita circular a una alçada diferent. Aquests tipus de maniobres orbitals s'anomenen Hoffman transfers.

Suposem que tenim un satèl·lit en òrbita circular a una altura h_1 i que el volem passar a una altra òrbita circular d'alçada h_2. Suposarem que $h_2 > h_1$, ja que l'altre cas es pot fer de forma completament anàl·loga. Llavors la manera més eficient de fer aquesta transferència, serà utilitzant el que hem deduit abans. Inicialment, incrementarem la velocitat per tal d'obtenir una òrbita el·líptica que tengui la periapsis a h_1 i la apoapsis a h_2. Llavors, tornarem a incrementar la velocitat, (aquest cop a l'apoapsis) per tal que el periapsis quedi a la mateixa distància que l'apoasis i per tant l'òrbita torni a ser circular. Per tant, volem trobar la velocitat al periapsis de tal forma que l'òrbita sigui aquesta el·lipse. Utilitzant que $2a = h_1 + h_2$, tenim que l'energia d'aquesta òrbita serà:

$$E = -\frac{\mu}{h_1 + h_2}$$

així coneguent l'energia que necessita aquesta òrbita, i l'altura al peril·luni, podem deduir la velocitat que ha de tenir al periapsis:

$$v_1 = \sqrt{2\left(-\frac{\mu}{h_1 + h_2} + \frac{\mu}{h_1}\right)}$$

Per tant l'increment de velocitat necessari serà:

$$\Delta v = v_1 - v_0$$

on v_0 és la velocitat que tenia el satèl·lit en la primer òrbita circular.

Llavors un cop l'òrbita arriba a l'apoapsis, fem uns càlculs anàl·legs per l'increment de velocitat necessari per deixar el satèl·lit en òrbita circular a la nova alçada i ja hem acabat.

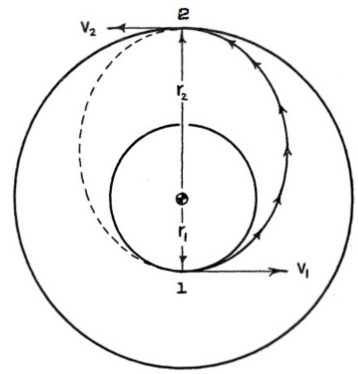

Figura 1.3: tranferències

1.1.2 Esfera d'influència

El mètode de les còniques encadenades, consisteix en reduir el problema de transferència d'òrbites interplanetàries a una successió de problemes de dos cossos. Com hem vist a l'anterior apartat, les trajectòries que segueix un satèl·lit sotmès a la força gravitatòria d'un cos esfèric han de ser còniques, i d'aquí en surt el nom. Llavors, ens cal decidir, quin és el cos, de tots els que afecten al moviment del satèl·lit, que que ens convé més agafar com a cos que afecta el satèl·lit i olvidar-nos dels altres. Per fer-ho definirem un nou concepte: l'esfera d'influència d'un cos. Aquest concepte va ser introduit per Laplace quan estudiava el moviment d'un cometa en passar pròxim a Jupiter. Aquesta esfera sorgeix de la següent definició:

Si M_1 i M_2 són dos planetes afectant el moviment del satèl·lit, per determinar quin dels dos domina damunt del seu moviment hem de calcular els quocients de la força de perturbació respecte la força de Kepler per els sistemes: M_1–satèl·lit–M_2 i M_2–satèl·lit– M_1. Llavors, el sistema que tengui aquest quocient més petit, serà el més indicat per estudiar el moviment del satèl·lit.

Suposem que la massa del cos M_1 és m_1 i que la massa del cos M_2 és m_2. Llavors en el sistema M_1–satèl·lit–M_2, la força de Kepler és:

$$\vec{F}_1^k = \frac{Gm_1}{r_{13}^3}\vec{r}_{13}$$

Mentre que la força de perturbació que inflingirà el cos M_2 en la trajectòria és:

$$\vec{F}_1^p = -Gm_2\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3}\right)$$

Anàl·logament, la força de kepler i la força de perturbació segons el sistema de referència M_2–satèl·lit–M_1.

$$\vec{F}_2^k = \frac{Gm_2}{r_{32}^2}\vec{r}_{32}$$

$$\vec{F}_2^p = -Gm_1\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3}\right)$$

Calcular aquest cuocient no és dificil però és llarg, ja que s'han de fer desenvolupaments de les fraccions i negligir els termes de major ordre. La demostració es pot trobar al llibre: "An introduction to the mathematics and methods of Astrodynamics"de Richard H. Battin. El resultat és que obtenim la relació entre els radis r_{23} i r_{12}

$$\frac{r_{23}}{r_{12}} \approx \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Si $m_1 >> m_2$, l'aproximat és pràcticament una igualtat i òbtenim:

$$r_{23} = r_{12}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Per tant, si suposem que r_{12} és constant (és a dir que M_2 està en òrbita cicular a M_1, com per exemple suposarem amb la Terra i la Lluna) tenim que si $r_{23} < r_{12}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{2}{5}}$ el moviment del satèl·lit estarà més influenciat pel cos M_2 que pel cos M_1 i com r_{12} és constant, tindrem que aquesta zona serà efectivament una esfera.

A aquesta esfera se l'anomena esfera d'influència, i és la que s'utilitza per decidir respecte quin cos s'estudia el moviment en el mètode de les còniques encadenades. Cal observar però, que tot i que nosaltres quan estem dins l'esfera d'influència d'un dels cossos, ens olvidem dels altres cossos, aquests hi segueixen sent i per tant, afecten mes o menys a la nau. Aquests efectes són molt grans aprop de la frontera de l'esfera d'influència, on tot i que estudiem el problema només tinguent en compte un dels cossos, els dos hi tenen una efecte molt gran i per tant els càlculs reals poden distanciar-se bastant dels càlculs fets amb aquest mètode. Tot i així, empíricament, hi ha evidència de que aquesta aproximació és suficientment bona quan volem fer viatges de la Terra a la Lluna (tot i que no de la Lluna a la Terra).

Ja que pel nostre programa necessitem saber l'esfera d'influència de la Lluna respecte a la Terra. La calcularem ara. Com sabem que $m_t = 5.9736 \times 10^{24}$kg i $m_{ll} = 7,349 \times 10^{22}$kg i que la distància mitja entre la Lluna i la Terra és $D = 384.400$km, obtenim que l'esfera d'influència de la Lluna respecte la Terra serà:

$$R = 384.400 \times \left(\frac{7,349 \times 10^{22}}{5.9736 \times 10^{24}}\right)^{\frac{2}{5}} = 66188.14698km$$

1.2 Breu descripció del mètode

En el cas Terra–Lluna, calculem l'esfera d'influència de la Lluna, respecte la Terra. Llavors, en primer lloc estudiem les equacions del satèl·lit en el sistema inercial centrat a la Terra. Posteriorment, un cop el satèl·lit entra dins l'esfera d'influència de la Lluna, canviem les coordenades, per passar a estar en un sistema centrat a la Lluna. El fet que no haguem de tenir en compte el Sol en l'estudi d'aquesta trasferència, es degut a que la Lluna està dins l'esfera d'influència de la Terra respecte al Sol.

En canvi, si el que volguessim fer fos una transferència de la Terra a Mart per exemple, hauríem de calcular les esferes d'influència de la Terra respecte el Sol, i de Mart respecte el Sol. Llavors quan el satèl·lit sortís de l'esfera d'influència de la Terra, passaríem a estudiar el moviment del satèl·lit respecte el Sol. Posteriorment, quan entrés a l'esfera d'influència de Mart, passaríem a estudiar el moviment del satèl·lit respecte Mart.

És important tenir en compte que un cop el satèl·lit arribi al seu destí, aquest estarà en moviment hiperbòlic respecte el cos de d'arribada. Llavors, si es vol posar un satèl·lit en òrbita estacionària en aquest cos, s'haurà d'utilitzar una quantitat de velocitat important, per fer que el satèl·lit passi d'estar en una òrbita hiperbòlica a una òrbita el·liptica o circular.

Capítol 2

Calcul de transferències

En aquest capítol es té per objectiu estudiar el següent problema. Suposem que tenim un satèl·lit en òrbita circular al voltant de la Terra a una altura de 200 km (l'altura podria ser modificada) en el mateix pla orbital que la Lluna. Llavors, volem transferir aquest satèl·lit a una òrbita circular al voltant de la Lluna, amb un radi igual a la seva esfera d'influència respecte la Terra. En primer lloc voldrem estudiar aquest problema. Volem saber com plantejar-lo correctament, saber quins elements hi intervenen i determinar un bon sistema de referència per estudiar-lo. Un cop fet això, voldrem estudiar l'eficiencia de diferents trajectòries per tal de decidir quines són més eficients energèticament. Per poder fer aquesta segona part, caldrà fer un o diversos programes que ens automatitzin els calculs ja que sinó el procés serà massa llarg. Per això, al mateix temps que anem plantejant el problema i enunciant diverses formules que ens serveixin per resoldre el problema, també aniré fent un programa que les implementi. Per integrar les trajectòries utilitzaré l'integrador numèric: Runge–Kutta–Fehlber 7–8.

En primer lloc, hem assumit diverses simplificacions. L'òrbita de la Lluna al voltant de la Terra, es considera circular amb un radi de 384400km (aquest radi és la distància mitjana de l'òrbita real). En realitat, la Lluna segueix una òrbita el·líptica al voltant del centre de masses Terra-Lluna, amb una excentricitat de 0.0549. Observem que l'excentricitat és tant petita, que no cometem molt d'error amb aquesta suposició. A més, suposarem que la trajectòria lunar és coplanar a l'òrbita de la Lluna. Tot i que aconseguir una trajectòria així pot ser dificil ja que el pla orbital de la Lluna al voltant de la Terra no és fix sinó que precessa i per tant, els llocs en que aquests llançament són possibles (el punts d'intersecció del pla òrbital de la Lluna amb la Terra) van variant, sempre es farà el possible perquè així sigui, ja que els canvis de plans òrbitals són molt cars energèticament.

Perquè els resultats obtinguts siguin correctes, cal assegurar-se d'utilitzar les unitats adequades a l'hora de fer totes les operacions. Per això, és molt important determinar-les des d'un principi. En els càlculs que es faran al llarg d'aquest capítol, les unitats que s'utilitzaran seran:

-Kilometres per les distàncies.

-Kilograms per la massa.

-Segons pel temps.

-Kilometres/segons per la velocitat

-Radiants/segons per la velocitat angular

Llavors, la constant de gravitació universal serà:

$$G = 6.67384 \times 10^{-20} \frac{km^3}{s^2 kg}$$

Per simplificar la notació, es defineix:

$$\mu_t = Gm_t = 398613.4418 \frac{km^2}{s^2}$$
$$\mu_{ll} = Gm_{ll} = 4904.605 \frac{km^2}{s^2}$$

On m_t és la massa de la Terra i m_{ll} la massa de la Lluna.

L'estudi de les transferències es pot dividir en 3 parts: l'estudi del moviment del satèl·lit quan el cos dominant és la Terra, el canvi de sistema de referència quan el cos dominant passi a ser la Lluna i les maniobres necessàries per tal que el satèl·lit es quedi en òrbita circular a la Lluna.

A continuació, definirem els 5 paràmetres que serviran per descriure la trajectòria que seguirà el satèl·lit:

v_0 :=modul velocitat inicial del satèl·lit

r_0 :=altura incial del satèl·lit

ϕ :=angle entre el vector velocitat i el vector perpendicular al vector de posició

λ :=angle entre la línia que creua els centres Terra Lluna i la línia centre de la Lluna i punt en el que l'òrbita intersecarà l'esfera d'influència de la Lluna.

v_1 :=modul velocitat al punt de canvi de referència (segons un sistema de referència centrat en la Terra).

r_1 :=modul distància a la Terra en el punt del canvi de referència.

Aquestes dades són més fàcils d'entendre si ens mirem aquesta imatge (en la imatge $\phi_0 = \phi$ i $\lambda_1 = \lambda$):

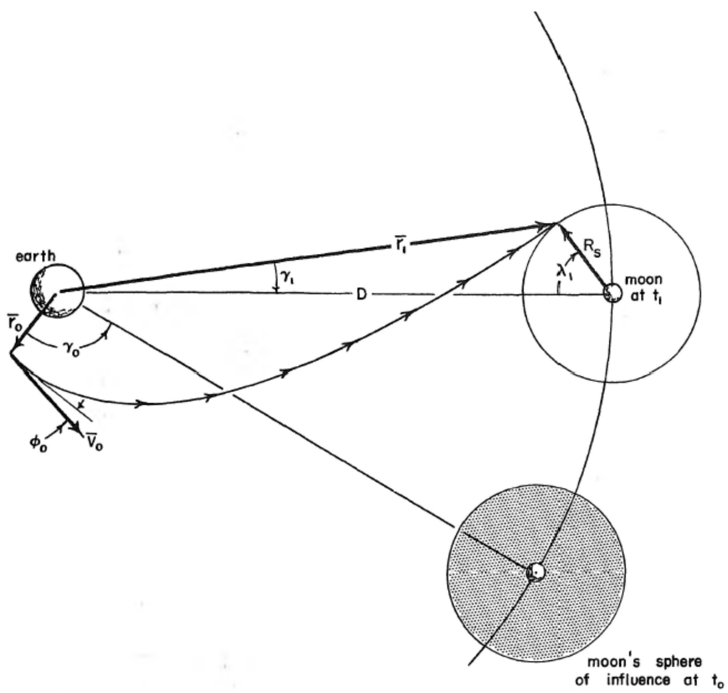

Figura 2.1: tranferència geocèntriques de la Terra a l'esfera d'influència de la Lluna

La part del programa que s'encarregarà d'aquesta part, demanarà que se li introdueixi v_0, r_0, ϕ i λ i retornarà $\vec{v}_1$ i $\vec{r}_1$ (on aquests dos darrers són els vectors de la velocitat i la posició que hem definit abans.

En el programa necessitem un bon sistema de referència per poder utilitzar l'integrador numèric, a més de per poder representar i interpretar els resultats. Donat que sabem que les òrbites seran planes, agafarem coordenades 2–dimensionals. En aquesta primera part, com que suposem que la terrà estarà immòbil en un dels focus de la cònica que descriurà la trajectòria del satèl·lit, ens convé fixar el sistema de referència a la Terra, amb el seu centre a l'origen.

Un cop el programa té entrades λ, v_0, r_0 i ϕ, utilitza les tres darreres per posar coordenades tant a la posició com a la velocitat. Per la posició s'agafarà $(0, r_0 + r_t)$, on r_t és el radi de la Terra $r_t = 6371$km, és a dir, que la coordenada Y del sistema de referència és la línia que uneix inicialment el satèl·lit amb el centre de la Terra. Per altra banda, les coordenades de la velocitat les expresarà com:

$$(-v_0 \cdot cos(\phi), v_0 \cdot sin(\phi))$$

Per tant, les coordenades de la velocitat seran paral·leles a les de posició.

Les coordenades de velocitat s'escolleixen així, ja que mirat des del nort de la Terra, la Lluna orbita en sentit antihorari. Llavors, com que suposem que mirem el moviment des del nord, ens interessa que el moviment del satèl·lit també vagi en aquest sentit.

