Trabajo final de grado

GRADO DE MATEMÁTICAS

Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

Medidas de riesgo y teorías de elección

Pablo Hernández Ramón

Director: José M. Corcuera Valverde
Realizado en: Departamento de Probabilidad, Lógica y Estadística.UB.
Barcelona, 21 de junio de 2014

Abstract

The purpose of this undergraduate thesis is to study and explain different kinds of risk measures, in terms of their axiomatic definitions and of the economic theories of choice that they can derive from.

The theory of choice under risk has historically been one of the recurrent problems in the economy and financial world. It has been a challenge developing the necessary mechanisms to allow the modeling of an economic agent behaviour, when it comes to choosing amongst a number of options with uncertain future.
Within these models, the concept of *risk* always emerge, and each theory will analise and measure it in its own way.

In the first part we will study different theories formulated throughout history, particularly the expected utility theory (von Neuman and Morgenstern, 1947), the dual theory of choice (Yaari, 1987) and the generalised expected utility theory (Quiggin, 1993), which derives from the lesser ones. All that by explaining the motivations that led to their development, as well as their main advantages and inconveniences (including important paradoxes that contributed to the revision of the theories).

In the second part of the essay, we will explain the nature of risk measuring as well as the different ways of approaching it depending on the theory of choice. Amongst them, we will particularly make a point on that derived from the generalised expected utility theory, which we will name distortion-exponential principle.

Índice general

Introducción

La teoría de elección bajo riesgo estudia la forma en la que los seres humanos elegimos entre un conjunto de opciones inciertas en el futuro, ya sea en forma de simples juegos de azar o en decisiones económicas más complejas.
Aunque su desarrollo se puede atribuir a necesidades del mundo económico y financiero (por ejemplo, calcular el precio de un seguro), también encontramos aplicaciones de ésta en campos como la sociología o la psicología.

En esta tesina trabajaremos siempre con decisiones puramente monetarias, donde el responsable de tomar la decisión será un agente económico (por ejemplo un inversor), y el conjunto de opciones entre las que elegirá tendrán algún tipo de valor o coste.
El objetivo prioritario de la teoría de elección será por tanto crear un orden de preferencias para poder decidir dentro de ese conjunto de opciones con riesgo.

Establecer este orden, es un problema mucho más complejo de lo que pueda parecer. Encontramos ejemplos del tipo de decisiones que tratamos de estudiar en multitud de campos, desde juegos hasta decisiones bursátiles.
Incluso tenemos dichos populares que en cierta forma tratan de inculcar valores a la hora de tomar decisiones.

Un ejemplo curioso de esto último sería: *Más vale pájaro en mano que ciento volando.* Este refrán, por ejemplo, intenta favorecer un pensamiento conservador en la toma de decisiones (lo que más adelante llamaremos aversión al riesgo).

En el primer capítulo del trabajo comenzaremos definiendo el marco teórico en el que trabajaremos. Definiremos qué es un orden de preferencias y qué propiedades debe cumplir, y explicaremos cómo crear una representación numérica para dicho orden.

En el segundo capítulo realizaremos un recorrido a través de las distintas teorías de elección propuestas a lo largo de la historia. Explicaremos sus ventajas e inconvenientes, así como distintas paradojas que durante los años han ido poniéndolas a prueba, obligando a su revisión y desarrollo. En particular, explicaremos la teoría de utilidad esperada, la teoría dual de elección de Yaari, y la teoría de utilidad esperada generalizada, todas ellas basadas en la herramienta más básica encargada de ordenar variables aleatorias: la esperanza matemática.

En el tercer capítulo definiremos una de las principales aplicaciones de las teorías de elección, las medidas de riesgo. Estas medidas surgen con el objetivo de cuantificar el valor real del riesgo, y ponerle precio. Conseguir poner precio al riesgo tiene una aplicación obvia en el mundo de los contratos de seguros: ¿Cuanto dinero es necesario pagar a un agente económico para que a él le compense asumir un determinado riesgo?

Por último, en el cuarto capítulo expondremos distintas medidas de riesgo que derivan de las teorías de elección explicadas anteriormente. Comentaremos sus propiedades y aplicaciones, así como las desventajas de cada una.

La metodología de este trabajo se basa en la documentación y revisión bibliográfica. Así pues, los resultados originales se reducen a observaciones o ejemplos que pretenden facilitar la comprensión al lector.
Por último señalar que durante esta tesina trabajaremos con conceptos relacionado con multitud de campos matemáticos, como Teoría de probabilidades, Análisis, Teoría de conjuntos, Topología, Teoría de decisión e Ingeniería financiera, por tanto para la comprensión del mismo será conveniente contar con una cierta base matemática.

Capítulo 1

Elección bajo riesgo

Durante este trabajo explicaremos distintos modelos que estudian y tratan de predecir el comportamiento óptimo a la hora de escoger entre un conjunto de opciones en el futuro.

La idea principal es tratar estos escenarios hipotéticos desde un punto de vista monetario, convirtiéndolos en un conjunto de variables aleatorias que tienen algún tipo de valor o coste. A estas variables aleatorias las denominaremos *loterías*, y las definiremos durante este capítulo.

En este contexto monetario, los responsables de tomar las decisiones son agentes económico (por ejemplo un inversor o una compañía de seguros), que actúan siguiendo un determinado orden de preferencias.
Este orden, que supondremos intrínseco al propio agente económico, hará que tome unas decisiones u otras +. Obviamente debemos definirlo y dotarlo de una serie de características. Comenzaremos explicando qué es una relación de preferencia. Su definición formal como estructura lógica y sus propiedades en formas de axiomas.

1.1. Operadores de preferencia

Supongamos $\mathcal{X}$ el conjunto (no vacío) de las posibles elecciones que un agente económico puede tomar en un momento determinado. Dicho agente puede preferir algunos elementos de $\mathcal{X}$ antes que otros. Caracterizamos estas preferencias con el operador $\succ$.

Definición 1.1.1. Una **relación de preferencia** en $\mathcal{X}$ es una relación binaria $\succ$ que cumple las siguientes propiedades :

- Asimetría: Si $x \succ y$, entonces $y \not\succ x$. Para $\forall x, y \in \mathcal{X}$
- Transitividad negativa: Si $x \succ y$, entonces $\forall z \in \mathcal{X}$ tenemos que $x \succ z$, $z \succ y$ o ambas deben cumplirse.

Una vez que tenemos una relación de preferencia estricta, podemos definir a partir de ella una relación de preferencia débil $\succeq$, donde $x \succeq y$ con $x, y \in \mathcal{X}$ significa que la opción x es al menos igual de preferible que y. Es importante señalar que podríamos haber procedido de manera inversa, definiendo la relación estricta en función de la débil.

Definición 1.1.2. Un **relación débil de preferencia** en $\mathcal{X}$ es una relación binaria $\succeq$ que viene inducida por:

$$x \succeq y \Leftrightarrow y \not\succ x$$

y por una **relación de indiferencia** $\sim$ dada por:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y, y \succeq x$$

Esta relación débil de preferencia tendrá las siguientes propiedades (equivalentes a las que tenía $\succ$):

- Completitud: $x \succeq y$ o $y \succeq x$ para $\forall x, y \in \mathcal{X}$
- Transitividad: Si $x \succeq y$, $y \succeq z$ entonces $x \succeq z$.

Observación 1.1.3. Una relación débil de preferencia **no** induce un orden total en el conjunto $\mathcal{X}$, pues debido a la relación de indiferencia podemos tener dos elementos $x, y \in \mathcal{X}$ tales que $x \sim y$, y sin embargo $x \neq y$.

1.2. Representación numérica de un orden

Usando la relación de preferencia obtenida dentro de nuestro conjunto $\mathcal{X}$ obtenemos un orden entre los elementos del mismo. Sin embargo, a la hora de ordenar y comparar loterías (o carteras financieras con riesgo), terminará siendo necesario asociar a la relación de preferencia $\succeq$ una función V, que de alguna manera mesure el valor de los distintos elementos del conjunto:

Definición 1.2.1. Una **representación numérica** de un orden de preferencia $\succ$ es una función $V\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$x \succ y \Leftrightarrow V(x) > V(y)$$

o equivalentemente:

$$x \succeq y \Leftrightarrow V(x) \geqslant V(y)$$

Así pues, V será la función de preferencia asociada a $\succ$. Intentaremos ver bajo qué condiciones podemos dar una prueba de la existencia y unicidad de dichas funciones:

Proposición 1.2.2. *Fijado un orden de preferencias para el cual exista una representación numérica, existen infinitas representaciones numéricas del mismo.*

Ejemplo 1.2.3. Sea f una función real positiva estrictamente creciente, y sea V una función de preferencia asociada a un orden $\succ$, tenemos que:

$$\tilde{V}(x) := f(V(x))$$

también es una representación numérica equivalente del orden $\succ$.

