Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

MODELS ESTOCÀSTICS DEL TIPUS D'INTERÈS

Maite Marquès Llorens

Director: Josep Vives Santa-Eulàlia

Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística. UB

Barcelona, 15 de juliol de 2014

Índex

Abstract

The aim of this final project is to study the pricing of zero-coupon bonds of different interest rate models in a continuous-time market in the absence of arbitrage opportunities, specifically, the Vasicek model and the Cox-Ingersoll-Ross model. First, this study needs to analyze the basis of the stochastic modeling of continuous-time market which includes to study some notions about the stochastic calculus.

So, first the chapters 1 and 2 have some useful concepts and results of stochastic calculus like the Brownian motions, the stochastic integrals, the Itô calculus, the stochastic differential equations... Then, in the chapter 3 some economic concepts, the model of continuous-time market and the concept of portfolio self-financing, are defined; and also, this Black-Scholes pricing are studied. Later, in the chapter 4, some common models short term interest rate models are introduced. Last, in the chapter 5, the pricing of zero-coupon bonds are studied following the two named models in the former chapter, the Vasicek model and Cox-Ingersoll-Ross model, using pricing from chapter 3.

During all the project, we suppose all the affirmations about finite random variables and stochastic processes are true $\mathbb{P}$ almost surely.

To sum up, we have used different resources but overall, we have based on the books *Introduction to stochastic calculus applied to finance* ([**Lam**]) and *An elementary introduction to stochastic interest rate modeling* ([**Pri**]).

Capítol 1

Processos estocàstics a temps continu

1.1 Conceptes bàsics

Amb els processos estocàstics es pretén representar l'evolució aleatòria d'un sistema al llarg del temps.

Definició 1.1. Un *procés estocàstic a temps continu* és una família $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aleatòries definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ amb valors en l'espai mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Recordem que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ és la σ-àlgebra més petita que conté tots els intervals oberts de $\mathbb{R}$. Anomenem Borelians als elements de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Un procés estocàstic és aleshores una funció de dues variables

$$X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que per cada $t \in \mathbb{R}_+$ la funció $\omega \mapsto X_t(\omega)$ és una variable aleatòria, mentre que per a cada ω en Ω la funció $t \mapsto X_t(\omega)$ és una trajectòria del procés.

Necessitem, també, altres conceptes relacionats amb els processos estocàstics.

Definició 1.2. Considerem l'espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Una *filtració* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és una família creixent de σ-àlgebres incloses en $\mathcal{F}$. Es diu que l'espai $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és un espai de probabilitats filtrat. La σ-àlgebra $\mathcal{F}_t$ representa la informació disponible en el moment t.

Definició 1.3. Un procés $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ està *adaptat* a la filtració $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si, per qualsevol t, X_t és una variable aleatòria $\mathcal{F}_t$-mesurable. En aquest cas es diu que el procés $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és $\mathcal{F}_t$-adaptat.

Tot procés estocàstic X_t determina una *filtració natural* donada per $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \le t\}$. Clarament, tot procés està adaptat a la seva filtració natural. En aquest cas, a la σ-àlgebra $\mathcal{F}_t$ la interpretem com la història del procés al temps t, ja que en ella s'hi troben tots els possibles successos que el procés hagi tingut fins aquell moment.

Si X_t és un procés $\mathcal{F}_t$-mesurable, la filtració natural $\sigma\{X_s : s \leq t\} \subseteq \mathcal{F}_t$. A partir d'ara, quan parlem d'una filtració sense esmentar res, suposarem que es tracta de la filtració natural del procés que estem considerant.

Per simplificar l'escriptura, donarem les següents notacions.

Notació 1.4. Denotem per $L^2(\Omega)$ l'espai vectorial de variables aleatòries X que són quadrat integrables, és a dir, que compleixen la condició

$$\|X\|^2_{L^2(\Omega)} = \mathbb{E}[|X|^2] < \infty.$$

La funció $X \mapsto \|X\|_{L^2(\Omega)}$ defineix una norma en $L^2(\Omega)$, i aquest espai es complet respecte aquesta norma, és a dir, és un espai de Banach. Això vol dir que tota successió de Cauchy té límit en ell.

Notació 1.5. Sigui $p \geq 1$. Anomenarem $L^p(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ l'espai de processos p-integrables, és a dir, l'espai de processos estocàstics $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tals que

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega\times\mathbb{R}_+)} = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty |u_t|^p dt\right] < \infty$$

i $L^p_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ l'espai de processos $\mathcal{F}_t$-adaptats en $L^p(\Omega \times \mathbb{R}_+)$. Pel mateix raonament d'abans aquests espais també són de Banach.

1.2 El moviment Brownià

El moviment Brownià és un exemple particular de procés estocàstic. L'estudiem perquè serà el nucli de la majoria dels models financers.

Definició 1.6. Un moviment Brownià respecte a la filtració $\mathcal{F}_t$ és un procés estocàstic continu a valors reals $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ amb trajectòries contínues i increments independents i estacionaris. En altres paraules:

- $\forall t \geq 0$, X_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- Les trajectòries $t \mapsto X_t(\omega)$ són contínues.
- Increments independents: si $s \leq t$, $X_t - X_s$ és independent de la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s$.
- Increments estacionaris: si $s \leq t$, $X_t - X_s$ i $X_{t-s} - X_0$ tenen la mateixa llei.

L'anomenarem *moviment $(\mathcal{F}_t)$-Brownià.*

El primer punt d'aquesta definició mostra que $\sigma\{X_u, u \leq s\} \subset \mathcal{F}_t$. Anomenarem *moviment Brownià* al moviment $(\mathcal{F}_t)$-Brownià on $\mathcal{F}_t$ és la filtració natural.

Teorema 1.7. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un moviment Brownià, aleshores $X_t - X_0$ és una variable aleatòria normal amb mitjana μt i variància $\sigma^2 t$, on μ i σ són nombres reals constants.*

Demostració. Podeu consultar [**Gik**] per una demostració d'aquest teorema.

El següent teorema remarca la propietat de Gauss del moviment Brownià. Acabem de veure que per a qualsevol t, X_t és una variable aleatòria normal. Un resultat més fort és el següent:

Teorema 1.8. *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *és un moviment Brownià i si* $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ *aleshores* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *és un vector gaussià.*

Abans de demostrar aquest teorema hem de recordar que:

Definició 1.9. Una variable aleatòria $X = (X_1, \ldots, X_d)$ en $\mathbb{R}^d$ és un vector gaussià si per a qualsevol seqüència de nombres reals $a_1, \ldots, a_d$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} a_i X_i$ és normal.

Les components $X_1, \ldots, X_d$ d'un vector de Gauss són òbviament normals, però el fet de que cadascuna de les components d'un vector són variables aleatòries normals no implica que el vector sigui normal. No obstant això, si $X_1, \ldots, X_d$ són variables aleatòries independents i normals, llavors el vector $(X_1, \ldots, X_d)$ és normal.

Demostració. Considerem $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, llavors el vector aleatori

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

està compost per variables aleatòries independents (per la Definició 1.6) i normals (pel Teorema 1.7). Per tant, aquest vector és gaussià i també ho és $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

■

Definició 1.10. Es diu que un moviment Brownià és *estàndard* si

- $X_0 = 0$,
- $\mathbb{E}[X_t] = 0$,
- $Var(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] = t$.

A partir d'ara suposarem que el moviment Brownià és estàndard si no deim el contrari, i el denotarem per $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Observem que per tot $s < t$, $B_t - B_s$ és una distribució normal amb mitjana 0 i variància $t - s$ i que tot moviment Brownià $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es pot escriure com $X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$, on $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$.

Per conveniència a vegades entendrem el moviment Brownià com un passeig aleatori sobre intervals de temps infinitesimal de longitud dt, amb increments ΔB_t sobre $[t, t + dt]$ donats per $\Delta B_t = \pm\sqrt{dt}$ amb probabilitats iguals a 1/2.

1.3 Martingales

El concepte de martingala és una eina crucial per explicar la noció d'arbitratge, per això és important estudiar-lo.

Definició 1.11. Considerem un espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i una filtració $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ en aquest espai. Una família adaptada $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aleatòries integrables, és a dir, tal que $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty \quad \forall t$, és una:

- *martingala* si, $\forall s \le t$, $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$;
- *supermartingala* si, $\forall s \le t$, $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \le M_s$;
- *submartingala* si, $\forall s \le t$, $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \ge M_s$.

Es desprèn d'aquesta definició, aplicant esperançes a cadascuna de les equacions, que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és una martingala, llavors $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ per a qualsevol t. Això vol dir que totes les variables aleatòries que formen la martingala tenen les mateixes esperançes. Si és una supermartingala, $\mathbb{E}[M_t] \le \mathbb{E}[M_0]$ i si és una submartingala, $\mathbb{E}[M_t] \ge \mathbb{E}[M_0]$.

Veiem alguns exemples de martingales:

Proposició 1.12. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un moviment $\mathcal{F}_t$-Brownià estàndard aleshores:*

1. *X_t és una $\mathcal{F}_t$-martingala.*
2. *$X_t^2 - t$ és una $\mathcal{F}_t$-martingala.*
3. *$e^{\sigma X_t - (\sigma^2/2)t}$, $\sigma > 0$, és una $\mathcal{F}_t$-martingala.*

Demostració.

1. Per demostrar que X_t és una $\mathcal{F}_t$-martingala hem de veure que
$$\forall s \le t \quad \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s,$$
i això és equivalent a veure que $\forall s \le t$, $\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = 0$. Veiem-ho:

   Si $s \le t$ llavors $X_t - X_s$ és independent de la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s$ per la definició de moviment $\mathcal{F}_t$-Brownià. Per tant, $\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s]$ per les propietats de l'esperança condicionada.

   Per les propietats dels moviments brownians estàndards ($\mathbb{E}[X_t] = 0$, $\mathbb{E}[X_t^2] = t$, $X_0 = 0$) tenim que $\mathbb{E}[X_t - X_s] = \mathbb{E}[X_t] - \mathbb{E}[X_s] = 0$, que és el que volíem veure.

2. Per demostrar que $X_t^2 - t$ és una $\mathcal{F}_t$-martingala hem de veure que
$$\forall s \le t \quad \mathbb{E}[X_t^2 - t|\mathcal{F}_s] = X_s^2 - s,$$
i això és equivalent a veure que $\forall s \le t$, $\mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2 - t + s|\mathcal{F}_s] = 0$. Veiem-ho:

Observem que

$$\mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2X_s\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s],$$

i ja que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és una martingala sabem que $\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = 0$ i per tant només ens falta calcular

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] \overset{(1)}{=} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] \overset{(2)}{=} \mathbb{E}[(X_{t-s} - X_0)^2] \overset{(3)}{=} \mathbb{E}[X_{t-s}^2] \overset{(4)}{=} t - s.$$

(1) Perquè $X_t - X_s$ és independent de la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s$ per la Definició 1.6.

(2) Perquè $X_t - X_s$ i $X_{t-s} - X_0$ tenen la mateixa llei per la Definició 1.6.

(3) Perquè $X_0 = 0$ ja que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un moviment brownià estàndard.

(4) Perquè $\mathbb{E}(X_t^2) = t$ ja que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un moviment brownià estàndard.

Així tenim

$$\mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2 - t + s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[s - t|\mathcal{F}_s] = t - s + s - t = 0$$

com volíem veure.

3. Per veure que $e^{\sigma X_t - (\sigma^2/2)t}$ és una $\mathcal{F}_t$-martingala hem de veure que

$$\forall s \le t, \quad \mathbb{E}\left[e^{\sigma X_t - (\sigma^2/2)t}\middle| \mathcal{F}_s\right] = e^{\sigma X_s - (\sigma^2/2)s}.$$

Per començar recordem que si g és una variable aleatòria normal estàndard sabem que

$$\mathbb{E}[e^{\lambda g}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\lambda x} e^{-x^2/2} dx = e^{\lambda^2/2}. \qquad (*)$$

D'altra banda, si $s < t$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\sigma X_t - \sigma^2 t/2}\middle| \mathcal{F}_s\right] = e^{\sigma X_s - \sigma^2 t/2}\ \mathbb{E}\left[e^{\sigma(X_t - X_s)}\middle| \mathcal{F}_s\right]$$

a causa de què X_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable.

