Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

El Principio del Máximo de Pontryagin

Rubén Muñoz Ruz

Director: José M. Corcuera Valverde
Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística. UB
Barcelona, 24 de juny de 2014

Índice

ABSTRACT. The aim of this end of degree work is to analyze a few problems studied by the optimal control theory using the Pontryagin's maximum principle. It is divided into three distinct parts: in the first one we introduce the calculus of variations theory, in the second one we present the optimal control theory and the maximum principle and we show that this theory can be treated as an extension of calculus of variations; and, finally, in the last part we expose how the optimal control theory can be extended considering some randomness, that is to say, for cases involving stochastic processes.

RESUMEN. El objetivo de este trabajo final de grado es el analizar algunos de los problemas estudiados por la teoría del control óptimo mediante el principio del máximo de Pontryagin. Lo estructuramos en tres pares diferenciadas: en la primera introducimos la teoría del cálculo de variaciones; en la segunda presentamos la teoría del control óptimo y el principio del máximo y vemos que esta teoría se puede considerar como una extensión del cálculo variacional; y, finalmente, en la última parte exponemos cómo se puede extender la teoría del control óptimo considerando cierta aleatoriedad, es decir, para casos en que se involucran procesos estocásticos.

Introducción

Desde que en 2010 comenzara mis estudios universitarios en la facultad de matemáticas de la Universidad de Barcelona, las asignaturas que más he disfrutado y que más interesantes he encontrado han estado las de la rama de la matemática aplicada, tanto por la sinergia de todas las otras ramas de la matemática que requieren estos estudios como por el tipo de problemas con los que se suele trabajar, quizás más palpables y naturales que en otro tipo de materias. Es por ello que decidí que la investigación de mi proyecto final de carrera debía basarse en uno de los tantos problemas de la matemática aplicada.

En este trabajo, hemos intentado dar una introducción a la teoría del control óptimo de sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias, teoría que, principalmente, se basa en hallar una función $u(t)$ cumpliendo ciertas hipótesis de continuidad y que, dadas unas f_0, f, y una condiciones de contorno de $x(t)$, solucione el problema:

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt,$$

$$t.q.\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Este problema es abordable desde dos puntos de vista distintos: desde el enfoque del principio del máximo y desde el enfoque de la programación dinámica. Nosotros hemos optado por tomar el primer camino. Aunque antes de adentrarnos en él y con la finalidad de poder entender mejor el problema a estudiar, hemos comenzado fijando las bases del cálculo variacional, una teoría que se puede considerar como caso particular y, por tanto, más sencillo, que el control óptimo. Además, una vez analizado el principio del máximo para el caso determinista, hemos buscado ampliar nuestro punto de vista tratando, también, el caso estocástico en que $x(t)$ y $u(t)$ dejan de ser funciones deterministas y pasan a convertirse en procesos estocásticos.

Cabe destacar que hemos intentado ser lo más rigurosos posible demostrando la gran mayoría de resultados enunciados y dando una referencia donde poder seguir otros cuya demostración requiere más delicadeza y se escapa de nuestro alcance. Todo ello intentando complementar la teoría matemática con algunos ejemplos reales para ilustrar el funcionamiento de algunos de los resultados deducidos.

Hemos estructurado el trabajo en tres capítulos que sintetizamos a continuación:

- En el primer capítulo, se presenta la teoría del cálculo de variaciones, se plantea el problema que se intenta resolver y se proporcionan condiciones necesarias para que una función pueda ser solución, condiciones suficientes para que una función sea solución y condiciones que nos garantizarán la existencia de tales soluciones.

- En el segundo capítulo, se expone la teoría del control óptimo determinista, se plantea el problema que afrontamos, se introduce el principio del máximo con sus correspondientes condiciones suficientes y condiciones necesarias y, finalmente, se acaba viendo que la teoria del control óptimo engloba el cálculo de variaciones.

- En el tercer y último capítulo, se introducen algunos conceptos relacionados con el cálculo estocástico, se presenta la teoría del control óptimo para el caso estocástico, se plantea el problema al que se le intenta buscar solución y, finalmente, se proporciona el resultado homólogo para el caso estocástico de la condición suficiente que nos facilita el principio del máximo.

Por último, vale la pena destacar que en este trabajo se utilizan conceptos y resultados de varios campos de la matemática como pueden ser las ecuaciones diferenciales, los sistemas dinámicos, el análisis real, la teoria de probabilidades y, en menor medida, el cálculo estocástico. Por ello, se recomienda que, para poder seguir sin ninguna dificultad todo el hilo de la memoria, el lector esté bien formado en los campos de estudio mencionados.

Capítulo 1. Cálculo variacional

Algunos de los resultados más importantes del cálculo variacional clásico fueron establecidos durante el siglo XVIII por dos de los más grandes matemáticos de la historia, Leonhard Euler (Basilea, 1707 - San Petersburgo, 1783) y Joseph-Louis Lagrange (Turín, 1736 - París, 1813) y, desde entonces, éste ha sido uno de los principales temas de estudio de la matemática aplicada. Tanto es así que ha sido capaz de dar un punto de vista unificado a muchos de los problemas estudiados por la física y a algunos otros de la economía, entre otros campos. Y es, de hecho, el principal precursor de la teoría del control óptimo.

Se puede considerar que el motivo que inició el cálculo de variaciones fue el problema conocido como el de la curva braquistócrona (palabra griega que significa "el intervalo de tiempo más corto"), que dice lo siguiente: *"Dados dos puntos, A y B, en el plano bidimensional, el tiempo que necesite una bola para desplazarse sobre una curva que los una, y sobre la cual la única influencia que exista sea la de la fuerza de la gravedad, dependerá de la forma de esta curva. ¿Cuál sería la curva para la cual el tiempo que tarde la partícula en desplazarse de A hasta B fuese mínimo?"*. Johann Bernoulli (Basilea, 1667 - Basilea, 1748) fue el primer matemático que resolvió el problema y que dejó constancia de ello, en el año 1696. La curva demandada recibe el nombre de *cicloide* y se puede demostrar que el enigma se reduce a solucionar un problema típico de cálculo variacional de los que presentaremos en este capítulo.

Aunque es cierto que el cálculo variacional no deja de ser un caso especial de la teoría del control óptimo, es preferible comenzar presentando algunos de los aspectos más importantes del primer tema mencionado. No es otro el motivo que las dificultades que puede llegar a suponer la comprensión de un tema tan general como la teoría del control óptimo.

1.1 El problema más simple

Comenzaremos este capítulo presentando un problema típico del campo de la economía que nos servirá de ejemplo durante toda esta sección y nos mostrará el tipo de problemas para los que está destinada la teoría del cálculo variacional.

Ejemplo. Modelo de crecimiento de Ramsey

Consideremos una economía que varía a través del tiempo en que la tasa de producción $Y(t)$ y el capital $K(t)$ están relacionados mediante una función de producción $Y(t) = f(K(t))$. Supongamos, además, que:

$$f'(K) > 0 \ , \ f''(K) \leq 0,$$

es decir, que Y es una función estrictamente creciente y cóncava de K.

Sea, ahora, $C(t)$ la función que representa la tasa de consumo de nuestra economía y asumamos que ésta es igual a la tasa de producción menos la tasa de cambio de capital o inversión, $\dot{K}(t)$, es decir

$$C(t) = Y(t) - \dot{K}(t) \Longleftrightarrow \dot{K}(t) = f(K(t)) - C(t).$$

Sea, ahora, $U(C)$ una función que representa la utilidad de la economía dado un nivel de consumo fijo C, tal que:

$$U'(C) > 0 \ , \ U''(C) < 0,$$

es decir, U es una función estrictamente creciente y estrictamente cóncava de C. Además, supongamos que $\rho > 0$ actua como factor de descuento. Así, el rendimiento de la economía descrita vendrá dado por la siguiente integral:

$$\int_0^T U(C(t))e^{-\rho t}dt = \int_0^T U(f(K(t)) - \dot{K}(t))e^{-\rho t}dt.$$

Se plantea el problema de encontrar la función del capital $K(t)$ de tal manera que se satisfaga su ecuación diferencial indicada unas líneas más arriba, que vaya desde un estado inicial $K(0) = K_0$ a un estado final $K(T) = K_T$ con K_0 y K_T dos números reales prefijados y que, además, maximice la integral que acabamos de mencionar.

El ejemplo presentado es sólo un caso especial del siguiente problema, conocido como el problema más simple del cálculo variacional:

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

$$t.q. \ \ x(t_0) = x_0 \ , \ x(t_1) = x_1,$$

donde F es una función diferenciable de tres variables y t_0, t_1, x_0, x_1 son valores reales prefijados. Geométricamente, el problema es equivalente a encontrar una curva diferenciable que una los puntos (t_0, x_0) y (t_1, x_1) y que haga que la integral sea lo más grande posible.

En este caso, hemos considerado el problema en que el objetivo era maximizar la integral mencionada. Pero no es complicado observar que si en lugar de maximizarla buscamos minimizarla el problema es un caso particular del ya introducido considerando ahora $-F(t, x(t), \dot{x}(t))$ como función cuya integral queremos maximizar (por darse que $x(t)$ es un máximo de $\int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \Leftrightarrow x(t)$ es un mínimo de $-\int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} -F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$). Por tanto, las condiciones que deduzcamos para el primer caso se extienden al segundo con pequeñas modificaciones que iremos mencionando a lo largo del capítulo.

Procedamos ahora con el análisis teórico del problema. En primer lugar, analizaremos las condiciones que ha de cumplir la función que solucione nuestro problema, en caso de que exista tal función. Más adelante, en este mismo capítulo, impondremos ciertas hipótesis que nos garantizarán que las condiciones necesarias halladas con anterioridad sean también suficientes para que una función que las cumpla sea solución del problema. Y, finalmente, proporcionaremos un teorema que, bajo ciertas hipótesis, nos garantizará la existencia de una funció solución de nuestro problema.

1.2 Ecuación de Euler y condición de Legendre

Lema 1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[t_0, t_1]$ y supongamos que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\mu(t)dt = 0$ para toda función $\mu(t) \in C^2([t_0, t_1])$ que satisfaga $\mu(t_0) = \mu(t_1) = 0$. Entonces, $f(t) \equiv 0$ en todo el intervalo $[t_0, t_1]$.

Demostración. Supongamos que existe $s \in (t_0, t_1)$ tal que $f(s) > 0$. Por continuidad de f, debe existir un intervalo (α, β) con $s \in (\alpha, \beta)$ y con $(\alpha, \beta) \subset (t_0, t_1)$ en que $f(t) > 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Definamos, ahora, para cada $t \in [t_0, t_1]$, $\mu(t)$ de la siguiente manera:

$$\mu(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & t \notin (\alpha, \beta) \\ (t-\alpha)^3(\beta - t)^3 & t \in (\alpha, \beta) \end{array} \right. .$$

Como $t_0 \notin (\alpha, \beta)$ y $t_1 \notin (\alpha, \beta)$, tendremos que $\mu(t_0) = \mu(t_1) = 0$. Además, $\mu(t) \in C^2([t_0, t_1])$. Por tanto, por hipótesis, se tendría que cumplir que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\mu(t)dt = 0$. Veamos si es así. Como $f(t) > 0 \ \forall t \in (\alpha, \beta)$ y $\mu(t) > 0 \ \forall t \in (\alpha, \beta)$ por definición, entonces se dará que $f(t)\mu(t) > 0 \ \forall t \in (\alpha, \beta)$. Mientras que $f(t)\mu(t) = 0 \ \forall t \notin (\alpha, \beta)$, por definición de $\mu(t)$. Así, tendremos que:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\mu(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\mu(t)dt > 0,$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado la propiedad de monotonía de la integral. Finalmente, observamos que hemos obtenido que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\mu(t)dt > 0$, cosa que se contradice con la hipótesis de $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\mu(t)dt = 0$. Por tanto, no puede ser que exista tal $s \in (t_0, t_1)$ que haga cumplir que $f(s) > 0$. Así, tenemos que $f(t) \leq 0$ para todo $t \in (t_0, t_1)$.

Análogamente, desarrollamos el mismo razonamiento para la función $-f$ y acabamos obteniendo que $-f(t) \leq 0$ para todo $t \in (t_0, t_1)$, condición equivalente a que $f(t) \geq 0$ para todo $t \in (t_0, t_1)$.

Queda demostrado, entonces, que para todo $t \in (t_0, t_1)$ se tiene que dar que $f(t) \leq 0$ y $f(t) \geq 0$. Pero eso sólo puede ocurrir en el caso de que $f(t) = 0\ \forall t \in (t_0, t_1)$. Ahora, por continuidad de f, $f(t_0)$ y $f(t_1)$ también han de valer cero. Así, se concluye que $f(t) \equiv 0$ en el intervalo $[t_0, t_1]$. $\square$

Lema 2. Sea $f = f(x, y)$ una función continua y sea $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ también continua en la región $[a, b]$ x $[u, v]$, entonces

$$g(y) := \int_a^b f(x, y)dx,$$

es una función C^1 en el intervalo (u, v) con derivada

$$g'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f_y(x, y)dx.$$

Demostración. Ver el apéndice A.13 de *Variational Calculus with Elementary Convexity*, John L. Troutman.