Un cop posades les dades el programa calcula l'energia del satèl·lit. Recordem que $E = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm_t}{2}$. Llavors, es mira el signe de E. Si $E > 0$ o $E = 0$, tindrem que el satèl·lit es pot allunyar indefinidament de la Terra. Per tant, com que segur que arribarà a l'esfera d'influència de la Lluna, el programa seguirà. En canvi si $E < 0$, el satèl·lit descriurà una òrbita el·líptica al voltant de la Terra. Llavors no sabem si s'allunyarà prou de la Terra, com per entrar a l'esfera d'influència de la Lluna.

Aquí, representarem les òrbites que obtenim amb l'integrador numèric, per diferents valors de la condició inicial v_0 (comensa des de $v_0 = 10$ va sumant-li 0.25 fins arribar a $v_0 = 11.75$km/s) i per $\phi = 0$, $r_0 = 200km$, l'integrador arriba fins $t = 300000$s. La corba verda, representa la trajectòria de la LLuna.

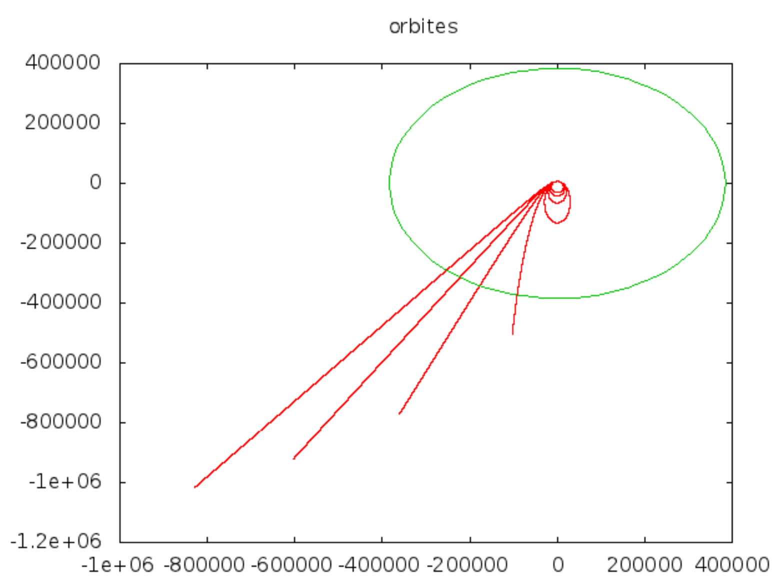

Figura 2.2: diferents òrbites segon v_0

Observem que pels 4 primers valors de v_0, l'òrbita és clarament el·líptica, a més, la seva òrbita no arriba a suficient distància per intersecar la trajectòria de la Lluna. Després quan $v_0 = 11$km/s, l'òrbita interseca la de la Lluna i no es veu clar quina cònica descriu, tot i que sembla una el·lipse també. Finalment, pels tres darrers valor de v_0, el moviment és clarament hiperbòlic.

Ara repetirem aquest dibuix, però variant la ϕ rad i deixant $v_0 = 10.75$ km/s i $r_0 = 200$ km fixos. Aquest cop només integrarem fins $t = 200000$ s.

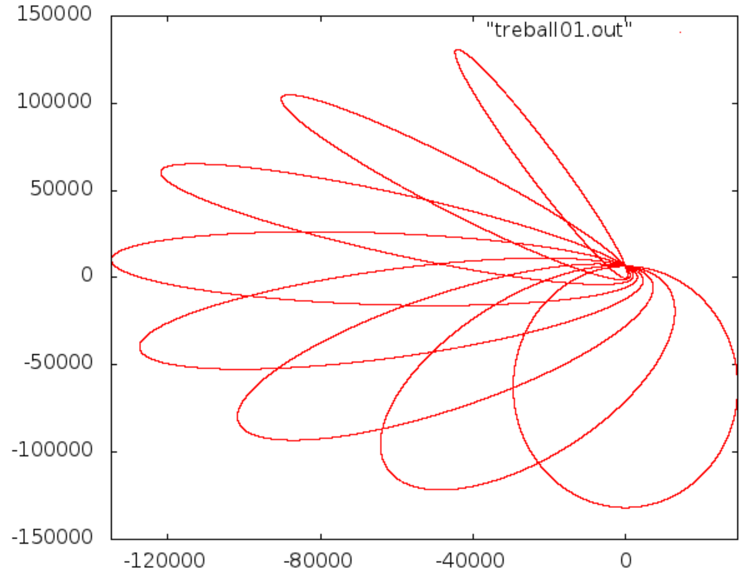

Figura 2.3: diferents òrbites segon ϕ

Observem que l'òrbita amb menys excentricitat és la que té $\phi = 0$ i a mesura que augmentem ϕ l'orbita es va tornant més excèntrica i es va desplaçant.

Un primer problema que ens interessa tractar és saber si un cop donades les dades inicials, el satèl·lit arribarà a prou distància com per poder quedar-se en òrbita circular a la Lluna. Per fer això podríem simplement representar l'òrbita i comprovar-ho, però l'integrador numèric és lent. Per això, abans d'utilitzar-lo volem estar segurs de que la transferència és possible.

Per saber si l'òrbita arriba a prou distància de la Terra, primer hem de saber a quina distància de la Terra creuarà l'esfera d'influència de la Lluna aquesta òrbita. Segons els calculs fets anteriorment, l'esfera d'influència de la Lluna té un radi d'aproximadament 66188.14698km. Suposarem que el satèl·lit entrarà a l'òrbita de la Lluna per la seva cara visible, i que sempre entrarà per davant de la Lluna. És a dir, que entrara per un punt de la circumferència tal que el segment que uneixi aquest punt amb el centre de la Lluna, formarà un angle entre $[0, \frac{\pi}{2}]$ amb el segment que uneix els centres Terra–Lluna. Si imposem aquestes condicions és perquè aquesta entrada sempre és possible (que la Lluna "enganxi"el satèl·lit de per darrera), en canvi, que el satel·lit "enganxil·la Lluna de per darrera podria no ser possible si el satèl·lit no tingués prou velocitat (que és el que ens passa a nosaltres, que intentem utilitzar el mínim de velocitat possible).

Per aquest motiu, el programa també demana que li introduïm λ, ja que aquest angle determina el punt de creuament de l'òrbita geocèntrica del satèl·lit amb l'esfera d'influència de la Lluna. Utilitzant aquest angle, podem fer servir el teorema del cosinus per calcular a quina distància de la Terra es trobarà el punt d'entrada a l'esfera d'influència de la Lluna. La distància serà:

$$r_1 = \sqrt{D^2 + R_s^2 - 2D \cdot R_s^2 \cos(\lambda)}$$

Així, ja tenim la distància al centre de la Terra a la que el satèl·lit ha d'arribar si vol arribar a una zona en que la Lluna tingui més influència sobre el moviment del satèl·lit que la Terra.

Llavors si el satèl·lit segueix una òrbita el·liptica (ho sabrem des d'abans que hem calculat l'energia) hem de comprovar a quina distància màxima arriba de la terra (apoapsis), per així saber si arribarà a entrar a l'esfera d'influència de la Lluna o si al contrari es quedarà fent òrbites el·líptiques geocèntriques.
Per fer-ho el programa calcularà l'apoapsis de l'el·lipse. Recordem que l'equació general de la cònica és:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\nu)}$$

Llavors el programa trobarà p amb la formula:

$$p = \frac{h}{\mu}$$

i e amb la formula:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$$

Posteriorment, el programa calcularà l'apoapsis, tenguent en compte que aquest passa quan $\cos(\mu) = -1$. És a dir que l'apoapsis serà:

$$r_a = \frac{p}{1 - e}$$

Llavors el programa comprova si l'apoapsis està a major o menor distància del centre de la Terra que r_1, és a dir, la distància a la Terra a la que el satèl·lit entra dins l'esfera d'influència de la Lluna.

Si $r_a < r_1$, el programa s'acaba. En canvi si $r_a > r_1$, la nau arriba a prou distància com per entrar a l'esfera d'influència de la Lluna. Llavors s'utilitza l'integrador numèric: el Runge–Kutta–Fehlber 7–8; per calcular l'òrbita del satèl·lit en funció del temps. Cada cert nombre de passos, es va calculant l'energia com ha test. Si no és constant, significa que alguna cosa està anant malament, com per exemple que el radi s'acosti a 0. Aquest no ha estat el cas en aquest treball però.

Si tot va be, es va fent la integració numèrica fins que el radi del satèl·lit respecte la terra és igual a r_1. Llavors s'arribà al punt on s'hauria de fer el canvi de sistema de referència.

Per $\phi = 0$ rad, $\lambda = 1.05$ rad i $r_0 = 200$ km i per $v_0 = 10.9$ km/s i augmentant la velocitat 0.05 km/s fins a arribar a 11.45 km/s, he anat representant les diferents òrbites. En totes elles, l'integrador s'aturava quan el seu mòdul era igual a la distància a la haurien d'estar a la terra a l'hora d'atravessar l'esfera d'influència de la Lluna. Per això, també he representat una part de l'orbita de la Lluna, per comprovar si aparentment els resultats funcionaven. La imatge obtinguda és la següent:

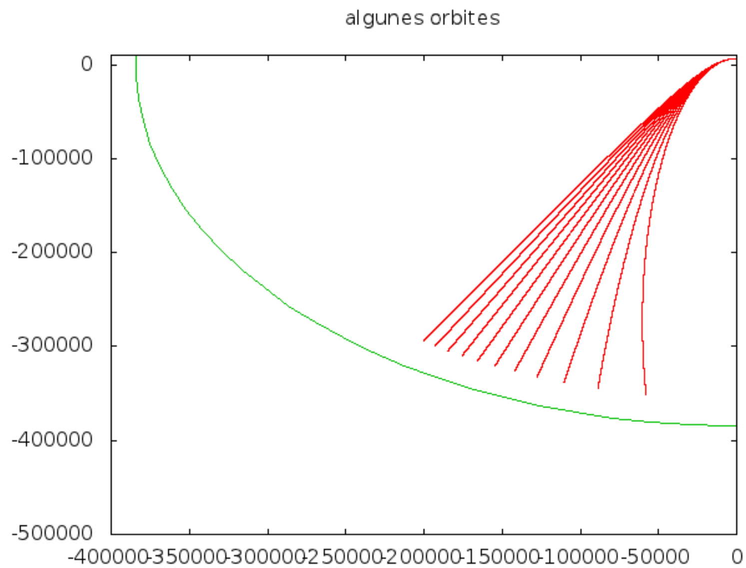

Figura 2.4: Trajectòries segons v_0 i la trajectòria de la Lluna

Observem com es veu que l'integrador, s'atura abans de creuar l'òrbita de la Lluna.

Hem de tenir en compte que la posició de la Lluna no és constant respecte a la Terra sinó que descriu òrbites circulars al voltant seu. Llavors, ens preguntem en quina posició hauria d'estar la Lluna respecte la Terra en el moment del llançament del satèl·lit, per tal que quan el satèl·lit arribi a la distància r_1 de la Terra, la Lluna estigui colocada de manera que el satèl·lit es trobi efectivament a la frontera de l'esfera d'influència de la Lluna de tal forma que la línea que uneix els centres de la Terra i la Lluna i la linia que uneix el centre de la Lluna amb el satèl·lit, formin un angle de λ graus.

Per calcular-ho haurem de tenir en compte que la velocitat angular de la Lluna és de $w_m = 2.661665 \cdot 10^{-6}$ revolucions/s.

Volem calcular l'angle que formaran el vector que uneix els centres Terra-Lluna amb el vector posició inicial del satèl·lit r_0 i que anomenarem γ_0. Per calcular-lo, primer definirem i calcularem uns angles auxiliars:

ν_1: angle que forma el satèl·lit respecte la periapsis en el moment que arriba a la distància r_1.

ν_0: angle que forma inicialment el satèl·lit (vector posició) respecte la periapsis.

γ_1: angle que formen els vectors Terra–Lluna i Terra–satèl·lit en r_1.

Agafarem per definició com a temps inicial $t_0 = 0$ i t_1 serà el temps que l'integrador ens retorni en arribar el satèl·lit a r_1.

Per calcular ν_0, el programa utilitza l'equació de la cònica. Com que inicialment coneixem tots els seus paràmetres exceptuant ν_0, per trobar-lo només hem d'aïllar ν_0 en l'equació:

$$r_0 = \frac{p}{1 + e\cos(\nu_0)} \leftrightarrow r_0 + r_0 e\cos(\nu_0) = p \leftrightarrow \cos(\nu_0) = \frac{p - r_0}{e \cdot r_0} \leftrightarrow \nu_0 = \arccos\left(\frac{p - r_0}{e \cdot r_0}\right)$$

I amb aquesta última equació el programa fa els càlculs. Obviament la solució no serà única, però agafarem la menor solució positiva

El procediment per trobar ν_1 és identic al de trobar ν_0 canviant r_0 per r_1. per tant tenim que:

$$\nu_1 = \arccos\left(\frac{p - r_1}{e \cdot r_1}\right)$$

Que és l'equació que utilitza el programa.

Finalment, per trobar γ_1 utilitzarem propietats trigonomètriques per trobar-la en funció de λ, r_1 i el radi de l'esfera d'influència de la Lluna, R_1.

En efecte, en la Figura 2.1, es veu clarament que:

$$\sin(\gamma_1) = \frac{R_1}{r_1}\sin(\lambda) \leftrightarrow \gamma_1 = \arcsin\left(\frac{R_1}{r_1}\sin(\lambda)\right)$$

Per tant, hem obtingut l'angle que formen els vectors Terra-Lluna i Terra-Satèl·lit al final (γ_1), l'angle que haurà recorregut la Lluna durant tot el temps de vol ($w(t_1 - t_0)$), i l'angle que ha recorregut el satèl·lit durant la trajectòria ($\nu_1 - \nu_0$). Per tant, tenim que:

$$\nu_1 - \nu_0 - \gamma_1 = w(t_1 - t_0) + \gamma_0 \leftrightarrow \gamma_0 = \nu_1 - \nu_0 - \gamma_1 - w(t_1 - t_0)$$

Llavors, un cop escollides l'alçada, la velocitat, la direcció i en quin punt volem que atravessi l'esfera d'influència de la Lluna sabem que, perquè això últim es compleixi, en el moment del llançament del satèl·lit els vectors Terra–Lluna i Terra–satèl·lit han de formar una angle γ_0. Observem que, si γ_0 és positiu la Lluna està més endavant que el satèl·lit i viceversa.

Concloem doncs, que per poder afectuar aquesta transferència amb èxit, s'han de complir dos requisit: s'ha de poder escollir un lloc de la Terra adequat (en que l'òrbita sigui plana) i llançar-lo en un moment en que els vectors de posició del satèl·lit i de la Lluna estiguin formant un angle γ_0.

2.1 Canviant de sistema de referència

Un cop el satèl·lit ha arribat a r_1, la Lluna tindrà més influència damunt el moviment del satèl·lit que la Terra. Per tant, per tal d'aproximar millor el moviment del satèl·lit, cal que l'estudiem com un problema de dos cossos satèl·lit–Lluna, en lloc de satèl·lit–Terra. Llavors, per facilitar aquests càlculs, passarem d'estudiar el moviment del satèl·lit en un sistema de referència amb origen al centre de la Terra a estudiar-lo en un sistema de referència amb origen al centre de la Lluna.

