PROBLEMES CLAU DE

DISSENY D'EXPERIMENTS

I

ANÀLISI DE DADES

PART II

C. Arenas

Professora titular del Departament d'Estadística de la UB

Barcelona, 3 de març de 2006

El curs passat va néixer la col·lecció Problemes Clau de Disseny d'Experiments i Anàlisi de Dades, dirigida als estudiants de Biologia. En vista del grau d'èxit i la bona acollida que va tenir el primer títol relatiu als dissenys d'un factor, enguany apareix el segon títol relatiu als dissenys de dos o tres factors fixos.

Aquest manual, com l'anterior, conté problemes resolts que pretenen d'ajudar l'alumnat en la consolidació dels coneixements necessaris sobre la matèria.

Una vegada més, vull agrair a tots els meus alumnes de DEAD, el seu treball i els seus comentaris, sense els quals no hauria estat possible l'elaboració d'aquesta col·lecció de problemes.

C. Arenas

Professora titular del Departament d'Estadística de la UB

Problema

En un article publicat a Industrial Quality Control es descriu un experiment per investigar l'efecte del tipus de vidre i el tipus de fòsfor sobre la lluentor d'un cinescopi de televisor. La variable de resposta és el corrent necessari (en microamperes) per obtenir un nivell de lluentor especificat. Les dades són:

Tipus de vidre	Tipus de fòsfor		
	1	2	3
1	280	300	290
	290	310	285
	285	295	290
2	230	260	220
	235	240	225
	240	235	230

Hi ha indicis que algun dels factors influeixi en la lluentor?
Hi ha interacció entre els dos factors?
Sota la condició òptima, quina és la probabilitat que el corrent sigui superior a 300?

Se suposa normalitat i homogeneïtat de variàncies.

Aquest problema segueix un model de dos factors fixos amb interacció amb *r* rèpliques per condició experimental (r = 3) i la parametrització del model és:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk},$$

on: μ = mitjana general
α_i = efecte del tipus de vidre
β_j = efecte del tipus de fòsfor
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecte de la interacció entre els factors tipus de fòsfor i tipus de vidre
e_{ijk} = residus

El problema ens diu que es compleixen les hipòtesis de treball de normalitat i homogeneïtat de variàncies.

Taula ANOVA:

Variabilitat	*SQ*	*Graus de llib.*	*QM*	*F*
Factor tipus de vidre	14450,1	$a - 1 = 1$	14450,1	273,79
Factor tipus de fòsfor	933,267	$b - 1 = 2$	466,9335	8,84
Interacció	133,327	$(a - 1)\,(b - 1) = 2$	66,6635	1,26
Residu	633,333	$n - a\,b = 12$	52,77775	
Total	16150,03	$n - 1 = 17$		

a = nombre de nivells del factor fila
b = nombre de nivells del factor columna
n = grandària total

a) Càlcul de les mitjanes necessàries:

$$y_{...} = \frac{280+290+285+300+310+295+290+285+290+230+235+240+260+240+235+220+225+230}{18} = 263.34$$

$$y_{1..} = \frac{280+290+285+300+310+295+290+285+290}{9} = 291.667$$

$$y_{2..} = \frac{230+235+240+260+240+235+220+225+230}{9} = 235$$

$$y_{.1.} = \frac{280+290+285+230+235+240}{6} = 260$$

$$y_{.2.} = \frac{300+310+295+260+240+235}{6} = 273.34$$

$$y_{.3.} = \frac{290+285+290+220+225+230}{6} = 256.67$$

$$y_{11.} = \frac{280+285+290}{3} = 285$$

$$y_{12.} = \frac{300+310+295}{3} = 301.667$$

$$y_{13.} = \frac{290+285+290}{3} = 288.333$$

$$y_{21.} = \frac{230+235+240}{3} = 235$$

$$y_{22.} = \frac{260+240+235}{3} = 245$$

$y_{23.} = \frac{220+225+230}{3} = 225$

b) Càlcul de la taula ANOVA:

Sumes de quadrats

SQ$_{\text{factor vidre}}$ = $\sum_i n_{i.}\left(y_{i..} - y_{...}\right)^2$ = 9 x (291,667 – 263,333)^2 + 9 x (235 – 263,333)^2 =
= 14450,1

SQ$_{\text{factor fòsfor}}$ = $\sum_j n_{.j}\left(y_{.j.} - y_{...}\right)^2$ = 6 x (260 – 263,333)^2 + 6 x (273,333 – 263,333)^2 +
+ 6 x (256,667 – 263,333)^2 = 933,267

SQ$_{\text{interacció}}$ = $r\sum_{i,j}\left(y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...}\right)^2$ = 3 x (285 – 291,667 – 260 + 263,333)^2 +
+ 3 x (301,667 – 291,667 – 273,333 + 263,333)^2 + 3 x (288,333 – 291,667 – 256,667 +
+ 263,333)^2 + 3 x (235 – 235 – 260 + 263,333)^2 + 3 x (245 – 235 – 273,333 + 263,333)^2
+ 3 x (225 – 235 – 256,667 + 263,333)^2 = 133,327

SQ$_{\text{residual}}$ = $\sum\left(y_{ijk} - y_{ij.}\right)^2$ = (280 – 285)^2 + (290 – 285)^2 + (285 – 285)^2 +
+ (300 – 301,667)^2 + (310 – 301,667)^2 + (295 – 301,667)^2 + (290 – 288,333)^2 +
+ (285 – 288,333)^2 + (290 – 288,333)^2 + (230 – 235)^2 + (235 – 235)^2 + (240 – 235)^2 +
+ (260 – 245)^2 + (240 – 245)^2 + (235 – 245)^2 + (220 – 225)^2 + (225 – 225)^2 +
+ (230 – 225)^2 = 25 + 25 + 0 + 2,778889 + 69,438889 + 44,448889 + 2,778889 +
+ 11,108889 + 2,778889 = 633,333

SQ$_{\text{total}}$ = SQ$_{\text{factor vidre}}$ + SQ$_{\text{factor fòsfor}}$ + SQ$_{\text{interacció}}$ + SQ$_{\text{residual}}$ = $\sum(y_{ijk}\text{-}y_{...})^2$ =
= 14450,1 + 933,267 + 133,327 + 633,333 = 16150,03

Sumes de quadrats mitjans

QM$_{\text{factor vidre}}$ = SQ$_{\text{factor vidre}}$ / (a – 1) = 14450,1

QM$_{\text{factor fòsfor}}$ = SQ$_{\text{factor fòsfor}}$ / (b – 1) = 466,6335

QM$_{\text{interacció}}$ = SQ$_{\text{interacció}}$ / (a – 1) x (b – 1) = 66,6635

QM$_{\text{residual}}$ = SQ$_{\text{residual}}$ / (n – a b) = 52,77775

Càlcul de les F

$F_{\text{factor vidre}} = QM_{\text{factor vidre}} / QM_{\text{residual}} = 273{,}79$

$F_{\text{factor fòsfor}} = QM_{\text{factor fòsfor}} / QM_{\text{residual}} = 8{,}84$

$F_{\text{interacció}} = QM_{\text{interacció}} / QM_{\text{residual}} = 1{,}26$

Hipòtesis per contrastar

Prenem com a nivell de significació 0,05.

H_0: no hi ha interacció.
H_1: hi ha interacció.