Por tanto, no tenemos unicidad en las representaciones numéricas de los ordenes. Sin embargo, habría que comentar que es posible resolver el problema de la unicidad definiendo las funciones de preferencia módulo transformaciones afines positivas. La demostración la podemos encontrar en [Lor, Capítulo 1].

Nos queda por estudiar el problema de la existencia:

Proposición 1.2.4. *Sea $\succ$ un orden de preferencias sobre un conjunto $\mathcal{X}$ finito o numerable, existe una representación numérica de dicho orden.*

Demostración. En el caso de un conjunto $\mathcal{X}$ finito, es trivial que podemos demostrar la existencia de una función de preferencia, simplemente ordenando el conjunto y asignando unos valores de manera creciente. Si $\mathcal{X}$ es un conjunto numerable podríamos crear una representación por ejemplo mediante la siguiente recurrencia:

- Tomamos un elemento $x_1 \in \mathcal{X}$ y definimos $V(x_1) = b$, para algún $b \in \mathbb{R}$
- Suponemos definido el valor V para un cierto conjunto $I := \{x_1, \ldots, x_n\}$.

  Para x_{n+1} procedemos de la siguiente forma:

  a) Si existe $x_k \in I$ tal que $x_{n+1} \sim x_k$, entonces:

  $$V(x_{n+1}) = V(x_k)$$

  b) Si $x_{n+1} \succ x_k$, para cualquier $x_k \in I$, entonces:

  $$V(x_{n+1}) = \sup_{x_k \in I} V(x_k) + 1$$

  c) Si $x_{n+1} \prec x_k$, para cualquier $x_k \in I$, entonces:

  $$V(x_{n+1}) = \inf_{x_k \in I} V(x_k) - 1$$

  d) Si existen x_k, x_j, tales que $x_k \succ x_{n+1} \succ x_j$, entonces:

  $$V(x_{n+1}) = \frac{\inf_{x_k \succ x_{n+1}} V(x_k) + \sup_{x_j \prec x_{n+1}} V(x_j)}{2}$$

□

Vemos claramente que la función V representa la relación de orden $\succ$. Así pues queda demostrada la existencia para conjuntos de $\mathcal{X}$ finitos o numerables.

Observación 1.2.5. No podemos garantizar **en general** (es decir, para conjuntos no numerables) la existencia de representaciones numéricas para un orden.
Aún así, es interesante señalar que añadiendo una serie de condiciones al conjunto $\mathcal{X}$ podemos llegar al resultado deseado:

Definición 1.2.6. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto ordenado y sea $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$. Decimos que $\mathcal{Z}$ es un **subconjunto denso por orden** de $\mathcal{X}$ si para todo $x, y \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$ tal que $x \succ y$, entonces existe un $z \in \mathcal{Z}$ tal que:

$$x \succ z \succ y$$

Teorema 1.2.7. Para la existencia de una representación numérica de una relación de preferencia $\succ$, es necesario y suficiente que exista un subconjunto numerable Z denso por orden dentro de $\mathcal{X}$. ([Lor, 2013])

Tras estos resultados iniciales, explicaremos distintas teorías de decisión propuestas a lo largo de la historia, con sus respectivas funciones de preferencia.
Estas representaciones numéricas nos permitirán saber que opciones (por ejemplo carteras financieras) son preferibles a otras. Además, podremos mesurar la diferencia que hay entre ellas y ponerles precio.
También es importante señalar que la forma de la función de preferencia asociada variará dependiendo de las propiedades que supongamos al operador $\succeq$, y no solo del conjunto $\mathcal{X}$.

Capítulo 2

Teorías de elección

En este trabajo estudiaremos tres teorías de elección bajo riesgo: la teoría de utilidad esperada, desarrollada por Neuman y Morgenstern (1947), la teoría dual de elección, descrita por Yaari (1987), y la teoría de utilidad esperada generalizada, que sintetiza las dos anteriores (basada en el trabajo de Schmeidler (1989) y Quiggin(1993)).
Más adelante estudiaremos cada una de estas teorías con mayor profundidad, y detallaremos las funciones de preferencia que definen. Pero antes, intentemos acercarnos al problema de la elección bajo riesgo con la herramienta más básica que disponemos, la esperanza matemática.

2.1. Esperanza matemática

Durante todo el trabajo consideraremos los elementos del conjunto $\mathcal{X}$ desde el punto de vista monetario. Es decir, sus elementos serán variables que pueden tomar una serie de estados en el futuro, los cuales provocaran en el agente económico una ganancia o una pérdida de riqueza. Las probabilidades de esos posibles estados, pese a que en la práctica raramente se conocen, las tendremos definidas de antemano. Las únicas loterías con las que trabajaremos serán aquellas que pueden ser identificadas con distribuciones simples de probabilidades.

Definición 2.1.1. Una **lotería** es un elemento de $\mathcal{X}$ cuyo valor es incierto en el momento actual. Una lotería puede escribirse como un sumatorio de los posibles estados que puede tomar multiplicados por la probabilidad de que estos sucedan:

$$\mu = \sum \alpha_i \delta_{x_i}, \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad \sum \alpha_i = 1$$

Asi pues α_i será la probabilidad de que la lotería tome el estado δ_{x_i}, dando unas ganancias (o pérdidas) x_i.

Ejemplo 2.1.2. Imaginemos un juego que consiste en tirar una moneda (equilibrada). El jugador recibirá 10€ si sale cara y nada si sale cruz. La lotería correspondiente a este juego se escribiría como:

$$\mu = \delta_{10}\frac{1}{2} + \delta_0\frac{1}{2}$$

Definición 2.1.3. Definimos la **esperanza matemática** de una lotería $\mu = \sum \alpha_i \delta_{x_i}$ como:

$$E[\mu] = \sum \alpha_i x_i$$

Ejemplo 2.1.4. Así pues, la esperanza matemática del *ejemplo 2.1.2* sería:

$$E[\mu] = \frac{10}{2} = 5$$

El cálculo de la esperanza matemática nos permite crear un orden dentro de un conjunto de loterías:

Definición 2.1.5. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto de loterías entre las que puede elegir un determinado agente económico, y sea $V(x) = E[x]$ la esperanza matemática (que toma valores en $\mathbb{R}$), podemos considerar a $V(x)$ la representación numérica de un orden en $\mathcal{X}$, lo que nos permite ordenar las loterías según el retorno monetario esperado que tendrán.
Lo llamaremos el **orden inducido por la esperanza matemática**.

Esta herramienta, nos permite ordenar y poner precio a cualquier conjunto de loterías simples. Pero surge una pregunta, ¿será la esperanza matemática un precio justo para cualquier agente económico?.
Intuitivamente parece que debería serlo. Sabemos gracias a la Ley de los grandes números que si jugamos suficientes veces al mismo juego, la media de los resultados obtenidos (ya sean ganancias o pérdidas) tiende a la esperanza.
Esto provoca los siguientes resultados:

- Si participamos suficientes veces en un juego (o lotería) cuyo coste es inferior a su esperanza matemática, a la larga acabaremos ganando.

- De igual forma, si el precio del juego es superior a la esperanza, con el paso del tiempo el jugador acabaría perdiendo inequívocamente.

Con estos resultados no parece descabellado pensar en la esperanza matemática como una forma óptima de valorar juegos o loterías.
Según esto, un jugador racional siempre debería querer participar en un juego (o lotería) cuyo coste sea menor que la esperanza, y debería rechazar cualquier otro con un precio superior a esta.

Sin embargo, si dejamos por un momento la visión teórica de los juegos, vemos que en la práctica esto no se cumple por norma general. Cualquier lotería no simple (con más de un un posible resultado), provoca un componente de incertidumbre que afectará al agente económico y que debe ser tenido en cuenta.
Siguiendo con el *Ejemplo 2.1.2*, la esperanza de dicha lotería eran 5 €, sin embargo una gran cantidad de agentes económicos no estarán dispuestos a pagar ese precio por jugar. Incluso si suponemos para el juego un coste menor al de su esperanza, por ejemplo 4 €, seguirán existiendo un gran número de agentes que rechazarán esa apuesta, prefiriendo una lotería sin riesgo de 4 € (cuya esperanza como es lógico también será 4€) a otra con una esperanza mayor pero a la que le hemos añadido un *componente de riesgo.*

En 1713 Nicholas Bernoulli propone un problema que definitivamente acaba de mostrar que la teoría de la decisión no se puede basar únicamente en la esperanza matemática. Se le conoce como *la Paradoja de San Petesburgo*, y ha sido históricamente uno de los problemas más estudiados dentro de la teoría de decisión.