Per tant, volem trobar el vector de velocitat relativa a la Lluna i el vector de posició en un sistema de referència que tengui l'origen a la Lluna, en el moment en que el satèl·lit creui l'esfera d'influència. Per calcular el vector velocitat del satèlit respecte la Lluna farem:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{ll}$$

On v_2 serà la velocitat del satèl·lit respecte a la Lluna, $\vec{v}_1$ és la velocitat del satèl·lit en el sistema de referència centrat en la Terra i $\vec{v}_{ll}$ és la velocitat de la Lluna també en el sistema de referència centrat en la Terra. Però d'aquests vectors, inicialment només coneixem $\vec{v}_1$, que serà el valor que tingui el vector velocitat (v_x, v_y) que surti de l'integrador.

Per tant, hem de calcular $\vec{v}_{ll}$ per poder trobar la velocitat relativa del satèl·lit respecte la Lluna.

Per trobar-la, en primer lloc, trobarem les equacions paramètriques del moviment de la Lluna en el sistema de refència centrat en la Terra. La Lluna descriu un moviment circular, al voltant de la Terra, en sentit antihorari, si es mira des del nord del sistema solar. Per tant les equacions del moviment seran de la forma.

$$R_{ll}(t) = (R_s \cdot \cos(wt + c), R_s \cdot \sin(wt + c))$$

on c és una constant que hem de determinar i que depèn de com definim els eixos del sistema de referència de la Terra i R_s és la distància del centre de la Terra al centre de la Lluna. Cal remarcar que estem calculant l'equació del moviment del centre de la Lluna, no de tota la Lluna.

Per posar aquestes coordenades en el mateix sistema de referència en que hem posat les coordenades del satèl·lit, sabem que quan $t = 0$, la posició de la Lluna és:

$$R_s(\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_0), \sin(\frac{\pi}{2} + \gamma_0))$$

Per tant, igualant aquesta expressió a l'equació del moviment de la Lluna quan $t = 0$ obtenim que:

$$c = \frac{\pi}{2} + \gamma_0$$

És a dir, que les equacions del moviment de la Lluna són:

$$\vec{R}_{ll}(t) = (R_s \cdot \cos(wt + \frac{\pi}{2} + \gamma_0), R_s \cdot \sin(wt + \frac{\pi}{2} + \gamma_0))$$

Un cop derivades les equacions del moviment en aquest sistema de refència, per obternir el vector de la velocitat només hem de derivar aquestes expressions en funció de t.

$$\vec{v}_{ll}(t) = (-R_s \cdot w \cdot \sin(wt + \frac{\pi}{2} + \gamma_0)), R_s \cdot w \cdot \cos(wt + \frac{\pi}{2} + \gamma_0))$$

Per tant, agafant $t = t_1$, on t_1 és el temps que ens ha retornat l'integrador, obtenim la velocitat de la Lluna en el moment del canvi de referència.

Llavors un cop coneixem la nova velocitat $v_2 = v_1 - v_{ll}$, ens queda calcular la nova posició. Observem que coneixem el vector de posició en el moment que el satèl·lit entra dins l'esfera d'influència ($\vec{r}_1$). A més, també podem coneixer el vector de posició de la Lluna en aquell instant ja que és: $\vec{R}_{ll}(t_1)$ on t_1 és el temps que ens retorna l'integrador quan el satèl·lit entra dins l'esfera d'influència de la Lluna.

Llavors si restem al vector de posició de la nau el vector de posició del satèl·lit, obtindrem les coordenades del satèl·lit, en un sistema de referència amb el centre de la Lluna com origen i amb els eixos X i Y paral·lels als que teniem amb el sistema de referència geocentric.

És a dir, que tenim $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{ll}(t_1)$ i $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{R}_{ll}(t_1)$.

2.2 Estacionament del satèl·lit a la Lluna

Un cop tinguem el satèl·lit en referència a la Lluna, voldrem que s'hi quedi en òrbita. Per això, el programa calcularà la velocitat necessària per deixar el satèl·lit en una òrbita circular a l'altura de l'esfera d'influència R_p. Cal observar però, que com que estem suposant que la Terra ja no afecta al moviment del satèl·lit, podem suposar que aquest òrbita és possible, però a la pràctica, la Terra estarà tinguent una influència molt important damunt del satèl·lit, de manera que en realitat, no seguirà una òrbita circular. De fet, ni tan sols és segur que es quedi voltant a la Terra.

En primer lloc, ens interessarà poder determinar la direcció de la velocitat. Com que volem que el satèl·lit descrigui una òrbita circular, tindrem que la direcció de la velocitat haurà de ser perpendicular a la direcció del vector posició. Com que coneixem el vector de posició de la nau, r_2, per trobar un vector perpendicular a aquest fem: sigui $\vec{r}_2 = (x, y)$, llavors $\vec{v}_3' = (-y, x)$ és perpendicular al vector velocitat. Si a més agafem $\vec{v}_3 = \frac{(-y,x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, el vector serà unitari. Per tant, només ens queda calcular el ser modul.

Per calcular-lo utilitzarem l'energia que ha de tenir el satèl·lit per estar en òrbita circular a una altura R_p.
En primer lloc:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R_p} = -\frac{\mu}{2a}$$

A més, com que en una circumferència tenim que $a = R_s$, llavors:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R_p} = -\frac{\mu}{2R_p}$$

Podem aïllar la velocitat en aquesta expressió, i obtenir:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{R_s}}$$

Llavors, ja coneixem el modul del vector, i la direcció del vector de velocitat. Per tant, el vector velocitat que necessitem perquè el satèl·lit quedi en òrbita circular a la Lluna és $v \cdot \vec{v}_3$:

Un cop tenim el nou vector velocitat, la velocitat que haurem d'afigir al satèl·lit perquè quedi en òrbita circular serà el minim entre $\vec{v}_3 - \vec{v}_2$ i $-\vec{v}_3 - \vec{v}_2$. Per tant, si redefinim $\vec{v}_3$ agafant el sentit que minimitzi li velocitat adequada, tenim que:

$$\Delta v = v_3 - v_2$$

Amb tot això, ja hem fet tots els càlculs necessaris per estudiar la transferència del satèl·lit a la Lluna. El programa resultat es troba a l'apèndix 2 amb explicacions de com utilitzar-lo. Ara inclourem un resultat d'aquest programa. Per $v_0 = 11$ km/s, $\phi = 0$ rad $r_0 = 200$ km i $\lambda = 1.05$ rad, obtenim els següent resultats: en el segon fitxer hi ha que $\vec{r}_2 = (65740.042435, 7056.730226)$ km i $\vec{v}_2 = (-1.081555, -0.964216)$ km/s. Observem que el fet que el vector de posició sigui positiu, és degut a que tant la Lluna com el satèl·lit estan en coordenades negatives (respecte la Terra) i com que la Lluna està mes avall i a l'esquerra, tenim que quan fem el canvi de sistema de referència ens queda que les dues coordenades de la velocitat són positives. Finalment en el tercer fitxer obtenim que el vector increment de velocitat necessària per deixar el satèl·lit en òrbita circular a la Lluna (un cop ja hi ha arribat) és $(1.110623, 0.693412)$ i el seu modul 1.309315. A continuació, incloc aquests dos documents:

Primer fitxer:

```
65740.042435  7056.730226
-1.081555  -0.964216
```

Segon fitxer:

```
(1.110623,0.693412)
1.309315
```

A més, el programa ens imprimeix per pantalla l'energia del satèl·lit, que va calculant cada cert temps durant la integració. Si aquesta és constant significa que el programa a anat bé. A més, el programa també imprimeix per terminal el temps de vol i l'angle que han de formar els vectors Terra–satèl·lit i Terral–Lluna per tal que la Lluna estigui a la posició adequada en el moment que el satèl·lit hauria d'entrar a l'esfera d'influència de la Lluna. En concret per les dades de dalt obtinc que l'angle inicial que hauran de formar els dos vectors és 2.272849 rad i que el temps de vol és 170905.187200 s. A més, també s'imprimeix per pantalla el modul del total de velocitat utilitzada, que en el nostre cas ha estat 12.309315 km/s.

2.3 Resultats

Un cop tenim el programa acabat, ens interessa saber quins són els valors que ens minimitzen la velocitat necessària per fer una transferència a la Lluna. En primer lloc cal tenir present que l'increment de velocitat total necessari per fer aquesta transferència, no és $v_0 + \Delta v_2$ (el modul de la velocitat inicial més el modul de l'increment ve velocitat necessaria a la Lluna). No és aquest valor perquè la nau no parteix en repòs des de 200 km d'altura, sinó que en un començament està en òrbita circular geocèntrica en el mateix pla que la Lluna. Per tant, en termes d'increment de velocitat, si $\phi = 0$ tindrem que per ser els dos vectors paral·lels, $\Delta_v = v_0 - v_{circ}$. Observem que de la manera que hem definit el sistema de referència de la velocitat, la velocitat circular del satèl·lit serà inicialment (quan està en òrbita circular) $(-v, 0)$ i la velocitat que voldrem serà $(-v_0 \cos(\phi), v_0 \sin(\phi))$ Per tant el modul de l'increment de velocitat necessari per passar d'una a l'altra serà:

$$\sqrt{(-v_0 \cos(\phi) + v)^2 + (v_0 \sin(\phi))^2}$$

Observem que el valor de ϕ que minimitza aquesta expressió és $\phi = 0$ (es pot comprovar fàcilment fent la derivada). Per tant, des deñ començament una trajectòria amb $\phi > 0$ (per un v_0 fixat) implicarà que necessita més increment de velocitat per arribar a la velocitat inicial, de la que necessitaria la trajectòria amb la mateixa velocitat però amb $\phi = 0$. A continuació, estudiarem com varien les necessitats d'energia un cop arribats a l'esfera d'influència de la Lluna.

Per fer aquests càlculs, farem una petita modificació del programa inicial, les dades λ, ϕ i v_0 ja no les demanarà el programa sinó que estaran escollides al codi. A més, es farà un bucle, en que a cada iteració narem augmentant el valor d'un dels paràmetres fins que aquests arribin a un cert valor. En primer lloc calcularem per $v_0 = 11$ km/s i $\lambda = 1.05$ rad quina serà la velocitat necessària per deixar el satèl·lit en òrbita a la Lluna, segons variem ϕ. Comensarem per $\phi = 0$ i anirem fin $\phi = 1.4$ rad.

Observem que a mesura que ϕ augmenta, també augmenta l'increment de velocitat necessari per deixar el satèl·lit en òrbita circular. Per tant l'energia necessaria total augmenta a mesura que augmenta ϕ. Per tant, per $v_0 = 11$ km/h, podem concloure que el valor més òptim per ϕ és 0. A més, dónat que $\phi = 0$ és el valor que minimitza l'increment de velocitat inicial necessaria, podem concloure que sempre serà el valor més eficient energèticament.

A partir d'aquest moment doncs, la resta de proves les farem amb $\phi = 0$. Fixem-nos amb que llavors, l'increment de velocitat necessari al principi, serà: $|v_0 - v|$. Per tant depen directament de v_0 i podem fer la resta de calculs, considerant que l'increment de velocitat total que necessitarem serà $v_0 + \Delta v$, ja que encara que no ens donarà el valor correcte d'energia necessària (li hauriem de restar el modul de la velocitat que ja tenia el satèl·lit per estar en òrbita circular 200 km de la Terra), si que ens servirà per comparar-ne dos.

A continuació estudiem la variació de les necessitats d'energia total, segons la velocitat inicial. Com menor sigui la velocitat inicial de la nau (suposant que arribi al punt on creurà l'esfera d'influència) llavors haurem necessitat menys velocitat per arribar a l'esfera d'influència de la Lluna. Volem comprovar com afecta la velocitat inicial a la velocitat necessària per deixar el satèl·lit en òrbita circular a la Lluna un cop aquest ha arribat a la seva esfera d'influència.

ϕ (rad)	temps de vol (s)	Δ v (km/s)	velocitat total necessària (km/s)
0.000000	170905.187200	1.309315	12.309315
0.100000	170740.000000	1.310122	12.310122
0.200000	170489.000000	1.312539	12.312539
0.300000	170164.000000	1.316530	12.316530
0.400000	169778.000000	1.322050	12.322050
0.500000	169346.000000	1.329033	12.329033
0.600000	168883.000000	1.337407	12.337407
0.700000	168406.000000	1.347071	12.347071
0.800000	167932.000000	1.357911	12.357911
0.900000	167477.000000	1.369804	12.369804
1.000000	167054.000000	1.382630	12.382630
1.100000	166677.000000	1.396244	12.396244
1.200000	166358.000000	1.410495	12.410495
1.300000	166105.000000	1.425244	12.425244
1.400000	165926.000000	1.440334	12.440334

Taula 2.1: Variació de la velocitat total necessària en funció de ϕ

En primer lloc, agafarem $\lambda = 1.05$ rad i $\phi = 0$ i comprovarem, per diferents v_0, quin serà el temps de vol, quanta velocitat adicional necessitarem per deixar el satèl·lit en òrbita circular a la Lluna i el total de velocitat necessari per fer la transferència. La velocitat d'escapament des de la Terra és 11.186 km/s. Com que la nau parteix des d'una òrbita a 200 km d'alçada, segurament la velocitat serà un poc menor. Agafarem de velocitat inicial 10.9 km/s i narem sumant-li 0.05 km/s fins arribar a velocitat inicial 11.45 km/s.
Els resultats que obtenim són:

vel inicial (km/s)	temps de vol (s)	Δ v (km/s)	total velocitat (km/s)
10.950000	214688.187200	1.014121	11.964121
11.000000	170905.000000	1.309316	12.309316
11.050000	148385.000000	1.586068	12.636068
11.100000	133608.000000	1.836543	12.936543
11.150000	122816.000000	2.065476	13.215476
11.200000	114430.000000	2.277257	13.477257
11.250000	107642.000000	2.475176	13.725176
11.300000	101983.000000	2.661690	13.961690
11.350000	97163.000000	2.838603	14.188603
11.400000	92986.000000	3.007336	14.407336
11.450000	89317.000000	3.168983	14.618983

Taula 2.2: Variació de la velocitat total necessària en funció de velocitat la inicial

Observem que si augmentem la velocitat inicial, també augmenta l'increment de velocitat que haurem de fer quan volguem que el satèl·lit es quedi en òrbita a la Lluna. També és destacable, que el temps de vols disminueix molt rapidament al principi on només amb un increment de 0.3 km/s, el temps de vol es divideix per la meitat. Observem però que a mesura que augmentam la velocitat, de cada vegada disminueix menys el temps de vol.