Definición. Llamaremos función admisible a toda función $x(t)$ que sea de clase C^2 y que satisfaga las condiciones frontera (iniciales y finales) impuestas en cada problema.

Teorema 1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 de tres variables y definamos $J(x)$ de la siguiente manera:

$$J(x) := \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt,$$

donde $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 y $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Entonces, para que $x^* = x^*(t)$ haga máximo a $J(x)$ de entre todas la funciones admisibles con condiciones frontera $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \in \mathbb{R}$ dados por el problema, se ha de cumplir que $x^*(t)$ sea solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

Demostración. Supongamos que la función $x^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x^*(t)$, es una solución óptima al problema presentado, es decir, $J(x^*) \geq J(x)$ para toda función admisible $x = x(t)$. Sea, además, $\mu(t)$ una función C^2 cualquiera que satisfaga $\mu(t_0) = \mu(t_1) = 0$. Para cada número real α, definamos una nueva función $x(t)$ de la siguiente manera:

$$x(t) = x^*(t) + \alpha\mu(t).$$

Fijémonos en que si α es pequeño, en valor absoluto, la función $x(t)$ estará cerca de la función $x^*(t)$, por cuestiones de continuidad. Claramente, $x(t)$ es admisible para todo α, pues $x(t)$ es suma de funciones de clase C^2 y, además:

$$x(t_0) = x^*(t_0) + \alpha\mu(t_0) = x^*(t_0) = x_0,$$

$$x(t_1) = x^*(t_1) + \alpha\mu(t_1) = x^*(t_1) = x_1,$$

por ser la función $x^*(t)$ una función admisible y t_0, t_1 raíces de $\mu(t)$. Además, por ser $x^*(t)$ solución óptima del problema, tenemos que $J(x^*) \geq J(x^* + \alpha\mu)$ para todo α. Si fijamos la función $\mu(t)$, $J(x^* + \alpha\mu)$ se convierte en una función de una única variable, α. Definamos $I(\alpha) = J(x^* + \alpha\mu)$. Así,

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*(t) + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\dot{\mu}(t))dt.$$

Para $\alpha = 0$, $I(0) = J(x^*)$. Por tanto, por ser x^* solución óptima del problema, $I(\alpha) \leq I(0)$ $\forall\alpha$. Así, la función I tiene un máximo en $\alpha = 0$ y, por ser diferenciable, cumplirá $I'(0) = 0$. Desarrollemos,ahora, la expresión de $I'(\alpha)$. Lo haremos utilizando el lema 2 y teniendo en cuenta la hipótesis de que F es C^2:

$$I'(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F(t, x^*(t) + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\dot{\mu}(t))}{\partial x}\mu(t) + \frac{\partial F(t, x^*(t) + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\dot{\mu}(t))}{\partial \dot{x}}\dot{\mu}(t) \right) dt.$$

Y haciendo $\alpha = 0$:

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial x}\mu(t) + \frac{\partial F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial \dot{x}}\dot{\mu}(t) \right) dt.$$

Prescindiendo de parte de la notación, pero sin olvidar de qué variables depende cada función, lo expresamos como:

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\mu}(t) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial x}\mu(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\mu}(t)dt.$$

Integrando por partes el segundo sumando, obtenemos lo siguiente:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\mu}(t)dt = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \mu(t) \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \mu(t)dt.$$

Introduciendo la expresión anterior en el desarrollo de $I'(0)$, se obtiene que:

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial x}\mu(t)dt + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\mu(t)\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\mu(t)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mu(t)dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1}\mu(t_1) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_0}\mu(t_0).$$

Pero, como ya hemos dicho antes, $\mu(t_0) = \mu(t_1) = 0$. Por tanto, la expresión equivalente a $I'(0)$ se reduce a lo siguiente:

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right)\mu(t)dt = 0.$$

La función $\mu(t)$ es una función que hemos fijado anteriormente. Sin embargo, esta igualdad se mantiene para todas las funciones $\mu(t) \in C^2([t_0, t_1])$ que sean 0 en los puntos t_0 y t_1. Por tanto, por el lema 1, enunciado y demostrado justo antes de presentar este teorema, podemos concluir que, para todo $t \in [t_0, t_1]$, se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0. \quad \square$$

Nota 1. Hemos demostrado que, si buscamos maximizar $J(x)$, la solución ha de cumplir la condición indicada en el teorema 1. Pero, si en lugar de maximizar, buscasemos minimizar $J(x)$, la solución tendría que cumplir exactamente la misma ecuación. La demostración es totalmente análoga a la del teorema con excepción de que, en este caso, tendremos que $I(\alpha) \geq I(0)\ \forall\alpha$.

Nota 2. La ecuación diferencial definida en el teorema 1 se conoce comúnmente como ecuación de Euler debido a que fue el mismo Leonhard Euler quien, en 1744, dio por primera vez con ella.

Recuperemos el ejemplo introducido al inicio del capítulo y deduzcamos qué condiciones tiene que cumplir una función candidata a resolver el problema.

Ejemplo. Modelo de crecimiento de Ramsey

Consideremos el problema:

$$\max_{K(t)} \int_0^T U(f(K(t)) - \dot{(K)}(t))e^{-\rho t}dt,$$

$$t.q. \;\; K(0) = K_0 \;, \; K(T) = K_T.$$

Si hacemos $F(t, K, \dot{K}) = U(C)e^{-\rho t} = U(f(K) - \dot{K})e^{-\rho t}$, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = U'(C)f'(K)e^{-\rho t} \;, \; \frac{\partial F}{\partial \dot{K}} = U'(C)(-1)e^{-\rho t}.$$

Por tanto, la ecuación de Euler de este problema quedaría de la siguiente manera:

$$U'(C)f'(K)e^{-\rho t} + \frac{d}{dt}\left(U'(C)e^{-\rho t}\right) = 0.$$

Pero, desarrollando el segundo término:

$$\frac{d}{dt}\left(U'(C)e^{-\rho t}\right) = \left(\frac{d}{dt}(U'(C))\right)e^{-\rho t} + U'(C)(-\rho)e^{-\rho t}.$$

Y, a su vez:

$$\frac{d}{dt}(U'(C)) = U''(C)\dot{C} = U''(C)(f'(K)\dot{K} - \ddot{K}),$$

donde hemos utilizado la igualdad $C(t) = f(K(t)) - \dot{K}(t)$. Finalmente, sustituyendo regresivamente, obtenemos:

$$U'(C)f'(K)e^{-\rho t} + \frac{d}{dt}\left(U'(C)e^{-\rho t}\right) = U'(C)f'(K)e^{-\rho t} + \left(\frac{d}{dt}(U'(C))\right)e^{-\rho t} + U'(C)(-\rho)e^{-\rho t}$$

$$= U'(C)f'(K)e^{-\rho t} + U''(C)(f'(K)\dot{K} - \ddot{K})e^{-\rho t} + U'(C)(-\rho)e^{-\rho t} = 0$$

$$\Longleftrightarrow U''(C)(\ddot{K} - f'(K)\dot{K}) + (\rho - f'(K))U'(C) = 0.$$

Y, reordenando:

$$\ddot{K} - f'(K)\dot{K} + \frac{U'(C)}{U''(C)}(\rho - f'(K)) = 0.$$

Así, una función $K(t)$ que nos solucionase el problema planteado en el ejemplo introductorio habría de satisfacer la ecuación diferencial de segundo orden deducida.

Enunciemos ahora otro lema que, acto seguido, nos ayudará a demostrar un teorema que nos proporcionará otra condición necesaria que ha de cumplir una función para optar a ser solución del problema.

Lema 3. Sean $F_i : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ tres funciones continuas y supongamos que la forma cuadrática

$$Q(v) = \int_{x_0}^{x_1} (F_1(x)v(x)^2 + F_2(x)v(x)v'(x) + F_3(x)v'(x)^2)dx,$$

definida en $C^1([x_0, x_1])$ es no negativa. Entonces, $F_3 \geq 0 \ \forall x \in (x_0, x_1)$.

Demostración. Supongamos que exista un x' en el intervalo (x_0, x_1) y un $A > 0$ tal que $F_3(x') < -A < 0$. Por continuidad, tiene que existir un ϵ tal que $F_3(x) < \frac{-A}{2}$ en todo el intervalo $(x' - \epsilon, x' + \epsilon) \subset (x_0, x_1)$. Consideremos ahora la función f, que es C^∞ y está definida en todo $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & x \in (-1, 1) \\ 0 & x \notin (-1, 1) \end{cases}.$$

Definamos ahora $v_\epsilon(x) = f\left(\frac{x-x'}{\epsilon}\right)$. Observamos que:

$$\frac{x - x'}{\epsilon} \in (-1, 1) \Longleftrightarrow x \in (x' - \epsilon, x' + \epsilon).$$

Por tanto, el soporte de $v_\epsilon(x)$ es $(x' - \epsilon, x' + \epsilon)$. Así:

$$Q(v_\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} (F_1(x)v_\epsilon(x)^2 + F_2(x)v_\epsilon(x)v'_\epsilon(x) + F_3(x)v'_\epsilon(x)^2)dx$$

$$= \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} (F_1(x)v_\epsilon(x)^2 + F_2(x)v_\epsilon(x)v'_\epsilon(x) + F_3(x)v'_\epsilon(x)^2)dx.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $y = \frac{x-x'}{\epsilon}$ y teniendo en cuenta que $F_3(x) < \frac{-A}{2}$ en todo el intervalo $(x' - \epsilon, x' + \epsilon)$, nos queda que:

$$Q(v_\epsilon) = \int_{-1}^{1} (F_1(x' + \epsilon y)f(y)^2 + F_2(x' + \epsilon y)f(y)\frac{f'(y)}{\epsilon} + F_3(x' + \epsilon y)\frac{f'(y)^2}{\epsilon^2})\epsilon dy$$

$$\leq \epsilon \int_{-1}^{1} F_1(x' + \epsilon y)f(y)^2 dy + \int_{-1}^{1} F_2(x' + \epsilon y)f(y)f'(y)dy - \frac{A}{2\epsilon} \int_{-1}^{1} f'(y)^2 dy.$$

Como $f'(y)^2 > 0$, entonces $\int_{-1}^{1} f'(y)^2 dy > 0$ y, por tanto, $-\frac{A}{2\epsilon} \int_{-1}^{1} f'(y)^2 dy < 0$. Podemos coger un ϵ muy pequeño que hará que nuestro término negativo domine al positivo y, de esta manera, tendremos que $Q(v_\epsilon) < 0$, cosa que contradice la hipótesis de que $Q(v)$ es una forma cuadrática no negativa. Por tanto, no puede existir $x' \in (x_0, x_1)$ tal que $F_3(x') < 0$ y, finalmente, $F(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0, x_1)$. $\square$

Teorema 2. Consideremos el problema estudiado por el teorema 1 y supongamos que se cumplen todas sus hipótesis. Entonces, una condición necesaria para que $J(x)$ tenga un mínimo en $x^* = x^*(t)$ es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \geq 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Demostración. Fijémonos en que ahora estamos considerando el problema de encontrar una función $x^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admisible tal que minimice la integral $J(x)$, es decir, $J(x^*) \leq J(x)$ para toda función $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admisible. Definiendo ahora $x(t) = x^* + \alpha\mu(t)$ y, por el mismo razonamiento llevado a cabo que en la demostración del teorema 1, tenemos que $x(t)$ es admisible y, por solucionar $x^*(t)$ el problema mencionado, $J(x^*) \leq J(x^* + \alpha\mu)$ para todo α. Fijando μ, definimos $I(\alpha) = J(x^* + \alpha\mu)$ y, así:

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*(t) + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\dot{\mu}(t))dt.$$

Para $\alpha = 0$, $I(0) = J(x^*)$. Por tanto, $I(0) \leq I(\alpha)\ \forall\alpha$. Así, I tiene un mínimo en $\alpha = 0$ y, por ser diferenciable, $I'(0) = 0$ y, además, $I''(0) \geq 0$. Desarrollemos $I''(0)$.

$$I'(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*(t) + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\dot{\mu}(t))\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t) + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\dot{\mu}(t))\dot{\mu}(t) \right) dt,$$

$$I''(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x^* + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\mu(t))\mu(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}(t, x^* + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\mu(t))\dot{\mu}(t) \right) \mu(t)$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial x}(t, x^* + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\mu(t))\mu(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t, x^* + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\mu(t))\dot{\mu}(t) \right) \dot{\mu}(t)dt.$$

Haciendo $\alpha = 0$ y prescindiendo de notación, tenemos que:

$$I''(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\mu(t)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\mu(t)\dot{\mu}(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\dot{\mu}(t)^2 \right) dt \geq 0.$$

Habíamos fijado $\mu(t)$. Pero, si lo hacemos variable, podemos expresar $I''(0)$ como $I''(0)(\mu)$ y, así, $I''(0)$ tiene forma cuadrática no negativa y, aplicando el lema 3, enunciado y demostrado préviamente, vemos que $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}$ juega el papel de F_3 y, por tanto, podemos concluir que $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \geq 0\ \forall t \in [t_0, t_1]$. $\square$

Nota 3. Si, en vez de ser x^* un mínimo de $J(x)$ fuese un máximo, tendríamos que x^* sería un mínimo de $-J(x) =: K(x)$. Pero

$$K(x) = -J(x) = -\int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} -F(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

Por tanto, como x^* minimiza $K(x)$ y $K(x) = \int_{t_0}^{t_1} -F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$, por el teorema 2, se tiene que cumplir que:

$$\frac{\partial^2(-F)}{\partial \dot{x}^2} \geq 0 \Longleftrightarrow -\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Corolario 1. Consideremos el problema estudiado por el teorema 1 y supongamos que se cumplen todas sus hipótesis. Entonces, una condición necesaria para que $J(x)$ tenga un máximo en $x^* = x^*(t)$ es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \leq 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1]. \quad \square$$

Nota 4. El primer matemático que dejó constancia de haber demostrado el teorema 2 fue Adrien-Marie Legendre. Es por ello que la condición deducida en el teorema 2 es comúnmente conocida como condición necesaria de Legendre.

