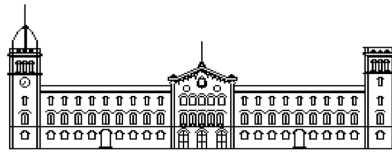


Treball final de grau

## GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques  
Universitat de Barcelona



Estudi de les equacions de Wilson i Cowan, un model de xarxa neuronal

Marina Vegué Llorente

Directors: Dr. Àlex Haro i Dr. Alex Roxin

Barcelona, juliol de 2013

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Sistemes dinàmics continus</b>	<b>6</b>
	Preliminars . . . . .	6
	Sistemes dinàmics continus i equacions diferencials . . . . .	8
	Existència i unicitat de solucions . . . . .	8
	Conjunts invariants i estabilitat . . . . .	10
	Sistemes lineals . . . . .	13
	Equivalència topològica i teorema de Hartman-Grobman . . . . .	17
	Teorema de Liouville i aplicacions . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Introducció a la teoria de bifurcacions</b>	<b>22</b>
	Primeres definicions . . . . .	22
	Formes normals . . . . .	23
	Estabilitat estructural . . . . .	24
	Bifurcacions de punts fixos en sistemes dependents d'un paràmetre . . . . .	25
	La bifurcació sella-node . . . . .	26
	La bifurcació d'Andronov-Hopf . . . . .	31
	Altres bifurcacions . . . . .	38
	Bifurcacions de punts fixos en sistemes $n$ -dimensionals dependents d'un paràmetre . . . . .	39
	Bifurcacions de punts fixos en sistemes dependents de dos paràmetres . . . . .	46
	Bifurcacions de codimensió 1 . . . . .	47
	Bifurcacions de codimensió 2 . . . . .	51

<b>4 El model de Wilson i Cowan</b>	<b>61</b>
Un model de xarxa neuronal . . . . .	61
El model de Wilson i Cowan . . . . .	62
Anàlisi del model . . . . .	66
Propietats generals . . . . .	68
Estudi d'un cas particular . . . . .	72
<b>5 Conclusions</b>	<b>84</b>

## Resum

La teoria de sistemes dinàmics té aplicacions importants en l'estudi dels models biològics que es descriuen per mitjà d'equacions diferencials. Aquest treball és un estudi d'alguns aspectes bàsics de la teoria de sistemes dinàmics per a l'anàlisi d'un model estadístic de xarxa neuronal: el model de Wilson i Cowan. En primer lloc, hem explorat els fonaments de la teoria de bifurcacions de punts d'equilibri en sistemes d'equacions diferencials ordinàries dependents de paràmetres. Després hem presentat el model de Wilson i Cowan i la seva formulació matemàtica. El model descriu, a través d'un sistema de dues equacions diferencials ordinàries, l'evolució temporal de l'activitat mitjana de dues poblacions neuronals en una xarxa, una d'excitatòria i una altra d'inhibitòria. Les equacions inclouen constants que depenen de propietats intrínseques de la xarxa i dos paràmetres reals que representen els estímuls externs a la xarxa. Hem aplicat alguns dels resultats teòrics apresos per fer una anàlisi del model i dels seus règims dinàmics. Els resultats mostren que, per a determinats valors de les constants del model, el sistema exhibeix dinàmiques riques, amb possibles canvis d'estat entre règims oscil·latoris i estacionaris quan els estímuls externs varien dins de certes regions de l'espai de paràmetres. Aquests fenòmens poden ser mecanismes bàsics subjacents a processos més complexos com els ritmes oscil·latoris del son o l'establiment de la memòria.

---

The theoretical knowledge about dynamical systems has important applications to the study of those biological models that are described by means of differential equations. This work is a study of some basic aspects about the theory of dynamical systems and its application to the analysis of a statistical neural model: the Wilson-Cowan model. First of all, we have explored some important results about bifurcations of equilibria in systems of ordinary differential equations that depend on parameters. Later on, we have presented the Wilson-Cowan model and its mathematical formulation. The model describes, by means of a system of two ordinary differential equations, the temporal evolution of the mean activity in two neuronal populations of a network, one of them being excitatory and the other, inhibitory. The equations include constants that depend on intrinsic properties of the network and two real parameters that represent the external stimuli received by the network. We have applied some of the learnt theoretical results to the analysis of the model and its dynamical regimes. The results show that, for some chosen values in the constant parameters of the model, the system exhibits rich dynamics, with possible state changes between oscillatory and stationary regimes when the external stimuli vary in certain regions in the parameter space. These phenomena may represent basic mechanisms underlying more complex processes as sleep oscillatory rhythms or the establishment of memories.

# 1 Introducció

Tradicionalment, les matemàtiques i la biologia han avançat per camins independents. Malgrat que l'aplicació de les matemàtiques en la formulació i el desenvolupament de models de la natura és freqüent en l'àmbit de les ciències físiques, la biologia clàssica s'ha mantingut apartada d'aquestes aproximacions. No obstant això, els problemes dels quals s'ocupa la biologia, de naturalesa extremadament diversa i complexa, són fruit de les mateixes lleis que regeixen els fenòmens dels quals tracten la física i la química, per tant han de poder ser abordats també des d'una perspectiva matemàtica. És justament la gran complexitat dels problemes biològics el que fa més necessària que en qualsevol altre àmbit la incorporació de recursos provinents d'altres ciències, que permetin entendre els fenòmens vius no només com a conjunts de peces més o menys definides, sinó com a veritables entramats on les relacions entre els diferents elements es poden expressar de manera precisa i quantitativa. Els models matemàtics, si es formulen de manera adequada, permeten predir i, sobretot, comprendre els mecanismes subjacents als fenòmens naturals. Com que molts dels models es formulen mitjançant equacions diferencials, la teoria de sistemes dinàmics proporciona eines molt poderoses en l'estudi d'aquests problemes.

L'estudi de les xarxes neuronals, que és el punt de partida en la comprensió de com operen els circuits nerviosos per donar lloc a les sensacions, la memòria o fins i tot la consciència, és un exemple evident de la necessitat de trobar camins d'encontre entre les matemàtiques i la biologia. Tot i els esforços que ens els darrers temps els científics han fet per descobrir com treballa el cervell, encara som molt lluny d'entendre com els entramats de neurones, a partir de les seves relacions químiques i espacials, poden computar informació i emetre respostes de manera coherent. Sembla clar que la recerca en aquest àmbit requereix partir d'un punt de vista ampli, en el qual es tinguin en compte no només les característiques locals i individuals de cadascun dels elements sinó també propietats a més gran escala. Aquestes tasques entren dins el domini dels sistemes complexos, i les matemàtiques hi juguen un paper determinant.

La primera dificultat que sorgeix a l'hora de definir un model per a l'estudi d'un sistema neuronal rau en la tria de les variables que hi han d'intervenir. Com en la majoria dels processos vius, les possibles variables són tantes que és imprescindible decidir quines juguen un paper més important en el problema d'estudi. En el cas de les xarxes neuronals, les possibilitats s'estenen, per exemple, des de la configuració molecular de totes i cadascuna de les terminals sinàptiques fins a les condicions ambientals –temperatura, nivell d'oxigen, etc.– en què estiguin immerses. Una altra qüestió essencial és determinar quines característiques del sistema són informatives pel problema tractat, és a dir, quines són les propietats el coneixement de les quals aporta informació sobre els mecanismes que hi són subjacents. Sembla clar que les xarxes neuronals transmeten informació a través de l'emissió de potencials d'acció, però no és evident en quins aspectes de la seva dinàmica està codificada aquesta informació. La informació podria dependre, per exemple, dels instants concrets en què cadascuna de les neurones dispara un potencial d'acció o simplement de propietats estadístiques en la seqüència d'emissió d'aquests potencials d'acció.

Dos són els objectius principals d'aquest treball. El primer va sorgir arran de l'interès per l'estudi de les xarxes neuronals des d'una perspectiva teòrica i sistemàtica. El model de Wilson i Cowan és un bon punt de partida, tant pel seu caràcter precursor en el decurs històric de la neurociència com per la seva relativa senzillesa i, a la vegada, pel fet que ha estat la base de múltiples treballs posteriors. El primer objectiu és, doncs, la comprensió, deducció i anàlisi del model de Wilson i Cowan. El segon objectiu està motivat pel primer però té, també, entitat pròpia. Es tracta de l'ampliació dels coneixements en el context dels sistemes dinàmics continus i la teoria de bifurcacions. Aquesta recerca teòrica no només ha de servir per adquirir eines que facilitin l'anàlisi dels models neuronals, sinó que resulta interessant en ella mateixa. Un dels aspectes fascinants de la recerca a cavall entre dues disciplines és el fet que problemes de la primera generin preguntes en el context de la segona i viceversa.

Aquesta memòria és un resum de l'exploració que, al llarg dels últims mesos, he fet en aquests dos àmbits. He intentat que el text sigui el més autoconsistent possible, en el sentit que pràcticament no sigui necessari consultar fonts addicionals per seguir la lectura. D'aquesta manera, el treball està format per tres parts principals. La primera és un resum d'alguns dels aspectes bàsics de la teoria de sistemes dinàmics sobre els quals es fonamenten els conceptes posteriors. La segona és una introducció a la teoria de bifurcacions, i segueix l'estructura i la notació del llibre "Elements of Applied Bifurcation Theory", de Y. A. Kuznetsov [4]. La tercera i última part està dedicada a la descripció, formulació i anàlisi del model de Wilson i Cowan. Malgrat que no es tracta ni de bon tros d'una feina acabada, espero que pugui ser un punt de partida per a futures exploracions.

## 2 Sistemes dinàmics continus

### Preliminars

La majoria dels models deterministes es formulen matemàticament a través del concepte de *sistema dinàmic*. A grans trets, un sistema dinàmic està constituït per un conjunt de variables, definides en un cert *espai de fases*, que evolucionen amb el temps segons una certa llei d'evolució. Les variables representen les magnituds l'evolució de les quals defineix el model, mentre que l'espai de fases és el conjunt de possibles estats de les variables del sistema. La llei d'evolució estableix les regles que defineixen com aquestes magnituds canvien al llarg del temps dins l'espai de fases.

Generalment, en la formulació d'un model no s'estableix directament quina és la llei evolutiva, sinó que es té informació sobre com canvien les variables en cada instant de temps. Aquesta és la raó per la qual els sistemes dinàmics es descriuen sovint a través de relacions en què intervenen les derivades de les corresponents funcions d'evolució. Malauradament, excepte en alguns casos especialment senzills, la majoria de les vegades no és possible resoldre aquestes equacions de manera explícita. En aquests casos, l'anàlisi dels models s'ha de fer des d'un punt de vista qualitatiu. La teoria de sistemes dinàmics té com a finalitat l'estudi d'aquests sistemes i, com veurem, és una eina molt útil per conèixer de manera general les propietats més importants que defineixen els models i la seva evolució.

Aquest capítol és un resum d'alguns dels resultats més rellevants en teoria de sistemes dinàmics, la majoria dels quals farem servir més endavant quan analitzem les equacions de Wilson i Cowan. Començarem amb algunes definicions preliminars de les nocions que acabem d'esmentar.

### Espai de fases

L'espai de fases d'un sistema dinàmic és el conjunt de possibles estats de les variables del sistema. Aquí considerarem sistemes formats per un conjunt finit d' $n$  variables representades en el model com a nombres reals. Així, l'espai de fases d'un sistema dinàmic d' $n$  variables serà un subconjunt de punts  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

### Conjunt temporal

L'evolució d'un sistema implica el canvi de les seves variables al llarg del temps. El conjunt temporal d'un sistema és la col·lecció d'instantos  $T \subset \mathbb{R}$  en què està definit. Per conveni, considerem sempre conjunts  $T$  que continguin el 0, o instant inicial. Quan  $T$  sigui un conjunt numerable –per exemple, el conjunt de nombres enters– direm que el sistema dinàmic és *discret*. En cas contrari, direm que és *continu*.

## Procés evolutiu

El canvi al llarg del temps de les variables d'un sistema ve determinat per una *lleï evolutiva*. Aquí treballarem amb sistemes *autònoms*, l'estat dels quals depèn únicament de l'estat inicial i del lapse de temps transcorregut des d'aleshores. Per conveni, considerem com a condicions inicials els possibles estats del sistema en l'instant  $t = 0$ . Donat un conjunt temporal  $T$  i un espai de fases  $X$ , un *procés evolutiu* és una aplicació

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset T \times X &\rightarrow X \\ (t, x) &\mapsto \varphi(t, x) = \varphi_t(x) \end{aligned}$$

que satisfà

1.  $\varphi_0 = Id_X$ ,
2.  $\forall x_0 \in X, \varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t \circ \varphi_s(x_0)$ , sempre que els dos costats d'aquesta igualtat estiguin definits.

$\varphi_t(x)$  defineix l'estat del sistema en l'instant  $t$  donada una condició inicial  $x \in X$  (sempre que estigui definit). La primera condició significa que a temps 0 el sistema encara no ha canviat. La segona indica que l'estat del sistema a temps  $t + s$  partint d'una condició inicial  $x$  es pot calcular també determinant l'estat del sistema a temps  $s$  partint de  $x$  i després calculant el seu estat a temps  $t$  partint de  $\varphi_s(x)$ . En els sistemes dinàmics continus, anomenem *flux* a l'aplicació  $\varphi$ .

**Definició 1.** Un sistema dinàmic és una parella  $\{X, \varphi\}$ , on  $X$  és un espai de fases,

$$\varphi : D \subset T \times X \rightarrow X$$

és un procés evolutiu i  $T \subset \mathbb{R}$  és un conjunt temporal.

## Òrbites i retrat de fase

**Definició 2.** Sigui  $x_0$  un punt de l'espai de fases  $X$ . L'*òrbita* (o *trajectòria*) de  $x_0$  és el subconjunt de  $X$

$$\gamma(x_0) = \{x \in X : \exists t \in T \text{ tal que } \varphi_t(x_0) = x\}.$$

Anàlogament, definim la *semiòrbita positiva* i la *semiòrbita negativa* de  $x$  com els subconjunts de  $X$

$$\gamma^+(x_0) = \{x \in X : \exists t \in T, t \geq 0 \text{ tal que } \varphi_t(x_0) = x\}, \quad \gamma^-(x_0) = \{x \in X : \exists t \in T, t \leq 0 \text{ tal que } \varphi_t(x_0) = x\},$$

respectivament.

En els sistemes dinàmics continus definits per fluxos continus en el temps, les òrbites són corbes en l'espai de fases parametritzades per  $t$ . En el cas de sistemes discrets, les òrbites són successions de punts.

**Definició 3.** El retrat de fase d'un sistema dinàmic és la partició de l'espai de fases en òrbites.



## Sistemes dinàmics continus i equacions diferencials

Aquí treballarem fonamentalment amb sistemes dinàmics continus amb fluxos diferenciables. La manera usual de definir un sistema d'aquesta mena és a través d'una equació diferencial autònoma que indica el valor de la derivada temporal del flux en cada punt de l'espai de fases. La definició de sistema dinàmic a la qual ens referirem usualment és la següent.

**Definició 4.** Un sistema dinàmic continu és un sistema dinàmic  $\{U, \varphi\}$  definit per una equació diferencial autònoma

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = F(\varphi_t(x)), \quad (1)$$

on  $U$  és un obert de  $\mathbb{R}^n$  i  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  és un camp vectorial de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ .

En aquest cas es diu que  $\{U, \varphi\}$  és el sistema *induit*, *generat* o *definit* per  $F$ .

D'ara en endavant, representarem les trajectòries a través de les seves coordenades  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . En aquest context, qualsevol trajectòria amb condició inicial  $x_0$  serà solució del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

on  $x = x(t)$  i  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Fent un abús de notació, de vegades anomenarem sistema dinàmic a  $\dot{x} = F(x)$ .

### Existència i unicitat de solucions

Arribats a aquest punt, és natural preguntar-se sota quines condicions podem assegurar l'existència de solucions del problema anterior. Com veurem més endavant, un dels resultats fonamentals de la teoria d'equacions diferencials n'assegura l'existència i unicitat de solucions quan  $F$  és de classe  $C^1$ .

**Teorema 1. (Existència i unicitat local de solucions)** Considerem el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (2)$$

on  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  és un camp de classe  $C^1$ ,  $U$  és un obert de  $\mathbb{R}^n$  i  $x_0 \in U$ . Aleshores existeixen un interval  $I \subset \mathbb{R}$  que conté el 0 i

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de classe  $C^1$  tals que

(i)  $x$  és solució de (2),

(ii) per a tota altra solució de (2)  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es té  $x(t) = y(t) \forall t \in I \cap J$ .

**Definició 5.** Diem que  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  és solució maximal de (2) si per a tota altra solució  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es té  $J \subset I$ . Denotarem per  $I_{x_0}$  l'interval de definició de la solució maximal associada a la condició inicial  $x_0$ .

**Teorema 2. (Existència i unicitat de solucions maximals)** Siguin  $U$  un obert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in U$  i  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Llavors existeix una única solució maximal de (2), definida en un interval obert  $I \subset \mathbb{R}$ .

Finalment, el teorema següent assegura l'existència d'un flux per al sistema dinàmic  $\dot{x} = F(x)$ .

**Teorema 3.** Donada l'equació diferencial

$$\dot{x} = F(x),$$

on  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  és de classe  $C^1$  i  $U$  és un obert de  $\mathbb{R}^n$ , definim  $D = \{(t, x_0) \mid x_0 \in U, t \in I_{x_0}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  i

$$\begin{aligned} \varphi : D &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) &\mapsto \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) \end{aligned} \quad ,$$

on, per a tot  $x_0 \in U$ ,  $\varphi(\cdot, x_0) : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  és la solució maximal de (2) amb condició inicial  $x_0$ . Aleshores

(i)  $D$  és obert,

(ii)  $\varphi$  és contínua, de classe  $C^1$  respecte  $t$  i és un flux del sistema dinàmic induït per  $\dot{x} = F(x)$ .

Més endavant estudiarem no sistemes dinàmics particulars sinó famílies de sistemes dinàmics  $\{F_\lambda\}_\lambda$  parametritzats per  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ . En aquest sentit, considerarem camps de classe  $C^r$

$$\begin{aligned} F : \hat{U} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \lambda) &\mapsto F(x, \lambda) = F_\lambda(x) \end{aligned}$$

i fluxos

$$\begin{aligned} \varphi : \hat{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0, \lambda) &\mapsto \varphi(t, x_0, \lambda) = \varphi_t^\lambda(x_0) \end{aligned} \quad .$$

Tal i com afirma el teorema següent, la regularitat de  $F$  és "heretada" pel flux  $\varphi$ .

**Teorema 4.** Siguin  $\hat{U}$  un obert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  i  $F : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$ . Llavors el flux  $\varphi$  associat a la família de sistemes dinàmics corresponent és de classe  $C^r$  respecte  $(t, x_0, \lambda)$ .

Per acabar aquesta secció, enunciarem un teorema que ens donarà una condició suficient per a l'existència de solucions maximals definides per a tot  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 5. (Aproximació a la frontera)** Sigui  $U$  un obert de  $\mathbb{R}^n$  i  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camp de classe  $C^1$ . Sigui  $x : I_{x_0} = (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solució maximal de  $\dot{x} = F(x)$  amb condició inicial  $x_0$ . Aleshores, per a tot compacte  $K \subset \mathbb{R} \times U$ , existeix  $t_K \in I_{x_0}$  tal que

$$(t, x(t)) \notin K \quad \forall t \in (t_K, t_+).$$

Anàlogament, existeix  $\tilde{t}_K \in I_{x_0}$  tal que

$$(t, x(t)) \notin K \quad \forall t \in (t_-, \tilde{t}_K).$$

Una conseqüència rellevant d'aquest teorema és la següent. Sigui  $x(t)$ ,  $t \in I_{x_0} = (t_-, t_+)$ , l'òrbita d'un punt  $x_0$ . Suposem que la semiòrbita positiva de  $x_0$  està continguda en un compacte  $K_n \subset U$ . Llavors, per a tot compacte  $K_1 \subset \mathbb{R}$ ,  $K = K_1 \times K_n$  és un compacte en  $\mathbb{R} \times U$ . Pel Teorema 5, existeix  $t_K \in I_{x_0}$  tal que  $(t, x(t)) \notin K \quad \forall t \in (t_K, t_+)$ . Ara bé, si  $t \in (t_K, t_+)$ ,  $t \geq 0$ , llavors  $x(t) \in K_n$  per hipòtesi. Per tant, necessàriament ha de passar que  $t \notin K_1 \quad \forall t \in (t_K, t_+) \cap [0, +\infty)$ . Com que  $K_1$  és un compacte arbitrari en  $\mathbb{R}$ , deduïm que  $t_+ = +\infty$ .

Anàlogament, quan la semiòrbita negativa de  $x_0$  està acotada tenim que  $t_- = -\infty$ . Finalment, si tota l'òrbita de  $x_0$  està continguda en un compacte, l'interval de definició  $I_{x_0}$  és tota la recta real.

## Conjunts invariants i estabilitat

Les òrbites d'un sistema poden ser molt variades en funció de la condició inicial  $x_0$  que considerem. Dos tipus especialment rellevants d'òrbites són les formades per un sol element i els cicles o òrbites periòdiques.

**Definició 6.** Un punt  $x_0 \in X$  s'anomena *punt d'equilibri* o *punt fix* si la seva òrbita està formada per un únic punt, és a dir, si  $\varphi_t(x_0) = x_0$  per a tot  $t$  en què  $\varphi_t(x_0)$  estigui definit.

**Proposició 1.** Els punts fixos d'un sistema dinàmic donat per  $\dot{x} = F(x)$  són les solucions de  $F(x) = 0$ .

**Definició 7.** Una òrbita  $\gamma(x_0)$  s'anomena *periòdica* (o *cicle*) si existeix  $t_0 > 0$  tal que

$$\varphi_t(x) = \varphi_{t+t_0}(x) \quad \forall x \in \gamma(x_0), \quad \forall t \text{ en què els dos costats de la igualtat estiguin definits.}$$

Tant els punts fixos com les òrbites periòdiques són elements rellevants a l'hora de definir el comportament qualitatiu d'un sistema dinàmic. Sovint també ens interessarà saber si existeixen subconjunts de l'espai de fases amb la propietat que qualsevol òrbita amb condició inicial en el conjunt hi està continguda. Aquests conjunts s'anomenen *invariants*.

**Definició 8.** Un conjunt  $S \subset U$  s'anomena *positivament invariant* pel sistema dinàmic  $\{U, \varphi\}$  si per a qualsevol  $x \in S$  es té que  $\varphi_t(x) \in S$  per a tot  $t \geq 0$  pel qual  $\varphi_t(x)$  estigui definit. Anàlogament,  $S$  s'anomena *negativament invariant* si per a qualsevol  $x \in S$  es té que  $\varphi_t(x) \in S$  per a tot  $t \leq 0$  pel qual  $\varphi_t(x)$  estigui definit. Es diu que  $S$  és *invariant* si és positiva i negativament invariant.

Observem que els punts fixos i les òrbites periòdiques són casos particulars de conjunts invariants. No obstant, molts sistemes dinàmics presenten conjunts invariants molt més complexos. Els conjunts invariants són objectes rellevants perquè sovint “atrauen” o “repel·len” les òrbites de punts que hi són propers. Conèixer el caràcter atractor o repulsor d'un conjunt serà molt útil a l'hora d'estudiar la dinàmica d'un sistema.

A continuació introduïm nocions d'atracció i d'estabilitat a través de la definició següent.

**Definició 9.** Sigui  $S \subset U$  un conjunt invariant.

- Diem que  $S$  és *estable* si per a tot entorn  $U_0 \supset S$  existeix un altre entorn  $V_0 \supseteq S$  tal que per a qualsevol  $x \in V_0$  i qualsevol  $t \geq 0$ ,  $\varphi_t(x)$  està definit i  $\varphi_t(x) \in U_0$ .
- Diem que  $S$  és *atractor* si existeix un entorn  $U_0 \supseteq S$  tal que per a qualsevol  $x \in U_0$  i qualsevol  $t \geq 0$ ,  $\varphi_t(x)$  està definit i  $\varphi_t(x) \rightarrow S$  quan  $t \rightarrow +\infty$ . Direm que  $S$  és *repulsor* si existeix un entorn  $U_0 \supseteq S$  tal que per a qualsevol  $x \in U_0$  i qualsevol  $t \leq 0$ ,  $\varphi_t(x)$  està definit i  $\varphi_t(x) \rightarrow S$  quan  $t \rightarrow -\infty$ .
- Diem que  $S$  és *asimptòticament estable* si és tant estable com atractor, i *asimptòticament inestable* si és asimptòticament estable pel sistema que s'obté en canviar  $t$  per  $-t$ .

Les dues definicions anteriors tenen a veure amb propietats locals del conjunt  $S$ . L'estabilitat fa referència al fet que les semiòrbites positives de punts propers a  $S$  mai abandonen un entorn de  $S$  (però això no necessàriament implica que tendixin cap a  $S$ ). D'altra banda, la condició d'atracció fa referència al fet que semiòrbites positives amb condicions inicials properes a  $S$  tendeixen asimptòticament cap a  $S$ , sense que això signifiqui que no puguin abandonar un entorn de  $S$ . Per tant, les dues definicions són totalment independents: podem trobar conjunts estables que no siguin atractors i a la inversa.

Un altre concepte rellevant en aquest context és el de conjunt  $\alpha$  i  $\omega$ -límit.

**Definició 10.** Sigui  $\dot{x} = F(x)$  un sistema dinàmic per un camp de classe  $C^1$

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sigui  $x_0 \in U$  i  $I_{x_0} = (t_-, t_+)$  l'interval de definició maximal de la trajectòria associada.

- Si  $t_+ = +\infty$ , definim el conjunt  $\omega$ -límit de la semiòrbita positiva  $\gamma^+(x_0)$  com

$$\omega(x_0) = \{y \in U : \exists t_m \nearrow +\infty \text{ tal que } \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{t_m}(x_0) = y\}.$$

- Si  $t_- = -\infty$ , definim el conjunt  $\alpha$ -límit de la semiòrbita negativa  $\gamma^-(x_0)$  com

$$\alpha(x_0) = \{y \in U : \exists t_m \searrow -\infty \text{ tal que } \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{t_m}(x_0) = y\}.$$

**Proposició 2. (Propietats dels conjunts  $\alpha$  i  $\omega$ -límit)** Sigui  $\dot{x} = F(x)$  un sistema dinàmic per un camp de classe  $C^1$

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sigui  $x_0 \in U$  i  $I_{x_0} = (t_-, t_+)$  l'interval de definició maximal de la trajectòria associada.

- Si  $\gamma^+(x_0)$  està contingut en un compacte de  $U$ , aleshores  $t_+ = +\infty$  i  $\omega(x_0)$  és un conjunt compacte, no buit, connex i invariant per  $F$ .
- Si  $\gamma^-(x_0)$  està contingut en un compacte de  $U$ , aleshores  $t_- = -\infty$  i  $\alpha(x_0)$  és un conjunt compacte, no buit, connex i invariant per  $F$ .

Finalment, els resultats següents donen propietats molt importants dels sistemes dinàmics al pla.

**Proposició 3.** Sigui  $\dot{x} = F(x)$  un sistema dinàmic al pla definit per un camp de classe  $C^1$

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Si  $\gamma$  és una òrbita periòdica continguda en  $U$ , aleshores la regió del pla interior a la corba  $\gamma$  conté almenys un punt d'equilibri.

**Teorema 6. (Poincaré-Bendixson)** Sigui  $\dot{x} = F(x)$  un sistema dinàmic al pla definit per un camp de classe  $C^1$

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Sigui  $x_0 \in U$  tal que  $\gamma_+(x_0)$  està contingut en un compacte de  $U$ . Suposem, a més, que  $F$  té un nombre finit de punts fixos en  $\omega(x_0)$ . Aleshores  $\omega(x_0)$  és un punt fix, una òrbita periòdica o bé una unió de punts fixos i connexions orbitals entre ells.

## Sistemes lineals

**Definició 11.** Un sistema lineal és un sistema dinàmic definit per

$$\dot{x} = Ax, \quad (3)$$

on  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $A$  és una matriu real  $n \times n$ .

Els punts fixos d'un sistema lineal són les solucions de  $Ax = 0$ . Per tant, tot sistema lineal té un punt fix a l'origen. D'altra banda, l'origen és l'únic punt fix del sistema si, i només si,  $\det A \neq 0$ .

**Teorema 7.** Sigui  $\dot{x} = Ax$  un sistema lineal en  $\mathbb{R}^n$ . Llavors el seu flux està definit per a tot  $t \in \mathbb{R}$  i ve donat per

$$\varphi_t(x) = e^{At}x,$$

on  $e^{At}$  és la matriu  $n \times n$  definida per  $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k$ .

La matriu  $e^{At}$  s'anomena *exponencial* de  $At$ . Les matrius exponencials tenen una sèrie de propietats que en faciliten el maneig i es poden calcular a partir dels valors propis de les matrius de les quals provenen. No és l'objectiu d'aquest treball estendre'ns en l'anàlisi dels sistemes dinàmics lineals. Ens limitarem a enunciar els resultats més destacats perquè ens seran útils més endavant.

**Definició 12.** Sigui  $A$  una matriu real  $n \times n$  i  $\lambda$  un valor propi de  $A$  (real o complex) de multiplicitat  $m \leq n$ . Aleshores, per a  $k = 1, \dots, m$ , qualsevol vector  $v$  (real o complex) que sigui solució de

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

s'anomena *vector propi generalitzat* de  $A$  de valor propi  $\lambda$ .

**Proposició 4.** Sigui  $A$  una matriu real  $n \times n$  amb valors propis reals  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (repetits segons la seva multiplicitat). Llavors existeix una base de  $\mathbb{R}^n$  formada per vectors propis generalitzats de  $A$ .