2.1.1. La paradoja de San Petesburgo

La Paradoja de San Petesburgo fue formulada originalmente por Nicholas Bernoulli en una carta dirigida a Pierre de Montmort, en Septiembre de 1713.
Tras unos primeros intentos de resolver la paradoja por sí mismo, finalmente decidió pedir ayuda a su primo Daniel Bernoulli, que se encontraba en San Petesburgo (la capital del desarrollo científico de la época).
El enunciado original del problema sería el siguiente:
Peter lanza una moneda al aire, y continua haciéndolo hasta que la moneda sale cara. Peter ha acordado con Paul darle un ducado si la cara aparece en la primera tirada, dos ducados si aparece en la segunda, cuatro si aparece en la tercera, etcétera. Es decir, pagando el doble de ducados por cada tirada adicional que haga hasta conseguir una cara.

La paradoja surge cuando intentamos calcular el precio justo del juego.
Según lo visto al principio del capítulo, este precio debería ser igual que la esperanza matemática.
Sea μ la lotería correspondiente a dicho juego, tenemos que:

$$E[\mu] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} P(\text{ Obtener } k-1 \text{ cruces antes de que salga cara en la tirada } k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Con este resultado, la teoría de la decisión basada en la esperanza matemática nos aconsejaría jugar siempre, por elevado que sea el precio propuesto. Sin embargo, difícilmente alguien pagaría más de 10 monedas por jugar, y ya no digamos mil, o un millón.

Daniel Bernoulli estuvo años estudiando el problema, y publicó finalmente su propuesta de solución en 1738 ante la Academia Imperial de las ciencias de San Petesburgo.
Esta propuesta contenía la idea de valorar el dinero en función de su utilidad, y no de su cantidad (detrás de la resolución de la paradoja que hizo Daniel Bernoulli estaban las raices de la teoría de utilidad esperada, que explicaremos en la sección **1.3**).
Para entender este concepto, basta pensar en lo diferente que puede ser la utilidad de una misma cantidad de dinero (por ejemplo mil euros) para dos agentes económicos con distinta *riqueza* (uno con diez millones de euros en el banco y otro sin ahorros).
Obviamente la cantidad es la misma, pero la importancia o utilidad del dinero es notablemente diferente en cada caso.
Una teoría de la decisión debe ser suficientemente flexible como para poder modelizar estas diferencias.

Otro concepto vital en la toma de decisiones económicas y que tampoco puede ser modelizado usando únicamente la esperanza matemática es la aversión al riesgo:

2.1.2. Aversión al riesgo

La *aversión al riesgo* es un concepto usado en economía y finanzas (aunque también en psicología y sociología) para describir el comportamiento conservador de los seres humanos a la hora de escoger entre diversas opciones inciertas en el futuro. En el campo de las teorías de elección, podemos decir que un agente económico es averso al riesgo si siempre muestra preferencia por un capital fijo antes que por una lotería con igual valor (o incluso mayor) pero en las cuales existe riesgo. Es decir:

Definición 2.1.6. Decimos que un agente económico tiene **aversión al riesgo** si para cualquier lotería $X \in \mathcal{X}$ con valor esperado $E[X] = R$ tenemos que:

$$R \succ X$$

Donde R sería una lotería determinista con un solo posible estado, de valor R.

Si un agente económico muestra el comportamiento contrario, se le definiría como *amante del riesgo*:

Definición 2.1.7. Decimos que un agente económico es **amante del riesgo** si para cualquier lotería $X \in \mathcal{X}$ con valor esperado $E[X] = R$ tenemos que:

$$X \succeq R$$

La aversión al riesgo es el comportamiento predominante en la inmensa mayoría de inversores y agentes económicos. Es una hipótesis totalmente aceptada en todas las teorías económicas, además de ser observable en multitud de casos prácticos.
Un ejemplo de esto es la compra de seguros, ya sean para asegurar bienes materiales (un coche o una casa), o productos financieros más sofisticados para asegurar precios de compra (opciones y derivados). Todos los seguros tienen algo en común, su precio de compra es superior a la esperanza de la pérdida.
La aversión al riesgo hace que individuos y compañías, prefieran contratar un seguro, aceptando un precio "desfavorable", para evitar el riesgo de pérdidas mayores.
De este comportamiento se benefician las compañías de seguro, que cumplen su papel en la ecuación asumiendo dichos riesgos a cambio de un precio.

Observación 2.1.8. Un ejemplo del comportamiento contrario, lo podríamos encontrar en los casinos, donde día a día millones de personas apuestan en juegos con costes superiores a los de sus esperanzas matemáticas. Estos jugadores por tanto se considerarían *amantes del riesgo*.
Sin embargo, se puede interpretar que (salvo casos patológicos) la mayoría de personas que deciden apostar en casinos o juegos de azar de este tipo, lo hacen por el contexto que rodea al juego. Ya sea por el morbo, la adrenalina o simplemente por diversión.
Por norma general el jugador sabe que están jugando a un juego injusto y desfavorable a sus intereses, pero le compensa de alguna manera todo lo que envuelve al acto de apostar en sí mismo.

Una manera más sofisticada de caracterizar la aversión al riesgo es la predominancia estocástica, la cual nos permite ordenar carteras financieras (loterías) en términos de sus características de riesgo.

Definición 2.1.9. Sean $X, Y \in \mathcal{X}$ dos loterías que queremos comparar y sean S_X, S_Y sus funciones de supervivencia ($S_X(x) = 1 - F_X(x)$). Decimos que X **domina estocásticamente de segundo orden** a Y si:

$$\int_x^\infty S_Y(t)dt \leq \int_x^\infty S_X(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

siendo la igualdad estricta para algun $x \in \mathbb{R}$.
La interpretación de esto es que si X domina estocásticamente de segundo orden a Y, entonces la ganancia esperada de X en exceso de cualquier nivel x es superior a la ganancia esperada de Y.
Es deseable que una relación de preferencia sea consistente con la segunda predominancia estocástica, es decir:

$$X \succeq_{2a} Y \Rightarrow V(X) \geq V(Y)$$

2.2. Teoría de la utilidad esperada

Como hemos dicho, la **teoría de la utilidad esperada** tiene sus raíces en el trabajo de Daniel Bernoulli a la hora de poner solución a la Paradoja de San Petesburgo, donde introdujo por primera vez el concepto de la *utilidad del dinero*. Gabriel Cramer, quien también resolvió de forma paralela la Paradoja de San Petesburgo, explicó:
"Los matemáticos estiman el dinero en función de su cantidad, los hombres razonables lo hacen en función del uso que le pueden dar".
La teoría fue finalmente desarrollada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern en el año 1947, y pese a que tiene ciertos inconvenientes (que comentaremos más adelante), sigue siendo hoy en día el marco teórico más usado por analistas y economistas para modelizar la toma de decisiones bajo riesgo.

Definición 2.2.1. Definimos la **utilidad esperada** como la representación funcional $U : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ de un orden de preferencias, de la forma:

$$U(X) = E[u(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dF_X(x)$$

Donde:

- $E[\cdot]$ es la esperanza matemática descrita en la sección 2.1.
- F_X es la función de distribución de X.
- $u(x)$ es una función creciente con imagen en los reales a la que llamaremos **función de utilidad**

Como vemos el modelo de la utilidad esperada se basa en la esperanza matemática, pero le añade un componente variable, una función de utilidad que será particular para cada agente económico. Esta función u se puede interpretar como una transformación no linear de la riqueza del agente, y nos proporciona un mecanismo para ponderar la utilidad que tienen para el agente diferentes cantidades de dinero.

Observación 2.2.2. La función de utilidad debe ser una función creciente, simplemente por el hecho de que una mayor cantidad de dinero siempre tendrá más *utilidad* que una cantidad menor de dinero, sea cuales sean las preferencias del agente.

A continuación explicaremos las propiedades que debe cumplir una relación de preferencia $\succeq$ para que exista una representación en forma de función de utilidad.