Ejemplo. Modelo de crecimiento de Ramsey

Recuperamos el ejemplo introducido al inicio del capítulo para comprobar el teorema que acabamos de demostrar. Recordemos que teníamos $F(t, K, \dot{K}) = U(C)e^{-\rho t}$ con $C = f(K) - \dot{K}$. Así:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{K}^2}(t, K, \dot{K}) = \frac{\partial}{\partial \dot{K}}(-U'(C)e^{-\rho t} = U''(C)e^{-\rho t}.$$

Como habíamos asumido que $U''(C) < 0$, y $e^{-\rho t} > 0$ siempre, tenemos que $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{K}^2} = U''(C)e^{-\rho t} < 0$ en cualquier caso y, así, la condición necesaria de Legendre se cumple.

1.3 Condiciones necesarias

Hasta ahora, habíamos estudiado problemas variacionales de la forma:

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

donde las funciones admisibles $x(t)$ tenían como requisito que $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, es lo que llamábamos el problema más simple. En la gran mayoría de los problemas de cálculo de variaciones las condiciones iniciales (t_0, x_0) vienen dadas. Sin embargo, con las condiones finales no suele pasar lo mismo. Dependiendo de qué modelo se escoja se consideran un tipo de condiciones u otras.

Ahora, haremos un estudio de las condiciones, a parte de la ecuación de Euler, que han de cumplir las soluciones del problema planteado en función de las condiciones finales que han de satisfacer.

Teorema 3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^2. Consideremos el problema

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt,$$

sujeto a $x(t_0) = x_0$ y sujeto a:

- Caso (i): $x(t_1)$ libre para t_1 dado.
- Caso (ii): $x(t_1) \geq x_1$ para x_1 y t_1 dados.
- Caso (iii): $x(t_1) = g(t_1)$ para t_1 libre y g una función C^1 dada.

Entonces, si $x^*(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que soluciona el problema, se ha de cumplir que:

- Caso (i): $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)_{t=t_1} = 0$.
- Caso (ii): $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)_{t=t_1} \leq 0$ ($= 0$ si $x^*(t_1) > x_1$).
- Caso (iii): $\left(F + (\dot{g} - \dot{x})\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$.

Definición. A las tres últimas expresiones del teorema 3, de las cuales cada una se corresponde con una de las condiciones finales impuestas como hipótesis, las conoceremos como condiciones de transversalidad.

Nota 5. En el caso (iii), lo que le pedimos a las funciones admisibles es que sean curvas que comiencen en (t_0, x_0) y que acaben en algún punto del grafo $x = g(t)$.

Demostración. Caso (i). Sea $x^*(t)$ la solución óptima al problema del enunciado. Tomemos, además, los elementos definidos para la demostración del teorema 1. Comparemos ahora el valor de J en $x^*(t)$ con el de J en $x^*(t) + \alpha\mu(t)$, pero esta vez imponiendo sólo que $\mu(t_0) = 0$. Así, $\mu(t_1)$ puede tomar cualquier valor. Definiendo $I(\alpha)$ como en los teoremas anteriores, la condición $I'(0) = 0$ deberá mantenerse. Por tanto, de la expresión que habíamos deducido anteriormente:

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right) \mu(t)dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \mu(t_1) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_0} \mu(t_0) = 0.$$

Ahora, como la ecuación de Euler se tiene que cumplir, pues el caso de $x(t_1)$ fijo es un caso particular de los que casos considerados en este teorema, y, además, $\mu(t_0) = 0$ entonces se tiene que dar que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \mu(t_1) = 0.$$

Como se tiene que satisfacer para toda $\mu(t)$ admisible, cogiendo una tal que $\mu(t_1) \neq 0$, finalmente, $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$. $\square$

Caso (ii). Sea $x^*(t)$ la solución óptima al problema del enunciado. Como antes, vamos a comparar el valor de J en $x^*(t)$ y en $x^*(t) + \alpha\mu(t)$. Para ser $x^*(t) + \alpha\mu(t)$ admisible, $\mu(t_0)$=0 y $x^*(t_1) + \alpha\mu(t_1) \geq x_1$. Separemos dos casos complementarios:

1. Si $x^*(t_1) > x_1$. Sea $\epsilon = x^*(t_1) - x_1 > 0$. Cogiendo $|\mu(t_1)|$ y $|\alpha|$ suficiente pequeños, tendremos que $|\mu(t_1)|\,|\alpha| < \epsilon$. Sustituyendo ϵ, $x^*(t_1) + \alpha\mu(t_1) > x_1$. Como antes, definimos $I(\alpha)$ y se tiene que dar que $I'(0) = 0$. Por el mismo motivo que en el caso anterior, $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \mu(t_1) = 0$ y, cogiendo $\mu(t)$ tal que $\mu(t_1) \neq 0$, entonces $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$.

2. Si $x^*(t_1) = x_1$. Por hipótesis, $x^*(t_1) + \alpha\mu(t_1) \geq x_1$, así $\alpha\mu(t_1) \geq 0$. Escojamos $\mu(t)$ tal que $\mu(t_0) = 0$ y $\mu(t_1) > 0$. Así, $x^*(t) + \alpha\mu(t)$ es admisible para todo $\alpha \geq 0$ y $I(0) \geq I(\alpha)$ $\forall \alpha \geq 0$. Además, necesariamente, $I'(0) \leq 0$. Así, $I'(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \mu(t_1) \leq 0$. Como $\mu(t_1) > 0$, entonces $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0$.

Por tanto, uniendo las ecuaciones deducidas tanto en 1 como en 2, tenemos que $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0$ y se alcanza la igualdad cuando $x^*(t_1) > x_1$. $\square$

Caso (iii). Supongamos que $x^*(t)$ es la solución óptima de nuestro problema. Supongamos que t_1 es el valor más pequeño de t para el que $x^*(t) = g(t)$. Sea $\mu(t)$ tal que $\mu(t_0) = 0$ y tal que $x^*(t) + \alpha\mu(t)$ es una función admisible para todo α. El menor t para el que $x^*(t) + \alpha\mu(t) = g(t)$, fijado $\mu(t)$, dependerá del parámetro α. Denotemos este t mencionado por $t_1(\alpha)$. En particular, $t_1(0) = t_1$. Definamos $I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1(\alpha)} F(t, x^*(t) + \alpha\mu(t), \dot{x}^*(t) + \alpha\dot{\mu}(t))dt$. Fijado $\mu(t)$, $I(\alpha)$ tendrá un máximo en $\alpha = 0$, ya que x^* es solución óptima del problema. Así, $I'(0) = 0$. Asumiendo que $t_1(\alpha)$ es diferenciable:

$$I'(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1(\alpha)} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\mu}(t)\right) dt + [F]_{t=t_1(\alpha)} t_1'(\alpha).$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$I'(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1(\alpha)} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \mu(t) dt + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \mu(t) \right]_{t_0}^{t_1(\alpha)} + (F)_{t=t_1(\alpha)} t_1'(\alpha).$$

Tomando $\alpha = 0$ e imponiendo que la ecuación de Euler se cumpla para $x^*(t)$, vemos que $I'(0) = 0$ es equivalente a:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1(0)} \mu(t_1(0)) + (F)_{t=t_1(0)} t_1'(0) = 0.$$

Ahora, $x^*(t_1(\alpha)) + \alpha\mu(t_1(\alpha)) = g(t_1(\alpha))$. Diferenciando las expresiones de ambos lados de la igualdad:

$$\dot{x}^*(t_1(\alpha))t_1'(\alpha) + \mu(t_1(\alpha)) + \alpha\dot{\mu}(t_1(\alpha))t_1'(\alpha) = \dot{g}(t_1(\alpha))t_1'(\alpha).$$

En particular, $\alpha = 0$, nos lleva a:

$$\dot{x}^*(t_1(0))t_1'(0) + \mu(t_1(0)) = \dot{g}(t_1(0))t_1'(0).$$

Manipulando algebraicamente, $\mu(t_1(0)) = (\dot{g}(t_1(0)) - \dot{x}^*(t_1(0)))t_1'(0)$ (*). Teniendo en cuenta que $t_1(0) = t_1$ y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos que:

$$\left((F)_{t=t_1} + (\dot{g}(t_1) - \dot{x}^*(t_1)) \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} \right) t_1'(0) = 0.$$

Ahora, como la ecuación (*) es válida también para $\mu(t_1) \neq 0$ tendremos que $t_1'(0)$ tampoco se puede anular. Por tanto, de la última expresión, deducimos que:

$$\left(F + (\dot{g} - \dot{x})\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} = 0. \ \square$$

<u>**Nota 6.**</u> Si el objetivo fuese minimizar la integral en lugar de maximizarla con las mismas condiciones finales que las mencionadas anteriormente, las condiciones para los casos (i) y (iii) permanecerían iguales y para el (ii) se invertiría la desigualdad deducida.

Consideremos ahora una mezcla de las condiciones finales de los casos (ii) y (iii) y analicemos qué ecuaciones han de satisfacer.

Proposición 1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^2. Consideremos el problema

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt,$$

sujeto a $x(t_0) = x_0$ y a $x(t_1) \geq x_1$ con t_1 libre y x_1 dado. Entonces, si $x^*(t)$ soluciona el problema, ha de cumplir, aparte de la ecuación de Euler, que $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0$ ($= 0$ si $x^*(t_1) > x_1$) y $\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$.

Demostración. Sea $x^*(t)$ la solución óptima al problema del enunciado. Sea t_1^* el tiempo final óptimo. Entonces, $x^*(t)$ soluciona el problema del teorema 3 con $t_1 = t_1^*$ y con condición final $x(t_1^*) \geq x_1$. Por tanto, $x^*(t)$ ha de satisfacer la ecuación de Euler además de la condición transversal dada por el caso (ii) del teorema 3: $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0$ ($= 0$ si $x^*(t_1) > x_1$).

Además, $x^*(t)$ soluciona el problema del teorema 3 con condición final $x(t_1) = x^*(t_1^*)$ con t_1 libre. Por tanto, $x^*(t)$ ha de satisfacer tambien la condición dada por el caso (iii) con $g(t) = x^*(t_1^*)$ (constante). Así, $\dot{g} = 0$, y, la condición a cumplir es: $\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1^*} = 0$.
$\square$

1.4 Condiciones suficientes

Hasta ahora, sólo habíamos presentado resultados que nos motraban algunas de las condiciones que habían de cumplir las funciones con tal de poder ser candidatas a resolver los problemas planteados. A continuación, enunciaremos y demostraremos un teorema que, con la ayuda de nuevas hipótesis, nos dirá, básicamente, que las condiciones necesarias deducidas hasta ahora para que una función pueda ser solución óptima del problema también serán suficientes para ello.

Pero antes, introduzcamos un lema que necesitaremos para la demostración del teorema principal.

Lema 4. Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $S \subset \mathbb{R}^n$, una función cóncava y diferenciable en S y sea $x^0 \in S$. Entonces:

$$f(x) - f(x^0) \leq f'(x^0) \cdot (x - x^0) \quad \forall x \in S,$$

donde $f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ y $\cdot$ denota el producto escalar.