**Proposició 5.** Sigui  $A$  una matriu real  $2n \times 2n$  amb valors propis complexos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  i  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Llavors existeixen vectors propis complexos generalitzats de  $A$   $w_j = u_j + iv_j$  i  $\bar{w}_j = u_j - iv_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tals que  $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$  és una base de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Corol·lari 1.** Sigui  $A$  una matriu real  $n \times n$  amb  $2k$  valors propis complexos i  $n - 2k$  valors propis reals (comptant multiplicitats). Llavors existeixen vectors propis complexos generalitzats  $w_j = u_j + iv_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , i vectors propis reals generalitzats  $w_j = u_j$ ,  $j = k + 1, \dots, n - k$ , tals que

$$\{u_1, v_1, \dots, u_k, v_k, u_{k+1}, \dots, u_{n-k}\}$$

és una base de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definició 13.** En el context del Corol·lari 1, siguin  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n-k}$  els valors propis associats als vectors propis generalitzats  $\{w_j\}_{j=1}^{n-k}$ . Anomenem subespais *estable*, *central* i *inestable* del sistema dinàmic  $\dot{x} = Ax$  a

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{u_j, v_j \mid \text{Re}(\lambda_j) < 0\}, \\ E^c &= \text{span}\{u_j, v_j \mid \text{Re}(\lambda_j) = 0\}, \\ E^u &= \text{span}\{u_j, v_j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0\}, \end{aligned}$$

respectivament, on  $\text{Re}(\lambda_j)$  és la part real del valor propi  $\lambda_j$  i  $\text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$  denota el subespai vectorial generat per  $u_1, \dots, u_k$ .

**Proposició 6.** Sigui  $A$  una matriu real  $n \times n$  i considerem el sistema lineal definit per (3). Llavors  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  i els subespais  $E^s$ ,  $E^c$  i  $E^u$  són invariants.

Ara ja estem en condicions d'enunciar un dels teoremes més rellevants en el context dels sistemes dinàmics lineals.

**Teorema 8.** Considerem el sistema lineal definit per (3). Són equivalents:

- (a) Per a tot  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At}x_0 = 0$  i, per a tot  $x_0 \neq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{At}x_0| = \infty$ .
- (b) Tots els valors propis de  $A$  tenen part real negativa.

Observem que la condició (a) indica que l'origen és un punt fix (globalment) atractor. Tenim un resultat anàleg en el cas en què l'origen és repulsor:

**Teorema 9.** Considerem el sistema lineal definit per (3). Són equivalents:

- (a) Per a tot  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At}x_0 = 0$  i, per a tot  $x_0 \neq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{At}x_0| = \infty$ .
- (b) Tots els valors propis de  $A$  tenen part real positiva.

**Corol·lari 2.** En el context anterior, si  $x_0 \in E^s$ , llavors  $e^{At}x_0 \in E^s$  per a tot  $t \in \mathbb{R}$  i

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At}x_0 = 0.$$

Si  $x_0 \in E^u$ , llavors  $e^{At}x_0 \in E^u$  per a tot  $t \in \mathbb{R}$  i

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At}x_0 = 0.$$

Per tant, les solucions de (3) amb condició inicial al subespai estable romanen sempre al subespai estable i s'aproximen a l'origen a mesura  $t \rightarrow +\infty$ , mentre que les solucions amb condició inicial al subespai inestable també hi romanen però s'apropen a l'origen quan  $t \rightarrow -\infty$ .

## Sistemes lineals al pla

En aquesta secció particularitzarem alguns dels resultats anteriors al cas de sistemes lineals del pla, és a dir, definits per equacions del tipus  $\dot{x} = Ax$  on  $x \in \mathbb{R}^2$  i  $A$  és una matriu real  $2 \times 2$ .

Considerem el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Tal i com hem vist a la secció anterior, existeix una base de vectors propis generalitzats de  $A$ . Fent el canvi de variables adient, podem suposar que el sistema està expressat en una base de vectors propis generalitzats. Farem l'anàlisi distingint casos, en funció de com siguin els valors propis de  $A$ , que anomenarem  $\lambda$  i  $\mu$ . Els retrats de fase esquematitzats es mostren a la Figura 1.

1. Suposem que  $A$  diagonalitza als reals. Llavors les trajectòries estan definides per

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} x_0.$$

Les rectes  $\langle(1, 0)\rangle$  i  $\langle(0, 1)\rangle$  són de vectors propis, per tant, invariants. Aquestes rectes divideixen el pla en quatre quadrants també invariants (ja que trajectòries diferents no poden creuar-se). Podem suposar que  $\lambda \leq \mu$ .

- (a) Si  $\lambda < 0 < \mu$ , llavors  $E^s = \langle(1, 0)\rangle$ ,  $E^c = \{0\}$  i  $E^u = \langle(0, 1)\rangle$ . La dinàmica restringida a  $E^s$  és atractora i la restringida a  $E^u$  és repulsora. Les òrbites que passen per punts que no pertanyen ni a  $E^s$  ni a  $E^u$  s'acosten al 0 per una direcció i se n'allunyen per l'altra. Es diu que l'origen és un *punt de sella*.
- (b) Si  $\lambda \leq \mu < 0$ , tenim que  $E^s = \mathbb{R}^2$  i  $E^c = E^u = \{0\}$ . Qualsevol trajectòria tendeix cap al 0, que és atractor. Es diu que l'origen és un *node atractor*.
- (c) Si  $0 < \lambda \leq \mu$ , aleshores  $E^s = E^c = \{0\}$  i  $E^u = \mathbb{R}^2$ . Totes les trajectòries (excepte, òbviament, la del propi origen) "escapen" d'un entorn del 0, que s'anomena *node repulsor*.
- (d) Si  $\lambda = \mu = 0$ , llavors  $E^s = \{0\} = E^u$ ,  $E^c = \mathbb{R}^2$  i tots els punts són fixos. L'origen és estable però no atractor.
- (e) Si  $\lambda < 0$  i  $\mu = 0$ , aleshores  $E^s = \langle(0, 1)\rangle$ ,  $E^c = \langle(1, 0)\rangle$  i  $E^u = \{0\}$ . En aquest cas, totes les rectes horitzontals són invariants i en cadascuna d'elles la dinàmica és atractora cap al punt de tall amb l'eix d'ordenades, que és de punts fixos. L'origen és un punt estable però no atractor. El cas  $\lambda = 0$  i  $\mu > 0$  és anàleg però amb dinàmica repulsora sobre les rectes verticals.

2. Suposem que  $A$  diagonalitza sobre  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  i que els valors propis són  $\lambda = a + bi$ ,  $\mu = a - bi$ ,  $b \neq 0$ . En



aquest cas les trajectòries venen donades per

$$x(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} x_0,$$

és a dir, totes les òrbites giren al voltant de l'origen a velocitat angular  $b$  (per tant, giren en sentit positiu si  $b > 0$  i negatiu en cas contrari) i el seu radi canvia d'acord a  $r(t) = e^{at}r_0$ ,  $r_0 = |x_0|$ . Aquesta vegada no hi ha cap recta invariant.

- (a) Si  $a < 0$ ,  $E^s = \mathbb{R}^2$  i  $E^c = E^u = \{0\}$ . L'origen és atractor i les òrbites s'hi acosten espiralant. Es diu que l'origen és un *focus atractor*.
- (b) Si  $a > 0$ ,  $E^s = E^c = \{0\}$  i  $E^u = \mathbb{R}^2$ . L'origen és repulsor i les òrbites s'hi allunyen espiralant. Es diu que l'origen és un *focus repulsor*.
- (c) Si  $a = 0$ ,  $E^s = E^u = \{0\}$ ,  $E^c = \mathbb{R}^2$ . Totes les trajectòries són circumferències de radi  $r_0 = |x_0|$  i l'origen és estable però no atractor. Diem que és un *centre*.

3. Suposem que  $A$  no diagonalitza. Aleshores té dos valors propis reals iguals i és de la forma  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Les trajectòries venen donades per

$$x(t) = e^{At}x_0 = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0.$$

Ara la recta  $\langle(1,0)\rangle$  és invariant i separa el pla de fase en dos semiplans invariants, però  $\langle(0,1)\rangle$  no ho és.

- (a) Si  $\lambda < 0$ ,  $E^s = \mathbb{R}^2$  i  $E^c = E^u = \{0\}$ . En aquest cas, l'origen és atractor. Les trajectòries amb condició inicial al primer o al tercer quadrant hi resten per a valors de  $t \geq 0$ , mentre que totes les que tenen condició inicial al segon o quart quadrant acaben creuant l'eix d'ordenades. L'origen s'anomena també un *node atractor*.
- (b) Si  $\lambda > 0$ ,  $E^s = E^c = \{0\}$  i  $E^u = \mathbb{R}^2$ . El retrat de fase és anàleg al del cas anterior però l'origen és repulsor. També s'anomena *node repulsor*.
- (c) Si  $\lambda = 0$ ,  $E^s = E^u = \{0\}$ ,  $E^c = \mathbb{R}^2$ . Totes les rectes horitzontals són invariants, i l'eix d'abscisses és una recta de punts fixos. La dinàmica restringida a les rectes invariants consisteix en trajectòries que avancen a velocitat constant i igual a la seva component vertical. És a dir, la dinàmica és més ràpida com més gran és la distància a l'eix d'abscisses, i el sentit de les trajectòries és positiu al semiplà superior i negatiu a l'inferior. L'origen no és estable ni atractor.

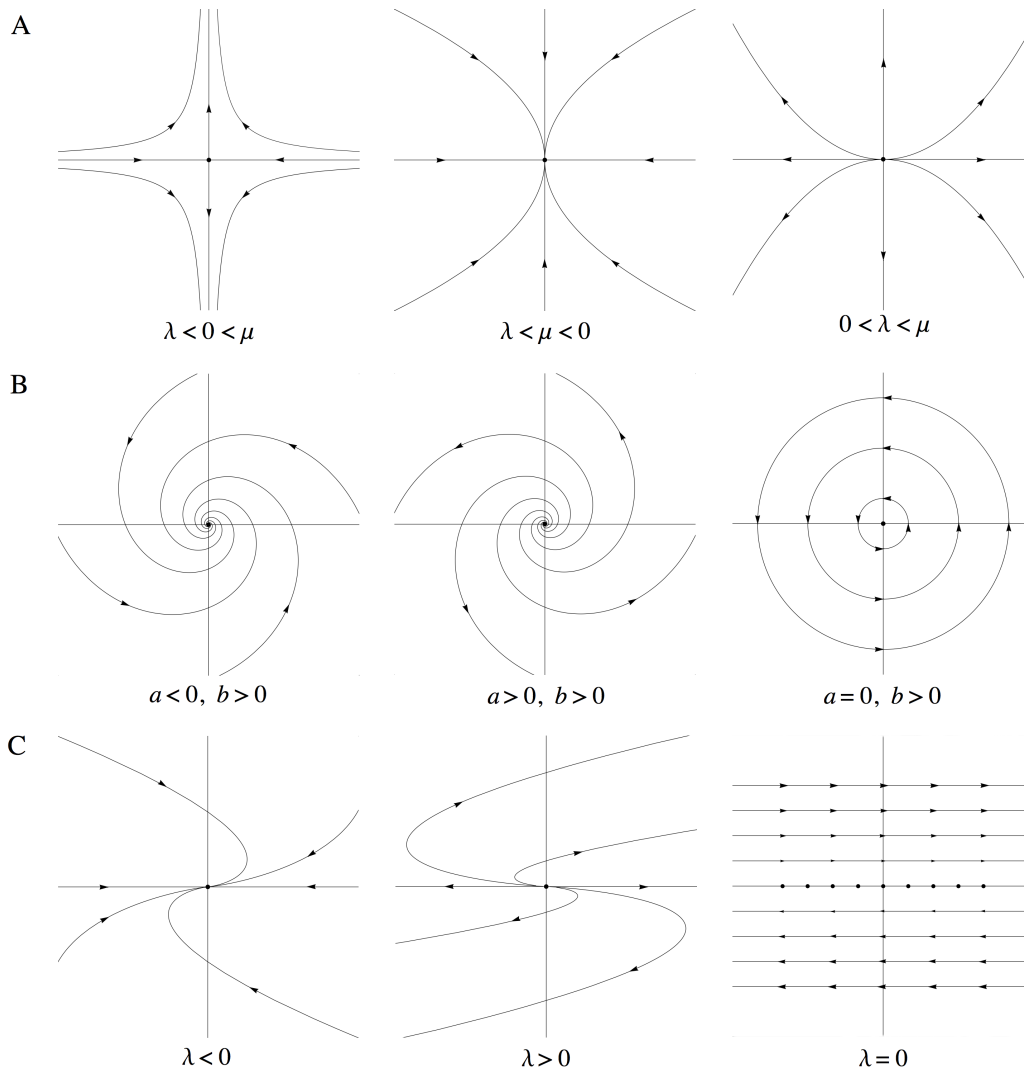


Figura 1: Retrats de fase del sistema lineal al pla  $\dot{x} = Ax$ . A: la matriu  $A$  diagonalitza als reals i té valors propis  $\lambda \leq \mu$ . B: la matriu  $A$  diagonalitza a  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  i té valors propis  $\lambda = a + bi$ ,  $\mu = a - bi$ . C: la matriu  $A$  té un valor propi doble  $\lambda$  i no diagonalitza.

### Equivalència topològica i teorema de Hartman-Grobman

Com ja hem esmentat, l'estudi dels sistemes dinàmics comença amb una anàlisi qualitativa de les seves propietats més generals. Dit de manera poc precisa, entendrem per característiques qualitatives d'un sistema el conjunt de propietats que fan referència als seus punts fixos i conjunts invariants, així com al caràcter atractor o repulsor d'aquests objectes. Per fer més concreta aquesta idea, definirem, en el conjunt de sistemes dinàmics sobre un espai de fases  $X$ , una noció d'equivalència que ens indicarà quan dos sistemes dinàmics són "qualitativament semblants".

**Definició 14.** Siguin  $\{U, \varphi\}$ ,  $\{V, \psi\}$  sistemes dinàmics definits en  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , respectivament. Es diu que són *topològicament equivalents* si existeix un homeomorfisme

$$h : U \rightarrow V$$

que envia òrbites de  $\{U, \varphi\}$  en òrbites de  $\{V, \psi\}$  i preserva el sentit temporal. L'aplicació  $h$  s'anomena una *equivalència topològica*.

Dos sistemes equivalents són “semblants” en el sentit que existeix un homeomorfisme que transforma les òrbites d'un en les de l'altre, conservant l'orientació temporal. Aquesta darrera condició significa que si una trajectòria de  $\{U, \varphi\}$  està dirigida de  $x_0$  a  $x_1$ , llavors la seva imatge està dirigida de  $h(x_0)$  a  $h(x_1)$ . Per tant, en particular, els punts fixos, els conjunts invariants i les propietats d'estabilitat estan en correspondència entre un i altre sistema. Sovint farem servir, però, una noció més feble d'equivalència: l'equivalència topològica *local*.

**Definició 15.** Dos sistemes dinàmics  $\{U, \varphi\}$ ,  $\{V, \psi\}$ , són *localment topològicament equivalents* si existeixen oberts  $U_0 \subset U$ ,  $V_0 \subset V$  i un homeomorfisme

$$h : U_0 \rightarrow V_0$$

que envia òrbites del primer sistema restringit a  $U_0$  en òrbites del segon sistema restringit a  $V_0$  i preserva el sentit temporal.

Observem que la noció d'equivalència topològica fa referència al fet de poder enviar homeomòrficament òrbites d'un sistema en òrbites de l'altre, imposant com a única condició la preservació de l'orientació temporal. Quan puguem definir un homeomorfisme que, a més, preservi la parametrització temporal, direm que els sistemes són topològicament conjugats.

**Definició 16.** Siguin  $\{U, \varphi\}$ ,  $\{V, \psi\}$  sistemes dinàmics definits en  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , respectivament. Es diu que són *topològicament conjugats* si existeix un homeomorfisme

$$h : U \rightarrow V$$

tal que  $h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$  per a tot  $x \in U$  i tot  $t$  en el qual aquestes expressions estiguin definides. L'aplicació  $h$  s'anomena una *conjugació topològica*. Es diu que  $\{U, \varphi\}$  i  $\{V, \psi\}$  són *difeomòrficament conjugats* si  $h$  és un difeomorfisme. En aquest cas,  $h$  és una *conjugació difeomorfa*.

Anàlogament, tenim una noció de conjugació topològica local.

**Definició 17.** Dos sistemes dinàmics  $\{U, \varphi\}$ ,  $\{V, \psi\}$ , són *localment topològicament conjugats* si existeixen oberts  $U_0 \subset U$ ,  $V_0 \subset V$  i un homeomorfisme

$$h : U_0 \rightarrow V_0$$

tal que  $h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$  per a tot  $x \in U_0$  i tot  $t \in T$  on aquestes expressions estiguin definides i tal que  $\varphi_t(x) \in U_0$ . Diem que són *localment difeomòrficament conjugats* si  $h$  és un difeomorfisme.

**Proposició 7.** Siguin  $\{U, \varphi\}$  i  $\{V, \psi\}$  dos sistemes dinàmics definits per camps  $F$  i  $G$ , respectivament. Una aplicació  $h : U_0 \subset U \rightarrow V_0 \subset V$  és una conjugació difeomorfa local entre ells si, i només si,

$$Dh \circ F = G \circ h.$$

En general, quan fem l'anàlisi qualitatiu d'un sistema dinàmic estudiarem el seu comportament local, per exemple prop d'un punt d'equilibri. En aquests casos, l'equivalència topològica local és una noció essencial a l'hora de determinar les propietats de les òrbites prop del punt. Com veurem, la classificació del tipus de dinàmiques que podem trobar al voltant d'un punt d'equilibri  $x_0$  en un sistema induït per un camp  $F$  dependrà fortament dels valors propis de la matriu de la diferencial de  $F$  en  $x_0$ . En primer lloc, l'absència o presència de valors propis amb part real zero dóna lloc a dos tipus de punts d'equilibri: els hiperbòlics i els no hiperbòlics. La condició d'hiperbolicitat té conseqüències directes en el comportament local del sistema prop del punt d'equilibri.

**Definició 18.** Considerem el sistema dinàmic donat per  $\dot{x} = F(x)$ . Un punt fix  $x_0$  s'anomena *hiperbòlic* si tots els valors propis de  $DF(x_0)$  tenen part real no nula. En cas contrari el punt és no hiperbòlic.

Donat un sistema dinàmic  $\dot{x} = F(x)$  amb un punt d'equilibri  $x_0$ , podem considerar el sistema *linealitzat* en  $x_0$  definit per l'equació lineal

$$\dot{y} = DF(x_0)y. \tag{5}$$

Un resultat essencial en la teoria de sistemes dinàmics, el teorema de Hartman-Grobman, assegura que si  $x_0$  és un punt hiperbòlic, el sistema és localment topològicament conjugat a (5) prop de  $x_0$ . Es tracta d'un resultat molt important perquè permet classificar qualsevol sistema dinàmic en un entorn d'un punt d'equilibri hiperbòlic a partir de l'estudi del sistema linealitzat corresponent. En general, els sistemes lineals són més fàcils d'estudiar que els no lineals perquè podem definir-ne les solucions pràcticament de manera explícita.

**Teorema 10. (Hartman-Grobman)** Sigui

$$\dot{x} = F(x) \tag{6}$$

un sistema dinàmic en  $U \subset \mathbb{R}^n$  induït per un camp  $F$  de classe  $C^1$ . Si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  és un punt d'equilibri hiperbòlic de  $F$ , llavors (6) és localment topològicament conjugat, en un entorn de  $x_0$ , al sistema lineal

$$\dot{y} = DF(x_0)y$$

en un entorn de l'origen.

Quan treballem amb sistemes al pla, estendrem les definicions de punt de sella, node i focus que hem vist pels sistemes lineals de dimensió 2 a través de l'analogia que brinda el teorema de Hartman-Grobman. Així, direm que un punt d'equilibri hiperbòlic  $x_0$  del sistema  $\dot{x} = F(x)$  és un *punt de sella* si  $DF(x_0)$  té un valor propi amb part real negativa i un valor propi amb part real positiva. Direm que és un *node atractor* (o *repulsor*) si tots els valors propis de  $DF(x_0)$  són reals i negatius (resp. positius), i que és un *focus atractor* (*repulsor*) si tots els valors propis de  $DF(x_0)$  són complexos no reals i tenen part real negativa (resp. positiva).

**Teorema 11. (Varietats estable i inestable en un punt fix hiperbòlic)** Sigui

$$\dot{x} = F(x)$$

un sistema dinàmic en  $U \subset \mathbb{R}^n$  induït per un camp diferenciable  $F$ . Sigui  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un punt fix hiperbòlic i  $n_s, n_u$  el nombre de valors propis amb part real negativa i positiva de  $DF(x_0)$ , respectivament. Aleshores existeixen una varietat invariant estable local,  $W_{loc}^s$ , i una varietat invariant inestable local,  $W_{loc}^u$ , de dimensions  $n_s$  i  $n_u$ , que són tangents als subespais  $E^s$  i  $E^u$  del corresponent sistema linealitzat, respectivament.

**Teorema de Liouville i aplicacions**

Abans d'entrar en el proper capítol, en el qual explorarem alguns aspectes de la teoria de bifurcacions, donarem dos resultats addicionals que ens seran útils més endavant.

**Teorema 12. (Liouville)** Siguin

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

un camp vectorial diferenciable i  $\varphi$  el flux associat. Donat un obert acotat  $U_0 \subset U$ , definim

$$U_t = \{\varphi_t(x_0) : x_0 \in U_0\}.$$

Llavors,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(U_t) = \int_{U_t} \text{div}(F),$$

on  $\text{Vol}(U_t)$  és el volum de  $U_t$  i  $\text{div}(F)$  és la divergència de  $F$ .

**Corol·lari 3. (Criteri de Bendixson)** En les condicions del teorema anterior, si en una regió simplement connexa de  $U$  la divergència de  $F$  és o bé positiva o bé negativa, el sistema  $\dot{x} = F(x)$  no pot tenir cap òrbita periòdica.

### 3 Introducció a la teoria de bifurcacions

En aquesta secció farem un breu recorregut pels sistemes dinàmics que depenen de paràmetres. Més concretament, estudiarem les condicions sota les quals modificacions en els paràmetres induïxen canvis qualitatius en la dinàmica dels sistemes. Anomenarem *bifurcacions* a aquestes situacions de canvi.

#### Primeres definicions

**Definició 19.** Un sistema dinàmic continu dependent de paràmetres és un sistema donat per

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \tag{7}$$

on  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $\alpha \in A \subset \mathbb{R}^m$ . Es diu que  $A$  és l'espai de paràmetres del sistema.

**Definició 20.** En un sistema dinàmic dependent de paràmetres, anomenem *bifurcació* a l'aparició, en variar els paràmetres, de retrats de fase que no siguin topològicament equivalents entre si. Direm que una bifurcació és *local* si induïx un canvi en la dinàmica qualitativa del sistema en un entorn d'un punt fix o d'una òrbita periòdica.

Malgrat que quasi no les tractarem aquí, els sistemes poden experimentar també bifurcacions *globals*, és a dir, bifurcacions que no afecten a la dinàmica local dels sistemes sinó a altres propietats que no són detectables només a partir d'un anàlisi local. Un concepte molt lligat al de bifurcació és el de diagrama de bifurcació.

**Definició 21.** El *diagrama de bifurcació* d'un sistema dinàmic dependent de paràmetres és l'estratificació de l'espai de paràmetres que induïx l'equivalència topològica, juntament amb els retrats de fase representatius per a cada estrat.

En general, els diagrames de bifurcació estan constituïts per regions en l'espai de paràmetres (per tant, en  $\mathbb{R}^m$ ) en les quals el comportament qualitatiu dels sistemes corresponents és equivalent. Quan la dependència del sistema dinàmic en els paràmetres és prou regular, aquestes regions estan separades per varietats —corbes, superfícies, etc.— en  $\mathbb{R}^m$  que anomenem *fronteres de bifurcació*. En un diagrama de bifurcació, hi ha diverses fronteres de bifurcació associades als diferents tipus de bifurcació que hi estiguin representats.

**Definició 22.** Anomenem *codimensió* d'una bifurcació a la diferència entre la dimensió de l'espai de paràmetres i la dimensió de la corresponent frontera de bifurcació.

## Formes normals

De la mateixa manera que hem definit un concepte d'equivalència entre sistemes dinàmics, ens interessaria disposar també d'una noció d'equivalència local entre sistemes dinàmics dependents de paràmetres. Aquesta eina ens permetrà classificar (localment) els sistemes dependents de paràmetres i estudiar els diferents tipus de bifurcacions que poden arribar a admetre a partir de l'anàlisi de sistemes "prototipus". Anomenarem *formes normals* a aquests models estàndard.

**Definició 23.** Diem que dos sistemes dinàmics dependents de paràmetres

$$\dot{x} = F(x, \alpha) \text{ i } \dot{y} = G(y, \beta),$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\beta \in B \subset \mathbb{R}^m$ , són localment topològicament equivalents prop de  $(x_0, \alpha_0)$  i  $(y_0, \beta_0)$  si

1. Existeixen entorns oberts  $A_0 \ni \alpha_0$ ,  $B_0 \ni \beta_0$  i un homeomorfisme

$$\begin{array}{ccc} p : A_0 \subset \mathbb{R}^m & \rightarrow & B_0 \subset \mathbb{R}^m \\ \alpha & \mapsto & p(\alpha) \end{array}$$

tal que  $p(\alpha_0) = \beta_0$ .

2. Per a cada  $\alpha \in A_0$  existeixen entorns oberts  $U_\alpha, V_\alpha$  i un homeomorfisme local

$$\begin{array}{ccc} h_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & h_\alpha(x) \end{array}$$

entre els sistemes  $\dot{x} = F(x, \alpha)$  i  $\dot{y} = G(y, p(\alpha))$  que envia òrbites del primer sistema en òrbites del segon i preserva el sentit temporal.

És important remarcar que la varietat de tipus de bifurcacions que pot experimentar un sistema depèn fortament del nombre de paràmetres que inclogui. Aquí només estudiarem algunes de les bifurcacions en sistemes dependents d'un o de dos paràmetres. Per fer-ho, haurem de definir amb precisió la noció de *forma normal*. A grans trets, la forma normal d'una bifurcació local és un sistema dinàmic model que presenta la bifurcació donada i que és "el més senzill possible" dins els sistemes amb aquestes propietats. L'estudi de les formes normals dóna, per tant, una idea qualitativa del comportament local de qualsevol sistema que presenti el mateix tipus de bifurcació. En la pràctica, analitzar les bifurcacions d'un sistema implica conèixer a quina forma normal és equivalent i estudiar després la forma normal model. Generalment, un sistema d'estudi  $\dot{x} = F(x, \alpha)$  és localment equivalent a una determinada forma normal quan satisfà una sèrie de condicions que són específiques del tipus de bifurcació considerat. Per determinar si un sistema experimenta una bifurcació donada serà suficient, doncs, estudiar si es verifiquen aquestes condicions.



**Definició 24.** Considerem un sistema dinàmic dependent de paràmetres del tipus

$$\dot{\xi} = G(\xi, \mu), \quad (8)$$

on  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  i  $G$  és un polinomi en  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Suposem que (8) té una bifurcació local en  $\xi = 0$ ,  $\mu = 0$  i que en aquest punt satisfà  $k$  condicions de bifurcació. Diem que (8) és una *forma normal* de la bifurcació definida per les condicions anteriors si qualsevol altre sistema genèric  $\dot{x} = F(x, \alpha)$  que satisfà les mateixes condicions en  $(x_0, \alpha_0)$  és localment topològicament equivalent a (8) en un entorn de  $(x_0, \alpha_0)$  i de  $(\xi = 0, \mu = 0)$ .

Observem que la definició anterior porta implícita les nocions de *condicions de bifurcació* i *sistema genèric*. Les condicions de bifurcació són propietats específiques de cada tipus de bifurcació (marquen la “identitat” de la bifurcació). Sovint, però, no són condicions suficients, sinó que cal establir condicions addicionals per assegurar que un sistema qualsevol experimenti el tipus de bifurcació considerat. Aquestes condicions addicionals, però, són satisfetes “per la majoria” dels sistemes, en el sentit que els sistemes que no les satisfan són un conjunt de mesura zero dins el conjunt dels sistemes (definint, òbviament, una noció de mesura de manera adequada). En aquest context, direm que un sistema  $\dot{x} = F(x, \alpha)$  és *genèric* si satisfà aquestes condicions addicionals, que en general es classifiquen en condicions de *no degeneració* i en condicions de *transversalitat*. Les bifurcacions locals en un punt d’equilibri es produeixen en aquells valors dels paràmetres que confereixen al sistema un cert grau de “degeneració” (per exemple, en els paràmetres pels quals el punt d’equilibri deixa de ser hiperbòlic). Les condicions addicionals solen ser desigualtats en les derivades de  $F$  que assegurin, d’una banda, que el sistema no sigui “més degenerat del compte” i, d’una altra, que petites variacions en els paràmetres facin retornar el sistema a un estat de no degeneració.

## Estabilitat estructural

Abans de començar a estudiar els diferents tipus de bifurcacions que poden tenir lloc en sistemes d’un i de dos paràmetres, mostrarem que la propietat de punt fix hiperbòlic és estable respecte a petites pertorbacions en els paràmetres. Aquest resultat, senzill però fonamental, assegura que les bifurcacions de punts fixos només poden ocórrer en un entorn de punts no hiperbòlics.

**Proposició 8.** Considerem el sistema

$$\dot{x} = G(x, \varepsilon), \quad (9)$$

on  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Suposem que per a  $\varepsilon = 0$  el sistema té un punt d’equilibri hiperbòlic en  $x_0$ . Aleshores existeixen un entorn obert de 0,  $I \subset \mathbb{R}$ , i una funció diferenciable

$$x^* : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tals que  $x^*(0) = x_0$  i per a tot  $\varepsilon \in I$ , el sistema 9 té un punt d'equilibri hiperbòlic en  $x = x^*(\varepsilon)$ .