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto de loterías y sean $S_X(x)$ las funciones de supervivencia asociadas a cada $X \in \mathcal{X}$ (recordamos que $S_X(x) = 1 - F_X(x)$).
Definimos $\mathcal{D}$ como el conjunto de las funciones de supervivencia de elementos de $\mathcal{X}$.
Sea $\succeq$ una relación binaria de preferencia definida en $\mathcal{D}$, definimos los siguientes axiomas:

Definición 2.2.3. La relación $\succeq$ es un **orden débil** si es transitiva y completa (*definición 1.1.2*)

Definición 2.2.4. La relación $\succeq$ es **continua** si para cualquier $F \in D$ los conjuntos $\{G \in D : G \succeq F\}$ y $\{G \in D : F \succeq G\}$ son conjuntos cerrados en la topología de la convergencia debil para cualquier $F \in D$.

Definición 2.2.5. La relación $\succeq$ es **monótona** si $\forall F, G \in \mathcal{D}$ tal que $F \succ G$, entonces F **domina estocásticamente** a G. Es decir, $F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (con desigualdad estricta para al menos uno de ellos).

Definición 2.2.6. La relación $\succeq$ cumple el axioma de **independencia** si $\forall F, G, H \in \mathcal{D}$ y $a \in [0,1]$, entonces $F \succeq G$ implica que $aF + (1-a)H \succeq aG + (1-a)H$.

Teorema 2.2.7. (Utilidad Esperada).
Sea $\succeq$ una relación binaria de preferencia en $\mathcal{X}$. Entonces si y solo si $\succeq$ satisface los axiomas de orden débil, continuidad, monotonía e independencia, existe una función creciente $u(x)$ tal que $\succeq$ puede ser representado por la utilidad esperada funcional:

$$U(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dF_X(x) = E[u(X)]$$

Además, la función $u(x)$ es única salvo transformaciones afines.

Como vemos, esta teoría introduce un componente (las funciones de utilidad) que hacen a nuestro modelo más flexible, lo que nos permite ajustarlo más a la realidad.
Con esta teoría además podemos caracterizar la aversión al riesgo de los agentes económicos de una forma muy intuitiva:

$$E[u(x)] \leq u(E[X])$$

Observación 2.2.8. Gracias a la *Desigualdad de Jensen* tenemos el siguiente resultado:

$$E[u(x)] \leq u(E[X]) \quad \forall X \in \mathcal{X} \Leftrightarrow u \text{ es una función concava}$$

Así pues, la concavidad de la función de utilidad representa el hecho de que cuando la riqueza del agente económico crece, el beneficio que le proporciona una unidad monetaria disminuye.

Observación 2.2.9. Aunque no incluiremos la demostración en este trabajo, se puede probar que la concavidad de la función u es una condición necesaria y suficiente para asegurar que la relación de orden es consistente con la segunda predominancia estocástica.

Hemos visto que la aversión al riesgo de un agente económico está estrechamente relacionada con la concavidad de la función de utilidad. Sería deseable poder cuantificar ese valor.
El objetivo es poder estudiar y comparar las diferencias entre la aversión al riesgo de distintos agentes. Por ejemplo para conocer si un agente económico tiene mayor o menor aversión al riesgo que otro.

Definición 2.2.10. Sea un agente económico con función de utilidad u doblemente diferenciable, definimos el **coeficiente absoluto de aversión al riesgo de Arrow-Pratt** como:

$$ra(w) = -\frac{u^{''}(w)}{u^{'}(w)}$$

Observación 2.2.11. La división por la primera derivada consigue que el coeficiente sea invariante por transformaciones afines de la función u.

Observación 2.2.12. Dado que la función de utilidad será siempre creciente, tendremos que $u^{'}(w) > 0$. Por tanto, el coeficiente de aversión al riesgo será positivo si y solo si la función es cóncava ($u^{''}(w) < 0$), es decir si el agente muestra aversión al riesgo.
En el caso contrario (un agente amante del riesgo), el coeficiente será negativo.

2.2.1. Ejemplos de funciones de utilidad

Existen algunas funciones de utilidad que merece la pena mencionar específicamente dada su importancia:

- Función de **utilidad logarítmica**:

$$u(w) = \ln w \quad \Rightarrow \quad ra(w) = \frac{1}{w}$$

- Función de **utilidad cuadrática** (para un cierto c tal que $c > 0,\ w \leq c$):

$$u(w) = w - \frac{w^2}{2c} \quad \Rightarrow \quad ra(w) = \frac{1}{c - w}$$

- Función de **utilidad exponencial**:

$$u(w) = \frac{1}{a}(1 - e^{-aw}) \quad \Rightarrow \quad ra(w) = a$$

  La función de utilidad exponencial es seguramente la más utilizada en la practica. Las razón principal es que asumir una aversión al riesgo constante proporciona una mayor simplicidad al modelo, y permite ofrecer soluciones explicitas a problemas matemáticos que de otra forma serían intratables. El otro gran motivo es que la riqueza inicial del agente no suele ser conocida, y tener una función de aversión al riesgo que no depende de la riqueza nos soluciona ese problema.

2.2.2. Una solución a la Paradoja de San Petesburgo

Como hemos explicado, las raíces de la teoría de utilidad esperada surgen en el intento de Daniel Bernoulli de resolver la Paradoja de San Petesburgo.
En su trabajo, Bernoulli propuso dos posibles funciones de utilidad para solucionar el problema: la utilidad logarítmica (vista anteriormente) y la utilidad de la raíz cuadrada ($u(x) = \sqrt{x}$). El resultado era el que perseguía, usando la utilidad esperada el juego dejaba de tener un valor esperado infinito, pasando a tener un precio más razonable.

Si utilizamos por ejemplo la función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$, y considerando que el agente económico que participa en el juego no tiene riqueza inicial (sólo la posibilidad de jugar o vender la lotería) tendremos el siguiente resultado:

$$E[\sqrt{X}] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{-k-1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \approx 2{,}9$$

Si usamos la función de utilidad logarítmica bajo las mismas hipótesis el resultado es 2. Como vemos extremadamente alejado de el valor que nos daba la esperanza matemática.

2.2.3. Paradojas de Allais y Elsberg

La teoría de la utilidad esperada (que continúa siendo la más utilizada hoy en día) resuelve la Paradoja de San Petesburgo y nos otorga una herramienta fantástica para modelizar y medir la aversión al riesgo.

Sin embargo, el modelo dista mucho de ser perfecto. A la práctica encontramos multitud de contradicciones que ocurren en el día a día. Un claro ejemplo sería un individuo contratando un seguro (mostrando aversión al riesgo) y más tarde apostando en el casino o comprando un billete de lotería (comportamiento típico de un amante del riesgo).

En general, se puede comprobar que los seres humanos tendemos a sobrestimar las probabilidades de eventos extremos, tanto si son eventos favorables (ganar la lotería), como desfavorables (un accidente). Sería conveniente poder introducir esto en nuestro modelo, de igual forma que hemos hecho con la utilidad del dinero.

Además de esta contradicción con la teoría, también encontramos en la literatura dos paradojas que merecen ser mencionadas por su importancia: Las paradojas de Allais y Elsberg.

Un punto importante a tener en cuenta, es que ambas paradojas son experimentales. No son contradicciones teóricas, si no dos casos en los que los resultados empíricos no se corresponden con la teoría. Ambas paradojas muestran problemas en el "axioma de independencia"(*Definición 2.2.6*).

Ejemplo 2.2.13. (La paradoja de Allais).
Esta paradoja plantea un experimento en el que se pide a los participantes elegir entre distintas loterías propuestas. En primer lugar, deben escoger entre:

- $\nu_1 := 0{,}33\delta_{2500} + 0{,}66\delta_{2400} + 0{,}01\delta_0$
- $\mu_1 := \delta_{2400}$

Y en segundo lugar entre:

- $\nu_2 := 0{,}33\delta_{2500} + 0{,}67\delta_0$
- $\mu_2 := 0{,}34\delta_{2400} + 0{,}66\delta_0$

Allais probó que un 65 % de los participantes eligió $\mu_1 \succ \nu_1$ y a la misma vez $\nu_2 \succ \mu_2$. Esta situación viola el axioma de independencia de nuestro modelo, pues según éste tendríamos (para $\alpha = 0{,}5$):

$$\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2) \succ \frac{1}{2}(\nu_1 + \mu_2), \qquad \text{lo que contradice el hecho de que :}$$

$$\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2) = \frac{1}{2}(\nu_1 + \mu_2)$$

Aunque pueda parecer un resultado anecdótico, autores como D.Kahnemann y A. Tversky lo han replicado con similares resultados. La mayoría de autores coincide en que detrás de esta contradicción esta la mencionada sobrestimación de las probabilidades de acontecimientos extremos (basta ver la fuerza que tiene ese $0{,}01\delta_0$ a la hora de elegir μ_1 en lugar de ν_1). La otra paradoja que nos gustaría mencionar es la de Elsberg:

Ejemplo 2.2.14. (La paradoja de Elsberg).