Així només ens falta calcular

$$\mathbb{E}\left[e^{\sigma(X_t - X_s)}\middle| \mathcal{F}_s\right] \overset{(1)}{=} \mathbb{E}\left[e^{\sigma(X_t - X_s)}\right] \overset{(2)}{=} \mathbb{E}\left[e^{\sigma X_{t-s}}\right] \overset{(3)}{=} \mathbb{E}\left[e^{\sigma g\sqrt{t-s}}\right] \overset{(4)}{=} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}.$$

(1) Perquè $X_t - X_s$ és independent de la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s$ per la Definició 1.6.

(2) Perquè $X_t - X_s$ i $X_{t-s} - X_0$ tenen la mateixa llei per la Definició 1.6 i $X_0 = 0$ ja que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un moviment brownià estàndard.

(3) Perquè X_{t-s} és una variable aleatòria normal amb variància $t - s$ i g també, però amb variància 1.

(4) Per $(*)$ amb $\lambda = \sigma\sqrt{t-s}$.

Finalment tenim

$$\mathbb{E}\left[e^{\sigma X_t - (\sigma^2/2)t}\middle| \mathcal{F}_s\right] = e^{\sigma X_s - \sigma^2 t/2}\ \ e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} = e^{\sigma X_s - (\sigma^2/2)s},$$

com volíem demostrar.

■

1.4 Processos de Markov

Aquests processos i les seves propietats ens seran d'utilitat per a la valoració dels bons cupó zero, per això anem a estudiar-los.

Definició 1.13. Un procés estocàstic en $\mathbb{R}$, és a dir, la familia $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aleatòries en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, és un *procés de Markov* si per a tot $t \in \mathbb{R}_+$ les σ-àlgebres

$$\mathcal{F}_t^+ := \sigma\{X_s \, : \, s \geq t\}$$

i

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s \, : \, 0 \leq s \leq t\}$$

són condicionalment independents donat X_t.

Aquesta condició es pot expressar com

$$\mathbb{P}(A \cap B | X_t) = \mathbb{P}(A|X_t)\mathbb{P}(B|X_t),$$

per a tot $A \in \mathcal{F}_t^+$ i $B \in \mathcal{F}_t$. Aquesta propietat ens diu que l'estat del procés al temps futur $s > t$ és independent del passat (temps abans de t) quan l'estat del procés al temps t és conegut.

Aquesta definició implica naturalment que:

i) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és adaptat respecte a la filtració $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, és a dir, X_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable, $t \in \mathbb{R}_+$.

ii) Per a tot $u \geq t$ $\;X_u$ és condicionalment independent de $\mathcal{F}_t$ donat X_t, és a dir,

$$\mathbb{E}[f(X_u)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_u)|X_t], \quad 0 \leq t \leq u,$$

per a qualsevol funció acotada mesurable f de $\mathbb{R}$.

En particular,

$$\mathbb{P}(X_u \in A|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X_u)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X_u)|X_t] = \mathbb{P}(X_u \in A|X_t),$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Processos amb increments independents proporcionen exemples senzills de processos de Markov. De fet, per a totes les funcions acotades mesurables f, g tenim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})|X_t] &= \mathbb{E}[f(X_{t_1} - X_t + x, \dots, X_{t_n} - X_t + x) \\
&\quad \cdot g(X_{s_1} - X_t + x, \dots, X_{s_n} - X_t + x)]_{x=X_t} \\
&= \mathbb{E}[f(X_{t_1} - X_t + x, \dots, X_{t_n} - X_t + x)]_{x=X_t} \\
&\quad \cdot \mathbb{E}[g(X_{s_1} - X_t + x, \dots, X_{s_n} - X_t + x)]_{x=X_t} \\
&= \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})|X_t] \cdot \mathbb{E}[g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})|X_t],
\end{aligned}$$

$0 \leq s_1 < \cdots < s_n < t < t_1 < \cdots < t_n$.

Definició 1.14. Un *nucli de transició* és una aplicació $P(x, dy)$ que compleix:

i) Per a cada $x \in \mathbb{R}$, $A \mapsto P(x, A)$ és una probabilitat.

ii) Per a cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'aplicació $x \mapsto P(x, A)$ és una funció mesurable.

Definició 1.15. El *nucli de transició* $\mu_{s,t}$ *associat a* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es defineix com

$$\mu_{s,t}(x, A) := P(X_t \in A | X_s = x) \quad 0 \leq s \leq t.$$

Aquest nucli ens proporciona la probabilitat de que el procés es trobi en el conjunt A al temps t condicionat a que es va trobar en l'estat x en un temps anterior s.

Observem que tenim

$$\mu_{s,t}(X_s, A) = P(X_t \in A | X_s) = P(X_t \in A | \mathcal{F}_s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Definició 1.16. L'*operador de transició* $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ *associat a* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es defineix com

$$P_{s,t}f(x) := \mathbb{E}[f(X_t)|X_s = x] = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mu_{s,t}(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $p_{s,t}(x)$ denota la densitat de $X_t - X_s$ tenim

$$\mu_{s,t}(x, A) = \int_A p_{s,t}(y - x)dy, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

i

$$P_{s,t}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)p_{s,t}(y - x)dy.$$

Suposarem que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és homogeni en temps, és a dir, $\mu_{s,t}$ només depèn de la diferència $t - s$, i la denotarem $\mu_{s,t}$. En aquest cas, la familia $(P_{0,t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ es denota per $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ i defineix un *semigrup transició* associat a $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ com

$$P_t f(x) := \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x] = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mu_t(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}.$$

I satisfà la propietat de semigrup

$$\begin{aligned} P_t P_s f(x) &= \mathbb{E}[P_s f(X_t)|X_0 = x] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{t+s})|X_s]|X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s]|X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[f(X_{t+s})|X_0 = x] = P_{t+s}f(x), \end{aligned}$$

el que condueix a l'*equació de Chapman-Kolmogorov*

$$\mu_{s+t}(x, A) = \mu_s * \mu_t(x, A) = \int_{\mathbb{R}} \mu_s(x, dy)\mu_t(y, A).$$

Per la introducció obtenim

$$P_x((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B_1 \times \ldots \times B_n) = \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} \mu_{0,t_1}(x, dx_1) \cdots \mu_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n),$$

per a $0 < t_1 < \cdots < t_n$ i $B_1, \ldots, B_n$ Borelians de $\mathbb{R}$.

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ és un procés de Markov homogeni amb increments independents llavors la densitat $p_t(x)$ de X_t satisfà la propietat de convolució

$$p_{s+t}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_s(y-x) p_t(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R},$$

que es compleix, en particular, pels processos amb increments independents i estacionaris, com els processos de Lévy. Un exemple típic d'una densitat de probabilitat que satisfà una propietat com la convolució és la densitat Gaussiana, és a dir,

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t} x^2\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Capítol 2

Integrals estocàstiques i càlcul d'Itô

En un model de temps discret, si seguim una estratègia d'autofinançament $\phi = (H_n)_{0\leq n\leq N}$, l'actualització del valor de la cartera de riquesa inicial V_0 és

$$V_0 + \sum_{j=1}^{n} H_j(\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}),$$

on $\widetilde{S}_j$ i $\widetilde{S}_{j-1}$ són els vectors dels preus descomptats dels actius financers que formen la cartera als temps j i $j-1$, respectivament. Aquesta riquesa és una martingala transformada sota una certa mesura de probabilitat de tal manera que el preu de descompte de la cartera és una martingala. Pel que fa als models de temps continu, el caràcter integral de la forma $\int_0^t H_s d\widetilde{S}_s$ ens ajudarà a descriure la mateixa idea.

Els processos de modelització dels preus de les accions són normalment les funcions d'un o diversos moviments brownians. Però una de les propietats més importants d'un moviment Brownià és que, quasi segurament, els seus camins no són diferenciables en cap punt. En altres paraules, si B_t és un moviment Brownià, es pot demostrar que per a gairebé tots els $\omega \in \Omega$ no hi ha cap temps t en $\mathbb{R}_+$ tal que dB_t/dt existeix, ja que, $\frac{dB_t}{dt} = \frac{\pm\sqrt{dt}}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{dt}} \approx \pm\infty$. En conseqüència, no estem en condicions de definir la integral anterior com

$$\int_0^t f(s)\ dB_s = \int_0^t f(s)\ \frac{dB_s}{ds}\ ds.$$

No obstant això, estem en condicions de definir un tipus d'integral respecte un moviment Brownià, que anomenarem integral estocàstica. Aquest és el propòsit d'aquesta secció.

2.1 Construcció de la integral estocàstica

En aquesta secció construïrem la integral estocàstica d'Itô de processos de quadrat integrable adaptats respecte d'un moviment Brownià. El principal ús de les integrals estocàstiques a les finances és modelar el comportament d'una cartera impulsada per un actiu amb risc.

La definició d'integral estocàstica respecte un moviment Brownià consistiria en escriure

$$\int_0^\infty f(t)\ dB_t = \int_0^\infty f(t)\ \frac{dB_t}{dt}\ dt,$$

però aquesta definició falla perquè els camins d'un moviment Brownià no són diferenciables en cap punt, com hem vist abans. Així, en comptes de construir la integral estocàstica, primer construirem la integral de processos previsibles simples.

Definició 2.1. $(u_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un *procés previsible simple* si es pot escriure de la forma

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} F_i \,\mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

on $F_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_{i-1}}, \mathcal{P})$ és $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable, $i = 1, \ldots, n$.

Un procés previsible simple és, per tant, un procés amb trajectòries aleatòries esglaonades. Anomenem $\mathcal{P}$ l'espai de processos previsibles simples. Es pot comprovar fàcilment que el conjunt $\mathcal{P}$ forma un espai lineal i és dens en $L^p_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ $\forall p \geq 1$.

Proposició 2.2. *Sigui $(u_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un procés previsible simple. La integral estocàstica de u_t respecte un moviment Brownià $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es defineix*

$$I(u) := \int_0^\infty u_t \, dB_t = \sum_{i=1}^{n} F_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

i s'estén a $u \in L^p_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ a través de la fórmula d'isometria

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_t \, dB_t \int_0^\infty v_t \, dB_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_t v_t \, dt\right] \tag{2.1}$$

Demostració. Comencem per provar que la isometria (2.1) val pel procés previsible simple $u = \sum_{i=1}^{n} G_i \,\mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}$ amb $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$:

$$\begin{aligned}
\|I(u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty u_t \, dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} G_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} |G_i|^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}\left[\sum_{1\leq i<j\leq n} G_i G_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[|G_i|^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] \\
&\quad + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{E}\left[G_i G_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right]
\end{aligned}$$

Utilitzant la propietat $\mathbb{E}[\mathbb{E}[F|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[F]$ de l'esperança condicionada obtenim:

$$
\begin{aligned}
\|I(u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|G_i|^2(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right]+\\
&+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[G_iG_j(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]\right]\\
&\overset{(1)}{=}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|G_i|^2\mathbb{E}\left[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right]+\\
&+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\left[G_iG_j(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\mathbb{E}\left[(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]\right]\\
&\overset{(2)}{=}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|G_i|^2(t_i-t_{i-1})\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2(t_i-t_{i-1})\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty\sum_{i=1}^{n}G_i^2\mathbf{1}_{(t_{i-1}-t_i]}\,dt\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_t^2\,dt\right]\\
&=\|u\|^2_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}
\end{aligned}
$$

(1) Utilitzant que G_i és $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable, i G_j i $(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})$ són $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurables, per la definició de procés previsible simple.

(2) Utilitzant que

$$\mathbb{E}\left[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]=\mathbb{E}\left[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2\right]=t_i-t_{i-1}$$

i que $B_{t_j}-B_{t_{j-1}}$ és independent de $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$, i per tant, $\mathbb{E}\left[(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]=\mathbb{E}\left[(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})\right]=0$, ja que el moviment Brownià és estàndard.

Veiem a continuació que l'operador integral estocàstica s'estén a $L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ per densitat i un argument de successions de Cauchy, aplicant la isometria (2.1).