*Demostració.* Considerem l'equació dels punts d'equilibri

$$G(x, \varepsilon) = 0.$$

Com que  $G(x_0, 0) = 0$  i  $\det(D_x G(x_0, 0)) \neq 0$  perquè  $x_0$  és un punt d'equilibri hiperbòlic, pel teorema de la funció implícita existeixen un entorn obert de 0,  $I_0 \subset \mathbb{R}$ , i una funció diferenciable

$$x^* : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tals que  $x^*(0) = x_0$  i, per a tot  $\varepsilon \in I_0$ ,  $G(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  ( $x^*(\varepsilon)$  és un punt d'equilibri del sistema (9)). A més, la matriu de la diferencial de  $G$  respecte  $x$  en el punt fix,  $D_x G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)$ , depèn contínuament d' $\varepsilon$ . Per tant, existeix un altre entorn de 0,  $I_1 \subset \mathbb{R}$ , en el qual  $\det(D_x G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)) \neq 0$ . Per acabar és suficient considerar  $I = I_0 \cap I_1$  i la funció  $x^*$  restringida a  $I$ .  $\square$

En la situació de la proposició anterior, els valors propis de  $D_x G(x^*(\varepsilon), \varepsilon)$  depenen també contínuament d' $\varepsilon$ . Per tant, en realitat podem donar un resultat encara més fort: el sistema  $\dot{x} = G(x, 0)$  és localment topològicament equivalent a  $\dot{x} = G(x, \varepsilon)$  per a tot  $\varepsilon$  en un entorn obert  $I \ni 0$ . Sovint ens referim a aquesta propietat afirmant que “qualsevol sistema dinàmic continu és estructuralment estable en un entorn dels seus punts d'equilibri hiperbòlics”. Així, els únics punts d'equilibri que poden donar lloc a bifurcacions locals són els no hiperbòlics.

## Bifurcacions de punts fixos en sistemes dependents d'un paràmetre

En aquesta secció analitzarem el tipus més senzill de bifurcacions de punts d'equilibri que poden aparèixer en sistemes dinàmics continus dependents d'un sol paràmetre: la bifurcació sella-node i la bifurcació d'Andronov-Hopf. En ambdós casos, les definirem en sistemes “model” de dimensió el més baixa possible, i després veurem com els resultats obtinguts es poden traslladar a sistemes de dimensió superior.

Hem vist que els punts hiperbòlics són estructuralment estables davant de pertorbacions i que les bifurcacions de punts d'equilibri només es poden produir en condicions de no hiperbolicitat. Suposem que tenim un sistema dinàmic dependent d'un sol paràmetre

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \tag{10}$$

on  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Una condició necessària per tenir una bifurcació en  $(x_0, \alpha_0)$  és que  $x_0$  sigui no hiperbòlic. A més, el sistema ha de canviar de caràcter en modificar lleugerament el paràmetre al voltant

de  $\alpha_0$ . Suposem que existeix un entorn de  $\alpha_0$ ,  $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ , tal que el sistema (10) té un punt fix per a tot  $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$ , i que aquest punt “continua” el punt fix  $x_0$ . Una condició general per tenir un canvi qualitatiu en pertorbar  $\alpha$  prop de  $\alpha_0$  és que el punt fix sigui hiperbòlic quan  $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$  i desaparegui o bé canviï de caràcter quan  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$ . Una condició necessària perquè el punt desaparegui és que  $x_0$  tingui almenys un valor propi nul (en cas contrari podem aplicar el teorema de la funció implícita i continuar-lo). La segona condició ocorrerà, per exemple, quan la part real d’un parell de valors propis complexos conjugats canviï de signe en pertorbar  $\alpha$  entorn de  $\alpha_0$ . Aquestes dues condicions defineixen els dos tipus principals de bifurcacions en sistemes d’un paràmetre. Observem que, mentre que la primera situació és factible en sistemes de dimensió 1, per la segona condició és necessari que el sistema tingui, almenys, dimensió 2. En les seccions posteriors, encara que no ho especificarem, suposarem que els camps  $F$  són suficientment diferenciables.

## La bifurcació sella-node

### Forma normal de la bifurcació sella-node

Considerem el sistema unidimensional i d’un sol paràmetre

$$\dot{x} = F(x, \alpha) = x^2 + \alpha. \quad (11)$$

Quan  $\alpha = 0$ , el sistema té un únic punt d’equilibri en  $x = 0$ , que és no hiperbòlic perquè  $F_x(0, 0) = 0$ . A més, no és atractor ni repulsor perquè el camp  $F$  és sempre positiu excepte al 0 i les trajectòries amb condició inicial tant “a l’esquerra” com “a la dreta” de l’origen avancen en sentit positiu. Quan  $\alpha < 0$ , hi ha dos punts d’equilibri hiperbòlics,  $x_{\pm} = \pm\sqrt{-\alpha}$ , on  $x_+$  és repulsor i  $x_-$  és atractor atès que  $F_x(x_{\pm}, \alpha) = 2x_{\pm} = \pm 2\sqrt{-\alpha}$ . En canvi, quan  $\alpha > 0$  no hi ha cap punt d’equilibri. El desplaçament de  $\alpha$  des de valors negatius fins a positius fa que els dos punts fixos col·lapsin en un únic punt quan  $\alpha = 0$ , per després desaparèixer. Diem que el sistema pateix una bifurcació *sella-node* en  $\alpha = 0$ .

El diagrama de bifurcació en aquest cas es mostra a la Figura 2. En un entorn de  $x = 0$ ,  $\alpha(x) = -x^2$  defineix una corba que dona el valor del paràmetre pel qual el sistema té un punt d’equilibri en  $x$ .

Ara ens agradaria poder definir la bifurcació sella-node d’una manera més general, és a dir, voldríem donar condicions que assegurin l’existència d’una bifurcació d’aquest tipus en un sistema 1-dimensional depenent d’un paràmetre qualsevol. Dit amb més precisió, busquem condicions que assegurin que un sistema donat sigui localment topològicament equivalent a (11), que representarà la forma normal de la bifurcació sella-node. Aquest resultat és el que ens dona el teorema següent.

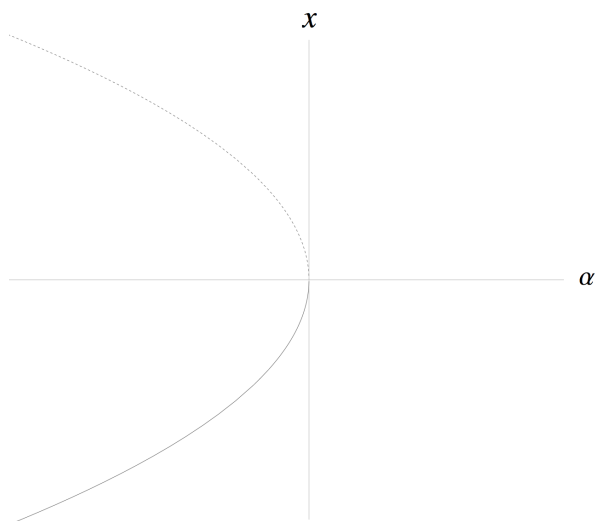


Figura 2: Diagrama de bifurcació del sistema unidimensional  $\dot{x} = x^2 + \alpha$ .

**Teorema 13. (Bifurcació sella-node)** Sigui

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

un sistema unidimensional tal que

1.  $F(x_0, \alpha_0) = 0$ ,
2.  $F_x(x_0, \alpha_0) = 0$ ,
3.  $F_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$ ,
4.  $F_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0$ .

Llavors (12) és localment topològicament equivalent, en un entorn de  $(x_0, \alpha_0)$ , a una de les formes normals següents:

$$\dot{\xi} = \beta \pm \xi^2, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Encara que no quedi explícit, l'obert en les formes normals al voltant del qual es dóna l'equivalència topològica és un entorn de  $(\xi = 0, \beta = 0)$ . Les formes normals sempre es defineixen en un entorn de l'origen, per tant a partir d'ara ja no ho especificarem. Les dues primeres condicions del teorema són les condicions específiques que defineixen la bifurcació sella-node. La tercera és una condició de no-degeneració

que assegura el pas de cap a dos punts d'equilibri en travessar el paràmetre de bifurcació  $\alpha_0$ . La darrera condició s'anomena de transversalitat i garanteix que el sistema “canviï” en modificar el paràmetre.

Demostrem el teorema en dues etapes.

**Proposició 9.** En les mateixes condicions que al Teorema 13, existeix un canvi de coordenades i de paràmetres que transforma (12) en un dels sistemes

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3). \quad (13)$$

*Demostració.* Observem, en primer lloc, que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que  $x_0 = 0$  i  $\alpha_0 = 0$  (és suficient aplicar les translacions  $x \mapsto x - x_0$  i  $\alpha \mapsto \alpha - \alpha_0$ , que donen lloc a un sistema topològicament conjugat a l'original). Escrivim el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de  $F(x, \alpha)$  respecte  $x$  al voltant del 0:

$$F(x, \alpha) = F(0, \alpha) + F_x(0, \alpha)x + \frac{1}{2}F_{xx}(0, \alpha)x^2 + O(x^3). \quad (14)$$

Considerem el canvi de variable  $\xi = x + \delta$ , on  $\delta$  és un paràmetre encara sense determinar. Llavors, substituint en (14) tenim

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = \dot{x} &= F(x, \alpha) = F(0, \alpha) + F_x(0, \alpha)(\xi - \delta) + \frac{1}{2}F_{xx}(0, \alpha)(\xi - \delta)^2 + O((\xi - \delta)^3) = \\ &= \left[ F(0, \alpha) - F_x(0, \alpha)\delta + \frac{1}{2}F_{xx}(0, \alpha)\delta^2 + O(\delta^3) \right] + \\ &+ [F_x(0, \alpha) - F_{xx}(0, \alpha)\delta + O(\delta^2)] \xi + \\ &+ \left[ \frac{1}{2}F_{xx}(0, \alpha) + O(\delta) \right] \xi^2 + O(\xi^3). \end{aligned} \quad (15)$$

Vegem que existeix  $\delta = \delta(\alpha)$  tal que el coeficient de primer grau de l'expressió anterior s'anul·la per a tot  $\alpha$ . Aquest coeficient es pot expressar com

$$G(\alpha, \delta) = F_x(0, \alpha) - F_{xx}(0, \alpha)\delta + \psi(\alpha, \delta)\delta^2.$$

Considerem, aleshores, l'equació

$$G(\alpha, \delta) = 0.$$

Observem que

- $G(0, 0) = F_x(0, 0) = 0$ ,
- $\frac{\partial G}{\partial \delta}(0, 0) = -F_{xx}(0, 0) \neq 0$ .

Per tant, pel teorema de la funció implícita, existeix una funció diferenciable  $\delta = \delta(\alpha)$ , definida en un entorn de  $\alpha = 0$ , tal que  $\delta(0) = 0$  i  $G(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$ . A més,  $\delta'(0) = \frac{F_{x\alpha}(0,0)}{F_{xx}(0,0)}$ , per tant  $\delta(\alpha) = \frac{F_{x\alpha}(0,0)}{F_{xx}(0,0)}\alpha + O(\alpha^2)$ .

D'altra banda, en aquest entorn

$$F_x(0, \alpha) = F_x(0, 0) + O(\alpha) = O(\alpha)$$

i

$$F(0, \alpha) - F_x(0, \alpha)\delta = [F(0, 0) + F_\alpha(0, 0)\alpha + O(\alpha^2)] - O(\alpha^2) = F_\alpha(0, 0)\alpha + O(\alpha^2).$$

Així, l'equació (15) esdevé

$$\dot{\xi} = [F_\alpha(0, 0)\alpha + O(\alpha^2)] + \left[ \frac{1}{2}F_{xx}(0, \alpha) + O(\alpha) \right] \xi^2 + O(\xi^3). \quad (16)$$

Si ara anomenem  $\mu$  al terme independent de l'expressió (16), sabem que existeix una funció diferenciable  $\phi = \phi(\alpha)$  tal que

$$\mu(\alpha) = F_\alpha(0, 0)\alpha + \phi(\alpha)\alpha^2.$$

Tenim que

- $\mu(0) = 0$ ,
- $\mu'(0) = F_\alpha(0, 0) \neq 0$ .

Novament, el teorema de la funció inversa assegura l'existència local d'una funció  $\alpha = \alpha(\mu)$  tal que  $\alpha(0) = 0$  i  $\mu = F_\alpha(0, 0)\alpha(\mu) + \phi(\alpha(\mu))\alpha(\mu)^2$ . Llavors, l'equació (16) es pot escriure com

$$\dot{\xi} = \mu + a(\mu)\xi^2 + O(\xi^3), \quad (17)$$

on  $a(\mu)$  és diferenciable i satisfà  $a(0) = \frac{1}{2}F_{xx}(0, 0) \neq 0$ .

Finalment, fent el canvi  $\eta = |a(\mu)|\xi$  i  $\beta = |a(\mu)|\mu$ , obtenim

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3),$$

on el signe correspon al signe de  $a(0)$ . □

**Proposició 10.** El sistema

$$\dot{y} = \alpha + y^2 + O(y^3) \quad (18)$$

és localment topològicament equivalent prop de l'origen al sistema

$$\dot{x} = \alpha + x^2. \quad (19)$$

*Demostració.* Escrivim el sistema original com

$$\dot{y} = F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha), \quad (20)$$

on  $\psi = O(y^3)$  és una funció diferenciable en  $(y, \alpha)$  prop de l'origen. Considerem

$$M = \{(y, \alpha) : F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha) = 0\}.$$

$M$  passa per l'origen  $(0, 0)$  perquè  $F(0, 0) = 0$ . Com que  $F_\alpha(0, 0) = 1$ , pel teorema de la funció implícita existeix una funció diferenciable  $g(y)$  definida en un entorn de  $y = 0$  tal que

$$F(y, \alpha) = 0 \iff \alpha = g(y).$$

Llavors,  $M$  es pot parametritzar localment com

$$M = \{(y, \alpha) : \alpha = g(y)\}.$$

A més,  $g'(0) = -\frac{F_y(0,0)}{F_\alpha(0,0)} = 0$  i  $g''(0) = -\frac{F_{yy}(0,0)}{F_\alpha(0,0)} = -2$ , per tant

$$g(y) = -y^2 + O(y^3).$$

Llavors, per a  $\alpha < 0$  suficientment petit, existeixen dos punts d'equilibri de (18),  $y_\pm(\alpha)$ , propers a  $x_\pm(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$ , els punts d'equilibri de (19).

Vegem que podem construir un homeomorfisme lineal en un entorn de l'origen que envii òrbites de (18) a òrbites de (19). Suposem que  $\alpha < 0$ . Busquem  $h_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)x$  tal que  $h_\alpha(x_+(\alpha)) = y_+(\alpha)$  i  $h_\alpha(x_-(\alpha)) = y_-(\alpha)$ . Obtenim que

$$a(\alpha) = \frac{x_+(\alpha)y_-(\alpha) - x_-(\alpha)y_+(\alpha)}{x_+(\alpha) - x_-(\alpha)}, \quad b(\alpha) = \frac{y_+(\alpha) - y_-(\alpha)}{x_+(\alpha) - x_-(\alpha)}.$$

Clarament,  $h_\alpha$  és un homeomorfisme ( $b(\alpha) \neq 0$ ) i envia òrbites de (18) a òrbites de (19). A més, com que  $h_\alpha$  és lineal, en particular és diferenciable i  $h'_\alpha(x) = b(\alpha) > 0$ . Per tant, si  $F$  i  $G$  són els camps associats a (18) i (19),  $h'_\alpha(x)G(x)$  té el mateix signe que  $F(h_\alpha(x))$ , ja que  $h'_\alpha(x) = b(\alpha) > 0$  i el signe de  $G(x)$  coincideix amb el signe de  $F(h_\alpha(x))$  per a  $|\alpha|$  i  $|x|$  prou petits.

Llavors podem considerar

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{si } \alpha \geq 0 \\ h_\alpha(x) & \text{si } \alpha < 0 \end{cases},$$

que, per a tot  $\alpha$  en un entorn de 0, defineix un homeomorfisme local i envia òrbites de (18) en òrbites de (19), tot preservant l'orientació temporal. Per tant, els sistemes (18) i (19) són topològicament equivalents en un entorn de  $(y_0, \alpha_0) = (0, 0)$  i  $(x_0, \alpha_0) = (0, 0)$ , respectivament.  $\square$

Notem que la proposició anterior és igualment vàlida si el signe que acompanya el terme quadràtic en (18) i (19) és negatiu. Les dues proposicions anteriors completen, per tant, la prova del Teorema 13.

D'ara en endavant, definirem altres tipus de bifurcacions i les seves respectives formes normals. Per tal d'agilitzar la lectura, no inclourem les demostracions que proven l'existència d'equivalències topològiques entre els sistemes i les formes normals. En elles es fan servir mètodes anàlegs als que hem usat en les demostracions prèvies però el seu desenvolupament detallat és llarg i pesat. La majoria de les demostracions es troben a [4].

## La bifurcació d'Andronov-Hopf

En aquesta secció estudiarem un altre tipus rellevant de bifurcació que apareix en sistemes dinàmics dependents d'un paràmetre: la bifurcació d'Andronov-Hopf. La dimensió mínima que ha de tenir un sistema per experimentar una bifurcació d'aquest tipus és 2, per tant la forma normal ve donada per un sistema al pla. Com veurem, la bifurcació d'Andronov-Hopf implica l'aparició d'una òrbita periòdica al voltant d'un punt fix en modificar el paràmetre prop del seu valor de bifurcació.

### Forma normal de la bifurcació d'Andronov-Hopf

Considerem el sistema dinàmic al pla

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}. \quad (21)$$

L'origen és un punt d'equilibri i la matriu de la diferencial en aquest punt és

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$



que té valors propis complexos conjugats  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i$ . Per tant, l'origen és no hiperbòlic si, i només si,  $\alpha = \alpha_0 = 0$ . A més, és atractor quan  $\alpha < 0$  i repulsor quan  $\alpha > 0$ . Vegem quin és el comportament qualitatiu del sistema en un entorn de  $\alpha_0 = 0$ . Introduïm la variable complexa

$$z = x_1 + ix_2.$$

Expressat en termes d'aquesta nova variable, el sistema satisfà l'equació diferencial

$$\begin{aligned} \dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) + i(x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)) = \\ &= (\alpha + i)(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2) = (\alpha + i)z - z|z|^2, \end{aligned}$$

de manera que (21) es pot reescriure en la forma complexa

$$\dot{z} = z \left( (\alpha + i) - |z|^2 \right).$$

Usant la representació en coordenades polars  $z = \rho e^{i\varphi}$  obtenim

$$\dot{z} = \dot{\rho} e^{i\varphi} + i\rho e^{i\varphi} \dot{\varphi} = \rho e^{i\varphi} (\alpha + i - \rho^2),$$

que implica

$$\dot{\rho} = \rho (\alpha - \rho^2) + i\rho (1 - \dot{\varphi}).$$

Per tant, la forma polar del sistema (21) és

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho (\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{cases}. \quad (22)$$

L'expressió anterior permet analitzar el sistema més fàcilment que en la seva forma original, perquè representa un sistema d'equacions diferencials desacoblats. La segona equació indica que la velocitat angular de totes les òrbites és constant i igual a 1 (per tant, les trajectòries giren a velocitat 1 al voltant de l'origen). La primera equació (que només té sentit per a  $\rho \geq 0$ ) té, per a tot  $\alpha$ , un punt fix en  $\rho = 0$ . Quan  $\alpha > 0$ , hi ha un altre punt fix donat per  $\rho = \sqrt{\alpha}$ , que és atractor. Observem, no obstant, que, mentre que  $\rho = 0$  representa l'origen i és un focus repulsor del sistema general,  $\rho = \sqrt{\alpha}$  no representa un punt d'equilibri sinó una òrbita periòdica la trajectòria de la qual descriu una circumferència de centre l'origen i radi  $\rho = \sqrt{\alpha}$ .

Vegem que, en aquest darrer cas, l'òrbita periòdica ( $\mathcal{O}$ ) és un conjunt invariant asimptòticament estable. Sigui  $\rho_t$  el flux associat a la primera equació de (22). Com que  $\rho^* = \sqrt{\alpha}$  és un punt fix atractor per a aquesta equació,  $\rho_t$  està definit per a tot  $t \geq 0$  i existeix un entorn  $R \ni \rho^* = \sqrt{\alpha}$  tal que  $\rho_t(\rho_0) \rightarrow \rho^*$  quan  $t \rightarrow +\infty$  per a tot  $\rho_0 \in R$  (de fet, podem agafar  $R = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ). Llavors, si  $\varphi_t = \varphi_0 + t$  és el flux associat

a la segona equació i considerem l'entorn obert  $U = R \times S^1$  de l'òrbita periòdica  $\mathcal{O}$  en  $\mathbb{R}^2$ , tenim que

$$d((\rho_t(\rho_0), \varphi_t(\varphi_0)), \mathcal{O}) \rightarrow 0 \text{ quan } t \rightarrow +\infty$$

per a tot  $(\rho_0, \varphi_0) \in U$ , és a dir,  $\mathcal{O}$  és un conjunt atractor. Com que, prenent  $R = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , tenim que  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , qualsevol òrbita llevat de l'origen tendeix a  $\mathcal{O}$  quan  $t \rightarrow +\infty$ . A més, com que  $|\rho_t(\rho_0) - \rho^*| < |\rho_0 - \rho^*|$  per a tot  $t > 0$  i tot  $\rho_0 \in R$ ,  $\mathcal{O}$  és estable i, en conseqüència, asimptòticament estable.

Quan  $\alpha < 0$ , l'origen és atractor i no existeixen òrbites periòdiques. Això és cert perquè si existís una òrbita periòdica, hi hauria una condició inicial  $\rho_0 > 0$  i un  $t > 0$  tals que  $\rho_0 = \rho_t(\rho_0)$ , que és absurd perquè  $\dot{\rho} < 0$  per a tot  $\rho > 0$ . De fet, l'origen és un focus atractor. Finalment, quan  $\alpha = 0$  l'origen és un punt no hiperbòlic que també és atractor perquè  $\dot{\rho} < 0$  per a tot  $\rho > 0$ .

És clar, per tant, que  $\alpha_0 = 0$  és un paràmetre de bifurcació. Anomenem a la bifurcació corresponent *bifurcació d'Andronov-Hopf*.

Un sistema molt similar a l'anterior és el donat per

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}, \quad (23)$$

on els termes no lineals tenen signe oposat respecte el cas previ. En aquest cas, el sistema expressat en coordenades polars és

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\alpha + \rho^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{cases}. \quad (24)$$

Una anàlisi anàloga mostra que quan  $\alpha < 0$  l'origen és un focus atractor i hi ha una òrbita periòdica repulsora (que descriu una circumferència de radi  $\sqrt{-\alpha}$ ). Quan  $\alpha > 0$ , l'òrbita desapareix i l'origen esdevé un focus repulsor. Quan  $\alpha = 0$ , l'origen és no hiperbòlic i inestable. En aquest cas també diem que en  $\alpha_0 = 0$  el sistema experimenta una bifurcació d'Andronov-Hopf.

Els dos tipus de bifurcacions d'Andronov-Hopf representades pels exemples anteriors són clarament no equivalents. En el primer cas es diu que la bifurcació és *supercrítica* i en el segon, *subcrítica*. És interessant observar que, malgrat l'analogia entre aquests dos sistemes, tenen propietats asimptòtiques força diferents. En el primer cas, quan  $\alpha$  es desplaça des de valors negatius cap a positius, l'origen passa de ser un focus atractor a un focus repulsor, i el seu caràcter atractor és "heretat" per l'òrbita periòdica de radi  $\sqrt{\alpha}$ . Per tant, malgrat aquest canvi de caràcter del punt fix, la majoria d'òrbites amb condició inicial a prop de l'origen segueixen estant confinades en un entorn de l'origen per a valors de  $\alpha > 0$  "petits". En el segon cas, en canvi, mentre que l'origen atrau les òrbites prou properes si  $\alpha < 0$ , quan  $\alpha > 0$ , esdevé un repulsor

global: totes les òrbites excepte la del propi origen abandonen qualsevol entorn d'aquest punt en temps finit. Dit d'una altra manera, encara que en tots dos casos l'origen perd la seva estabilitat quan  $\alpha$  esdevé positiu, en el primer cas la pèrdua és suau i en el segon, sobtada. Aquest fet indica que la presència d'un o un altre tipus de bifurcació en un sistema que representi un cert fenomen biològic pot tenir conseqüències rellevants i diferents en cadascun dels casos. Per exemple, en un sistema localment equivalent a (21), en modificar el paràmetre des d'un valor negatiu a un de positiu i després de nou a un de negatiu, el sistema pot retornar al seu estat original, mentre que si és localment equivalent a (23), el sistema podria no recuperar al seu estat original si en el moment en què el paràmetre ha pres valors positius òrbites properes a l'origen han "escapat" suficientment d'un entorn de l'origen.

De la mateixa manera que en el cas de la bifurcació sella-node, a continuació donarem les condicions específiques i de generalitat que assegurin que un sistema dependent de paràmetres arbitrari experimenti una bifurcació d'Andronov-Hopf. En aquest cas només enunciarem (no demostrarem) els resultats que permeten provar que un sistema amb aquestes condicions ha de ser topològicament equivalent a les formes normals definides per (21) o per (23). A partir d'ara considerarem sempre sistemes en els quals el punt de bifurcació és l'origen (tant en els paràmetres com en l'espai de fases). Aquesta hipòtesi no suposa cap restricció perquè sempre podem aplicar una translació que transformi un sistema qualsevol en un d'aquest tipus sense que això n'alteri el comportament qualitatiu.

**Definició 25.** Sigui

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

un sistema bidimensional tal que, per a  $\alpha_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  és un punt fix amb valors propis associats  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Observem que aleshores el sistema té un únic punt fix proper a l'origen,  $x_0(\alpha)$ , per a tot  $\alpha$  en un entorn de  $\alpha_0 = 0$  (podem aplicar el teorema de la funció implícita). Sense pèrdua de generalitat podem suposar que aquest punt és l'origen per a  $\alpha$  suficientment proper a 0 (en cas contrari, podem efectuar un canvi de coordenades per a cada  $\alpha$  en aquest entorn de manera que  $x_0(\alpha) = 0$ ). Llavors el sistema es pot escriure com

$$\dot{x} = A(\alpha)x + G(x, \alpha),$$

on  $A(\alpha)$  és la matriu jacobiana de  $F(x, \alpha)$  en  $x = 0$  i  $G$  és una funció diferenciable que satisfà  $G = O(\|x^2\|)$ . Siguin  $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$  i  $\bar{\lambda}(\alpha) = \mu(\alpha) - i\omega(\alpha)$  els valors propis de  $A(\alpha)$ , amb  $\omega(\alpha) > 0$ . Siguin  $p(\alpha)$  i  $q(\alpha)$  vectors propis (complexos) de  $A^T(\alpha)$  i  $A(\alpha)$ , de valors propis  $\bar{\lambda}(\alpha)$  i  $\lambda(\alpha)$ , respectivament, tals que

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1,$$

on  $\langle \rangle$  és el producte escalar hermític definit per  $\langle (p_1, p_2), (q_1, q_2) \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$ . Definim el canvi de variable  $z = \langle p(\alpha), x \rangle$  i considerem

$$g_{k,l}(\alpha) = \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}q(\alpha), \alpha) \rangle \right|_{z=0}, \quad k+l \geq 2, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots$$

Anomenem *primer coeficient de Lyapunov* del sistema (25) en  $\alpha = 0$  al nombre real

$$l_1 = \frac{1}{2\omega(0)^2} \operatorname{Re}(ig_{20}(0)g_{11}(0) + \omega(0)g_{21}(0)).$$

**Teorema 14. (Bifurcació d'Andronov-Hopf)**

Sigui

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

un sistema bidimensional tal que, per a  $\alpha_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  és un punt fix amb valors propis associats  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Siguin  $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$  i  $\bar{\lambda}(\alpha) = \mu(\alpha) - i\omega(\alpha)$ ,  $\omega(\alpha) > 0$ , els valors propis de la matriu jacobiana de  $F$  en l'únic punt fix de  $F$  proper a l'origen, per a  $\alpha$  en un entorn de 0. Suposem que es satisfan les condicions de no-degeneració i de transversalitat següents:

1. El primer coeficient de Lyapunov és no nul, és a dir,  $l_1 \neq 0$ ,
2.  $\mu'(0) \neq 0$ .

Llavors el sistema és localment topològicament equivalent, en un entorn de  $(x_0 = 0, \alpha_0 = 0)$ , a una de les formes normals

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \beta y_1 - y_2 + \sigma y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ \dot{y}_2 &= y_1 + \beta y_2 + \sigma y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{cases}, \quad (27)$$

on  $\sigma = \operatorname{signe}(l_1) \in \{-1, 1\}$ .

**Alguns exemples**

1. Tornem a la forma normal de la bifurcació d'Andronov-Hopf

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

Comprovarem que es satisfan les dues condicions de generalitat del teorema quan  $\alpha = 0$ . El sistema es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

L'origen és, per a tot  $\alpha$ , un punt d'equilibri i els seus valors propis són  $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ , i  $\bar{\lambda}(\alpha) = \mu(\alpha) - i\omega(\alpha)$ , on  $\mu(\alpha) = \alpha$ ,  $\omega(\alpha) = 1$ . Per tant,  $\mu'(0) = 1 \neq 0$ .