$F_{\text{interacció}} = 1{,}26$
$F_{\text{teòrica }(2,12)} = 3{,}89$

3,89 > 1,26 → rebutgem H_1 → acceptem H_0 → vol dir que acceptem, amb una probabilitat del 5 % d'error, que no hi ha interacció entre el tipus de fòsfor i el tipus de vidre.

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2$
H_1: alguna igualtat és falsa.

$F_{\text{factor vidre}} = 273{,}79$
$F_{\text{teòrica }(1,12)} = 4{,}75$

273,79 > 4,75 → rebutgem H_0 → vol dir que acceptem, amb una probabilitat del 5 % d'error, que hi ha diferències en el tipus de vidre.

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$
H_1: alguna igualtat és falsa.

$F_{\text{factor fòsfor}} = 8{,}84$
$F_{\text{teòrica }(2,16)} = 3{,}63$

8,84 > 3,63 → rebutgem H_0 → vol dir que acceptem, amb una probabilitat del 5 % d'error, que hi ha diferències en el tipus de fòsfor.

En conseqüència, podem dir que tant el tipus de vidre com el tipus de fòsfor influeixen en la lluentor del cinescopi del televisor.

Finalment,

c) Probabilitat que, sota la condició òptima, el corrent sigui superior a 300.

Sabem que la condició òptima correspon al valor màxim $y_{12.}$ = 301,6,

$$y_{12k} = \mu + \alpha_1 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{12} + e_{ijk} \approx$$
$$\approx y_{...} + (y_{i..} - y_{...}) + (y_{.j.} - y_{...}) + (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...}) + N(0, \sqrt{QM_r}) \ .$$
$$y_{12k} = y_{12.} + N(0, \sqrt{QM_r}) \ .$$

Per tant,

$$P\left(N(301.6, \sqrt{52.77}) > 300\right) = P\left(N(0,1) > \frac{300 - 301.6}{7.265}\right) = P\left(N(0,1) > -0.23\right)$$
$$= 1 - P\left(N(0,1) \leq 0.23\right) = 0.59 \, .$$

Sota la condició de cristall 1 i fòsfor 2, la probabilitat que el corrent sigui superior a 300 és d’un 59 %.

Problema

Un investigador mèdic està estudiant l'efecte de la lidocaïna sobre el nivell enzimàtic al múscul cardíac dels gossos. En un experiment va utilitzar tres marques comercials de lidocaïna (factor C), tres dosis diferents (factor A) i tres gossos (factor B). Els nivells enzimàtics observats per condició experimental són:

Marca de lidocaïna	Dosi	Gos 1	Gos 2	Gos 3
1	1	86,840	84,850	85,860
	2	94,950	99,970	98,900
	3	101,105	106,104	98,103
2	1	85,800	84,820	86,840
	2	95,930	98,990	97,950
	3	108,110	114,102	109,100
3	1	84,830	83,800	81,790
	2	95,920	97,960	93,930
	3	105,102	100,111	106,108

Analitzeu les dades suposant normalitat i homogeneïtat de variàncies.

a) Cal identificar el model que segueix el problema.

És un disseny de tres factors fixos amb interacció i balancejat, perquè hi ha dues rèpliques per cada condició experimental. El model que segueix és:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}\ ,$$

on μ = mitjana general
α_i = efecte del nivell *i* del factor dosi
β_j = efecte del nivell *j* del factor gos
γ_k = efecte del nivell *k* del factor marca de la lidocaïna
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecte de la interacció entre el factor dosi i el factor gos
$(\alpha\gamma)_{ik}$ = efecte de la interacció entre el factor dosi i el factor marca de la lidocaïna
$(\beta\gamma)_{jk}$ = efecte de la interacció del factor gos i el factor marca de la lidocaïna
$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ = efecte de la interacció dels tres factors junts
e_{ijk} = residus

b) La taula ANOVA i la seva anàlisi.

Incloem la taula ANOVA obtinguda amb el paquet Statgraphics.

```
Analysis of Variance for NIVELL  ENZIMÀTIC - Type III Sums of Squares
--------------------------------------------------------------------------------
Source                 Sum of Squares     Df    Mean Square    F-Ratio    P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
MAIN EFFECTS
 A:DOSI                       4260,78      2        2130,39     209,55     0,0000
 B:GOS                           28,0      2           14,0       1,38     0,2695
 C:MARCA LIDOCAINA               31,0      2           15,5       1,52     0,2359

INTERACTIONS
 AB                           36,8889      4        9,22222       0,91     0,4738
 AC                           69,5556      4        17,3889       1,71     0,1768
 BC                           3,33333      4       0,833333       0,08     0,9872
 ABC                          60,7778      8        7,59722       0,75     0,6502

RESIDUAL                        274,5     27        10,1667
--------------------------------------------------------------------------------
TOTAL (CORRECTED)             4764,83     53
--------------------------------------------------------------------------------
All F-ratios are based on the residual mean square error.


The StatAdvisor
---------------
   The ANOVA table decomposes the variability of NIVELL  ENZIMÀTIC
into contributions due to various factors.  Since Type III sums of
squares (the default) have been chosen, the contribution of each
factor is measured having removed the effects of all other factors.
The P-values test the statistical significance of each of the factors.
Since one P-value is less than 0,05, this factor has a statistically
significant effect on NIVELL  ENZIMÀTIC at the 95,0% confidence level.
```

Hipòtesis per contrastar

— Factor dosi

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \\ H_1\colon \text{alguna igualtat és falsa.} \end{array}\right\}$$

El nivell de significació és de 0,05 i, com que p-valor < nivell de significació, llavors rebutgem H_0 i acceptem que hi ha diferències entre les diferents dosis.

— Factor gos

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \\ H_1\colon \text{alguna igualtat és falsa.} \end{array}\right\}$$

Com que p-valor > nivell de significació, llavors acceptem H_0 i això vol dir que, amb un 5 % de probabilitat d'error, acceptem que no hi ha diferències entre els diferents gossos.

— Factor marca de lidocaïna

H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$
H_1: alguna igualtat és falsa.

Com que p-valor > nivell de significació, llavors acceptem H_0 i això vol dir que, amb un 5 % de probabilitat d'error, acceptem que no hi ha diferències entre les diferents marques de lidocaïna.

— Interacció dosi-gos

H_0: no hi ha interacció.
H_1: sí que hi ha interacció.

Com que p-valor > nivell de significació, llavors acceptem H_0 i això vol dir que, amb un 5 % de probabilitat d'error, acceptem que no hi ha interacció dosi-gos.

— Interacció dosi-marca de lidocaïna

H_0: no hi ha interacció.
H_1: sí que hi ha interacció.

Com que p-valor > nivell de significació, llavors acceptem H_0 i això vol dir que, amb un 5 % de probabilitat d'error, acceptem que no hi ha interacció dosi-marca de lidocaïna.

— Interacció gos - marca de lidocaïna

H_0: no hi ha interacció.
H_1: sí que hi ha interacció.

Com que p-valor > nivell de significació, llavors acceptem H_0 i això vol dir que, amb un 5 % de probabilitat d'error, acceptem que no hi ha interacció gos-marca de lidocaïna.

— Interacció dels tres factors

H_0: no hi ha interacció.
H_1: sí que hi ha interacció.