L'espai $L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ és un subespai lineal tancat de $L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)$. Observem que la única diferència que hi ha entre aquests dos espais és que els elements de $L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ són adaptats. Clarament, tot procés simple és un element de $L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$. Tenim aleshores la inclusió d'espais $\mathcal{P}\subset L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)\subset L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)$. Observem que per a qualsevol procés $u\in L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ existeix una successió de processos $u_t\in\mathcal{P}$ tals que

$$\lim_{t\to\infty}\|u-u_t\|_{L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)}=0. \tag{$*$}$$

Aquest procés d'aproximació es pot dur a terme de la següent forma. Mitjançant la tècnica de truncació tot procés en $L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ es pot aproximar per processos acotats i continus, i aquests processos s'aproximen per processos simples de la forma

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\,\mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t)$$

on $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$. Els detalls complerts d'aquesta successió d'aproximacions es poden trobar a [**Oks**].

Utilitzant la isometria és fàcil comprovar que la successió $I(u_t)$ és una successió de Cauchy en l'espai $L^2(\Omega)$. En efecte,

$$\begin{aligned}\|I(u_k)-I(u_l)\|_{L^2(\Omega)} &= \|I(u_k-u_l)\|_{L^2(\Omega)}\\ &= \|u_k-u_l\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}\\ &\le \|u-u_k\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}+\|u-u_l\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}\,.\end{aligned}$$

Per $(*)$ l'última expressió pot fer-se tan petita com vulgui prenent índexs k i l suficientment grans. Aleshores, de manera natural es defineix, per cada $u\in L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$,

$$I(u)=\int_0^\infty u_t dB_t=\lim_{t\to\infty} I(u_t),$$

on el límit s'ha d'entendre dins l'espai $L^2(\Omega)$. Això significa que $I(u)\in L^2(\Omega)$ i és tal que

$$\lim_{t\to\infty}\|I(u)-I(u_t)\|_{L^2(\Omega)}=0.$$

La isometria es compleix per a processos $u\in L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$, com veurem a continuació. Sigui $u\in L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ i sigui $u_n\in\mathcal{P}$ tal que $\|u-u_n\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}\to 0$. Aquesta convergència i la desigualtat $|\|a\|-\|b\||\le\|a-b\|$ impliquen que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}\longrightarrow\|u\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}\,.$$

Anàlogament, com $\|I(u)-I(u_n)\|_{L^2(\Omega)}\longrightarrow 0$ tenim que

$$\|I(u_n)\|_{L^2(\Omega)}\longrightarrow\|I(u)\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

El resultat cercat s'obté aleshores prenent el límit en la isometria

$$\left\{\|I(u_n)\|_{L^2(\Omega)}=\|u_n\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}\right\}\longrightarrow\left\{\|I(u)\|_{L^2(\Omega)}=\|u\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)}\right\}.$$

■

Definició 2.3. La *integral d'Itô* sobre l'interval $[a,b]$ es defineix com

$$\int_a^b u_s\,dB_s:=\int_0^\infty \mathbf{1}_{[a,b]}(s)u_s\,dB_s,\quad 0\le a\le b,$$

$\forall u\in L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$. Observem que es tenen les propietats

$$\int_a^c u_s\,dB_s=\int_a^b u_s\,dB_s+\int_b^c u_s\,dB_s,\quad 0\le a\le b\le c,$$

i

$$\int_a^b dB_s=B_b-B_a,\quad 0\le a\le b.$$

A més, la integral estocàstica és un operador lineal, és a dir,

$$\int_0^\infty (u_s+v_s)\,dB_s=\int_0^\infty u_s\,dB_s+\int_0^\infty v_s\,dB_s,\quad u,v\in L^2_{ad}(\Omega\times\mathbb{R}_+).$$

La següent proposició mostra com calcular l'esperança condicionada d'una integral estocàstica per truncament de l'interval d'integració.

Proposició 2.4. *$\forall u \in L^2_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ tenim*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t u_s\, dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

En particular, $\int_0^t u_s\, dB_s$ *és* $\mathcal{F}_t$*- mesurable,* $t \in \mathbb{R}_+$.

Demostració. Siguin $\mathcal{P}$ l'espai de processos previsibles simples, i $u \in \mathcal{P}$ de la forma $u = G\,\mathbf{1}_{(a,b]}$, on G és acotada i $\mathcal{F}_a$-mesurable.

i) Si $0 \le a \le t$, $b \ge t$ tenim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty G\mathbf{1}_{(a,b]}\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[G\int_0^\infty \mathbf{1}_{(a,b]}\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[G\int_a^b dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[G(B_b - B_a)|\mathcal{F}_t\right] \overset{(1)}{=} G\mathbb{E}\left[(B_b - B_a)|\mathcal{F}_t\right] \\
&= G\mathbb{E}\left[(B_b - B_t)|\mathcal{F}_t\right] + G\mathbb{E}\left[(B_t - B_a)|\mathcal{F}_t\right] | \overset{(2)}{=} G(B_t - B_a) \\
&= G\int_a^t dB_s = G\int_0^\infty \mathbf{1}_{(a,t]}\, dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)G\mathbf{1}_{(a,b]}(s)\, dB_s \\
&\overset{(3)}{=} \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)u_s\, dB_s = \int_0^t u_s\, dB_s
\end{aligned}$$

(1) Utilitzant que G és $\mathcal{F}_a$-mesurable, $a \le t \Rightarrow G\;\; \mathcal{F}_t$-mesurable.

(2) Utilitzant que $B_t - B_a$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable i que $B_b - B_t$ és independent de $\mathcal{F}_t$, per tant, $\mathbb{E}[(B_b - B_t)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[B_b - B_t] = 0$, ja que el moviment Brownià és estàndard.

(3) Per la Definició 2.3.

ii) Si $0 \le t \le a$ tenim per tota F variable aleatòria acotada $\mathcal{F}_t$-mesurable

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F\int_0^\infty u_s\, dB_s\right] &= \mathbb{E}\left[F\int_0^\infty G\mathbf{1}_{(a,b]}\, dB_s\right] = \mathbb{E}\left[FG\int_0^\infty \mathbf{1}_{(a,b]}\, dB_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[FG(B_b - B_a)\right] = 0,
\end{aligned}$$

perquè el moviment Brownià és estàndard. Per tant,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[G(B_b - B_a)|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[G(B_b - B_a)|\mathcal{F}_a]|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[G\mathbb{E}[(B_b - B_a)|\mathcal{F}_a]|\mathcal{F}_t] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Per veure-ho he utilitzat que G és $\mathcal{F}_a$-mesurable i que $\mathbb{E}[(B_b - B_a)|\mathcal{F}_t] = 0$, ja que $B_b - B_a$ és independent de $\mathcal{F}_a$.

Això s'estén per linealitat i densitat, ja que de la continuïtat de l'esperança condicionada a L^2 tenim:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t u_s\, dB_s - \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right]\right)^2\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t u_s^n\, dB_s - \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right]\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s^n\, dB_s - \int_0^\infty u_s\, dB_s \middle| \mathcal{F}_t\right]\right)^2\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty u_s^n\, dB_s - \int_0^\infty u_s\, dB_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty (u_s^n - u_s)\, dB_s\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty |u_s^n - u_s|^2\, ds\right] = 0
\end{aligned}$$

Hem utilitzat la Desigualtat de Jensen que ens diu que $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$ amb la funció convexa $f(x) = x^2$. ■

En particular, a partir de $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, la integral d'Itô és una variable aleatòria centrada:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty u_s\, dB_s\right] = 0.$$

El següent resultat és un corol·lari immediat de la Proposició anterior.

Corol·lari 2.5. *La integral estocàstica indefinida* $\left(\int_0^t u_s\, dB_s\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *de* $u \in L^2_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ *és una martingala, és a dir:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t u_\tau\, dB_\tau \middle| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s u_\tau\, dB_\tau, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Una conseqüència immediata d'aquest corol·lari és que

$$\mathbb{E}\left[\int_t^\infty u_\tau\, dB_\tau \middle| \mathcal{F}_t\right] = 0, \quad \text{i} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t u_\tau\, dB_\tau \middle| \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t u_\tau\, dB_\tau.$$

En particular, $\int_0^t u_\tau\, dB_\tau$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable $\forall u \in L^2_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$.

Per acabar aquesta secció, remarquem la gaussianetat de les integrals estocàstiques de funcions deterministes.

Proposició 2.6. *Sigui* $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. *La integral estocàstica* $\int_0^\infty f(t)\, dB_t$ *és una variable aleatòria Gaussiana amb mitjana 0 i variància* $\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt$.

DEMOSTRACIÓ. Veiem que la integral estocàstica

$$\int_0^\infty f(t)\, dB_t := \sum_{k=1}^n a_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$$

de la funció simple $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{(t_k, t_{k-1}]}(t)$, té una distribució gaussiana centrada amb variància $\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt$.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty f(t)\, dB_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n a_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right] = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{E}\left[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right] = 0$$

per tant, és centrada. I la variància és:

$$\begin{aligned} Var\left(\int_0^\infty f(t)\, dB_t\right) &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 Var(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 (t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \int_{t_k}^{t_{k-1}} dt = \int_0^\infty |f(t)|^2\, dt. \end{aligned}$$

Aquest resultat s'estén per la densitat de les funcions simples en $L^2(\mathbb{R}_+)$.

∎

En particular, si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ la isometria de la integral d'Itô (2.3) es llegeix:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty f(t)\, dB_t\right)^2\right] = \int_0^\infty |f(t)|^2\, dt.$$

2.2 Càlcul i fórmula d'Itô

Només en casos molt excepcionals es poden calcular les integrals estocàstiques a partir de la seva definició, en general necessitem unes altres eines. És el moment d'introduir un càlcul diferencial basat en aquestes integrals estocàstiques, s'anomena el càlcul d'Itô i l'ingredient principal és la famosa fórmula d'Itô.

Usant la regla $(dB_t)^2 = (\pm\sqrt{dt})^2 = dt$, la fórmula de Taylor fins a segon ordre es llegeix informalment:

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)(dB_t)^2 = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt.$$

La fórmula d'Itô proporciona una generalització d'aquesta identitat als processos d'Itô (que definirem seguidament). En particular, la fórmula d'Itô ens permet diferenciar una funció com $t \mapsto f(B_t)$ si f és dues vegades diferenciable, amb derivades contínues.

Anem a definir amb precisió el tipus de processos en els que la fórmula d'Itô és aplicable.

Definició 2.7. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitats filtrat i $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un moviment $\mathcal{F}_t$-Brownià. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un *procés d'Itô* amb valors en $\mathbb{R}$ si es pot escriure com

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \, dB_s + \int_0^t v_s \, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

on X_0 és $\mathcal{F}_0$-mesurable i u_s, v_s són processos $\mathcal{F}_t$-adaptats i suficientment integrables.

La següent proposició subratlla la singularitat de la descomposició anterior.

Proposició 2.8. *Si $(M_t)_{0\le t\le T}$ és una martingala contínua tal que*

$$M_t = \int_0^t v_s \, ds, \quad i \quad \int_0^T |v_s| \, ds < +\infty,$$

llavors

$$\forall t \le T, \quad M_t = 0.$$

Això implica que:

i) Un procés d'Itô té descomposició única. Això vol dir que si

$$X_t = X_0 + \int_0^t v_s \, ds + \int_0^t u_s \, dB_s = X_0^{'} + \int_0^t v_s^{'} \, ds + \int_0^t u_s^{'} \, dB_s$$

llavors

$$X_0 = X_0^{'}, \quad u_s = u_s^{'}, \quad v_s = v_s^{'}.$$

ii) Si $(X_t)_{0\le t\le T}$ és una martingala de la forma $X_0 + \int_0^t v_s \, ds + \int_0^t u_s \, dB_s$, aleshores $v_t = 0$.

Demostració. Ens hem de referir a [**Bou**] per a una prova elemental en el cas Brownià, és a dir, quan (B_t) és un moviment Brownià estàndard o a [**Kar**] per a una demostració completa.

Teorema 2.9. *Sigui $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un procés d'Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \, dB_s + \int_0^t v_s \, ds,$$

i f una funció dues vegades diferenciable amb derivades contínues, llavors, la fórmula d'Itô és

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) u_s \, dB_s + \int_0^t f'(X_s) v_s \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) u_s^2 \, ds.$$

De la mateixa manera, si $(t,x) \to f(t,x)$ és una funció dues vegades diferenciable respecte a x i una respecte a t, i la identificació d'aquestes derivades parcials són contínues pel *que fa a (t, x) (és a dir, f és una funció de la classe $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, la fórmula d'Itô es converteix en*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) u_s\, dB_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) v_s\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) u_s^2\, ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En forma diferencial és:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)u_t dB_t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)v_t dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)u_t^2 dt. \tag{2.3}$$

2.3 El teorema de Girsanov

En Teoria de Probabilitats el Teorema de Girsanov descriu com canvia la dinàmica dels processos estocàstics quan canviem la probabilitat inicial per una probabilitat equivalent. El teorema és especialment important en la teoria de les matemàtiques financeres, nosaltres el necessitarem en els últims capítols del treball.