Calculem el primer coeficient de Lyapunov. Fent servir la mateixa notació que en la Definició 25, tenim que

$$p(\alpha)^T = p_0(i, 1), \quad q(\alpha)^T = (i, 1),$$

on  $p_0 \in \mathbb{R}$  és tal que  $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 2p_0 = 1$ , és a dir,  $p_0 = 1/2$ . Llavors

$$zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) = \begin{pmatrix} (z - \bar{z})i \\ z + \bar{z} \end{pmatrix},$$

$$F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)) = \begin{pmatrix} -(z + \bar{z}) + i(\alpha z - \alpha\bar{z} - 4z^2\bar{z} + 4z\bar{z}^2) \\ (\alpha z + \alpha\bar{z} - 4z^2\bar{z} - 4z\bar{z}^2) + i(z - \bar{z}) \end{pmatrix} i$$

$$\langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle = (\alpha - 4z\bar{z})z + iz.$$

Per tant,

$$g_{11}(\alpha) = 0, \quad g_{20}(\alpha) = 0, \quad g_{21}(\alpha) = -8$$

i el primer coeficient de Lyapunov és

$$l_1 = -4 \neq 0.$$

2. Considerem el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que en notació complexa ve donat per

$$\dot{z} = F(z, \alpha) = (\alpha + i)z.$$

Observem que l'origen és un punt d'equilibri per a tot  $\alpha$ , i els seus valors propis són  $\lambda(\alpha) = \alpha + i$  i  $\bar{\lambda}(\alpha) = \alpha - i$ . Per tant, és atractor quan  $\alpha > 0$  i repulsor quan  $\alpha < 0$ , i en  $\alpha = 0$ ,  $\lambda(0) = i$ ,  $\bar{\lambda}(0) = -i$ . A més, en aquest cas  $\mu(\alpha) = \alpha$ , de manera que  $\mu'(\alpha) = 1 \neq 0$  per a tot  $\alpha$ . Per tant, el sistema satisfà, en  $\alpha = 0$ , tres de les condicions que asseguren l'existència d'una bifurcació d'Andronov-Hopf. No obstant, com veurem, el primer coeficient de Lyapunov s'anul·la en aquest punt. Com en el cas previ,

$$p(\alpha)^T = \frac{1}{2}(i, 1), \quad q(\alpha)^T = (i, 1) \text{ i}$$

$$zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) = \begin{pmatrix} (z - \bar{z})i \\ z + \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z - \bar{z})i \\ z + \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha i - 1)z - (\alpha i + 1)\bar{z} \\ (\alpha + i)z + (\alpha - i)\bar{z} \end{pmatrix},$$

$$\langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle = (\alpha + i)z,$$

$$g_{11}(\alpha) = g_{20}(\alpha) = g_{21}(\alpha) = 0$$

i el coeficient de Lyapunov és 0.

Aquest és un exemple, doncs, en què la condició de no-degeneració per la bifurcació de Andronov-Hopf no se satisfà. De fet, l'origen passa de ser un focus atractor a un focus repulsor quan  $\alpha$  travessa el valor crític  $\alpha_0 = 0$  en sentit positiu, però en un entorn de l'origen no hi ha òrbites periòdiques quan  $\alpha \neq 0$ . Podem provar aquest fet usant l'expressió del sistema en coordenades polars:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \alpha\rho \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{cases}.$$

És clar que si  $\alpha \neq 0$  no hi ha cap òrbita que passi més d'una vegada pel mateix punt. Notem, en canvi, que quan  $\alpha = 0$  *totes* les trajectòries són òrbites periòdiques i descriuen circumferències al voltant de l'origen (Fig. 3).

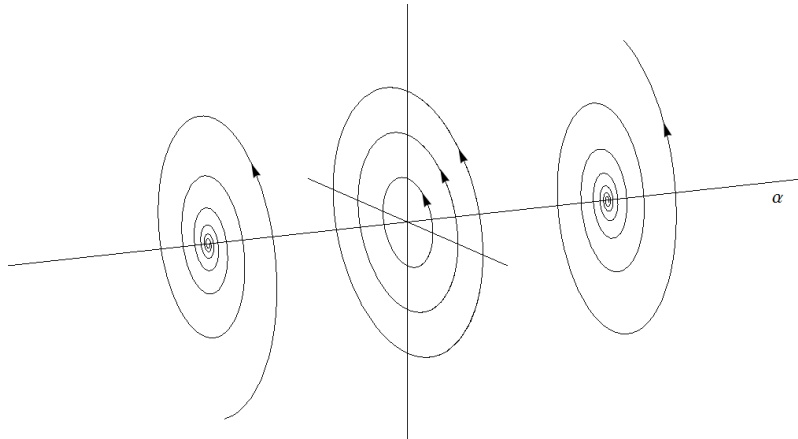


Figura 3: Diagrama de bifurcació del sistema de l'exemple (2). En travessar el valor crític  $\alpha = 0$ , l'origen passa de ser un focus atractor a un focus repulsor, però no hi ha una bifurcació d'Andronov-Hopf perquè no existeix cap òrbita periòdica quan  $\alpha \neq 0$ . Quan  $\alpha = 0$ , però, totes les trajectòries són òrbites periòdiques al voltant de l'origen.

3. Considerem els sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha^2 x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \alpha^2 y - y(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

Observem que és idèntic a la forma normal de la bifurcació d'Andronov-Hopf amb l'excepció que hem substituït el paràmetre  $\alpha$  pel seu quadrat. Per tant, tot l'anàlisi que hem fet d'aquest sistema es pot traslladar aquí simplement substituint el paràmetre per  $\alpha^2$ . Això, però, té una conseqüència crucial sobre la dinàmica al voltant del paràmetre de bifurcació  $\alpha_0 = 0$ :  $\alpha^2$  no pren mai valors

negatiu. D'aquesta manera, el sistema és qualitativament idèntic a la forma normal amb paràmetre positiu tant “abans” com “després” de la bifurcació. Dit d'una altra manera, el sistema retorna al seu estat previ en passar el valor de bifurcació, fet que analíticament es manifesta a través de la condició  $\mu'(0) = 0$ .

## Altres bifurcacions

En els sistemes dependents d'un paràmetre es poden presentar altres tipus de bifurcacions diferents de les dues que hem presentat als apartats anteriors. Considerem, per exemple, un sistema unidimensional

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ja vam veure que una condició necessària perquè el sistema experimenti una bifurcació en un punt d'equilibri  $x_0$  és que sigui no hiperbòlic, és a dir,  $F_x(x_0, \alpha_0) = 0$ . D'altra banda, les condicions de no-degeneració i de transversalitat  $F_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$  i  $F_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0$  asseguren que la bifurcació és de tipus sella-node. Per tant, és natural preguntar-se quins altres tipus de bifurcacions es poden donar quan alguna d'aquestes condicions de generalitat no es satisfà. En aquests casos, però, determinar el tipus de dinàmica dependrà del fet que es satisfacin noves condicions de no-degeneració i transversalitat. A continuació en veurem algun exemple.

## La bifurcació transcítica

Considerem el sistema unidimensional

$$\dot{x} = F(x, \alpha) = \alpha x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Observem que  $F(0, \alpha) = F(\alpha, \alpha) = 0$  per a tot  $\alpha$ , de manera que  $x_1 = 0$  i  $x_2 = \alpha$  són punts d'equilibri per a qualsevol valor del paràmetre. A més,  $F_x(0, \alpha) = \alpha$  i  $F_x(\alpha, \alpha) = -2\alpha$ , per tant  $x_1$  i  $x_2$  són hiperbòlics si, i només si,  $\alpha \neq 0$  (si  $\alpha < 0$ ,  $x_1$  és atractiu i  $x_2$ , repulsor i els caràcters s'inverteixen quan  $\alpha > 0$ ). Si  $\alpha = 0$ , els dos punts fixos coincideixen en un de sol a l'origen. Observem que  $F_{xx}(0, 0) = -2 \neq 0$  però  $F_\alpha(0, 0) = 0$ , és a dir, no tenim la condició de transversalitat que defineix la bifurcació sella-node. La condició de transversalitat en aquest cas és  $F_{x\alpha}(0, 0) = 1 \neq 0$ .

Quan  $\alpha = 0$ , el sistema ve donat per  $\dot{x} = -x^2$ , per tant les trajectòries amb condició inicial positiva tendeixen a l'origen quan  $t \rightarrow +\infty$  i les que tenen condició inicial negativa ho fan quan  $t \rightarrow -\infty$ . L'origen no és, en aquest cas, ni atractiu ni repulsor. El diagrama de bifurcació es mostra a la Figura 4. Diem que el sistema experimenta una bifurcació *transcítica* a l'origen quan  $\alpha_0 = 0$ .

## La bifurcació *pitchfork*

Sigui

$$\dot{x} = F(x, \alpha) = \alpha x - x^3, \quad (29)$$

on  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Per a tot  $\alpha$ , el sistema té un punt fix a l'origen. Quan  $\alpha > 0$ , té dos punts fixos addicionals:  $\pm\sqrt{\alpha}$ . Com que  $F_x(x, \alpha) = \alpha - 3x^2$ , l'origen és hiperbòlic només quan  $\alpha \neq 0$ , i el seu caràcter canvia quan  $\alpha$  travessa el valor 0. És clar, doncs, que el sistema pateix una bifurcació en  $\alpha_0 = 0$ . D'altra banda,  $F_{xx}(0, 0) = F_\alpha(0, 0) = 0$ , per tant tampoc es donen les condicions per a una bifurcació sella-node ni per a una transcítica. De fet, la condició de transversalitat aquí és la mateixa que en la transcítica ( $F_{x\alpha}(0, 0) = 1 \neq 0$ ) i la de no-degeneració passa a ser  $F_{xxx}(0, 0) = -6 \neq 0$ . En travessar el paràmetre de bifurcació, el sistema manté el punt fix  $x_0 = 0$ , que passa de ser atractor a repulsor, i neixen els punts fixos  $x_\pm = \pm\sqrt{\alpha}$ , que són atractors perquè  $F_x(\pm\sqrt{\alpha}) = -2\alpha$ . El diagrama de bifurcació recorda la forma d'una forca (Fig. 4), raó per la qual aquesta bifurcació es coneix amb el nom de *pitchfork*. Tenim un comportament anàleg quan considerem el mateix sistema amb el terme d'ordre cúbic canviat de signe.

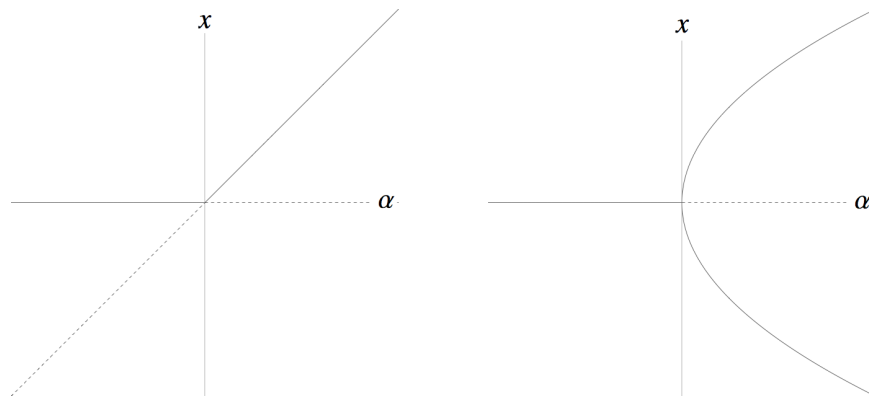


Figura 4: Diagrames de bifurcació per a les formes estàndard de les bifurcacions transcítica (esquerra) i *pitchfork* (dreta). Les línies contínues indiquen punts d'equilibri atractors i les discontinües, repulsors.

## Bifurcacions de punts fixos en sistemes $n$ -dimensionals dependents d'un paràmetre

### Varietats centrals

Fins ara hem estudiat algunes de les bifurcacions més habituals en sistemes dependents d'un paràmetre amb la menor dimensió possible. L'objectiu d'aquesta secció és estudiar com els resultats que acabem de veure es poden fer servir en l'estudi de sistemes dependents d'un paràmetre en dimensió  $n$  arbitrària. Veurem que l'estudi d'un sistema prop d'un punt d'equilibri no hiperbòlic es pot reduir a l'anàlisi de la dinàmica sobre una varietat invariant tangent al subespai de vectors propis generalitzats associats als



valors propis amb part real zero (que anomenarem *central*). El resultat més important d'aquesta secció és el teorema de la varietat central, que enunciem a continuació.

**Teorema 15. (Teorema de la varietat central)** Sigui

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (30)$$

un sistema dinàmic  $n$ -dimensional. Suposem que  $x_0$  és un punt d'equilibri no hiperbòlic amb  $n_-$ ,  $n_+$  i  $n_0$  valors propis amb part real negativa, positiva i zero, respectivament, comptant multiplicitats. Sigui  $\varphi$  el flux de (30) i  $E^c$  el subespai de vectors propis generalitzats associats a valors propis amb part real zero. Aleshores existeix una varietat invariant diferenciable (concretament, de classe  $C^{k-1}$  si  $F$  és de classe  $C^k$ ),  $W_{loc}^c(x_0)$ , definida en un entorn de  $x_0$  i de dimensió  $n_0$ , que és tangent a  $E^c$  en  $x_0$ . Es diu que  $W_{loc}^c(x_0)$  és una *varietat central* en  $x_0$ .

**Exemple 1.** Una observació important és que la varietat central pot no ser única. Considerem, per exemple, el sistema següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

L'origen és l'únic punt d'equilibri i la matriu de la diferencial en aquest punt és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, l'origen té per valors propis 0 i  $-1$  i els espais de vectors propis associats són  $E^s = \langle(0, 1)\rangle$  i  $E^c = \langle(1, 0)\rangle$ . El flux del sistema ve donat per

$$\varphi_t(x, y) = \left(\frac{x}{1 - xt}, ye^{-t}\right),$$

on  $t \in (-\infty, \frac{1}{x})$  si  $x > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  si  $x = 0$  i  $t \in (\frac{1}{x}, +\infty)$  si  $x < 0$ .

Com que una varietat central en l'origen  $W_{loc}^c$  té dimensió 1 i és invariant, pot estar formada per la unió de diverses trajectòries. De fet, qualsevol trajectòria amb condició inicial  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 < 0$ , tendeix a l'origen quan  $t \rightarrow +\infty$ , de manera que podem buscar una varietat central trobant trajectòries que s'acostin a l'origen tangents a  $E^c = \langle(1, 0)\rangle$ .

Considerem una condició inicial  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 \leq 0$ , i la trajectòria corresponent, donada per  $\varphi_t(x_0, y_0) = (\frac{x_0}{1 - x_0 t}, y_0 e^{-t})$ . El vector tangent unitari en un instant  $t$  és

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^4}{(1 - x_0 t)^4} + y_0^2 e^{-2t}}} \left( \frac{x_0^2}{(1 - x_0 t)^2}, -y_0 e^{-t} \right).$$

Per tant,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_t = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } x_0 < 0 \\ (0, 1) & \text{si } x_0 = 0, y_0 < 0 \\ (0, -1) & \text{si } x_0 = 0, y_0 > 0 \end{cases} .$$

Veiem, doncs, que qualsevol trajectòria amb condició inicial  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 < 0$ , tendeix a l'origen, quan  $t \rightarrow +\infty$ , tangent a  $E^c$ . Així, podem construir infinites varietats centrals unint una d'aquestes trajectòries amb el semieix  $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ , que és invariant. Aïllant  $t$  en l'expressió  $x = \frac{x_0}{1-x_0 t}$  i substituint en  $y = y_0 e^{-t}$ , obtenim que, fixat  $(x_0, y_0)$  amb  $x_0 < 0$ , la varietat definida per

$$\begin{cases} y = y_0 e^{-\frac{1}{x_0} e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

és una varietat central a l'origen.

Considerem novament el sistema (30) del teorema anterior. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que el punt d'equilibri  $x_0$  és l'origen. Llavors el sistema es pot expressar, en la base de vectors propis generalitzats associats a  $x_0$ , com

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, v) \\ \dot{v} = Cv + h(u, v), \end{cases} \quad (31)$$

on  $u \in \mathbb{R}^{n_0}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n_- + n_+}$ ,  $B$  és una matriu  $n_0 \times n_0$  els valors propis de la qual tenen tots part real nul·la i  $C$  és una matriu  $(n_- + n_+) \times (n_- + n_+)$  cap dels valors propis de la qual té part real zero.

**Teorema 16. (Principi de reducció a la varietat central)** El sistema (31) és localment topològicament equivalent, prop de l'origen, a

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, V(u)) \\ \dot{v} = Cv \end{cases}, \quad (32)$$

on  $V: \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_- + n_+}$  és una funció diferenciable tal que  $V = O(\|u\|^2)$  i

$$W_{loc}^c = \{(u, v) : v = V(u)\}$$

és una varietat central.

Observem que el sistema (32) és desacoblat, és a dir, la dinàmica de  $u$  és independent de la de  $v$  i a l'inrevés. La primera equació és, de fet, la restricció de (31) a la varietat central  $W_{loc}^c$ , i la segona és lineal i té associada una dinàmica hiperbòlica a l'origen. D'aquesta manera, l'anàlisi qualitativa del sistema es redueix a l'estudi de la dinàmica sobre la varietat central. Si existeixen diferents varietats centrals a l'origen, hi ha diferents equacions d'aquest tipus, però totes elles són localment topològicament equivalents prop de l'origen.

**Teorema 17.** El sistema definit per la segona equació és topològicament equivalent a la *sella estàndard*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi \\ \dot{\eta} = \eta, \end{cases} \quad (33)$$

on  $\xi \in \mathbb{R}^{n_-}$  i  $\eta \in \mathbb{R}^{n_+}$ .

### Varietats centrals en sistemes dependents d'un paràmetre

Considerem el següent sistema  $n$ -dimensional dependent d'un paràmetre:

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (34)$$

Suposem que l'origen és un punt no hiperbòlic per a  $\alpha = 0$ . Siguin  $n_0$ ,  $n_-$  i  $n_+$  el nombre de valors propis associats a l'origen amb part real zero, negativa i positiva, respectivament. Considerem el sistema ampliat

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} = F(x, \alpha). \end{cases} \quad (35)$$

A l'origen  $(\alpha, x) = (0, 0)$ , la diferencial del sistema ampliat ve donada per la matriu  $(n+1) \times (n+1)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_\alpha(0, 0) & F_x(0, 0) \end{pmatrix},$$

que té per valors propis els de  $F_x$  i el 0. Així, el nombre de valors propis de  $J$  amb part real zero, negativa i positiva és  $n_0 + 1$ ,  $n_-$  i  $n_+$ , respectivament. Aplicant el teorema de la varietat central al sistema (35), tenim que existeix una varietat central a l'origen  $W_{loc}^c$ , de dimensió  $n_0 + 1$ , que és tangent, a l'origen, al subespai de vectors propis generalitzats associats als valors propis de  $J$  amb part real zero,  $E^c$ . A més, com que  $\dot{\alpha} = 0$ , els hiperplans

$$\Pi_{\alpha_0} = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \alpha = \alpha_0\}$$

són també invariants per a tot  $\alpha_0$ . Per tant, degut al fet que aquests hiperplans són ortogonals al subespai  $\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle$  i que aquest forma part de l'espai  $E^c$ , les varietats

$$W_{\alpha_0}^c = \Pi_{\alpha_0} \cap W_{loc}^c$$

tenen dimensió  $n_0$ , folien la varietat central  $W_{loc}^c$  i són invariants respecte (35).

**Proposició 11.** En les condicions anteriors, el sistema (34) té, per a cada  $\alpha$  en un entorn de  $\alpha_0 = 0$ , una varietat invariant local  $W_\alpha^c$  de dimensió  $n_0$ . Quan  $\alpha = 0$ ,  $W_0^c$  és una varietat central.

**Teorema 18. (Shoshitaishvili)** El sistema (34) és localment topològicament equivalent, prop de l'origen, a

$$\begin{cases} \dot{u} = \Phi(u, \alpha) \\ \dot{\xi} = -\xi \\ \dot{\eta} = \eta, \end{cases} \quad (36)$$

on  $u \in \mathbb{R}^{n_0}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n_-}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{n_+}$  i  $\dot{u} = \Phi(u, \alpha)$  és l'equació de la restricció de (34) a la varietat  $W_\alpha^c$ , per a una elecció adequada del sistema de coordenades.

Una conseqüència rellevant d'aquest teorema és que els canvis que experimenta el sistema (34) en creuar el valor crític  $\alpha = 0$  es poden “llegir” únicament estudiant la dinàmica  $n_0$ -dimensional sobre la varietat central.

## Exemples

### Bifurcació sella-node $n$ -dimensional

Fins ara havíem definit la bifurcació sella-node com un fenomen que apareix en sistemes unidimensionals dependents d'un paràmetre. De fet, però, la bifurcació sella-node es pot definir de manera genèrica en sistemes  $n$ -dimensionals dependents d'un paràmetre. Suposem que tenim un sistema

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2, \quad (37)$$

tal que, per a  $\alpha = 0$ , l'origen és un punt d'equilibri amb un valor propi nul i  $n_-$  i  $n_+$  valors propis amb part real diferent de zero ( $n_- + n_+ + 1 = n$ ). Aleshores, per la Proposició 11, existeix, en un entorn de  $\alpha = 0$ , una varietat local invariant  $W_\alpha^c$  de dimensió 1. A més (Teorema 18), el sistema (37) és localment topològicament equivalent, prop de l'origen, a

$$\begin{cases} \dot{u} = \Phi(u, \alpha) \\ \dot{\xi} = -\xi \\ \dot{\eta} = \eta, \end{cases}$$

on  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n_-}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{n_+}$  i

$$\dot{u} = \Phi(u, \alpha) \quad (38)$$

és l'equació (unidimensional) de la restricció de (37) a la varietat  $W_\alpha^c$ . Observem que  $u_0 = 0$  és un punt d'equilibri de (38). Si aquest sistema té una bifurcació sella-node per a  $\alpha = 0$ , diem que (37) experimenta una bifurcació sella-node a l'origen en  $\alpha = 0$ .

**Exemple 2. (Forma estàndard de la bifurcació sella-node al pla)** Considerem el sistema al pla

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha + x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Observem que, quan  $\alpha = 0$ , l'origen és un punt d'equilibri no hiperbòlic amb valors propis  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = -1 < 0$ . El sistema ampliat corresponent,

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} = \alpha + x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}, \quad (40)$$

té, a l'origen, una varietat central ampliada de dimensió 2, tangent al subespai central ampliat  $\tilde{E}^c = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ . De fet, el pla d'equació  $y = 0$  és una varietat central  $W^c$  per al sistema ampliat, ja que és invariant per (40) i clarament és tangent a  $\tilde{E}^c$ . Per tant, cadascuna de les rectes

$$\Pi_{\alpha_0} \cap W^c = \{(\alpha, x, y) : \alpha = \alpha_0, y = 0\}$$

és invariant respecte (40). Així, per a cada  $\alpha$ , la recta d'equació  $y = 0$  és invariant pel sistema (39). Quan  $\alpha = 0$ , aquesta recta és una varietat central a l'origen. Si considerem la restricció de (39) a la recta  $y = 0$

$$\dot{x} = \alpha + x^2,$$

obtenim l'equació d'una de les dues formes normals de la bifurcació sella-node. La dinàmica sobre  $y = 0$  és, per tant, la mateixa que hem descrit a la secció 3. Combinant aquesta dinàmica amb la que descriu la segona equació,  $\dot{y} = -y$  (que no depèn de  $\alpha$  i és atractora cap a  $y = 0$ ), obtenim els retrats de fase que mostra la Figura 5. Quan  $\alpha < 0$ , hi ha dos punts fixos,  $p_- = (-\sqrt{\alpha}, 0)$  i  $p_+ = (\sqrt{\alpha}, 0)$ , que són un node atractor i una sella, respectivament. Quan  $\alpha = 0$ ,  $p_-$  i  $p_+$  “col·lapsen” a l'origen, que és l'únic punt d'equilibri del sistema i ja no és atractor ni repulsor (en aquest cas el sistema és el que hem analitzat a l'Exemple 1). Finalment, quan  $\alpha > 0$  el sistema ja no té cap punt d'equilibri.

La denominació *sella-node* prové precisament de la versió bidimensional d'aquesta bifurcació, en la qual un punt de sella i un node col·lapsen i desapareixen en variar el valor del paràmetre.

### Bifurcació d'Andronov-Hopf $n$ -dimensional

Considerem el sistema en dimensió  $n \geq 3$

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

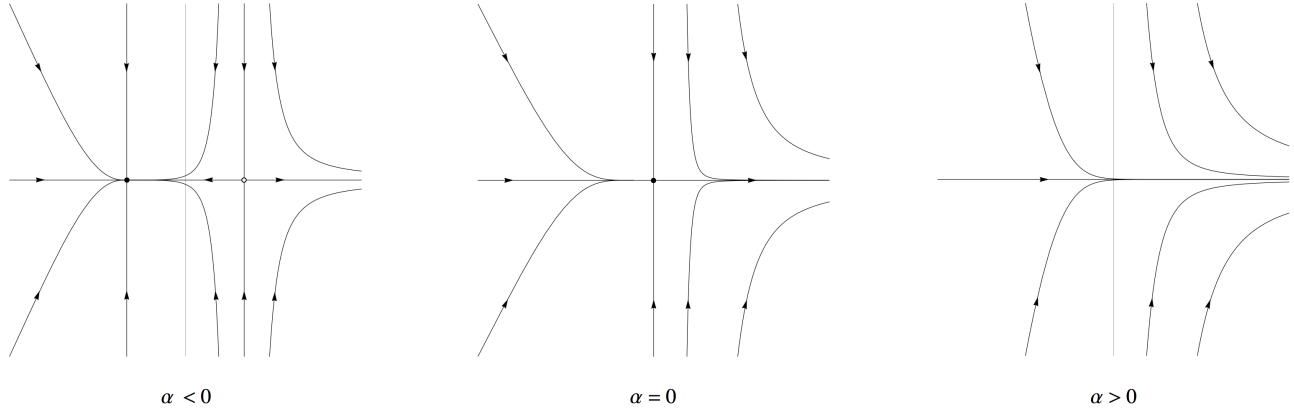


Figura 5: Diagrama de bifurcació de la forma estàndard de la bifurcació sella-node en  $\mathbb{R}^2$ .

Suposem que, per a  $\alpha = 0$ , l'origen és un punt d'equilibri no hiperbòlic amb un parell de valors propis imaginaris conjugats,  $\lambda(0) = i\omega(0)$ ,  $\bar{\lambda}(0) = -i\omega(0)$  ( $\omega(0) > 0$ ) i  $n_-$  i  $n_+$  valors propis amb part real diferent de zero ( $n_- + n_+ + 2 = n$ ). Aleshores, per la Proposició 11, existeix, en un entorn de  $\alpha = 0$ , una varietat local invariant  $W_\alpha^c$  de dimensió 2. A més (Teorema 18), el sistema (41) és localment topològicament equivalent, prop de l'origen, a

$$\begin{cases} \dot{u} = \Phi(u, \alpha) \\ \dot{\xi} = -\xi \\ \dot{\eta} = \eta \end{cases},$$

on  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n_-}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{n_+}$  i

$$\dot{u} = \Phi(u, \alpha) \tag{42}$$

és l'equació (bidimensional) de la restricció de (41) a la varietat  $W_\alpha^c$ . Observem que  $u_0 = 0$  és un punt d'equilibri de (42). Si aquest sistema té una bifurcació d'Andronov-Hopf en  $\alpha = 0$ , diem que (41) experimenta una bifurcació d'Andronov-Hopf a l'origen en  $\alpha = 0$ .

**Exemple 3. (Forma estàndard de la bifurcació d'Andronov-Hopf en  $\mathbb{R}^3$ )** Considerem el sistema en  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \\ \dot{z} = -z \end{cases}. \tag{43}$$

Observem que, quan  $\alpha = 0$ , l'origen és un punt d'equilibri no hiperbòlic amb valors propis  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$

i  $\lambda_3 = -1$ . El sistema ampliat corresponent,

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \\ \dot{z} = -z \end{cases} \quad (44)$$

té, a l'origen, una varietat central ampliada de dimensió 3, tangent al subespai central ampliat

$$\tilde{E}^c = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle.$$

De fet, l'hiperplà d'equació  $z = 0$  és una varietat central  $W^c$  per al sistema ampliat, ja que és invariant per (44) i clarament és tangent a  $\tilde{E}^c$ . Per tant, cadascun dels plans

$$\Pi_{\alpha_0} \cap W^c = \{(\alpha, x, y, z) : \alpha = \alpha_0, z = 0\}$$

és invariant respecte (44). Així, per a cada  $\alpha$ , el pla d'equació  $z = 0$  és invariant pel sistema (43). Quan  $\alpha = 0$ , aquest pla és una varietat central a l'origen. Si considerem la restricció de (43) al pla  $z = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases},$$

obtenim l'equació d'una de les dues formes normals de la bifurcació d'Andronov-Hopf. La dinàmica sobre  $z = 0$  és, per tant, la mateixa que hem descrit a la secció 3. Combinant aquesta dinàmica amb la que descriu la tercera equació,  $\dot{z} = -z$  (que no depèn de  $\alpha$  i és atractora cap al pla  $z = 0$ ), obtenim els retrats de fase que mostra la Figura 6. L'origen és un punt d'equilibri del sistema per a tot  $\alpha$ .

Quan  $\alpha > 0$ , al pla  $z = 0$  hi ha una òrbita periòdica asimptòticament estable que descriu una circumferència de centre l'origen i radi  $\sqrt{\alpha}$ . Com que la component  $z$  és atractora cap al pla  $z = 0$ , les òrbites amb condició inicial fora del pla  $z = 0$  tendeixen, quan  $t \rightarrow +\infty$ , cap a aquesta òrbita periòdica, tot descrivint espirals en l'espai tridimensional. L'origen és inestable. Quan  $\alpha = 0$ , l'òrbita periòdica col·lapsa sobre l'origen, que és atractora. Finalment, quan  $\alpha < 0$  no hi ha cap òrbita periòdica i l'origen segueix sent atractora. Les òrbites tendeixen a l'origen espiralant.