Com que p-valor > nivell de significació, llavors acceptem H_0 i això vol dir que, amb un 5 % de probabilitat d'error, acceptem que no hi ha interacció entre els tres factors.

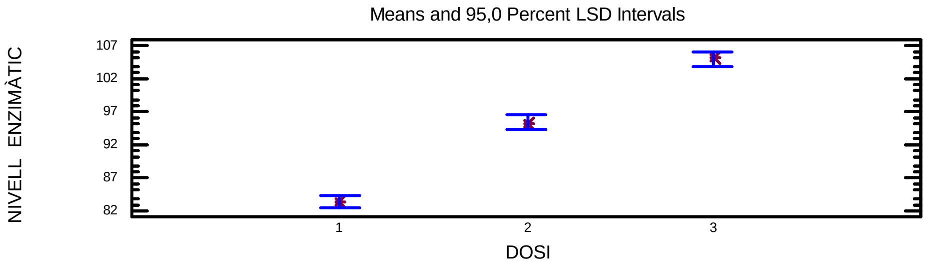
Prova de comparacions múltiples per les dosis

Incloem la taula obtinguda amb Statgraphics.

```
Multiple Range Tests for NIVELL  ENZIMÀTIC by DOSI

--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95,0 percent LSD
DOSI           Count     LS Mean       LS Sigma      Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
1              18        83,3889       0,751542      X
2              18        95,3333       0,751542       X
3              18        105,111       0,751542        X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                 Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
1 - 2                                   *-11,9444             2,18077
1 - 3                                   *-21,7222             2,18077
2 - 3                                   *-9,77778             2,18077
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.


The StatAdvisor
---------------
   This table applies a multiple comparison procedure to determine
which means are significantly different from which others.  The bottom
half of the output shows the estimated difference between each pair of
means.  An asterisk has been placed next to 3 pairs, indicating that
these pairs show statistically significant differences at the 95,0%
confidence level.  At the top of the page, 3 homogenous groups are
identified using columns of X's.  Within each column, the levels
containing X's form a group of means within which there are no
statistically significant differences.  The method currently being
used to discriminate among the means is Fisher's least significant
difference (LSD) procedure.  With this method, there is a 5,0% risk of
calling each pair of means significantly different when the actual
difference equals 0.
```



Veiem que, a l'anàlisi en la taula de comparacions múltiples, a la columna Difference ja ens marca amb un asterisc cada filera, cosa que vol dir que hi ha diferències significatives entre totes les dosis. I en la gràfica podem veure que la que dóna un nivell enzimàtic mitjà superior és la dosi 3.

Problema

Per estudiar el patró de creixement del corall (Leptogorgia sp.) al llarg del temps, se'n va fer un estudi temporal a les illes Medes. Durant dos anys es va fer un seguiment aproximadament trimestral de quatre colònies (1, 2, 3 i 4) i se'n va mesurar l'increment de longitud de les branques durant aquell període. En la taula es mostra la suma del creixement de cada branca (en mm), és a dir, el creixement total de la colònia, en l'interval entre dos mostreigs.

Escriviu el model estadístic corresponent al model utilitzat.
Determineu si hi ha diferències entre l'època de l'any i entre les colònies.
Determineu si hi ha interacció significativa entre els dos factors.
Valoreu en quines condicions s'observa el creixement màxim.

Se suposa normalitat i homogeneïtat de variàncies dels residus.

	1	2	3	4
maig – agost	36,69 35,50	24,07 25,00	17,45 16,99	0,37 0,43
agost - novembre	20,95 22,00	55,36 54,96	26,30 27,80	44,40 45,00
novembre - febrer	-43,78 -43,50	-24,76 -24,80	-25.80 -26,00	-72,22 -72,57
febrer – juny	13,58 14,00	41,59 42,00	-1,56 -1,34	66,96 67,20
juny – agost	-4,32 -4,55	-27,17 -26,80	4,71 4,89	19,00 19,22
agost – octubre	-68,93 -68,45	-12,95 -13,00	-2,16 -2,25	-19,87 -20,01
octubre- decembre	0,08 0,08	-24,98 -25,00	-7,82 -7,78	37,23 37,15

Objectiu

Determinar si hi ha diferències en el creixement del corall entre les diferents èpoques de l'any i entre les diferents colònies.

Variable observable

Creixement de les colònies de corall (en mm), variable amb 2 factors:

— època de l'any, amb 7 nivells ($a = 7$)

— colònia, amb 4 nivells ($b = 4$)

Hipòtesis de treball

Els residus són variables aleatòries independents que segueixen una distribució normal de mitjana igual a zero i amb homogeneïtat de variàncies.

Segons l'enunciat, aquesta hipòtesi de treball es compleix, i podem dir que les dades segueixen el model següent:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \,,$$

on μ = mitjana general

α_i = efecte època de l'any

β_j = efecte colònia

$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecte de la interacció entre el factor època de l'any i el factor colònia

e_{ijk} = residus

Hipòtesis per contrastar

Per fer els contrastos d'hipòtesi ens basem en l'estadístic F i el seu p-valor, que trobem en la taula ANOVA:

Variabilitat	*suma quadrats*	*Gr.ll.*	*Quadrats Mitjans*	*F*	*P-Valor*
EFECTOS PRINCIPALES					
A: colònia	2.055,69	3	685,229	4.872,00	0,0000
B: època	40.342,2	6	6.723,7	47.805,76	0,0000
INTERACCIONES					
AB	19.737,4	18	1.096,52	7.796,30	0,0000
RESIDUO	3,79745	27	0,140646		

H_0: no hi ha interacció.

H_1: sí que hi ha interacció.

Com que el p-valor de les interaccions (0,0000) és més petit que el nivell de significació (0,05), rebutgem H_0; per tant, acceptem H_1 i, amb un 5 % de probabilitat d'equivocar-nos, podem dir que sí que hi ha interacció entre els dos factors.

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$

H_1: alguna igualtat és falsa.

Com que el p-valor del factor colònia (0,0000) és més petit que el nivell de significació (0,05), rebutgem H_0; per tant, acceptem H_1 i, amb un 5 % de probabilitat d'equivocar-nos, podem dir que hi ha creixement diferencial depenent de la colònia en què ens trobem.

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7$
H_1: alguna igualtat és falsa.

Com que el p-valor del factor de l'època de l'any (0,0000) és més petit que el nivell de significació (0,05), acceptem H_1 i podem afirmar, amb un 5 % de probabilitat d'equivocar-nos, que l'època de l'any influeix en el creixement del corall.