Igual que la de Allais, esta paradoja proviene de un experimento. Suponemos una urna con 90 bolas, 30 de ellas rojas y el resto amarillas o negras (sin conocer proporción). Se plantean de nuevo dos loterías al participante. Primero ha de elegir entre:

- μ_1 : Ganar 100€ si sacamos una bola roja.
- ν_1 : Ganar 100€ si sacamos una bola negra.

La mayoría de participantes tienden a elegir $\mu_1 \succ \nu_1$.
Después se plantea la misma lotería pero haciendo que esta vez la bola amarilla también sea vencedora:

- μ_2 : Ganar 100€ si sacamos una bola roja o amarilla.
- ν_2 : Ganar 100€ si sacamos una bola negra o amarilla.

El resultado es que la mayoría de participantes tiende a elegir $\nu_2 \succ \mu_2$, cuando es obvio que hemos añadido en ambas loterías la misma probabilidad (y por tanto la decisión no debería cambiar).
Ellsberg explica en su trabajo una posible causa de la paradoja en la diferencia entre riesgo e incertidumbre, asegurando que los seres humanos preferimos lo primero.
Para Ellsberg, la incertidumbre es un riesgo del que no conocemos sus probabilidades, y que por tanto no podemos medir ni acotar.
A este concepto se le de denomina habitualmente en teoría económica **incertidumbre knightiana**, pues aparece definida originariamente en los estudios realizados por el economista estadounidense Frank Knight, que fue el primero en distinguir entre estos dos conceptos, en su trabajo *Risk, Uncertainty, and Profit* ([Kni], 1921).

Así pues los participantes del test suponen que la distribución desconocida entre bolas rojas y amarillas pueden traerles desventaja, y por tanto prefieren en ambas ocasiones elegir la opción de la que saben el riesgo conocido.

2.3. Teoría dual de elección bajo riesgo

Varios autores han tratado de desarrollar nuevas teorías de decisión para intentar solucionar las paradojas de Allais y Elsberg. Entre ellos es conveniente mencionar a Quiggin ([Qui], 1982) y Machina ([Mac], 1982). Ambos se centran en sus trabajos en analizar un punto clave en el modelo, el *axioma de independencia.*
De igual forma que la sustitución del quinto postulado de Euclides dio lugar a la aparición de una nueva forma de entender el espacio (geometrías no euclidianas), en el caso de la teoría de decisiones será gracias a la modificación del axioma de independencia que comienzan a desarrollarse nuevas teorías.

En este trabajo explicaremos la solución que propone Yaari ([Yar], 1987]), en forma de su **teoría dual de elección bajo riesgo**.
Con esta teoría, Yaari soluciona algunos de los problemas de la utilidad esperada que hemos visto en la sección anterior, aunque aparecen con ello nuevas contradicciones.
La importancia del trabajo de Yaari radica en la creación un nuevo marco teórico alternativo y válido sobre el que modelizar la toma de decisiones.

Como hemos dicho, el axioma que es modificado en la teoría dual de elección es el de independencia (el resto son exactamente iguales). En su lugar, Yaari propone el axioma de independencia dual:

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto de loterías y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de las distribuciones de supervivencia de las loterías $X \in \mathcal{X}$ (Donde $S_X \oplus S_Y$ es la función de supervivencia de $X + Y$):

Definición 2.3.1. Diremos que el orden $\succeq$ cumple el **axioma de independencia dual** si para cualquier $F, G, H \in \mathcal{D}$ y para $a \in [0, 1]$ entonces $F \succeq G$ implica:

$$aF \oplus (1 - a)H \succeq aG \oplus (1 - a)H$$

La independencia dual provocará en la teoría de Yaari una linealidad en las ganancias de las loterías, lo que resolverá problemas como las paradojas de Elsberg y Allais. Sustituyendo este axioma por el axioma de dualidad de la teoría de utilidad esperada, y manteniendo el resto, llegamos finalmente a la propuesta de Yaari:

Teorema 2.3.2. (Teoría Dual de Yaari).
Sea $\succeq$ una relación binaria de preferencia en $\mathcal{D}$. Entonces si y solo si $\succeq$ satisface los axiomas de orden débil, continuidad, monotonía e independencia dual, existe una función continua y estrictamente creciente $h : [0,1] \mapsto [0,1]$ tal que $\succeq$ puede ser representado por la función:

$$H(X) = \int_{-\infty}^{0} (h(S_X(x)) - 1)dx + \int_{0}^{+\infty} h(S_X(x))dx$$

donde a esa función h la llamamos **función de distorsión**.

Observamos que si h es la función identidad, entonces $H(X) = E[X]$. Por ello, podemos interpretar la función $H(X)$ como una esperanza matemática distorsionada, (en el sentido de que tenemos una distribución de probabilidades distorsionada).
Algo similar ocurría en la teoría de utilidad esperada, solo que en ese caso era la *utilidad* de las distintas cantidades de dinero lo que distorsionaba la esperanza.

Observación 2.3.3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X \geq 0$, y tendríamos:

$$H(X) = \int_{0}^{+\infty} h(S_X(x))dx$$

Si $X \geq 0$ la esperanza de X se puede escribir como:

$$E[X] = \int_{0}^{+\infty} S_X(x)dx$$

En este punto es interesante observar como la aversión al riesgo es representada en el modelo. De manera similar al caso de la utilidad esperada podemos caracterizar la aversión al riesgo con la función h:

Proposición 2.3.4. En la teoría dual de elección (Yaari, 1987) un agente es averso al riesgo si y solo si su función de distorsión esta siempre por debajo de la linea $h(s) = s$:

$$H(X) \leq E[X] = H(E[X]) \; \forall X \in \mathcal{X} \qquad \Leftrightarrow \qquad h(s) \leq s, \; \forall s \in [0,1]$$

Sin embargo, igual que en la teoría de utilidad esperada, queremos que la relación de orden que crea la función H sea consistente con la segunda predominancia estocástica. Esto nos da una condición aún más fuerte para representar la aversión al riesgo:

Proposición 2.3.5. El orden $\succeq$ es consistente con la segunda predominancia estocástica si y solo si h es una función convexa en todo su dominio ([Qui], 1993).

Así pues, mientras en la teoría de utilidad esperada modelizábamos la aversión al riesgo disminuyendo los efectos de escenarios favorables (recordamos la concavidad de las funciones de utilidad), en la teoría dual de Yaari esto se consigue mediante la exageración de las posibilidades de escenarios adversos (convexidad de funciones de distorsión).

Ahora, de igual forma que hacíamos en la teoría de utilidad esperada con el coeficiente de Arrow-Pratt, buscamos para este modelo algún tipo de indicador que mida el nivel de aversión al riesgo de un agente económico:

Definición 2.3.6. Sea h la función de distorsión de un cierto agente económico, definimos el **coeficiente de aversión a la incertidumbre** como:

$$ua(w) = \frac{h^{''}(s)}{h^{'}(s)}$$

Como hemos visto durante toda esta sección, Yaari soluciona algunos de los problemas de la utilidad esperada proponiendo un nuevo modelo, en el cual la forma de distorsionar la esperanza matemática es a través de las probabilidades, en lugar de la utilidad.
Estos dos enfoques son opuestos pero a la vez están enormemente relacionados entre sí, es por ello que el trabajo de Yaari es conocido como la **teoría dual de elección**.

Aunque la teoría dual de elección es aún bastante reciente (1987), esta siendo cada vez más utilizad en el análisis de la toma de decisiones.
Veamos por último un ejemplo de una función de distorsión muy utilizada en la práctica, que podríamos considerar el equivalente a la función de utilidad exponencial:

- **Función de distorsión exponencial**:

$$h(s) = \frac{e^{\beta s} - 1}{e^{\beta} - 1},\ \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad ua(w) = \beta$$

Igual que ocurría con la función de utilidad exponencial, la facilidad que otorga el tener una *aversión a la incertidumbre* constante, hará que esta función sea una de las más empleadas en la práctica.