## Bifurcacions de punts fixos en sistemes dependents de dos paràmetres

A la secció anterior hem analitzat algunes de les bifurcacions de punts d'equilibri més habituals que poden aparèixer en sistemes dependents d'un paràmetre. Imaginem ara que tenim un sistema que depèn de dos paràmetres. A priori, sembla que aquest guany en els graus de llibertat del sistema ha de poder generar

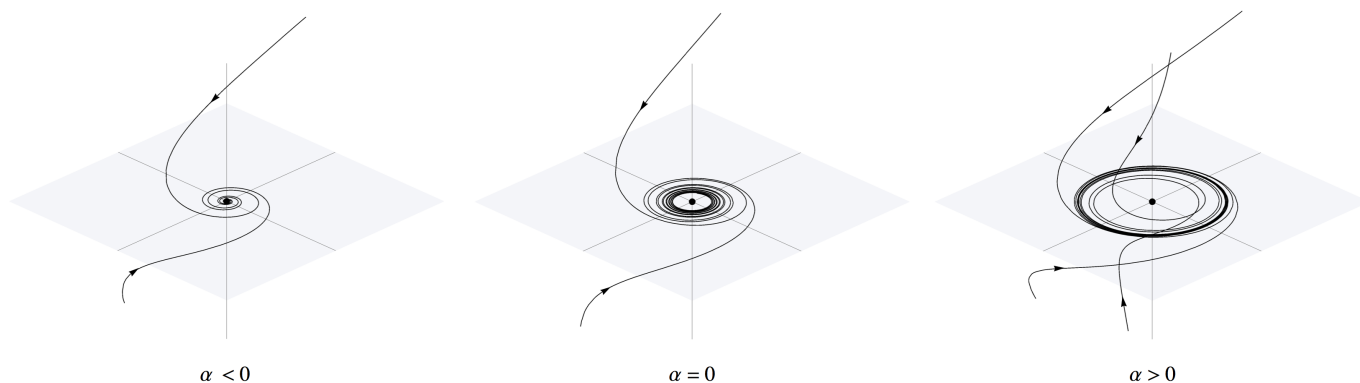


Figura 6: Retrats de fase per a la forma estàndard de la bifurcació d'Andronov-Hopf en  $\mathbb{R}^3$ .

canvis d'estat més complexos que els dels exemples anteriors. De fet, com veurem, els sistemes amb dos paràmetres poden experimentar les mateixes bifurcacions que hem definit en la secció anterior, però aquestes solen aparèixer sobre *corbes* de paràmetres. Quan aquestes corbes intersequen entre si, apareixen nous tipus de bifurcacions.

A continuació descriurem breument els casos més típics d'aquests tipus de fenòmens. No donarem una descripció de la derivació de les corresponents formes normals perquè això va més enllà dels objectius d'aquest treball.

## Bifurcacions de codimensió 1

### Bifurcació sella-node

Considerem el sistema depenent de dos paràmetres

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (45)$$

Suposem que, en  $(x^0, \alpha^0)$ ,  $F(x^0, \alpha^0) = 0$  i  $F_x(x^0, \alpha^0) = 0$  (condicions específiques de la bifurcació sella-node). Considerem el sistema d'equacions en  $(x, \alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{cases} F(x, \alpha) = 0 \\ F_x(x, \alpha) = 0 \end{cases}. \quad (46)$$

La matriu jacobiana associada a (46) és

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_{\alpha_1} & F_{\alpha_2} \\ F_{xx} & F_{x\alpha_1} & F_{x\alpha_2} \end{pmatrix}.$$



Llavors, si el rang de  $J$  és 2 en  $(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$ , pel teorema de la funció implícita existeix una corba en  $\mathbb{R}^3$  diferenciable que passa pel punt  $(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$  i que és solució de (46). Observem, per exemple, que si es donen les condicions de transversalitat i no degeneració de la bifurcació sella-node respecte de  $\alpha_1$

$$\begin{aligned} F_{xx}(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0) &\neq 0, \\ F_{\alpha_1}(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0) &\neq 0, \end{aligned} \tag{47}$$

aleshores  $\text{rang}(J)|_{(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)} = 2$ . En aquest cas, la corba solució de (46) es pot parametritzar per  $\alpha_2$ , és a dir, existeixen funcions diferenciables definides en un entorn  $A_2$  de  $\alpha_2^0$

$$\begin{aligned} x &: A_2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \alpha_1 &: A_2 \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

tals que  $x(\alpha_2^0) = x^0$ ,  $\alpha_1(\alpha_2^0) = \alpha_1^0$  i  $F(x(\alpha_2), \alpha_1(\alpha_2), \alpha_2) = 0$ ,  $F_x(x(\alpha_2), \alpha_1(\alpha_2), \alpha_2) = 0$  per a tot  $\alpha_2 \in A_2$ . A més, existeix un entorn  $A_2^0$  de  $\alpha_2^0$  tal que el sistema (45) té una bifurcació sella-node en  $(x(\alpha_2), \alpha_1(\alpha_2), \alpha_2)$  respecte de  $\alpha_1$  per a tot  $\alpha_2 \in A_2^0$  (ja que les condicions de transversalitat i no-degeneració donades per (47) es mantenen en un entorn de  $(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$ ).

Observem que la projecció de la corba anterior sobre el pla de paràmetres dóna lloc a una altra corba que forma part de la *frontera de bifurcació* de la bifurcació sella-node en  $(x^0, \alpha^0)$ . Per tant, la bifurcació sella-node en un sistema de dos paràmetres és un cas de bifurcació de codimensió  $2 - 1 = 1$ .

## Bifurcació d'Andronov-Hopf

Considerem el sistema dependent de dos paràmetres al pla

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{48}$$

on  $F(x, \alpha) = (F^1(x, \alpha), F^2(x, \alpha))^T$ . Suposem que, en  $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0)$ , el sistema té un punt d'equilibri  $x^0$  amb valors propis imaginaris  $\lambda(\alpha^0) = i\omega(\alpha^0)$  i  $\bar{\lambda}(\alpha^0) = -i\omega(\alpha^0)$  (condicions específiques de la bifurcació d'Andronov-Hopf). Considerem el sistema d'equacions en  $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{cases} F(x, \alpha) &= 0 \\ \text{tr}(D_x F)|_{(x, \alpha)} &= 0 \end{cases}, \tag{49}$$

on  $\text{tr}(D_x F)$  és la traça de la diferencial de  $F$  respecte de  $x$ .

Suposem que en  $(x^0, \alpha^0)$  es donen les condicions de no-degeneració i de transversalitat de la bifurcació

d'Andronov-Hopf respecte de  $\alpha_1$ ,

$$l_1 \neq 0, \mu_{\alpha_1}(\alpha^0) \neq 0,$$

on  $\mu(\alpha)$  és la part real dels valors propis associats a l'únic punt fix de  $F$  proper a  $x^0$ . Suposem també que aquest punt fix és l'origen per a tot  $\alpha_1$  en l'entorn que estem considerant. La matriu jacobiana associada a (49) és

$$J = \begin{pmatrix} F_{x_1}^1 & F_{x_2}^1 & F_{\alpha_1}^1 & F_{\alpha_2}^1 \\ F_{x_1}^2 & F_{x_2}^2 & F_{\alpha_1}^2 & F_{\alpha_2}^2 \\ F_{x_1 x_1}^1 + F_{x_1 x_2}^2 & F_{x_1 x_2}^1 + F_{x_2 x_2}^2 & F_{x_1 \alpha_1}^1 + F_{x_2 \alpha_1}^2 & F_{x_1 \alpha_2}^1 + F_{x_2 \alpha_2}^2 \end{pmatrix}.$$

Per hipòtesi,  $(x^0, \alpha^0)$  és solució de (49) perquè  $\text{tr}(D_x F)|_{(x^0, \alpha^0)} = \lambda(\alpha^0) + \bar{\lambda}(\alpha^0) = 0$ . Per tant, si el rang de  $J$  en  $(x^0, \alpha^0)$  és 3, pel teorema de la funció implícita existeix una corba en  $\mathbb{R}^4$  diferenciable que passa pel punt  $(x^0, \alpha^0)$  i que és solució de (49). Vegem que, de fet, el menor

$$J_0 = \begin{pmatrix} F_{x_1}^1 & F_{x_2}^1 & F_{\alpha_1}^1 \\ F_{x_1}^2 & F_{x_2}^2 & F_{\alpha_1}^2 \\ F_{x_1 x_1}^1 + F_{x_1 x_2}^2 & F_{x_1 x_2}^1 + F_{x_2 x_2}^2 & F_{x_1 \alpha_1}^1 + F_{x_2 \alpha_1}^2 \end{pmatrix}$$

té rang 3 en  $(x^0, \alpha^0)$ . Els valors propis de la diferencial de  $F$  en un punt genèric  $x = (x_1, x_2)$  s'expressen, en termes de les derivades de  $F$ , com

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \quad \bar{\lambda}(\alpha) = \mu(\alpha) - i\omega(\alpha), \quad \text{on}$$

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}(F_{x_1}^1 + F_{x_2}^2), \quad \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{(F_{x_1}^1 + F_{x_2}^2)^2 - 4(F_{x_1}^1 F_{x_2}^2 - F_{x_2}^1 F_{x_1}^2)}.$$

Per tant, el fet que els valors propis en  $(x^0, \alpha^0)$  siguin imaginaris purs no nuls es tradueix en les condicions

$$\begin{aligned} F_{x_1}^1 + F_{x_2}^2 &= 0, \\ F_{x_1}^1 F_{x_2}^2 - F_{x_2}^1 F_{x_1}^2 &> 0 \end{aligned} \tag{50}$$

en  $(x^0, \alpha^0)$ . D'altra banda, la condició de transversalitat es pot expressar com

$$F_{x_1 \alpha_1}^1 + F_{x_2 \alpha_1}^2 \neq 0 \quad \text{en } (x^0, \alpha^0). \tag{51}$$

També tenim (per hipòtesi) que existeix un entorn de  $\alpha_1^0$  en el qual l'origen és un punt fix del sistema, és a dir,

$$F(0, 0, \alpha_1, \alpha_2^0) = 0.$$

Derivant respecte de  $\alpha_1$  aquesta expressió tenim que

$$F_{\alpha_1}^1 = 0, F_{\alpha_1}^2 = 0 \text{ en } (x^0, \alpha^0).$$

Així, la matriu  $J_0$  és, de fet,

$$J_0 = \begin{pmatrix} F_{x_1}^1 & F_{x_2}^1 & 0 \\ F_{x_1}^2 & F_{x_2}^2 & 0 \\ F_{x_1 x_1}^1 + F_{x_1 x_2}^2 & F_{x_1 x_2}^1 + F_{x_2 x_2}^2 & F_{x_1 \alpha_1}^1 + F_{x_2 \alpha_1}^2 \end{pmatrix}$$

i  $\det J_0 = (F_{x_1 \alpha_1}^1 + F_{x_2 \alpha_1}^2) (F_{x_1}^1 F_{x_2}^2 - F_{x_2}^1 F_{x_1}^2) \neq 0$  per les condicions (50) i (51). Això prova que existeix una corba en  $\mathbb{R}^4$ , parametritzada per  $\alpha_2$ , que passa pel punt  $(x^0, \alpha^0)$  i és solució de (49). En aquesta corba es satisfan, per tant, les condicions generals de la bifurcació d'Andronov-Hopf. Finalment, atès que en  $(x^0, \alpha^0)$  es compleixen també les condicions de transversalitat i de no-degeneració, existeix un entorn de  $(x^0, \alpha^0)$  tal que aquestes condicions es satisfan sobre la corba. Podem assegurar, doncs, que existeix una corba parametritzada per  $\alpha_2$  sobre la qual el sistema (48) experimenta una bifurcació d'Andronov-Hopf respecte del paràmetre  $\alpha_1$ . Òbviament, el resultat és igualment vàlid si intercanviem el paper dels paràmetres  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .

Novament, la projecció de la corba anterior sobre el pla de paràmetres dóna lloc a una *frontera de bifurcació* de la bifurcació d'Andronov-Hopf en  $(x^0, \alpha^0)$ . La codimensió d'aquesta bifurcació torna a ser 1.

### Generalització a dimensió $n$

L'existència de corbes on es produeix una bifurcació sella-node o d'Andronov-Hopf en un entorn d'un punt es pot generalitzar també a sistemes en dimensió  $n$ . Suposem que tenim un sistema

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad n \geq 2,$$

que en un punt  $(x_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$  experimenta una bifurcació de tipus sella-node o d'Andronov-Hopf. Podem definir un sistema d'equacions en  $\mathbb{R}^{n+2}$  de la forma

$$\begin{cases} F(x, \alpha) = 0 \\ \psi(x, \alpha) = 0 \end{cases},$$

per a una funció escalar diferenciable  $\psi$ , que defineix condicions necessàries generals per a un o altre tipus de bifurcació. Llavors, si es satisfan les hipòtesis del teorema de la funció implícita, és a dir, si el rang de la matriu  $(n+1) \times (n+2)$

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_\alpha \\ \psi_x & \psi_\alpha \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, \alpha_0)}$$

és màxim, existeix una corba en  $\mathbb{R}^{n+2}$  que passa per  $(x_0, \alpha_0)$  i sobre la qual es produeix el mateix tipus de bifurcació.

Vegem com podem construir la funció  $\psi$ . En el cas de la bifurcació sella-node, és suficient considerar

$$\psi(x, \alpha) = \det(F_x(x, \alpha)).$$

Com que el determinant de la diferencial de  $F$  és igual al producte dels seus valors propis, la condició  $\det(F_x(x, \alpha)) = 0$  implica que algun dels valors propis és zero. D'altra banda, la presència d'una bifurcació sella-node en  $(x_0, \alpha_0)$  fa que el rang de  $J$  sigui màxim. Finalment, com que les condicions de no-degeneració i de transversalitat es mantenen en un entorn de  $(x_0, \alpha_0)$ , existeix una corba en  $\mathbb{R}^{n+2}$  on es satisfan les condicions de la bifurcació sella-node.

En el cas de la bifurcació d'Andronov-Hopf,  $\psi$  es pot definir com el producte de totes les sumes de parells de valors propis diferents (comptant multiplicitats) de  $F_x$ , és a dir,

$$\psi(x, \alpha) = \prod_{i>j} (\lambda_i + \lambda_j),$$

on  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  són els valors propis de  $F_x$ . Clarament, aquesta funció s'anul·la sobre qualsevol punt amb dos valors propis conjugats diferents. De forma anàloga al que succeeix amb la bifurcació sella-node, es pot veure que el rang de  $J$  és màxim si en  $(x_0, \alpha_0)$  es satisfan les condicions que defineixen la bifurcació d'Andronov-Hopf.

## Bifurcacions de codimensió 2

Fins ara hem vist que les bifurcacions sella-node i d'Andronov-Hopf són estables davant la pertorbació dels sistemes corresponents amb un segon paràmetre. Aquí el terme *estabilitat* fa referència al fet que en un entorn d'un punt de bifurcació  $(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$  existeix una corba en  $\mathbb{R}^{n+2}$  sobre la qual el sistema experimenta el mateix tipus de bifurcació. Les bifurcacions de les quals hem parlat es produeixen quan es satisfan una sèrie de condicions "específiques" del tipus de bifurcació considerat i unes condicions de "generalitat" (no-degeneració i transversalitat). En sistemes arbitraris en dimensió  $n$  cal també imposar la condició addicional que no hi hagi altres valors propis amb part real nul·la a part dels que intervenen en la bifurcació. Fins ara hem vist que, en les bifurcacions sella-node i d'Andronov-Hopf, tots aquests tipus de condicions es mantenen en un cert entorn d'un punt de bifurcació donat.

Ara ens ocuparem d'estudiar què li pot passar a un sistema quan alguna d'aquestes condicions és violada. Més concretament, estudiarem alguns canvis qualitius que es poden produir en un sistema quan, sobre una corba en què es satisfan les condicions específiques, alguna de les altres condicions deixa de complir-se. Això ens introduirà en el camp de les bifurcacions de codimensió 2 en sistemes de dos paràmetres.

Situem-nos, doncs, en el cas d'un sistema dependent de dos paràmetres que, al voltant d'un punt de bifurcació d'un tipus determinat, té una corba sobre la qual se satisfan les condicions específiques de la bifurcació considerada (a partir d'ara, per simplificar, anomenarem *corba de bifurcació* a qualsevol corba d'aquest tipus). Aleshores la resta de condicions poden deixar de satisfer-se perquè

- (a) altres valors propis s'acosten a l'eix imaginari i passen a tenir part real zero, de manera que les dimensions del subespai central i de la varietat central augmenten;
- (b) alguna condició de no-degeneració no es compleix;
- (c) alguna condició de transversalitat és violada.

A priori, qualsevol d'aquests fenòmens pot donar lloc a dinàmiques noves en el sistema. Segons el tipus de bifurcacions de codimensió 1 que estiguem tractant i segons quina sigui la naturalesa de les condicions no satisfetes, parlarem d'una classe de bifurcació de codimensió 2 o d'una altra. Aquí ens centrarem només en dos tipus de bifurcacions que apareixen quan, sobre una corba de bifurcació sella-node, ocorre un dels dos fenòmens següents:

- (1) La varietat central segueix sent unidimensional però la condició de no-degeneració de la bifurcació sella-node no es satisfà. Això defineix una bifurcació de tipus *cúspide* (*cusp* en anglès).
- (2) Un valor propi real addicional es fa zero i la varietat central esdevé 2-dimensional. Aquesta és la condició que defineix una bifurcació de *Bogdanov-Takens*, que només pot donar-se en un sistema de dimensió  $n \geq 2$ .

A continuació descriurem les formes normals associades a aquestes dues bifurcacions de codimensió 2 per poder estudiar-ne els tipus de dinàmiques.

## Bifurcació cúspide

Considerem el sistema

$$\dot{\eta} = F(\eta, \beta) = \beta_1 + \beta_2\eta - \eta^3, \quad (52)$$

$\eta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ . Observem que pot tenir entre un i tres punts d'equilibri. Per a  $\beta = (0, 0)$ , hi ha un únic punt fix a l'origen, que satisfà  $F(0, 0) = 0$ , per tant es donen les condicions específiques de la bifurcació sella-node. Com que  $F_{\beta_1}(0, 0) = 1$ , la condició de transversalitat respecte el paràmetre  $\beta_1$  també es compleix. No obstant,  $F_{\eta\eta}(0, 0) = 0$ , per tant no es dona la condició de no-degeneració.

Considerem el sistema d'equacions que defineix les condicions específiques de la bifurcació sella-node, que té una solució en  $(\eta^0, \beta^0) = (0, 0)$ :

$$\begin{cases} F(\eta, \beta) = \beta_1 + \beta_2\eta - \eta^3 = 0 \\ F_\eta(\eta, \beta) = \beta_2 - 3\eta^2 = 0 \end{cases} \quad (53)$$

La diferencial associada en  $(0, 0)$  és

$$\left( \begin{array}{ccc} F_\eta & F_{\beta_1} & F_{\beta_2} \\ F_{\eta\eta} & F_{\eta\beta_1} & F_{\eta\beta_2} \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que té rang 2 i

$$\det \left( \begin{array}{cc} F_{\beta_1} & F_{\beta_2} \\ F_{\eta\beta_1} & F_{\eta\beta_2} \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per tant, pel teorema de la funció implícita existeix una corba en  $\mathbb{R}^3$ , parametritzada per  $\eta$ , que passa per  $(x^0, \beta^0) = (0, 0)$  i sobre la qual es satisfan les equacions de (53). La projecció d'aquesta corba sobre el pla de paràmetres  $(\beta_1, \beta_2)$  és una altra corba  $T$  que satisfà l'equació

$$4\beta_2^3 - 27\beta_1^2 = 0.$$

Aquesta corba té dues branques que es troben en el punt  $(\beta_1^0, \beta_2^0) = (0, 0)$ , on són tangents a la recta  $\beta_1 = 0$  (Fig. 7). Observem que la condició de no-degeneració  $F_{\eta\eta} = -6\eta \neq 0$  es satisfà en qualsevol parell  $(\beta_1(\eta), \beta_2(\eta))$  tal que  $\eta \neq 0$ , per tant es compleix sobre la corba anterior excepte en  $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ . Les condicions de transversalitat respecte cadascun dels paràmetres,  $F_{\beta_1} = 1 \neq 0$  i  $F_{\beta_2} = \eta \neq 0$  també es compleixen en qualsevol punt de la corba diferent de l'origen. Per tant, en "travessar" qualsevol punt sobre la corba  $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ , el sistema experimenta una bifurcació de tipus sella-node. Així, en un entorn de  $T$  i per a paràmetres fora de la corba, l'origen  $\eta = 0$  és un punt fix hiperbòlic i el comportament local del sistema en un entorn de l'origen no canvia si no travessem la corba.

La corba  $T$  divideix l'espai de paràmetres en dues regions, que anomenarem A i B en analogia a la notació de la Figura 7. Estudiem la dinàmica en la regió A. Podem agafar com a model el cas  $\beta_1 = 0, \beta_2 > 0$ . En aquesta situació,  $F(\eta) = \beta_2\eta - \eta^3 = \eta(\beta_2 - \eta^2)$ . Com que  $\beta_2 > 0$ , el sistema té tres punts d'equilibri: 0 i  $\pm\sqrt{\beta_2}$ . L'origen és repulsor, mentre que  $\pm\sqrt{\beta_2}$  són atractors ( $F_\eta(0) = \beta_2 > 0$  i  $F_\eta(\pm\sqrt{\beta_2}) = -2\beta_2 < 0$ ). Per tant, qualsevol sistema amb paràmetres en A prou propers a la corba  $T$  té un punt d'equilibri repulsor i dos d'atractors. A més, l'única disposició possible d'aquests tres punts en la recta real és  $x_s^1 < x_u < x_s^2$ , on  $x_u$  denota el punt repulsor i  $x_s^{1,2}$ , els punts atractors.

Per estudiar la dinàmica en B podem considerar el cas  $\beta_1 = 0, \beta_2 < 0$ . Aquesta vegada hi ha un únic punt d'equilibri a l'origen, que és atractor perquè  $F_\eta(0) = \beta_2 < 0$ . Això indica que els sistemes amb paràmetres

en B en un entorn de  $T$  tenen un únic punt d'equilibri atractor.

En passar de A a B creuant  $T$  per un punt diferent de  $(0, 0)$ , el punt fix repulsor i un dels punts atractors col·lapsen en un mateix punt i posteriorment desapareixen. En un entorn del punt atractor restant no hi ha cap canvi qualitatiu. Si denotem per  $T_1, T_2$  les dues branques de la corba  $T$ , els punts que col·lapsen en creuar  $T_1$  són  $x_u$  i  $x_s^2$ , mentre que els que col·lapsen en creuar  $T_2$  són  $x_s^1$  i  $x_u$ . Finalment, en passar de A a B per l'eix  $\beta_1 = 0$  (és a dir, a través de l'origen), *tots tres punts* col·lapsen en un de sol, que es manté un cop hem entrat en la regió B (Fig. 7).

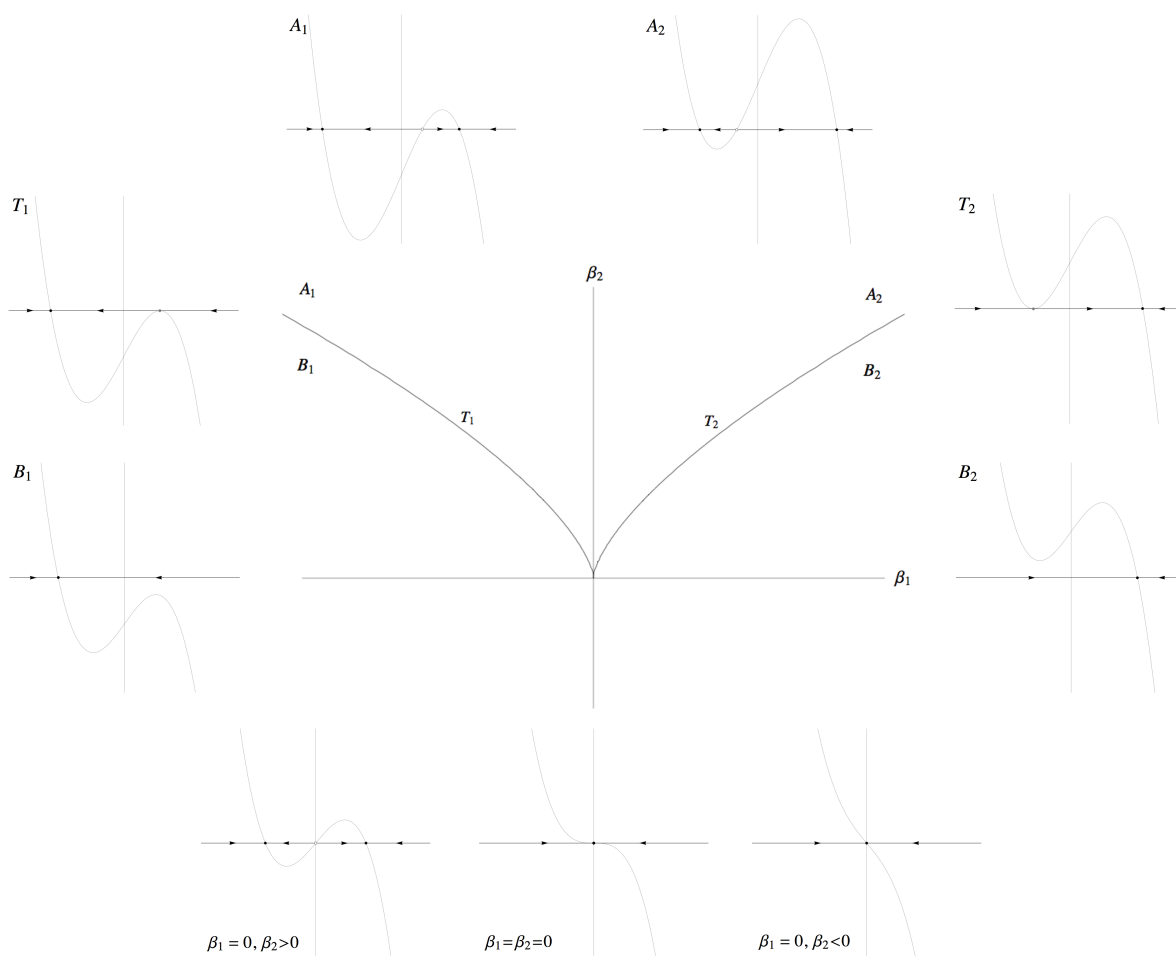


Figura 7: Diagrama de bifurcació de la bifurcació cúspide. A la perifèria del gràfic principal hi ha un esquema representatiu de la funció camp en cadascuna de les regions destacades del pla de paràmetres. Es veu clarament com en nombre de punts d'equilibri i la seva estabilitat varien en creuar la corba  $T$  en els diferents punts.

**Teorema 19.** Considerem el sistema

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (54)$$

Suposem que en  $(x^0, \alpha^0) = (0, 0)$  es satisfan les condicions específiques de la bifurcació cúspide:

1.  $F(x^0, \alpha^0) = 0$ ,
2.  $F_x(x^0, \alpha^0) = 0$ ,
3.  $F_{xx}(x^0, \alpha^0) = 0$ .

Suposem també que es donen les condicions de generalitat següents:

5.  $F_{xxx}(x^0, \alpha^0) \neq 0$ ,
6.  $\det \begin{pmatrix} F_{\alpha_1} & F_{\alpha_2} \\ F_{x\alpha_1} & F_{x\alpha_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x^0, \alpha^0)} \neq 0$ .

Aleshores (54) és topològicament equivalent, prop de l'origen, a un dels dos sistemes

$$\dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3,$$

que en conjunt anomenem *la forma normal de la bifurcació cúspide*.

Observem que les condicions específiques (1) i (2) i la condició de generalitat (6) impliquen que existeix una corba de bifurcació sella-node, és a dir, sobre la qual es satisfà el sistema (46), parametritzada per  $x$  i que passa per  $(x^0, \alpha^0)$ .

De la mateixa manera que en les situacions anteriors, la bifurcació cúspide es pot generalitzar per a un sistema de dimensió  $n$  arbitrària. En aquest cas, el teorema anterior s'aplica a la dinàmica restringida a la varietat central. Així, la forma normal de la bifurcació cúspide en dimensió  $n$  és

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3 \\ \dot{\xi} = -\xi \\ \dot{\zeta} = \zeta \end{cases}, \quad (55)$$

on  $\eta \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n_-}$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^{n_+}$  i  $n_-$ ,  $n_+$  són el nombre de valors propis amb part real negativa i positiva en el punt d'equilibri crític, respectivament.



## Bifurcació de Bogdanov-Takens

Considerem el sistema 2-dimensional

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 - \eta_1\eta_2 \end{cases}, \quad (56)$$

on  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$  i  $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Els punts d'equilibri de (56) estan sobre la recta d'equació  $\eta_2 = 0$  i són solucions de

$$\beta_1 + \beta_2\eta_1 + \eta_1^2 = 0.$$

Aquesta equació en  $\eta_1$  pot tenir dues, una o cap solucions en funció del signe del discriminant  $\Delta = \beta_2^2 - 4\beta_1$ . Considerem la corba en l'espai de paràmetres en què el discriminant s'anul·la:

$$\Gamma^{sn} = \{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 : \beta_2^2 = 4\beta_1\}.$$

Sobre aquesta corba, el sistema (56) té un únic punt d'equilibri. A més, la matriu de la diferencial en un punt d'equilibri  $\eta^0 = (\eta_1^0, 0) = (-\beta_2/2, 0)$  per a  $(\beta_1, \beta_2) \in \Gamma^{sn}$  és

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_2 + 2\eta_1^0 & -\eta_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta_2/2 \end{pmatrix},$$

per tant  $\eta^0$  té associats els valors propis  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = \beta_2/2$ . Fixem ara  $\beta_2 \neq 0$  i pensem en (56) com un sistema dependent del paràmetre  $\beta_1$ . Quan  $\beta_1^0 = \beta_2^2/4$ , aquest sistema té un únic punt d'equilibri  $\eta^0 = (-\beta_2/2, 0)$ , que té associat un valor propi zero i un altre diferent de zero. En moure  $\beta_1$  al voltant del valor crític  $\beta_1^0 = \beta_2^2/4$ , el sistema passa de tenir dos punts d'equilibri a no tenir-ne cap, o a la inversa. Es pot veure que, de fet, es satisfan les condicions de no-degeneració i de transversalitat que defineixen la bifurcació sella-node.