Prova de comparació múltiple

Hem vist que hi ha **diferències** per als dos factors; ara ens interessa de saber on són aquestes diferències. Per això, cal fer una prova de comparació múltiple amb el mètode LSD de manera que obtinguem intervals que ens permetin de resoldre els contrastos d'hipòtesi i de veure si hi ha diferències entre dos nivells d'un factor. Per facilitar-ho, però, amb l'Statgraphics podem arribar a les mateixes conclusions fixant-nos en els asteriscos que hi ha al costat dels valors de la columna Diferència. L'asterisc ens indica que hi ha diferències:

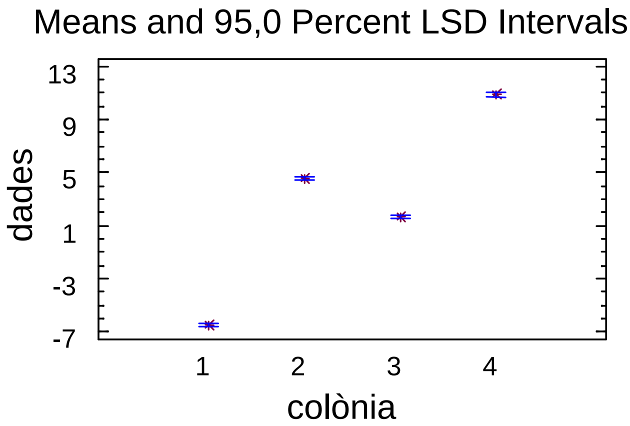
Multiple Range Tests for dades i colònia

Method: 95,0 percent LSD

Contrast	*Difference*	*+/– Límits*
1 - 2	*–11,0121	0,290842
1 - 3	*–8,14857	0,290842
1 - 4	*–17,3586	0,30105
2 - 3	*2,86357	0,290842
2 - 4	*–6,34643	0,30105
3 - 4	*–9,21	0,30105

* Denotes a statistically significant difference.

Veiem que hi ha diferències entre les quatre colònies, podem afirmar-ho amb una probabilitat d'error del 5 %, i es pot comprovar en la gràfica Means and 95,0 % LSD Intervals:



Podem veure diferències clares entre la colònia número 1 (valors negatius de creixement) i la resta, que tenen valors positius. Entre aquestes últimes també es poden observar diferències, sobretot entre les colònies 2 i 3 respecte de la 4.

Recordem, amb un exemple, com es calculen aquestes diferències. Fem el cas 1-2. L'interval que hem de cercar és:

$$[y_{1..} - y_{2..} - Q; y_{1..} - y_{2..} + Q] = [-17.5338 - 0.384748; -17.5338 + 0.384748].$$

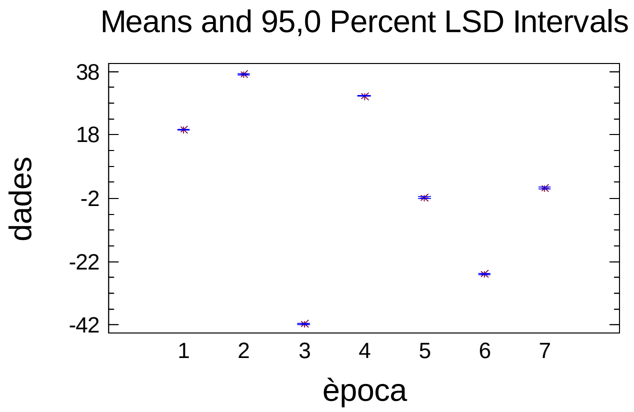
Com que 0 no està dins l'interval es rebutja la hipòtesi d'igualtat.

Ara, fem el mateix per al factor època. *Multiple Range Tests for dades and època*
Method: 95,0 percent LSD

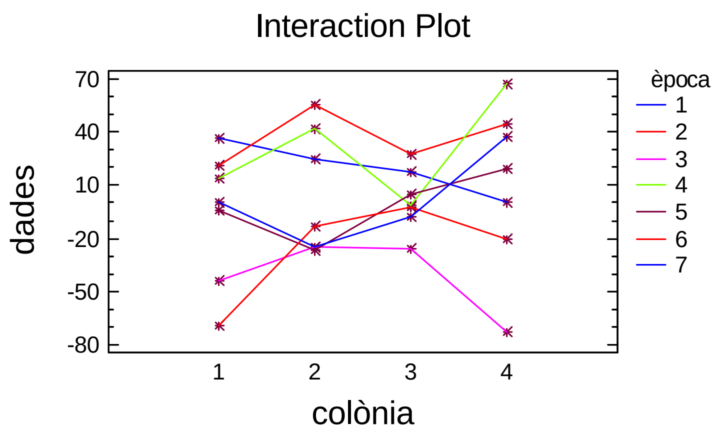
Contrast	*Difference*	*+/– Límits*
1 - 2	*–17,5338	0,384748
1 - 3	*61,2412	0,384748
1 - 4	*–10,7413	0,384748
1 - 5	*21,4400	0,384748
1 - 6	*45,5150	0,384748
1 - 7	*18,4325	0,408087
2 - 3	*78,7750	0,384748
2 - 4	*6,7925	0,384748
2 - 5	*38,9738	0,384748
2 - 6	*63,0488	0,384748
2 - 7	*35,9663	0,408087
3 - 4	*–71,9825	0,384748
3 - 5	*–39,8012	0,384748
3 - 6	*–15,7262	0,384748
3 - 7	*–42,8087	0,408087
4 - 5	*32,1813	0,384748
4 - 6	*56,2563	0,384748
4 - 7	*29,1738	0,408087
5 - 6	*24,0750	0,384748
5 - 7	*–3,0075	0,408087
6 - 7	*–27,0825	0,408087

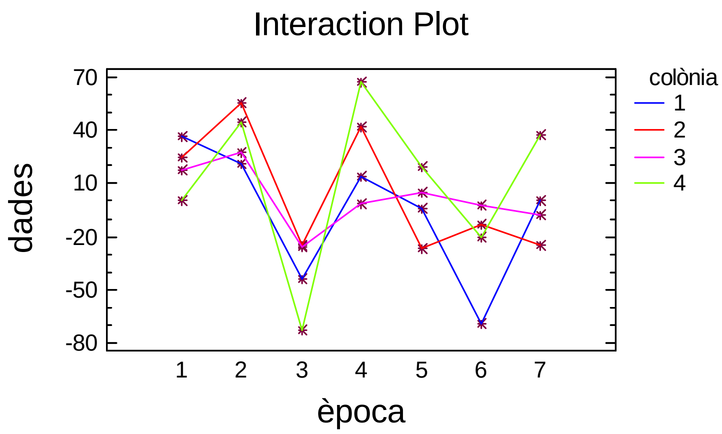
* Denotes a statistically significant difference.

Basant-nos en la taula també podem dir, amb una seguretat del 95 %, que hi ha diferències significatives entre les èpoques de l'any. Per veure aquestes diferències, podem mirar la gràfica Means and 95 % LSD Intervals, on s'observen valors molt diferents per a cada nivell. És especialment baix el valor del tercer període, que podria tenir sentit pel fet de correspondre als mesos de novembre a febrer (hivern), en què el fred podria limitar el creixement de les colònies. També trobem valors baixos en el període 6 (agost-octubre), així com en el 5 i el 7. A causa de les característiques d'aquest organisme, de creixement no gaire regular, i del possible impacte humà (originat pels submarinistes), podríem atribuir aquests valors a alguna crisi durant i passat l'estiu.



Ara podem determinar si hi ha **interacció** entre els dos factors, i podem fer-ho amb els gràfics d'interaccions. Com que es creuen els diferents nivells, podem dir que sí que hi ha interacció entre els dos factors, malgrat que la tendència de cada colònia en cada època sigui similar (poc creixement en període 3, més en el 4, disminució fins al 6, etc.).





Creixement màxim

Determinarem quina colònia presenta el creixement màxim i en quina època mirant el valor màxim en la taula Table of Least Squares Means for Data.