Un cop observat que l'energia necessària per deixar el satèl·lit en òrbita un cop aquest ha arribat a l'esfera d'influència augmenta a mesura que augmentem la velocitat inicial, sembla que la transferència que necessitarà menys velocitat, serà aquella que menys velocitat inicial tingui, és a dir, la transferència de Hoffman. Per això, valdrà la pena que fem un programa que calculi la velocitat necessària per fer aquesta transferència i així obtindrem la mínima velocitat necessaria per fer el vol. Per fer-ho, cal que tinguem en compte que aquests càlculs només seràn valids si $\phi = 0$ ja que la transferència de Hoffman necessita que l'increment de velocitat del satèl·lit sigui en la mateixa direcció i sentit de la que ja porta. Per fer-ho utilitzarem els càlculs que hem fet al primer tema. És a dir, un cop calculada la distància a la que haurà d'arribar el satèl·lit, tindrem que l'energia necessària serà:

$$E = -\frac{\mu}{h_1 + h_2}$$

on

-h_1 =altura inicial del satèl·lit (distància al centre de la Terra).

-h_2 =distància a la que haurà d'arribar.

i la velocitat necessària serà:

$$v_0 = \sqrt{2\left(-\frac{\mu}{h_1 + h_2} + \frac{\mu}{h_1}\right)}$$

Utilitzant aquestes formules, més endavant aplicaré la tranferència de Hoffman per estudiar les variacions de necessitat de velocitat total en funció de la variació de λ.

Per estudiar millor la disminució de la velocitat de transferència, repetirem els calculs, però calculant per velocitat inicial de 11 km/s fins a 12.5 km/s i avançant 0.1 cada cop.

vel inicial (km/s)	temps de vol (s)
11.000000	170905.187200
11.100000	133608.000000
11.200000	114430.000000
11.300000	101983.000000
11.400000	92986.000000
11.500000	86056.000000
11.600000	80488.000000
11.700000	75877.000000
11.800000	71970.000000
11.900000	68601.000000
12.000000	65653.000000
12.100000	63044.000000
12.200000	60712.000000
12.300000	58610.000000
12.400000	56701.000000
12.500000	54957.000000

Taula 2.3: Variació del temps de vol en funció de la velocitat inicial

Observem que els resultats confirmen que la propoció entre disminució del temps de vol i l'augment velocitat inicial es va fent més petita.

Ara també ens interessarà estudiar com afecta λ al total de velocitat necessària. Observem que com major sigui aquest, major serà la distància a la que haurà d'arribar el satèl·lit. Per tant, necessitarem més velocitat inicial i el temps de vol serà més llarg. A mès, el punt de l'esfera d'influència que creui la nau, també influirà en el moviment del satèl·lit relatiu a la Lluna. Utilitzant un programa similar a l'anterior, aquest cop, agafarem velocitat inicial constant 11 km/s i $\phi = 0$ i estudiarem com afecta el canvi de λ a el total de velocitat necessària per fer la transferència. Agafarem inicialment $\lambda = 0$ rad i anirem sumant 0.1 rad fins arribar a $\lambda = 1.4$ rad.

λ (rad)	temps de vol (s)	Δ v (km/s)	velocitat total necessaria (km/s)
0.000000	144084.187200	1.549970	12.549970
0.100000	144358.000000	1.560615	12.560615
0.200000	145174.000000	1.570527	12.570527
0.300000	146523.000000	1.579577	12.579577
0.400000	148387.000000	1.587712	12.587712
0.500000	150742.000000	1.563689	12.563689
0.600000	153557.000000	1.513251	12.513251
0.700000	156799.000000	1.464018	12.464018
0.800000	160428.000000	1.416606	12.416606
0.900000	164401.000000	1.371545	12.371545
1.000000	168672.000000	1.329283	12.329283
1.100000	173194.000000	1.290184	12.290184
1.200000	177917.000000	1.254549	12.254549
1.300000	182792.000000	1.222606	12.222606
1.400000	187766.000000	1.194555	12.194555

Taula 2.4: Variació de la velocitat total necessaria en funció de λ

Observem que els resultat ens indiquen, que a mesura que augmentem λ l'energia necessaria per deixar el satèl·lit en òrbita circular disminueix, al mateix temps que augmenta el temps de vol. Per tant, per $v_0 = 11$, la tranferència més eficient energèticament és la que té $\lambda = 1.4$.

Observem però, que aquest fet contrasta amb el fet que sabem que el satèl·lit necessitarà més energia inicial per arribar al punt de creuament de l'esfera d'influència. Llavors, no sabem si la disminució d'aquest velocitat, compensarà l'augment de velocitat necessari per arribar. Per descobrir-ho, per cada un d'aquests λ, calcularem la tranferència de Hoffman per així poder calcular la velocitat mínima per arribar a aquest punt.

El programa, en lloc d'utilitzar una velocitat donada, càlcula la velocitat que necessita perquè l'òrbita sigui una el·lipse amb apoapsis a la distància en que creua l'esfera d'influència i periapsi a l'altura en que es troba. Com que aquest valor em donava molt problemes amb l'integrador númeric, he decidit finalment, un cop càlculada aquesta velocitat mínima, sumar-li 0.01 km/s. Llavors els resultat obtinguts són:

vel. Hoffman (m/s)	λ (rad)	temps de vol (s)	Δ v (km/s)	total velocitat (km/s)
10.912795	0.000000	234472.187200	0.702992	11.615786
10.912933	0.100000	234862.000000	0.712268	11.625200
10.913342	0.200000	236027.000000	0.724451	11.637793
10.914010	0.300000	237948.000000	0.739262	11.653272
10.914916	0.400000	240598.000000	0.756402	11.671319
10.916034	0.500000	243938.000000	0.775575	11.691609
10.917334	0.600000	247920.000000	0.796488	11.713822
10.918781	0.700000	252490.000000	0.818855	11.737636
10.920343	0.800000	257585.000000	0.842401	11.762744
10.921986	0.900000	263141.000000	0.866859	11.788845
10.923681	1.000000	269087.000000	0.891970	11.815651
10.925398	1.100000	275354.000000	0.892410	11.817808
10.927113	1.200000	281868.000000	0.867105	11.794219
10.928805	1.300000	288557.000000	0.842232	11.771037
10.930456	1.400000	295350.000000	0.817948	11.748404

Taula 2.5: Variació del mínim de velocitat total necessària en funció de λ

Per tant, quan busquem utilitzar el mínim de velocitat possible per arribar fins al punt de l'esfera d'influència, tenim que a mesura que augmentem λ augmenta la velocitat inicial necessària (que era previsible perquè augmenta el recorregut que ha de fer) i també augmenta la velocitat necessària per deixar-lo en òrbita circular. Per tant, en termes energètics podem concloure que el més òptim és que $\lambda = 0$.

Capítol 3

Altres mètodes per fer transferències

Tot i que el mètode de les còniques encadenades és molt utilitzat, no és l'únic model que s'utilitza. Un altra aproximació de les trajectòries dels satèl·lits és el problema restringit circular i pla de tres cossos. En concret, encadenant dos problemes restringits circulars i plans de tres cossos, es pot aconseguir fer una transferència a la Lluna (transferir un satèl·lit en òrbita geoestacionaria a una òrbita a la Lluna) amb menys increment de velocitat del que necessitariem per fer la mateixa transferència utilitzant una transferència de Hoffman.

El plantejament del problema restringit circular i planar de tres cossos és llarg. En l'apèndix 1, faig un plantejament de les equacions en un sistema de referència inercial i finalment un plantejament de les equacions en un sistema de referència rotacional. Aquest segon és el que s'utilitza normalment, ja que les equacions diferencial són autonomes (no hi intervé directament el temps) mentre que les equacions en el sistema de referència inercial no ho són. A més, per deduir les equacions del moviment en el sistema de referència rotacional, utilitzo les equacions Hamiltonianes del moviment, en lloc de les Newtonianes. Per això, he de definir conceptes com el Lagrangià, Hamiltonià i algunes de les seves propietats. Tot això es troba en la primera part de l'apèndix. En la segona part de l'apèndix 1, es fa un estudi detallat de la dinàmica lineal dels punts d'equilibri d'aquest sistema. Comprovarem, que hi han 5 punts fixos diferents. D'aquests 5 punts fixos, nosaltres només n'utilitzarem un, el punt L_2. Aquest és un dels 3 punts colineals (que estan alineats amb els dos cossos). Com que l'estudi de la dinàmica d'aquests tres punts fixos és anàl·loga, la estudiarem per tots tres punts. Obtindrem, que tenen 1 valor propi positiu, 1 valor propi negatiu i 2 valors propis complexos conjugats i amb part real 0. Això ens diu, que en la dinàmica lineal, tenim òrbites periòdiques (en el pla dels 2 veps complexos). Però que ens diu de la dinàmica no lineal? El punt serà de la forma centre$\times$sella per tant, serà inestable. Ens interessa quina dinàmica tindrà el centre. Finalment, s'enuncia el teorema del centre de Lyapunov, que ens assegura que aquestes òrbites també existeixen en la dinàmica no linal (s'anomen òrbites de Lyapunov). Aquest fet és molt important, ja que aquestes òrbites periòdiques són imprescindibles pel mètode que ara exposarem breument. La restà de propietats que s'utilitzen, no s'inclouen a l'apèndix 1 ja que no les he provades (igual que el teorema del centre de Lyapunov).

Tot i que no he pogut calcular una trajectòria completa, a partir de l'article Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy Koon, W. S.; Lo, M. W.; Marsden, J. E. i de la pàgina web http://www.scholarpedia.org/article/Space_Manifold_dynamics intentarè explicar les bases d'aquest mètode.

Volem utilitzar les propietats del sistema Sol-Terra-Lluna-satèl·lit (problema de 4 cossos), per obtenir una tranferència de baixa energia de la Terra a la Lluna. Com que del problema de 4 cossos sen sap ben poca cosa, es vol plantejar aquest problema com una successió de dos problemes restringits circulars i plans de tres cossos. Per poder fer-ho, hem de suposar que la Terra està en òrbita circular al voltant del Sol, que la Lluna està en òrbita circular al voltant de la Terra i que l'òrbita de la Lluna al voltant de la Terra i l'òrbita de la Terra al voltant del Sol són coplanaries. En realitat, l'òrbita de la Terra té una excentricitat de 0.015 i la de la Lluna de 0.05. A més, el pla de rotació de la Lluna al voltant de la Terra té una inclinació de 5 graus respecte el pla de rotació de la Terra al voltat del Sol. Per tant, la realitat és similar a les suposicions que hem fet i podem obtenir unes aproximacions bastant realistes de les òrbites.

Aquí tenim una imatge de la trajectòria que descriurà el satèl·lit. En coordenades inercials i no inercials:

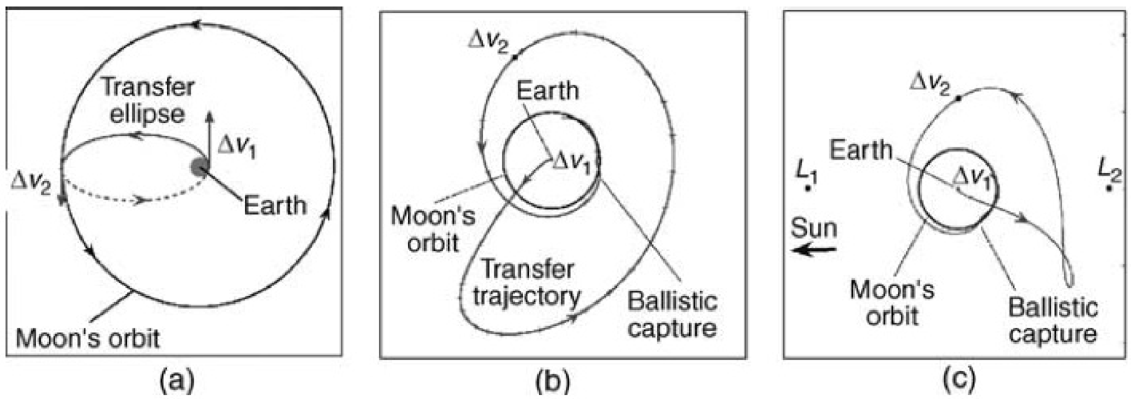

Figura 3.1: a) transferència de Hoffman, b) i c) transferència de baixa energia amb sistema de referència inercial geocentric amb sistema de referència sinòdica

En aquest mètode, el punt L_2 i les seves propietats dinàmiques són fonamentals. L'òrbita periodica de Lyapunov de L_2 té una varietat estable i una varietat inestable. Les dues varietats, són com dos tubs, compostos per òrbites que tendeixen, quan s'integren cap endavant o cap endarrera, cap a l'orbita de Lyapunov. Per tant, al voltant d'aquest òrbita, les varietats estables i inestables estan molt juntes i amb molt poca energia es pot passar d'una a l'altre. Aquests tubs a més, arriben a gran distància de l'òrbita de Lyapunov mateix. Algunes òrbites estables de l'orbita de Lyapunov del punt L_2 del sistema Sol-Terra, passen molt aprop de la Terra (de l'ordre de 200 km). I a més, la varietat inestable d'aquesta òrbita de Lyapunov, puntualment es creua amb la varietat estable de l'òrbita de Lyapunov del punt L_2 del sistema Terra-Lluna. Llavors amb molt poc increment de velocitat es pot transferir el satèl·lit d'una varietat a l'altre de tal manera, que el satèl·lit seguirà una trajectòria que el durà a ser capturat directament (o amb molt poca variació de velocitat) per la Lluna. Gràcies a això, hi haurà un important estalvi energètic respecte a la transferència de Hoffman, ja que allà es necessita un increment de velocitat substàncial.

El mètode que es fa servir, consisteix en agafar una secció de Poincaré, perpendicular a la recta Terra-Sol. Des d'allà volem trobar una condicions inicials, en que quan integrem cap endavant, la nau quedi balisticament capturada per la Lluna i unes condicions inicials tal que quan integrem cap endarrera, la òrbita torni a la Terra.

Per fer la primera part, utilitzarem que en algun moment la varietat estable de l'òrbita de Lyapunov del L_2 de la Lluna creua aquesta secció de Poincaré. En aquest moment és possible agafar unes condicions inicials, tals que el satèl·lit quedi balisticament capturat per la Lluna, això és: que arribi a una distància de la Lluna, a dins la seva esfera d'influència i que faci com a mínim una volta sencera a la Lluna. En aquestes condicions, és clar que amb una variació molt petita de la velocitat, s'aconsegueix que el satèl·lit es quedi estable òrbitant a la Lluna.