2.4. Teoría de la utilidad esperada generalizada

La teoría dual de elección no tenía como objetivo sustituir a la teoría de utilidad esperada. Yaari pretendía más bien demostrar que existían más formas de modelizar la elección bajo riesgo de agentes económicos, y para ello propuso un modelo alternativo y totalmente válido.

En la práctica, podemos comprobar que los modelos de Yaari y de von Neumann-Morgenstern son totalmente complementarios, pudiendo usarse conjuntamente para modelizar el comportamiento de un agente ante elecciones con riesgo.
Podemos encontrar una caracterización completa de este modelo unificado en el trabajo de Schmeidler ([Sch], 1989) y en el de Quiggin ([Qui], 1993).

Este modelo nos permitiría caracterizar a un agente económico tanto con una función de utilidad como con una función de distorsión. Esto no sólo da una mayor flexibilidad al modelo, sino que nos proporciona dos herramientas con las que podemos explicar dos fenómenos psicológicos que provocan la aversión al riesgo:
La utilidad del dinero (que desciende conforme crece la riqueza) y la sobrestimación de las **probabilidades de sucesos extremos**.

Nosotros analizaremos en este trabajo el marco propuesto por John Quiggin en su libro *Generalized expected utility theory: The rank dependent model* ([Qui], 1993). En éste, Quiggin explica que para obtener un modelo compuesto entre los dos anteriores no sólo es necesario cambiar el axioma de independencia por el de independencia dual, sino que es necesario *debilitar* el axioma.
Surge así el concepto de *comonotonía*, como una extensión conceptual de la correlación:

Definición 2.4.1. Sean dos variables aleatorias X, Y, diremos que son **comonótonas** si existe una tercera variable aleatória Z y dos funciones reales f, g no decrecientes tales que:

$$X = f(Z) \qquad Y = g(Z)$$

Como vemos, la comonotonía es totalmente opuesta a la independencia entre variables aleatorias.

El mismo Yaari ya definió el concepto de comonotonía en su trabajo de la siguiente manera:

> *"Si dos variables son comonótonas podemos afirmar que ninguna de ellas supone una ventaja sobre la otra. La variabilidad de una nunca se verá compensada por la contravariabilidad de la otra"*

Ahora, ya podemos definir el concepto de independencia comonótona de una relación de preferencia. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto de loterías y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de las distribuciones de supervivencia de las loterías $X \in \mathcal{X}$:

Definición 2.4.2. Diremos que el orden $\succeq$ cumple el **axioma de independencia comonótona** si para cualquier $F, G, H \in \mathcal{D}$ (comonótonas dos a dos) y para $a \in [0, 1]$ entonces $F \succeq G$ implica:

$$aF + (1-a)H \succeq aG + (1-a)H$$

De esta forma la independencia se restringe al caso en que exista comonotonía entre las variables aleatoria, y el axioma se vuelve obviamente más débil.
Una vez hecho esto, Quiggin propone:

Teorema 2.4.3. (Teoría de la utilidad esperada generalizada).
Sea $\succeq$ una relación binaria de preferencia en $\mathcal{D}$. Entonces si y solo si $\succeq$ satisface los axiomas de orden débil, continuidad, monotonía e independencia comonótona, existe una función continua y estrictamente creciente $h : [0,1] \mapsto [0,1]$ y una función continua y creciente $u(x)$ tal que $\succeq$ puede ser representado por la función:

$$V_{u,h}(X) = \int_{-\infty}^{0} (h(S_{u(X)}(x)) - 1)dx + \int_{0}^{+\infty} h(S_{u(X)}(x))dx$$

La función $V_{u,h}(X)$ representa la utilidad esperada que deriva de u, pero calculada bajo una distribución de probabilidades distorsionada por h.

Proposición 2.4.4. Para caracterizar la aversión al riesgo de los agentes económicos mediante las funciones u y h, e imponiendo que el orden $\succeq$ sea consistente con la predominancia estocástica de segundo orden llegamos a la siguiente conclusión:

- La función u debe ser cóncava.
- La función h debe ser convexa.

De ahora en adelante, asumiremos estas dos condiciones como parte del modelo de utilidad esperada generalizada..

Capítulo 3

Medidas de riesgo

En la primera sección del trabajo hemos expuesto varias teorías de elección bajo riesgo propuestas a lo largo de la historia. Todas ellas tratan de modelizar la forma en que los agentes económicos deciden entre un conjunto de opciones en un futuro incierto.

Estas teorías no tienen por objetivo el análisis retrospectivo de decisiones ya tomadas, si no que pueden ser aplicadas en multitud de campos.

Una importante aplicación son las **medidas de riesgo**. En esta segunda sección definiremos qué son y qué usos tienen en la práctica. Analizaremos y expondremos qué propiedades sería deseable que cumpliesen, y por último explicaremos las distintas medidas de riesgo que derivan de cada una de las teorías de decisión explicadas en el *Capitulo 2*.

3.1. La necesidad de medir el riesgo

En economía y finanzas la medición del riesgo juega un papel fundamental a la hora de, por ejemplo, poner precio a contratos de seguros. El funcionamiento de estos contratos puede llegar a ser muy complicado a la práctica, pero su idea primaria es sencilla:

a) Un agente económico posee algún tipo de activo con riesgo (ya sea un activo financiero que se puede depreciar o una propiedad que puede sufrir un accidente) y desea protegerse contra esa posibilidad.

b) Por otra parte, una compañía de seguros le ofrece a dicho agente un contrato en el que ella se hace responsable del riesgo del activo (corriendo con las pérdidas que pudiese generar), a cambio de una cantidad de dinero que compense asumir dicho riesgo.

La pregunta es obvia:
¿Que cantidad de dinero es necesaria para que a b) le compense asumir el riesgo de a)?
Responder esta pregunta no es tarea sencilla. Aunque la oferta y la demanda jugarán un papel importante a la hora de definir el precio, las compañías aseguradoras deben tener herramientas que les permitan medir y poner precio a dichos riesgos.

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{X}$ una colección de loterías, una **medida de riesgo** es una función $\rho : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ que retorna para cada $X \in \mathcal{X}$ la cantidad de *capital sin riesgo* que es necesario añadir a la posición X para que un inversor (o un observador imparcial, como por ejemplo una agencia de rating) considere la posición conjunta (la lotería con riesgo X y la cantidad $\rho(X)$) una inversión aceptable.

Observación 3.1.2. Durante esta sección, para simplificar el modelo, supondremos que un capital sin riesgo no ofrece intereses al propietario.

Esta definición de medida de riesgo, dada por Artzner ([Art], 1999), muestra la subjetividad del concepto, que depende de la aceptación (y por tanto de las preferencias) de algún tipo de regulador imparcial.

Sin embargo esta subjetividad puede ser resuelta con la ayuda de las teorías de decisión.
Si podemos modelizar el comportamiento de un agente económico en la toma de decisiones también podremos calcular el precio a partir del cual dicho agente considerará aceptable esa posición.

La aplicación de las teorías de decisión en las medidas de riesgo no es algo nuevo, no hay que olvidar que el problema de poner precio a un seguro ha sido uno de los motivos históricos del desarrollo de estas teorías (Daniel Bernoulli propuso una primera solución a este problema en 1738).

3.2. Propiedades de las medidas de riesgo

En esta sección, enumeraremos varias propiedades que las medidas de riesgo sería aconsejable que cumpliesen. Algunas de ellas, como la **monotonía** y la **invariancia por traslaciones** son exigibles a prácticamente todas las medidas de riesgo. Sin embargo, hay otras propiedades que pueden variar dependiendo del modelo que se use.
Comencemos por las primeras, :

i) **Monotonía:**

Si una cartera financiera tiene siempre un retorno menor que otra, sea cual sea el escenario , su prima de riesgo debe ser obviamente mayor, pues deberemos añadir más capital sin riesgo para hacer la posición conjunta aceptable. Es decir:

$$X \leq Y \quad \text{(Casi seguramente)} \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$$

ii) **Invariante por traslaciones:**

Esta propiedad exige que una medida de riesgo sea consecuente con la suma de capital sin riesgo a una lotería. Esto quiere decir que si añadimos una cierta cantidad de dinero a una lotería, obviamente la medida de riesgo del conjunto debe descender en cantidad igual al capital añadido:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow \rho(X+a) \geq \rho(X) - a$$

En este punto sería interesante definir como se comportan las medidas de riesgo ante la adición de loterías. Es decir, dadas dos loterías tales que conocemos su riesgo $\rho(X)$ y $\rho(Y)$, ¿cual será la relación de éstas con $\rho(X+Y)$?