Els dos punts d'equilibri apareixen quan  $\beta_1$  travessa el valor crític en sentit negatiu (o “de dreta a esquerra”). Aquests punts són  $p_{1,2} = (a_{1,2}, 0)$ , on

$$a_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\beta_2 \mp \sqrt{\Delta} \right).$$

La matriu de la diferencial en  $p_{1,2}$  és

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_2 + 2a_{1,2} & -a_{1,2} \end{pmatrix},$$

que té valors propis  $\lambda_{1,2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( -a_{1,2} \pm \sqrt{a_{1,2}^2 + 4(\beta_2 + 2a_{1,2})} \right)$ . Com que  $\beta_2 + 2a_{1,2} = \mp\sqrt{\Delta}$ ,

$$\lambda_1^{\pm} = \frac{1}{2} \left( -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4\sqrt{\Delta}} \right), \quad \lambda_2^{\pm} = \frac{1}{2} \left( -a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4\sqrt{\Delta}} \right).$$

Com que  $\beta_2 \neq 0$ , en un entorn de  $\Gamma^{sn}$  tenim que  $\sqrt{\Delta} < |\beta_2|$ ,  $a_{1,2} \neq 0$  i  $\sqrt{\Delta} < \frac{a_{1,2}^2}{4}$ . Suposem que ens movem en aquest entorn. Distingim casos:

- Si  $\beta_2 < 0$ , aleshores  $a_{1,2} > 0$ . Això implica que  $p_1$  és un node atractor ( $\lambda_1^- < 0$  i  $\lambda_1^+ < 0$ ) i que  $p_2$  és una sella ( $\lambda_2^- < 0$  i  $\lambda_2^+ > 0$ ).
- Si  $\beta_2 > 0$ , tenim que  $a_{1,2} < 0$ . En aquest cas,  $p_1$  és un node repulsor ( $\lambda_1^- > 0$  i  $\lambda_1^+ > 0$ ) i  $p_2$  és una sella ( $\lambda_2^- < 0$  i  $\lambda_2^+ > 0$ ).

Observem també que en la regió en què  $\beta_2 > 0$  hi ha una corba sobre la qual el punt  $p_1$  pateix una transició node-focus o a l'inrevés (depenent del sentit en què es modifiquin els paràmetres). Aquesta corba està determinada per la condició que el discriminant de l'equació que defineix els valors propis de  $p_1$  sigui zero, és a dir,

$$a_1^2 - 4\sqrt{\Delta} = 0,$$

que, en termes dels paràmetres, es pot expressar com

$$\beta_2^2 - 2\beta_1 + (\beta_2 - 8) \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1} = 0.$$

D'altra banda, sobre l'eix vertical  $\beta_1 = 0$ , hi ha un punt d'equilibri els dos valors propis del qual sumen zero. Quan  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 > 0$ , el punt és  $p_2$  i correspon a una sella amb valors propis oposats:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2^2 = \beta_2^2 - 4\beta_1 \\ \beta_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1} = \sqrt{\Delta} \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2^-, \lambda_2^+ \in \mathbb{R} \\ \lambda_2^- + \lambda_2^+ = 0 \end{cases}.$$

Quan  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 < 0$ , el punt és  $p_1$  i és un focus no hiperbòlic:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2^2 = \beta_2^2 - 4\beta_1 \\ \beta_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = -\sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1} = -\sqrt{\Delta} \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^-, \lambda_1^+ \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \lambda_1^- + \lambda_1^+ = 0 \end{cases}.$$

De fet, sobre el semieix  $\{\beta_1 = 0, \beta_2 < 0\}$   $p_2$  passa de ser focus atractor a repulsor (si ens movem de dreta a esquerra) i hi ha una bifurcació d'Andronov-Hopf supercrítica. Quan el focus esdevé repulsor, neix també una òrbita periòdica atractora. No hi ha cap altra bifurcació local en els punts d'equilibri del sistema.

Ara bé, observem què ocorre si donem una volta, en l'espai de paràmetres, al voltant de l'origen. Situem-nos primer en la regió on no hi ha punts fixos. Girant en sentit horari, en un cert moment creuem la

corba de la bifurcació sella-node i apareixen dos punts d'equilibri: una sella i un node atractor. Si seguim avançant, arriba un moment en què el node esdevé un focus atractor (hem creuat la corba de transició node-focus). Continuem girant en el mateix sentit fins creuar la corba de la bifurcació d'Andronov-Hopf, moment en què el focus es fa repulsor i neix una òrbita periòdica atractora. Seguim avançant i el focus passa a ser un node quan creuem de nou la corba de transició node-focus. Finalment, en creuar un cop més la corba de la bifurcació sella-node, el node i la sella desapareixen i tornem a estar en la mateixa situació de partida (Fig. 8).

Analitzem ara què ocorre amb l'òrbita periòdica que neix arran de la bifurcació d'Andronov-Hopf. Sabem que en la regió del pla de paràmetres on hem començat la volta no hi ha cap òrbita periòdica (perquè no hi ha cap punt fix i, per la Proposició 3, si hi hagués una òrbita periòdica hauria de contenir un punt fix). Per tant, és clar que en algun moment del camí que hem recorregut l'òrbita periòdica ha de desaparèixer. De fet, es pot veure que existeix una corba addicional en l'espai de paràmetres sobre la qual el sistema experimenta una bifurcació de tipus global que destrueix l'òrbita periòdica. Es tracta d'una bifurcació de tipus *sella homoclínica*. En donem alguns detalls a continuació.

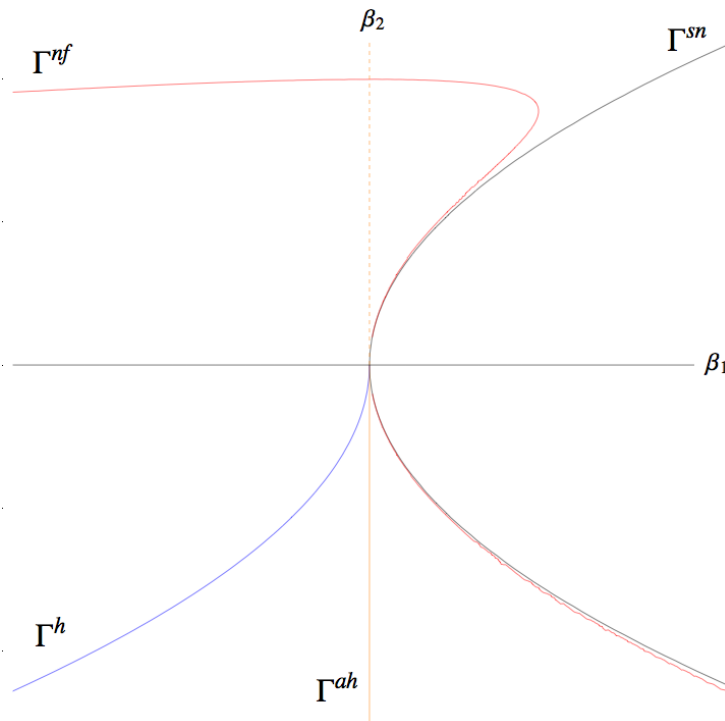


Figura 8: Punts i corbes de bifurcació per a la forma normal de la bifurcació de Bogdanov-Takens. Es mostren les corbes de la bifurcació sella-node ( $\Gamma^{sn}$ ), de la transició node-focus ( $\Gamma^{nf}$ ), de la bifurcació d'Andronov-Hopf ( $\Gamma^{ah}$ ) i l'aproximació de la corba relativa a la sella homoclínica ( $\Gamma^h$ ) donada per la Proposició 13. La línia discontinua indica la corba sobre la qual el sistema té una sella amb valors propis oposats.

**Definició 26.** Sigui  $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^n$  una òrbita amb condició inicial en  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi_t(x)$  està definit per a tot  $t \in \mathbb{R}$ . Es diu que  $\Gamma_0$  és *homoclínica a un punt d'equilibri*  $x_0$  si  $\varphi_t(x) \rightarrow x_0$  quan  $t \rightarrow \pm\infty$ . Es diu que

és heteroclínica als punts d'equilibri  $x_1$  i  $x_2$  si  $\varphi_t(x) \rightarrow x_1$  quan  $t \rightarrow -\infty$  i  $\varphi_t(x) \rightarrow x_2$  quan  $t \rightarrow +\infty$ .

Observem que si  $\Gamma_0$  és una òrbita homoclínica a  $x_0$ , està continguda a la intersecció de les varietats estable i inestable de  $x_0$  (i, en particular, cap d'aquestes dues varietats pot ser buida). El resultat següent afirma que qualsevol òrbita homoclínica a un punt d'equilibri hiperbòlic és inestable.

**Proposició 12.** Una òrbita homoclínica a un punt d'equilibri hiperbòlic és estructuralment inestable.

Així, el retrat de fase d'un sistema dependent de paràmetres genèric que presenti una òrbita homoclínica a un punt hiperbòlic variarà qualitativament (en un entorn d'aquesta òrbita) en modificar els paràmetres. Per estudiar les òrbites homoclíniques al voltant d'un paràmetre de bifurcació necessitem introduir, primer, algunes definicions.

Sigui  $\dot{x} = F(x, \alpha)$  un sistema al pla dependent d'un paràmetre. Considerem el sistema corresponent quan  $\alpha = 0$ , i suposem que té una òrbita homoclínica  $\Gamma_0$  a una sella  $x_0$ . Siguin  $W^s(x_0)$  i  $W^u(x_0)$  les varietats estable i inestable associades a  $x_0$ , respectivament. Sigui  $\Sigma$  una secció transversal a  $W^s(x_0)$  a prop de  $x_0$ , és a dir, una corba que talla  $W^s(x_0)$  transversalment en un punt proper a  $x_0$  (*transversalment* significa que els vectors tangents a  $\Sigma$  i a  $\Gamma_0$  en el punt de tall són linealment independents). Prenem un sistema de coordenades sobre  $\Sigma$  determinat per  $\xi$  de manera que el punt d'intersecció entre  $\Sigma$  i  $\Gamma_0$  correspongui a  $\xi = 0$ . Com que  $\Gamma_0$  és homoclínica a  $x_0$ , la varietat inestable  $W^u(x_0)$  talla la secció transversal  $\Sigma$  exactament en  $\xi = 0$ .

Suposem ara que pertorbem lleugerament el sistema anterior ( $\alpha \neq 0$ ) i definim anàlogament la secció  $\Sigma$ . Aleshores podem definir  $\beta(\alpha)$  com la coordenada  $\xi$  del punt en què  $\Sigma$  talla  $W^u(x_0)$ . Si l'òrbita homoclínica desapareix,  $\beta(\alpha)$  passarà a ser lleugerament negativa o positiva. Anomenem a  $\beta(\alpha)$  *funció de trencament*.

**Teorema 20. (Andronov i Leontovich)** Sigui

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

un sistema tal que, per a  $\alpha = 0$ ,  $x_0 = 0$  és un punt d'equilibri de tipus sella. Suposem que els valors propis associats a  $x_0$  són  $\lambda_1(0) < 0 < \lambda_2(0)$  i que  $\Gamma_0$  és una òrbita homoclínica a  $x_0$  del sistema quan  $\alpha = 0$ . Suposem que es satisfan les condicions següents:

1.  $\sigma(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0$ ,
2.  $\beta'(0) \neq 0$ .

Aleshores, per a  $|\alpha|$  suficientment petit, existeix un entorn obert  $U_0$  de  $\Gamma_0 \cup \{x_0\}$  en el qual una única òrbita periòdica  $L_\beta$  es bifurca des de  $\Gamma_0$ . Aquesta òrbita existeix quan  $\beta < 0$  o bé quan  $\beta > 0$  (dependent del sentit amb què s'hagi definit la funció  $\beta$ ). A més,  $L_\beta$  és atractora si  $\sigma(0) < 0$  i repulsora si  $\sigma(0) > 0$ .

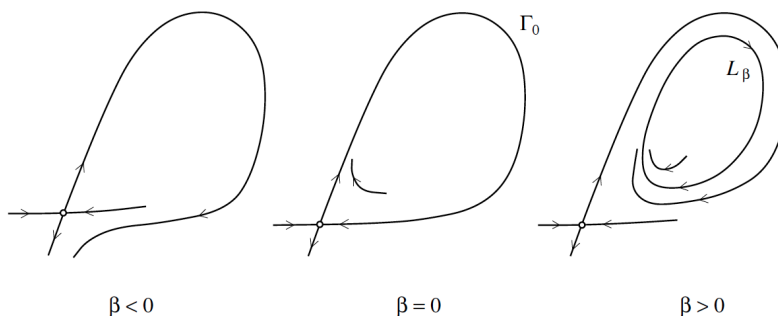


Figura 9: Bifurcació de tipus sella homoclínica (figura obtinguda de [4]).

Tornem ara al sistema (56) que estàvem analitzant. La proposició següent mostra que (56) té una bifurcació de tipus sella homoclínica sobre una corba en l'espai de paràmetres.

**Proposició 13.** Considerem el sistema (56). Existeix una única corba diferenciable  $\Gamma^h$  en l'espai de paràmetres sobre la qual el sistema experimenta una bifurcació de tipus sella homoclínica. Aquesta corba neix a l'origen i localment és de la forma

$$\Gamma^h = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2), \beta_2 < 0 \right\}.$$

A més, per a  $\|(\beta_1, \beta_2)\|$  suficientment petit, el sistema té una única òrbita periòdica atractora per a valors dels paràmetres en la regió delimitada per la corba de bifurcació d'Andronov-Hopf i la corba  $\Gamma^h$ , i no té cap òrbita periòdica fora d'aquesta regió.

Per finalitzar aquesta secció cal afegir que el sistema (56) és, de fet, una forma normal per a la bifurcació de Bogdanov-Takens. Això permet definir de manera general aquesta bifurcació: direm que un sistema depenent de dos paràmetres experimenta una bifurcació de Bogdanov-Takens si és localment topològicament equivalent a (56). Tot i que, de manera anàloga al que ocorre amb altres tipus de bifurcacions, es poden donar condicions específiques i de generalitat també per a la bifurcació de Bogdanov-Takens, no ens estendrem aquí en aquests detalls perquè la seva formulació és llarga i delicada.

## 4 El model de Wilson i Cowan

### Un model de xarxa neuronal

La complexitat inherent als sistemes biològics fa molt complexa la construcció de models amb capacitat explicativa o predictora. Una de les preguntes principals és quina o quines són les variables que un bon model hauria de tenir en compte. A priori hi ha molts models possibles, i la dificultat comença en el moment en què cal decidir quins són els aspectes del sistema que són rellevants pel problema d'estudi i quines són les variables que més fortament en determinen l'evolució. Aquesta qüestió és una de les més fonamentals perquè marca de forma decisiva les característiques del model i, per tant, la seva capacitat explicativa.

L'estudi de les xarxes neuronals n'és un exemple paradigmàtic. Una xarxa neuronal és un entramat de cèl·lules nervioses connectades entre si –les neurones– a través de la qual circula un flux d'informació. Aquesta informació es manifesta en forma de diferència de potencial elèctric entre un costat i un altre de la membrana cel·lular. En estat de repòs, la diferència de potencial d'una neurona és propera a un valor d'equilibri, que està al voltant dels  $-70$  mV. Diferents factors ambientals, com la presència de senyals químics, poden fer fluctuar el potencial de membrana per sobre o per sota d'aquest valor, però generalment hi ha un retorn al valor inicial d'equilibri. Només quan el potencial sobrepassa un cert valor llindar, es produeix un seguit de canvis en la membrana que fan que el potencial s'elevi de forma sobtada molt per sobre del potencial d'equilibri. Aquest *potencial d'acció* s'estén per tota la membrana cel·lular i marca un estat diferenciat en la fisiologia de la neurona que anomenem *activació*. No obstant això, la durada d'un potencial d'acció és extremadament curta: immediatament després, la neurona entra en un període refractari, encara que transitori, durant el qual ha de rebre estímuls molt més potents per a poder-se tornar a activar.

La comunicació entre les neurones d'una xarxa es fonamenta en l'enviament de senyals químics –a través de *neurotransmissors*– que modifiquen la fisiologia de la membrana de la neurona receptora. Aquesta comunicació, però, només és possible entre neurones que estan prèviament “connectades” en l'espai. La connexió, en aquest context, no és més que la proximitat entre un axó de la neurona emissora i una dendrita de la receptora en una regió que anomenem *sinapsi*. A més a més, l'efectivitat de la transmissió d'informació depèn fortament de la configuració de les estructures que formen la sinapsi. En aquest sentit, podem parlar de sinapsis dèbils i sinapsis més fortes. D'altra banda, les connexions poden ser excitatòries (quan l'activació de la neurona emissora augmenta la probabilitat d'activació de la receptora) o inhibidores (si l'activació de la neurona emissora fa disminuir la probabilitat d'activació de la neurona receptora). És important remarcar que una mateixa neurona pot emetre i rebre informació de milers d'altres neurones. En general, s'accepta que una mateixa neurona té un paper o bé excitador o bé inhibidor sobre totes les neurones amb les quals té contacte, però no un comportament mixt.

La multitud de configuracions possibles d'una xarxa –pel que fa a la distribució de les connexions i a la naturalesa de cadascuna de les sinapsis– fa que, a priori, una enorme diversitat de patrons de connectivitat siguin possibles. Es creu que la connectivitat està íntimament relacionada amb l'activitat de les xarxes i, en definitiva, amb la seva capacitat de computació. Per tant, qualsevol model neuronal hauria d'incorporar informació sobre la connectivitat. Com que la naturalesa de les connexions es pot descriure a múltiples nivells, abans de formular un model cal plantejar-se a fons quines són les propietats que és important que reflecteixi. Al mateix temps, és essencial decidir quins aspectes de la dinàmica neuronal són informatius a l'hora de descriure, amb la finalitat de comprendre, com funcionen les xarxes neuronals.

## El model de Wilson i Cowan

L'any 1972, Hugh R. Wilson i Jack D. Cowan, de la Universitat de Chicago, van publicar un article on proposaven un model per a la dinàmica d'una xarxa de neurones. L'article ha tingut una gran influència en el desenvolupament de la neurociència teòrica i computacional, i ha estat el punt de partida de diversos treballs posteriors.

El model de Wilson i Cowan és un sistema d'equacions diferencials ordinàries per a l'activació al llarg del temps d'una població de neurones interconnectades. El component clau del model és el tractament de la xarxa en termes estadístics, en el sentit que les variables del sistema no depenen de les configuracions individuals de cadascuna de les neurones sinó de propietats globals de la xarxa. Els autors justifiquen l'elecció d'un esquema d'aquestes característiques d'aquesta manera:

*It is probably true that studies of primitive nervous systems should be focused on individual nerve cells and their precise, genetically determined interactions with other cells. Although such an approach may also be appropriate for many parts of the mammalian nervous system, it is not necessarily suited to an investigation of those parts which are associated with higher functions, such as sensory information processing and the attendant complexities of learning, memory storage, and pattern recognition. There are several reasons why a shift in emphasis is warranted in the investigation of such problems. There is first of all the pragmatic point that since sensory information is introduced into the nervous system in the form of largescale spatiotemporal activity in sheets of cells, the number of cells involved is simply too vast for any approach starting at the single cell level to be tractable. Closely related to this is the observation that since pattern recognition is in some sense a global process, it is unlikely that approaches which emphasize only local properties will provide much insight. Finally, it is at least a reasonable hypothesis that local interactions between nerve cells are largely random, but that this local randomness gives rise to quite precise long-range interactions. Here an example from physics suggests itself. If a fluid is observed at the molecular level, what is seen*

*is brownian motion, whereas the same fluid, viewed macroscopically, may be undergoing very orderly streamlined flow. Following up this analogy, we shall develop a deterministic model for the dynamics of neural populations. This may be interpreted as a treatment of the mean values of the underlying statistical processes [5].*

El model de Wilson i Cowan descriu l'evolució temporal de l'activitat mitjana de dues poblacions de neurones –excitatòries i inhibidòries– que formen part d'una mateixa xarxa. Aquí, el terme “activitat mitjana” fa referència a la proporció de cèl·lules de cada població que estan actives per unitat de temps. Aquesta activitat depèn fonamentalment de propietats intrínseques de la xarxa i de la robustesa mitjana de les sinapsis excitatòries–excitatòries, excitatòries–inhibidòries, etcètera. El model també té en compte la influència d'estímuls externs a la xarxa. El resultat és un sistema de dues equacions diferencials ordinàries dependent de paràmetres. A continuació descriurem breument els passos que porten a la formulació del model, tal i com van ser proposats per Wilson i Cowan en el seu article original [5].

## Formulació

Suposem que tenim una xarxa de neurones que podem agrupar en una població excitatòria i en una d'inhibidòria. Suposem que les cèl·lules estan prou a prop i les seves connexions són aleatòries i prou abundants perquè hi hagi almenys un camí que connecta dues neurones qualssevol de la xarxa. Les variables del model són la proporció de cèl·lules excitatòries i inhibidòries que estan actives per unitat de temps, que anomenem  $E(t)$  i  $I(t)$ , respectivament. Considerem com a unitat temporal el mil·lisegon (ms).

Assumim que una neurona esdevé activa quan no està dins del període refractari (diem que és *sensible*) i rep un nivell d'excitació més gran o igual que el seu llindar d'activació. Suposem també que, després de l'emissió d'un potencial d'acció, cada neurona entra en un període refractari *absolut*, de durada  $r$  ms, durant el qual no pot activar-se (independentment del nivell d'excitació rebuda). Sota aquestes hipòtesis, la proporció de cèl·lules excitatòries que són refractàries en un instant  $t$  és

$$\int_{t-r}^t E(s) ds.$$

Per tant, la proporció de cèl·lules que a temps  $t$  són sensibles és

$$1 - \int_{t-r}^t E(s) ds,$$

i tenim expressions anàlogues per a la població de cèl·lules inhibidòries.



Siguin  $S_e$  i  $S_i$  funcions que defineixen les proporcions de cèl·lules excitatòries i inhibidores que reben una excitació per sobre del seu llindar per unitat de temps. L'argument d'aquestes funcions és el nivell mitjà d'excitació dins de cada subpoblació. Deduirem algunes propietats que han de satisfer les funcions  $S_e$  i  $S_i$ .

Situem-nos en una de les dues subpoblacions de neurones i sigui  $S$  la funció corresponent. Suposem que totes les cèl·lules estan connectades amb la resta de la xarxa de la mateixa manera, de forma que reben, en mitjana, el mateix nivell d'excitació. Si el llindar d'activació dins la subpoblació segueix una distribució  $D(\theta)$  i  $x(t)$  és el nivell mitjà d'excitació a temps  $t$ , llavors

$$S(x(t)) = \int_{-\infty}^{x(t)} D(\theta) d\theta.$$

Suposem ara que totes les cèl·lules tenen el mateix llindar  $\theta_0$  però que el nombre de connexions que rep cada neurona segueix una certa distribució  $C(w)$ . Si  $x(t)$  és el nivell mitjà d'excitació d'una sinapsi a temps  $t$ , tenim que

$$S(x(t)) = \int_{\theta_0/x(t)}^{\infty} C(w) dw,$$

ja que  $\theta_0/x(t)$  és el nombre mínim de sinapsis que ha de tenir una neurona per rebre un nivell d'excitació per sobre del seu llindar a temps  $t$ .

Observem que en les dues expressions anteriors,  $S$ , com a funció de  $x$ , és creixent i té dues asíptotes horitzontals en 0 i en 1. Si, a més, les distribucions  $D(\theta)$  i  $C(w)$  són unimodals, és a dir, tenen un únic màxim relatiu, llavors  $S$  té un únic punt d'inflexió. Anomenem *sigmoidal* a qualsevol funció amb aquestes tres propietats. A partir d'ara assumirem que  $S_e$  i  $S_i$  són de tipus sigmoidal.

Fixem-nos en la subpoblació excitatòria. Suposem que  $a$  i  $b$  són coeficients positius que representen el nombre mitjà de sinapsis excitatòries i inhibidores que rep una neurona excitatòria. Sigui  $P$  un estímul extern. Assumim que l'efecte dels estímuls que reben les diferents cèl·lules és additiu i que l'efecte de l'estimulació decau a raó  $\alpha(t)$ . El nivell d'excitació mitjana rebuda en un instant de temps  $s$  és

$$aE(s) - bI(s) + P.$$

D'aquesta excitació mitjana, el nivell que perdura a temps  $t > s$  es pot expressar com

$$\alpha(t-s) [aE(s) - bI(s) + P].$$

Així, el nivell d'excitació mitjana en la població excitatòria a temps  $t$  és

$$x_e(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(t-s) [aE(s) - bI(s) + P] ds.$$

Anàlogament, l'expressió per a la població inhibidora és del tipus

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(t-s) [cE(s) - dI(s) + Q] ds,$$

on  $c, d > 0$  són els coeficients sinàptics de la població inhibidora i  $Q$  és l'estimulació externa que rep aquesta població.

Tal i com hem comentat abans, assumim que una neurona esdevé activa quan és sensible i rep un nivell d'excitació més gran o igual que el seu llindar. Suposarem també que l'activació es produeix amb un retard temporal de  $\tau_e$  i  $\tau_i$  ms, respectivament. També considerarem que el fet que una neurona sigui sensible i el fet que rebí excitació per sobre del seu llindar són fenòmens independents, de manera que la probabilitat que una cèl·lula estigui en aquesta situació és igual al producte de les probabilitats corresponents. Sota aquestes hipòtesis, la proporció mitjana de cèl·lules actives en la subpoblació excitatòria a temps  $t + \tau_e$  és

$$E(t + \tau_e) = \left(1 - \int_{t-r}^t E(s) ds\right) S_e(x_e(t)) = \left(1 - \int_{t-r}^t E(s) ds\right) S_e\left(\int_{-\infty}^t \alpha(t-s) [aE(s) - bI(s) + P] ds\right). \quad (57)$$

En el cas de les neurones inhibidores obtenim l'expressió

$$I(t + \tau_i) = \left(1 - \int_{t-r}^t I(s) ds\right) S_i(x_i(t)) = \left(1 - \int_{t-r}^t I(s) ds\right) S_i\left(\int_{-\infty}^t \alpha(t-s) [cE(s) - dI(s) + Q] ds\right). \quad (58)$$

El pas següent consisteix a simplificar les expressions (57) i (58) a través de la substitució de les variables  $E(t)$  i  $I(t)$  per les corresponents mitjanes temporals en un interval de longitud  $h$ . Denotem per  $\bar{E}(t)$  i  $\bar{I}(t)$  aquestes noves variables:

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t E(s) ds, \quad \bar{I}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t I(s) ds.$$

Aleshores, prenent  $h$  proper a  $r$ , podem fer les substitucions

$$\int_{t-r}^t E(s) ds \rightarrow r\bar{E}(t), \quad \int_{t-r}^t I(s) ds \rightarrow r\bar{I}(t).$$

Si assumim que  $\alpha(t)$  és propera a 1 per a  $0 \leq t \leq r$  i decau ràpidament a 0 per a  $t > r$ , llavors és raonable fer les substitucions

$$\int_{-\infty}^t \alpha(t-s) E(s) ds \rightarrow k\bar{E}(t), \quad \int_{-\infty}^t \alpha(t-s) I(s) ds \rightarrow k\bar{I}(t),$$

per a una certa constant  $k$ . Finalment, substituint  $E(t + \tau_e)$  per  $\bar{E}(t + \tau_e)$  i usant el desenvolupament de Taylor d'ordre 1 d'aquesta darrera variable al voltant de  $\tau_e = 0$ , considerem la substitució

$$E(t + \tau_e) \rightarrow \bar{E}(t) + \tau_e \frac{d}{dt} \bar{E}(t).$$

De manera anàloga fem

$$I(t + \tau_i) \rightarrow \bar{I}(t) + \tau_i \frac{d}{dt} \bar{I}(t).$$

La introducció de les aproximacions anteriors a les equacions (57) i (58) dóna lloc al sistema

$$\begin{cases} \tau_e \frac{d}{dt} \bar{E}(t) &= -\bar{E}(t) + (1 - r\bar{E}(t)) S_e (ak\bar{E}(t) - bk\bar{I}(t) + kP) \\ \tau_i \frac{d}{dt} \bar{I}(t) &= -\bar{I}(t) + (1 - r\bar{I}(t)) S_i (ck\bar{E}(t) - dk\bar{I}(t) + kQ) \end{cases},$$

que, redefinint els productes  $ak$ ,  $bk$ ,  $ck$ ,  $dk$ ,  $Pk$  i  $Qk$  simplement com  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $P$  i  $Q$ , es pot expressar com

$$\begin{cases} \tau_e \frac{d}{dt} \bar{E}(t) &= -\bar{E}(t) + (1 - r\bar{E}(t)) S_e (a\bar{E}(t) - b\bar{I}(t) + P) \\ \tau_i \frac{d}{dt} \bar{I}(t) &= -\bar{I}(t) + (1 - r\bar{I}(t)) S_i (c\bar{E}(t) - d\bar{I}(t) + Q) \end{cases}. \quad (59)$$

## Anàlisi del model

L'expressió (59) defineix un sistema d'equacions diferencials ordinàries per a l'evolució de les variables  $\bar{E}(t)$  i  $\bar{I}(t)$ , que representen mitjanes en una finestra temporal petita de les proporcions estimades de neurones excitatòries i inhibidores que estan actives a temps  $t$ . La constant  $r$  representa el període refractari absolut de les dues poblacions, o període de temps durant el qual una cèl·lula que ha estat activada no pot tornar a emetre un potencial d'acció. Com que experimentalment s'ha vist que aquest període és petit, aquí considerarem l'aproximació que resulta d'assumir  $r = 0$ . Podem pensar en aquest cas com la situació particular en què les neurones no entren mai en una fase refractària. Sota aquesta hipòtesi, i anomenant

$x = x(t)$  i  $y = y(t)$  a les variables  $\bar{E}(t)$  i  $\bar{I}(t)$ , respectivament, per facilitar la notació, el sistema (59) té la forma

$$\begin{cases} \tau_x \dot{x} &= -x + S_x(ax - by + P) \\ \tau_y \dot{y} &= -y + S_y(cx - dy + Q) \end{cases}, \quad (60)$$

on  $\tau_x, \tau_y, a, b, c, d \in (0, \infty)$  i  $P, Q \in \mathbb{R}$ .

Sovint escriurem el sistema anterior com

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases},$$

on  $f(x, y) = \frac{1}{\tau_x}(-x + S_x(ax - by + P))$  i  $g(x, y) = \frac{1}{\tau_y}(-y + S_y(cx - dy + Q))$ .

A continuació explorarem algunes de les propietats d'aquest model i intentarem donar-ne una interpretació en termes biològics. En tot moment usarem la hipòtesi addicional que  $S_x$  i  $S_y$  no són només creixents sinó que ho són estrictament.