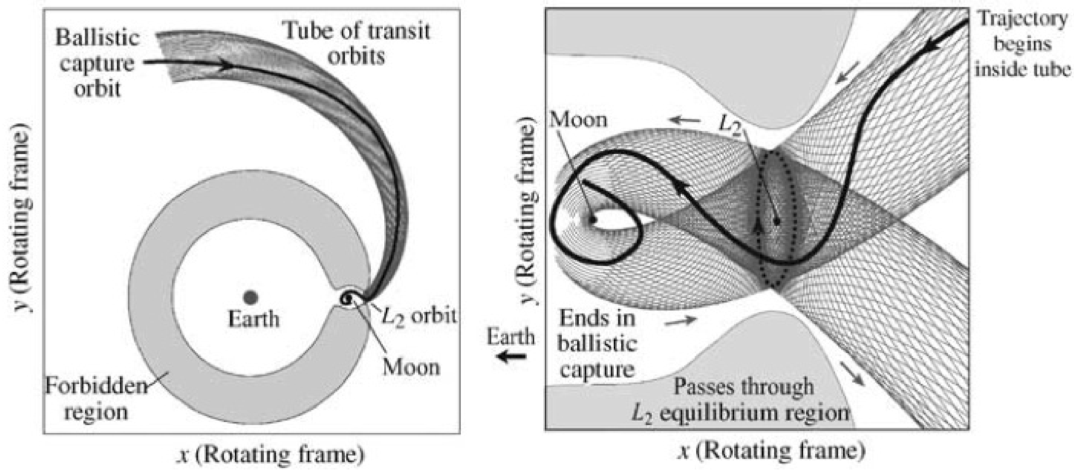

Figura 3.2: Captura balística del satèl·lit per la Lluna mitjançant la varietat invariant del punt L_2

Per fer que el satèl·lit quan integrem cap endarrera arribi a una zona prou pròxima a la Terra per deixar-la en òrbita, utilitzarem les varietats estables i inestables de L_2 del sistema Sol-Terra. Inicialment damunt la secció de Poincarè, la òrbita del satèl·lit seguirà la varietat invariant inestable. Així, quan integrem cap endarrera el satèl·lit anirà cap a l'òrbita de Lyapunov. Allà, el satèl·lit passarà a seguir la varietat estable. Llavors, a mesura que es vagi integrant cap endarrera, s'allunyarà de l'òrbita i podrem trobar unes condicions inicials (velocitat i posició) tals que la trajectòria integrada cap endarrera vagi directament cap a la Terra. Un cop arribi al punt on volguem efectuar el llançament, la trajectòria tindrà una velocitat. Per tant, quan es vol fer el llançament, ens haurem d'assegurar que les condicions inicials siguin exactament les mateixes que condicions que hem obtingut integrant cap endarrera.

Llavors només ens queda comprovar que aquestes dues trajectòries, la que va de la secció de Poincaré cap a la Lluna integrant endavant en el temps i la de la secció de Poincaré cap a la Terra, integrant cap endarrera en el temps, es puguin ajuntar amb un increment raonable d'energia. Això és possible, ja que variant la fase de la Lluna, es pot arribar a aconseguir aquesta òrbita amb només una variació de velocitat de 34 m/s. En total, l'us d'energia es pot veure reduit fins a un 20% respecte a la mateixa transferència de Hoffman.

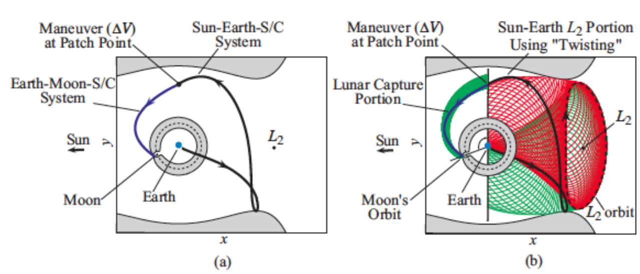

Figura 3.3: trajectòria del satèl·lit i trajectòria amb les varietats estables i inestables dels dos punts L_2

Trobar aquestes trajectòries és molt complicat, ja que hauria de tenir una bona aproximació de les òrbites periodiques de Lyapunov a més de ser capaç de desenvolupar bones aproximacions de les varietats invariants. A més, inclus desprès d'això, trobar aquestes òrbites no és directe, s'han d'anar fent diversos intents i errors. Per tant, ha quedat fora del treball. Tot i així, he considerat interessant entendre que tinguent en compte l'afecte de més d'un planeta damunt del satèl·lit, es poden fer òrbites que no es podien ni intuir que existissin en el problema de dos cossos. A més, estudiar aquesta part ha estat interessant perquè he pogut començar un estudi dínamic del problema restringit circular i pla de tres cossos que m'ha permès entendre alguna de les seves propietats.

Aquest problema és una bona aproximació per treballar amb el sistema que formen la majoria de planetes del sistema solar (com laterra o més comunament Júpiter pel seu major tamany) i el Sol, o per el sistema Terra-Lluna, ja que en els dos casos els cossos descriuen òrbites pràcticament circulars al voltant del seu centre de masses. Per altra banda però, aquesta aproximació no seria molt bona per treballar amb mercuri o plutó ja que la seva òrbita és més excèntrica.

Capítol 4

Annex: el problema restringit circular i planar de tres cossos

4.1 Plantejament del problema, sistema referència inercial

En primer lloc, plantejarem el problema en un sistema de referència inercial amb origen en el centre de massa dels dos primaris. Suposem que tenim unes unitats fixades (de massa, distància...). Llavors, suposem que tenim 2 cossos de masses m_1 i m_2, que estan en moviment circular respecte el seu centre de masses m_c amb una velocitat angular w, que estan a una distància entre ells de l i que el cos m_1 està a una distància a, del centre de masses i el cos m_2 està a una distància b del centre de masses. A més, tenim un tercer cos, de massa negligible comparada amb les altres dues. Ens interessa saber quines són les equacions que descriuran el moviment d'aquest tercer cos en aquest sistema.
Trobem les equacions del moviment en el sistema de referència inercial.
Sigui $r(t) = (X(t), Y(t))$ la funció de posició de m_3, tenim que la funció del potencial gravitatori per una massa puntual és:

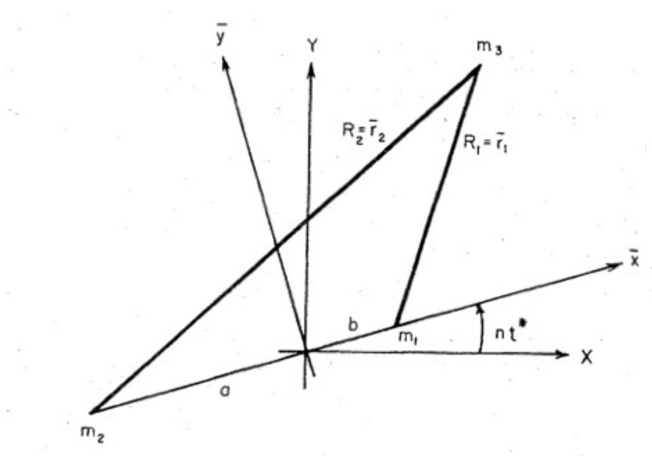

Figura 4.1: representació problema restringit de tres cossos en sistemes referència rotacional i inercial

$$F = -G\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right)$$

on

$$R_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}$$

i

$$R_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}$$

(X_1, Y_1) són les coordenades de m_1. Com que m_1 segueix un moviment circular uniforme a una distància a del centre de masses, tenim que:

$$(X_1, Y_1) = a(-\cos(wt), -\sin(wt))$$

Anàl·logament, (X_2, Y_2) són les coordenades de m_2 i per tant

$$(X_2, Y_2) = b(\cos(wt), \sin(wt))$$

Llavors, com que el camp gravitatori (g) està relacionat amb el potencial gravitatori de la següent forma: $g = -\nabla F$, tenim que les equacions del moviment d'una cos puntual, en el camp gravitatoria dels dos primaris és:

$$\begin{aligned}
\ddot{X}(t) &= -\frac{\partial F}{\partial X} \\
&= \frac{\partial}{\partial X} G \left(\frac{m_1}{\sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}} \right) \\
&= G \left(\frac{-m_1(X - X_1)}{R_1^3} + \frac{-m_2(X - X_2)}{R_2^3} \right) \\
&= -G \left(\frac{m_1(X + a\cos(wt))}{R_1^3} + \frac{m_2(X - b\cos(wt))}{R_2^3} \right).
\end{aligned}$$

Anal·logament

$$\ddot{Y}(t) = -\frac{\partial F}{\partial Y} = -G \left(\frac{m_1(X + a\sin(wt))}{R_1^3} + \frac{m_2(Y - b\sin(wt))}{R_2^3} \right)$$

Per tant les equacions del moviment en un sistema inercial baricèntric són:

$$\begin{aligned}
\ddot{X}(t) &= -G \left(\frac{m_1(X + a\cos(wt))}{R_1^3} + \frac{m_2(X - b\cos(wt))}{R_2^3} \right) \\
\ddot{Y}(t) &= -G \left(\frac{m_1(X + a\sin(wt))}{R_1^3} + \frac{m_2(Y - b\sin(wt))}{R_2^3} \right)
\end{aligned}$$

4.2 Sistema referència sinòdic, formulació hamiltoniana

Observem que aquestes equacions no són autonomes (depenen explicitament del temps). Per aquest motiu, intentarem trobar un sistema de coordenades que simplifiqui al màxim les equacions del moviment de forma que en faciliti l'estudi. Sembla natural, ja que els dos primaris estan en rotació circular continuament, posar un sistema de referència rotacional.
Tot i que les equacions del moviment es poden deduir utilitzant mecànica clàssica Newtoniana, la mecànica Hamiltoniana simplifica molt els càlculs, a més de donar-nos unes noves tècniques de plantejar aquest problema i d'altres, que són molt interessants.

Per aquest motiu, la utilitzarem per deduir les eqüacions del moviment del problema de tres cossos. Ens interessa agafar unes unitats, que ens simplifiqui al màxim tots els càlculs. Llavors, si tenim dos cossos de massa m_1 i m_2 ($m_1 > m_2$) a una distància l, agafarem:

-La massa total dels dos primaris s'agafa com a unitat de massa. Llavors la massa del cos petit es denota $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ i la massa del cos gros $1-\mu$.

-La distància entre els dos primaris també s'agafa com a unitat de mesura. A més, voldrem una constant de gravitació tal que la distància del primari gran al centre de masses sigui μ i la distància del primari petit al centre de masses sigui $1-\mu$.

-A més, la unitat de temps s'agafa de tal manera que la velocitat angular dels dos primaris al voltant del seu centre de masses és 1.

-Llavors, de la igualtat entre les forces gravitacional i centrifuga (la foça centrífuga d'un cos de massa m_1 giran al voltant d'un eix a una distància r i amb una velocitat angular k és: $F_c = rm_1k^2$) obtenim que:

$$\frac{G(\mu(1-\mu))}{1} = \mu(1-\mu) = (1-\mu)\mu$$

Per tant, $G = 1$.

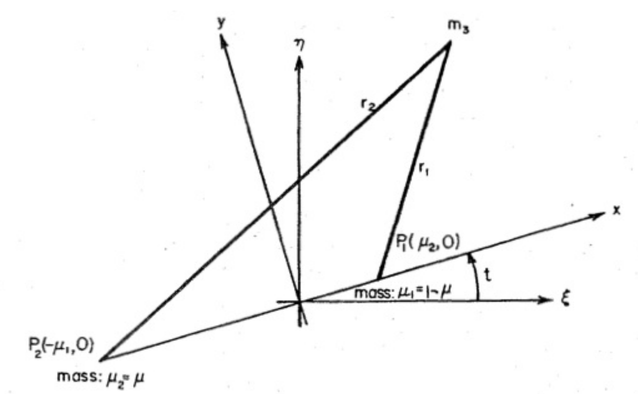

Figura 4.2: representació problema restringit de tres cossos en sistemes referència rotacional i inercial amb les noves unitats

A partir d'ara, anirem definint breument els conceptes de la mecànica Hamiltoniana necessaris i fent els calculs necessaris per deduir les equacions del moviment.
En primer lloc, definim el Lagrangià com la funció:

$$L(x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n, t) = E_{cin} - E_{poten}$$

Mitjançant aquesta funció, es poden descriure moltes propietats dinàmiques dels sistemes. El Lagrangià del nostre sistema en un sistema de referència inercial serà:

$$L(\bar{x}, \bar{y}, \dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, t) = m\left(\frac{\dot{\bar{x}}(t)^2 + \dot{\bar{y}}(t)^2}{2}\right) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

on m és la massa del tercer cos.

En els càlculs del nostre sistema utilitzarem les variables $\bar{x}$, ja que ens reservem les x per quan fem la transformació i passem a coordenades sinòdiques. L'energia cinètica del nostre Lagrangià és: $m\left(\frac{\dot{\bar{x}}^2(t)+\dot{\bar{y}}^2(t)}{2}\right)$ i l'energia potencial: $-\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right)$.

Aquesta funció compleix un principi físic molt interessant i que és bàsic per deduir les equacions del moviment tant les del Lagrange com les de Hamilton. Aquest principi ens diu que la funció:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

És un extrem relatiu respecte el temps (és a dir que la seva derivada respecte el temps és 0). D'aquesta propietat se'n dedueix que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Per tot x_i. Utilitzant aquest principi, ja podríem deduir les equacions de Lagrange del moviment en el nostre sistema. Tot i que la mecànica Lagrangiana presenta clares avantatges respecte a la mecànica Newtoniana, a nosaltres ens interessa la mecànica Hamiltoniana ja que és millor per fer canvis de sistema de referència i el nostre objectiu és trobar les equacions del moviment en un sistema de referència que no és aquest. Per tant volem passar del Lagrangià al Hamiltonià.
Per fer-ho, hem de transformar la funció del Lagrangià, per tal que passi de ser una funció que depèn de la velocitat i la posició a ser una funció independent de la velocitat i que depengui, a més de la posició, d'una nova variable que anomenarem moment lineal generalitzat i que es denota per p_{x_i}.
Aquest moment lineal generalitzat es defineix com:

$$p = (p_{x_1}, ..., p_{x_n}) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial L}{\partial x_n}\right)$$

En el nostre cas tenim: $\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} = m\dot{\bar{x}}$ i $\frac{\partial L}{\partial \bar{y}} = m\dot{\bar{y}}$, per tant serà el moment lineal estandard, que anomenarem $p_{\bar{x}}$ i $p_{\bar{y}}$.
Per tant, volem una equació en funció de la posició i del moment lineal i que no depengui de la derivada de la posició (és a dir, que la derivada parcial de la funció respecte la derivada de la posició sigui 0). Es pot demostrar que la funció:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i x_i - L(x, \dot{x}, t)$$

Depèn unicament dels moments i la posició, és a dir: $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} = 0$ per tot $i = 1, ..., n$, i així és com definim el Hamiltonià: $H(x, p, t)$
En el nostre sistema, tenim que el Hamiltonià serà:

$$H(\bar{x}, \bar{y}, p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}, t) = p_x\dot{\bar{x}} + p_y\dot{\bar{y}} - m\left(\frac{\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2}{2}\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

És immediat comprovar que $\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} = 0$. Per tant, com que el Hamiltonià no depen d'elles, podem intentar reescriure l'expressió perquè no apareguin. Utilitzant que $p_x = m\dot{\bar{x}}$ i $p_y = m\dot{\bar{x}}$ podem comvertir aquesta ultima expressió en:

$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

Que és el nostre Hamiltonià.