Table of Least Squares Means for Data with 95.0 Percent Confidence Intervals

Colònia	*Època*	*Mitjana*
1	2	36,095
2	2	21,475
3	2	–43,64
4	2	13,79
5	2	–4,435
6	2	–68,69
7	2	0,08
1	2	24,535
2	2	55,16
3	2	–24,78
4	2	41,795
5	2	–26,985
6	2	–12,975
7	2	–24,99
1	2	17,22
2	2	27,05
3	2	–25,9
4	2	–1,45
5	2	4,8
6	2	–2,205
7	2	–7,8
1	2	0,4
2	2	44,7
3	2	–72,395
4	2	67,08
5	2	19,11
6	2	–19,94
7	1	37,23

El valor màxim en la taula és de 67,08 mm, que correspon a la colònia número 4 en els mesos de febrer a juny. En les altres tres colònies, també s'observa més creixement en aquest període si mirem les gràfiques Interaction Plot anteriors.

Ø *Conclusions*

Podem dir que el corall vermell presenta un creixement diferencial depenent de cada colònia. A més, les èpoques de l'any influeixen diferencialment sobre cada una d'aquestes. De les nostres dades podem extreure que el creixement màxim s'observa en el període de febrer a juny, on es recuperen les quatre colònies, i sobretot en la 4 (en la qual s'arriba a valors de 67,08 mm).

Cal remarcar, però, que l'elaboració d'un patró de creixement a partir d'aquestes dades seria poc estricte a causa de la poca homogeneïtat de les dades i el ja conegut creixement erràtic dels coralls.

Problema

Un fisiòleg està interessat a conèixer l'efecte que té la radiació PAR, el reg i la temperatura del substrat sobre el creixement de la ponsètia (g de PS). S'escullen dos nivells (1 i 2) de cada factor, que són considerats com a fixos, i es prenen tres rèpliques de cada condició experimental. Els resultats han estat:

Temperatura del substrat	Radiació PAR	Reg	g de PS
1	1	1	62, 65, 65
2	1	1	62, 73, 60
1	2	1	65, 64, 78
2	2	1	85, 78, 77
1	1	2	75, 75, 69
2	1	2	70, 67, 67
1	2	2	80, 80, 84
2	2	2	69, 71, 76

Descriviu el disseny (factors, tipus de factors, parametrització).
Contrasteu, amb α = 0,05, quins efectes (factors i interaccions) són significatius.

Objectiu

Estudiar l'efecte de la temperatura del substrat, de la radiació PAR i del reg sobre el creixement de la ponsètia.

Variable observable

Creixement de la ponsètia (en g de PS), variable amb 3 factors:

— temperatura del substrat (A): $a = 2$
— PAR (B): $b = 2$
— reg (C): $c = 2$

Rèpliques per condició experimental $r = 3$.

Disseny de l'experiment

És un disseny balancejat de tres factors fixos amb interacció.

Model matemàtic: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$,

on: μ = mitjana general
α_i = efecte del nivell *i* del factor A
β_j = efecte del nivell *j* del factor B
γ_k = efecte del nivell *k* del factor C
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecte de la interacció entre els factors A i B
$(\alpha\gamma)_{ik}$ = efecte de la interacció entre els factors A i C
$(\beta\gamma)_{jk}$= efecte de la interacció del factors B i C
$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ = efecte de la interacció dels tres factors junts
e_{ijk} = residus

Hipòtesis de treball

Els residus han de ser variables aleatòries independents, normals de mitjana 0 i amb homogeneïtat de variàncies.

Hipòtesis per contrastar

$\begin{cases} H_0\text{: no hi ha interacció entre A i B.} \\ H_1\text{: sí que hi ha interacció entre A i B.} \end{cases}$

$\begin{cases} H_0\text{: no hi ha interacció entre A i C.} \\ H_1\text{: sí que hi ha interacció entre A i C.} \end{cases}$

$\begin{cases} H_0\text{: no hi ha interacció entre B i C.} \\ H_1\text{: sí que hi ha interacció entre B i C.} \end{cases}$

$\begin{cases} H_0\text{: no hi ha interacció entre A, B i C.} \\ H_1\text{: sí que hi ha interacció entre A, B i C.} \end{cases}$

$\begin{cases} H_0: \alpha_1 = \alpha_2 \\ H_1\text{: alguna igualtat és falsa.} \end{cases}$

$\begin{cases} H_0: \beta_1 = \beta_2 \\ H_1\text{: alguna igualtat és falsa.} \end{cases}$

$\begin{cases} H_0: \gamma_1 = \gamma_2 \\ H_1\text{: alguna igualtat és falsa.} \end{cases}$

Comprovació de les hipòtesis de treball:

— Normalitat:

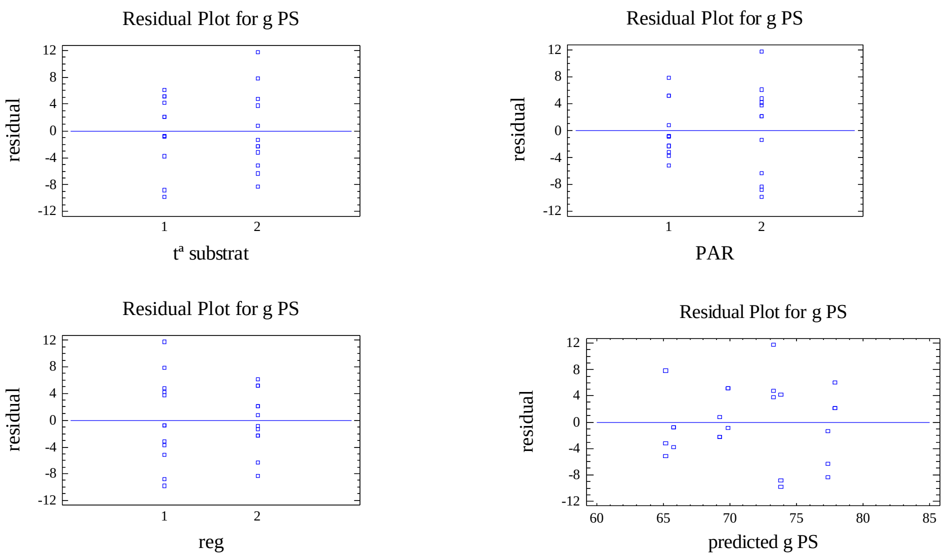
$$\begin{cases} H_0\text{: hi ha normalitat.} \\ H_1\text{: no hi ha normalitat.} \end{cases}$$

Valor del estadístic mitjançant el test de χ^2 = 14,5
p-valor = 0,20655

Com que el p-valor (0,20655) és més gran que el nivell de significació, α = 0,05, rebutgem H_1. És a dir, acceptem que hi ha normalitat.

— Homogeneïtat de variàncies:

$$\begin{cases} H_0\text{: sí que hi ha homogeneïtat.} \\ H_1\text{: no hi ha homogeneïtat.} \end{cases}$$



Segons les gràfiques de residus *vs.* temperatura del substrat, residus *vs.* PAR i residus *vs.* reg, i segons la gràfica residus *vs.* *prediccions*, no observem cap comportament estrany i podem acceptar que hi ha homogeneïtat de variàncies.