Abans de començar, però, és important remarcar que les equacions (60) tenen un sentit biològic precís. L'activació de cadascuna de les poblacions decauria exponencialment si no fos perquè totes dues reben estimulació. Aquests estímuls tenen un component extrínsec i un component intrínsec. El component extrínsec es manifesta en termes de les estimulacions  $P$  i  $Q$ , que podem pensar que provenen d'una o més xarxes externes que connecten amb la nostra. El component intrínsec prové de la pròpia xarxa, i és un balanç entre els senyals activadors que genera la població excitatòria i els senyals inhibidors de la segona població. El pes de les components activadora i inhibidora depèn dels paràmetres  $a$  i  $b$  en la primera població i  $c$  i  $d$  en la segona. Podem imaginar aquests pesos com una mesura de la fortalesa mitjana de les sinapsis que connecten cadascuna de les poblacions entre si i amb la població contrària. Finalment, les constants  $\tau_x$  i  $\tau_y$  modifiquen la velocitat de resposta de les dues poblacions. D'aquesta manera, els diferents paràmetres del model tenen una significació biològica ben diferenciada. En un context realista,  $\tau_x, \tau_y, a, b, c$  i  $d$  venen a reflectir propietats "identificadoras" (o de configuració) de la xarxa i probablement variaran molt lentament al llarg del temps.  $P$  i  $Q$ , en canvi, poden ser factors que es modifiquin de manera substancial com a conseqüència de la variació dels estímuls externs que rebí la xarxa. En aquest sentit, és raonable iniciar l'anàlisi del model imaginant que  $\tau_x, \tau_y, a, b, c$  i  $d$  són fixats i estudiant quins règims poden aparèixer quan modifiquem  $P$  i  $Q$ . Aquesta és l'aproximació que farem servir en el present treball. No obstant això, imaginar situacions més riques en les quals els altres paràmetres també poden canviar amb el temps és quelcom molt interessant i que pot obrir les portes a l'estudi de fenòmens més complexos com la plasticitat sinàptica.

## Propietats generals

### El quadrat unitat és positivament invariant

Recordem que les variables  $x, y$  del sistema (60) representen la fracció de neurones de dues subpoblacions que estan actives en cada unitat de temps. Per tant, tant  $x$  com  $y$  han de prendre valors en l'interval  $I = [0, 1]$ . En primer lloc hem comprovat que aquesta condició està garantida pel model, és a dir, que qualsevol trajectòria amb condició inicial al quadrat unitat  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$  està continguda al quadrat unitat (diem que  $I^2$  és positivament invariant). Per provar-ho, és suficient avaluar el camp sobre la frontera de  $I^2$  i comprovar que els vectors resultants “apunten” cap a l'interior de  $I^2$ . Del fet que  $S_x$  i  $S_y$  prenen valors en  $(0, 1)$  es dedueix que

$$\begin{aligned} f(0, y) &= \frac{1}{\tau_x} S_x(-by + P) > 0, & f(1, y) &= \frac{1}{\tau_x} (-1 + S_x(a - by + P)) < 0, \\ g(x, 0) &= \frac{1}{\tau_y} S_y(cx + Q) > 0, & g(x, 1) &= \frac{1}{\tau_y} (-1 + S_y(cx - d + Q)) < 0, \end{aligned}$$

de manera que el quadrat unitat és positivament invariant.

Observem, en particular, que les òrbites amb condició inicial en  $I^2$  estan acotades, per tant les solucions estan definides per a tot  $t \geq 0$ . A més, si el nombre de punts pel teorema de Poincaré-Bendixson, els conjunts  $\omega$ -límit de totes les trajectòries són punts fixos, connexions de punts fixos o òrbites periòdiques.

### El sistema sempre té un punt fix al quadrat unitat i no té cap punt fix fora del quadrat unitat

El fet que els conjunts  $\omega$ -límit de totes les trajectòries siguin punts fixos, connexions de punts fixos o òrbites periòdiques demostra que, per a qualsevol elecció dels paràmetres, el sistema té almenys un punt fix, ja que qualsevol òrbita periòdica al pla “conté” algun punt fix al seu interior (Proposició 3). No obstant això, és fàcil provar-ho directament fent servir la informació que tenim sobre les funcions  $S_x$  i  $S_y$ . Les equacions dels punts fixos s'obtenen en igualar a zero el camp i són

$$\begin{cases} x &= S_x(ax - by + P) \\ y &= S_y(cx - dy + Q) \end{cases}. \quad (61)$$

Com que  $S_x$  i  $S_y$  són estrictament creixents, són invertibles i les seves inverses també són estrictament creixents. Siguin

$$S_x^{-1}, S_y^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

les respectives funcions inverses. Observem que  $S_x^{-1}$  i  $S_y^{-1}$  tenen la propietat que

$$\lim_{z \rightarrow 0} S_x^{-1}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} S_y^{-1}(z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow 1} S_x^{-1}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} S_y^{-1}(z) = +\infty,$$

perquè  $S_x$  i  $S_y$  són funcions sigmoïdals. L'equació dels punts fixos es pot reescriure com

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{b} (ax - S_x^{-1}(x) + P) \\ x &= \frac{1}{c} (dy + S_y^{-1}(y) - Q) \end{cases} \quad (62)$$

La segona equació, corresponent a la isoclina  $\dot{y} = 0$ , descriu una corba al pla que és la imatge de la funció

$$\begin{aligned} h_2 : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto h_2(y) = \frac{1}{c} (dy + S_y^{-1}(y) - Q) \end{aligned}$$

Observem que  $h_2$  és estrictament creixent en  $y$  (és combinació lineal de funcions estrictament creixents) i satisfà

$$\lim_{y \rightarrow 0} h_2(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 1} h_2(y) = +\infty.$$

La primera equació, corresponent a la isoclina  $\dot{x} = 0$ , descriu la corba que és imatge de la funció

$$\begin{aligned} h_1 : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_1(x) = \frac{1}{b} (ax - S_x^{-1}(x) + P) \end{aligned}$$

Tenim que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} h_1(x) = -\infty.$$

Això mostra que les dues isoclines s'han de tallar necessàriament en algun punt del quadrat unitat (és a dir, el sistema té, efectivament, un punt fix per a qualsevol elecció dels paràmetres). En efecte, com que  $h_2$  és estrictament creixent, té una inversa  $h_2^{-1}$ , definida a tot  $\mathbb{R}$ . Si considerem la funció

$$\begin{aligned} h : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = h_1(x) - h_2^{-1}(x) \end{aligned}$$

tenim que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) - h_2^{-1}(0) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h_1(x) - h_2^{-1}(1) = -\infty,$$

i, pel teorema de Bolzano, ha d'existir un punt  $x_0 \in (0, 1)$  tal que  $h_1(x_0) = h_2^{-1}(x_0)$ . Com que la funció  $h_2^{-1}$  pren valors en  $(0, 1)$ , el corresponent punt de tall de les isoclines està contingut al quadrat unitat. D'altra banda, no pot existir cap punt d'equilibri fora del quadrat unitat perquè les isoclines  $\dot{x} = 0$  i  $\dot{y} = 0$  només estan definides per a valors de  $x$  i de  $y$  en  $(0, 1)$ , respectivament.

**Si el pendent màxim de  $S_x$  és menor o igual que  $1/a$ , el sistema té un únic punt fix, que és globalment atractor**

Estudiem sota quines condicions podem tenir més d'un punt fix. Observem que  $h_1$  no és necessàriament una funció creixent. La seva derivada és  $h'_1(x) = \frac{1}{b} \left( a - (S_x^{-1})'(x) \right) = \frac{1}{b} \left( a - \frac{1}{S'_x(S_x^{-1}(x))} \right)$ , de manera que

$$h'_1(x) \text{ és } \begin{cases} < 0 & \text{si } S'_x(S_x^{-1}(x)) < 1/a \\ = 0 & \text{si } S'_x(S_x^{-1}(x)) = 1/a \\ > 0 & \text{si } S'_x(S_x^{-1}(x)) > 1/a \end{cases} .$$

Com que

$$\lim_{x \rightarrow 0} S'_x(S_x^{-1}(x)) = \lim_{z \rightarrow -\infty} S'_x(z) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} S'_x(S_x^{-1}(x)) = \lim_{z \rightarrow +\infty} S'_x(z) = 0,$$

en un entorn de 0 i de 1  $h_1$  és estrictament decreixent. Sigui  $z_0$  el punt d'inflexió de  $S_x$ . En aquest punt, el pendent de  $S_x$  és màxim. Per tant, si  $S'_x(z_0) \leq 1/a$ ,

$$S'_x(S_x^{-1}(x)) \leq S'_x(z_0) \leq 1/a \quad \forall x \in (0, 1)$$

i  $h_1$  és decreixent en tot el seu domini.

Així, si  $S'_x(z_0) \leq 1/a$ ,  $h_1$  és decreixent i  $h_2$  és estrictament creixent. Això implica que les dues isoclines no poden tenir més d'un punt de tall, és a dir, el sistema té, com a màxim, un punt fix. Com que ja hem argumentat que el sistema té sempre almenys un punt fix, concloem que hi ha un únic punt d'equilibri.

Sigui  $p_0 = (x_0, y_0)$  aquest punt. Vegem que és globalment asimptòticament estable. Si anomenem  $F$  al camp que defineix el sistema, la seva divergència és

$$\operatorname{div}(F(x, y)) = f_x(x, y) + g_y(x, y) = \frac{1}{\tau_x} (-1 + aS'_x(ax - by + P)) + \frac{1}{\tau_y} (-1 - dS'_y(cx - dy + Q)).$$

Si  $S'_x(z_0) \leq 1/a$ , llavors  $-1 + aS'_x(ax - by + P) \leq 0$  i tenim que

$$\operatorname{div}(F(x, y)) < 0 \quad \text{per a tot } (x, y) \in I^2.$$

Això implica, pel criteri de Bendixson, que el sistema no pot tenir cap òrbita periòdica. Fent servir de nou el teorema de Poincaré-Bendixson, obtenim que totes les trajectòries tenen com a conjunt  $\omega$ -límit el punt d'equilibri  $p_0$ .

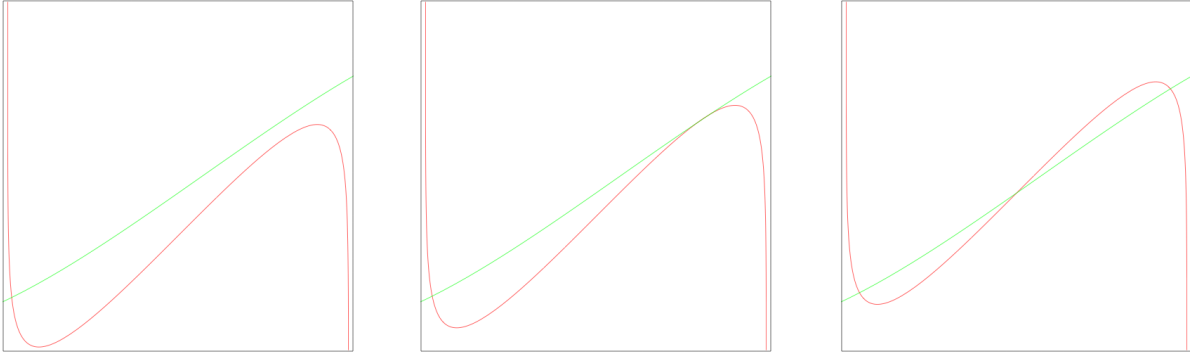


Figura 10: Tres possibles configuracions de les isoclines que s'obtenen només modificant el paràmetre  $P$  ( $\dot{x} = 0$  en vermell i  $\dot{y} = 0$  en verd). En aquest cas, el pendent màxim de  $S_x$  és més gran que  $1/a$  i el sistema pot tenir un, dos o tres punts d'equilibri segons quin sigui el valor de  $P$ .

**Si el pendent màxim de  $S_x$  és més gran que  $1/a$ , existeixen valors dels paràmetres  $P$  i  $Q$  pels quals el sistema té més d'un punt fix**

Acabem de veure que si  $S'_x(z_0) \leq 1/a$ , el sistema té exactament un punt d'equilibri per a qualsevol elecció dels paràmetres  $P$  i  $Q$ . Per tant, una condició necessària per tenir més d'un punt d'equilibri és  $S'_x(z_0) > 1/a$ . Suposem que ens trobem en aquesta situació. Aleshores, existeix un entorn obert de  $z_0$ ,  $I_0 \subset \mathbb{R}$ , tal que

$$S'_x(z) > 1/a \quad \forall z \in I_0.$$

D'aquesta manera, si  $x$  és tal que  $x \in S_x(I_0)$ , llavors  $S'_x(S_x^{-1}(x)) > 1/a$  i  $h_1$  és creixent en  $x$ . Per tant, en tot punt de l'obert  $S_x(I_0) \subset [0, 1]$   $h_1$  és creixent.

Vegem que podem triar una parella de paràmetres  $(P_0, Q_0)$  pels quals les isoclines tinguin exactament tres punts de tall. Observem, primer, que aquesta situació només es pot donar quan el pendent de la isoclina  $\dot{x} = 0$  és més gran que el de  $\dot{y} = 0$  en un cert entorn de l'eix de les  $x$ . Ara bé, com que el pendent de  $\dot{y} = 0$  en un punt donat  $x$  no és més que el de  $h_2^{-1}(x)$  i

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h'_2(h_2^{-1}(x)) &= \lim_{y \rightarrow 0} h'_2(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{c} (d + (S_y^{-1})'(y)) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h'_2(h_2^{-1}(x)) &= \lim_{y \rightarrow 1} h'_2(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{c} (d + (S_y^{-1})'(y)) = +\infty, \end{aligned}$$

tenim que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h_2^{-1})'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{h'_2(h_2^{-1}(x))} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (h_2^{-1})'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{h'_2(h_2^{-1}(x))} = 0.$$

D'altra banda, atès que la modificació de  $Q$  resulta en un desplaçament horitzontal de la isoclina  $\dot{y} = 0$  en l'espai de fase, per a tot  $\varepsilon > 0$  existeix  $Q_\varepsilon$  pel qual hi ha un valor  $x_\varepsilon \in (0, 1)$  tal que el pendent



d'aquesta isoclina en  $x_\varepsilon$  és menor que  $\varepsilon$ . Més concretament, triant  $\varepsilon < h_1'(x_0)$  per a algun  $x_0 \in S_x(I_0)$ , tenim que existeix  $Q_0$  tal que  $(h_2^{-1})'(x_0) < h_1'(x_0)$ . Sigui  $y_0 = h_2^{-1}(x_0)$ . Finalment, escollint  $P_0 = by_0 - ax_0 + S_x^{-1}(x_0)$ , resulta

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{b}(ax_0 - S_x^{-1}(x_0) + P_0) \\ x_0 = h_2(y_0) = \frac{1}{c}(dy_0 + S_y^{-1}(y_0) - Q_0) \end{cases},$$

és a dir,  $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$  és un punt de tall de les dues isoclines en el qual  $(h_2^{-1})'(x_0) < h_1'(x_0)$ . Per les propietats de monotonia de les dues isoclines en un entorn de  $x = 0$  i de  $x = 1$ , és clar, llavors, que existeixen dos altres punts  $(x_-, y_-)$ ,  $(x_+, y_+)$ , amb  $0 \leq x_- < x_0 < x_+ \leq 1$ , que també són punts de tall entre les dues corbes. El sistema resultant té, doncs, tres punts d'equilibri.

### Estudi d'un cas particular

Fins ara hem vist que si el pendent màxim de  $S_x$  és menor o igual que  $1/a$ , aleshores el sistema té un únic punt d'equilibri globalment atractiu i cap òrbita periòdica. Aquesta condició és independent dels paràmetres  $P$  i  $Q$ . Per tant, la dinàmica del sistema neuronal associat és relativament senzilla i no pot variar qualitativament per més que els estímuls externs a la xarxa canviïn. Aquesta situació es produirà quan  $a$  sigui petit. Això sembla indicar que per tal que les dues poblacions puguin experimentar règims dinàmics complexos és necessari que les connexions de la població excitatòria amb si mateixa siguin considerablement fortes.

Com que ens interessa estudiar si hi pot haver configuracions per les quals la xarxa exhibeixi una dinàmica rica, amb possibles canvis d'estat induïts per modificacions en l'estimulació externa, suposarem en tot moment que el pendent màxim de  $S_x$  és més gran que  $1/a$ . En particular, estudiarem algunes de les propietats del sistema quan  $S_x = S_y = S$  i  $S$  està definida per

$$S(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}.$$

Observem que, en aquest cas, el pendent màxim de  $S$  s'assoleix en  $z_0 = 0$  i val  $S'(0) = 1/4$ . D'aquesta manera, la condició  $S'_x(z_0) > 1/a$  es tradueix en  $a > 4$ . Per tant, a partir d'ara estudiarem el sistema

$$\begin{cases} \tau_x \dot{x} = -x + S(ax - by + P) \\ \tau_y \dot{y} = -y + S(cx - dy + Q) \end{cases}, \quad \text{on } S(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \text{ i } a > 4. \quad (63)$$

## El sistema té una simetria en els paràmetres $P$ i $Q$

En primer lloc, farem una observació important en relació als paràmetres  $P$  i  $Q$ . Veurem que el sistema és difeomòrficament conjugat a si mateix quan fem una rotació en l'espai de paràmetres  $P - Q$  de  $180^\circ$  i centre  $(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2})$ . Com a conseqüència, per estudiar (63) en funció de  $P$  i  $Q$  serà suficient que ens restringim a un dels semiplans

$$\left\{ (P, Q) \in \mathbb{R}^2 : Q \leq \frac{d-c}{2} \right\}, \left\{ (P, Q) \in \mathbb{R}^2 : Q \geq \frac{d-c}{2} \right\}.$$

Vegeu-ho. Considerem el sistema original (63) i el sistema que resulta en aplicar a  $(P, Q)$  una rotació de  $180^\circ$  i centre  $(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2})$

$$\begin{cases} \tau_x \dot{\tilde{x}} &= -\tilde{x} + S(a\tilde{x} - b\tilde{y} + \tilde{P}) \\ \tau_y \dot{\tilde{y}} &= -\tilde{y} + S(c\tilde{x} - d\tilde{y} + \tilde{Q}) \end{cases}, \quad (\tilde{P}, \tilde{Q}) = (b-a-P, d-c-Q). \quad (64)$$

Definim el canvi de variables en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto h(x, y) = (1-x, 1-y) \end{aligned}$$

Veurem que  $h$  és una conjugació difeomorfa entre (63) i (64). Per la Proposició 7, és suficient comprovar que

$$Dh \circ F = G \circ h,$$

on  $F$  i  $G$  denoten els camps associats a (63) i (64), respectivament. En efecte,

$$\begin{aligned} Dh \circ F(x, y) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_x} (-x + S(ax - by + P)) \\ \frac{1}{\tau_y} (-y + S(cx - dy + Q)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_x} (x - S(ax - by + P)) \\ \frac{1}{\tau_y} (y - S(cx - dy + Q)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_x} [-(1-x) + 1 - S(ax - by + P)] \\ \frac{1}{\tau_y} [-(1-y) + 1 - S(cx - dy + Q)] \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_x} [-(1-x) + S(-ax + by - P)] \\ \frac{1}{\tau_y} [-(1-y) + S(-cx + dy - Q)] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_x} [-(1-x) + S(a(1-x) - b(1-y) + b-a-P)] \\ \frac{1}{\tau_y} [-(1-y) + S(c(1-x) - d(1-y) + d-c-Q)] \end{pmatrix} = G \circ h(x, y), \end{aligned}$$

on en (\*) hem fet servir la propietat que

$$1 - S(z) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-z}} = \frac{e^{-z}}{1 + e^{-z}} = \frac{1}{1 + e^z} = S(-z).$$

Veiem, a més, que el resultat també és vàlid per a qualsevol funció  $S$  que satisfaci la relació anterior.

Per a una elecció adequada de  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ , el sistema experimenta una bifurcació cúspide en els paràmetres  $P$  i  $Q$

Com veurem en les seccions posteriors, el sistema (63) pot tenir un comportament força ric en variar  $P$  i  $Q$ , fixats els valors dels altres paràmetres. A continuació ho exemplificarem en el cas  $\tau_x = \tau_y = 1$ ,  $a = b = c = 10$ ,  $d = 2$ . Considerem el sistema quan  $\tau_x = \tau_y = 1$ :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + S(ax - by + P) \\ \dot{y} &= -y + S(cx - dy + Q) \end{cases}, \quad \text{on } S(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \text{ i } a > 4. \quad (65)$$

En primer lloc, hem trobat condicions necessàries per tal que (65) experimenti bifurcacions de tipus sella-node. Una d'aquestes condicions és que el determinant de la matriu de la diferencial del camp en un punt d'equilibri sigui zero. La matriu de la diferencial en un punt d'equilibri  $p = (x, y)$  és

$$\begin{aligned} A_p &= \left( \begin{array}{cc} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{array} \right) \Big|_p = \left( \begin{array}{cc} -1 + aS'(ax - by + P) & -bS'(ax - by + P) \\ cS'(cx - dy + Q) & -1 - dS'(cx - dy + Q) \end{array} \right) \stackrel{(*)}{=} \\ &= \left( \begin{array}{cc} -1 + aS'(S^{-1}(x)) & -bS'(S^{-1}(x)) \\ cS'(S^{-1}(y)) & -1 - dS'(S^{-1}(y)) \end{array} \right), \end{aligned}$$

on el pas (\*) resulta de l'equació dels punts fixos (61). Com que la funció  $S$  satisfà

$$S'(z) = \frac{e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2} = S(z)S(-z) = S(z)(1 - S(z)),$$

tenim que  $S'(S^{-1}(z)) = z(1 - z)$  i

$$A_p = \left( \begin{array}{cc} -1 + ax(1 - x) & -bx(1 - x) \\ cy(1 - y) & -1 - dy(1 - y) \end{array} \right). \quad (66)$$

El determinant d'aquesta matriu és el polinomi en les variables  $x$  i  $y$

$$\det(x, y) = 1 - ax + ax^2 + dy + bcxy - adxy - bcx^2y + adx^2y - dy^2 - bcxy^2 + adxy^2 + bcx^2y^2 - adx^2y^2.$$

En particular, podem tractar  $\det(x, y)$  com un polinomi en la variable  $y$  els coeficients del qual depenen de  $x$ . Així, per a cada  $x \in [0, 1]$  tenim un parell de valors de  $y$  (reals o complexos),  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , en els quals el determinant de (66) s'anul·la. D'altra banda, com que l'equació dels punts fixos es pot escriure com

$$\begin{cases} P &= S_x^{-1}(x) - ax + by \\ Q &= S_y^{-1}(y) - cx + dy \end{cases}, \quad (67)$$

considerant només els  $x \in [0, 1]$  pels quals  $y_1$  i  $y_2$  són reals i substituint en (67) les seves expressions en funció de  $x$  obtenim parells  $(P_1(x), Q_1(x))$ ,  $(P_2(x), Q_2(x))$  en què (65) té un punt d'equilibri on el determinant de la diferencial és zero. Les expressions per a  $(P_1(x), Q_1(x))$  i  $(P_2(x), Q_2(x))$  defineixen, doncs, corbes parametritzades per  $x$  en l'espai de paràmetres  $P - Q$  sobre les quals el sistema pot tenir bifurcacions sella-node.

Considerem el cas  $a = b = c = 10$ ,  $d = 2$ . Tal com mostra la Figura 11, els gràfics de les dues corbes  $(P_1(x), Q_1(x))$ ,  $(P_2(x), Q_2(x))$  són simètrics respecte de la rotació d'angle  $180^\circ$  al voltant del punt  $(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}) = (0, -4)$  en el pla de paràmetres. Ja hem comentat que per estudiar el comportament del sistema és suficient que ens centrem en un dels semiplans  $\{(P, Q) \in \mathbb{R}^2 : Q \leq -4\}$ ,  $\{(P, Q) \in \mathbb{R}^2 : Q \geq -4\}$ .

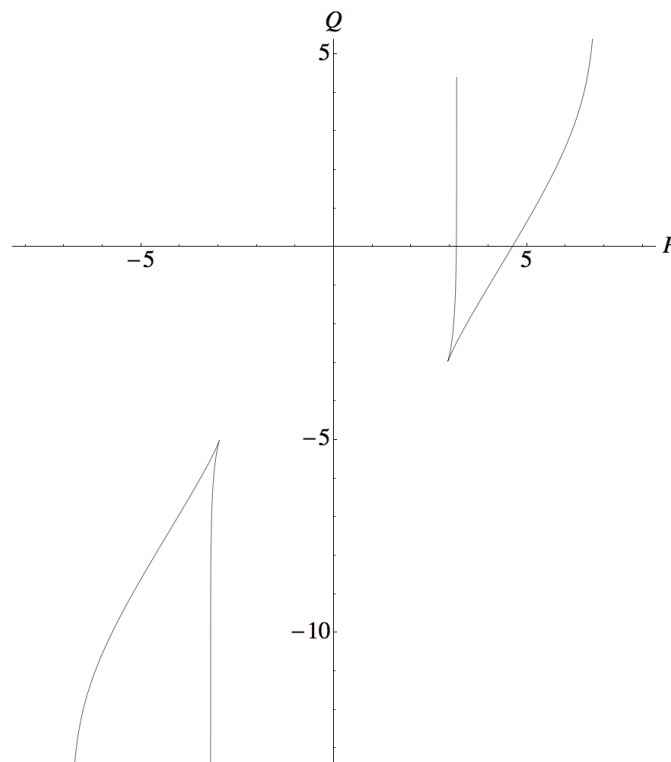


Figura 11: Corbes de bifurcació sella-node calculades a partir de l'equació  $\det(x, y) = 0$  per a  $a = b = c = 10$ ,  $d = 2$ .

Considerem, doncs, la corba  $\Gamma^{sn}$  situada al semiplà  $\{(P, Q) \in \mathbb{R}^2 : Q \leq -4\}$ .  $\Gamma^{sn}$  té una singularitat en  $(P_0, Q_0) \approx (-2.96, -5.02)$ . L'estudi numèric al voltant d'aquest punt mostra que la corba és efectivament una corba de bifurcació sella-node i que en  $(P_0, Q_0)$  hi ha una bifurcació de tipus cúspide. A més, en un entorn prou petit de  $(P_0, Q_0)$  el sistema no té òrbites periòdiques. Un fet interessant és que, quasi adjacent a  $\Gamma^{sn}$  hi ha una altra corba sobre la qual es produeix una transició node-focus en algun dels punts d'equilibri. Aquesta segona corba, que denotarem per  $\Gamma^{nf}$ , està definida per la condició que el discriminant de l'equació dels valors propis en el punt d'equilibri corresponent és zero. L'hem calculat de forma anàloga a com hem fet amb  $\Gamma^{sn}$ .



tenim una xarxa neuronal amb la configuració definida pel sistema d'equacions (65), on  $a, b, c$  i  $d$  són tals que al voltant d'un punt crític  $(P_0, Q_0)$  en els valors dels estímuls externs hi ha una bifurcació cúspide. Imaginem que la xarxa és estimulada externament de manera que els valors dels estímuls  $(P, Q)$  segueixen l'el·lipse puntejada de la Figura 12, partint de la regió 3. Inicialment, el sistema té un únic punt d'equilibri, que és globalment atractor (no hi ha òrbites periòdiques), per tant, les poblacions tendiran a un nivell d'activació constant determinat per les components  $x$  i  $y$  d'aquest punt. Si en un moment l'estimulació és tal que  $(P, Q)$  pertany a la regió 1, neixen dos punts d'equilibri més, un dels quals és també localment atractor. És d'esperar, però, que la població segueixi prop del punt d'equilibri anterior, que encara existeix. En aquest sentit, la xarxa pot no experimentar cap canvi substancial en creuar aquesta regió. Ara bé, si l'estimulació segueix canviant i en un cert moment  $(P, Q)$  travessa  $\Gamma_1^{sn}$ , el punt fix on es trobava la xarxa desapareix. En aquesta situació, el sistema pot experimentar un canvi sobtat en la seva dinàmica, que el porti a altres regions d'atracció. Com que prou a prop del punt de cúspide no existeixen òrbites periòdiques, l'única possibilitat és que sigui atret per l'únic punt d'equilibri atractor que s'ha mantingut. El desplaçament de la població cap a aquest nou punt pot comportar un canvi brusc en el comportament de la xarxa, que, per exemple, podria passar a estar molt més activada. Observem que, encara que més tard  $(P, Q)$  retornin a la regió 1 i el sistema recuperi el punt fix que havia perdut, la xarxa es mantindrà en l'estat on es trobava, i per retornar al punt d'equilibri inicial caldrà que  $(P, Q)$  creuin de nou  $\Gamma_2^{sn}$  (Figura 14). Aquest fenomen, que en general es coneix com a *histèresi*, permet a la xarxa no només passar d'un estat d'activació a un altre de forma sobtada en resposta a un estímulo extern de suficient durada, sinó també mantenir-se en aquest segon estat encara que l'estimulació retorni al seu nivell basal. D'alguna manera, l'estat de la xarxa no depèn només de com sigui l'estimulació en el moment actual, sinó també de si ha estat o no estimulada instants anteriors. De fet, aquest fenomen s'ha proposat com un mecanisme bàsic per a la memòria a curt termini [5].

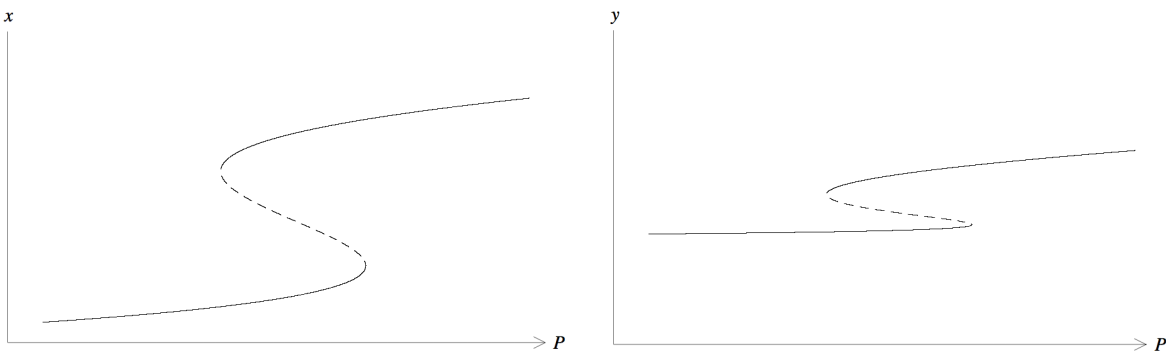


Figura 13: Components  $x$  (esquerra) i  $y$  (dreta) dels punts d'equilibri del sistema en pertorbar  $P$  en el rang  $[-3.1, -2.9]$ , fixat  $Q = -5.217$ . Aquesta pertorbació correspon també a la línia recta puntejada de la Figura 12. Les línies discontinües indiquen que el punt corresponent és una sella, per tant, inestable. Els valors de la resta de paràmetres són  $a = b = c = 10$ ,  $d = 2$ .