Com hem vist anteriorment, en un sistema de coordenades inercial, amb origen en el centre de masses (tinguent en compte que les distàncies dels planetes al centre de massa són μ i $1-\mu$ respectivament i que la seva velocitat angular és 1), tenim que:
$r_1^2 = (\bar{x} + \mu\cos(t))^2 + (\bar{y} + \mu\sin(t))^2$
$r_2^2 = (\bar{x} - (1-\mu)\cos(t))^2 + (\bar{y} - (1-\mu)\sin(t))^2$
Per formular les equacions del moviment utilitzant el Hamiltonià, hem d'utilitzar la propietat del Lagrangià:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Combinada amb:

$$H(x,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_{x_i} x_i - L(x,p,t)$$

Derivant als dos costats d'aquesta igualtat i utilitzant la igualtat del Lagrangià, obtenim:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i dp_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_{x_i} dx_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Per altra banda, com H és una funció de $\bar{x}$, p_x i t, per definició de derivada total:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_{x_i}} dp_{x_i} + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Igualant aquest dues expressions i tinguent en compte que han de ser idèntiques en podem deduir les següents equacions:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial H}{\partial p_{x_i}} &= \dot{x}_i \\ \tfrac{\partial H}{\partial x_i} &= -\dot{p}_{x_i} \\ \tfrac{\partial H}{\partial t} &= -\tfrac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

I agafant les dues primeres equacions obtenim les equacions Hamiltonianes del moviment.

Volem un sistema de coordenades sinòdic, en que els eixos girin a una velocitat angular $n = 1$ (la mateixa que tenen els planetes) , posant l'origen en el centre de masses i que l'eix X uneixi els cos cossos, de manera que el cos 1, tingui coordenades $(-\mu, 0)$ i el cos 2, coordenades $(1-\mu, 0)$.
Hem hagut de calcular el Hamiltonia en primer lloc en un sistema de referència inercial ja que calcular-lo directament hauria estat molt més difícil. Per això, ara ens interessa trobar la manera de passar del sistema de referència inercial a el nou sistema rotacional.
Volem trobar la forma de trobar una nou Hamiltonià, tal que aquest segueixi complint les equacions del moviment que hem deduït a dalt. Les transformacions que preserven l'estructura d'aquestes equacions s'anomenen canòniques.
Es pot comprovar que una condició suficient perquè un canvi de variables sigui canònic (i que per tant les equacions del moviment resultants siguin canòniques), és:

$$\sum p_{\bar{x}_i} \dot{x}_i - H = \sum P_{x_i} \dot{x} - K + \frac{dF}{dt}$$

On F és una funció que depen d'una de les variables antigues (moment o posició) i una de les varibles noves (nou moment o nova posició) i el temps.
En el nostre cas, buscarem una F que depengui de les noves coordenades de posició x i del antics moments $p_{\bar{x}}$
També es pot demostrar facilment que la igualtat anterior es complirà si i només si es compleixen les següent igualtats:

$$\bar{x} = -\frac{\partial F}{\partial p_{\bar{x}}}$$
$$\bar{y} = -\frac{\partial F}{\partial p_{\bar{y}}}$$
$$P_x = -\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$P_y = -\frac{\partial F}{\partial y}$$

Per tant, tenim que podem escollir qualsevol funció que depengui de x i $p_{\bar{x}}$, llavors mirar el valor de les seves derivades parcials. De les seves derivades parcials, obtindrem sota quin canvi de variables aquesta transformació és canònica. El fet és, però, que nosaltres ja sabem com han de canviar les coordenades de posició, ja que volem que els eixos rotin amb els primaris i per tant, han d'estar amb una rotació:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Per tant, les velles coordenades en funció de les noves seràn:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

és a dir:

$$\begin{cases} \bar{x} = x\cos(t) - y\sin(t) \\ \bar{y} = x\sin(t) + y\cos(t) \end{cases}$$

Llavors la nostra transformació haurà de complir que la seva derivada respecte els moments vells compleixi aquestes equacions.
Sigui:

$$F = F(p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}, x, y) = -(x\cos(t) - y\sin(t))p_{\bar{x}} - (x\sin(t) + y\cos(t))p_{\bar{y}}$$

Aquesta és una funció generadora, comprovem ara que és la que busquem:
Efectivament la relació entre les antigues i les noves coordenades és la rotació que voliem.

$$\begin{array}{rrrr} \bar{x} = & -\frac{\partial F}{\partial p_{\bar{x}}} = & x\cos(t) & -y\sin(t) \\ \bar{y} = & -\frac{\partial F}{\partial p_{\bar{y}}} = & x\sin(t) & +y\cos(t) \end{array}$$

Per tant, ara que ja sabem que aquesta funció generadora ens dona el canvi de sistema de referència que volem, busquem els nous moments lineals:

$$\begin{array}{rrrr} P_x = & -\frac{\partial F}{\partial x} = & p_{\bar{x}}\cos(t) + & p_{\bar{y}}\sin(t), \\ P_y = & -\frac{\partial F}{\partial y} = & -p_{\bar{x}}\sin(t) + & p_{\bar{y}}\cos(t) \end{array}$$

Observem, que la suma dels quadrats dels moments antics és igual a la suma dels quadrats dels moments moderns:

$$\begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 = p_{\bar{x}}^2 \cos^2(t) + 2p_{\bar{x}}p_{\bar{y}} \cos(t)\sin(t) + p_{\bar{y}}^2 \sin(t) + \\ + p_{\bar{x}}^2 \sin^2(t) - p_{\bar{y}}p_{\bar{x}} \cos(t)\sin(t) + p_{\bar{y}}^2 \cos(t) = \\ = (\cos^2(t) + \sin^2(t))p_{\bar{y}}^2 + (\cos^2(t) + \sin^2(t))p_{\bar{x}}^2 = p_{\bar{y}}^2 + p_{\bar{x}}^2 \end{aligned}$$

Així, com que a l'antic Hamiltonià hi apareixen la suma dels moments al quadrat, els podem substituir directament. Tenim doncs, que el nou Hamiltonià és: (El terma $\bar{x}$ fa referència a l'antica Hamiltonià)

$$\begin{aligned} H = \bar{H} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} + xp_{\bar{x}} \sin(t) + \\ + yp_{\bar{x}} \cos(t) - xp_{\bar{y}} \cos(t) + yp_{\bar{y}} \sin(t) \end{aligned}$$

I tinguent en compte que:

$$\begin{array}{rcc} P_x = & p_{\bar{x}} \cos(t) & +p_{\bar{y}} \sin(t), \\ P_y = & -p_{\bar{x}} \sin(t) & +p_{\bar{y}} \cos(t) \end{array}$$

Podem reescriure els darrers quatre termes de l'equació en funció de P_x i P_y i obtenir.

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} + P_x y - P_y x$$

Que és el Hamiltonià en el nou sistema de referència. A més, amb aquest nou sistema de referència com que els primaris estan fixos als punts $(-\mu, 0)$ i $(1-\mu, 0)$, les noves funcions distància seran: $r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2$ i $r_2^2 = (x - (1-\mu))^2 + y^2$

Llavors les equacions del moviment en aquest sistema sinòdic són:

$$\begin{array}{rc} \dot{x} = & P_x + y \\ \dot{y} = & P_y - x \\ \dot{P}_x = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) + P_y \\ \dot{P}_y = & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) + P_x \end{array}$$

Finalment, si volem obtenir les equacions newtonianes haurem d'eliminar el moment lineal, ja que aquest només apareix en els Hamiltonians. De les dues primeres equacions, podem deduir que:

$$\begin{aligned} \dot{P}_x = \ddot{x} - \dot{y} \\ \dot{P}_y = \ddot{x} + \dot{x} \end{aligned}$$

Llavors, utilitzant les dues primeres equacions, i aquestes últimes igualtats, podem reescriure les equacions del moviment com:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) + x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) + y \end{aligned}$$

Que són les equacions de Newton del moviment.

4.3 Estudi punts fixos equació moviment

Un cop hem prantejat l'equació del moviment, voldrem estudiar-la. Donat que la seva integració no és possible (tret de amb un integrador numèric) l'haurem d'estudiar qualitativament per intentar tenir una idea de com es comportarà el cos massa m_3.

Tenim que les equacions del moviment són:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-(1-\mu))}{r_2^3}$$
$$\ddot{y} - 2\dot{x} = y\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0$$

Ens interessa en primer lloc trobar els punts d'equilibri. Observem que si tenim:

$$\begin{cases} x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-(1-\mu))}{r_2^3} = 0 \\ y\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0 \end{cases}$$

Llavors l'equació del moviment resultant tindrà per solució trivial: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ constant. Llavors tindrem que $(\ddot{x}, \ddot{y}) = (0,0)$ i per tant serà solució. Per tant, si tenim un cos en repòs en els punts (x, y) que facin que les expressions de dalt valguin 0, tindrem que el cos es podrà quedar en repòs en aquests punts. A aquests punts se'ls anomena punts d'equilibri o punts de Lagrange.

Per tant, per trobar els punts d'equilibri hem de resoldre simultaneament les dues equacions de dalt. Observem que podem distingir dos casos: $y = 0$ i $y \neq 0$.

En el cas $y = 0$, trivialment la segona equació sempre serà 0, per tant el problema es redueix a estudiar la següent equació:

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-(1-\mu))}{r_2^3} = 0$$

On

$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2} \to r_1 = |x+\mu|$

$r_2 = \sqrt{(x-(1-\mu))^2} \to r_2 = |x-(1-\mu)|$

Llavors hem de resoldre:

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x-(1-\mu))}{|x-(1-\mu)|^3} = 0$$

Observem que aquesta funció es pot simplificar, per fer-ho però hem de tenir en compte el signe de $x+\mu$ i de $(x-(1-\mu))$ per saber com ens quedarà l'equació.

Si $x < -\mu$ (està a l'esquerra del primer cos) llavors $x+\mu < 0$ i $x-(1-\mu) < 0$, per tant, quan simplifiquem obtenim:

$$x + \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-(1-\mu))^2} = 0$$

En canvi si $-\mu < x < 1-\mu$ llavors $x+\mu > 0$ mentre que $x-(1-\mu) < 0$, llavors tenim que l'expressió simplifica de la següent forma:

$$x - \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-(1-\mu))^2} = 0$$

Finalment, si $x > 1-\mu$, llavors $x+\mu > 0$ i $x-(1-\mu) > 0$ i per tant l'equació resultant és:

$$x - \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-(1-\mu))^2} = 0$$

Per tant, tenim l'equació:

$$\begin{cases} x + \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-(1-\mu))^2} = 0 \text{ si } x < -\mu \\ x - \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-(1-\mu))^2} = 0 \text{ si } -\mu < x < 1-\mu \\ x - \frac{(1-\mu)}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-(1-\mu))^2} = 0 \text{ si } 1-\mu < x \end{cases}$$

Aquestes equacions es poden escriure com a polinomis de grau 5, per tant poden tenir fins a 5 solucions cadascuna. Tot i així es pot comprovar que només en tenen una solució en els intervals on estan definides. Els valors es poden trobar facilment amb mètodes numèrics un cop hem especificat μ.

Per altra banda, si tenim $y \neq 0$, llavors podem treure factor comú de la segona equació i obtenir el sistema:

$$\begin{cases} x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-(1-\mu))}{r_2^3} = 0 \\ 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \end{cases}$$

Llavors multiplicant la segona equació per $x+\mu$ i restant-la a la primera obtenim:

$$\frac{\mu}{r_2^3} - \mu = 0$$

I per tant, tenim $r_2^3 = 1 \to r_2 = 1$

A més, si multipliquem la segona equació per $x-(1-\mu)$ i la restem a la primera, obtenim:

$$1 - \mu - \frac{1-\mu}{r_1^3} = 0$$

I per tant, tenim $r_1^3 = 1 \to r_1 = 1$

És a dir, que si $y \neq 0$, la solució del sistema ha de complir que $r_1 = r_2 = 1$. És immediat comprovar que si es compleix que $r_1 = r_2 = 1$, llavors efectivament less equacions es compleixen. Per tant, per $y \neq 0$ (x, y) és solució del nostre sistema inicial, sí, i només sí, és solució del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

O equivalentment:

$$\begin{cases} 1 = (x+\mu)^2 + y^2 \\ 1 = (x-(1-\mu))^2 + y^2 \end{cases}$$

Resolem aquest sistema:

$1 = (x+\mu)^2 + y^2 \to y = \pm\sqrt{1-(x+\mu)^2}$

Llavors:

$1 = (x-1+\mu)^2 + 1 - (x+\mu)^2 \to x = \frac{1}{2} - \mu$

$y = \pm\sqrt{1-(-\mu+\frac{1}{2}+\mu)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Per tant, tenim que els punt $(\frac{1}{2}-\mu, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ i $(\frac{1}{2}-\mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$, són també punts d'equilibri i els dos únics que hi ha quan $y \neq 0$. A aquest punts d'equilibri se'ls anomena punts triangular

4.4 Dinamica lineal dels punts fixos colineals

Donat que per fer la transferència a la Lluna, només utilitzarem la dinàmica del punt de Lagangre L_2, només ens caldria estudiar la dinàmica d'aquest punt. El fet però, és la dinamica dels tres punts fixos colineals és anàl·loga i per tant estudiarem els 3 punts fixos colineals.

En primer lloc, estudiarem la seva dinàmica linealitzada. En primer lloc, volem replantejar les equacions per passar de tenir 2 equacions de segon ordre a ternir-ne 4 de primer ordre.
Definim:
$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \dot{x}$, $x_4 = \dot{y}$
Llavors ens queda el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = 2x_4 + \frac{\partial\Omega(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \dot{x}_4 = -2x_3 + \frac{\partial\Omega(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{cases}$$

Per tant, la seva diferencial és:

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{x_1x_1}(x_1, x_2) & \Omega_{x_1x_2}(x_1, x_2) & 0 & 2 \\ \Omega_{x_2x_1}(x_1, x_2) & \Omega_{x_2x_2}(x_1, x_2) & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

on
$\frac{\partial\Omega(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \Omega_{x_1}(x_1, x_2)$
Com que estem als punts d'equilibri colineal, llavors $(x_1, x_2) = (a, 0)$. Per simplificar la notació, utilitzarem: $\Omega^0_{x_1} = \Omega_{x_1}(a, 0)$. A més, $x_3 = \dot{x}_1 = 0$, $x_4 = \dot{x}_2 = 0$.

$$J(x_1, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega^0_{x_1x_1} & \Omega^0_{x_1x_2} & 0 & 2 \\ \Omega^0_{x_1x_2} & \Omega^0_{x_2x_2} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

És facil veure que:
$\Omega_{x_1,x_2} = \Omega_{x_2,x_1} = 0$
Observem, que x_3 i x_4 ja no ens apareixen, llavors, per facilitar la notació, tornaré a anomenar $x_1 = x$ i $x_2 = y$ i com que $\dot{x}$ i $\dot{y}$ no apareixen més, ens en podem olvidar.
Per definció de derivades parcials:

$$\Omega_{xy}(x, y) = \Omega_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = \\ y \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right)$$

Que és igual a 0 si $y = 0$
També demostrarem que $\Omega^0_{xx} > 0$ i $\Omega^0_{yy} < 0$. Com que la demostració és més complicada, la farem després.
A continuació, trobarem els valors propis de la jacobiana. Trobem el seu polinomi característic:

$$0 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & \Omega_{yy} & -2 & -\lambda \end{bmatrix} = \Omega_{xx}\Omega_{yy} + (4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy})\lambda^2 + \lambda^4$$

Hem calculat el determinant utilitzant el mathematica.
Llavors, definim $\beta = \lambda^2$, $A = -\Omega_{xx}\Omega_{yy}$ i $B = 2 - \frac{\Omega_{xx}+\Omega_{yy}}{2}$.
Observem que com $\Omega_{xx} > 0$ i $\Omega_{yy} < 0$ tenim que $A > 0$.
Escrivim el polinomi caràcteristic com:

$$\beta^2 + 2B\beta - A = 0 \to \beta = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4B^2 + 4A}}{2} = -B \pm \sqrt{B^2 + A}$$

Com que $A > 0$, $\sqrt{B^2 + A} > \sqrt{B^2} = |B|$ Per tant, tenim que:

$$\beta_+ = -B + \sqrt{B^2 + A} > 0$$

i

$$\beta_- = -B - \sqrt{B^2 + A} < 0$$

Per tant, els nostres vaps són:

$$\lambda_1 = +\sqrt{\beta_+}$$
$$\lambda_2 = -\sqrt{\beta_+}$$
$$\lambda_3 = +\sqrt{\beta_-}$$
$$\lambda_4 = -\sqrt{\beta_-}$$

Observem que, tenim dos vaps reals, tals que $\lambda_1 = -\lambda_2$. Com $\lambda_1 < 0$, el teorema de la varietat estable ens diu que el punt d'equilibri tindrà una varietat estable de dimensió 1. Com $\lambda_2 > 0$, també el teorema de la varietat estable ens assegura l'existència d'una varietat inestable de dimensió 1. Finalment, tenim dos vaps complexos conjugats i amb per real 0 (són imaginaris purs). Per tant, tenim una varietat central de dimensió 2.