Taula ANOVA:

Analysis of Variance for g PS - Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:tª substrat	2,04167	1	2,04167	0,10	0,7573
B:PAR	392,042	1	392,042	18,97	0,0005
C:reg	100,042	1	100,042	4,84	0,0428
INTERACTIONS					
AB	12,0417	1	12,0417	0,58	0,4564
AC	260,042	1	260,042	12,58	0,0027
BC	22,0417	1	22,0417	1,07	0,3171
ABC	77,0417	1	77,0417	3,73	0,0714
RESIDUAL	330,667	16	20,6667		
TOTAL (CORRECTED)	1195,96	23			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

— Temperatura del substrat. Com que el p-valor (0,7573) és més gran que el nivell de significació, $\alpha = 0,05$, rebutgem H_1. És a dir, es pot afirmar que no hi ha diferències significatives entre les temperatures del substrat.

— PAR. Com que el p-valor (0,0005) és més petit que el nivell de significació, $\alpha = 0,05$, rebutgem H_0. És a dir, es pot afirmar que sí que hi ha diferències significatives entre les diferents PAR.

— Reg. Com que el p-valor (0,0428) és més petit que el nivell de significació, $\alpha = 0,05$, rebutgem H_0. És a dir, es pot afirmar que sí que hi ha diferències significatives entre els diferents regs.

— Interacció A-B. Com que el p-valor (0,4564) és més gran que el nivell de significació, $\alpha = 0,05$, rebutgem H_1. És a dir, es pot afirmar que no hi ha interacció.

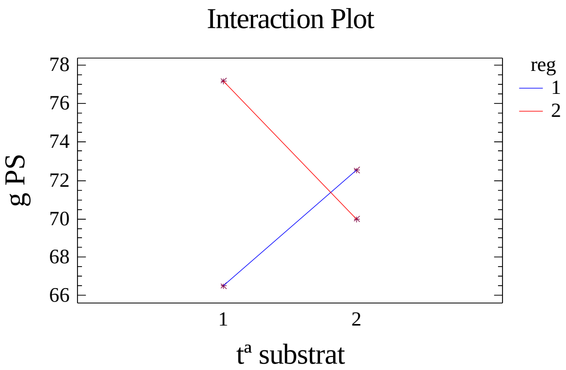
— Interacció A-C. Com que el p-valor (0,0027) és més petit que el nivell de significació, $\alpha = 0,05$, rebutgem H_0. És a dir, es pot afirmar que sí que hi ha interacció.

— Interacció B-C. Com que el p-valor (0,3171) és més gran que el nivell de significació, $\alpha = 0,05$, rebutgem H_1. És a dir, es pot afirmar que no hi ha interacció.

— Interacció A-B-C. Com que el p-valor (0,0714) és més gran que el nivell de significació, $\alpha = 0,05$, rebutgem H_1. És a dir, es pot afirmar que no hi ha interacció.

Com que els factors tenen dos nivells, no cal fer les comparacions múltiples, ja que obligatòriament les diferències seran entre aquests.

Gràfic de la interacció A-C:



En aquest cas veiem que hi ha interacció entre els dos tipus de regs segons la temperatura del substrat. En relació amb aquests dos factors, els valors més alts apareixen utilitzant el reg 2 a la temperatura 1.

Problema

Una clínica posa en pràctica diferents tractaments dietètics per controlar el pes. Per comprovar quin d'aquests és més eficient estudien com disminueix el pes en quilograms segons el tipus de dieta que se segueix, el temps de tractament i la pràctica d'esport en quatre pacients diferents per tractament (48 pacients en total).

Tipus de dieta: hipocalòrica (A), hipercalòrica (B).
Temps del tractament: 1 mes, 2 mesos o 3 mesos.
Pràctica d'esport: cap hora (a) o 4 hores (b) a la setmana.

Taula de resultats

Dieta	Esport	Tractament	Observacions (kg perduts)
A	A	1	2,3,2,4
A	A	2	3,5,4,6
A	A	3	5,6,6,8
A	B	1	4,5,5,6
A	B	2	7,8,9,10
A	B	3	10,12,13,13
B	A	1	1,3,2,2
B	A	2	3,5,4,4
B	A	3	6,7,6,7
B	B	1	5,5,4,4
B	B	2	5,7,6,7
B	B	3	8,9,8,10

Quina és la condició òptima? Sota aquesta condició, quina distribució tenim?

Se suposa normalitat i homogeneïtat de variàncies.

Objectiu

Comprovar quin tractament provoca més disminució de pes.

Variables observades

Disminució de pes (en kg perduts), variable amb 3 factors:

— dieta, amb 2 nivells (A, B), cada nivell $n_d = 24$
— esport, amb 2 nivells (a, b), cada nivell $n_e = 24$
— temps de tractament, amb 3 nivells (1,2,3), cada nivell $n_t = 16$

Hi ha 4 rèpliques per condició experimental ($r = 4$).

$n = 48$

Disseny de l'experiment

Disseny ANOVA de tres factors fixos amb interacció ($r = 4$) i balancejat.

Model: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$,

on μ = mitjana general
α_i = efecte del nivell i del factor dieta
β_j = efecte del nivell j del factor esport
γ_k = efecte del nivell k del factor temps de tractament
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecte de la interacció entre el factor dieta i el factor esport
$(\alpha\gamma)_{ik}$ = efecte de la interacció entre el factor dieta i el factor temps de tractament
$(\beta\gamma)_{jk}$= efecte de la interacció del factor esport i el factor temps de tractament
$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ = efecte de la interacció dels tres factors junts
e_{ijkl} = residus

Hipòtesis de treball

Els residus són variables aleatòries independents, amb homogeneïtat de variàncies, i segueixen una distribució: $e_{ijkl} \approx N(0,\sigma)$.

Hipòtesis que cal comprovar

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2$
H_1: alguna igualtat és falsa.

H_0: $\beta_1 = \beta_2$
H_1: alguna igualtat és falsa.

H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$
H_1: alguna igualtat és falsa.

H_0: no hi ha interacció $\alpha\beta$.
H_1: hi ha interacció $\alpha\beta$.

H_0: no hi ha interacció $\alpha\gamma$.
H_1: hi ha interacció $\alpha\gamma$.

H_0: no hi ha interacció $\beta\gamma$.
H_1: hi ha interacció $\beta\gamma$.

H_0: no hi ha interacció $\alpha\beta\gamma$.
H_1: hi ha interacció $\alpha\beta\gamma$.

Taula ANOVA

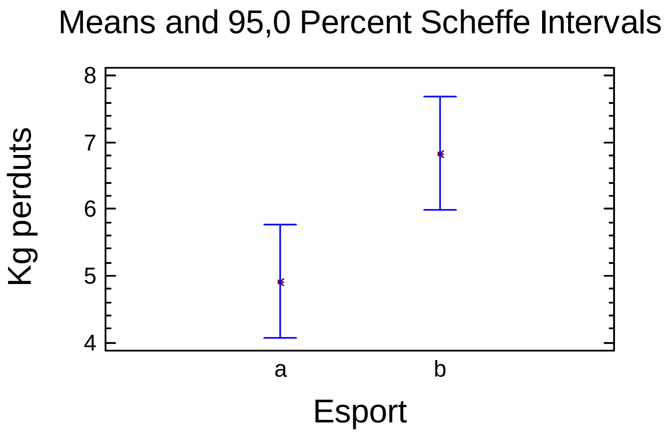
Source	*Sum of Squares*	*Df*	*Mean Square*	*F-Ratio*	*P-Value*
MAIN EFFECTS					
A: dieta	18,75	1	18,75	2,22	0,1449
B: esport	44,0833	1	44,0833	5,22	0,0283
C: temps de tractament	15,125	2	7,5625	0,90	0,4173
INTERACTIONS					
AB	0,75	1	0,75	0,09	0,7674
AC	0,875	2	0,4375	0,05	0,9496
BC	5,54167	2	2,77083	0,33	0,7224
ABC	0,125	2	0,0625	0,01	0,9926
RESIDUAL	304,0	36	8,44444		
TOTAL (CORRECTED)	389,25	47			

En comprovar les diferents hipòtesis amb la taula ANOVA veiem que només hi ha diferències significatives quant a la pràctica o no d'esport:

p-valor = 0,028 < 0,05 = nivell de significació $\longrightarrow$ rebutgem H_0.