Demostración. Utilizando el desarrollo de Taylor de la función f tenemos que:

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0) \cdot (x - x^0) + \frac{1}{2}(x - x^0)^t f''(x^0)(x - x^0) + R,$$

donde $f''(x^0)$ denota la matriz hessiana de f en x^0 y R el término complementario de Lagrange. Ahora, como f es diferenciable y cóncava en S, $f''(x^0)$ es una forma cuadrática negativa y $(x - x^0)^t f''(x^0)(x - x^0) \leq 0$. Así,

$$f(x^0) + f'(x^0) \cdot (x - x^0) + \frac{1}{2}(x - x^0)^t f''(x^0)(x - x^0) \leq f(x^0) + f'(x^0) \cdot (x - x^0).$$

Teniendo esto en cuenta, cogiendo el desarrollo de Taylor de f en x^0 y prescindiendo de los términos de orden superior a 2, tenemos que:

$$f(x) \leq f(x^0) + f'(x^0) \cdot (x - x^0) \quad \forall x \in S,$$

lo que es equivalente a:

$$f(x) - f(x^0) \leq f'(x^0) \cdot (x - x^0) \quad \forall x \in S. \quad \square$$

<u>**Teorema 4.**</u> Supongamos que $F(t, x, \dot{x})$ es una función cóncava respecto a x y $\dot{x}$ para cada $t \in [t_0, t_1]$. Consideremos ahora el problema:

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt,$$

con t_0, t_1, x_0 y x_1 prefijados y sujeto a $x(t_0) = x_0$ y a:

- Caso (i): $x(t_1) = x_1$.
- Caso (ii): $x(t_1) \geq x_1$.
- Caso (iii): $x(t_1)$ libre.

Si $x^*(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface:

- Caso (i): $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t_1) = x_1$ y la ecuación de Euler.
- Caso (ii): $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t_1) \geq x_1$, $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0$ ($= 0$ si $x^*(t_1) > x_1$) y la ecuación de Euler.
- Caso (iii): $x^*(t_0) = x_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$ y la ecuación de Euler.

Entonces $x^*(t)$ es un máximo global en el sentido de que si $x(t)$ es una función admisible arbitraria, entonces:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, \dot{x}^*)dt \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt.$$

Demostración. Como $F(t, x, \dot{x})$ es una función cóncava de $(x, \dot{x})$, por el lema 3, tenemos que:

$$F(t, x, \dot{x}) - F(t, x^*, \dot{x}^*) \leq \frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*, \dot{x}^*)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)(\dot{x} - \dot{x}^*).$$

Simplificando la notación, $F = F(t, x, \dot{x})$ y $F^* = F(t, x^*, \dot{x}^*)$, y manipulando algebraicamente:

$$F^* - F \geq \frac{\partial F^*}{\partial x}(x^* - x) + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^* - \dot{x}).$$

Ahora, como x^* ha de satisfacer la ecuación de Euler, tenemos que: $\frac{\partial F^*}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)$ y, sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$F^* - F \geq \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)(x^* - x) + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^* - \dot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(x^* - x)\right).$$

Ahora, como la desigualdad es válida para todo t en el intervalo $[t_0, t_1]$, tendremos que:

$$\int_{t_0}^{t_1} (F^* - F)\, dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(x^* - x)\right) dt = \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(x^* - x)\right)_{t=t_0}^{t=t_1}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1}(x^*(t_1) - x(t_1)) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_0}(x^*(t_0) - x(t_0)).$$

Y, por hipótesis, $x^*(t_0) = x(t_0) = x_0$. Por tanto,

$$\int_{t_0}^{t_1} (F^* - F)\, dt \geq \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1}(x^*(t_1) - x(t_1)).$$

Definamos ahora d como $d = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1}(x^*(t_1) - x(t_1))$ y comprobemos que, en todos los casos, $d \geq 0$.

- Caso (i). Si la condición final es $x(t_1) = x_1$, entonces, por ser $x^*(t_1) = x(t_1)$, $d = 0$.
- Caso (ii).
  - Si $x(t_1) \geq x_1$ y $x^*(t_1) > x_1$, por hipótesis, tendremos que $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$ y, así, $d = 0$.
  - Si $x(t_1) \geq x_1$ y $x^*(t_1) = x_1$, por hipótesis, tendremos que $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0$ y $x^*(t_1) - x(t_1) = x_1 - x(t_1) \leq 0$. Así, por definición de d, tendremos que $d \geq 0$.

- Caso (iii). Si $x(t_1)$ es libre, por hipótesis, $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$. Así, $d = 0$.

Por tanto,

$$\int_{t_0}^{t_1} (F^* - F)\, dt \geq d \geq 0 \Longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} (F^* - F)\, dt \geq 0 \Longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} F^* dt \geq \int_{t_0}^{t_1} F dt.$$

Finalmente, recuperando toda la notación de la que habíamos prescindido, tenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))dt \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

para toda función $x(t)$ admisible. Por tanto, podemos concluir que $x^*(t)$ es solución óptima de nuestro problema. $\square$

Ejemplo. Modelo de crecimiento de Ramsey

Consideremos, de nuevo, el problema introducido al inicio del capítulo.

$$\max_{K(t)} \int_0^T U(f(K) - \dot{K})e^{-\rho t} dt,$$

$$t.q. \;\; K(0) = K_0 \;,\;\; K(T) = K_T.$$

Asumimos que f era cóncava, por tanto $f(K) + (-\dot{K})$ es la suma de dos funciones cóncavas, por tanto, la suma también es función cóncava de $(K, \dot{K})$. Además, U es creciente y cóncava, así $U(f(K) - \dot{K})e^{-\rho t}$ es cóncava en $(K, \dot{K})$. Entonces, por el teorema 3, una función admisible que solucione la ecuación de Euler (deducida anteriormente) será también solución al problema variacional.

Nota 7. Cambiando la hipótesis de concavidad de F por convexidad de la misma función e invirtiendo las desigualdades del enunciado, el resultado es también válido para el problema de encontrar una función admisible que nos minimice la integral.

Ejercicio. Consideremos el problema que estudia el modelo de crecimiento de Ramsey con todas las hipótesis que hemos ido imponiendo hasta ahora. Consideremos el caso concreto en que $U(C) = \frac{C^{1-v}}{1-v}$, $v \in (0, 1)$ y $f(K) = bK$, $b > 0$. Asumamos que $K_0 > 0$ y que $K_T > 0$.

1. Halla la ecuación de Euler en este caso. Comprueba que la solución general para $b \neq a$, donde $a = \frac{b-\rho}{v}$, es $K(t) = Ae^{bt} + Be^{at}$.

   En este caso tenemos que $f'(K) = b$, $U'(C) = C^{-v}$ y $U''(C) = -vC^{-(v+1)}$. Sustituyendo, ahora, en la ecuación de Euler obtenida anteriormente para este modelo y, seguidamente, manipulando obtenemos:

   $$\ddot{K} - b\dot{K} + \frac{C^{-v}}{-vC^{-(v+1)}}(\rho - b) = 0 \iff \ddot{K} - (a+b)\dot{K} + abK = 0.$$

   Para encontrar ahora la solución general hemos de resolver la ecuación $x^2 - (a+b)x + ab = 0 \iff x = a$ ó $x = b$. Por tanto, la solución general a la ecuación de Euler será la siguiente:

   $$K(t) = Ae^{bt} + Be^{at}. \; \square$$

2. Halla la correspondiente solución para $C(t)$.

   Por definición $C(t) := f(K) - \dot{K}(t)$. Ahora, $\dot{K}(t) = Abe^{bt} + Bae^{at}$ y, sustituyendo, en la expresión de $C(t)$ y manipulando algebraicamente:

   $$C(t) = b(Ae^{bt} + Be^{at}) - (Abe^{bt} + Bae^{at}) = B(b-a)e^{at}.$$

3. Halla la condición para que la tasa de crecimiento relativo del consumo $\frac{\dot{C}}{C}$ sea positivo.

   Desarrollemos $\dot{C}(t) = B(b-a)ae^{at}$ y veamos cuál es la condición para que $\frac{\dot{C}}{C} > 0$:

   $$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{B(b-a)ae^{at}}{B(b-a)e^{at}} = a > 0 \iff \frac{b-\rho}{v} > 0 \iff b > \rho.$$

4. Suponiendo que $K_0e^{bT} > K_T$ y que $a < b$, halla la solución que pasa por los puntos $(0, K_0)$ y (T, K_T) y demuestra que, en este caso, $C(t) = bK(t) - \dot{K}(t) > 0$.

   Hemos de imponer que $K(0) = K_0$ y que $K(T) = K_T$ para garantizar que la solución pase por los puntos que nos dice el enunciado. Una vez hecho esto, obtenemos que, para nuestra solución, se cumple que:

   $$A = \frac{K_T + 2K_0e^{bT} - K_0e^{aT}}{e^{bT} - e^{aT}}, \quad B = \frac{K_0e^{bT} - K_T}{e^{bT} - e^{aT}}.$$

   Por tanto, la solución será la siguiente:

   $$K(t) = \frac{K_T + 2K_0e^{bT} - K_0e^{aT}}{e^{bT} - e^{aT}}e^{bt} + \frac{K_0e^{bT} - K_T}{e^{bT} - e^{aT}}e^{at}.$$

   En el apartado 2 del ejercicio, habíamos comprobado que $C(t) = B(b-a)e^{at}$. Ahora, como $K_0e^{bT} > K_T$ y $b > a$, tenemos que $B > 0$ y como , además, $b - a > 0$ y $e^{at} > 0$ acabamos concluyendo que, en efecto, $C(t) > 0$. $\square$

1.5 Criterio óptimo más general

En muchos problemas de cálculo variacional del campo de la economía es lógico tener en cuenta una función que mida la utilidad que se alcanza en el estado final. Esto nos hace considerar el siguiente problema:

$$\max_{x(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt + S(x(t_1)) \right) \quad t.q. \quad x(t_0) = x_0,$$

donde S es una función prefijada, mientras que $x(t_1)$ se determina mediante la maximización. Estudiémoslo.

Supongamos ahora que $x^* = x^*(t)$ soluciona el problema planteado. En particular, x^* será maximal comparado con todas las demás funciones admisibles que unan los puntos (t_0, x_0) y $(t_1, x^*(t_1))$. Y, por ser $S(x(t_1))$ constante para todas estas funciones, x^* habrá de satisfacer la ecuacion de Euler en $[t_0, t_1]$. Si, además, suponemos que S es diferenciable, entonces:

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} S(x(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} S'(x) \dot{x} dt.$$

Y, para toda función $x(t)$ admisible en el problema inicial, $S(x(t_0)) = S(x_0)$ constante. Por tanto, el problema es equivalente al siguiente:

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} \left(F(t, x, \dot{x}) + S'(x)\dot{x}\right) dt \quad t.q. \quad x(t_0) = x_0, \; x(t_1) \; libre.$$

Ahora, por el teorema 3, si x^* es solución al problema, entonces tiene que cumplir la condición de transversalidad siguiente:

$$\left(\frac{\partial (F(t, x, \dot{x}) + S'(x)\dot{x})}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} + S'(x(t_1)) = 0$$

Por tanto, x^* ha de satisfacer la ecuación diferencial de Euler y la condición transversal que acabamos de mencionar.

Suponiendo ahora que $F(t, x, \dot{x})$ es cóncava respecto $(x, \dot{x})$ y S es cóncava también respecto a x, entonces una función $x^*(t)$ que satisfaga la ecuación de Euler, la condición de transversalidad indicada anteriormente y $x^*(t_0) = x_0$ será solución global del problema estudiado. Veámoslo:

$$\int_{t_0}^{t_1} F^* dt + S(x^*(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} F dt - S(x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} (F^* - F) dt + S(x^*(t_1)) - S(x(t_1))$$

$$\geq \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} (x^*(t_1) - x(t_1)) + S'(x^*(t_1))(x^*(t_1) - x(t_1))$$

$$= \left(\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} + S'(x^*(t_1)) \right) (x^*(t_1) - x(t_1)) = 0$$

donde hemos utilizado la convavidad de F y S en la desigualdad y tambíen la hipótesis de que x^* ha de satisfacer la ecuación de Euler y en la última igualdad hemos impuesto el cumplimiento de la condición de transversalidad. Finalmente, se concluye que

$$\int_{t_0}^{t_1} F^* dt + S(x^*(t_1)) \geq \int_{t_0}^{t_1} F dt - S(x(t_1)).$$

1.6 Existencia de soluciones

Hasta ahora, hemos deducido condiciones que habían de cumplir las funciones que solucionan el problema y, bajo ciertas hipótesis, hemos visto que éstas también son suficientes para que las funciones que las satisfagan sean solución óptima al problema. Pero se puede dar el caso de que para ciertas funciones $F(t, x(t), \dot{x}(t))$, el problema planteado no tenga solución. En esta sección, enunciaremos un teorema que, siempre y cuando se cumplan ciertas hipótesis, nos garantizará la existencia de, como mínimo, una solución para el problema. Su demostración es muy compleja y se escapa de nuestro alcance, así que no la incluiremos en esta memoria.