Para tratar este problema será importante conocer como están relacionadas las distribuciones de X e Y. Comenzaremos definiendo posibles relaciones de dependencia entre dos variables aleatorias:

Definición 3.2.1. Sean X, Y dos variables aleatorias, diremos que son PQD (positive quadrant dependent) si:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Definición 3.2.2. Sean X, Y dos variables aleatorias, diremos que son NQD (negative quadrant dependent) si:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Finalmente recordamos la definición de comonotonía, que representa la relación de dependencia positiva más fuerte posible:

Definición 3.2.3. Dos variables aleatorias X, Y son **comonótonas** si existe una tercera variable aleatória Z y dos funciones reales f, g no decrecientes tales que:

$$X = f(Z) \qquad Y = g(Z)$$

Una vez definidas estas relaciones de dependencia, podríamos comenzar al análisis de la posible relación entre $\rho(X)$, $\rho(Y)$ y $\rho(X+Y)$. Sin embargo, no existe un consenso sobre este tema, por lo que comentaremos las diversas opiniones existentes al respecto.

El primer conjunto de propiedades, defendidas entre otros por el profesor J. Dhaene, se basan en la idea de que el tipo de relación de las variables aleatorias afectará al riesgo conjunto. Es decir, tendremos que $\rho(X+Y)$ será igual, mayor o menor que $\rho(X) + \rho(Y)$ dependiendo de si las variables aleatorias son independientes, PQD o NQD.

Así pues tendremos las siguientes tres propiedades ([Dha], 2002):

iii) **Subaditividad para riesgos NQD:**

Parece lógico pensar que si X e Y están relacionadas negativamente (NQD), el riesgo de una servirá como cobertura del riesgo de la otra.

Así pues, sean X, Y dos loterías con riesgo NQD, entonces:

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

iv) **Superaditividad para riesgos PQD:**

En esta corriente de pensamiento, se defiende que si dos loterías tienen su riesgos relacionados positivamente, el hecho de tener una posición conjunta es aún más arriesgado que los riesgos de cada una por separado. Es decir, sean X, Y dos loterías con riesgo PQD, entonces:

$$\rho(X+Y) \geq \rho(X) + \rho(Y)$$

v) **Aditividad para riesgos independientes:**

Por último, tendríamos la posibilidad de dos riesgos independientes (sin ningún tipo de dependencia). En este caso, el riesgo conjunto sería simplemente la suma de riesgos. Así pues, sean X, Y dos loterías con riesgos independientes, entonces:

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

La idea detrás de las propiedades anteriores, sin embargo, no está exenta de críticas. Un gran número de matemáticos y economistas como Wang ([Wan], 1997) y Artzner ([Art], 1999), opinan que cualquier tipo de diverisifación de la cartera de inversión siempre es positiva para el inversor (incluso si los riesgos están positivamente relacionados), y por tanto no hay motivo para que el riesgo conjunto sea mayor que la suma de los riesgos por separado.

Por tanto, la suma de dos riesgos siempre debería ser subaditiva, sea cual sea la relación de dependencia entre ellos.

De esta corriente de pensamiento derivan las siguientes propiedades:

iii*) **Subaditividad:**

Cualquier adición de loterías supondrá al inversor una cierta diversificación de su cartera, y por tanto un riesgo menor o igual del que tendría por separado cada lotería. Así pues, sean X, Y dos loterías, entonces:

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

iv*) **Aditividad para riesgos comonótonos:**

En el caso de dos riesgos comonótonos, la desigualdad anterior se cumpliría, pues dada la completa dependencia de los riesgos, la diversificación no aportaría ningún tipo de cobertura. Así pues, sean X, Y dos loterías con riesgos comonótonos, entonces:

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

v*) **Homogeneidad positiva:**

Artzner lleva al extremo la propiedad anterior, considerando en lugar de la adición de dos loterías distintas, la multiplicación de una misma lotería por un factor $a \in \mathbb{R}$. Esto puede ser entendido como un cambio de unidad monetaria o como un cambio en la cantidad invertida en la posición X.

Dado que obviamente cualquier lotería es comonótona con ella misma, el resultado sería el siguiente:

$$\rho(aX) = a\rho(X) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Esta última propiedad ha sido muy criticada (por ejemplo en el trabajo de Föllmer y Schied (2002), y también por el propio Dhaene).

El motivo principal es que la homogeneidad positiva no tiene en cuenta el riesgo de liquidez que puede suponer para un agente aumentar el tamaño de una inversión.

Según ese punto de vista, una alta inversión puede producir una gran pérdida en el inversor, lo que aumenta las probabilidades de que este no disponga de liquidez suficiente para hacerse cargo de sus obligaciones.
Esto por tanto se debería traducir en un mayor riesgo para el inversor, es decir:

$$\rho(aX) \geq a\rho(X) \qquad \forall a \in (1, \infty)$$

Capítulo 4

Medidas de riesgo inducidas por las teorías de elección

Una vez vistas las distintas propiedades que sería conveniente que cumpliese una medida de riesgo, ya podemos exponer algunas de ellas. En concreto estaremos interesados en aquellas que derivan de las teorías de elección explicadas en el *Capítulo 2*.

Nuestro objetivo será, dada una función de preferencia V derivada de una teoría de elección, hallar la cantidad extra de capital sin riesgo que debemos añadir a la lotería para que se considere óptima la posición conjunta (es decir, encontrar $\rho(X)$).

Definición 4.0.4. A partir de ahora, definiremos como un **riesgo** a una lotería **negativa** X, que describe las posibles pérdidas que puede producir un activo financiero (con las respectivas probabilidades de que estas ocurran).
Dado un riesgo X, definiremos como la **prima de riesgo** a la cantidad $\Pi(X) = \rho(X)$ que se debe pagar para que se considere óptimo aceptar una posición conjunta (el precio por el que es aceptable asumir el riesgo X).

Observación 4.0.5. Algunos autores definen las medidas de riesgo de manera inversa, considerando las loterías como estrictamente positivas, aunque sus valores se refieran a pérdidas ([Tsa],2003). En ese caso tendríamos: $\Pi(X) = \rho(-X)$.

Durante este trabajo nosotros usaremos la primera notación, utilizada en el cálculo de primas (*premium calculation principles*), aunque pasar de una notación a otra sería tan simple como cambiar de signo la variable X.

Proposición 4.0.6. Las medidas de riesgo que explicaremos a continuación deben ser consecuentes con una función de preferencias V. Esto quiere decir que si una lotería X es al menos igual de preferible que otra lotería Y, entonces la prima de riesgo de X debe ser menor o igual a la de Y:

$$V(X) \geq V(Y) \Leftrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}$$

Proposición 4.0.7. Además, el hecho de que un agente considere óptima la opción de asegurar un riesgo, será equivalente a exigir:

$$V(X + \Pi(X)) = V(0)$$

Es decir, que el valor de la posición conjunta sea igual de preferible para el agente que no hacer nada. Si consideramos además una riqueza inicial w, esta relación se podría escribir como:

$$V(w + X + \Pi(X)) = V(w)$$

Observación 4.0.8. Como hemos visto, el precio del seguro (la prima de riesgo) está determinado por V, y por tanto dependerá de la teoría de elección que estemos utilizando. Esta función de preferencia la podemos interpretar como la representación de las preferencias de un observador imparcial (recordamos la definición de Artzner), o simplemente como las preferencias del asegurador (que al fin y al cabo es quien pondrá el precio al seguro).

4.1. Medidas de riesgo derivadas de la teoría de utilidad esperada

Consideremos un asegurador cuyas preferencias pueden ser descritas según la utilidad esperada (es decir, según una función de utilidad u) y consideremos que este agente económico debe poner precio a un riesgo X (recordamos que en nuestra notación será una variable negativa).
Entonces, por la *Proposición 4.0.7* tenemos que:

$$u(w) = E[u(w + X + \Pi_u(X))]$$

Y considerando $w = 0$:

$$u(0) = E[u(X + \Pi_u(X))]$$

Este método de calculo de la prima de riesgo Π_u nos da como resultado el *principio de utilidad cero* (Bühlmann, 1970), que es monótono e invariante por traslaciones.