Abans d'enunciar el teorema necessitem la noció de probabilitats equivalents.

Definició 2.10. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitats. Es diu que una probabilitat $\mathbb{Q}$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ és *absolutament contínua* respecte a $\mathbb{P}$ si

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Teorema 2.11. *Una probabilitat $\mathbb{Q}$ és absolutament contínua respecte a $\mathbb{P}$ si, i només si, existeix una variable aleatòria Z en $(\Omega, \mathcal{A})$ positiva, tal que*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Z s'anomena la densitat de $\mathbb{Q}$ respecte a $\mathbb{P}$, i la denotarem per $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Demostració. La suficiència és òbvia, i l'altra implicació és una versió del Teorema de Radon-Nikodym. Podem trobar aquest teorema i la seva demostració a [**Dac2**], o a [**Will**, secció 5.14].

Definició 2.12. Les probabilitats $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ són *equivalents* si cadascuna d'elles és absolutament contínua respecte l'altra.

Observem que si $\mathbb{Q}$ és absolutament contínua respecte a $\mathbb{P}$, amb densitat $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, llavors $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ són equivalents si, i només si, $\mathbb{P}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0\right) = 1$.

Ara ja podem enunciar el Teorema de Girsanov.

Teorema 2.13 (de Girsanov). *Siguin* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ *un espai de probabilitats filtrat,* $(B_t)_{t\in[0,T]}$ *un moviment* $\mathcal{F}_t$*-Brownià estàndard i* $(\psi_t)_{t\in[0,T]}$ *un procés adaptat i acotat que satisfà* $\int_0^T \psi_s^2 ds < \infty$*. Sigui* $\mathbb{Q}$ *la probabilitat definida per la densitat*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \psi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \psi_s^2 ds\right),$$

i suposem que és una martingala. Llavors, el procés

$$\widehat{B}_t := B_t + \int_0^t \psi_s ds, \qquad t \in [0,T],$$

és un moviment Brownià estàndard sobre $\mathbb{Q}$*.*

Demostració. Per la demostració d'aquest teorema podem consultar [**Kar**] o [**Dac1**, capítol 8].

Una condició suficient perquè $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ sigui una martingala és

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \psi_s^2 ds\right)\right] < \infty.$$

Aquesta condició es coneix com a *Criteri de Novikov.*

2.4 Equacions diferencials estocàstiques

Una equació diferencial estocàstica és una equació de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{2.4}$$

definida per a $t \in \mathbb{R}_+$ i amb condició inicial la variable aleatòria X_0 que és $\mathcal{F}_0$-mesurable i independent del moviment Brownià. La incògnita d'aquesta equació és el procés X_t. Els coeficients $b(t,x)$ i $\sigma(t,x)$ són funcions reals definides en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, i es coneixen com coeficients de *tendència* (*drift* en anglès o també *deriva* en espanyol) i de *difusió* respectivament.

L'equació diferencial (2.4) s'interpreta com l'equació integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, \tag{2.5}$$

on la primera és una integral de Riemann mentre que la segona és una integral estocàstica d'Itô. Com hem vist en l'apartat anterior, aquest procés és anomenat procés d'Itô. El procés solució pot interpretar-se com l'estat d'un sistema que evoluciona de manera determinista governat per la part no aleatòria de l'equació, però pertorbat per un soroll additiu donat per la integral estocàstica. Aquestes equacions són útils per a modelar la majoria dels actius financers, com accions o bons.

2.4.1 Teorema d'Itô

Veiem ara què entenem per una solució de (2.5).

Definició 2.14. Considerem un espai de probabilitats filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$, dues funcions $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una variable aleatòria $\mathcal{F}_0$-mesurable X_0 i finalment un moviment $\mathcal{F}_t$-Brownià $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Una solució de l'equació (2.5) és un procés estocàstic $\mathcal{F}_t$-adaptat $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ que satisfà:

- Per a qualsevol $t \geq 0$ les integrals $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ i $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ existeixen,

$$\int_0^t |b(s, X_s)|\, ds < +\infty \quad i \quad \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\, ds < +\infty,$$

- $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisfà (2.5), és a dir,

$$\forall t \geq 0 \quad X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

El següent teorema dóna condicions suficients en b i σ per garantir l'existència i la unicitat de la solució de l'equació (2.4).

Teorema 2.15 (d'Itô, 1951)**.** *Si b i σ són funcions contínues i si existeix una constant $K < +\infty$ tal que*

1. $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$,
2. $|b(t, x) + \sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$,
3. $\mathbb{E}[X_0^2] < +\infty$,

llavors (2.4) admet una solució única. D'altra banda, aquesta solució $(X_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ satisfà

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right] < +\infty, \quad \forall T > 0.$$

Demostració. Podeu consultar la demostració d'aquest Teorema a [**Kar**].

2.5 Exemples de processos estocàstics

Donarem dos exemples de processos estocàstics que necessitarem per entendre els capítols següents .

2.5.1 El moviment Brownià geomètric

Considerem l'equació diferencial estocàstica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \tag{2.6}$$

amb condició inicial $X_0 = x_0$ positiva, i on $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$.

Aquesta equació s'utilitza en Finances per a modelar el preu d'alguns béns que fluctuen en els mercats financers, i es pot interpretar de la següent forma. Quan no hi ha el terme estocàstic l'equació es redueix a $dX_t = \mu X_t dt$, i la seva solució és $X_t = x_0 e^{\mu t}$. Aquesta funció representa el comportament en el temps d'un capital inicial x_0 positiu que creix de manera contínua i determinista amb una taxa efectiva del $100\mu\%$. La part estocàstica ens indica la volatilitat d'una inversió amb risc donada per les fluctuacions dels mercats financers.

Observem que els coeficients d'aquesta equació satisfan les condicions del Teorem d'Itô per l'existència i la unicitat de solucions. Per tant, podem resoldre l'equació (2.6), i ho farem utilitzant el mètode d'igualació de coeficients. Volem trobar una funció $f(t,x)$ tal que quan apliquem la fórmula d'Itô al procés $X_t = f(t, B_t)$ obtinguem l'equació (2.6). Aleshores, comparant els coeficients de la fórmula general

$$dX_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)dt$$

amb els de (2.6) i posant $x = B_t$ obtenim el sistema

$$\begin{cases} \mu S_t = \mu f(t,x) = f_t(t,x) + \dfrac{1}{2} f_{xx}(t,x), \\ \sigma S_t = \sigma f(t,x) = f_x(t,x). \end{cases}$$

De la segona equació obtenim que

$$f(t,x) = e^{\sigma x + g(t)}$$

per a alguna funció $g(t)$. Substituint a la primera equació obtenim $g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, i la seva solució és $g(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$. Per tant, la solució de (2.6) és

$$X_t = x_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t \right\}.$$

Aquest procés és anomenat *moviment Brownià geomètric.*

2.5.2 El procés d'Ornstein-Uhlenbeck

Considerem l'equació diferencial estocàstica

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \tag{2.7}$$

amb condició inicial $X_0 = x_0$ positiva, i on α i σ són constants positives. Aquesta equació va ser proposada per Ornstein i Uhlenbeck per modelar la variació de la velocitat en el moviment.

Per trobar la solució de (2.7) considerem una solució de la forma

$$X_t = a(t)\left[x_0 + \int_0^t b(s)\ dB_s\right],$$

on a i b són funcions diferenciables. Derivant la solució anterior i substituint la seva expressió en la derivada obtenim

$$\begin{aligned} dX_t &= a'(t)\left[x_0 + \int_0^t b(s)\ dB_s\right] dt + a(t)b(t)dB_t \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t)dB_t, \end{aligned}$$

i comparant aquesta expressió amb l'equació (2.7) veiem que a i b han de complir les condicions

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha, \quad a(t)b(t) = \sigma.$$

Suposant que $a(0) = 1$ obtenim que

$$a(t) = e^{-\alpha t} \quad \text{i} \quad b(t) = \sigma e^{\alpha t}.$$

Per tant, la solució de (2.7) és

$$X_t = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\ dB_s.$$

Aquest procés és anomenat *procés d'Ornstein-Uhlenbeck*.

Capítol 3

Una revisió de la fixació de preus sota el model de Black-Scholes

Black i Scholes (1973) van estudiar el problema de la fixació de preus i cobertura de les opcions europees (de compra i de venda). Les opcions europees són les opcions que només poden exercir-se en la data de venciment T. Una altra hipòtesi del model de Black-Scholes és l'absència d'oportunitats d'arbitratge, és a dir, no hi ha beneficis sense risc en el mercat.

El model de Black-Scholes es pot considerar el model més important de la fixació dels preus dels derivats financers. De fet, la complexitat dels models de tipus d'interès fa difícil, en general, obtenir fórmules explícies, per això, en moltes situacions s'utilitza el model de Black-Scholes per a trobar fórmules per la fixació del preu del tipus d'interès.

A partir d'ara treballarem amb opcions europees i sota el principi de no arbitratge.

3.1 Conceptes econòmics

Per tal de poder entendre bé els continguts d'aquest i els propers capítols necessitem definir alguns conceptes econòmics.

Un *actiu financer* és, pel seu titular, un dret patrimonial sobre els recursos futurs i incerts que pugui generar una empresa. I la *cartera d'inversions* és el conjunt d'actius financers en els quals s'inverteix.

Un *instrument financer* és tot contracte que dóna lloc a un actiu financer en una entitat, i simultàniament, en una altra entitat, dóna lloc o bé a un passiu financer o bé a un instrument de patrimoni.

Els *mercats financers* són els espais on es realitzen els intercanvis d'instruments financers i s'obtenen els seus preus. En aquests mercats ens podem trobar amb diferents tipus d'interès, com: tipus d'interès com a instrument de la política monetària, tipus d'interès en la banca, tipus d'interès nominals i reals i tipus d'interès del mercat.

Les principals funcions dels mercats financers són: establir la possibilitat dels mecanismes en el contracte entre els participants en la negociació, fixar els preus dels productes financers en funció de la seva oferta i demanda, reduïr els costos d'intermediació i administrar els fluxos de liquidesa de productes o mercat.

S'anomena *derivat financer* a tot instrument financer el valor del qual està supeditat al valor d'un altre actiu financer anomenat *actiu subjacent* i que poden ser accions, índexs bursàtils, tipus d'interès... Aquests instruments, com poden ser contractes de futurs i opcions, tenen la propietat de ser sempre liquidats en un futur.

3.2 Opcions de Call i Put

Una *opció* és un contracte que proporciona, al seu titular, el dret, però no la obligació, de comprar, si és una opció de compra, o vendre, si és una opció de venda, un actiu subjacent a un preu K. Les opcions aparèixen perquè és una preocupació important pel comprador d'un actiu en un temps t que el preu S_T de l'actiu disminueixi en una data futura T. Si el comprador compra l'opció de venda pot vendre els seus actius al temps T per un preu K fixat en un moment inicial t.

Aquest contracte s'anomena una *opció de venda* o també *Put* amb preu d'exercici K i data d'exercici T. En el cas que el preu S_T sigui inferior que K, l'exercici del contracte donarà al comprador l'opció d'un guany igual a $K - S_T$ en comparació amb altres que no tenien l'opció de venda. Al seu torn, el venedor de l'opció percebrà una pèrdua també igual a $K - S_T$, assumint l'absència de costos de transacció i altres despeses. En el cas general, la rendibilitat d'una opció Put serà de la forma

$$P(T, S_T) = (K - S_T)^+ = \begin{cases} K - S_T, & \text{si } S_T \leq K \\ 0, & \text{si } S_T \geq K \end{cases} = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Perquè aquest contracte sigui just, el comprador de l'opció ha de pagar una quota (similar a una quota d'assegurança) en el moment de la signatura del contracte. El càlcul d'aquesta taxa és un tema important, que es coneix com a *valoració d'opcions*.