Teorema 5. Consideremos el problema estudiado por el teorema 3. Sea F una fución C^2 y cóncava en $\dot{x}$ para cada (t, x) y asumamos que para cada real $p \neq 0$ existen unas constantes q_p, r y s tal que para todo x y para todo $\dot{x}$:

$$F(t, x, \dot{x}) + p\dot{x} \leq q_p + (r + s\,|p|)\,|x|\,,$$

donde r y s son independientes de p. Asumamos, además, que $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|$ está acotado por una constante que es independiente de $(t, x, \dot{x})$ y también que:

$$\frac{\partial^2 F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^2} \neq 0 \ \forall (t, x, \dot{x}).$$

Entonces, existirá una solución óptima $x(t)$ y además será de clase C^2.

1.7 Problemas variacionales multidimensionales

No es objetivo de este trabajo el considerar problemas variacionales con más de una función desconocida, es decir, con $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, por tanto, no proporcionaremos las demostraciones de los resultados análogos a los ya demostrados para problemas unidimensionales, es decir, con $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. No obstante, no está de más conocer sus teoremas principales, así que los enunciaremos brevemente.

Teorema 6. Sean $t_0, t_1, x_1^0, \ldots, x_n^0, x_1^1, \ldots, x_m^1 \in \mathbb{R}$ dados, F una función C^2 de $2n+1$ variables y sean $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ funciones C^1. Consideremos el problema

$$\max_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

donde $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ y sujeto a $x(t_0) = x_0$ y a las condiciones finales siguientes:

- $x_i(t_1) = x_i^1$ para $i \in \{1, \ldots, l\}$,
- $x_i(t_1) \geq x_i^1$ para $i \in \{l+1, \ldots, m\}$,
- $x_i(t_1)$ libre para $i \in \{m+1, \ldots, n\}$.

Entonces, si $(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))$ es solución óptima del problema mencionado, ha de cumplir las ecuaciones de Euler y las condiciones de transversalidad siguientes:

- $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- $x_i^*(t_1) = x_i^1$ para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$,
- $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t=t_1} \leq 0$ ($= 0$ si $x_i^*(t_1) > x_i^1$) para todo $i \in \{l+1, \ldots, m\}$,
- $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t=t_1} = 0$ para todo $i \in \{m+1, \ldots, n\}$.

Teorema 7. Consideremos el problema estudiado en el teorema 6. Supongamos que $F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ es una función cóncava en $x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Si $(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))$ es admisible, satisface las ecuaciones de Euler y las condiciones de transversalidad (condiciones introducidas en el teorema 6), entonces $(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))$ soluciona el problema planteado en el sentido de que si $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ es un vector cualquiera de funciones admisibles, entonces, se ha de cumplir que:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1^*, \ldots, x_n^*, \dot{x}_1^*, \ldots, \dot{x}_n^*)dt \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)dt.$$

Teorema 8. Consideremos el problema estudiado por el teorema 6. Sea F una función C^2 y cóncava en $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ para cada (t, x) y asumamos que para cada vector $p = (p_1, \ldots, p_n) \neq 0$ existen constantes positivas q_p, r y s tales que para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y para todo $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$

$$F(t, x, \dot{x}) + p\dot{x} \leq q_p + (r + s\,\|p\|)\,\|\alpha\|\,,$$

donde r y s sean independientes de p. Asumamos también que $\|F'_x\|$ está acotado por una constante independiente de $(t, x, \dot{x})$. Asumamos, además, que $det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t, x, \dot{x})\right) \neq 0$ para todo $(t, x, \dot{x})$. Entonces, podemos asegurar que, como mínimo, existe una solución óptima del problema estudiado y que, además, esta es de clase C^2.

Capítulo 2. Teoría del control óptimo

En el capítulo anterior vimos cómo la teoría del cálculo de variaciones nos ayudaba a entender algunos de los problemas estudiados en optimización dinámica. Sin embargo, la mayoría de ellos no se adaptan a la perfección al marco teórico introducido en el capítulo 1.

El objetivo de esta sección será proporcionar los resultados básicos principales de la teoría de control óptimo, una teoría que se puede considerar como una extensión del cálculo de variaciones y que nos ayudará a comprender problemas más generales aunque algo similares a los estudiados en el capítulo anterior. Es posible abordar este tipo de problemas desde dos enfoques distintos: o bien mediante la teoría de la programación dinámica, o bien mediante el principio del máximo de Pontryagin. En este trabajo, lo haremos a partir de la segunda opción.

2.1 Un boceto del problema

Comencemos con una pequeña presentación del tipo de problemas que estudiaremos mediante la teoría de control óptimo. Consideremos un sistema que evoluciona con el paso del tiempo. Definamos el estado del mismo sistema mediante un conjunto de n variables dependientes del tiempo:

$$x_1(t), \dots, x_n(t).$$

A estas variables las llamaremos variables de estado. Es natural definir $x(t)$ como $x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ y considerar que el vector $x(t)$ define el estado en que está nuestra economía en cada instante de tiempo t.

Supongamos ahora que el proceso que hace variar a $x_i(t)$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, a lo largo del tiempo puede ser controlado en el sentido de que conozcamos r funciones:

$$u_1(t), \dots, u_r(t),$$

que influyen en ese proceso. Estas funciones recibirán el nombre de funciones de control.

Asumamos, además, que el sistema dinámico por el que se rigen las variaciones de esta economía respecto al tiempo es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t) \end{cases}$$

donde la funciones $f_1,\dots,f_n$ son funciones $f_i : \mathbb{R}^n \text{ x } \mathbb{R}^r \text{ x } [t_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ prefijadas y conocidas que nos describen la dinámica del sistema. Cosa que nos dice que la evolución de cada una de las variables de estado depende de todas las demás, de ella misma, de todas las variables de control y, además, también explícitamente del tiempo, t. Usando una notación más simple, ponemos:

$$x(t) := (x_1(t),\dots,x_n(t)), \quad u(t) = (u_1(t),\dots,u_r(t)), \quad f = (f_1,\dots,f_n),$$

y, entonces, el sistema dinámico de ecuaciones diferenciales que describe la evolución de nuestra economía es equivalente a lo siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t).$$

Supongamos, también, que conocemos el valor que toma $x(t)$ en $t = t_0$. Así, $x(t_0) = x^0$, donde $x^0 \in \mathbb{R}^n$ prefijado. Ahora, si fijamos las variables de control $u(t) = (u_1(t),\dots,u_r(t))$ definidas para todo $t \geq t_0$ y consideramos nuestro sistema dinámico con esta $u(t)$ fija obtenemos un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden con n funciones desconocidas $x_1(t),\dots,x_n(t)$. Además, como conocemos el valor de $x(t)$ en el instante inicial t_0, podemos asegurar, por el teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales, que nuestro sistema tendrá, en general, una única solución $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$.

Sea, ahora, $f_0 : \mathbb{R}^n \text{ x } \mathbb{R}^r \text{ x } [t_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función prefijada y conocida. Definamos J de la siguiente manera:

$$J := \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),u(t),t)dt,$$

donde t_1 no está necesariamente fijado y $x(t)$ cumplirá alguna de las condiciones finales mencionadas en el teorema 6 de la sección 1.7.

El problema fundamental que estudiaremos en este capítulo es el siguiente: "*De entre todas las variables de control $u(t)$ que, mediante el sistema de ecuaciones diferenciales mencionado, llevan al sistema desde el estado inicial (t_0, x^0) hasta un estado final definido por alguna de las condiciones finales mencionadas encuentra la que haga máximo el valor* *de J, suponiendo que exista una que lo haga*". A la función de control que soluciona nuestro problema la conocemos por "el control óptimo" y a la función $x(t)$, solución del sistema de ecuaciones diferenciales con el control óptimo como $u(t)$, la conocemos como "el camino asociado óptimo".

2.2 Restricciones sobre las variables de control

Tanto en aplicaciones físicas, económicas o de cualquier otro campo de la matemática aplicada, las variables de control no suelen poder variar libremente. Así, consideraremos el problema expuesto en el apartado anterior añadiéndole ciertas restricciones sobre estas variables.

En primer lugar, asumiremos que $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ sólo puede tomar valores sobre un subconjunto cerrado $U \subset \mathbb{R}^r$. A U lo conoceremos como "la región de control". Y en segundo lugar, asumiremos también que $u(t)$ es una función continua a trozos con un número finito de discontinuidades. Finalmente, acabaremos suponiendo que $f_i(x, u, t)$ y $\frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial x_j}$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, son continuas respecto las $n + r + 1$ variables de las que dependen.

En resumen, el tipo de problemas a estudiar que consideraremos será el mencionado en la sección 2.1 de este capítulo con un intervalo de tiempo fijo $[t_0, t_1]$, con $x(t_0) = x^0$, siendo $x^0 \in \mathbb{R}^n$ un vector de valores prefijados, con una condición final en t_1 también prefijada que variará en función del problema que estemos estudiando y satisfaciendo las hipótesis introducidas en el párrafo anterior:

$$\max_{u(t)\in U} \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt,$$

tal que $x(t_0) = x^0$ y $x(t_1)$ satisfaciendo ciertas condiciones prefijadas.

2.3 El principio del máximo

Para esta sección, consideremos el problema anterior con la particularidad de que $n = 1$ y $r = 1$. Un problema clásico de la matemática aplicada que nos puede recordar al introducido en este capítulo es el problema de Lagrange de optimización de una función sujeta a unas restricciones en forma de ecuación. En nuestro caso, buscamos maximizar la integral de una función en un cierto intervalo sujeto a una restricción de la forma de una ecuación diferencial. Recordemos que la restricción del problema de Lagrange tenía asociada una constante, el multiplicador de Lagrange. Como la restricción en nuestro problema se tiene que cumplir para todo $t \in [t_0, t_1]$, la ecuación diferencial tendrá asociada un número $p(t)$ para cada t en el intervalo. A $p(t)$ la conoceremos como "la función adjunta" o "variable adjunta". Además, f_0 tendrá asociado un $p_0 \in R$.

Ahora, a la función homóloga en nuestro problema al Lagrangiano en el teorema del multiplicador de Lagrange la conoceremos como "la función Hamiltoniana", la denotaremos por $H = H(x, u, p, t)$ y la definiremos de la siguiente manera:

$$H(x, u, p, t) := p_0 f_0(x, u, t) + p(t) f(x, u, t).$$

La idea principal del principio del máximo de Pontryagin es relacionar nuestro problema de encontrar una $u(t)$ que, satisfaciendo las restricciones impuestas, maximice la integral J con el problema de maximizar la función Hamiltoniana respecto la variable u con $u \in U$. Además, nos dirá cómo determinar la función adjunta $p(t)$.

2.3.1 Condición suficiente de Arrow

A continuación, presentaremos y demostraremos una condición suficiente para que una pareja admisible $(x^*(t), u^*(t))$ sea solución al problema estudiado por el principio del máximo.

Teorema 9. Sean $f_0 : \mathbb{R}$ x U x $[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}$ x U x $[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, con U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, dos funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ x U x $[t_0, t_1]$. Consideremos el problema de hallar una función de control continua a trozos $u(t)$ y su función asociada $x(t)$ continua y diferenciable a trozos en $[t_0, t_1]$, suponiendo que tales funciones existen, y que nos maximicen la siguiente integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

satisfaciendo que $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, $x(t_0) = x^0$ con $x^0 \in \mathbb{R}$ prefijado, y una de la siguientes condiciones finales, con t_1 fijo:

- Caso (i): $x(t_1) = x_1$.
- Caso (ii): $x(t_1) \geq x_1$.
- Caso (iii): $x(t_1)$ libre.

Y, además, satisfaciendo también la restricción sobre la variable de control $u(t) \in U$ para todo t en $[t_0, t_1]$. Sea, ahora, $(x^*(t), u^*(t))$ una pareja admisible al problema propuesto.

Supongamos que $p_0 = 1$ y que existe una función diferenciable $p(t)$ tal que para cada condición final (i), (ii) ó (iii) se satisface su correspondiente condición de transversalidad:

- Caso (i): $p(t_1)$ libre.
- Caso (ii): $p(t_1) \geq 0$ alcanzándose la igualdad cuando $x^*(t_1) > x_1$.
- Caso (iii): $p(t_1) = 0$.

Supongamos, además, que también se satisfacen las siguientes hipótesis:

- Exceptuando en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$, se cumple que $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$ con $\frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p(t), t)$.
- $u^*(t)$ maximiza la función $H(x^*(t), u, p(t), t)$ para $u \in U$, es decir, $H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) \geq H(x^*(t), u(t), p(t), t)\ \forall u(t) \in U$.

Entonces, si se cumple que

$$\widehat{H}(x, p(t), t) := \max_{u \in U} H(x, u, p(t), t),$$

existe y es cóncava en x para todo t, $(x^*(t), u^*(t))$ será solución a nuestro problema de optimización.