En els altres factors veiem que, amb un nivell de confiança del 95 %, no hi ha diferències significatives i, a més, tampoc no hi ha interacció significativa entre factors:

p-valors > 0,05 = nivell de significació.



Gràficament, observem que hi ha diferències a l'hora de practicar esport o no: si es fa esport es perd més pes. No cal fer cap prova de comparacions múltiples per mirar les diferències entre els nivells del factor, ja que només hi ha dos nivells i la taula ANOVA ja ens diu que són diferents.

Cal esbrinar quina és la condició òptima. La condició òptima seria perdre més quilos; per tant, volem que $Y_{ijk}.$ sigui màxima. Hem de calcular les mitjanes per veure quina mitjana és la més elevada.

$Y_{Aa1}.$ = (2 + 3 + 2 + 4) / 4 = 2,75
$Y_{Aa2}.$ = (3 + 5 + 4 + 6) / 4 = 4,5
$Y_{Aa3}.$ = (5 + 6 + 6 + 8) / 4 = 6,25
$Y_{Ab1}.$ = (4 + 5 + 5 + 6) / 4 = 5
$Y_{Ab2}.$ = (7 + 8 + 9 + 10) / 4 = 8,5
$Y_{Ab3}.$ = (10 + 12 + 13 + 13) / 4 = 12
$Y_{Ba1}.$ = (1 + 3 + 2 + 2) / 4 = 2
$Y_{Ba2}.$ = (3 + 5 + 4 + 4) / 4 = 4
$Y_{Ba3}.$ = (6 + 7 + 6 + 7) / 4 = 6,5
$Y_{Bb1}.$ = (3 + 5 + 4 + 4) / 4 = 4
$Y_{Bb2}.$ = (5 + 7 + 6 + 7) / 4 = 6,25
$Y_{Bb3}.$ = (8 + 9 + 8 + 10) / 4 = 8,75

La pèrdua de pes màxima es produeix quan $y_{ijk.}$ és màxima; per tant, correspon a la mitjana calculada per un tractament amb dieta hipocalòrica (A), fent esport (a) i durant tres mesos.

Com que el model és: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$, la distribució corresponent serà:

$$y_{ijkl} = y_{....} + (y_{i...} - y_{....}) + (y_{.j..} - y_{....}) + (y_{..k.} - y_{....}) + (y_{ij..} - y_{i...} - y_{.j..} + y_{....}) +$$
$$+ (y_{i.k.} - y_{i...} - y_{..k.} + y_{....}) + (y_{.jk.} + y \;\; + y_{...}) + (y_{ijk.} - y_{ij..} - y_{i.k.} - y_{.jk.} + y_{....}) + e_{ijkl}$$
$$\approx y_{ijk.} + N(0, \sqrt{QM_r}) \approx y_{ijk.} + N(0, \sqrt{8.4444}) \approx N(y_{ijk.}, 2.905) = N(12, 2.905)\,.$$

Problema

Un laboratori està estudiant com influeix en la rapidesa d'aparició de noves colònies d'E. coli el fet que el medi de cultiu tingui glucosa (A), sacarosa (B) i lactosa (C). S'escullen dos nivells (1 i 2) per cada factor i tres rèpliques per cada condició experimental. Els resultats obtinguts es mostren a continuació:

A	B	C	Dades
1	1	1	4,6 4,8 4,5
2	1	1	4,5 4,9 4,6
1	2	1	4,6 5,1 4,7
2	2	1	4,7 4,9 5,0
1	1	2	4,2 4,3 4,2
2	1	2	4,4 4,0 4,2
1	2	2	4,5 4,5 4,7
2	2	2	4,4 4,6 4,4

Es demana de descriure el disseny i demostrar quins efectes (factors i interaccions) són significatius (α = 0,05). Se suposa homogeneïtat de variàncies.

Objectiu

Saber com afecten la glucosa, la sacarosa i la lactosa en la rapidesa d'aparició de noves colònies d'*E. coli.*

Variable observable

Rapidesa d'aparició de colònies d'*E. coli*, variable amb 3 factors:

- — glucosa, amb 2 nivells
- — sacarosa, amb 2 nivells
- — lactosa, amb 2 nivells

Hi ha 3 rèpliques per condició experimental.

Disseny de l'experiment

Disseny balancejat.

Model: $y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$,

on μ = mitjana general
α_i = efecte del nivell i del factor glucosa
β_j = efecte del nivell j del factor sacarosa
γ_k = efecte del nivell k del factor lactosa
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecte de la interacció entre el factor glucosa i el factor sacarosa
$(\alpha\gamma)_{ik}$ = efecte de la interacció entre el factor glucosa i el factor lactosa
$(\beta\gamma)_{jk}$ = efecte de la interacció del factor sacarosa i el factor lactosa
$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ = efecte de la interacció dels tres factors junts
e_{ijk} = residus

Hipòtesis de treball

Els residus són variables aleatòries independents amb distribució normal, de mitjana zero i homogeneïtat de variàncies.

Taula ANOVA

Analysis of Variance for dades - Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:glucosa	0,000416667	1	0,000416667	0,01	0,9057
B:lactosa	0,84375	1	0,84375	29,35	0,0001
C:sacarosa	0,350417	1	0,350417	12,19	0,0030
INTERACTIONS					
AB	0,0204167	1	0,0204167	0,71	0,4118
AC	0,000416667	1	0,000416667	0,01	0,9057
BC	0,0204167	1	0,0204167	0,71	0,4118
ABC	0,00375	1	0,00375	0,13	0,7227
RESIDUAL	0,46	16	0,02875		
TOTAL (CORRECTED)	1,69958	23			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

En el cas de totes les interaccions, com que p-valor > nivell de significació, α = 0,05, podem dir que, amb una probabilitat de 0,05 d'equivocar-nos, no hi ha interaccions entre els diferents factors glucosa, sacarosa i lactosa.

D'altra banda, tant la lactosa com la sacarosa presenten diferències significatives, ja que el seu p-valor és menor que el nivell de significació.

Comprovem les hipòtesis de treball: prova de normalitat

H_0: hi ha normalitat de residus.
H_1: no hi ha normalitat.

Valor del estadístic mitjançant el test de χ^2 = 18,0
p-valor = 0,0815806

Com que p-valor = 0,0815806 > 0,05, rebutgem la hipòtesi alternativa, és a dir, sí que hi ha normalitat.