D'altra banda, si el comerciant té per objecte la compra d'algunes accions o matèries primeres, el seu interès estarà en què els preus no pugin i pot ser que vulgui comprar una *opció de compra*, també anomenada *Call*, que és un contracte que li permet comprar l'actiu en el temps T per un preu no superior a un nivell K fixat en el temps t. En aquest cas, si S_T és més gran que K, el comprador de l'opció registrarà un guany igual a $S_T - K$ en comparació amb un agent que no tengui l'opció de compra. En general, una opció de compra és una opció amb funció de rendibilitat

$$C(T, S_T) = (S_T - K)^+ = \begin{cases} 0, & \text{si } S_T \leq K \\ S_T - K, & \text{si } S_T \geq K \end{cases} = \max\{S_T - K, 0\}.$$

En relació amb els models de tipus d'interès que presentarem més endavant, observem en aquest moment que contractes similars es poden aplicar a les taxes d'interès.

La clàssica fórmula de Black-Scholes és d'importància per a la fixació de preus dels derivats de tipus d'interès, ja que alguns dels models de tipus d'interès que considerarem es basaran en el moviment brownià geomètric.

3.3 Model de mercat i cartera

Siguin $r : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow (0, \infty)$ funcions acotades. Sigui $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un actiu sense risc amb preu donat per

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt, \quad A_0 = 1, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

és a dir,

$$A_t = A_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

on r_t és la taxa d'interès en el temps t.

Per a $t > 0$, sigui $(S_t)_{t\in[0,T]}$ el procés de preu definit per l'equació diferencial estocàstica

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{*}$$

és a dir, en forma integral:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu_u S_u du + \int_0^t \sigma_u S_u dB_u, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

on B_t és un moviment Brownià estàndard i σ_t indica la volatilitat de l'actiu.

Trobem la solució de l'equació diferencial estocàstica (*) utilitzant el que s'anomena mètode d'igualació de coeficients. Volem trobar una funció $f(t, x)$ tal que quan apliquem la fórmula d'Itô al procés $S_t = f(t, B_t)$ obtinguem l'equació (*). Aleshores, comparant els coeficients de la fórmula general

$$dS_t = f_t(t, S_t)dt + f_x(t, S_t)dB_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t)dt$$

amb els de (*) i posant $x = B_t$ obtenim el sistema

$$\begin{cases} \mu_t S_t = \mu_t f(t, x) = f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x), \\ \sigma_t S_t = \sigma_t f(t, x) = f_x(t, x). \end{cases}$$

De la segona equació obtenim

$$\sigma_t f(t, x) = \frac{df(t, x)}{dx} \Rightarrow \sigma_t dx = \frac{df(t, x)}{f(t, x)} \Rightarrow f(t, x) = g(t) \exp\left(\int_0^t \sigma_u dx\right)$$

per a alguna funció $g(t)$. Subsituint a la primera equació obtenim

$$\mu_t g(t) \exp\left(\int_0^t \sigma_u dx\right) = \mu_t f(t, x) = g'(t) \exp\left(\int_0^t \sigma_u dx\right) + \frac{1}{2} g(t) \sigma_t^2 \exp\left(\int_0^t \sigma_u dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) g(t) \exp(\sigma_u dx) = g'(t) \exp(\sigma_u dx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(t) = \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) g(t)$$

que és una equació diferencial ordinària de primer ordre i la seva solució és:

$$g(t) = C \exp\left(- \int_0^t \left(\mu_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) du\right),$$

on C és una constant. Per tant, substituint a l'expressió de $f(t,x)$ trobada i posant $x = B_t$ tenim

$$S_t = f(t, B_t) = C \exp\left(\int_0^t \sigma_u dB_u - \int_0^t \left(\mu_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) du\right).$$

La constant ha de ser $C = S_0$, perquè quan $t = 0 \quad S_t = S_0$. Per tant, la solució és

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_u dB_u + \int_0^t \left(\mu_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) du\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Una *estratègia* es defineix com un procés $(\varsigma_t, \eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ adaptat a la filtració natural $\mathcal{F}_t$ del moviment Brownià. Les components ς_t i η_t són el nombre d'unitats d'inversió a la cartera en el temps t d'un actiu sense risc $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ i d'un actiu amb risc $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, respectivament.

El valor de la cartera V_t al temps t ve donat per

$$V_t = \varsigma_t A_t + \eta_t S_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.1}$$

i la cartera V_t és *autofinançada* si

$$dV_t = \varsigma_t dA_t + \eta_t dS_t. \tag{3.2}$$

En una cartera autofinançada totes les operacions es financien amb la venda o la compra d'actius de la cartera.

En el moldel de Black-Sholes estàndard és possible determinar l'estratègia de cobertura per a la cartera d'opcions europees. Per fer-ho, primer, notem que la condició d'autofinançament (3.2) implica que

$$\begin{aligned} dV_t &= \varsigma_t dA_t + \eta_t dS_t \\ &\overset{(1)}{=} r_t \varsigma_t A_t dt + \mu_t \eta_t S_t dt + \sigma_t \eta_t S_t dB_t \\ &\overset{(2)}{=} r_t V_t dt + (\mu_t - r_t)\eta_t S_t dt + \sigma_t \eta_t S_t dB_t, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$t \in \mathbb{R}_+$.

(1) Utilitzant $dA_t = A_t r_t dt$ i $dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t$.

(2) Utilitzant (3.1).

3.4 Mètode d'equacions en derivades parcials (EDP)

En aquesta secció volem trobar una expressió de la fórmula de Black-Scholes en derivades parcials per a les opcions europees de compra i de venda.

Comencem amb les opcions de compra. Assumim ara que el valor V_t de la cartera al temps t ve donat per la funció $C(t, S_t)$ com

$$V_t = C(t, S_t) = (S_t - K)^+, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Aplicant la fórmula d'Itô (2.3) i $S_t = S_0 + \int_0^t \mu_u S_u du + \int_0^t \sigma_u S_u dB_u$ obtenim

$$dC(t,S_t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\mu_t S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\sigma_t^2 S_t^2\right)(t,S_t)dt + S_t\sigma_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)dB_t. \tag{3.4}$$

Per tant, identificant els termes de dB_t i de dt en (3.3) i (3.4) respectivament tenim

$$\begin{cases} r_t C(t,S_t) = \left(\dfrac{\partial C}{\partial t} + r_t S_t \dfrac{\partial C}{\partial x} + \dfrac{1}{2}S_t^2\sigma_t^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)(t,S_t), \\ \eta_t S_t \sigma_t dB_t = S_t\sigma_t \dfrac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)dB_t; \end{cases}$$

on $\eta_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)$.

El procés $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és anomenat *Delta*, i mesura la sensibilitat de la cartera respecte a les variacions del preu de l'actiu en el moment t. Aquest procés deriva les equacions en derivades parcials de Black-Scholes.

Proposició 3.1. *La fórmula de Black-Sholes en derivades parcials pel preu d'opcions europees de compra (Call) és*

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + r_t x\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}x^2\sigma_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) = r_t C(t,x),$$

Sota la condició $C(t,x) = (x-K)^+$.

La solució d'aquesta EDP ve donada per la fórmula de Black-Scholes

$$C(t,x) = BS(K,x,\widetilde{\sigma}_t,\widetilde{r}_t,T-t) := x\Phi(d_1) - Ke^{-(T-t)\widetilde{r}_t}\Phi(d_2), \tag{3.5}$$

on

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy, \qquad x\in\mathbb{R}$$

denota la funció de distribució Gaussiana, i on hem definit

$$d_1 := \frac{log(x/K) + (\widetilde{r}_t + \widetilde{\sigma}_t^2/2)(T-t)}{\widetilde{\sigma}_t\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 := \frac{log(x/K) + (\widetilde{r}_t - \widetilde{\sigma}_t^2/2)(T-t)}{\widetilde{\sigma}_t\sqrt{T-t}} = d_1 - \widetilde{\sigma}_t\sqrt{T-t}$$

i

$$\widetilde{\sigma}_t^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T |\sigma(s)|^2 ds, \qquad \widetilde{r}_t = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds.$$

Trobem ara de manera semblant l'expressió de la fórmula de Black-Scholes en derivades parcials per a les opcions europees de venda. En aquest cas el valor V_t de la cartera al temps t ve donat per la funció $P(t,S_t)$ com

$$V_t = P(t,S_t) = (K-S_t)^+, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

De la mateixa manera que amb les opcions de compra obtenim la següent proposició.

Proposició 3.2. *La fórmula de Black-Sholes en derivades parcials pel preu d'opcions europees de venda (Put) és*

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + r_t x \frac{\partial C}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}x^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) = r_t C(t,x),$$

Sota la condició $P(t,x) = (K-x)^+$.

La solució d'aquesta EDP ve donada per la fórmula de Black-Scholes

$$P(t,x) = BS(K, x, \widetilde{\sigma}_t, \widetilde{r}_t, T-t) := Ke^{-(T-t)\widetilde{r}_t}\Phi(-d_2) - x\Phi(-d_1),$$

on, com abans, $\Phi(x)$ és una funció de distribució Gaussiana i $d_1, d_2, \widetilde{\sigma}_t^2, \widetilde{r}_t$ són els definits anteriorment.

Podeu consultar els llibres [**Mik**] o [**Oks**] per a obtenir més detalls d'aquesta secció.

3.5 Mètode de martingala

En aquesta secció trobarem l'expressió dels preus de Black-Scholes usant martingales.

Definició 3.3. Un mercat es diu *sense arbitratge* si existeix (almenys) una probabilitat $\mathbb{Q}$ sota la qual el procés de preu amb descompte

$$\widetilde{S}_t := \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) S_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

és una martingala sota $\mathbb{Q}$.

Aquesta probabiltat $\mathbb{Q}$ normalment és anomenada *probabilitat neutral al risc* o mesura martingala. Quan la probabilitat neutral al risc és única, el mercat s'anomena *complet*. Nosaltres demostrarem que el model de Black-Sholes admet una única probabilitat neutral al rics, demostrant que el mercat és sense arbitratge i complet.

Sigui ara $(\psi_t)_{t\in[0,T]}$ definit com

$$\psi_t := \frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}, \qquad 0 \le t \le T,$$

i sigui $\mathbb{Q}$ la probabilitat definida per la densitat

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \psi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \psi_s^2 ds\right).$$

Pel Teorema de Girsanov sabem que

$$\widehat{B}_t := B_t + \int_0^t \psi_s ds, \qquad t \in [0,T],$$

és un moviment Brownià estàndard sobre $\mathbb{Q}$.

Siguin també

$$\widetilde{V}_t = V_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right), \quad \text{i} \quad \widetilde{S}_t = S_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right),$$

la cartera descomptada i l'actiu subjacent descomptat.

Lema 3.4. *Són equivalents:*

i) La cartera V_t és autofinançada.

ii) Tenim

$$\widetilde{V}_t = \widetilde{V}_0 + \int_0^t \sigma_u \eta_u \widetilde{S}_u d\widehat{B}_u, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.6}$$

iii) Tenim

$$V_t = V_0 \exp\left(\int_0^t r_u du\right) + \int_0^t \sigma_u \eta_u S_u \exp\left(\int_u^t r_s ds\right) d\widehat{B}_u, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.7}$$

Demostració. Primer, notem que (3.6) és clarament equivalent a (3.7). Ara, la condició d'autofinançament (3.2) mostra que

$$\begin{aligned} dV_t &= \varsigma_t dA_t + \eta_t dS_t = \varsigma_t A_t r_t dt + \eta_t r_t S_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\widehat{B}_t \\ &= r_t V_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\widehat{B}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

utilitzant que $dA_t = A_t r_t dt$, $dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t d\widehat{B}_t$ i $V_t = \varsigma_t A_t + \eta_t S_t$. Per tant,

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t &= d\left(\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) V_t\right) \\ &= -r_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) V_t dt + \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) dV_t \\ &= \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \sigma_t \eta_t S_t d\widehat{B}_t \\ &= \sigma_t \eta_t \widetilde{S}_t d\widehat{B}_t \\ &\Rightarrow \widetilde{V}_t = \widetilde{V}_0 + \int_0^t \sigma_u \eta_u \widetilde{S}_u d\widehat{B}_u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

és a dir, (3.7) es compleix.