Demostración. Supongamos que $(x, u) = (x(t), u(t))$ es una pareja admisible cualquiera. Queremos demostrar que:

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x^*(t), u^*(t), t)dt - \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt \geq 0.$$

Por definición de H, tendríamos que:

$$f_0(x, u, t) = H(x, u, p, t) - pf(x, u, t),$$

y, por tanto,

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} \left(H(x^*, u^*, p, t) - pf(x^*, u^*, t) - H(x, u, p, t) + pf(x, u, t)\right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(H(x^*, u^*, p, t) - H(x, u, p, t)\right) dt + \int_{t_0}^{t_1} p(f(x, u, t) - f(x^*, u^*, t))dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(H(x^*, u^*, p, t) - H(x, u, p, t)\right) dt + \int_{t_0}^{t_1} p(\dot{x} - \dot{x}^*)dt.$$

Veamos, ahora, que $H(x^*, u^*, p, t) - H(x, u, p, t) \geq \dot{p}(x - x^*)$. Para ello, observemos que, por definición de $\widehat{H}$, se tiene que $H(x^*, u^*, p, t) = \widehat{H}(x^*, p, t)$ y que $H(x, u, p, t) \leq \widehat{H}(x, p, t)$. Así,

$$H(x^*, u^*, p, t) - H(x, u, p, t) \geq \widehat{H}(x^*, p, t) - \widehat{H}(x, p, t).$$

Por tanto, si demostramos que $\widehat{H}(x^*, p, t) - \widehat{H}(x, p, t) \geq \dot{p}(x - x^*)$ o, equivalentemente, $\widehat{H}(x, p, t) - \widehat{H}(x^*, p, t) \leq -\dot{p}(x - x^*)$ tendremos que $H(x^*, u^*, p, t) - H(x, u, p, t) \geq \dot{p}(x - x^*)$ se cumplirá.

Ahora, podemos ver que, por la concavidad de $\widehat{H}$, existirá una función a tal que:

$$\widehat{H}(x, p, t) - \widehat{H}(x^*, p, t) \leq a(x - x^*) \ \ \forall \ x.$$

Utilizando conjuntamente la desigualdad que acabamos de mencionar y la que ya hemos utilizado anteriormente: $H(x^*, u^*, p, t) - H(x, u, p, t) \geq \widehat{H}(x^*, p, t) - \widehat{H}(x, p, t)$, vemos que, haciendo $u = u^*$,

$$H(x, u^*, p, t) - H(x^*, u^*, p, t) \leq a(x - x^*) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definamos, ahora, para un $t \in [t_0, t_1]$ fijo, la siguiente función:

$$g(x) = H(x, u^*, p, t) - H(x^*, u^*, p, t) - a(x - x^*).$$

Por como está definida, $g(x) \leq 0 \, \forall x$. Además, como $g(x^*) = H(x^*, u^*, p, t) - H(x^*, u^*, p, t) - a(x^* - x^*) = 0$, x^* maximizará la función g. Así, tendremos que $g'(x^*) = 0$ y esto nos conduce a que $\frac{\partial H^*}{\partial x} = a$. Como por hipótesis $-\dot{p} = \frac{\partial H^*}{\partial x}$, tendremos que

$$-\dot{p} = \frac{\partial H^*}{\partial x} = a.$$

Por tanto, se cumple que $\widehat{H}(x, p, t) - \widehat{H}(x^*, p, t) \leq -\dot{p}(x - x^*)$ y, equivalentemente, que $\widehat{H}(x^*, p, t) - \widehat{H}(x, p, t) \geq \dot{p}(x - x^*)$. Volviendo ahora a como habíamos definido Δ y aplicando las desigualdades que hemos demostrado:

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} \left(H(x^*, u^*, p, t) - H(x, u, p, t)\right) dt + \int_{t_0}^{t_1} p(\dot{x} - \dot{x}^*) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{p}(x - x^*) + p(\dot{x} - \dot{x}^*)\right) dt.$$

Ahora,

$$\dot{p}(x - x^*) + p(\dot{x} - \dot{x}^*) = \frac{d}{dt}\left(p(x - x^*)\right),$$

y, por tanto,

$$\Delta \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(p(x - x^*)\right) dt = \left(p(x - x^*)\right)_{t=t_0}^{t=t_1} = p(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)),$$

y, por las condiciones finales que estamos considerando y sus respectivas condiciones de transversalidad, tendremos que $p(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)) \geq 0$ siempre. Finalmente, concluimos que $\Delta \geq 0$ y, así

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x^*(t), u^*(t), t) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt. \ \square$$

2.3.2 Condición necesaria

En esta subsección, enunciaremos una condición necesaria que ha de cumplir toda pareja admisible $(x^*(t), u^*(t))$ para poder ser solución del problema. Dado que la demostración es bastante más delicada de tratar y demasiado larga para incluirla, nos limitaremos a citar una referencia donde poder seguirla.

Teorema 10. Sean $f_0 : \mathbb{R} \text{ x } U \text{ x } [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \text{ x } U \text{ x } [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, con U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, dos funciones diferenciables en $\mathbb{R} \text{ x } U \text{ x } [t_0, t_1]$. Supongamos que queremos solucionar el problema de encontrar una función de control continua a trozos $u(t)$ y su función asociada $x(t)$ continua y diferenciable a trozos en $[t_0, t_1]$, suponiendo que tales funciones existen, y que nos maximicen la siguiente integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt,$$

satisfaciendo que $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, $x(t_0) = x^0$ con $x^0 \in \mathbb{R}$ prefijado, y una de la siguientes condiciones finales, con t_1 fijo:

- Caso (i): $x(t_1) = x_1$.
- Caso (ii): $x(t_1) \geq x_1$.
- Caso (iii): $x(t_1)$ libre.

Y, además, satisfaciendo también la restricción sobre la variable de control $u(t) \in U$ para todo t en $[t_0, t_1]$. Entonces, si $u^*(t)$ es una función que nos soluciona el problema presentado y $x^*(t)$ es su camino óptimo asociado, existirá una constante p_0 y una función $p(t)$ diferenciable cuya derivada será continua a trozos en el intervalo $[t_0, t_1]$ tal que:

1. $(p_0, p(t)) \neq (0, 0)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.
2. $u^*(t)$ maximiza la función $H(x^*(t), u, p(t), t)$ para $u \in U$, es decir, $H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) \geq H(x^*(t), u(t), p(t), t)\ \forall u(t) \in U$.
3. Exceptuando en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$, se cumple que $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$ con $\frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p(t), t)$.
4. O bien $p_0 = 1$ o bien $p_0 = 0$.

Finalmente, a cada condición final (i), (ii) ó (iii), le corresponde una condición de transversalidad:

- Caso (i): $p(t_1)$ libre.
- Caso (ii): $p(t_1) \geq 0$ alcanzándose la igualdad cuando $x^*(t_1) > x_1$.
- Caso (iii): $p(t_1) = 0$.

Demostración. Ver el segundo capítulo de *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, L.S. Pontryagin o el segundo capítulo de *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Wendell H. Fleming y Raymond W. Rishel.

2.4 El principio del máximo multidimensional

En esta sección proporcionaremos el resultado homólogo al de la sección 2.3 pero esta vez considerando las funciones de estado y de control de múltiples variables, es decir con $n > 1$ y $r > 1$.

Como ahora tendremos n restricciones en forma de ecuaciones diferenciales, definiremos la función Hamiltoniana, $H(x, u, p, t)$, para este problema de la siguiente manera:

$$H(x, u, p, t) := p_0 f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(x, u, t) = p_0 f_0(x, u, t) + p(t) \cdot f(x, u, t),$$

donde $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, $f(x, u, t) = (f_1(x, u, t), \ldots, f_n(x, u, t))$ y $\cdot$ denota el producto escalar.

2.4.1 Condición suficiente de Arrow

Teorema 11. Sean $f_i : \mathbb{R}^n$ x U x $[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, con U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, $n + 1$ funciones diferenciables en todo su dominio. Consideremos el problema de hallar una función de control continua a trozos $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ y su camino asociado continuo y diferenciable a trozos $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ definidas en un intervalo fijo $[t_0, t_1]$ que nos maximice la integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), t) dt,$$

satisfaciendo las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \end{cases}$$

las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_i^0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, siendo $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ prefijado, las siguientes condiciones finales:

- $x_i(t_1) = x_i^1$ para $i \in \{1, \dots, l\}$, con x_i^1 fijo,
- $x_i(t_1) \geq x_i^1$ para $i \in \{l+1, \dots, m\}$, con x_i^1 fijo,
- $x_i(t_1)$ libre para $i \in \{m+1, \dots, n\}$,

y la restricción sobre la variable de control $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U$. Sea, ahora, $(x^*(t), u^*(t))$ una pareja admisible al problema propuesto. Supongamos que $p_0 = 1$ y que existe una función continua $p(t)$ y continuamente diferenciable a trozos tal que satisface las siguientes condiciones de transversalidad:

- $p_i(t_1)$ libre para $i \in \{1, \dots, l\}$,
- $p_i(t_1) \geq 0$ ($= 0$ si $x_i^*(t_1) > x_i^1$) para $i \in \{l+1, \dots, m\}$,
- $p_i(t_1) = 0$ para $i \in \{m+1, \dots, n\}$,

donde cada una de ellas se corresponde con su respectiva condición final de $x(t)$ en t_1. Supongamos, además, que también se satisfacen las siguientes hipótesis:

- Exceptuando en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$, se cumple que $\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}$ con $\frac{\partial H^*}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t), p(t), t)$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.
- $u^*(t)$ maximiza la función $H(x^*(t), u, p(t), t)$ para $u \in U$, es decir, $H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) \geq H(x^*(t), u(t), p(t), t)\ \forall u(t) \in U$.

Entonces, si se cumple que

$$\widehat{H}(x, p(t), t) := \max_{u \in U} H(x, u, p(t), t),$$

existe y es cóncava en x para todo t, $(x^*(t), u^*(t))$ será solución a nuestro problema de optimización.

2.4.2 Condición necesaria

Teorema 12. Sean $f_i : \mathbb{R}^n$ x U x $[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, con U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, $i \in \{0, \dots, n\}$, $n+1$ funciones diferenciables en todo su dominio. Supongamos que nos proponemos solucionar el problema de encontrar una función de control continua a trozos $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ y su camino asociado continuo y diferenciable a trozos $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ definidas en un intervalo fijo $[t_0, t_1]$ que nos maximice la integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t)dt,$$

satisfaciendo las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \end{cases}$$

las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_i^0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, siendo $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ prefijado, las siguientes condiciones finales:

- $x_i(t_1) = x_i^1$ para $i \in \{1, \dots, l\}$, con x_i^1 fijo,
- $x_i(t_1) \geq x_i^1$ para $i \in \{l+1, \dots, m\}$, con x_i^1 fijo,
- $x_i(t_1)$ libre para $i \in \{m+1, \dots, n\}$,

y, por último, la restricción sobre la variable de control $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U$. Entonces, si $u^*(t)$ es una función de control que soluciona nuestro problema y $x^*(t)$ es su camino óptimo asociado existirá una constante p_0 y un conjunto de funciones continuas y diferenciables con derivadas continuas a trozos $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ tal que:

1. $(p_0, p_1(t), \dots, p_n(t)) \neq (0, 0, \dots, 0)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.
2. $u^*(t)$ maximiza la función $H(x^*(t), u, p(t), t)$ para $u \in U$, es decir, $H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) \geq H(x^*(t), u(t), p(t), t)$ $\forall u(t) \in U$.
3. Exceptuando en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$, se cumple que $\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}$ con $\frac{\partial H^*}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t), p(t), t)$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.
4. O bien $p_0 = 1$ o bien $p_0 = 0$.

Y, finalmente, se satisfacen las siguientes condiciones de transversalidad siguientes:

- $p_i(t_1)$ libre para $i \in \{1, \dots, l\}$,
- $p(t_1) \geq 0$ alcanzándose la igualdad cuando $x_i^*(t_1) > x^1$ para $i \in \{l+1, \dots, m\}$,
- $p_i(t_1) = 0$ para $i \in \{m+1, \dots, n\}$,

donde cada una de ellas se corresponde con su respectiva condición final de $x(t)$ en t_1.

Nota 8. Si invertimos las desigualdades impuestas sobre $x(t)$ en las condiciones finales, el resultado sigue siendo válido invirtiendo también las desigualdades sobre $p(t)$ en las condiciones de transversalidad.

2.5 El cálculo variacional y el principio del máximo

Es natural considerar la teoría del control óptimo como una extensión de la teoría del cálculo de variaciones. En esta sección, mostraremos cómo un problema típico del cálculo variacional multidimensional (como el estudiado en la sección 1.7 del primer capítulo) puede ser formulado como un problema de control óptimo y veremos a qué conclusiones nos lleva el aplicarle el teorema del principio del máximo.