Problema

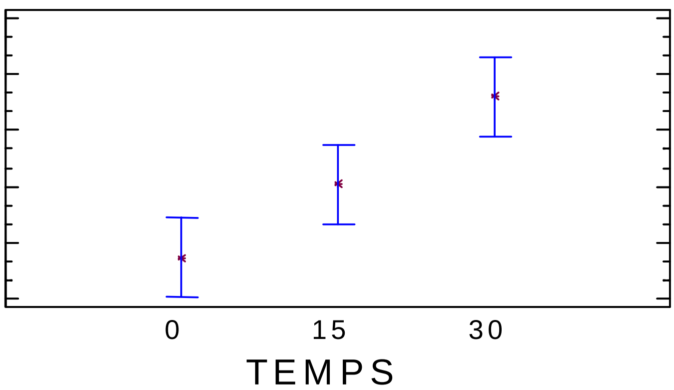
En una investigació sobre l'efecte que un determinat fàrmac té en els nivells de glucèmia, es van seleccionar 45 pacients de característiques molt similars (5 pacients per cada condició experimental). Se'ls va mesurar la glucèmia en estat basal (0'), als 15' i als 30' d'haver-los aplicat la medicació, combinant l'administració d'un placebo (0 mg) i dues dosis de 5 mg i 10 mg del fàrmac. Considereu un nivell de significació del 0,05 i suposeu normalitat i homogeneïtat de variàncies.

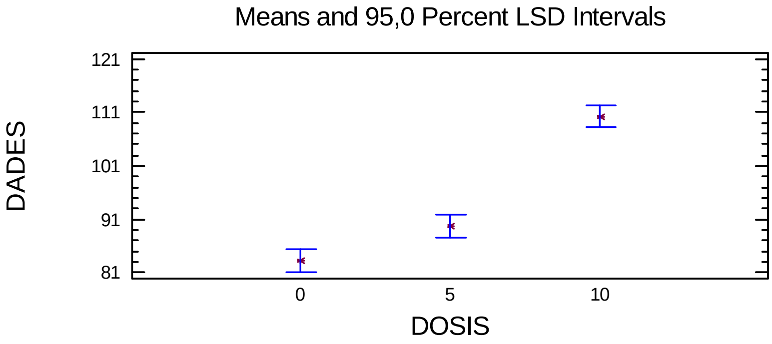
Completeu la taula ANOVA següent:

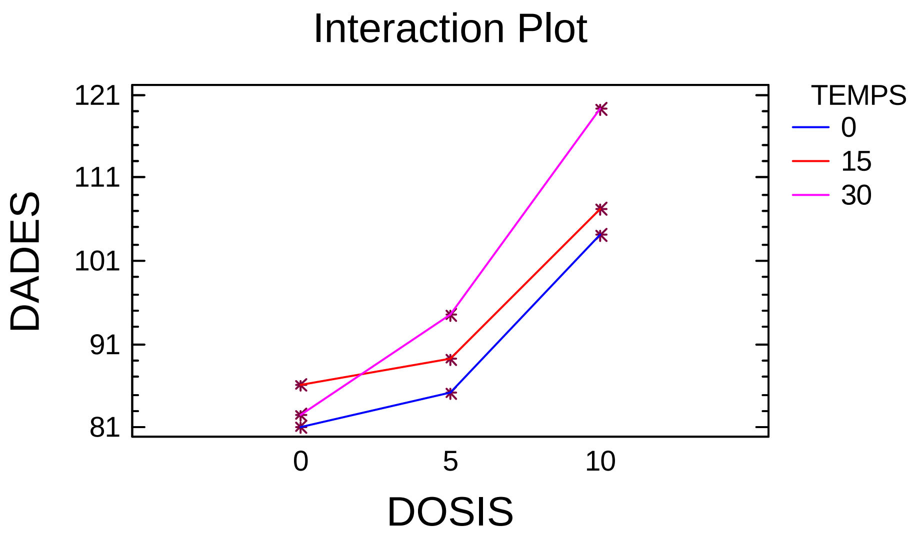
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A: dosis	5.939,91	?	2.969,96	?	0,0000
B: temps	?	?	278,022	8,58	0,0009
INTERACTIONS					
AB	357,422	?	89,3556	2,76	0,0426
RESIDUAL	1167,2	?	32,4222		
TOTAL	8020,58	44			

Hi ha diferències entre dosis i entre temps.
Segons les gràfiques següents, què diríeu?

Means and 95,0 Percent LSD Intervals







Com interpreteu els llistats següents?

Contrast	Difference	+/- Límits
0 - 5	-6,4	4,21677
0 - 10	-26,9333	4,21677
5 - 10	-20,5333	4,21677

Contrast	Diffference	+/- Límits
0 - 15	-3,93333	4,21677
0 - 30	-8,6	4,21677
15 - 30	-4,66667	4,21677

Objectiu

Determinar si hi ha diferències en la resposta a un medicament que controla la glucèmia segons la dosi i el temps transcorregut després de l'aplicació.

Variable observable

Nivell de glucèmia.

Disseny de l'experiment

ANOVA de 2 factors fixos amb interacció:

- dosi, amb 3 nivells (a = 3)
- temps, amb 3 nivells (b = 3)

Disseny balancejat, amb 5 rèpliques per condició experimental (r = 5).

n = 45

Model: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$,

on μ = mitjana general
α_i = efecte dosi
β_j = efecte temps
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecte de la interacció entre la dosi i el temps
e_{ijk} = residus

Hipòtesis que ens plantegem

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$
H_1: alguna igualtat és falsa.

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$
H_1: alguna igualtat és falsa.

H_0: no hi ha interacció.
H_1: sí que hi ha interacció.

Taula ANOVA

Graus de llibertat: entre dosis, a – 1 = 2; entre temps, b – 1 = 2; interacció dels dos factors, (a – 1) (b – 1) = 4; residual, (44 – 2 – 2 – 4) = 36.

Sumes de quadrats per temps: 278,022 x 2 = 556,044.

Valor del estadístic per dosis: F = 2969,96 / 32,4222 = 91,60.

Dosi: p-valor = 0 < 0,05, acceptem que hi ha diferències significatives entre els diferents tipus de dosi.

Temps: p-valor = 0,0009 < 0,05, acceptem que hi ha diferències significatives en el temps d'actuació del fàrmac.

Interacció: p-valor = 0,0426 < 0,05, acceptem que es produeix interacció significativa entre els dos factors.

Amb els gràfics de mitjanes observem que, a mesura que incrementen el temps i la dosi, obtenim més resposta. Les diferències més notables es troben en un temps de 30 minuts i en la dosi de 10 mg.

Amb la gràfica de la interacció tornem a observar que la condició màxima és amb la dosi de 10 mg i el temps de 30 minuts. El placebo té un efecte similar a la dosi de 5 mg; per tant, aquesta no està actuant activament sobre la glucèmia.

Els dos llistats inclosos fan referència a les comparacions múltiples, però cal identificar els intervals corresponents per determinar on hi ha diferències significatives. Aquests intervals són: $\lfloor y_{i..} - y_{j..} - Q; y_{i..} - y_{j..} - Q \rfloor$, per al cas de la dosi, i $\lfloor y_{.i.} - y_{.j.} - Q; y_{.i.} - y_{.j.} - Q \rfloor$, per al temps, on les diferències entre mitjanes són a la columna Difference i el valor de Q a la columna +/– Límits. Per dosis observem que tots tres intervals contenen el valor 0 i, per tant, que hi ha diferències significatives entre les tres dosis. Per temps, es detecten diferències entre 0 i 30, i entre 15 i 30.