Al revés, si (3.7) es satisfà tenim

$$\begin{aligned} dV_t &= d(A_t \widetilde{V}_t) = \widetilde{V}_t dA_t + A_t d\widetilde{V}_t = \widetilde{V}_t A_t r_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\widehat{B}_t = V_t r_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\widehat{B}_t \\ &= \zeta_t A_t r_t dt + \eta_t S_t r_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\widehat{B}_t = \zeta_t dA_t + \eta_t dS_t, \end{aligned}$$

utilitzant que $dA_t = A_t r_t dt$, $dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t d\widehat{B}_t$, $V_t = \varsigma_t A_t + \eta_t S_t = A_t \widetilde{V}_t$ i $d\widetilde{V}_t = \sigma_t \eta_t S_t d\widehat{B}_t$.

Per tant, la cartera és autofinançada.

■

En la següent proposició calcularem una estratègia de cobertura autofinançada que condueix a una variable aleatòria F arbitrària i de quadrat integrable que admet, previsiblement, una representació de la forma

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \xi_t d\widehat{B}_t, \tag{3.8}$$

on $(\xi_t)_{t \in [0,T]}$ és un procés adaptat de quadrat integrable.

Proposició 3.5. *Donada $F \in L^2(\Omega)$, siguin*

$$\eta_t = \frac{\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)}{\sigma_t S_t}\xi_t, \tag{3.9}$$

$$\varsigma_t = \frac{\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] - \eta_t S_t}{A_t}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.10}$$

Llavors, la cartera $(\eta_t, \varsigma_t)_{t\in[0,T]}$ és autofinançada, i si

$$V_t = \varsigma_t A_t + \eta_t S_t, \quad t \in [0,T] \tag{3.11}$$

tenim

$$V_t = \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t], \quad 0 \le t \le T. \tag{3.12}$$

En particular tenim $V_T = F$, és a dir, la cartera produeix una estratègia de cobertura que condueix a F, començant pel valor inicial

$$V_0 = \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\mathbb{E}[F].$$

Demostració. Aplicant (3.10) i (3.11) a $t = 0$ obtenim

$$\mathbb{E}[F]\exp\left(-\int_0^T r_u du\right) =_{(3.10)} \varsigma_0 A_0 + \eta_0 S_0 =_{(3.11)} V_0,$$

per tant, de (3.10) de nou, la definició (3.9) de η_t i (3.8), obtenim

$$\begin{aligned} V_t = \varsigma_t A_t + \eta_t S_t &=_{(3.10)} \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] \\ &=_{(3.8)} \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\left(\mathbb{E}[F] + \int_0^t \xi_u d\widehat{B}_u\right) \\ &= V_0 \exp\left(\int_0^t r_u du\right) + \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\int_0^t \xi_u d\widehat{B}_u \\ &= V_0 \exp\left(\int_0^t r_u du\right) + \int_0^t \eta_u \sigma_u S_u \exp\left(\int_u^t r_s ds\right) d\widehat{B}_u, \quad 0 \le t \le T, \end{aligned}$$

i pel lema anterior això implica que la cartera $(\eta_t, S_t)_{t\in[0,T]}$ és autofinançada.

■

La proposició anterior mostra que sempre hi ha una estratègia de cobertura a partir de

$$V_0 = \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\mathbb{E}[F].$$

A més, hi ha una estratègia de cobertura que condueix a

$$\widetilde{V}_T = F\exp\left(-\int_0^T r_u du\right),$$

llavors, per (3.6), $(\widetilde{V}_t)_{t\in[0,T]}$ és necessàriament una martingala amb

$$\widetilde{V}_t = \mathbb{E}[\widetilde{V}_T|\mathcal{F}_t] = \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t], \qquad 0 \leq t \leq T,$$

i valor inicial

$$\widetilde{V}_0 = \mathbb{E}[\widetilde{V}_T] = \mathbb{E}[F]\exp\left(-\int_0^T r_u du\right).$$

A la pràctica, el problema de cobertura es pot reduir ara a la construcció del procés $(\xi_t)_{t\in[0,T]}$ que apareix en (3.8). Aquesta construcció, anomenada *cobertura Delta*, es pot realitzar aplicant la fórmula d'Itô i la propietat de Markov.

Considerem el semi-grup $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t\leq T}$ (no homogèni) associat a $(S_t)_{t\in[0,T]}$ i definit per

$$P_{s,t}f(S_s) = \mathbb{E}[f(S_t)|S_s] = \mathbb{E}[f(S_t)|\mathcal{F}_s], \qquad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

que actua sobre funcions $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n)$, amb

$$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}, \qquad 0 \leq s \leq t \leq u \leq T.$$

Notem que $(P_{t,T}f(S_t))_{t\in[0,T]}$ és una $\mathcal{F}_t$-martingala, és a dir:

$$\mathbb{E}[P_{t,T}f(S_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(S_T)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(S_T)|\mathcal{F}_s] = P_{s,T}(S_s), \tag{3.13}$$

$0 \leq s \leq t \leq T$. El següent lema ens permet construir el procés $(\xi_t)_{t\in[0,T]}$ en el cas que la recompensa F és de la forma $F = \phi(S_T)$ per a alguna funció ϕ.

Lema 3.6. *Sigui $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^n)$. La representació previsible*

$$\phi(S_T) = \mathbb{E}[\phi(S_T)] + \int_0^T \xi_t d\widehat{B}_t \tag{3.14}$$

ve donada per

$$\xi_t = \sigma_t \frac{\partial}{\partial x}(P_{t,T}\phi)(S_t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.15}$$

Demostració. De $P_{t,T}\phi \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$, podem aplicar la fórmula d'Itô (2.2) (pàg. 17) al procés

$$t \longrightarrow P_{t,T}\phi(S_t) = \mathbb{E}[\phi(S_T)|\mathcal{F}_t],$$

que és una martingala per (3.13).

Del fet que el terme de variació finita en la fórmula d'Itô desapareix quan $(P_{t,T}\phi(S_t))_{t\in[0,T]}$ és una martingala, obtenim:

$$P_{t,T}\phi(S_t) = P_{0,T}\phi(S_0) + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial}{\partial x}(P_{s,T}\phi)(S_s)d\widehat{B}_s, \quad t \in [0,T], \tag{3.16}$$

amb $P_{0,T}\phi(S_0) = \mathbb{E}[\phi(S_T)]$. Deixant $t = T$, obtenim (3.15) per la unicitat de la representació previsible (3.14) de $F = \phi(S_T)$.

■

Sigui ara $(S^x_{t,s})_{s\in[t,\infty)}$ la solució de l'equació diferencial estocàstica

$$\frac{dS^x_{t,s}}{S^x_{t,s}} = r_s ds + \sigma_s d\widehat{B}_s, \quad s \in [t,\infty),$$

amb condició inicial $S_{t,t} = x \in (0,\infty)$. El valor V_t de la cartera al temps $t \in [0,T]$ pot ser construït per (3.12) com

$$V_t = \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\mathbb{E}[\phi(S_T)|\mathcal{F}_t] = C(t,S_t),$$

on

$$C(t,x) = e^{-(T-t)\widetilde{r}_t}\mathbb{E}[\phi(S_T)|S_t = x] = e^{-(T-t)\widetilde{r}_t}P_{t,T}\phi(x) = e^{-(T-t)\widetilde{r}_t}\mathbb{E}[\phi(S^s_{t,T})],$$

$0 \le t \le T$, de la relació $\mathbb{E}[f(X,Y)|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[f(X,y)]_{y=Y}$ si X, Y són independents i Y és $\mathcal{F}$-mesurable. De nou, del fet que el terme de variació finita desapareix en (3.16) recuperem el fet que $C(t,x)$ resol l'EDP de Black-Scholes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}(t,x) + \dfrac{1}{2}x^2\sigma^2(t)\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) + xr(t)\dfrac{\partial C}{\partial x} = r(t)C(t,x), \\ C(T,x) = \phi(x). \end{cases}$$

En el cas d'opcions Europees amb funció de rendibilitat $\phi(x) = (x-K)^+$ recuperem la relació (3.5), és a dir,

$$C(t,x) = BS(K,x,\widetilde{\sigma}_t,\widetilde{r}_t,T-t),$$

com a conseqüència de (3.12) i del següent lema.

Lema 3.7. *Sigui X una variable aleatòria Gaussiana centrada amb variància v^2. Tenim*

$$\mathbb{E}[(e^{m+X}-K)^+] = \Phi(v + (m-\log K)/v) - K\Phi((m-\log K)/v).$$

Demostració. Tenim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(e^{m+X}-K)^+] &= \int_{-\infty}^{\infty}(e^{m+x}-K)^+ e^{-\frac{x^2}{2v^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} \\
&= \int_{-m+\log K}^{\infty}(e^{m+x}-K)e^{-\frac{x^2}{2v^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} \\
&= e^m\int_{-m+\log K}^{\infty}e^{x-\frac{x^2}{2v^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} - K\int_{-m+\log K}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2v^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} \\
&= e^{m+\frac{v^2}{2}}\int_{-m+\log K}^{\infty}e^{-\frac{(v^2-x)^2}{2v^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} - K\int_{(-m+\log K)/v}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{m+\frac{v^2}{2}}\int_{-v^2-m+\log K}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2v^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} - K\Phi((m-\log K)/v) \\
&= e^{m+\frac{v^2}{2}}\Phi(v+(m-\log K)/v) - K\Phi((m-\log K)/v).
\end{aligned}$$

on Φ és la funció de distribució Gaussiana.

∎

Capítol 4

Models de tipus d'interès a curt termini

Els models de tipus d'interès s'utilitzen principalment per a obtenir el preu i la cobertura de bons i opcions sobre bons. Aquest capítol és una breu introducció a alguns models comuns de tipus d'interès a curt termini. En el proper capítol utilitzarem principalment els models de reversió a la mitjana de Vasicek i de Cox-Ingersoll-Ross per a calcular el preu dels bons cupó zero, ja que permeten càlculs explícits.

4.1 Models amb reversió a la mitjana

Els tipus d'interès es comporten de manera diferent als preus de les accions i requereixen el desenvolupament de models específics per adonar-nos de les propietats com ara positivitat, acotació, i tornar a l'equilibri.

Els models amb reversió a la mitjana estan formats per a processos amb reversió a la mitjana. Aquests processos tendeixen a canviar el seu comportament de creixement o decreixement quan assoleixen els extrems, és a dir, no s'allunyen mai de la mitjana.

Vasicek (1977) va introduir el primer model per a capturar la propietat de reversió a la mitjana dels tipus d'interès, una propietat que no té el moviment Brownià geomètric. En el model de Vasicek, que es basa en el procés d'Ornstein-Uhlenbeck, el procés del tipus d'interès a curt termini $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ resol l'equació

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma dB_t, \tag{4.1}$$

on $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un moviment Brownià estàndard, β és la velocitat de l'ajust, α és la mitjana a llarg termini i σ és la volatilitat del procés. El factor $\beta(\alpha - r_t)$ asegura la propietat de reversió a la mitjana del tipus d'interès cap al valor α a llarg termini, amb velocitat d'ajust regit pel paràmetre estríctament positiu β. Aquest model té la interessant propietat de ser estadísticament estacionari en el temps, és a dir, la llei de $r_t - r_s$ depèn només de la diferència $t - s$, però, el seu inconvenient és permetre valors negatius de r_t.

Observem que aquesta equació diferencial estocàstica compleix les hipòtesis del Teorema d'Itô, 2.15 (pàg. 19), per tant, té una única solució. Resolem l'equació (4.1) per a trobar la taxa d'interès a curt termini r_t.

Observem que si definim $X_t := r_t - \alpha$, X_t és una solució de l'equació diferencial estocàstica

$$dX_t = -\beta X_t dt + \alpha dB_t.$$

Això ens indica que X_t és un procés d'Ornstein-Uhlenbeck (estudiat a l'apartat 2.5.2). Per tant, podem escriure

$$X_t = x_0 e^{-\beta t} + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dB_s.$$

Amb això deduïm que r_t es pot escriure de la forma

$$r_t = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dB_s,$$

i que r_t segueix una llei normal amb mitjana $\mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t})$ i variància $Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$.

D'aquestes propietats tenim que $P(r_t < 0) > 0$, però aquesta probabilitat sempre és molt petita. Observem també que quan t tendeix a l'infinit, r_t convergeix en llei a una variable aleatòria gaussiana amb mitjana α i variància $\frac{\sigma^2}{2\beta}$.