Consideremos el problema:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x_1}, \dots, \dot{x_n}) dt,$$

tal que $x_i(t_0) = x_i^0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y sujeto a las condiciones finales que mencionábamos en el teorema 6 de la sección 1.7. Ahora, haciendo que las variables $\dot{x_1}, \dots, \dot{x_n}$ actúen como funciones de control, el problema se convierte fácilmente en uno de los problemas que se estudia en este capítulo. Por tanto, el problema variacional inicial es equivalente al siguiente problema de control:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, t) dt,$$

tal que $x_i(t_0) = x_i^0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, con $\dot{x_1} = u_1, \dots, \dot{x_n} = u_n$ y las mismas condiciones finales que las anteriores. Como $\dot{x_1}, \dots, \dot{x_n}$ no tienen restricciones, en este caso $U = \mathbb{R}^n$ y asumiendo que $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tienen derivadas continuas a trozos, entonces $u_1(t), \dots, u_n(t)$, por definición, son continuas a trozos, condición necesaria para poder aplicar el teorema del principio del máximo. El Hamiltoniano asociado a este problema es el siguiente:

$$H = p_0 F(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, t) + \sum_{i=1}^{n} p_i u_i.$$

Ahora, por el teorema del principio del máximo, H, como función de $u_1, \dots, u_n$, ha de tener un máximo en el control óptimo. Además, por ser H diferenciable y $U = \mathbb{R}^n$, tendremos que:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = p_0 \frac{\partial F}{\partial u_i} + p_i = 0, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}.$$

El principio del máximo nos dice, también, que p_0 y las funciones adjuntas no pueden ser 0 a la vez para ningún t. Ahora, por la ecuación que acabamos de deducir, si se diese el caso de $p_0 = 0$ tendríamos que $p_i = 0$ para todo i, cosa que nos llevaría a una contradicción. Por tanto, $p_0 \neq 0$ y, por el cuarto punto del teorema del principio del máximo, $p_0 = 1$. Las ecuaciones diferenciales que han de satisfacer las funciones adjuntas serán las siguientes:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -p_0 \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Diferenciando, ahora, $\frac{\partial H}{\partial u_i}$ respecto a t, tendremos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(p_0 \frac{\partial F}{\partial u_i} + p_i\right) = \frac{d}{dt}\left(p_0 \frac{\partial F}{\partial u_i}\right) + \dot{p}_i = 0.$$

Y sustituyendo en la expresión de $\dot{p}_i$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \;\; \forall\, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Que son, precisamente, las ecuaciones de Euler del problema variacional considerado al inicio de la sección. Además, las condiciones de transversalidad que nos proporciona el teorema del principio del máximo coinciden con las que obteníamos con el teorema 6 de la sección 1.7. Por tanto, tratando el problema como uno de control óptimo y aplicándole el principio del máximo de Pontryagin llegamos a los mismos resultados que tratándolo con la teoría clásica de variaciones.

Teorema 13. Consideremos el problema estudiado por el teorema 12. Entonces, si $u(t) = (\dot{x_1}(t), \dots, \dot{x_n}(t))$ y $x(t) = (x_1, \dots, x_n)$ son el control óptimo y su camino asociado óptimo, respectivamente, $x(t)$ deberá satisfacer, necesáriamente, la ecuación de Euler. $\square$

2.6 El Hamiltoniano en la mecánica clásica

Para concluir el capítulo, introduciremos brevemente algunas nociones de mecánica Hamiltoniana que nos ayudarán a conocer los orígenes de su función homónima utilizada en la teoría del control óptimo. Para ello, necesitaremos presentar préviamente los fundamentos en los que se basa la mecánica de Lagrange y así ver como ha ido evolucionando nuestro enfoque de la mecánica con el paso del tiempo.

La mecánica Lagrangiana se basa en unas ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de cualquier cuerpo y que dependen de las coordenadas generalizadas $q = (q_1, \ldots, q_n)$ del cuerpo y de sus velocidades $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$. Estas ecuaciones se construyen a partir de una función Lagrangiana $L = T - V$, donde T es la energía cinética del sistema y V la potencial, y coinciden con las ecuaciones de Euler deducidas en nuestro primer capítulo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial q_i} = 0.$$

La mecánica Hamiltoniana se basa en unas ecuaciones diferenciales del movimiento que escribiremos en función de una H que conoceremos como función Hamiltoniana. A diferencia de las ecuaciones de Euler, estas ecuaciones diferenciales serán de primer orden, cosa que se conseguirá sustituyendo las variables de velocidades generalizadas por otras variables que conoceremos como momentos conjugados. Así, a cada velocidad le corresponde un momento conjugado definido de la siguiente manera: $p_i := \frac{\partial L}{\partial q_i}$. De esta manera, definiremos el Hamiltoniano o función Hamiltoniana de la siguiente manera:

$$H(q, p, t) := \sum_{i}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t).$$

Finalmente, diferenciando la expresión de H, teniendo en cuenta la definición de p_i y las ecuaciones de Euler de la mecánica Lagrangiana se pueden deducir las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de cualquier cuerpo según la mecánica Hamiltoniana:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \ , \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \ , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Se observa, pues, que la primera de las tres ecuaciones diferenciales deducidas coincide con el tercer punto del teorema del principio del máximo de Pontryagin y ahí radican sus orígenes y el uso de la función Hamiltoniana en la misma teoría.

Capítulo 3. Teoría del control óptimo estocástico

En este capítulo intentaremos extender algunos de los resultados estudiados en el apartado anterior para el caso estocástico. Comenzaremos introduciendo algunos conceptos iniciales necesarios que nos ayudaran a entender el marco teórico en que trabajaremos. Seguidamente, daremos el resultado homólogo a la ya estudiada condición suficiente de Arrow para el caso estocástico y, finalmente, expondremos una aplicación financiera real en la que podremos ver cómo se utiliza el teorema ya mencionado.

3.1 Conceptos introductorios del cálculo estocástico

Definición. Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con Ω el espacio muestral, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre Ω y P una medida de probabilidad sobre Ω. Diremos que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ es una filtración de $\mathcal{F}$ si es una sucesión creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$. El espacio $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ se dice que es un espacio filtrado.

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ una filtración de la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Diremos que el proceso estocástico definido por una sucesión de variables aleatorias $X = (X_n)_{n\geq 0}$ es adaptado si X_n es $\mathcal{F}_n$-medible para todo $n \geq 0$.

Definición. Sea $(B_t)_{0\leq t<\infty}$ un proceso estocástico que toma valores reales sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Diremos que $(B_t)_{0\leq t<\infty}$ es un movimiento Browniano si satisface las tres condiciones siguientes:

- $B_0 = 0$.
- Si $\omega \in \Omega$, la función $t \longrightarrow B_t(\omega)$ es continua $P - c.s.$.
- Los incrementos $B_t - B_s$ son independientes y siguen una distribución normal de esperanza 0 y varianza $t - s$, $N(0, t - s)$, para cualquier $0 \leq s < t$.

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ una filtración de la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Sea $(B_t)_{0\leq t<\infty}$ un movimiento Browniano y $(X_t)_{0\leq t<\infty}$ un proceso estocástico adaptado tal que $E\left[\int_0^T X_s^2 ds\right] < \infty$. Conoceremos como integrales de Itô al siguiente tipo de integrales:

$$\int_0^T X_s dB_s := \lim_P \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ una filtración de la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado, diremos que $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô si, para todo t, podemos expresar X_t como la suma de una integral respecto a un movimiento Browniano y una integral respecto al tiempo, es decir,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_0^t \mu_s ds.$$

Observemos que el segundo sumando es una integral de Itô.

Nota 9. Mediante un proceso formal de derivación, la expresión integral para que $(X_t)_{t\geq 0}$ sea un proceso de Itô la podemos indicar más brevemente de la siguiente manera:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Ahora, enunciaremos y demostraremos dos lemas que serán imprescindibles en la demostración del resultado principal del capítulo, que veremos en la sección siguiente.

Lema 5 (Lema de Itô). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ una filtración de la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Itô satisfaciendo la siguiente ecuación:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

con $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano, $\mu_t \in \mathbb{R}$ y $\sigma_t \in \mathbb{R}$. Además, sea $f(t,x)$ una función cualquiera de dos variables reales tal que es C^1 respecto a t y C^2 respecto a x, entonces se ha de satisfacer que:

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dB_t.$$

Demostración. Desarrollando la serie de Taylor de la función $f(x,t)$ en x y t, obtenemos que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}dx^2 + R,$$

donde R es el término complementario de Lagrange. Imponiendo que se cumpla la ecuación diferencial del proceso de Itô, $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$, conseguimos que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t dt + \sigma_t dB_t) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_t^2 dt^2 + 2\mu_t\sigma_t dt dB_t + \sigma_t^2 dB^2) + R.$$

Pasando al límite $dt \longrightarrow 0$, los términos dt^2, $dtdB_t$ y R tenderán a 0. En cambio, dB^2 no lo hace, sino que $dB^2 \longrightarrow dt$. Así, si prescindimos de los términos con dt^2, $dtdB_t$ y R, imponemos que $dB^2 \longrightarrow dt$ y manipulamos algebraicamente, conseguimos que:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma_t\frac{\partial f}{\partial x}dB_t. \ \square$$

Lema 6 (Integración por partes). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ una filtración de la σ-álgebra F. Sean $(X(t))$ e $(Y(t))$ con $t \geq 0$ dos procesos de Itô tales que:

$$dX(t) = b_X(t,w)dt + \sigma_X(t,w)dB_t, \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$
$$dY(t) = b_Y(t,w)dt + \sigma_Y(t,w)dB_t, \quad Y(0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

donde b_X, b_Y, σ_X y σ_Y toman valores reales. Entonces, se cumplirá que:

$$X(t)Y(t) = x_0 y_0 + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \int_0^t \sigma_X(s)\sigma_Y(s)ds.$$

Demostración. Ver el corolario 2.3.5 de *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*, Dieter Sondermann.

3.2 El principio del máximo estocástico

Sea $X(t) = X^{(u)}(t)$ un proceso estocástico de Itô tal que satisface la siguiente ecuación:

$$dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB(t),$$

donde $u(t)$ será un proceso estocástico del que dependerá el comportamiento de $X(t)$ y que conoceremos como proceso de control. Supondremos que $u(t) = u(t,w) \in U \subset \mathbb{R}$, con U un conjunto cerrado. Asumiremos, también, que u es adaptado y continuo y que la ecuación diferencial indicada tiene una única solución $X^{(u)}(t)$, $t \in [0,T]$. Este tipo de procesos de control los llamaremos controles admisibles y denotaremos al conjunto que forman todos ellos por A.

Definamos, ahora, $J(u)$ de la siguiente manera:

$$J(u) := E\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right],$$

donde $u \in A$, $f : [0,T] \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } U \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función C^1, $T < \infty$ un instante de tiempo prefijado y

$$E\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right] < \infty \quad \forall u \in A.$$

Consideremos el problema de encontrar un $u^* \in A$ tal que:

$$J(u^*) = \sup_{u \in A} J(u).$$

Para abordarlo, necesitaremos la definición homóloga a la del Hamiltoniano determinista pero para el caso actual, el estocástico.

<u>Definición.</u> Dado el problema que acabamos de exponer, conoceremos como su Hamiltoniano asociado a la siguiente función $H : [0,T] \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } U \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$H(t, x, u, p, q) := f(t, x, u) + b(t, x, u)p + \sigma(t, x, u)q.$$

Y asumamos, a partir de ahora, que H es diferenciable respecto x. Supongamos, además, que $p(t)$ y $q(t)$ toman valores reales y satisfacen las siguientes ecuaciones, que conoceremos como ecuaciones adjuntas:

$$dp(t) = -\frac{\partial H(t, X(t), u(t), p(t), q(t))}{\partial x}dt + q(t)dB(t),\ t < T,$$

$$p(T) = \frac{\partial g(X(T))}{\partial x}.$$

A continuación, proporcionaremos una extensión del teorema 9 que nos dará una condición suficiente para que un proceso admisible u y su proceso de estado asociado $X^{(u)}$ sean una solución a nuestro problema, es decir, que maximicen $J(u)$.

<u>Teorema 14.</u> Sea $u^* \in A$ y X^* su correspondiente solución, es decir, $X^* = X^{(u^*)}$ y supongamos que exista una solución $(p^*(t), q^*(t))$ de las correspondientes ecuaciones adjuntas:

$$dp(t) = -\frac{\partial H(t, X^*(t), u^*(t), p(t), q(t))}{\partial x}dt + q(t)dB(t),\ t < T,$$

$$p(T) = \frac{\partial g(X^*(T))}{\partial x},$$

tal que satisfaga que

$$E\left[\int_0^T (X^*(t) - X^{(u)}(t))^2(q(t))^2 dt\right] < \infty \ \ \forall u \in A,$$

y que

$$E\left[\int_0^T (p^*(t))^2(\sigma(t, X^{(u)}(t), u(t)))^2 dt\right] < \infty \ \ \forall u \in A.$$

Además, supongamos que

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t)) = \sup_{v \in U} H(t, x^*(t), v, p^*(t), q^*(t)), \quad \forall t,$$

que $g(x)$ es una función cóncava en x y que

$$\widehat{H}(x) := \max_{v \in U} H(t, x, v, p^*(t), q^*(t)),$$

existe y es una función cóncava en x para todo $t \in [0, T]$. Entonces, se puede afirmar que u^* es un proceso de control óptimo que soluciona el problema planteado.