La ecuación del *principio de utilidad cero* no tiene una solución analítica general para cualquier u, sin embargo merece la pena mencionar los siguientes casos:

a) Principio de cálculo de prima para una **función de utilidad cuadrática**:

$$\Pi_{u_q}(X) = -E[X] + c - \sqrt{c^2 - \sigma^2(X)}$$

que para valores de la varianza $\sigma^2(X) \ll c$, se puede aproximar por:

$$\Pi_{u_q}(X) \simeq -E[X] + \frac{\sigma^2(X)}{2c}$$

Este principio de cálculo de primas es conocido como el *principio de varianza.*

b) Principio de cálculo de prima para una **función de utilidad exponencial**:

$$\Pi_{u_{exp}}(X) = \frac{1}{a}\, ln\ E[e^{-aX}] \qquad a \in (0, \infty)$$

Siendo este último un modelo propuesto por varios autores, como Gerber ([Ger], 1974) o Bühlmann ([Bül], 1985).

Algunas de las propiedades que cumple la prima de riesgo derivada de la función de utilidad exponencial son:

- Monotonía
- Invarianza por traslaciones
- Subaditividad para riesgos NQD
- Aditividad para riesgos independientes
- Superaditividad para riesgos PQD

Como ya explicamos anteriormente, las dos últimas propiedades hacen que la suma de loterías dependientes positivamente provoque un incremento en el riesgo.
Esto también implica que esta medida de riesgo no sea positivamente homogenea,
y que por tanto sea sensible al riesgo de liquidez que provoca el aumento de la inversión en una posición.

En definitiva, la prima de riesgo derivada de la utilidad exponencial se clasificaría dentro de las medidas afines al pensamiento de J.Dhaene (entre otros), para el cual la diversificación no tiene por qué suponer un descenso del riesgo.

4.2. Medidas de riesgo derivadas de la teoría dual de elección

Consideremos ahora un asegurador cuyas preferencias pueden ser modelizadas con una función de distorsión h. El argumento de indiferencia de la *Proposición 4.0.7* esta vez provoca que:

$$H_h(w) = H_h(w + X + \Pi_h(X))$$

Esta ecuación sí que puede ser resuelta explicitamente, y tendríamos como resultado

$$\Pi_h(X) = \int_{-\infty}^{0} (g(S_X(x)) - 1)dx + \int_{0}^{\infty} g(S_X(x))dx$$

Este calculo de prima de riesgo se conoce como el *principio de prima distorsionado*, y puede demostrarse que siempre y cuando la función de distorsión h sea convexa, la medida de riesgo cumple las siguientes propiedades ([Wan], 1997):

- Monotonía
- Invarianza por traslaciones
- Subaditividad (total)
- Aditividad para riesgos comonótonos
- Homogeneidad positiva

Como vemos, esta medida de riesgo es coherente con la interpretación de Artzner ([Art],1999), para el cual cualquier tipo de diversificación es positiva, incluso si hay dependencia directa entre las loterías. Sin embargo, esto la convierte en una medida de riesgo insensible al riesgo de liquidez y a la agregación de riesgos dependientes.

4.3. Medidas de riesgo que derivan de la teoría de utilidad esperada generalizada

Por último, vamos a analizar las medidas de riesgo que derivan de la teoría de utilidad esperada generalizada. En esta, las preferencias del agente económico vienen determinadas por una función de utilidad u y una función de distorsión h.
El argumento de indiferencia de la *Proposición 4.0.7* sería en este caso:

$$V_{u,h}(w) = V_{u,h}(w + X + \Pi_{u,h}(X))$$

El principio de prima que obtendremos de esta igualdad heredará propiedades tanto de las medidas que derivan de la utilidad esperada como de las que derivan de la teoría dual de elección.

Es sencillo ver como en el caso de una función de utilidad linear, nuestra medida de riesgo sería equivalente a un principio de prima distorsionado. De igual forma, en el caso de una función de distorsión linear (y una riqueza w=0), $\Pi_{u,h}$ se convierte en un principio de utilidad cero. Así pues, las propiedades de $\Pi_{u,h}$ estarán en algún lugar entre las propiedades de estas dos.

En un caso general, será difícil precisar cual de las dos funciones (la de utilidad o la de distorsión) tendrá más influencia en el modelo, y por tanto, en las propiedades del principio de cálculo de prima ([Qui], 1993).

Observación 4.3.1. Una propiedad importante de este principio de cálculo de primas es que es consistente con el segundo orden estocástico (siempre que u sea cóncava y h convexa). Esto hace que podamos asegurar que esta medida de riesgo sea monótona e invariante por traslaciones.

Considerando de nuevo la igualdad $u(w) = E[u(w+X+\Pi_u(X))]$, y fijando una función de utilidad exponencial y una función de distorsión arbitraria, tenemos que:

$$\Pi_{u_{exp},h}(X) = \frac{1}{a} ln \left(\int_{-\infty}^{0} (g(S_{e^{aX}}(x)) - 1)dx + \int_{0}^{\infty} g(S_{e^{aX}}(x))dx \right)$$

Tsanakas y Desli definen en su trabajo este principio de cálculo de primas como el *distortion-exponential principle* ([Tsa], 2003). Además, demuestran que es sensible a la agregación de riesgo y al riesgo de liquidez, pues sus propiedades varían dependiendo del tamaño de la cartera de inversión.

En definitiva, para carteras de inversión pequeñas, esta medida de riesgo será coherente con la visión de Artzner, donde cualquier tipo de suma de riesgos es subaditiva, y tenemos homogeneidad positiva. Sin embargo, a medida que el tamaño de la inversión crece (y por tanto aparece el riesgo de falta de liquidez), esta medida comienza a comportarse como una medida exponencial, y por tanto introduce la superaditividad de riesgos PQD.

Conclusiones

En la primera parte de esta tesina hemos explicado los fundamentos de las distintas teorías de decisión, comprobando que la teoría de utilidad esperada y la teoría dual de elección son perfectamente complementarias.

La unión de estas dos teorías da forma a la teoría de utilidad esperada generalizada, más completa que ellas por separado, pues permite plasmar en el modelo tanto la utilidad no lineal del dinero como la sobrestimación de las probabilidades de sucesos extremos.

En la segunda parte del trabajo hemos estudiado distintas medidas de riesgo derivadas de dichas teorías de elección, con sus respectivas propiedades.
De nuevo hemos podido comprobar como la teoría de utilidad esperada y la teoría dual de Yaari se iluminan mutuamente, consiguiendo crear con la unión de ambas una medida de riesgo (*distortion-exponential principle*) que mejora las propiedades de las medidas de riesgo que derivan de ellas por separado.

Cuando hablamos de matemáticas, economía, o de cualquier tipo de rama del desarrollo científico, la creación de nuevas teorías o enfoques no debe suponer necesariamente enterrar las anteriores. La complementación de las teorías de von Neumann-Morgenstern y la de Yaari son un claro ejemplo de esto.

En este trabajo hemos podido estudiar y comprender la historia y las motivaciones de las teorías de decisión. Hemos analizado distintas propuestas y alguna de sus principales aplicaciones, como el problema de poner precio a un seguro.

Hemos comprobado cómo fenómenos psicológicos como la aversión al riesgo o la exageración de las probabilidades de sucesos adversos pueden ser traducidos de forma brillante en un modelo matemático válido y útil, con aplicaciones en decisiones económicas que acontecen cada día, y también cómo, por muy bueno que sea un modelo, siempre hay espacio para la revisión y mejora del mismo.

Bibliografia

[Art] ARTZNER, P.; EBER, J-M. : *Coherent Measures of Risk.* : Mathematical Finance 9, 1999.

[Büh] BÜLMANN, H. : *Mathematical Methods in risk Theory.* Berlin : ASTIN Bulletin, 1970.

[Lor] LORENZO, CRISTIAN : *Utility functions and the St. Petersburg Paradox.* Barcelona : Facultad de matemáticas de Barcelona, 2013.

[Qui] QUIGGIN, J. : *A theory of anticipated utility.* Boston : Journal of Economic Behavior and Organization, 1982.

[Qui] QUIGGIN, J. : *Generalized expected utility theory.* Boston : Kluwer Academic Publishers, 1993.

[Kni] KNIGHT, FRANK : *Risk, uncertainty and profit.* : 1921.

[Mac] MACHINA, M. : *Expected utility, analysis without the independence axiom.* : Econometrica, 1982.

[Tsa] TSANAKAS, A.; DESLI, E. : *Risk measures and theories of choice.* London : British Actuarial Journal, 2003.

[Wan] WANG, S.; YOUNG, V.; PANJER, H. : *Axiomatic characterization of insurance prices.* : Insurance, mathematics and economics, 1997.

[Yar] YAARI, M. : *The dual theory of choice under risk.* : Econometrica, 1987.