El model de **Cox-Ingersoll-Ross** (CIR) (1985) aporta una solució al problema de la manca de positivitat trobat en el model de Vasicek, proposant l'equació no lineal

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dB_t,$$

on, com en el model de Vasicek, $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ és un moviment Brownià estàndard, β és la velocitat de l'ajust, α és la mitjana a llarg termini i σ és la volatilitat del procés. El factor $\beta(\alpha - r_t)$ asegura la propietat de reversió a la mitjana del tipus d'interès cap al valor α a llarg termini, amb velocitat d'ajust regit pel paràmetre estríctament positiu β. El factor $\sigma\sqrt{r_t}$ evita la possibilitat de tipus d'interès negatius per a tots els valors de β i α positius. Un tipus d'interès igual a 0 també queda exclòs si es compleix la condició $2\alpha\beta \geq \sigma^2$. Com a conseqüència de tot això, quan el tipus d'interès s'apropa a 0 el factor $\beta(\alpha - r_t)$ empeny el tipus d'interès cap a l'equilibri.

Observem que en aquest cas l'equació diferencial estocàstica no compleix les hipòtesis del Teorema d'Itô, 2.15, ja que la funció arrel quadrada només es defineix en $\mathbb{R}^+$ i no és Lipschitz. No obstant això, des de la propietat Hölder de la funció arrel quadrada es pot demostrar el següent resultat.

Teorema 4.1. *Sigui $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un moviment Brownià estàndard. Per a qualsevol nombre real $x \geq 0$ existeix un únic procés $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ adaptat satisfent $X_0 = x$ i*

$$dX_t = \beta(\alpha - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t} dB_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

DEMOSTRACIÓ. Podeu trobar una prova d'aquest resultat al llibre [**Ike**, pàg. 221].

Altres models clàssics de reversió a la mitjana són el model **Courtadon** (1982)

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma r_t dB_t$$

on α, β, σ són no negatius, i el model **exponencial de Vasicek**

$$dr_t = r_t(\eta - a \log r_t)dt + \sigma r_t dB_t,$$

on a, η, σ són no negatius.

Més recentment, s'han proposat altres models que preserven la positivitat de les taxes d'interès, com l'ús d'equacions diferencials estocàstiques en varietats.

4.2 Models d'elasticitat constant de la variància (ECV)

Els models d'elasticitat constant de la variància estan dissenyats per a prendre volatilitats no constants que poden variar com a potència de l'actiu subjacent.

El model de **Marsh-Rosenfeld** (1983)

$$dr_t = \left(\beta r_t^{-(1-\gamma)} + \alpha r_t\right) dt + \sigma r_t^{\gamma/2} dB_t$$

on $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$ són constants no negatives, cobreix la major part dels models d'ECV.

En particular, per a $\beta = 0$ tenim el model d'ECV estàndard

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t^{\gamma/2} dB_t,$$

i si $\gamma = 2$ obtenim el model Dothan

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dB_t.$$

4.3 Models dependents del temps

Molts dels models anomenats anteriorment admeten extensions dependents del temps. L'exemple més elemental és el model **Ho-Lee**

$$dr_t = \theta(t) dt + \sigma dB_t,$$

on $\theta(t)$ és una funció determinista en el temps.

El model **Hull-White**

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)) dt + \sigma(t) dB_t$$

és una extensió dependent del temps del model de Vasicek. El model de Cox-Ingersoll-Ross també admet una extensió dependent del temps similar.

D'altra banda, els models dependents del temps es poden utilitzar per ajustar una corba inicial de taxes instantànies amb absència d'arbitratge.

La classe dels models de tipus d'interès a curt termini admet una sèrie de generalitzacions, entre les quals hi ha la classe de models afins de la forma

$$dr_t = (\eta(t) + \lambda(t) r_t) dt + \sqrt{\delta(t) + \gamma(t) r_t} dB_t \tag{4.2}$$

que tenen propietats particulars pel que fa als preus de bons (ho veurem al següent capítol).

Capítol 5

Valoració dels bons cupó zero

En aquest capítol descriurem les valoracions de bons bàsiques sota la hipòtesi d'absència d'oportunitats d'arbitratge. Els càlculs explícits es realitzen amb el model de Vasicek i amb el model de Cox-Ingersoll-Ross, utilitzant tant els enfocaments probabilístics com les equacions en derivades parcials.

5.1 Definicions i propietats bàsiques

Els *bons* són instruments financers de deute utilitzats per entitats privades o per entitats governamentals per a finançar-se, per tant, els bons són una de les formes de materialitzar-se els títols de deute de renda fixa o variable. Aquests títols solen ser negociats en algun mercat o borsa de valors. L'emisor es compromet a tornar el capital principal juntament amb els interessos, també anomenats cupó. Hi ha diferents tipus de bons. En aquest treball estudiarem els *bons cupó zero*, que són aquells en els què no es paguen interessos periòdics, sinó que es paguen íntegrament en el moment que s'amortitza, és a dir, quan l'import del bo és retornat. Així, podem dir que un bo cupó zero és un contracte de preu $P(t,T)$ a temps $t < T$ per a lliurar $P(T,T) = 1$ al temps T. El càlcul del preu d'arbitratge $P(t,T)$ d'un bo cupó zero basat en un procés de tipus d'interès a curt termini subjacent $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és una qüestió fonamental i important en el modelatge del tipus d'interès.

Podem distingir tres situacions diferents:

a) La taxa a curt és una constant *determinista* $r > 0$.

   En aquest cas, $P(t,T)$ ha de satisfer l'equació

$$e^{r(T-t)}P(t,T) = P(T,T) = 1,$$

   el que condueix a

$$P(t,T) = e^{-r(T-t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

b) La taxa a curt és una funció que depèn del temps i *determinista* $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

   En aquest cas, un argument similar a l'anterior mostra que

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r_s ds}, \quad 0 \le t \le T. \tag{5.1}$$

c) La taxa a curt és un procés *estocàstic* $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

   En aquest cas, la fórmula (5.1) ja no té sentit, perquè el preu $P(t,T)$, està fixat en el temps t, pot dependre únicament de la informació coneguda fins al moment t. Això està en contradicció amb (5.1) en què $P(t,T)$ depèn dels valors futurs de r_s per a $s \in [t,T]$.

A la resta d'aquest capítol ens centrem en el cas estocàstic c). El preu del bo $P(t,T)$ seguirà els mateixos passos que els utilitzats anteriorment en la fixació de preus de Black-Scholes.

5.2 Absència d'arbitratge i propietat de Markov

Tenint en compte l'experiència prèvia amb la fixació de preus de Black-Scholes en la Proposició 3.5, sembla natural escriure $P(t,T)$ com una esperança condicionada sota una probabilitat neutral al risc. D'altra banda i pel que fa al punt c) anterior, l'ús de l'esperança condicionada sembla natural en aquest context, ja que pot ajudar-nos a excloure la informació futura passat el temps t que conté (5.1). Per tant diem que el preu ve donat per

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \tag{5.2}$$

sota alguna probabilitat neutral al risc $\mathbb{Q}$ encara per determinar. Notem que l'expressió (5.2) és la millor estimació possible de $e^{-\int_t^T r_s ds}$ donada la informació coneguda fins al moment t.

Assumirem a partir d'ara que el procés subjacent de la taxa a curt és solució de l'equació diferencial estocàstica

$$dr_t = \mu(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)dB_t, \tag{5.3}$$

on $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ és un moviment Brownià sota $\mathbb{P}$. Recordem que, per exemple, en el model de Vasicek tenim

$$\mu(t,r_t) = a - br_t \quad \text{i} \quad \sigma(t,r_t) = \sigma.$$

Considerem la probabilitat $\mathbb{Q}$ equivalent a $\mathbb{P}$ donada per la densitat

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\int_0^\infty K_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |K_s|^2 ds},$$

on $(K_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ és un procés adaptat i suficientment integrable. Pel Teorema de Girsanov sabem que

$$\widehat{B}_t := B_t + \int_0^t K_s ds$$

és un moviment Brownià estàndard sota $\mathbb{Q}$, per tant (5.3) pot ser reescrit com

$$dr_t = \widetilde{\mu}(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)d\widehat{B}_t$$

on

$$\widetilde{\mu}(t,r_t) := \mu(t,r_t) - \sigma(t,r_t)K_t.$$

El procés K_t és anomenat el preu de mercat del risc i ha de ser especificat generalment a través de l'estimació estadística basada en dades de mercat. Assumirem, per a simplificar, que $K_t = 0$, és a dir, suposarem que $\mathbb{P}$ és la probabilitat neutral al risc utilitzada pel mercat.

La propietat de Markov afirma que el futur després del temps t d'un procés de Markov $(X_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ només depèn del seu estat actual t i no de tota la història del procés fins al temps t. Es pot representar de la següent manera utilitzant esperançes condicionades:

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1},\dots,X_{t_n})|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_{t_1},\dots,X_{t_n})|X_t]$$

per a tots els temps $t_1,\dots,t_n$ més grans que t i la funció f suficientment integrable en $\mathbb{R}^n$. Usarem la següent propietat fonamental

Propietat 5.1. *Totes les solucions de les equacions diferencials estocàstiques, com (5.3), tenen la propietat de Markov.*

Com a conseqüència, el preu d'arbitratge $P(t,T)$ satisfà

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\middle|r_t\right],$$

i només depèn de r_t, en lloc de dependre de tota la informació disponible a $\mathcal{F}_t$ fins al moment t. Com a tal, esdevé una funció $F(t,r_t)$ de r_t:

$$P(t,T) = F(t,r_t),$$

el que significa que el problema dels preus ara es pot formular com una recerca de la funció $F(t,r_t)$.

5.3 Absència d'arbitratge i propietat de martingala

El nostre objectiu és ara aplicar càlculs d'Itô a $F(t,r_t) = P(t,T)$ per tal d'obtenir unes equacions en derivades parcials satisfetes per $F(t,x)$. De la fórmula d'Itô (2.3) (pàg. 17) tenim

$$\begin{aligned}
d\left(e^{-\int_0^t r_s ds}P(t,T)\right) &= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds}P(t,T)dt + e^{-\int_0^t r_s ds}dP(t,T)\\
&= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds}F(t,r_t)dt + e^{-\int_0^t r_s ds}dF(t,r_t)\\
&= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds}F(t,r_t)dt + e^{-\int_0^t r_s ds}\\
&\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,r_t)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,r_t)\sigma(t,r_t)d\widehat{B}_t + \frac{\partial F}{\partial x}(t,r_t)\widetilde{\mu}(t,r_t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r_t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,r_t)dt\right)\\
&= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds}F(t,r_t)dt + e^{-\int_0^t r_s ds}\frac{\partial F}{\partial x}(t,r_t)\left(\widetilde{\mu}(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)d\widehat{B}_t\right)\\
&+ e^{-\int_0^t r_s ds}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(t,r_t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,r_t)dt + \frac{\partial F}{\partial t}(t,r_t)dt\right)\\
&= e^{-\int_0^t r_s ds}\sigma(t,r_t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,r_t)d\widehat{B}_t + e^{-\int_0^t r_s ds}\\
&\cdot\left(-r_t F(t,r_t) + \widetilde{\mu}(t,r_t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r_t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,r_t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,r_t)\right)dt.
\end{aligned}$$

Ara, observem que tenim

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^t r_s ds} P(t,T) &= e^{-\int_0^t r_s ds}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^t r_s ds} e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned} \tag{5.4}$$

per tant,

$$t \longrightarrow e^{-\int_0^t r_s ds} P(t,T)$$

és una martingala, ja que per a qualsevol $0 < u < t$ tenim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^t r_s ds} P(t,T) \middle| \mathcal{F}_u \right] &=_{(5.4)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \middle| \mathcal{F}_u \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_u \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^u r_s ds} e^{-\int_u^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_u \right] \\ &= e^{-\int_0^u r_s ds}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_u^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_u \right] \\ &= e^{-\int_0^u r_s ds} P(u,t). \end{aligned}$$

Com a conseqüència, l'expressió anterior $d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t,T) \right)$ només ha de contenir termes amb $d\widehat{B}_t$, el que significa que tots els termes de dt haurien de desaparèixer. Això ens condueix a la identitat

$$-r_t F(t,r_t) + \widetilde{\mu}(t,r_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t,r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r_t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,r_t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,r_t) = 0,$$

que pot ser reescrita com en la següent proposició.