Demostración. Sea $u \in A$ un proceso de control admisible cualquiera y sea $X(t) = X^{(u)}(t)$ su correspondiente proceso de estado. Entonces, por definición de $J(u)$, tendremos que:

$$J(u^*) - J(u) = E\left[\int_0^T (f(t, X^*(t), u^*(t)) - f(t, X(t), u(t)))dt + g(X^*(T)) - g(X(T))\right].$$

Ahora, como g es una función cóncava e imponiendo la segunda ecuación adjunta, se dará que:

$$E\left[g(X^*(T)) - g(X(T))\right] \geq E\left[(X^*(T) - X(T))\frac{\partial g(X^*(T))}{\partial x}\right] = E\left[(X^*(T) - X(T))p^*(T)\right].$$

Utilizando, ahora,la otra ecuación adjunta y el lema de integración por partes enunciado en la sección anterior, obtenemos:

$$E\left[(X^*(T) - X(T))p^*(T)\right] = E\left[\int_0^T (X^*(t) - X(t))dp^*(t) + \int_0^T p^*(t)(dX^*(t) - dX(t))\right.$$

$$+\int_0^T (\sigma(t, X^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, X(t), u(t)))q^*(t)dt]$$

$$= E\left[\int_0^T (X^*(t) - X(t))\left(-\frac{\partial H(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t))}{\partial x}\right) dt\right.$$

$$+\int_0^T p^*(t)(b(t, X^*(t), u^*(t)) - b(t, X(t), u(t)))dt$$

$$+\int_0^T (\sigma(t, X^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, X(t), u(t)))q^*(t)dt],$$

donde en la última equivalencia hemos usado que $E\left[\int_0^T (\sigma(t, X^*(t), u(t)) - \sigma(t, X(t), u(t)))\, dB(t)\right] = 0$ por ser $\int_0^T \sigma(t, X(t), u(t))dB(t)$ una martingala. Ahora, utilizando la definición de H,

$$E\left[\int_0^T (f(t, X^*(t), u^*(t)) - f(t, X(t), u(t)))dt\right] = E\left[\int_0^T (H(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t))\right.$$

$$-H(t, X(t), u(t), p^*(t), q^*(t)))dt - \int_0^T (b(t, X^*(t), u^*(t)) - b(t, X(t), u(t)))p^* dt$$

$$-\int_0^T (\sigma(t, X^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, X(t), u(t)))q^*(t)dt].$$

De esta manera, sustituyendo las dos expresiones deducidas en el desarrollo de $J(u^*) - J(u)$, vemos que:

$$J(u^*) - J(u) = E\left[\int_0^T (f(t, X^*(t), u^*(t)) - f(t, X(t), u(t)))dt + g(X^*(T)) - g(X(T))\right]$$

$$= E\left[\int_0^T (f(t, X^*(t), u^*(t)) - f(t, X(t), u(t)))dt\right] + E\left[g(X^*(T)) - g(X(T))\right]$$

$$\geq E\left[\int_0^T (H(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t)) - H(t, X(t), u(t), p^*(t), q^*(t))\right.$$

$$-(X^*(t) - X(t))\frac{\partial H(t, X^*(t), u^*(t), p^*(t), q^*(t))}{\partial x})dt].$$

Ahora, como $\widehat{H}(x)$ tiene que ser una función cóncava, el término de la derecha de la desigualdad ha de ser mayor o igual a 0. Finalmente,

$$J(u^*) - J(u) \geq 0 \Longleftrightarrow J(u^*) \geq J(u)$$

y entonces, podemos concluir que, efectivamente, u^* es un proceso de control óptimo que soluciona el problema planteado. $\square$

3.3 Aplicación financiera

Consideremos un mercado financiero con dos posibilidades de inversión, una sin riesgo y otra con riesgo, cuyos precios $S_0(t), S_1(t)$, respectivamente, en el instante $t \in [0,T]$ vienen dados por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$dS_0(t) = \rho_t S_0(t)dt \ , \ S_0(0) = 1,$$

$$dS_1(t) = S_1(t)(\mu_t dt + \sigma_t dB(t)) \ , \ S_1(0) > 0,$$

donde $\rho_t > 0$, $\mu_t \geq -1$ y $\sigma_t \geq -1$ son funciones deterministas acotadas prefijadas.

Un portfolio en este mercado consistirá en un proceso continuo y adaptado bidimensional $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$ que nos dirá el número de activos sin riesgo y con riesgo, respectivamente, que tendremos en cada instante de tiempo t. El correspondiente proceso de riqueza, $X(t) = X^{\theta}(t)$, se define por:

$$X(t) = \theta_0(t)S_0(t) + \theta_1(t)S_1(t) \ , \ t \in [0,T].$$

Diremos que el portfolio θ es autofinanciado si:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \theta_0(s)dS_0(s) + \int_0^t \theta_1(s)dS_1(s),$$

o, equivalentemente, si:

$$dX(t) = \theta_0(t)dS_0(t) + \theta_1(t)dS_1(t).$$

Alternativamente, podemos expresar el portfolio en términos de cantidades $\omega_0(t)$ y $\omega_1(t)$ invertidas en los activos sin y con riesgo, respectivamente, definidas por:

$$\omega_i(t) = \theta_i(t)S_i(t), \ i \in 0, 1.$$

Pongamos ahora $u(t) = \omega_1(t)$. Así, $\omega_0(t) = X(t) - u(t)$ y la ecuación diferencial de $X(t)$ quedará de la siguiente manera:

$$dX(t) = [\rho_t X(t) + (\mu_t - \rho_t)u(t)]\, dt + \sigma_t u(t)dB(t).$$

Diremos que $u(t)$ es admisible y escribiremos $u(t) \in A$ si la ecuación anterior tiene una solución única $X(t) = X^{(u)}(t)$ tal que $E\left[(X^{(u)}(T))^2\right] < \infty$.

Se propone el problema de encontrar $u(t)$ que minimice

$$Var\,[X(T)] := E\left[(X(T) - E\,[X(T)])^2\right],$$

bajo la condición que

$$E\,[X(T)] = a,$$

donde a es una constante prefijada. Por el método de los multiplicadores de Lagrange, se puede reducir el problema a minimizar, libre de restricciones, la función siguiente:

$$E\left[(X(T)-a)^2\right].$$

Pero, para poder utilizar la teoría expuesta en la sección anterior, consideraremos el problema equivalente de hallar $u(t)$ que maximice $-\frac{1}{2}(X^{(u)}(T)-a)^2$, es decir:

$$\sup_{u\in A} E\left[-\frac{1}{2}(X^{(u)}(T)-a)^2\right].$$

En este caso, el Hamiltoniano tomaría la siguiente forma:

$$H(t,x,u,p,q)=(\rho_t x+(\mu_t-\rho_t)u)p+\sigma_t uq.$$

Y, así, las ecuaciones adjuntas serían:

$$dp(t)=-\rho_t p(t)dt+q(t)dB(t)\ ,\ t<T,$$

$$p(T)=-(X(T)-a).$$

Probemos una solución $p(t)$ de la forma $p(t)=\phi_t X(t)+\psi_t$, con ϕ_t y ψ_t funciones deterministas C^1. Sustituyendo en las ecuaciones adjuntas y usando el desarrollo de $dX(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} dp(t) &= \phi_t\left[(\rho_t X(t)+(\mu_t-\rho_t)u(t))dt+\sigma_t u(t)dB(t)\right]+X(t)\phi_t' dt+\psi_t' dt \\ &= \left[\phi_t\rho_t X(t)+\phi_t(\mu_t-\rho_t)u(t)+X(t)\phi_t'+\psi_t'\right]dt+\phi_t\sigma_t u(t)dB(t). \end{aligned}$$

Y, comparando con las ecuaciones adjuntas, deducimos que:

$$\phi_t\rho_t X(t)+\phi_t(\mu_t-\rho_t)u(t)+X(t)\phi_t'+\psi_t'=-\rho_t(\phi_t X(t)+\psi_t),$$

$$q(t)=\phi_t\sigma_t u(t).$$

Supongamos ahora que $u^*\in A$ es un candidato a ser el proceso de control óptimo con sus correspondientes X^*, p^* y q^*. Entonces,

$$H(t,X^*(t),u,p^*(t),q^*(t))=\rho_t X^*(t)p^*(t)+u\left[((\mu_t-\rho_t)p^*(t)+\sigma_t q^*(t)\right].$$

Como la expresión de H es lineal en u y lo que estamos buscando es un extremo, es natural suponer que el coeficiente de u se anule, es decir,

$$(\mu_t-\rho_t)p^*(t)+\sigma_t q^*(t)=0.$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión equivalente a $q(t)$ antes obtenida, $q^*(t)=\phi_t\sigma_t u^*(t)$, conseguimos que

$$u^*(t)=\frac{(\rho_t-\mu_t)p^*(t)}{\sigma_t^2\phi_t}=\frac{(\rho_t-\mu_t)(\phi_t x^*(t)+\psi_t)}{\sigma_t^2\phi_t}.$$

Por otro lado, de la ecuación $\phi_t\rho_t X(t)+\phi_t(\mu_t-\rho_t)u(t)+X(t)\phi'_t+\psi'_t=-\rho_t(\phi_t X(t)+\psi_t)$, deducimos que:

$$u^*(t)=\frac{(\phi_t\rho_t+\phi'_t)x^*(t)+\rho_t(\phi_t x^*(t)+\psi_t)+\psi'_t}{\phi_t(\rho_t-\mu_t)}.$$

Y combinando las dos expresiones que hemos obtenido de $u^*(t)$, conseguimos las ecuaciones:

$$\begin{cases} (\rho_t-\mu_t)^2\phi_t-[2\rho_t\phi_t+\phi'_t]\sigma_t^2=0, & \phi_T=-1, \\ (\rho_t-\mu_t)^2\psi_t-[\rho_t\psi_t+\psi'_t]\sigma_t^2=0, & \psi_T=a. \end{cases}$$

Resolviendolas, obtenemos que:

$$\phi_t=-exp\left(\int_t^T\left(\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}-2\rho_s\right)ds\right)\ ,\ 0\le t\le T,$$

$$\psi_t=aexp\left(\int_t^T\left(\frac{(\rho_s-\mu_s)^2}{\sigma_s^2}-\rho_s\right)ds\right)\ ,\ 0\le t\le T.$$

Con esta elección de ϕ_t y ψ_t, los procesos

$$p^*(t)=\phi_t X^*(t)+\psi_t\ ,\ q^*(t)=\phi_t\sigma_t u^*(t),$$

resuelven las ecuaciones adjuntas y satisfacen todas las otras condiciones del teorema 14 del principio del máximo para el caso estocástico. Podemos concluir, entonces, que $u^*(t)$ dado por

$$u^*(t,x)=\frac{(\rho_t-\mu_t)(\phi_t x+\psi_t)}{\phi_t\sigma_t^2},$$

es un proceso de control óptimo al problema planteado.

Conclusiones

Después de cinco meses de esfuerzo y trabajo, considero que la elección del tema de estudio ha sido la idónea. Fueron muchos los temas que barajábamos al inicio del año y le dimos muchas vueltas al asunto antes de decidirnos por éste, pero estoy completamente seguro de que escogimos el adecuado. Puesto que este año he estado cursando el minor en economía, quería focalizar el estudio en algún tema que se pudiese aplicar a los conocimientos adquiridos en estas asignaturas optativas y, como se ha podido observar en los ejemplos presentados, con éste ha sido posible.

Valoro muy positivamente el tiempo invertido y el empeño dedicado para sacar adelante este proyecto. Considero que, más allá de la teoría matemática, he aprendido muchas cosas. De entre ellas, la más importante quizás sea que he podido vivir en primera persona y así aprender en qué consiste y todo lo que conlleva la elaboración de un texto de carácter científico. Además, me ha ayudado a consolidar y a ampliar muchos de los conceptos vistos en la asignatura de *Modelización* de tercero de carrera y, aunque brevemente, también me ha permitido introducirme al cálculo estocástico de Itô, tema que desconocía por completo antes de realizar el trabajo.

Agradecimientos

No me gustaría dar por concluido este trabajo sin antes dar un sincero agradecimiento a mi tutor, José Manuel Corcuera Valverde. Gracias por su continua predisposición y por toda la ayuda que me ha brindado desde el primer día que le pedí que me dirigiese este estudio.

Bibliografía

[1] A. Seierstad, K, Sydsæter. *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, 1987.

[2] W. H. Fleming, R. W. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, 1975.

[3] L. S. Pontryagin. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, 1962.

[4] J. L. Troutman. *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer, 1983.

[5] B. Øksendal, A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer, 2005.

[6] D. Sondermann. *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*, Springer, 2006.

[7] Gonzalo Galiano. *Introducción al Cálculo Variacional*, Universidad de Oviedo, 2003.

[8] H. Goldstein. *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1922.