Per tant, els punts colinears són inestables. Totes les òrbites s'allunyen d'aquest punt fix exceptuant l'òrbita de la varietat estable (on l'orbita tendeix al punt fix quan $t \to +\infty$) i la varietat central, la dinàmica de la qual no podem deduir a partir de l'estudi lineal.

A continuació, demostrarem dos resultats que hem fet servir per estudiar la dinàmica però no haviem demostrat. Demostrarem que: $\Omega_{xx}(a, 0) > 0$ i $\Omega_{yy}(a, 0) < 0$.
Tenim que:

$$\Omega_{yy}(x, y) = 1 - \frac{(1-\mu)r_1^3 - (r_1^3)_x(1-u)y}{(r_1^3)^2} - \frac{\mu r_2^3 + y\mu(r_2^3)_x}{(r_2^3)^2}$$

Per tant,

$$\Omega_{yy}(a,0) = 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}$$

Per altra banda,

$$\Omega_{xx}(x,y) = 1 + \frac{3\mu(-1+\mu+x)^2}{((-1+\mu+x)^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\mu}{((-1+\mu+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ + \frac{3(1-\mu)(\mu+x)^2}{((\mu+x)^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1-\mu}{((\mu+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Amb l'ajuda del mathematica per simplificar aquesta expressió, he obtingut que:

$$\Omega_{xx}(a,0) = 1 + \frac{2\mu}{r_2^3} + \frac{2(1-\mu)}{r_1^3}$$

Llavors sigui $\alpha(x,y) = \frac{2\mu}{r_2^3} + \frac{2(1-\mu)}{r_2^3}$
Tenim que: $\Omega_{xx}(a,0) = 1 + 2\alpha$ i $\Omega_{yy}(a,0) = 1 - \alpha$
A continuació demostrarem que $\alpha(a,0) > 1$ on $(a,0)$ és punt colineal.
Per demostrar-ho, utilitzarem que en el punt $(a,0)$ es compleix:

$$\Omega_x(a,0) = a - \frac{(1-\mu)(a+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(a-(1-\mu))}{r_2^3} = 0 \rightarrow \\ a - a\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) - \frac{\mu(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3} = 0$$

Llavors substituint $\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}$ per α obtenim:

$$(1-\alpha) = \frac{\mu(1-\mu)}{a}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

Observem que quan estem damunt L_2 (el punt d'equilibri a la dreta de μ) tenim que $a > 0$, però $r_2 < r_1$. Llavors $1 - \alpha < 0$
En canvi a L_1 (entremig de les dues masses) com $\mu < \frac{1}{2}$, llavors el punt també estarà més proxim a la massa 2. Per tant, $r_2 < r_1$ i a més $a > 0$. Podem concloure doncs que $1 - \alpha < 0$.
Finalment, pel punt L_3 (a l'esquerra del cos $1-\mu$), estarà més pròxim al cos 1 que al cos 2. Per tant $r_2 > r_1$ però $a < 0$. Per tant, $1 - \alpha < 0$. Llavors podem deduïr que per qualsevol del tres punts colineals, $\alpha > 1$ i per tant:
$\Omega^0_{xx} = 1 + 2\alpha > 0$ i $\Omega^0_{yy} = 1 - \alpha < 0$

Tornant a la dinàmica dels punts, ens interessa estudiar la varietat central. Observem que la dinàmica lineal sembla indicar-nos que tenim òrbites periòdiques a sobre la varietat central. El teorema del centre de Lyapunov, ens assegura que aquestes òrbites també existeixen en la dinàmica general del sistema.

L'enunciat del teorema és el següent: Sigui P punt d'equilibri d'un sistema d'equacions $F(x) = \dot{x}$, si $Spec(DF(P)) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n, -\lambda_1, ..., -\lambda_n\}$. Si λ_1 és imaginari pur i per tot $i = 2, \ldots, n$ es compleix que $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$ (condició de no resonància) llavors existeix una familia de solucions periòdiques reals en un entorn del punt d'equilibri, depenents d'un paràmetre ϵ. Si ϵ tendeix a 0, llavors les òrbites tendeixes cap a l'equilibri i el període tendeix cap a $\frac{2\pi}{\lambda_1}$.

Observem que els nostres veps són de la forma $\{\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2\}$ i compleixen que λ_1 és imaginari pur. Ens queda doncs comprovar que es compleix la condició de no ressonancia. Això també és immediat, ja que $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ i per tant tenim un quocient entre un real i un imaginari, i per tant el seu quocient no pot pertanyer a $\mathbb{Z}$ (de fet tampoc pot pertanyer a $\mathbb{R}$). Per tant, es compleixen totes les hipòtesis del teorema de Lyapunov i per tant, tenim una família d'òrbites periodiques, les anomenades òrbites de Lyapunov.

Amb això, ja hem provat el suficient per entendre el mètode que hem demostrat abans.

Capítol 5

Programes

A continuació, adjuntu el programa que he obtingut en el capítol 2. El programa demanà que se li introduesqui v_0, r_0, ϕ i λ_1 i el nom de tres fitxers de sortida. En el primer document, escriu els valors de l'òrbita. En el segon document escriu escriu a la primera linea $\vec{r}_2$ i a la segona $\vec{v}_2$. Finalment, en el tercer document escric en primer lloc, el vector d'increment de velocitat que necessitem per deixar el satèl·lit en moviment circular, i a la segona línia, el seu mòdul. Perquè es pogués veure tot, he hagut de canviar de linia en algun printf i if que pot causar algun problema. En tot cas, seria suficient tornar a ajuntar les línies a l'hora de fer anar el programa.

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define signe(A) (((A)>0) ? 1 : (((A)<0) ? -1 : 0))
#define valabs(B) (((B)>0) ? (B) : -(B))


/*
ut:=Gm_t
ull:=Gm_ll
dtp:=distància de la Terra a la que el satèl·lit arriba a la esfera d'influència
dtll:=distància Terra Lluna
rt:=radi terra
patchedpoint:=radi esfera influència
w:=velocitat angular Lluna
*/


void twobody(double t, double x[], int n, double y[]);
void rk78(void (*difeq)(double t, double x[], int n, double y[]),
         int n, double y[], double *x, double *h, double hmin,
         double hmax, double relerr, double abserr, int *flag);
int maxdistorb(double energia, double ut, double d, double momentang);
double disTerraPatched(double lamda, double dtll, double patchedpoint);
double satlluna(double anglerecorregut, double ut, double energia, double lamda,
```

```
 double patchedpoint, double *x, double h0, double velocitat0, double phi, double dpt);
void fposll(double t, double *Rll, double gamma0, double w, double dtll);
void fvelll(double t, double *Vll, double gamma0, double w, double dtll);
//a=(double*)malloc(n*sizeof(double));
int main (void){
// declarem les variables
int n=4, iflag, k=0, i;
double *x, t, relerr, abserr, h, hmin, hmax, x2[2];
double v2[2], Rll[2], Vll[2], momentang, Av[2], Nv[2], ull, modul1;
double ut, rt, dtll, w, patchedpoint, velocitat0;
double h0, lamda, dpt, modul, gamma0, phi, energia;
char fitxer[30], fitxer1[30], fitxer2[30];
FILE *sortida, *sortida1, *sortida2;

// cridem un fitxer d'entrada i sortida

printf("introduiu el nom del fitxer de sortida\n");
scanf("%s", fitxer);
sortida=fopen(fitxer, "w");
if(sortida==NULL){
  printf("error en obrir el fitxer %s\n",  fitxer);
  exit(1);
}

// en cridem un altre

printf("introduiu el nom del fitxer1 de sortida1\n");
scanf("%s", fitxer1);
sortida1=fopen(fitxer1, "w");
if(sortida1==NULL){
  printf("error en obrir el fitxer %s\n",  fitxer1);
  exit(1);
}

// i un altre

printf("introduiu el nom del fitxer de sortida\n");
scanf("%s", fitxer2);
sortida2=fopen(fitxer2, "w");
if(sortida==NULL){
  printf("error en obrir el fitxer %s\n",  fitxer);
  exit(1);
}

// donem valor a les dades

iflag=4;
```

```
h=0.1;
x=(double*)malloc(n*sizeof(double));
hmin=5.e-3;
hmax=1;
relerr=1.e-6;
abserr=1.e-10;
t=0;
ut=398613.4418;
ull=4904.605;
dtll=384400;
rt=6371;
patchedpoint=66118;
w=2.661665*pow(10, -6);

//demanem l'altura inicial de la nau i posem coordenades al vector de posició inicial

printf("introduiu l'altura inicial de la nau (respecte la superficie de la terra)\n");
scanf("%lf", &h0);
x[0]=0;
x[1]=h0+rt;

//demanem entrar la velocitat inicial i l'angle que han de formar
//utilitzant això els i posem coordenades

printf("introduiu la velocitat inicial\n");

scanf("%lf", &velocitat0);
printf("introduiu l'angle que voleu que formin la perpendicular del
vector nau radi i el vector velocitat (ha d'estar entre 0 i pi/2)\n");

scanf("%lf", &phi);

if(phi>M_PI/2||phi<0){
printf("angle incorrecte\n");
exit(1);
}
x[2]=-cos(phi)*velocitat0;
x[3]=sin(phi)*velocitat0;

//demanem l'angle que determinarà per on entrarà el satèl·lit

printf("introduiu l'angle respecte la linea que uneix els centres
terra lluna al que voleu estigui el patched point, entre 0 i pi/2\n");
scanf("%lf", &lamda);
if(lamda>M_PI/2||lamda<0){
printf("angle incorrecte\n");
exit(1);
```

```
}
//Calculem a quina distància del centre de la terra
//estarà el punt en que el satèl·lit creuarà l'esfera d'influència

dpt=disTerraPatched(lamda, dtll, patchedpoint);

//Calculem les dues constants del moviment: energia i moment angular
energia=(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])/2-398613.4418/sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1]);
momentang=sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*sqrt(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])*cos(phi);

//especifiquem la geometria de la òrbita
if(energia<0){
printf("energia negativa: %lf, orbita el·liptica\n", energia);
k=0;

}else{
k=1;
if(energia>0){
printf("energia positiva: %lf orbita hiperbòlica\n", energia);
}else{
printf("energia %lf, orbita parabòlica\n", energia);
}
}

//calculem si el satèl·lit arriba al patched point
if(k==0){
k=maxdistorb(energia, ut, dpt, momentang);
}
if(k==1){
printf("arriba al patched point\n");
}else{
printf("no arriba al patched point\n");
}

//integram l'orbita del satèlit
if(k==1){
do{
rk78(twobody, n, x,&t,&h, hmin, hmax, relerr, abserr, &iflag);

//vaig imprimint els valors de les variables

fprintf(sortida, "%lf %lf\n", x[0], x[1]);
k++;
//Comprovo que l'energia és constant

if(k%10000==0){
energia=(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])/2-398613.4418/sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1]);
```

```
printf("%lf\n", energia);
}
modul=x[0]*x[0]+x[1]*x[1];
modul=sqrt(modul);
}while(modul<dpt);


//calculem quin angle han de formar els vectors de posició de la nau
//i la lluna al principi
//t*w és l'angle recorregut per la lluna

gamma0=satlluna(t*w, ut, energia, lamda, patchedpoint, x, h0, velocitat0, phi, dpt);
printf("angledesortida terra-satel·lit i terra-lluna ha de ser %lf\n", gamma0);
printf("temps=%lf\n", t);


//canviem de base: som a la lluna
fposll(t, Rll, gamma0, w, dtll);
fvelll(t, Vll, gamma0, w, dtll);
for(i=0; i<2; i++){
x2[i]=x[i]-Rll[i];
}
for(i=0; i<2; i++){
v2[i]=x[i+2]-Vll[i];
}
modul=x2[0]*x2[0]+x2[1]*x2[1];
modul=sqrt(modul);

//imprimeix els nous vectors de velocitat i posició
fprintf(sortida1, "%lf  %lf\n", x2[0], x2[1]);
fprintf(sortida1, "%lf  %lf\n", v2[0], v2[1]);

/*calculo l'energia necessaria per d'eixar el satèl·lit en òrbita circular*/

//Trobo un vector perpendicular i unitari al de posició
//(direcció en que haura d'anar la velocitat)
Av[0]=-x2[1]/modul;
Av[1]=x2[0]/modul;

//Calculo la velocitat necessària segon la formula deduïda a la memòria
Av[0]=Av[0]*sqrt(ull/modul);
Av[1]=Av[1]*sqrt(ull/modul);

//Calculo si he d'anar en una direcció o en l'altra
if((Av[0]-v2[0])*(Av[0]-v2[0])+(Av[1]-v2[1])*(Av[1]-v2[1])<
(-Av[0]-v2[0])*(-Av[0]-v2[0])+(-Av[1]-v2[1])*(-Av[1]-v2[1])){
Nv[0]=Av[0]-v2[0];
```

```
Nv[1]=Av[1]-v2[1];
}else{
Nv[0]=-Av[0]-v2[0];
Nv[1]=-Av[1]-v2[1];
}
modul1=Nv[0]*Nv[0]+Nv[1]*Nv[1];
modul1=sqrt(modul1);
printf("el cost total de velocitat d'aquesta transferència és:\n");
printf("%lf\n", modul1+velocitat0);
fprintf(sortida2, "(%lf,%lf)\n", Nv[0], Nv[1]);
fprintf(sortida2, "%lf\n", modul1);

}
fclose(sortida);
fclose(sortida1);
fclose(sortida2);
return 0;

}


void twobody(double t, double x[], int n, double y[]){
y[0]=x[2];
y[1]=x[3];
y[2]=-398613.4418*x[0]/pow(sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1]), 3);
y[3]=-398613.4418*x[1]/pow(sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1]), 3);
return;
}


//calculo l'apogee de l'orbita.