Proposició 5.2. *La fixació dels preus dels bons amb equacions en derivades parcials (EDP) per a $P(t,T) = F(t,r_t)$ s'escriu, posant $r_t = x$, com*

$$-xF(t,x) + \widetilde{\mu}(t,x) \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 0, \tag{5.5}$$

sota la condició

$$F(T,x) = 1. \tag{5.6}$$

La condició (5.6) és deguda al fet que $P(T,T) = 1$.

5.4 Mètode probabilístic per a resoldre la EDP

El nostre objectiu ara és resoldre l'equació en derivades parcials (EDP) (5.5) per càlcul directe de l'esperança condicionada

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

en el model de Vasicek i en el model de Cox-Ingersoll-Ross.

Comencem amb el model de Vasicek, on el procés de la taxa a curt és solució de l'equació

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma dB_t,$$

i el preu de risc del mercat és $K_t = 0$. Recordem que tenim la solució explícita

$$r_t = r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s,$$

per tant, anomenant $u \vee t = max(u, t)$, i usant el Teorema de Fubini, el fet que les integrals estocàstiques són variables aleatòries Gaussianes (Proposició 2.6, pàg. 14), la funció característica gaussiana i les propietats de l'esperança condicionada, tenim

$$\begin{aligned}
P(t,T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}) + \sigma \int_0^s e^{-b(s-u)} dB_u) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}))ds} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma \int_t^T \int_0^s e^{-b(s-u)} dB_u ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}))ds} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma \int_0^T \int_{u\vee t}^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}))ds} e^{-\sigma \int_0^t \int_{u\vee t}^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma \int_t^T \int_{u\vee t}^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}))ds} e^{-\sigma \int_0^t \int_t^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma \int_t^T \int_u^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}))ds} e^{-\sigma \int_0^t \int_t^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma \int_t^T \int_u^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \right] \\
&= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}))ds} e^{-\sigma \int_0^t \int_t^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} e^{\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T \left(\int_u^T e^{-b(s-u)} ds \right)^2 du} \\
&= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{bs}))ds} e^{-\frac{\sigma}{b}\left(1-e^{-b(T-t)}\right) \int_0^t e^{-b(t-u)} dB_u} e^{\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T e^{2bu} \left(\frac{e^{-bu} - e^{-bT}}{b} \right)^2 du} \\
&= e^{-\frac{r_t}{b}(1-e^{-b(T-t)}) + \frac{1}{b}(1-e^{-b(T-t)})(r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1-e^{-bt}))} \\
&\cdot e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{-bs}))ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T e^{2bu} \left(\frac{e^{-bu} - e^{-bT}}{b} \right)^2 du} \\
&= e^{C(T-t) r_t + A(T-t)},
\end{aligned}$$

on

$$C(T-t) = -\frac{1}{b}\left(1 - e^{-b(T-t)}\right)$$

i

$$\begin{aligned}
A(T-t) &= \frac{1}{b}\left(1-e^{-b(T-t)}\right)\left(r_0 e^{-bt}+\frac{a}{b}(1-e^{-bt})\right)-\int_t^T\left(r_0e^{-bs}+\frac{a}{b}(1-e^{-bs})\right)ds \\
&+\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T e^{2bu}\left(\frac{e^{-bu}-e^{-bT}}{b}\right)^2 du \\
&= \frac{1}{b}\left(1-e^{-b(T-t)}\right)\left(r_0 e^{-bt}+\frac{a}{b}(1-e^{-bt})\right) \\
&- \frac{r_0}{b}\left(e^{-bt}-e^{-bT}\right)-\frac{a}{b}(T-t)+\frac{a}{b^2}\left(e^{-bt}-e^{-bT}\right) \\
&+\frac{\sigma^2}{2b^2}\int_t^T\left(1+e^{-2b(T-u)}-2e^{-b(T-u)}\right)du \\
&= \frac{a}{b^2}\left(1-e^{-b(T-t)}\right)\left(1-e^{-bt}\right)-\frac{a}{b}(T-t)+\frac{a}{b^2}\left(e^{-bt}-e^{-bT}\right) \\
&+\frac{\sigma^2}{2b^2}(T-t)+\frac{\sigma^2}{2b^2}e^{-2bT}\int_t^T e^{2bu}du-\frac{\sigma^2}{b^2}e^{-bT}\int_t^T e^{bu}du \\
&= \frac{a}{b^2}\left(1-e^{-b(T-t)}\right)+\frac{\sigma^2-2ab}{2b^2}(T-t) \\
&+\frac{\sigma^2}{4b^3}\left(1-e^{-2b(T-t)}\right)-\frac{\sigma^2}{b^3}\left(1-e^{-b(T-t)}\right) \\
&= \frac{4ab-3\sigma^2}{4b^3}+\frac{\sigma^2-2ab}{2b^2}(T-t)+\frac{\sigma^2-ab}{b^3}e^{-b(T-t)}-\frac{\sigma^2}{4b^3}e^{-2b(T-t)}.
\end{aligned}$$

Ara feim el mateix amb el model de Cox-Ingersoll-Ross, on el procés de la taxa a curt és solució de l'equació

$$dr_t = (a-(b+\sigma\alpha)r_t)dt+\sigma\sqrt{r_t}d\widehat{B}_t, \tag{5.7}$$

on, sota la probabilitat $\mathbb{Q}$, el procés $(\widehat{B}_t)_{t\in[0,T]}$ és un moviment Brownià estàndard.

El preu d'un bo cupó zero amb venciment T en el temps $t=0$ és

$$P(0,T)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds}\right]=e^{-a\phi(T)-r_0\psi(T)},$$

on les funcions ϕ i ψ estan donades per les fórmules

$$\phi(t)=-\frac{2}{\sigma^2}\log\left(\frac{2\gamma^* e^{\frac{t(\gamma^*+b^*)}{2}}}{\gamma^*-b^*+e^{\gamma^* t}(\gamma^*+b^*)}\right)$$

i

$$\psi(t)=\frac{2(e^{\gamma^* t}-1)}{\gamma^*-b^*+e^{\gamma^* t}(\gamma^*+b^*)},$$

amb $b^*=b+\sigma\alpha$ i $\gamma^*=\sqrt{(b^*)^2+2\sigma^2}$.

El preu en el temps t està donat per

$$P(t,T)=e^{-a\phi(T-t)-r_t\psi(T-t)}.$$

Això és una conseqüència de la següent proposició:

Proposició 5.3. *Sigui r_t el procés solució de (5.7) amb condició inicial $r_0 = x$. Per a qualsevol λ i μ no negatius tenim*

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda r_t} e^{-\mu \int_0^t r_s ds}\right] = e^{-a\phi_{\lambda,\mu}(t) - x\psi_{\lambda,\mu}(t)},$$

on les funcions $\phi_{\lambda,\mu}(t)$ i $\psi_{\lambda,\mu}(t)$ són

$$\phi_{\lambda,\mu}(t) = -\frac{2}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\gamma e^{\frac{t(\gamma+b)}{2}}}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma+b)}\right)$$

i

$$\psi_{\lambda,\mu}(t) = \frac{\lambda(\gamma + b + e^{\gamma t}(\gamma - b)) + 2\mu(e^{\gamma t}-1)}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t}-1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma+b)},$$

amb $\gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2\mu}$.

Demostració. El fet que aquesta esperança es pot escriure com $e^{-a\phi(t) - x\psi(t)}$ és degut a la propietat d'additivitat del procés r_t en relació amb el paràmetre a i la condició inicial x (veure [**Ike**]).

Si, per a λ i μ fixats, considerem la funció $F(t,x)$ definida per

$$F(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda r_t} e^{-\mu \int_0^t r_s ds}\right] \tag{5.8}$$

és natural cercar F com a solució del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\sigma^2}{2} x \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) + (a - bx)\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) - \mu x F(t,x), \\ F(0,x) = e^{-\lambda x}. \end{cases}$$

De fet, si F satisfà aquestes equacions i té derivades acotades, es dedueix de la fórmula d'Itô que, per a qualsevol T, el procés $(M_t)_{t\in[0,T]}$ definit per

$$M_t = e^{-\mu \int_0^t r_s ds} F(T - t, r_t)$$

és una martingala i l'equació $\mathbb{E}[M_T] = M_0$ condueix a (5.8).

Si F es pot escriure com $e^{-a\phi(t) - x\psi(t)}$ i $\phi(0) = 0, \psi(0) = \lambda$, les equacions anteriors esdevenen

$$\begin{cases} -\psi'(t) = \dfrac{\sigma^2}{2}\psi^2(t) + b\psi(t) - \mu, \\ \phi'(t) = \psi(t); \end{cases}$$

Resolent aquestes dues equacions diferencials obtenim les expressions desitjades de ϕ i ψ.

■

Notem que, en general, tots els models de tipus d'interès a curt termini afins a la forma (4.2) (pàg. 35), incloent el model de Vasicek, produiran una fórmula de preus de bons de la forma

$$P(t,T) = e^{C(T-t)r_t + A(T-t)}.$$

Veure el llibre [**Bri**] per a més detalls.

5.5 Mètode analític per a resoldre la EDP

En aquesta secció suposem que el procés subjacent de la taxa a curt és solució del procés de Vasicek (5.3). Per tal de resoldre l'equació en derivades parcials (5.5) analíticament busquem una solució de la forma

$$F(t,x) = e^{A(T-t)+xC(T-t)}, \tag{5.9}$$

on A i C són funcions que es determinen sota les condicions $A(0) = 0$ i $C(0) = 0$.

Posant (5.9) dins l'equació en derivades parcials (5.5) s'obté el sistema d'equacions diferencials

$$\begin{cases} -A'(s) = 1 - aC(s) - \dfrac{\sigma^2}{2}C^2(s), \\ -C'(s) = bC(s) + 1. \end{cases}$$

Resolent-lo obtenim

$$A(s) = \frac{4ab - 3\sigma^2}{4b^3} + s\frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2} + \frac{\sigma^2 - ab}{b^3}e^{-bs} - \frac{\sigma^2}{4b^3}e^{-2bs}$$

i

$$C(s) = -\frac{1}{b}\left(1 - e^{-bs}\right).$$

Com a verificació podem comprovar fàcilment que $C(s)$ i $A(s)$ satisfan

$$bC(s) + 1 = e^{-bs} = -C'(s),$$

i

$$\begin{aligned} aC(s) + \frac{\sigma^2 C^2(s)}{2} - 1 &= -\frac{a}{b}\left(1 - e^{-bs}\right) + \frac{\sigma^2}{2b^2}\left(1 - e^{-bs}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2} - \frac{\sigma^2 - ab}{b^2}e^{-bs} + \frac{\sigma^2}{2b^2}e^{-2bs} \\ &= A'(s). \end{aligned}$$

■

Bibliografia

[**Bou**] N. Bouleau : *Processos Stochastiques et Applications.* Hermann, Paris, 1988.

[**Bri**] Damiano Bringo and Fabio Mercurio : *Interest rate models-theory and practice.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[**Dac1**] D. Dacunha-Castelle and M. Dulfo : *Probability and statistics, Volume 1.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[**Dac2**] D. Dacunha-Castelle and M. Dulfo : *Probability and statistics, Volume 2.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[**Gik**] Gikhman and A.V. Skorohod : *Intoduction to the theory of random processes.* Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc. W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa., 1969.

[**Hull**] John C. Hull : *Inttrocucción a los mercados de futuros y opciones.* Prentice Hall, 2002.

[**Ike**] N. Ikeda and S. Wantanabe : *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North-Holland, Tokyo, 1981.

[**Kar**] I. Karatzas and S. E. Shreve : *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[**Lam**] D. Lamberton and B. Lapeyre : *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman & Hall/CRC, 2000.

[**Mik**] Thomas Mikosch : *Non-Life insurance mathematics: An intoduction with stochastic processes.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

[**Nef**] Salih N. Neftci : *An intoduction to the mathematics of financial derivatives.* Academic Press, 2000.

[**Oks**] Bernt Oksendal : *Stochastic differential equations: an introduction with aplications.* Springer-Verlag, 2007.

[**Pri**] Nicolas Privault : *An elementary introduction to stochastic interest rate modeling.* Advanced series on statiscal science & applied probability-Vol.12. World scientific, 2008.

[**Rin**] Luis Rincon : *Introduccion a las ecuaciones diferenciales estocasticas.* http://lya.fciencias.unam.mx/lars/pub/ecuaciones.pdf

[**Will**] David Williams : *Probability with martingales.* Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University, Cambridge, 1991.