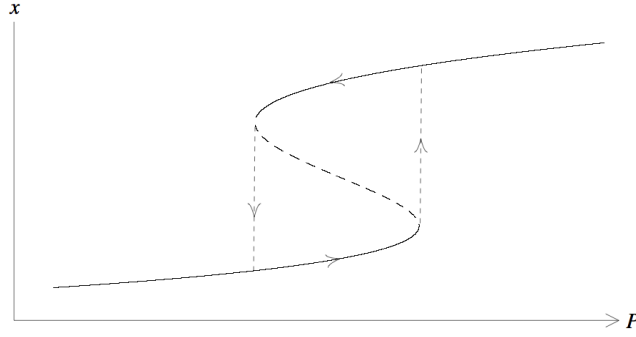


Figura 14: Cicle d'histèresi en la regió de la bifurcació cúspide ( $a = b = c = 10, d = 2$ ).

**Per a una elecció adequada de  $\tau_x, \tau_y, a, b, c$  i  $d$ , el sistema experimenta una bifurcació de Bogdanov-Takens en els paràmetres  $P$  i  $Q$**

A continuació hem estudiat sota quines condicions el sistema pot tenir òrbites periòdiques. En primer lloc hem analitzat si hi ha regions a l'espai de paràmetres  $P - Q$  en les quals el sistema tingui bifurcacions d'Andronov-Hopf. Ja hem vist que una condició necessària per l'existència d'aquest tipus de bifurcació és que la traça de la diferencial en el punt crític sigui zero. En el cas  $\tau_x = \tau_y = 1$ , la matriu de la diferencial en un punt d'equilibri  $p = (x, y)$  és

$$A_p = \begin{pmatrix} -1 + ax(1-x) & -bx(1-x) \\ cy(1-y) & -1 - dy(1-y) \end{pmatrix},$$

i la seva traça ve donada pel polinomi en  $x, y$

$$\text{tr}(x, y) = -2 + a(1-x)x - d(1-y)y.$$

Per a cada  $x \in [0, 1]$  existeixen  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  tals que  $\text{tr}(x, y_{1,2}(x)) = 0$ . De forma similar al que ocorre en el cas de la bifurcació sella-node, si considerem només els  $x$  pels quals  $y_1$  i  $y_2$  són reals i els substituïm en les equacions dels punts fixos, obtenim dues corbes, parametritzades per  $x$ ,  $(P_1(x), Q_1(x))$ ,  $(P_2(x), Q_2(x))$ . Sobre aquestes corbes, el sistema (65) pot tenir bifurcacions d'Andronov-Hopf.

Considerem de nou el cas  $a = b = c = 10, d = 2$ . De la mateixa manera que en el cas previ, les dues corbes són simètriques respecte de la rotació d'angle  $180^\circ$  al voltant del punt  $(\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}) = (0, -4)$  en el pla de paràmetres (Figura 15). De nou, farem l'anàlisi sobre el semiplà  $\{(P, Q) \in \mathbb{R}^2 : Q \leq -4\}$ .

Sigui  $\Gamma^{ah}$  la corresponent corba en el semiplà d'estudi. Anomenarem  $\Gamma_1^{ah}$  i  $\Gamma_2^{ah}$  a les seves dues branques. Seguint cadascuna d'aquestes corbes i fent simulacions numèriques hem vist que no són corbes de bifurcació d'Andronov-Hopf en tot el seu recorregut. De fet, els fragments de corba que donen lloc a una bifurcació d'aquest tipus estan delimitats pels punts de tall amb la corba de transició node-focus. Per tal d'entendre,

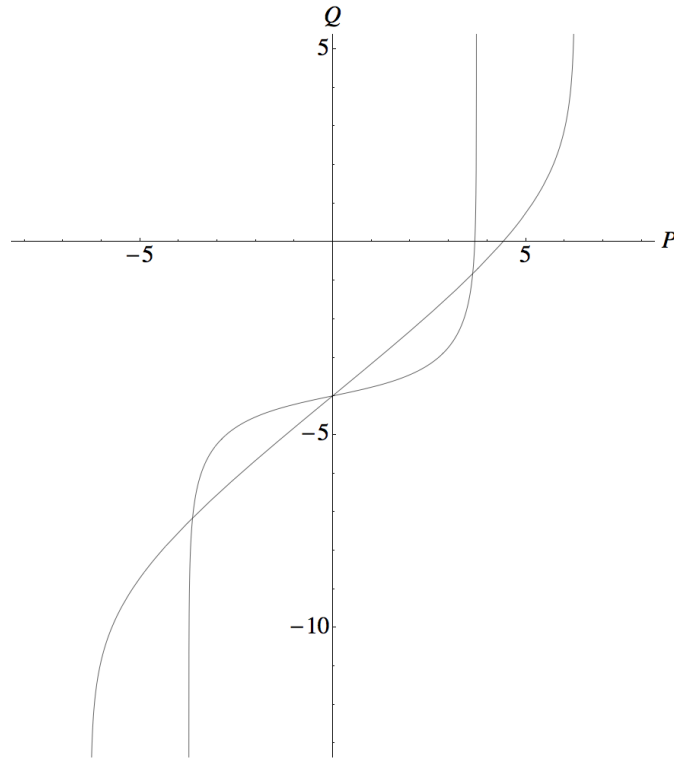


Figura 15: Corbes per a la condició  $\text{tr}(x, y) = 0$ , on  $\text{tr}(x, y)$  representa la traça de la matriu de la diferencial del camp en un punt d'equilibri  $(x, y)$ . Per fer el gràfic s'han considerat els valors dels paràmetres  $a = b = c = 10$ ,  $d = 2$ .

doncs, quin és el comportament del sistema al voltant de  $\Gamma^{ah}$  és útil considerar també el gràfic de  $\Gamma^{nf}$  sobre el pla de paràmetres. Considerem el gràfic de la Figura 16, on estan representades  $\Gamma^{nf}$  (vermell),  $\Gamma_1^{ah}$  i  $\Gamma_2^{ah}$  (taronja). Hem anomenat  $B_1$  i  $B_2$  als punts de tall de  $\Gamma_1^{ah}$  i  $\Gamma_2^{ah}$  amb  $\Gamma^{nf}$ , respectivament. L'estudi numèric del sistema sobre aquestes corbes mostra que les úniques regions on hi ha bifurcacions d'Andronov-Hopf són el tram de  $\Gamma_1^{ah}$  comprès entre  $B_1$  i el punt  $(0, -4)$  i el de  $\Gamma_2^{ah}$  comprès entre  $B_2$  i  $(0, -4)$ . Aquestes bifurcacions són totes elles de tipus supercrític, és a dir, impliquen la transició entre un estat amb un focus atractor i un estat amb un focus repulsor i una òrbita periòdica atractora. Les corbes de bifurcació corresponents estan marcades amb una línia contínua a la figura. Les altres regions (marcades amb una línia discontinua) són corbes sobre les quals el sistema té un punt de sella amb valors propis reals oposats.

L'estructura de les corbes anteriors al voltant dels punts  $B_1$  i  $B_2$  recorda a la bifurcació de Bogdanov-Takens. De fet, si afegim al diagrama anterior la corba de la bifurcació sella-node  $\Gamma^{sn}$ , veiem que també és tangent a les altres dues en aquests dos punts, característica que és pròpia de la bifurcació de Bogdanov-Takens. Tal i com hem vist en seccions anteriors, però, del punt de bifurcació neix una quarta corba, sobre la qual el sistema té una òrbita homoclínica a un punt de sella. El següent pas en el nostre estudi ha estat, doncs, determinar si existeix una corba d'aquest tipus en un entorn de  $B_1$  i  $B_2$ .



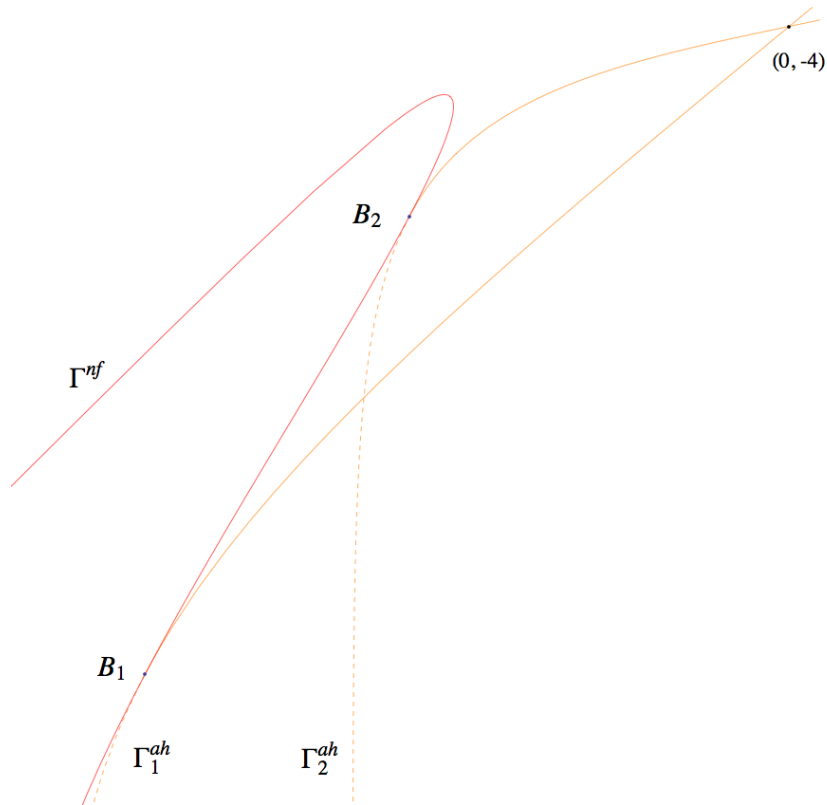


Figura 16: Corbes de transició node-focus (vermell) i de bifurcació d'Andronov-Hopf (taronja). Les corbes puntejades de color taronja no corresponen a cap bifurcació, sinó que indiquen la presència d'un punt de sella amb valors propis oposats. Per fer el gràfic s'han considerat els valors dels paràmetres  $a = b = c = 10$ ,  $d = 2$ .

En general, trobar una corba en l'espai de paràmetres sobre la qual el sistema tingui una òrbita homoclínica no és fàcil. A diferència de les corbes de transició node-focus o de bifurcació sella-node i d'Andronov-Hopf, no hi ha una expressió explícita que la defineixi. En el nostre cas, hem recorregut a les simulacions numèriques per trobar-la. El mètode, que hem exposat breument quan parlàvem de la bifurcació de Bogdanov-Takens estàndard, consisteix a considerar, donat un punt de sella  $p_0$ , una secció transversal  $\Sigma$  a la varietat estable  $W^s(p_0)$  prop de  $p_0$ .  $\Sigma$  es parametriza per  $\beta$  de manera que el punt de tall entre  $\Sigma$  i  $W^s(p_0)$  vingui donat per  $\beta = 0$ . Llavors es calcula el paràmetre  $\beta$  que correspon al punt de tall entre la varietat inestable  $W^u(p_0)$  i  $\Sigma$ . Si  $\beta = 0$ , les varietats estable i inestable de la sella contenen una òrbita homoclínica a la sella.

Inicialment hem fet algunes simulacions del sistema per a diferents valors de  $P$  i  $Q$  fins que hem detectat una bifurcació d'aquest tipus (que es caracteritza per la desaparició o el naixement d'una òrbita periòdica). Hem aproximat la corba, que a partir d'ara anomenarem  $\Gamma^h$ , seguint l'algorisme següent:

- (1) Trobem  $(P_0, \tilde{Q}_0)$  en un entorn dels quals el sistema té una òrbita homoclínica. Trobem una aproximació  $p_0$  al punt de sella corresponent. Estudiem sobre quines branques de les varietats estable i

inestable haurem de treballar.

(2) Fixem  $P = P_0$  i refinem el valor de  $Q_0$ :

- (a) Comencem fixant  $Q = \tilde{Q}_0$ . Calculem el punt de sella  $p$  associat pel mètode de Newton, partint de  $p_0$  com a aproximació inicial. Calculem els valors i vectors propis associats a  $p$ . Un cop els tenim, aproximem les varietats estable ( $W^s(p)$ ) i inestable ( $W^u(p)$ ) a primer ordre. Ens situem sobre la sella i avancem sobre la varietat estable una quantitat fixada en el sentit adequat. Sobre el punt obtingut ( $p'$ ), definim una recta transversal que serà la secció  $\Sigma$ . Ens situem sobre la branca adequada de la varietat inestable i l'anem seguint fins que travessem  $\Sigma$ . Aquest seguiment el fem integrant el camp vectorial del sistema fent servir el mètode d'Euler i un pas d'avenç fixat prèviament. Ens situem en el punt on ens trobàvem just abans de travessar ( $q$ ) i aproximem el punt de tall entre  $W^u(p)$  i  $\Sigma$  calculant, pel mètode de Newton, el pas  $h$  pel qual  $\varphi(h, q) \in \Sigma$  (on  $\varphi$  representa el flux del camp). Un cop coneixem el punt de tall, calculem  $\beta(Q)$  tenint en compte el valor de  $p' = \Sigma \cap W^s(p)$ .
- (b) Mentre  $\beta(Q)$  no canvia de signe, redefinim  $Q := Q + h_Q$ , per a un pas  $h_Q$  definit a priori i tornem a calcular  $\beta(Q)$  pel procediment anterior. Mirem si hem avançat  $Q$  en el sentit correcte i en cas contrari fem  $h_Q := -h_Q$ .
- (c) Un cop tenim  $\tilde{Q}_1$  i  $\tilde{Q}_2$  tals que  $\beta(\tilde{Q}_1) \cdot \beta(\tilde{Q}_2) < 0$ , trobem  $Q \in (\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)$  o  $Q \in (\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1)$  pel qual  $|\beta(Q)|$  sigui menor que una certa tolerància. Això ho fem pel mètode de la secant.

(3) Hem aproximat  $Q_0$  tal que en  $(P_0, Q_0)$  el sistema té una òrbita homoclínica. Definim  $P_1 = P_0 + h_P$ , on  $h_P$  és un pas d'avenç fixat a priori. Fem  $P = P_1$  i repetim el procediment anterior fins trobar el  $Q_1$  pel qual  $(P_1, Q_1)$  satisfà la condició buscada. Repetim  $n$  vegades aquest procés fins obtenir una successió de punts  $(P_0, Q_0), (P_1, Q_1), \dots, (P_n, Q_n)$  on es satisfà la condició desitjada.

Observem que aquest algoritme dóna un paper diferenciat als dos paràmetres  $P$  i  $Q$ . En principi, l'algorisme anàleg que resulta d'intercanviar  $P$  per  $Q$  és igualment vàlid. Hem programat tots dos mètodes per poder canviar entre un i un altre quan la situació ho requereix. L'algorisme que hem especificat permet trobar  $Q$  en funció de  $P$ , és a dir, dóna una aproximació de la corba com si l'estiguéssim parametritzant per  $P$ . En els punts en què la corba no sigui parametritzable per  $P$  podem tenir problemes i serà útil intercanviar els papers dels paràmetres (de fet, en el càlcul de la corba quan  $a = b = c = 10$  i  $d = 2$  hem fet servir tots dos procediments).

A la Figura 17 hem representat les diferents corbes calculades pel cas  $a = b = c = 10$  i  $d = 2$ . La corba  $\Gamma^h$  neix a  $B_1$  i mor a  $B_2$ , i és tangent a totes les altres en aquests punts. Per tant,  $B_1$  i  $B_2$  són dos punts de bifurcació de tipus Bogdanov-Takens. Analitzem el comportament del sistema al voltant d'un d'aquests dos punts, per exemple,  $B_2$ . En primer lloc, cal destacar que, en un entorn de  $B_2$ , hi ha sempre un node atractor que no participa en la bifurcació de Bogdanov-Takens i que anomenarem  $p_N$ . Considerem la

notació de la regió ampliada corresponent (Figura 17). En la regió 1, l'únic punt d'equilibri és  $p_N$ . Si girem al voltant de  $B_2$  en el sentit de les agulles del rellotge, primer creuem  $\Gamma^{sn}$  i apareixen una sella ( $p_1$ ) i un node atractor ( $p_2$ ). En passar a la regió 2, el node  $p_2$  esdevé un focus atractor. Si seguim avançant, arribem a la zona 3 i el focus es fa repulsor a l'hora que neix una òrbita periòdica atractora. En creuar  $\Gamma^h$ , l'òrbita periòdica desapareix, i a la regió 4 tenim un focus repulsor ( $p_2$ ), una sella ( $p_1$ ) i un node atractor ( $p_N$ ). Si tornem a 1 seguint el sentit de gir, en primer lloc el focus repulsor esdevé node i a continuació aquest node repulsor i la sella col·lapsen i desapareixen.

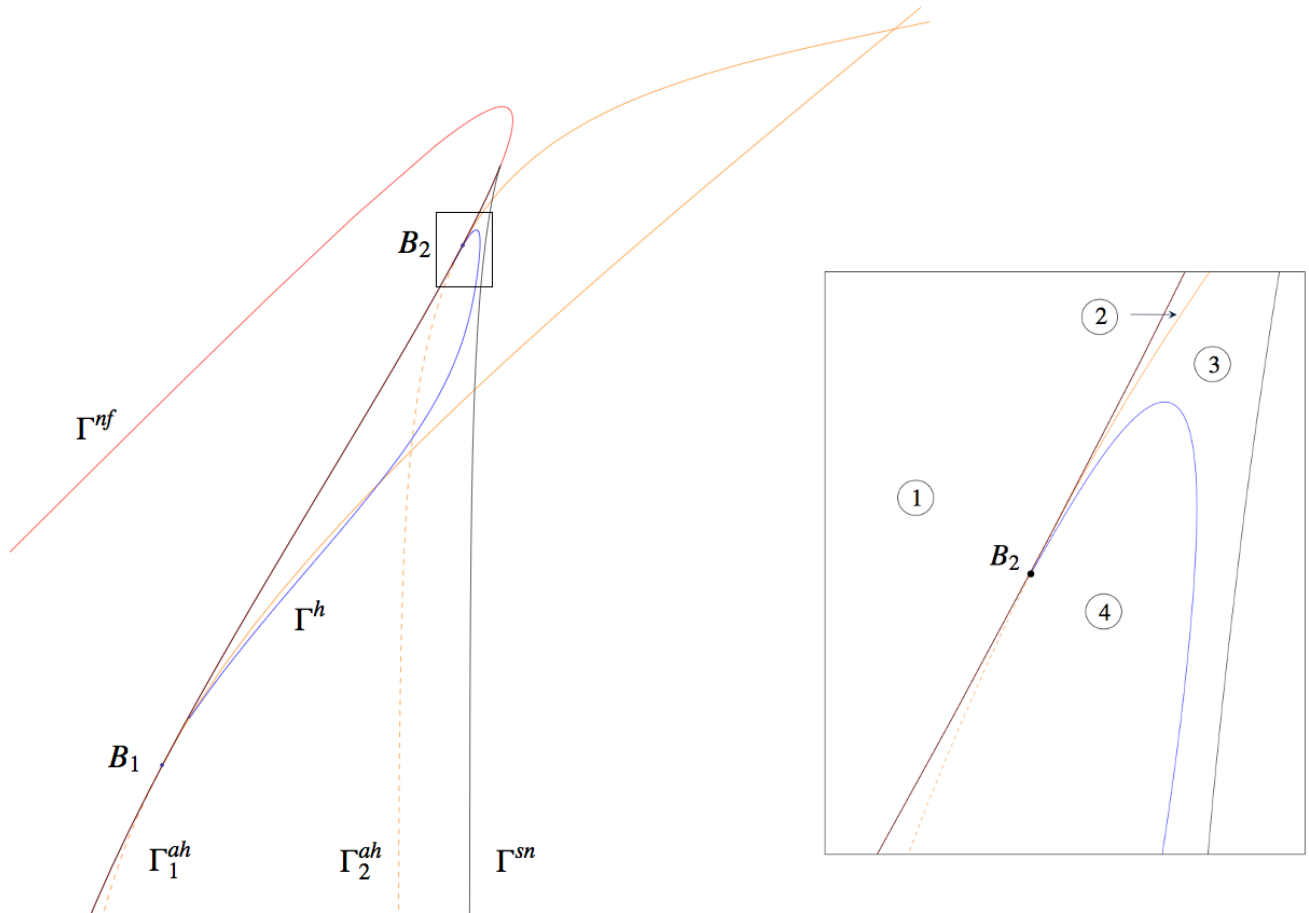


Figura 17: Diagrama amb les diferents corbes calculades pel cas  $a = b = c = 10$  i  $d = 2$ : sella-node (negre), node-focus (vermell), Andronov-Hopf (taronja) i sella homoclínica (blau). La corba taronja discontinua correspon a la presència d'un punt de sella amb valors propis oposats.  $B_1$  i  $B_2$  són punts de bifurcació de Bogdanov-Takens. El quadre de la dreta és una ampliació d'un entorn de  $B_2$ .

La presència d'un punt de bifurcació de tipus Bogdanov-Takens confereix un comportament molt ric a la xarxa neuronal. Es tracta d'un punt en tot entorn del qual el sistema pot tenir una gran varietat de dinàmiques diferents. A més, també constitueix un mecanisme a través del qual la xarxa pot canviar sobtadament d'estat sota condicions determinades de l'estimulació externa. Suposem, per exemple, que

l'estimulació externa varia tot movent-se de la regió 2 a la 4 passant per la regió 3. En aquest cas, la xarxa pot passar d'estar en un cert estat d'activació constant a entrar en un règim oscil·latori com a conseqüència de la pèrdua d'estabilitat del focus en creuar  $\Gamma_2^{ah}$ . Si l'estimulació continua variant en la mateixa direcció, les oscil·lacions aniran guanyant amplitud fins un moment crític en què desapareixeran. En aquest punt, la xarxa passarà inevitablement a un nou estat d'activació, determinat per l'únic punt atractor que s'ha mantingut. Ara, encara que els estímuls externs retornin als valors inicials, el sistema roman en aquest nou estat i no recupera la seva condició original.

## 5 Conclusions

La teoria de sistemes dinàmics proporciona eines molt poderoses per a l'estudi dels models que es formulen mitjançant equacions diferencials. Tot i que les matemàtiques no necessiten d'una justificació pràctica per tenir sentit i resulten extraordinàriament interessants en elles mateixes, el descobriment de la seva presència en el si d'altres disciplines és quelcom extraordinari. Aquesta és una de les primeres impressions que he tingut durant l'elaboració d'aquest treball. La teoria de bifurcacions, per exemple, descriu fenòmens aparentment abstractes que després tenen una manifestació directa en els models físics i, per tant, en la realitat.

El model neuronal de Wilson i Cowan té unes particularitats que el fan especialment interessant. D'una banda, parteix de premisses relativament senzilles i la seva formulació és clara i transparent. Basat en un petit conjunt de resultats experimentals bàsics, el seu desenvolupament es pot explicar amb paraules. Aquesta aparent simplicitat contrasta amb la dinàmica que descriu, que, tot i ser no molt complicada, dóna lloc a règims prou rics i que no són en absolut evidents a simple vista. Les matemàtiques construeixen un pont entre el que dicta el sentit comú i allò que, per ser complex, no podríem deduir fent ús únicament dels recursos del llenguatge.

En el desenvolupament d'aquest treball, hem vist com el model de Wilson i Cowan dóna lloc a l'emergència de patrons dinàmics complexos en les poblacions neuronals que representa. D'una banda, el model prediu, en qualsevol circumstància, la presència de punts d'equilibri atractors, que són hiperbòlics per a la majoria dels possibles paràmetres externs. Per tant, representen estats pel que fa a l'activació de les dues poblacions que són no tan sols atractors localment, sinó també estables davant de pertorbacions. Aquest ingredient és important en un context biològic, perquè posa de manifest la robustesa de la xarxa davant de les fluctuacions, potser petites però constants, del medi. El model també prediu, sempre que l'efecte de la població excitatòria sobre si mateixa sigui prou potent i sota condicions adequades en l'estimulació externa, l'entrada en règims oscil·latoris. Experimentalment s'ha vist que els estats oscil·latoris són ubics al sistema nerviós central, i es creu que tenen un paper clau en diversos processos cognitius com els ritmes de son. El model, per tant, descriu un mecanisme precís pel qual aquests cicles es poden generar i mantenir en el temps. Un altre aspecte rellevant és la presència de bifurcacions en el sistema, que donen lloc a canvis qualitius en la dinàmica com a conseqüència de variacions de suficient intensitat i durada en l'estimulació de les dues xarxes. Atès que les xarxes neuronals són, al cap i a la fi, unitats de computació, tot model versemblant ha de ser capaç d'explicar l'emergència de respostes diferenciades davant d'estímuls canviants. Hem vist que el sistema descrit per les equacions de Wilson i Cowan pot experimentar diversos canvis d'estat induïts per l'estimulació extrínseca, per exemple a través de les bifurcacions de tipus cúspide. De forma similar però qualitativament diferent, la bifurcació de Bogdanov-Takens és un mecanisme a partir del qual la xarxa pot saltar de forma sobtada d'un estat oscil·latori a un estat estacionari. A més, el sistema pot entrar en cicles d'histèresi en què els estats depenen també de la història de la pròpia xarxa.

Aquesta capacitat de les xarxes per respondre de manera diferenciada en funció del seu estat previ podria reflectir una forma primigènia de memòria a curt termini.

És important ressaltar que l'anàlisi que hem fet de les corbes de bifurcació i dels possibles canvis d'estat del sistema està basat en una elecció concreta dels paràmetres de connectivitat  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  i de les constants temporals  $\tau_x$  i  $\tau_y$ .  $S_x$  i  $S_y$ , que venen a representar les funcions de resposta de cadascuna de les xarxes als diferents nivells d'excitació mitjana global, també han estat fixades. Per tant, les corbes de bifurcació obtingudes només són vàlides quan es consideren aquestes eleccions. No obstant això, la metodologia que hem seguit per calcular-les i el tipus de discussió que se'n pot fer és igualment aplicable a altres escenaris. Una de les avantatges de l'estudi matemàtic teòric previ és que proporciona eines d'anàlisi que són universals i estan per sobre dels casos particulars. Això no vol dir, òbviament, que altres eleccions dels paràmetres i de les funcions de resposta no puguin donar lloc a nous tipus de bifurcacions i/o de règims dinàmics. Aquests aspectes queden pendents per a futures exploracions. Com a mínim, però, els casos estudiats ja posen de manifest la capacitat del model per reproduir algunes de les respostes presents en les xarxes reals i també certs mecanismes que podrien estar al darrere de processos per ara encara enigmàtics com l'establiment de la memòria.

Un altre aspecte molt interessant seria considerar alguns dels constituents del model com a nous elements mòbils, de la mateixa manera que ho són els paràmetres  $P$  i  $Q$ , que reflecteixen les variacions dels senyals rebuts per la xarxa. En un plantejament inicial, tant les funcions  $S_x$  i  $S_y$  com els paràmetres  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  constitueixen la "identitat" de la xarxa, és a dir, són el conjunt de característiques intrínseques de la xarxa que en determinen la capacitat de resposta. Així com  $\tau_x$  i  $\tau_y$  afecten a la velocitat de reacció de les dues poblacions, els paràmetres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  mesuren la fortalesa de les connexions dins la pròpia xarxa. D'alguna manera, aquests darrers paràmetres reflecteixen, en un sentit estadístic, la configuració del subjacent graf de connectivitat. Es creu que els motius de connectivitat de les xarxes neuronals juguen un paper determinant en la seva capacitat de computació. D'altra banda, els processos d'aprenentatge i consolidació de la memòria impliquen una remodelació dels patrons de connectivitat, a través de la plasticitat sinàptica. La plasticitat no és més que el procés mitjançant el qual les connexions es modifiquen –s'enforteixen o s'afebleixen– en resposta a l'activitat de la pròpia xarxa. Per tant, si bé en el model de Wilson i Cowan la connectivitat només té un paper en termes estadístics, seria interessant estudiar escenaris més amplis en què els paràmetres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  (i potser també les funcions de resposta  $S_x$  i  $S_y$ ) poguessin també ser modificats al llarg del temps. Això ens endinsaria en l'estudi dels mecanismes de la plasticitat.

Òbviament, resten encara diverses preguntes obertes i són moltes les possibles vies per explorar. Fins a quin punt el model de Wilson i Cowan és realista? I el que és més important, la informació que proporciona, que s'expressa en termes del nivell d'activació mitjà de les xarxes, és informativa en la recerca de com operen els circuits nerviosos? Quines conseqüències té el tractament estadístic de les poblacions? És cert que la dinàmica de les neurones individuals no és rellevant a l'hora d'entendre com operen les xarxes en conjunt? Encara que només el temps i la ciència podran contestar aquestes preguntes, el que és clar és que

per intentar resoldre-les cal trobar un punt de partida. Potser el model de Wilson i Cowan comporti una simplificació excessiva de la realitat, però, sigui com sigui, pot donar pistes en el camí cap a la comprensió dels mecanismes bàsics que estan darrere de la cognició.

## Referències

- [1] Dayan P, Abbott LF. Theoretical Neuroscience. Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems. Cambridge: MIT Press, 2001.
- [2] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [3] Hoppensteadt FC, Izhikevich EM. Weakly Connected Neural Networks. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [4] Kuznetsov YA. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [5] Wilson HR, Cowan JD. Excitatory and Inhibitory Interactions in Localized Populations of Model Neurons. Biophysical Journal. 1972; 12: 1–24.
- [6] Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 2001.