int maxdistorb(double energia, double ut, double d, double momentang){
int k;
double rmax, a, e, p;
p=momentang/ut;
a=-ut/(2*energia);
e=sqrt(1-p/a);
rmax=p/(1-e);
if(rmax>=d){
k=1;
}else{
k=0;
}
return k;
}
```

```
//utilitzo el teorema del cosinus per trobar la distància terra patched point
double disTerraPatched(double lamda, double dtll, double patchedpoint){
double dpt;
dpt=dtll*dtll+patchedpoint*patchedpoint-2*dtll*patchedpoint*cos(lamda);
dpt=sqrt(dpt);
return dpt;
}

/*Aquesta funció ens retorna l'angle que formen inicialment
 els vectors de posició del satèl·lit i la Lluna
 * h=moment angular
 * e=eccentricitat de l'orbita
 */

double satlluna(double anglerecorregut, double ut, double energia, double lamda,
 double patchedpoint, double x[], double h0, double velocitat0, double phi, double dpt){
double e, h, p, v0, v1, gamma, rt=6371, a, sortida, a2, a1;
h=(h0+rt)*(velocitat0)*cos(phi);
p=h*h/ut;
a=-ut/(2*energia);
e=sqrt(1-p/a);
a2=(p-(h0+rt))/((h0+rt)*e);
a1=(p-sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1]))/(sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*e);
if(phi==0){
a2=1;
}
v0=acos(a2);

v1=acos(a1);


gamma=asin((patchedpoint/dpt)*sin(lamda));
sortida=v1-v0-gamma-anglerecorregut;
return sortida;
}



//funció posició de la lluna

void fposll(double t, double *Rll, double gamma0, double w, double dtll){
double modul;
Rll[0]=dtll*cos(w*t+M_PI/2+gamma0);
Rll[1]=dtll*sin(w*t+M_PI/2+gamma0);
modul=Rll[0]*Rll[0]+Rll[1]*Rll[1];
```

```
modul=sqrt(modul);
}

//funció velocitat lluna

void fvelll(double t, double *Vll, double gamma0, double w, double dtll){
double modul;
Vll[0]=-dtll*w*sin(w*t+M_PI/2+gamma0);
Vll[1]=dtll*w*cos(w*t+M_PI/2+gamma0);
modul=Vll[0]*Vll[0]+Vll[1]*Vll[1];
modul=sqrt(modul);

}
```

A continuació, inclourem la rutina rk78.c, que el programa anterior necessita per funcionar

```
static double alfa[13]={0.e0,2.e0/27.e0,1.e0/9.e0,1.e0/6.e0,5.e0/12.e0,
   .5e0,5.e0/6.e0,1.e0/6.e0,2.e0/3.e0,1.e0/3.e0,1.e0,0.e0,1.e0};
static double beta[79]={0.e0,2.e0/27.e0,1.e0/36.e0,1.e0/12.e0,1.e0/24.e0,
   0.e0,1.e0/8.e0,5.e0/12.e0,0.e0,-25.e0/16.e0,25.e0/16.e0,.5e-1,0.e0,
   0.e0,.25e0,.2e0,-25.e0/108.e0,0.e0,0.e0,125.e0/108.e0,-65.e0/27.e0,
   125.e0/54.e0,31.e0/300.e0,0.e0,0.e0,0.e0,61.e0/225.e0,-2.e0/9.e0,
   13.e0/900.e0,2.e0,0.e0,0.e0,-53.e0/6.e0,704.e0/45.e0,-107.e0/9.e0,
   67.e0/90.e0,3.e0,-91.e0/108.e0,0.e0,0.e0,23.e0/108.e0,-976.e0/135.e0,
   311.e0/54.e0,-19.e0/60.e0,17.e0/6.e0,-1.e0/12.e0,2383.e0/4100.e0,
   0.e0,0.e0,-341.e0/164.e0,4496.e0/1025.e0,-301.e0/82.e0,2133.e0/4100.e0,
   45.e0/82.e0,45.e0/164.e0,18.e0/41.e0,3.e0/205.e0,0.e0,0.e0,0.e0,0.e0,
   -6.e0/41.e0,-3.e0/205.e0,-3.e0/41.e0,3.e0/41.e0,6.e0/41.e0,0.e0,
   -1777.e0/4100.e0,0.e0,0.e0,-341.e0/164.e0,4496.e0/1025.e0,-289.e0/82.e0,
   2193.e0/4100.e0,51.e0/82.e0,33.e0/164.e0,12.e0/41.e0,0.e0,1.e0};
static double c[11]={41.e0/840.e0,0.e0,0.e0,0.e0,0.e0,34.e0/105.e0,
   9.e0/35.e0,9.e0/35.e0,9.e0/280.e0,9.e0/280.e0,41.e0/840.e0};
static double cp[13]={0.e0,0.e0,0.e0,0.e0,0.e0,34.e0/105.e0,
   9.e0/35.e0,9.e0/35.e0,9.e0/280.e0,9.e0/280.e0,0.e0,41.e0/840.e0,
   41.e0/840.e0};
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#define signe(A) (((A)>0) ? 1 : (((A)<0) ? -1 : 0))
#define valabs(B) (((B)>0) ? (B) : -(B))
void rk78(void (*difeq)(double t, double x[], int n, double y[]),
         int n, double y[], double *x, double *h, double hmin,
```

```
      double hmax, double relerr, double abserr, int *flag)
/*-----------------------------------------------------------------------

    This function is an implementation of the Runge-Kutta-Fehlberg
    method of orders  7  and  8. Using a total of 13 steps (and
    evaluations of the vectorfield) it computes two different
    estimations of the solution at the "next point". The difference
    between both estimations (with local errors of order 8 and 9)
    is computed and the l1 norm obtained. This norm is divided by n
    (the number of equations). The number obteined in this way is
    required to be less than a given tolerance e1 times  (1+.01*dd),
    were dd is the l1 norm of the point computed to the order 8. If
    this requirement is satisfied then the order 8 estimation is taken
    as a next point.  If not, a suitable value of the step h is obtained
    and the computation is started again.  In any case, when the next
    point is computed, a prediction of the step h, to be used in the
    next step, is done.

    Input parameters

    difeq----------------- the name of the function computing the
                           vector field (to be declared external in
                           the calling program) writen as a system
   of first order differrential equations.
    n--------------------- the dimension of the dependent variable.
                           It is equal to the number of differential
   equations.
    y--------------------- the current value of the dependent variable
    x--------------------- the current value of the independent variable
    h--------------------- the time step to be used
    hmin------------------ the minimum allowed value for the absolute
                           value of h
    hmax------------------ the maximum allowed value for the absolute
                           value of h
    relerr,abserr--------- relative and absolute error tolerances
                           for local error test.
    iflag----------------- indicates status of integration.
                           set iflag = 4 for the first call to rk78.

   the user must provide storage in his calling program for the arrays
   in the call list:
        y(n)

   difeq must be declared in an external statement and it has to be of
   the form :
        difeq(t,y,n,yp)
   to evaluate:
```

```
      dy/dt = yp,  where  y  = (y(1) ,...,y(n))
                          yp = (yp(1),...,yp(n))

   output parameters:

    difeq----------------- unchanged
    n--------------------- unchanged
    y--------------------- the  estimated next value of the dependent.
                              variable.
    x--------------------- the next value of the independent variable.
    h--------------------- the time step to be used in the next call
                              of this subroutine.
    hmin------------------ unchanged
    hmax------------------ unchanged
    relerr, abserr-------- unchanged
    iflag  = 4  ---------- normal return. neither hmin nor hmax have
                              been used.
    iflag  = 1  ---------- hmin has been used in any step.
    iflag  = 2  ---------- hmax has been used in any step.
    iflag  = 3  ---------- hmin and hmax have been used in any step.

-----------------------------------------------------------------------*/
{
   int j,k,l,jk,jl,kl;
   double a,bet,d,dd,e3,*work,v;
   work = (double*)malloc(15*n*sizeof(double));
   if (work == NULL) {puts("rk78: not enough memory.");exit(1);}
   for(;;)
   {
      jk=0;
      for(j=0;j<13;j++)
      {
         for(l=0;l<n;l++)
            work[l] = y[l];
         a = *x + alfa[j]*(*h);
         for(k=0;k<j;k++)
         {
            ++jk;
            bet=beta[jk]*(*h);
            for(l=0,kl=(k+2)*n; l<n; l++,kl++)
               work[l] += bet*work[kl];
         }
         (*difeq)(a,work,n,work+n);
         for(l=0,jl=(j+2)*n; l<n; l++,jl++)
            work[jl]=work[n+l];
      }
      d = dd = 0.e0;
```

```
      for(l=0;l<n;l++)
      {
         work[l] = work[l+n] = y[l];
         for(k=0,kl=2*n+l; k<11; k++,kl+=n)
         {
            bet=(*h)*work[kl];
            work[l] += bet*c[k];
            work[l+n] += bet*cp[k];
         }
         work[l+n] += (*h)*(cp[11]*work[13*n+l]+cp[12]*work[14*n+l]);
         d += valabs(work[l+n]-work[l]);
         dd += valabs(work[l+n]);
      }
      e3 = abserr+relerr*dd;
      if (d < e3) goto e4;
      v = *h-hmin;
      if (valabs(v) <= (2.e-16)*(1+valabs(hmin))) goto e4;
      (*h) *= 0.9e0*exp(0.125e0*log(e3/d));
      if (valabs((*h)) < hmin)
         {
            *h = hmin*signe(*h);
            if (*flag == 2  ||  *flag == 3)
                  *flag = 3;
               else
                  *flag = 1;
         }
      if (valabs((*h)) > hmax)
         {
            *h = hmax*signe(*h);
            if (*flag  == 1  ||  *flag == 3)
                  *flag = 3;
               else
                  *flag = 2;
         }
   }
e4:d = (d > (v = e3/256)) ?  d : v;
   *x += (*h);
   (*h) *= 0.9e0*exp(0.125e0*log(e3/d));
   if (valabs((*h)) > hmax)
      {
         *h = hmax*signe(*h);
         if (*flag == 1  ||  *flag == 3)
               *flag = 3;
            else
               *flag = 2;
      }
   if (valabs((*h)) < hmin)
```

```
      {
         *h = hmin*signe(*h);
         if (*flag == 2  ||  *flag == 3)
               *flag = 3;
            else
               *flag = 1;
      }
   for (l=0,k=n; l<n; l++,k++)
      y[l] = work[k];
   free(work);
   return ;
}
```

Conclusions

Després de tot el que hem vist, arriba el moment de valorar quines conclusions podem extreure d'aquest treball. En els objectius, començava exposant que esperava aprendre tot el que em fos possible sobre l'astrodinàmica en general. Crec que en aquest sentit, el treball ha satisfet adequadament les meves aspiracions. Gracies a aquest, els meus coneixements sobre la mecànica que regeix els cossos celestes, ha passat de ser pràcticament nul·la, a ser suficientment gran per entendre molts de conceptes relacionats amb el tema.

Durant el primer capítol, he adquirit coneixements suficients per poder descriure el moviment dels satèl·lits quan estan afectats per la força gravitatòria d'un cos puntual cos. També hem vist que les òrbites de qualsevol satèl·lit seran còniques i hem apres com calcular quin tipus de cònica seguiran. A més, he apres bastantes coses sobre els aspectes geomètrics d'aquestes figures. Per tot això, podem dir que els objectius que esperava d'aquest capítol, s'han complert.

Del segon capítol del treball, que era la vertaderament experimental, és la que s'han de comentar més coses. En primer lloc, he aconseguit fer un programa tal que donades la velocitat, la direcció i els dos angles explicats abans, ens calcula l'increment de velocitat necessària per quedar en òrbita circular a la Lluna, a més de donar-nos la posició a la que ha d'estar inicialment la Lluna, perquè quan el satèl·lit arribi al punt de creuar l'esfera d'influència, la Lluna efectivament i sigui. En principi el programa funciona bé, i per tant, he intentat estudiar com variava la velocitat necessària en funció dels quatre paràmetres a escollir. La primera conclusió a la que podem arribar és que l'angle $\phi = 0$ és el valor ideal. Si és així és perquè en un primer moment, ja ens estalviem energia respecte qualsevol altre angle, ja que podem aprofitar el 100% de la velocitat que portava el satèl·lit quan estava en òrbita circular a la Terra. A més, hem comprovat que posar un angle superior, quan $v = 11$ km/s, fa que augmenti la variació de velocitat necessària perquè el satèl·lit quedi en òrbita circular a la Lluna. Per tant, a partir d'aquest moment, totes les proves les he fetes amb $\phi = 0$. En segon lloc, he volgut comprovar com afectava la velocitat inicial a l'increment de velocitat necessari perquè el satèl·lit quedés en òrbita circular al voltant de la Lluna. Llavors, per un angle de $\lambda = 1.05$ rad hem comprovat que un augment de la velocitat inicial, implicava també, un augment de l'increment de velocitat necessària per deixar el satèl·lit en moviment circular a la Lluna.

Després, hem decidit observar amb més atenció com variava el temps segons les diferents energies. Hem comprovat, que en un principi, una petita variació de la velocitat inicial, feia que el temps de vol disminuís molt, però ràpidament aquest relació disminuïa i cada vegada es necessita més increment de velocitat per reduir menys temps.

Finalment hem observat com canviava la variació de velocitat, en funció de λ en un primer moment, hem comprovat que per $v = 11$ km/s, a mesura que λ augmentava, la velocitat total necessària disminuïa. Després però, hem decidit buscar per cada λ, la transferència a l'esfera d'influència de la Lluna que menys energia necessites. Afegint aquests càlculs al programa hem descobert que en aquest cas, a mesura que λ augmentava també augmentava la necessitat final d'energia. Amb això, podem arribar a la conclusió que l'òrbita més barata és la que es fa amb angle $\lambda = 0$ i la velocitat inicial mínima.

En l'últim capítol, combinat amb l'apèndix, hem entès les bases de la dinàmica del problema dels tres cossos, així com hem introduït un mètode alternatiu al de les còniques encadenades per poder fer transferències.

Per acabar, afegir que gràcies al treball, he aconseguit millorar molt el meu control del Latex. A més, he après a utilitzar les diverses fonts de bibliografia, per superar problemes que abans d'aquest treball, m'haurien estat insuperables. Finament, he après a estructurar els coneixements i ha escriure amb claredat els conceptes que necessitava pel treball. Per tot això, gràcies a aquest treball, he assolit tot un món de coneixements que tot i que no siguin directament matemàtics, em seran molt útils al llarg de la meva vida.

Bibliografia

[1] Valtonen, M.; Karttunen, H.: *The Three–Body Problem*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] Szebehely, V.: *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, Academic Press, New York, 1967.

[3] Koon, W. S.; Lo, M. W.; Marsden, J. E.: Low energy transfer to the moon, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **81** (2001), 63–67.

[4] Barrabés, E.; Gòmez, G.: Space Manifold dynamics, *Scholarpedia* (2011).

[5] Bate, R. R.; Donald, D. M.; White, J. W.: *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publications, Inc., New York, 1971.

[6] Barrabés, E.; Gòmez, G.; Rodríguez-Canabal, J.: Advanced topics in astrodinamics, Summer Course, Barcelona, 2004.